DEKOMPOSISI DIGRAF CAYLEY DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

OLEH
MUHAMMAD AMIRUDDIN LATHIF
NIM. 12610005

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

DEKOMPOSISI DIGRAF CAYLEY DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Muhammad Amiruddin Lathif
NIM. 12610005

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG

2019

DEKOMPOSISI DIGRAF CAYLEY DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Oleh
Muhammad Amiruddin Lathif
NIM. 12610005

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 14 Maret 2019

Pembimbing I	Pembimbing II
Evawati Alisah, M.Pd	Abdul Aziz, M.Si
NIP. 19720604 199903 2 001	NIP. 19760318 200604 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

DEKOMPOSISI DIGRAF CAYLEY DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Oleh
Muhammad Amiruddin Lathif
NIM. 12610005

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 04 April 2019

Penguji Utama	:	H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd	....
Ketua Penguji	:	Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D	....
Sekretaris Penguji	:	Evawati Alisah, M.Pd	....
Anggota Penguji	:	Abdul Aziz, M.Si	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Muhammad Amiruddin Lathif

NIM : 12610005

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Dekomposisi Digraf *Cayley* dari Grup Dihedral

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 14 Maret 2019
Yang membuat pernyataan

METERAI TEMPEL
TGL. 20
AB925AFF707534798
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Muhammad Amiruddin Lathif
NIM. 12610005

MOTO

"لاَ حَوْلَ وَلاَ قُوَّةَ إِلاَّ بِاللهِ"

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan kepada abi Muhammad Shobari yang telah mengajarkan kegigihan, kemandirian serta tanggung jawab. Ummi Aliatul Munafaqoh yang tiada pernah berhenti mendoakan dan mencurahkan seluruh kasih sayang serta mengajarkan kedisiplinan, ketaatan dan memberikan motivasi kepada penulis. Istri tercinta Ayu Nia Maulidiyah yang dengan senang hati memberikan semangat serta dukungan kepada penulis dalam menyelesaikan tugas akhir. Adik-adik Muhammad Karim Amrulloh, Muhammad Abdulloh Munir, Muhammad Abdul Hamid Abror dan juga Muhammad Nafi'uddin Lathif yang selalu memberikan dukungan serta semangat kepada penulis.

KATA PENGANTAR

Puji syukur alhamdulillah, atas segala ridla dan rahmat Allah Swt yang telah menciptakan makhluk-Nya dengan bentuk yang paling sempurna yakni dengan akal untuk bertafakkur, dengan lisan untuk berargumen, dan dengan hati untuk menimbang baik-buruknya perbuatan manusia yang disertai pedoman hidup yaitu al-Quran dan as-Sunnah serta segala karunia-Nya yang berupa rahmat, hidayah dan maunah-Nya. Tidak lupa pula penulis haturkan shalawat serta salam kepada junjungan nabi agung Muhammad Saw insan paripurna yang menjadi tauladan umat Islam hingga akhir zaman.

Rasa syukur tak terhingga atas maunah dan ridla Allah Swt akhirnya penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini dengan judul "Dekomposisi Digraf *Cayley* dari Grup Dihedral" sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis tak pernah lepas akan jasa para pembimbing serta arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih penulis ucapkan sebesar-besarnya kepada semua pihak yang telah membantu dalam menyelesaikan penyusunan skripsi ini karena tanpa bantuannya penulis tidak akan dapat menyelesaikannya. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Evawati Alisah, M.Pd, selaku dosen pembimbing matematika yang telah memberikan arahan, nasihat, dan motivasi kepada penulis.
5. Abdul Aziz, M.Si, selaku dosen pembimbing keagamaan yang telah memberikan bimbingan kepada penulis.
6. Segenap dosen di Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah memberikan ilmu dan bimbingan selama belajar.
7. Kedua orang tua, istri dan seluruh keluarga penulis yang tak pernah lelah memberikan semangat dan mendoakan keberhasilan penulis.
8. Seluruh teman-teman mahasiswa di Jurusan Matematika angkatan 2012 yang telah memberikan motivasi dan pengalaman berharganya kepada penulis.
9. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik secara moril maupun materiil.

Semoga Allah Swt melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua dan semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan pembaca.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 14 Maret 2019

Penulis

DAFTAR ISI

BAB III PEMBAHASAN

BAB IV PENUTUP

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

ABSTRAK

Lathif, Muhammad Amiruddin. 2019. **Dekomposisi Digraf *Cayley* dari Grup Dihedral.** Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, Pembimbing: (I) Evawati Alisah, M.Pd (II) Abdul Aziz, M.Si

Kata Kunci: Dekomposisi, Digraf *Cayley*, Grup dihedral.

Suatu Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari obyek-obyek yang disebut sebagai titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di V yang disebut sebagai sisi. Teori graf merupakan salah satu cabang dari disiplin ilmu matematika yang sangat bermanfaat dalam pengembangan berbagai disiplin ilmu dan dapat diaplikasikan ke berbagai bidang, salah satunya struktur aljabar. Dalam penelitian ini akan diuraikan salah satu terapan dari kajian teori graf dalam struktur aljabar, yaitu dekomposisi pada digraf *Cayley*. Digraf *Cayley* merupakan suatu digraf dimana titiknya merupakan unsur dari suatu grup G dan terdapat sisi yang menghubungkan dua buah titik g dan h jika dan hanya jika $h = sg$, untuk $s \in S$. Dengan menggunakan metode kajian literatur, sehingga $\mathcal{D}(\mathrm{D}_{2n}, S)$ adalah digraf atau graf *Cayley* dari grup D_{2n}, dengan $n \geq 3$. $\mathcal{D}(\mathrm{D}_{2n}, S)$ dapat didekomposisi menjadi $(n-1)\ C_n$ dan $n\ C_2$ untuk n adalah bilangan ganjil.

Pada penelitian selanjutnya diharapkan yang akan diperlakukan dekomposisi adalah jenis graf tertentu dengan komplesitas titik dan garis yang lebih bervariasi misalnya graf cattepillar, graf fan, graf berlian dan lain sebagainya sehingga akan mendapatkan pola yang berbeda.

ABSTRACT

Lathif, Muhammad Amiruddin. 2019. **Decomposition of *Cayley* Digraph of Dihedral Group.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisor: (I) Evawati Alisah, M.Pd (II) Abdul Aziz, M.Si

Keyword: Decomposition, *Cayley* digraph, Dihedral group.

A graph G is a set of pairs (V, E) with V is a non-empty and finite set of objects called vertices and E is a set (maybe empty) of non-sequential pairs of different vertices in V which are called edge. Graph theory is one branch of mathematical disciplines that is very useful in the development of various scientific disciplines and can be applied to various fields, one of which is algebraic structure. In this research, one of the applied studies of graph theory in algebraic structures will be described, namely the decomposition of Cayley digraph. Digraf Cayley is a digraph where the point is an element of a group G and there is a side that connects two points g and h if and only if $h = sg$, for $s \in S$. Using the literature review method, so that $\mathcal{D}(\mathrm{D}_{2\mathrm{n}})$ is a digraph or *cayley graph* of group D_{2n}, with $n \geq 3$. $\mathcal{D}(\mathrm{D}_{2\mathrm{n}})$ can be decomposed into $(n-1)$ C_n and n C_2 for n is an odd.

In the next study, it is expected that decomposition will be treated as a certain type of graph with a more varied complex of points and lines, for example the cattepillar graph, fan graph, diamond graph, etc. so that they will get a different pattern.

ملخص

لطيف، محمد اميرالدين. 2019. *Decomposition Cayley Digraph* في زمرة زوجية. بحث جامعي. شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا. الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالنج.

المشرف: (١) ايفاواتي اليسا الماجستير (٢) عبد العزيز الماجستير.

الكلمات المفتاحية: زمرة زوجية, *Cayley digraph, decomposition*

مخطاط هي فرع من فروع العلوم الرياضية التي تعتبر مفيدة جدا في تطوير مختلف التخصصات العلمية ويمكن تطبيقها على مجالات مختلفة ، واحدة منها هي بنية جبرية. في هذا البحث ، سيتم وصف واحدة من الدراسات التطبيقية لنظرية الرسم البياني في الهياكل الجبرية ، وهي تحلل *Cayley digraph*. *Cayley digraph* هو *digraph* حيث الرأس هي عنصر من مجموعة G وهناك جانب يربط بين رأسين g و h إذا وفقط إذا $h = sg$ ، من أجل $s \in S$ باستخدام طريقة مراجعة الأدبيات ، بحيث يمكن تحليل *Cayley digraph* لمجموعة زمرة زوجية باستخدام الى C_n $(n-1)$ و n C_2 ل n رقم فردي.

في الدراسة التالية ، من المتوقع أن يكون التحلل نوعًا معينًا من مخطاط مع تعقيدات أكثر تنوعًا من الرؤوس والخطوط مثل مخطاط *cattepillar* ، مخطاط للمعجبين ، مخطاط الماسي وما إلى ذلك حتى تحصل على نمط مختلف.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika adalah salah satu disiplin ilmu yang mendasari berbagai macam disiplin ilmu lain dan selalu menghadapi berbagai persoalan yang semakin kompleks sehingga sangat penting untuk dikaji. Dalam kehidupan sehari-hari, banyak permasalahan yang memerlukan penyelesaian. Dengan bantuan matematika permasalahan tersebut lebih mudah dipahami dan dipecahkan, atau bahkan dapat ditunjukkan bahwa suatu permasalahan tidak dapat dipecahkan. Untuk keperluan tersebut, perlu dicari pokok permasalahannya dan dibuat rumusan atau model matematikanya (Purwanto, 1998:6).

Sumber studi matematika, sebagaimana sumber ilmu pengetahuan dalam Islam adalah tauhid, yaitu ke-Esa-an Allah. Akan tetapi al-Quran tidak mengangkat metode baru dalam masalah ini, melainkan telah menunjukkan tentang adanya eksistensi dari sesuatu yang ada di balik alam semesta itu sendiri. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi.

Dalam al-Quran surat al-Qamar ayat 49 disebutkan,

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ

Artinya: *"Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran." (al-Qamar: 49)*

Ayat tersebut menjelaskan bahwa semua yang ada di alam ini ada ukurannya, hitungannya, rumusnya, atau persamaannya. Ahli matematika atau fisika tidak membuat suatu rumus sedikitpun. Mereka hanya menemukan rumus atau persamaan (Abdussakir, 2007:80). Jadi matematika sebenarnya telah diciptakan sejak zaman dahulu, manusia hanya menyimbolkan fenomena-fenomena yang ada dalam kehidupan sehari-hari.

Teori graf merupakan salah satu cabang dari disiplin ilmu matematika yang sangat bermanfaat dalam pengembangan berbagai disiplin ilmu. Pada awalnya perkembangan teori graf tidak terlalu signifikan. Akan tetapi, sejak beberapa puluh tahun silam teori graf mengalami perkembangan yang begitu pesat. Hal ini disebabkan oleh aplikasi dari teori graf yang sangat luas. Teori graf dapat diaplikasikan ke dalam ilmu komputer, teknik, bisnis dan bahkan dalam ilmu sosial. Selain itu, teori graf juga dapat diaplikasikan ke dalam beberapa bidang dalam matematika, seperti geometri dan aljabar (Budayasa, 2007:1).

Terdapat kajian-kajian yang menarik di dalam teori graf, diantaranya adalah digraf dan dekomposisi. Suatu Digraf $E = (E^0, E^1, r, s)$ terdiri dari dua himpunan countable E^0, E^1 dan fungsi $r, s: E^1 \rightarrow E^0$. Unsur-unsur dari E^0 disebut titik dan unsur-unsur dari E^1 disebut sisi. Untuk setiap sisi e, $s(e)$ adalah sumber dari e dan $r(e)$ adalah range. Jika $s(e) = v$ dan $r(e) = w$, maka dapat dikatakan v memancarkan e dan w menerima e, atau bisa juga dikatakan e adalah sisi dari v ke w (Raeburn, 2005:5). Dekomposisi $\mathcal{D}$ pada graf G adalah koleksi $\{H_1, H_2, \dots., H_t\}$ pada subgraf tak kosong sedemikian hingga $H_i = G[E_i]$ untuk subset tak kosong E_i pada $E(G)$ dimana $\{E_1, E_2, \dots., E_t\}$ adalah partisi pada $E(G)$. Sehingga tidak ada subgrah H_i dalam suatu dekomposisi G yang mengandung titik terasing (*isolated vertices*) (Chartnand dan Lesniak, 1980:343).

Dalam penelitian ini akan diuraikan salah satu terapan dari kajian teori graf dalam struktur aljabar, yaitu dekomposisi pada digraf *Cayley*. Digraf *Cayley* merupakan suatu digraf dimana titiknya merupakan unsur dari suatu grup G dan terdapat sisi yang menghubungkan dua buah titik g dan h jika dan hanya jika $h = sg$, untuk $s \in S$ (Toomey, 2014:3).

Berdasarkan uraian di atas, maka penelitian ini mengkaji tentang digraf yang dibentuk dari grup, dengan judul penelitian "Dekomposisi Digraf *Cayley* dari Grup Dihedral".

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah pada penelitian ini adalah bagaimana dekomposisi digraf *Cayley* dari grup dihedral-$2n$?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan Penelitian adalah untuk mengetahui dan mendeskripsikan dekomposisi digraf *Cayley* dari grup dihedral-$2n$.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang terdapat dalam penelitian ini adalah sebagai bahan pembelajaran dan pengetahuan mengenai cara mendeskripsikan dekomposisi digraf *Cayley* dari grup dihedral-$2n$.

1.5 Metode Penelitian

Pada penelitian ini digunakan pendekatan kualitatif. Pendekatan kualitatif adalah suatu pendekatan penelitian yang cenderung pada gejala-gejala yang bersifat alamiah dimana sifatnya naturalistik dan mendasar atau bersifat kealamiahan dan tidak dapat dilakukan di laboratorium tetapi harus dikerjakan langsung dari lapangan (Nazir, 1986:159). Pendekatan kualitatif digunakan dalam penelitian ini, dikarenakan data yang digunakan berupa grup dihedral-2n, dengan $n = 3, 4, 5, 6$ dan pendeskripsian data ke dalam bentuk titik dan sisi yang menggambarkan dekomposisi pada digraf *Cayley* dari grup dihedral-2n dengan $n = 3, 4, 5, 6$.

Dalam penelitian kualitatif kajian teori digunakan sebagai kunci utama penelitian agar menghasilkan penelitian yang sesuai dengan fakta lapangan. Untuk itu jenis penelitian yang digunakan adalah metode kepustakaan (*library research*) yaitu salah satu jenis metode penelitian kualitatif yang lokasi atau tempat penelitiannya dilakukan di pustaka, dokumen, arsip, dan lain sebagainya. Dengan kata lain metode penelitian ini tidak harus terjun ke lapangan untuk melihat fakta yang ada di lapangan (Prastowo, 2011:190). Teknik analisis data yang digunakan penulis dalam penelitian ini meliputi langkah-langkah sebagai berikut:

1. Mengidentifikasi setiap unsur di grup dihedral-2n, yaitu D_6, D_8, D_{10}, dan D_{12}.
2. Menentukan tabel *Cayley* dari grup dihedral-2n, yaitu D_6, D_8, D_{10}, dan D_{12}.
3. Menggambar digraf *Cayley* dari grup dihedral-2n, yaitu D_6, D_8, D_{10}, dan D_{12}.
4. Menentukan dekomposisi pada digraf *Cayley* dari grup dihedral-2n, yaitu D_6, D_8, D_{10}, dan D_{12}.
5. Mengamati dan menentukan pola dekomposisi yang terbentuk dari digraf *Cayley* pada grup dihedral-2n, yaitu D_6, D_8, D_{10}, dan D_{12}.

6. Membuat konjektur tentang pola dekomposisi pada digraf *Cayley* dari grup dihedral-$2n$.
7. Membuktikan konjektur hingga diperoleh kebenaran pola dekomposisi pada digraf *Cayley* dari grup dihedral-$2n$.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika yang dipakai dalam tugas akhir ini adalah:

Bab I Pendahuluan

Menjelaskan secara umum mengenai latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian serta sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Membahas kajian teori penulis, mengkaji tentang konsep-konsep yang mendukung pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain membahas grup, subgrup, grup dihedral, graf, digraf, terhubung langsung dan terkait langsung, subgraf, dekomposisi pada graf, dan digraf *Cayley*.

Bab III Pembahasan

Menjelaskan tentang hasil penelitian dari rumusan masalah.

Bab IV Penutup

Merupakan penutup berisi kesimpulan dan saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dibahas materi tentang grup, subgrup, grup dihedral, graf, digraf, terhubung langsung dan terkait langsung, subgraf, dekomposisi pada graf, graf *Cayley* dan kajian keagamaan.

2.1 Grup

Raisinghania dan Anggarwal (1980:31) mengatakan bahwa suatu sistem aljabar $(G,*)$ dikatakan grup jika G himpunan tak kosong dan $*$ merupakan operasi biner di G yang memenuhi sifat-sifat berikut.

i. Operasi $*$ bersifat assosiatif

   $(a * b) * c = a * (b * c), \forall a, b, c \in G$

ii. G memiliki unsur identitas

   Suatu G dikatakan memiliki identitas jika terdapat unsur e di G sehingga

   $e * a = a * e = a, \forall a \in G$

iii. Setiap unsur di G memiliki invers

   $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e, \forall a \in G$

Contoh 2.1

$\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat. Operasi $+$ (penjumlahan) adalah grup karena memenuhi aksioma grup, yaitu:

1. Untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$ maka $(a + b) \in \mathbb{Z}$. Sehingga operasi $+$ adalah operasi biner pada $\mathbb{Z}$ atau dengan kata lain, operasi $+$ tertutup di $\mathbb{Z}$.

2. Untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}$ maka $a + (b + c) = (a + b) + c$. Sehingga $\mathbb{Z}$ dengan operasi $+$ (penjumlahan) memenuhi sifat assosiatif.
3. Terdapat unsur identitas yaitu $0 \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $a + 0 = 0 + a = a$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$.
4. Untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ terdapat a^{-1} yaitu $(-a) \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

   Unsur $(-a)$ adalah invers dari a.

2.2 Subgrup

Suatu himpunan H dikatakan subgrup dari grup $(G,*)$ jika H subset dari himpunan G serta sifat-sifat yang berlaku di grup juga berlaku di H atau H adalah grup (Raisinghania dan Anggarwal, 1980:165).

Contoh 2.2

Grup dengan operasi penjumlahan pada bilangan bulat adalah subgrup dari grup dengan operasi penjumlahan pada bilangan rasional.

2.3 Grup Dihedral

Grup dihedral-$2n$ adalah himpunan simetri-simetri dari segi-n beraturan, dinotasikan dengan D_{2n}, untuk setiap $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ dengan operasi komposisi " $\circ$ " yang memenuhi aksioma-aksioma grup (Dummit dan Foote, 1991:25).

Misalkan D_{2n} suatu grup yang didefinisikan oleh st untuk $s, t \in D_{2n}$ yang diperoleh dari simetri (simetri sebagai fungsi pada segi-n, sehingga st adalah fungsi komposisi). Jika s, t akibat permutasi titik berturut-turut σ, τ, maka st akibat dari $\sigma\tau$. Operasi biner pada D_{2n} adalah assosiatif karena fungsi komposisi merupakan fungsi assosiatif. Identitas dari D_{2n} adalah identitas dari simetri (yang meninggalkan semua titik tetap), dinotasikan dengan 1 dan invers dari $s \in D_{2n}$ adalah kebalikan semua putaran dari simetri s (jadi jika s akibat permutasi pada titik σ, s^{-1}akibat dari σ^{-1}) (Dummit dan Foote, 1991:24-25).

Grup dihedral akan digunakan secara ekstensif dalam seluruh teks maka perlu beberapa notasi dan beberapa hitungan yang dapat menyederhanakan perhitungan selanjutnya dan membantu mengamati D_{2n} sebagai grup abstrak, yaitu:

1. $1, r, r^2, \dots, r^{n-1}$
2. $|s| = 2$
3. $s \neq r^i$ untuk semua i
4. $sr^i \neq sr^j$ untuk semua $0 \leq i, j \leq n-1$ dengan $i \neq j$, jadi

$$D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$$

   yaitu setiap elemen dapat dituliskan secara tunggal dalam bentuk $s^k r^i$ untuk $k = 0$ atau $k = 1$ dan $0 \leq i \leq n-1$.

5. $sr^i = r^{-1}s$

(Dummit dan Foote, 1991:26).

Contoh 2.3

Grup dihedral-6 dengan operasi komposisi "∘" (D_6).

Unsur yang terdapat dalam grup dihedral-6 adalah $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$

Dengan menggunakan sifat-sifat grup dihedral, maka hasil operasi setiap unsur dengan unsur lainnya di grup dihedral-6 dapat disajikan dalam tabel berikut:

Tabel 2.1 Tabel Cayley dari Grup D_6

$\circ$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{r^2}$	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{sr}$	$\boldsymbol{sr^2}$
$\mathbf{1}$	1	r	r^2	s	sr	sr^2
$\boldsymbol{r}$	r	r^2	1	sr^2	s	sr
$\boldsymbol{r^2}$	r^2	1	r	sr	sr^2	s
$\boldsymbol{s}$	s	sr	sr^2	1	r	r^2
$\boldsymbol{sr}$	sr	sr^2	s	r^2	1	r
$\boldsymbol{sr^2}$	sr^2	s	sr	r	r^2	1

2.4 Graf

Suatu Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari obyek-obyek yang disebut sebagai titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di V yang disebut sebagai sisi. Himpunan titik di G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dinotasikan dengan $E(G)$. Sedangkan banyaknya unsur di V disebut order dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$ dan banyaknya unsur di E disebut size dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka order dan ukuran dari G tersebut cukup ditulis dengan p dan q (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

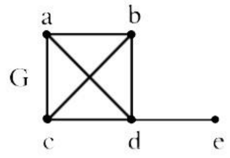
Contoh 2.4

Perhatikan graf G yang memuat himpunan titik V dan himpunan sisi E seperti berikut ini.

$$V = \{a, b, c, d, e\}$$

$$E = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, d), (d, e)\}$$

Graf G tersebut dapat digambar sebagai berikut:



Gambar 2.1 Graf G

Graf G mempunyai 5 titik sehingga order G adalah $p = 5$. Graf G mempunyai 7 sisi sehingga size graf G adalah $q = 7$.

Graf G dapat juga ditulis dengan

$V = \{a, b, c, d, e\}$

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$

dengan

$e_1 = (a, b)$

$e_2 = (a, c)$

$e_3 = (a, d)$

$e_4 = (b, c)$

$e_5 = (b, d)$

$e_6 = (c, d)$

$e_7 = (d, e)$

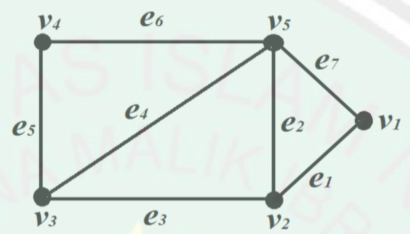
2.5 Digraf

Suatu Digraf $E = (E^0, E^1, r, s)$ terdiri dari dua himpunan countable E^0, E^1 dan fungsi $r, s: E^1 \to E^0$. Unsur-unsur dari E^0 disebut titik dan unsur-unsur dari E^1 disebut sisi. Untuk setiap sisi e, $s(e)$ adalah sumber dari e dan $r(e)$ adalah range. Jika $s(e) = v$ dan $r(e) = w$, maka dapat dikatakan v memancarkan e dan w menerima e, atau bisa juga dikatakan e adalah sisi dari v ke w (Raeburn, 2005:5).

2.6 Terhubung Langsung dan Terkait Langsung

Sisi $e = \{u, v\}$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = \{u, v\}$ adalah sisi di graf G, maka *u* dan *v* disebut keterhubungan titik (*adjacent vertices*), *u* dan *e* serta *v* dan *e* dikatakan terkait langsung (*incident*). Untuk selanjutnya, sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = uv$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Contoh 2.5



Gambar 2.2 Graf dengan 5 Titik dan 7 Sisi

Gambar 2.2 menunjukkan bahwa titik yang terhubung langsung adalah v_1 dan v_2, v_1 dan v_5, v_2 dan v_3, v_2 dan v_5, v_3 dan v_4, v_3 dan v_5, v_4 dan v_5. Sedangkan sisi e_1 terkait langsung dengan titik v_1 dan v_2, sisi e_2 terkait langsung dengan titik v_2 dan v_5, sisi e_3 terkait langsung dengan titik v_2 dan v_3, sisi e_4 terkait langsung dengan titik v_3 dan v_5, sisi e_5 terkait langsung dengan titik v_3 dan v_4, sisi e_6 terkait langsung dengan titik v_4 dan v_5, sisi e_6 terkait langsung dengan titik v_4 dan v_5.

2.7 Subgraf

Graf H disebut subgraf dari G jika himpunan titik di H adalah subset dari himpunan titik-titik di G dan himpunan sisi di H adalah subset dari himpunan sisi-sisi di G. Dapat ditulis $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Jika H adalah subgraf G, maka dapat ditulis $H \subseteq G$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:8).

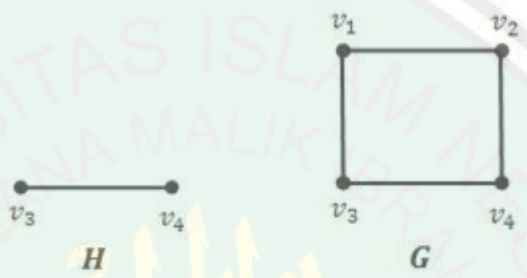
Contoh 2.6

Perhatikan graf G yang memuat himpunan titik V dan himpunan sisi E seperti berikut ini.

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$E(G) = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_4)\}$$

Graf tersebut dapat digambar sebagai berikut:



Gambar 2.3 Graf H dan Graf G

Gambar 2.3 menunjukkan bahwa graf H merupakan subgraf dari graf G, karena himpunan titik di H sama dengan himpunan titik di G atau $V(H) = V(G)$ dan himpunan sisi di H sama dengan himpunan sisi di G atau $E(H) \subset E(G)$.

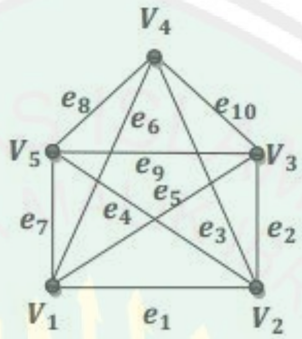
2.8 Dekomposisi pada Graf

Suatu dekomposisi $\mathcal{D}$ pada graf G adalah koleksi $\{H_1, H_2, \dots, H_t\}$ pada subgraf tak kosong sedemikian hingga $H_i = G[E_i]$ untuk subset tak kosong E_i pada $E(G)$ dimana $\{E_1, E_2, \dots, E_t\}$ adalah partisi pada $E(G)$. Sehingga tidak ada subgrah H_i dalam suatu dekomposisi G yang mengandung titik terasing (*isolated vertices*). Jika $\mathcal{D}$ sebuah dekomposisi pada G dapat dikatakan G *decomposed* subgraf $H_1, H_2, \dots, H_t$. Jika $\mathcal{D}$ adalah dekomposisi pada graf G dimana setiap subgraf H_1 adalah subgraf merentang (*spanning subgraph*) dari G, maka $\{H_1, H_2, \dots, H_t\}$ adalah faktorisasi dari G (Chartnand dan Lesniak, 1986:343).

Jika $\mathcal{D} = \{H_1, H_2, \dots, H_t\}$ adalah dekomposisi pada sebuah graf G sedemikian hingga $H_i \cong H$ untuk beberapa graf H, untuk setiap $i(1 \leq i \leq t)$ maka $\mathcal{D}$ adalah suatu dekomposisi H pada G (Chartnand dan Lesniak, 1986:343).

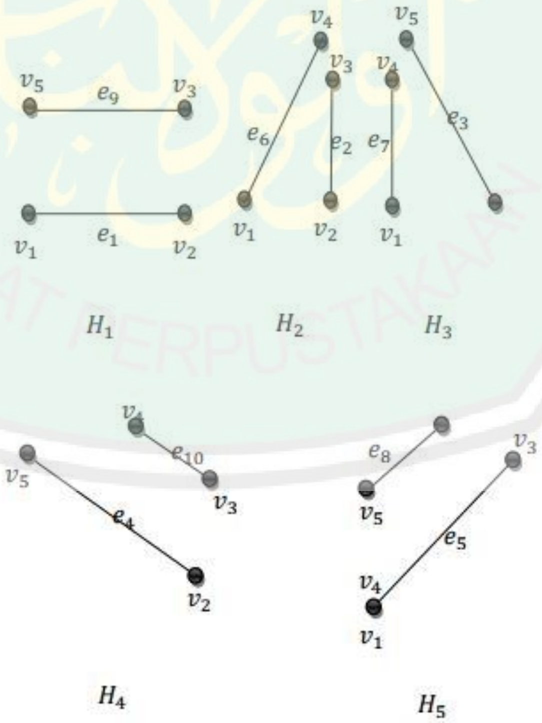
Contoh 2.7

Graf Komplit-5 (K_5)



Gambar 2.4 Graf Komplit-5

Partisi sisi-sisi dari graf komplit-5 (K_5) adalah sebagai berikut:



Gambar 2.5 Partisi Graf Komplit-5

2.9 Digraf Cayley

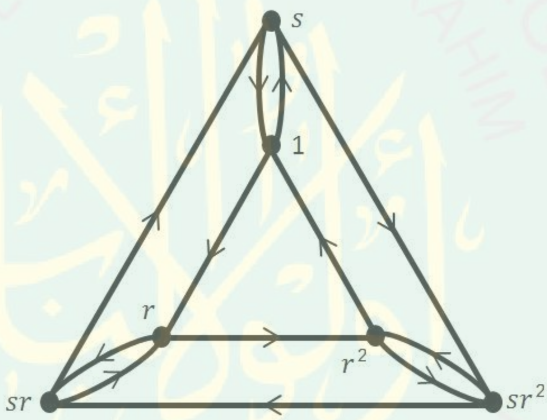
Misalkan G grup dan $S \subseteq G$, maka digraf *Cayley* $\mathcal{D}(\mathrm{G}, \mathrm{S})$ pada G dengan himpunan penghubung S didefinisikan:

1. Titik-titiknya merupakan unsur dari G
2. Terdapat sisi yang menghubungkan g dan h jika dan hanya jika $h = sg$, untuk $s \in S$

(Toomey, 2014:3)

Contoh 2.8

Grup $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$.



Gambar 2.6 Digraf Cayley dari Grup D_6 dengan pembangkit s dan r

2.10 Kajian Keagamaan

Secara umum beberapa konsep dari disiplin ilmu telah dijelaskan dalam al-Quran. Salah satunya adalah matematika. Konsep dari disiplin ilmu matematika serta berbagai cabangnya yang ada dalam al-Quran di antaranya adalah masalah graf. Teori graf yang menurut definisinya adalah himpunan tidak kosong yang memuat elemen-elemen yang disebut titik, dan suatu daftar pasangan tidak terurut elemen itu yang disebut sisi. Dalam teori Islam memiliki elemen-elemen meliputi pencipta (Allah) dan hamba-hambanya yang digambarkan oleh titik, sedangkan hubungan yang terjalin antara elemen-elemen tersebut digambarkan dengan sisi yang menghubungkan antara titik-titik tersebut. Jika dikaitkan dengan kehidupan nyata, maka banyaknya titik yang terhubung dalam suatu graf dapat diasumsikan sebagai banyaknya kejadian tertentu (Mujiwinarta, 2014:19).

Salah satu bentuk representasi graf adalah salat yang memiliki kedudukan penting dalam Islam dan merupakan pondasi yang kokoh bagi tegaknya agama Islam. Salat harus dilakukan pada waktunya, dimanapun, dan bagaimanapun keadaan seorang muslim yang mukalaf. Dalam kaitannya dengan salat, Allah Swt berfirman:

فَإِذَا قَضَيْتُمُ الصَّلَاةَ فَاذْكُرُوا اللَّهَ قِيَامًا وَقُعُودًا وَعَلَىٰ جُنُوبِكُمْ ۚ فَإِذَا اطْمَأْنَنْتُمْ فَأَقِيمُوا الصَّلَاةَ ۚ إِنَّ الصَّلَاةَ كَانَتْ عَلَى الْمُؤْمِنِينَ كِتَابًا مَوْقُوتًا

Artinya: *"Maka apabila kamu telah menyelesaikan salat(mu), ingatlah Allah di waktu berdiri, di waktu duduk dan di waktu berbaring. Kemudian apabila kamu telah merasa aman, maka dirikanlah salat itu (sebagaimana biasa). Sesungguhnya salat itu adalah fardhu yang ditentukan waktunya atas orang-orang yang beriman." (Q.S. an-Nisaa': 103)*

Dalam ayat tersebut dijelaskan bahwa waktu-waktu salat telah ditentukan waktunya dan telah menjadi suatu ketetapan, baik itu salat fardhu maupun salat sunnah. Salat lima waktu merupakan salat yang wajib ditunaikan setiap hari dan tidak boleh ditinggalkan. Waktu pelaksanaan suatu salat fardhu berbeda dengan pelaksanaan salat fardhu yang lain dan telah ditetapkan oleh Allah Swt. Akan tetapi kelima waktu salat tersebut saling mengikat dan tidak diperkenankan hanya melaksanakan sebagian salat saja (Mujiwinarta, 2014:20).

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan ditunjukkan masing-masing bentuk digraf *Cayley* dari grup dihedral-$2n$ (D_{2n}) beserta dekomposisinya. Grup dihedral-$2n$ (D_{2n}) dengan operasi komposisi "$\circ$" atau (D_{2n},$\circ$) adalah grup dimana $n \geq 3$.

Langkah-langkah yang akan dilakukan dalam pembahasan ini dimulai dari menentukan tabel *Cayley* dari grup dihedral-$2n$, menggambarkan digraf *Cayley* dari grup dihedral-$2n$, menentukan dekomposisi pada digraf *Cayley* dari grup dihedral-$2n$ lalu membuat konjektur dan membuktikannya.

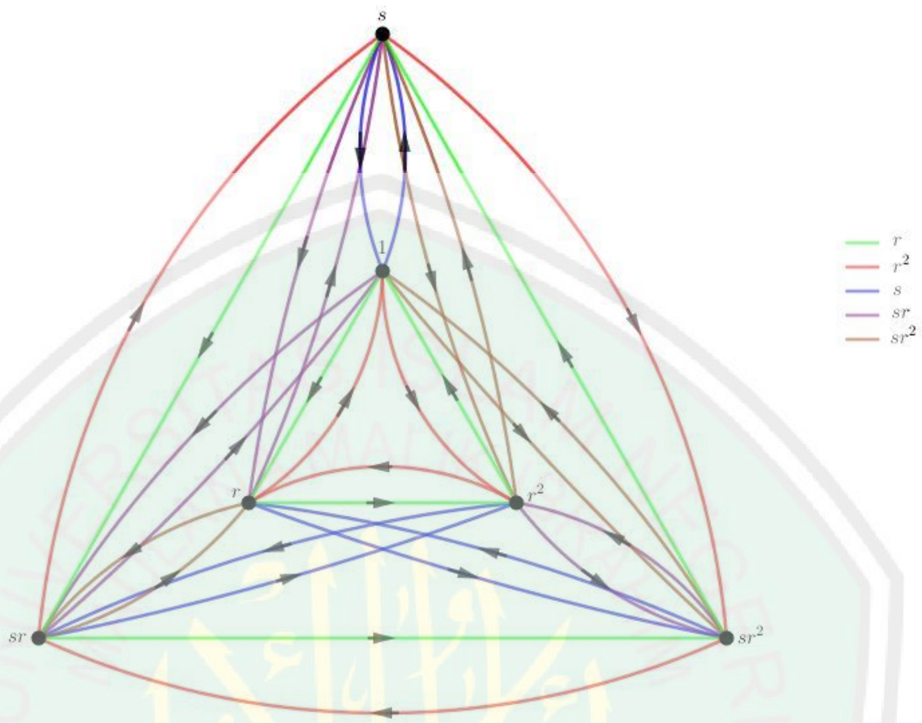
3.1 Grup Dihedral-6 (D_6)

Cara menggambar digraf *Cayley* dari grup dihedral-$2n$ dimana $n = 3$, maka terlebih dahulu diketahui elemen-elemen dari grup dihedral-6 (D_6) yaitu $\{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Setelah itu D_6 diberikan operasi komposisi "$\circ$" sehingga didapatkan tabel *Cayley* seperti berikut:

Tabel 3.1 Tabel Cayley dari Grup D_6

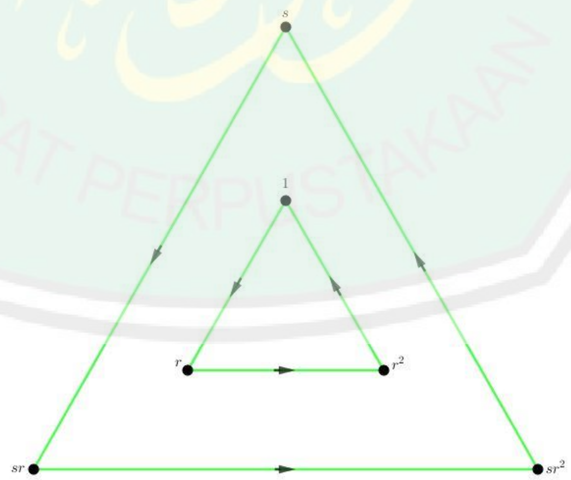
$\circ$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{r^2}$	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{sr}$	$\boldsymbol{sr^2}$
$\mathbf{1}$	1	r	r^2	s	sr	sr^2
$\boldsymbol{r}$	r	r^2	1	sr^2	s	sr
$\boldsymbol{r^2}$	r^2	1	r	sr	sr^2	s
$\boldsymbol{s}$	s	sr	sr^2	1	r	r^2
$\boldsymbol{sr}$	sr	sr^2	s	r^2	1	r
$\boldsymbol{sr^2}$	sr^2	s	sr	r	r^2	1

Selanjutnya dengan menggunakan tabel *Cayley* tersebut maka dapat diperoleh gambar digraf *Cayley* dari grup dihedral-6 (D_6) sebagai berikut:



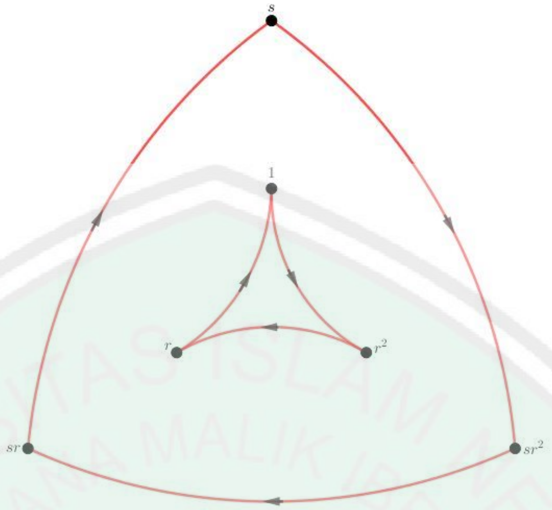
Gambar 3.1 Digraf Cayley dari Grup D_6

Kemudian dari gambar 3.1 dapat dibentuk dekomposisi sebagai berikut:



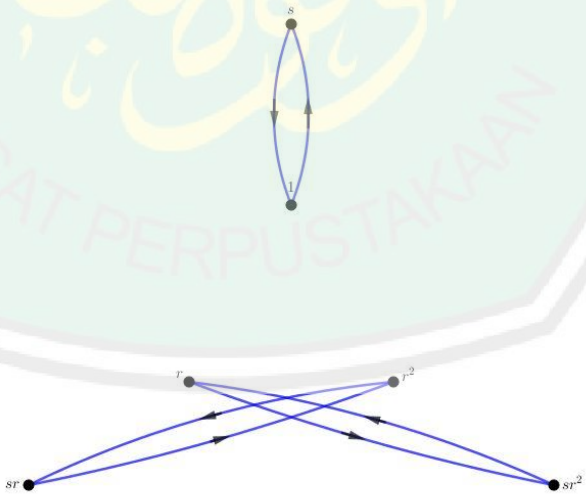
Gambar 3.2 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_6 dengan Operator r

Dari gambar 3.2 dapat diketahui bahwa dekomposisi digraf *Cayley* dengan operator r memiliki 2 komponen sikel $n = 3$ (C_3).

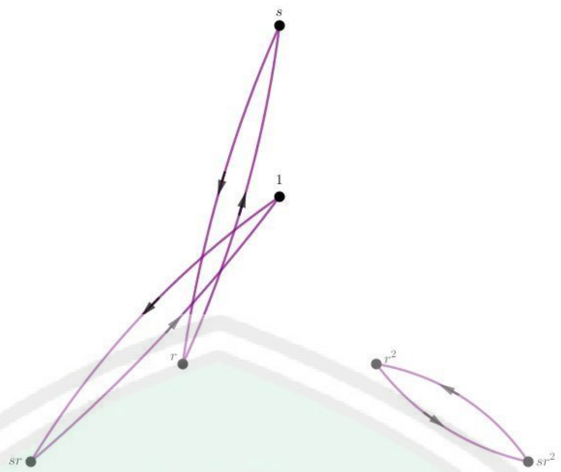


Gambar 3.3 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_6 dengan Operator r^2

Dari gambar 3.3 dapat diketahui bahwa dekomposisi digraf *Cayley* dengan operator r^2 juga memiliki 2 komponen sikel $n = 3$ (C_3) dengan arah yang berlawanan dari gambar 3.2.



Gambar 3.4 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_6 dengan Operator s



Gambar 3.5 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_6 dengan Operator sr

Gambar 3.6 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_6 dengan Operator sr^2

Sedangkan dari gambar 3.4, 3.5 dan 3.6 dapat diketahui bahwa dekomposisi digraf *Cayley* dengan operator s, sr dan sr^2 memiliki masing-masing n komponen sikel-2 (C_2) dimana $n = 3$.

Sehingga dari gambar dekomposisi digraf *Cayley* dari grup dihedral-6 (D_6) didapatkan 2 graf dekomposisi yang masing-masing memiliki 2 komponen graf sikel-n (C_n) dimana $n = 3$ dan 3 graf dekomposisi yang masing-masing memiliki n komponen graf sikel-2 (C_2).

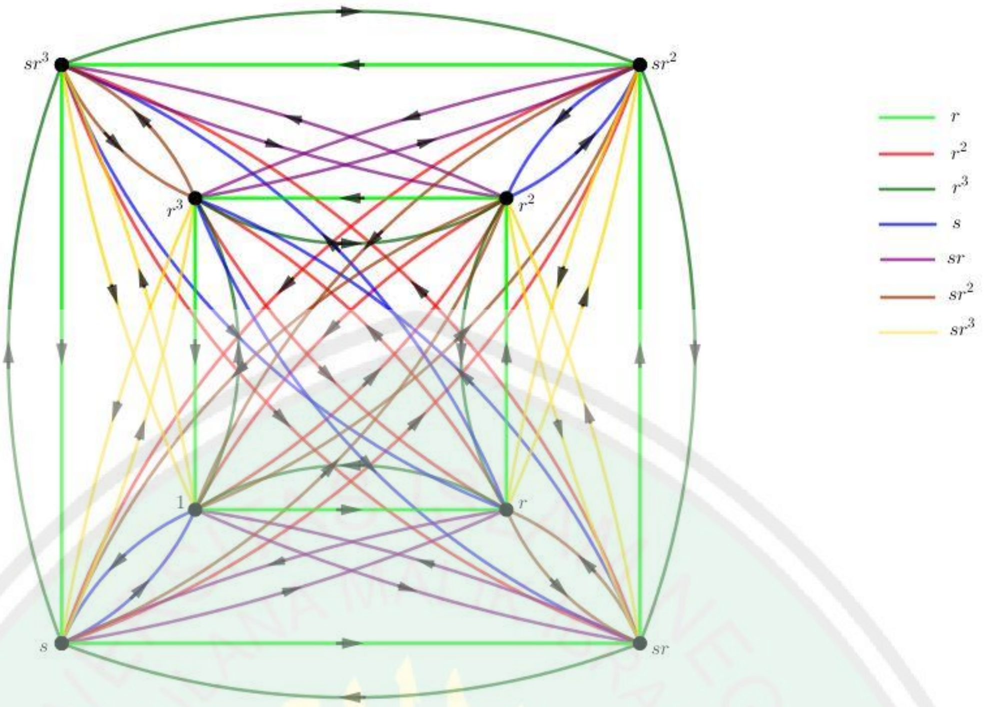
3.2 Grup Dihedral-8 (D_8)

Cara menggambar digraf *Cayley* dari grup dihedral-$2n$ dimana $n = 4$, maka terlebih dahulu diketahui elemen-elemen dari grup dihedral-8 $(D_8) = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$. Setelah itu D_8 diberikan operasi komposisi "∘" sehingga didapatkan tabel *Cayley* seperti berikut:

Tabel 3.2 Tabel Cayley dari Grup D_8

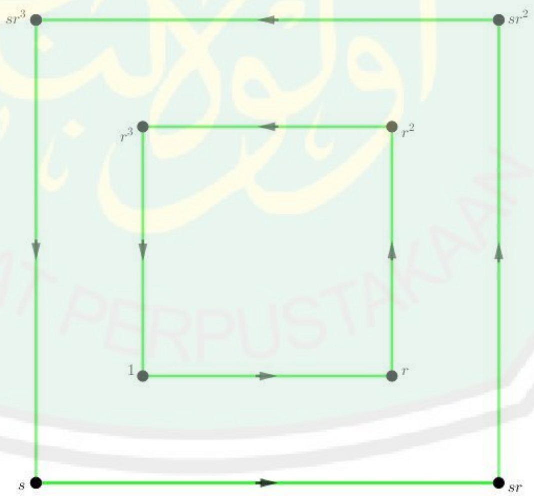
$\circ$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{r^2}$	$\boldsymbol{r^3}$	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{sr}$	$\boldsymbol{sr^2}$	$\boldsymbol{sr^3}$
$\mathbf{1}$	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
$\boldsymbol{r}$	r	r^2	r^3	1	sr^3	s	sr	sr^2
$\boldsymbol{r^2}$	r^2	r^3	1	r	sr^2	sr^3	s	sr
$\boldsymbol{r^3}$	r^3	1	r	r^2	sr	sr^2	sr^3	s
$\boldsymbol{s}$	s	sr	sr^2	sr^3	1	r	r^2	r^3
$\boldsymbol{sr}$	sr	sr^2	sr^3	s	r^3	1	r	r^2
$\boldsymbol{sr^2}$	sr^2	sr^3	s	sr	r^2	r^3	1	r
$\boldsymbol{sr^3}$	sr^3	s	sr	sr^2	r	r^2	r^3	1

Selanjutnya dengan menggunakan tabel *Cayley* tersebut maka dapat diperoleh gambar digraf *Cayley* dari grup dihedral-8 (D_8) sebagai berikut:



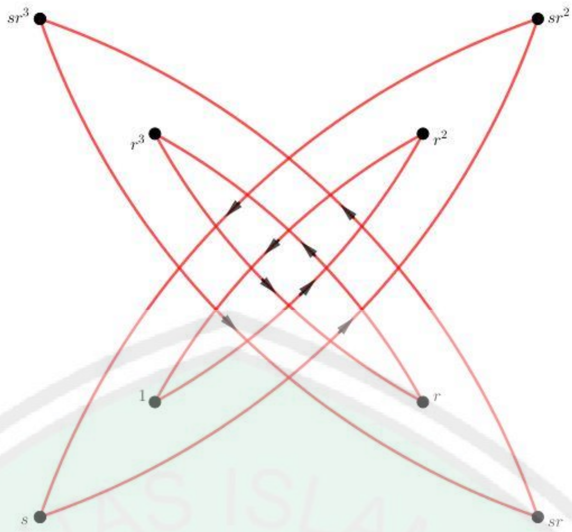
Gambar 3.7 Digraf Cayley dari Grup D_8

Kemudian dari gambar 3.7 dapat dibentuk dekomposisi sebagai berikut:



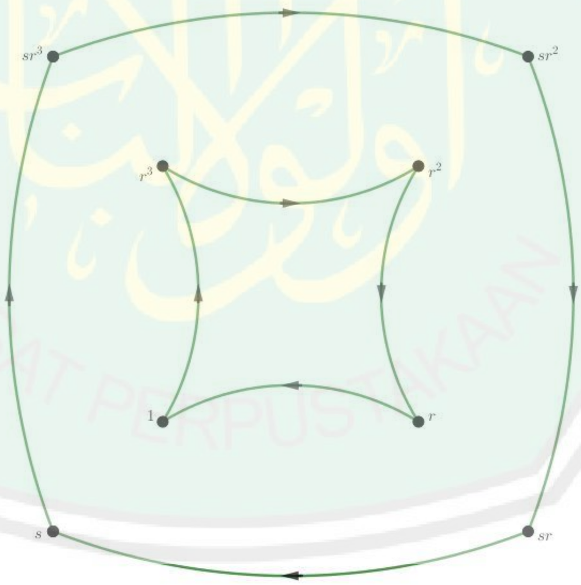
Gambar 3.8 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_8 dengan Operator r

Dari gambar 3.8 dapat diketahui bahwa dekomposisi digraf *Cayley* dengan operator r memiliki 2 komponen sikel $n = 4$ (C_4).



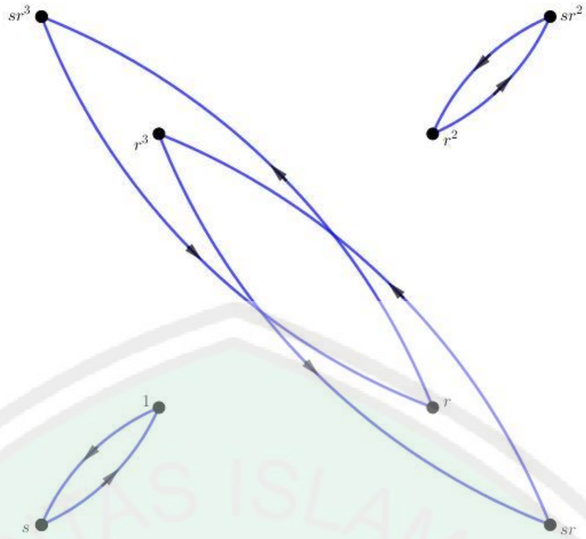
Gambar 3.9 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_8 dengan Operator r^2

Dari gambar 3.9 dapat diketahui bahwa dekomposisi digraf *Cayley* dengan operator r^2 memiliki n komponen sikel-2 (C_2).

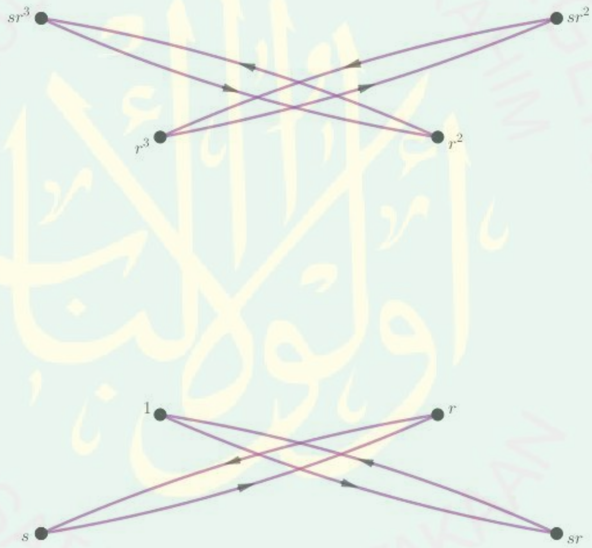


Gambar 3.10 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_8 dengan Operator r^3

Dari gambar 3.10 dapat diketahui bahwa dekomposisi digraf *Cayley* dengan operator r^3 juga memiliki 2 komponen sikel $n = 4$ (C_4) dengan arah yang berlawanan dari gambar 3.8.

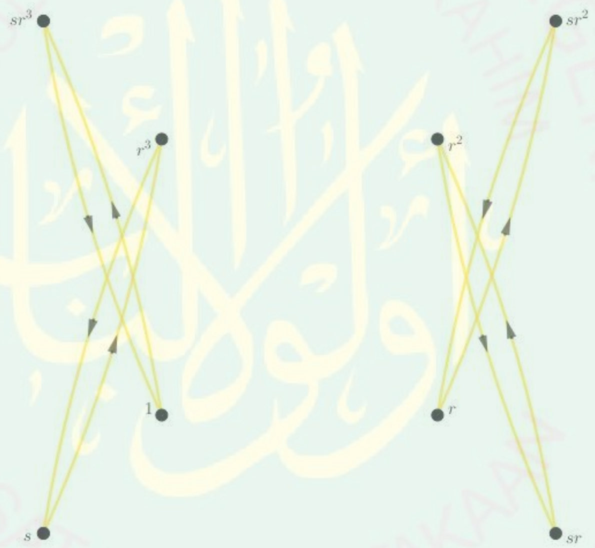


Gambar 3.11 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_8 dengan Operator s



Gambar 3.12 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_8 dengan Operator sr

Gambar 3.13 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_8 dengan Operator sr^2



Gambar 3.14 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_8 dengan Operator sr^3

Sedangkan dari gambar 3.11, 3.12, 3.13 dan 3.14 dapat diketahui bahwa dekomposisi digraf *Cayley* dengan operator s, sr, sr^2 dan sr^3 memiliki masing-masing n komponen sikel-2 (C_2) dimana $n = 4$.

Sehingga dari gambar dekomposisi digraf *Cayley* dari grup dihedral-8 (D_8) didapatkan 2 graf dekomposisi yang masing-masing memiliki 2 komponen graf sikel-n (C_n) dimana $n = 4$ dan 5 graf dekomposisi yang masing-masing memiliki n komponen graf sikel-2 (C_2).

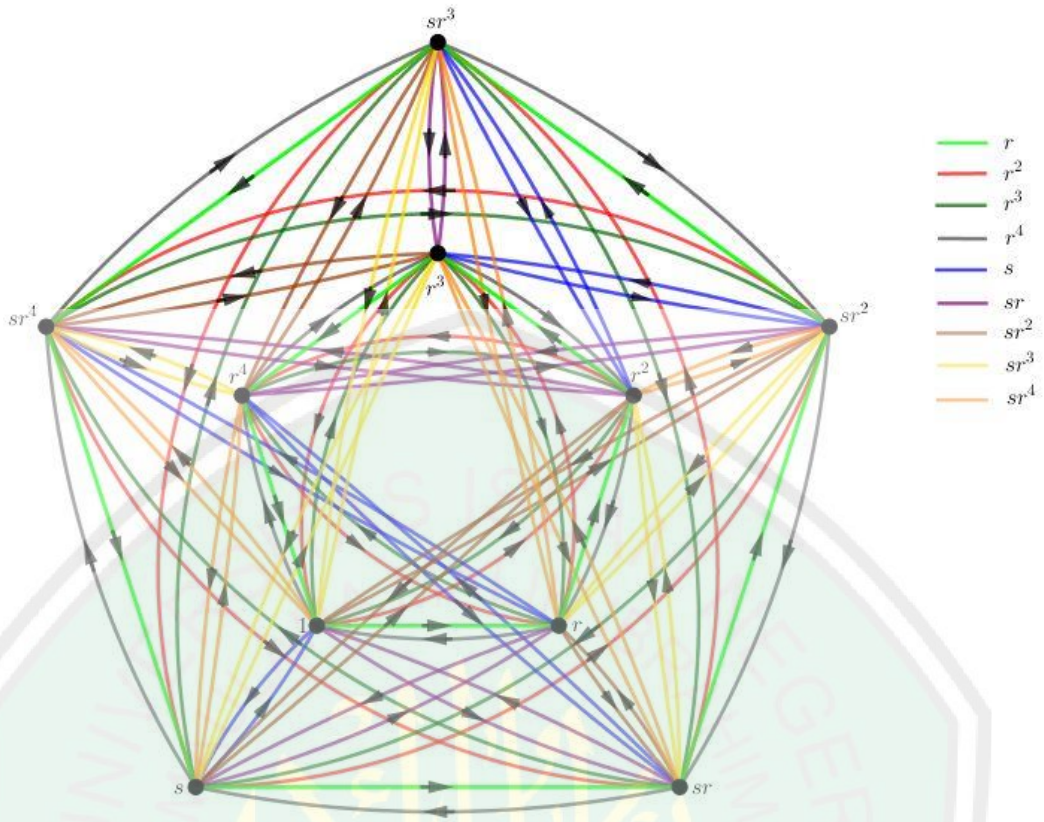
3.3 Grup Dihedral-10 (D_{10})

Cara menggambar digraf *Cayley* dari grup dihedral-$2n$ dimana $n = 5$, maka terlebih dahulu diketahui elemen-elemen dari grup dihedral-10 (D_{10}) yaitu $\{1, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$. Setelah itu D_{10} diberikan operasi komposisi "∘" sehingga didapatkan tabel *Cayley* seperti berikut:

Tabel 3.3 Tabel Cayley dari Grup D_{10}

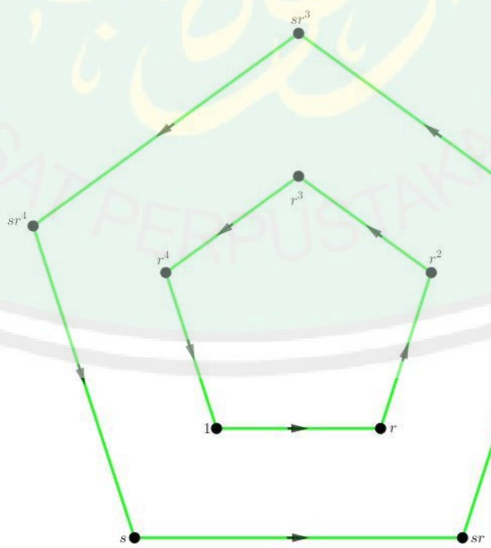
$\circ$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{r^2}$	$\boldsymbol{r^3}$	$\boldsymbol{r^4}$	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{sr}$	$\boldsymbol{sr^2}$	$\boldsymbol{sr^3}$	$\boldsymbol{sr^4}$
$\mathbf{1}$	1	r	r^2	r^3	r^4	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
$\boldsymbol{r}$	r	r^2	r^3	r^4	1	sr^4	s	sr	sr^2	sr^3
$\boldsymbol{r^2}$	r^2	r^3	r^4	1	r	sr^3	sr^4	s	sr	sr^2
$\boldsymbol{r^3}$	r^3	r^4	1	r	r^2	sr^2	sr^3	sr^4	s	sr
$\boldsymbol{r^4}$	r^4	1	r	r^2	r^3	sr	sr^2	sr^3	sr^4	s
$\boldsymbol{s}$	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	1	r	r^2	r^3	r^4
$\boldsymbol{sr}$	sr	sr^2	sr^3	sr^4	s	r^4	1	r	r^2	r^3
$\boldsymbol{sr^2}$	sr^2	sr^3	sr^4	s	sr	r^3	r^4	1	r	r^2
$\boldsymbol{sr^3}$	sr^3	sr^4	s	sr	sr^2	r^2	r^3	r^4	1	r
$\boldsymbol{sr^4}$	sr^4	s	sr	sr^2	sr^3	r	r^2	r^3	r^4	1

Selanjutnya dengan menggunakan tabel *Cayley* tersebut maka dapat diperoleh gambar digraf *Cayley* dari grup dihedral-10 (D_{10}) sebagai berikut:



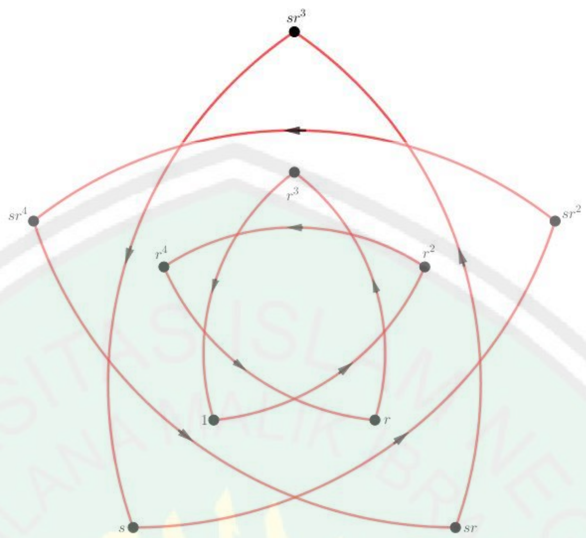
Gambar 3.15 Digraf Cayley dari Grup D_{10}

Kemudian dari gambar 3.15 dapat dibentuk dekomposisi sebagai berikut:



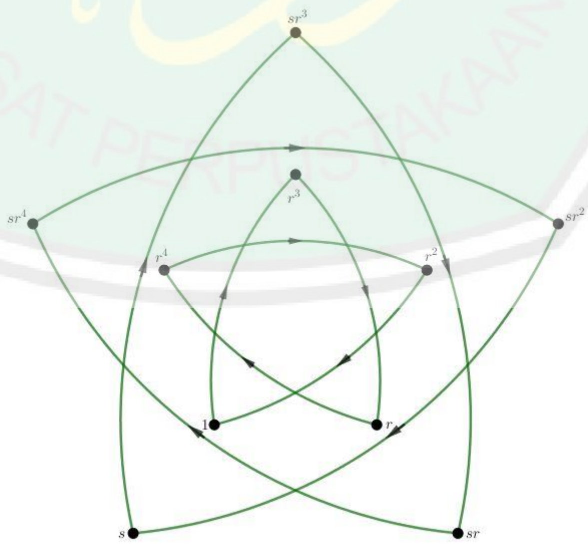
Gambar 3.16 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_{10} dengan Opertor r

Dari gambar 3.16 dapat diketahui bahwa dekomposisi digraf *Cayley* dengan operator r memiliki 2 komponen sikel $n = 5$ (C_5).



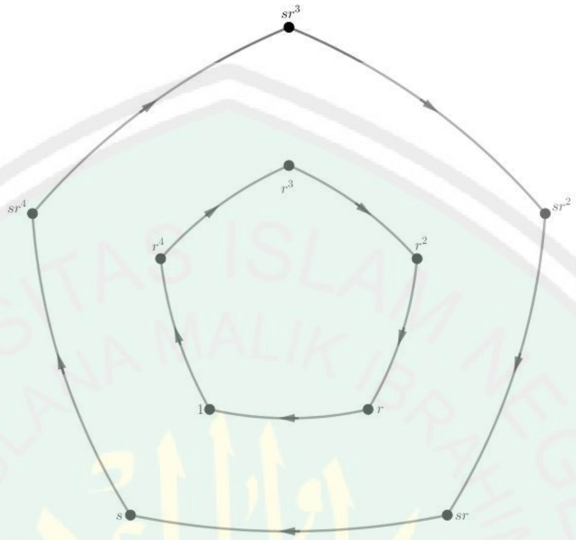
Gambar 3.17 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_{10} dengan Operator r^2

Dari gambar 3.17 dapat diketahui bahwa dekomposisi digraf *Cayley* dengan operator r^2 memiliki 2 komponen yang jika direntangkan membentuk sikel $n = 5$ (C_5).



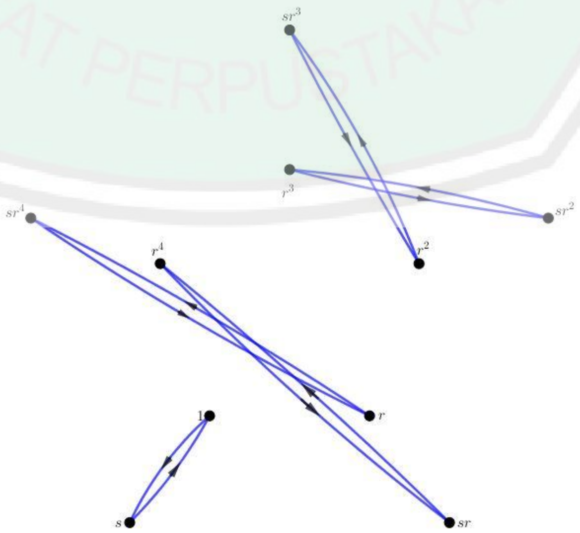
Gambar 3.18 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_{10} dengan Operator r^3

Dari gambar 3.18 dapat diketahui bahwa dekomposisi digraf *Cayley* dengan operator r^3 juga memiliki 2 komponen yang jika direntangkan membentuk sikel $n = 5$ (C_5) dengan arah yang berlawanan dari gambar 3.17.

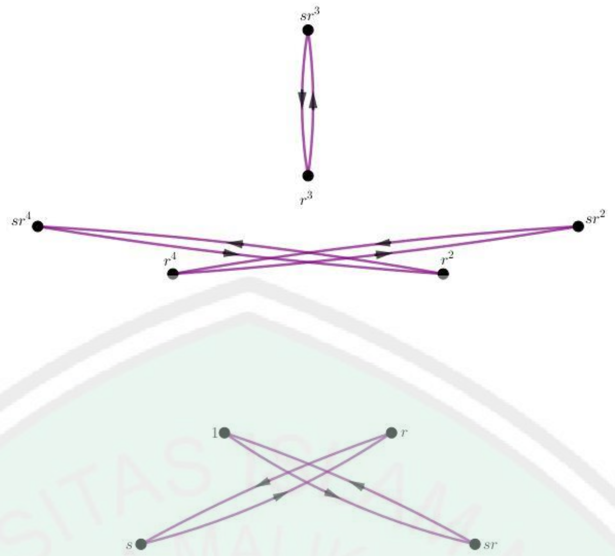


Gambar 3.19 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_{10} dengan Operator r^4

Dari gambar 3.19 dapat diketahui bahwa dekomposisi digraf *Cayley* dengan operator r^4 juga memiliki 2 komponen sikel $n = 5$ (C_5) dengan arah yang berlawanan dari gambar 3.16.

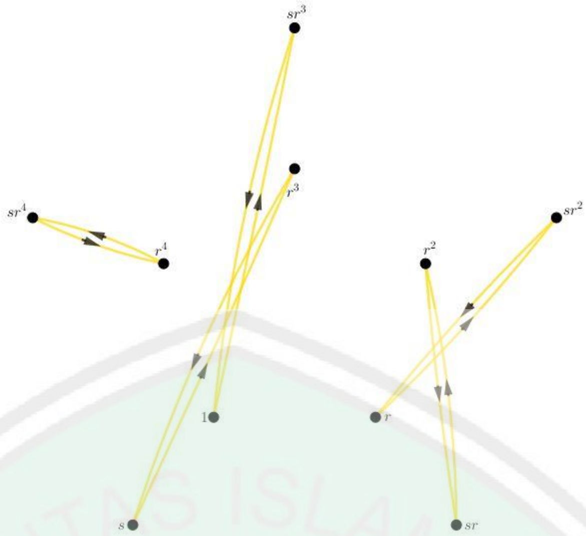


Gambar 3.20 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_{10} dengan Operator s



Gambar 3.21 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_{10} dengan Operator sr

Gambar 3.22 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_{10} dengan Operator sr^2



Gambar 3.23 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_{10} dengan Operator sr^3

Gambar 3.24 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_{10} dengan Operator sr^4

Sedangkan dari gambar 3.20, 3.21, 3.22, 3.23 dan 3.24 dapat diketahui bahwa dekomposisi digraf *Cayley* dengan operator s, sr, sr^2, sr^3 dan sr^4 memiliki masing-masing n komponen sikel-2 (C_2) dimana $n = 5$.

Sehingga dari gambar dekomposisi digraf *Cayley* dari grup dihedral-10 (D_{10}) didapatkan 4 graf dekomposisi yang masing-masing memiliki 2 komponen graf sikel-n (C_n) dimana $n = 5$ dan 5 graf dekomposisi yang masing-masing memiliki n komponen graf sikel-2 (C_2).

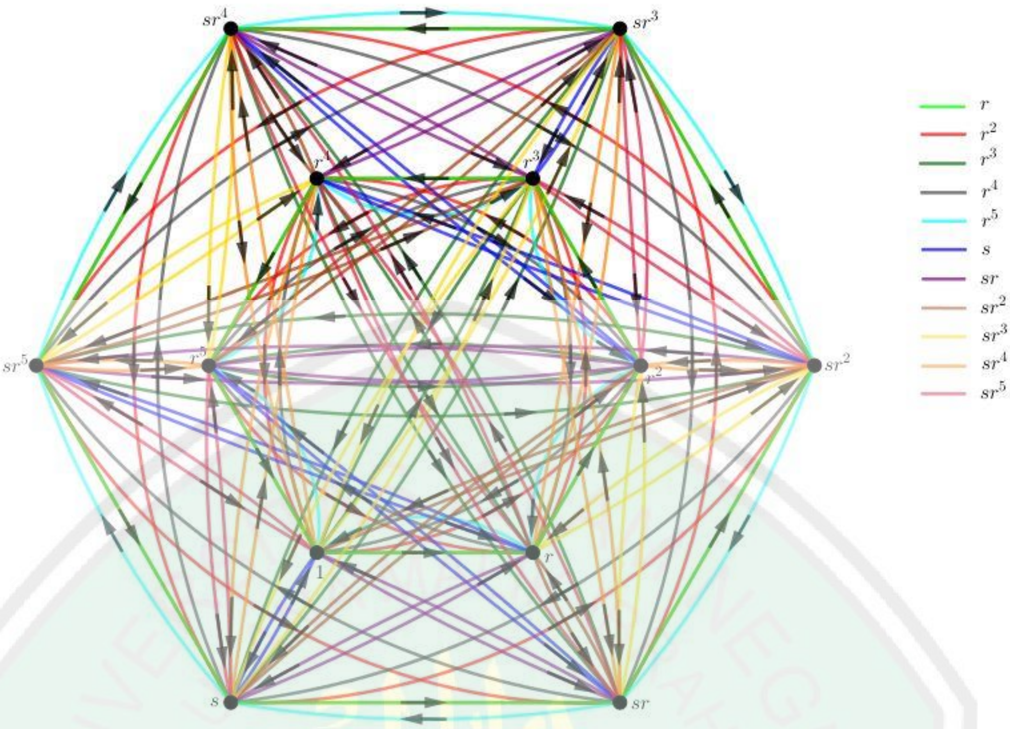
3.4 Grup Dihedral-12 (D_{12})

Cara menggambar digraf *Cayley* dari grup dihedral-2n dimana $n = 6$, maka terlebih dahulu diketahui elemen-elemen dari grup dihedral-12 (D_{12}) yaitu $\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$. Setelah itu D_{12} diberikan operasi komposisi "∘" sehingga didapatkan tabel *Cayley* seperti berikut:

Tabel 3.4 Tabel Cayley dari Grup D_{12}

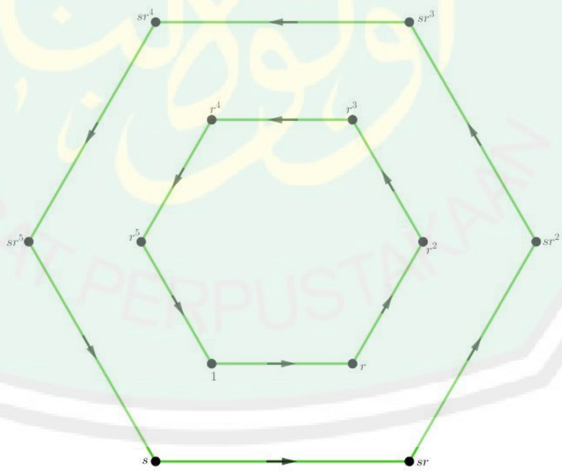
$\circ$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{r^2}$	$\boldsymbol{r^3}$	$\boldsymbol{r^4}$	$\boldsymbol{r^5}$	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{sr}$	$\boldsymbol{sr^2}$	$\boldsymbol{sr^3}$	$\boldsymbol{sr^4}$	$\boldsymbol{sr^5}$
$\mathbf{1}$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
$\boldsymbol{r}$	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
$\boldsymbol{r^2}$	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3
$\boldsymbol{r^3}$	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2
$\boldsymbol{r^4}$	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr
$\boldsymbol{r^5}$	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s
$\boldsymbol{s}$	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
$\boldsymbol{sr}$	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4
$\boldsymbol{sr^2}$	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3
$\boldsymbol{sr^3}$	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2
$\boldsymbol{sr^4}$	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r
$\boldsymbol{sr^5}$	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1

Selanjutnya dengan menggunakan tabel *Cayley* tersebut maka dapat diperoleh digraf *Cayley* dari grup dihedral-12 (D_{12}) sebagai berikut:



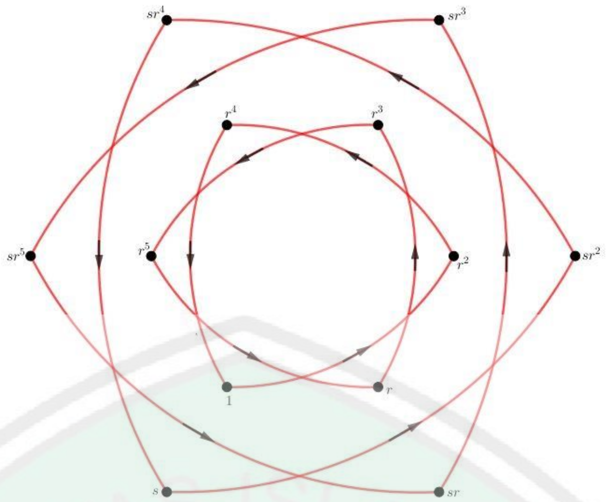
Gambar 3.25 Digraf Cayley dari Grup D_{12}

Kemudian dari gambar 3.25 dapat dibentuk dekomposisi sebagai berikut:



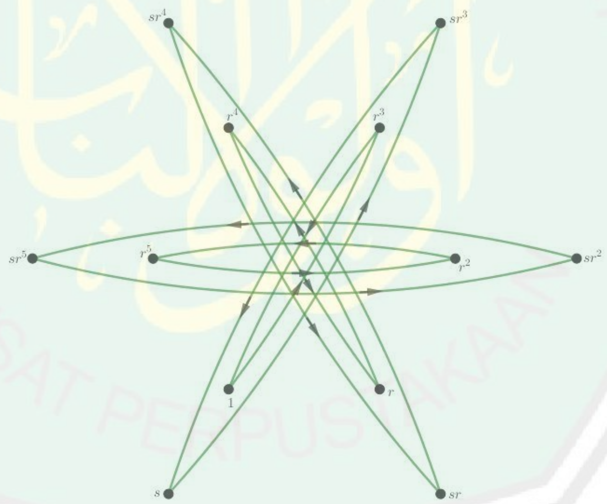
Gambar 3.26 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_{12} dengan Operator r

Dari gambar 3.26 dapat diketahui bahwa dekomposisi digraf *Cayley* dengan operator r memiliki 2 komponen sikel $n = 6$ (C_6).



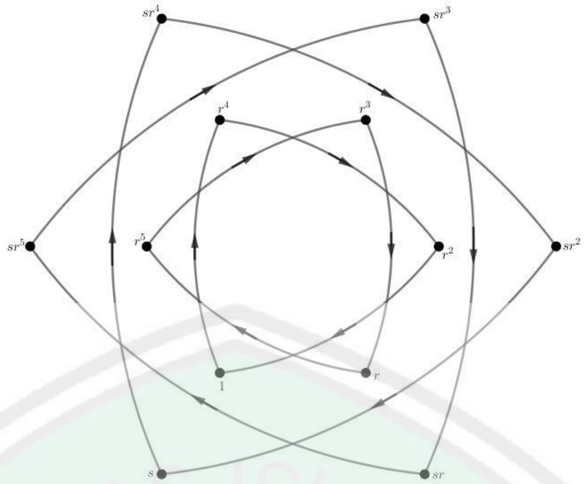
Gambar 3.27 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_{12} dengan Operator r^2

Dari gambar 3.27 dapat diketahui bahwa dekomposisi digraf *Cayley* dengan operator r^2 memiliki 4 komponen sikel $\frac{1}{2}n = \frac{1}{2}(6) = 3\ (C_3)$.



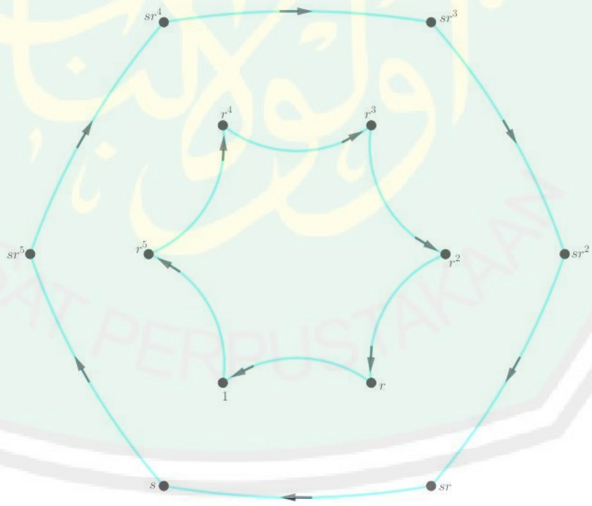
Gambar 3.28 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_{12} dengan Operator r^3

Dari gambar 3.28 dapat diketahui bahwa dekomposisi digraf *Cayley* dengan operator r^3 memiliki n komponen sikel-2 (C_2).



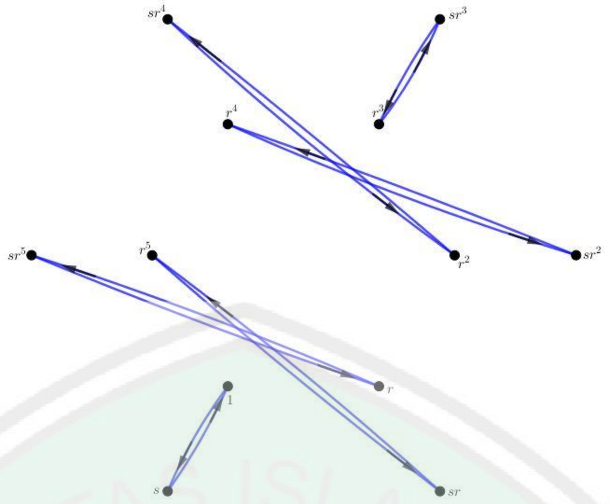
Gambar 3.29 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_{12} dengan Operator r^4

Dari gambar 3.29 dapat diketahui bahwa dekomposisi digraf *Cayley* dengan operator r^4 juga memiliki 4 komponen sikel $\frac{1}{2}n = \frac{1}{2}(6) = 3\ (C_3)$ dengan arah yang berlawanan dari gambar 3.27.

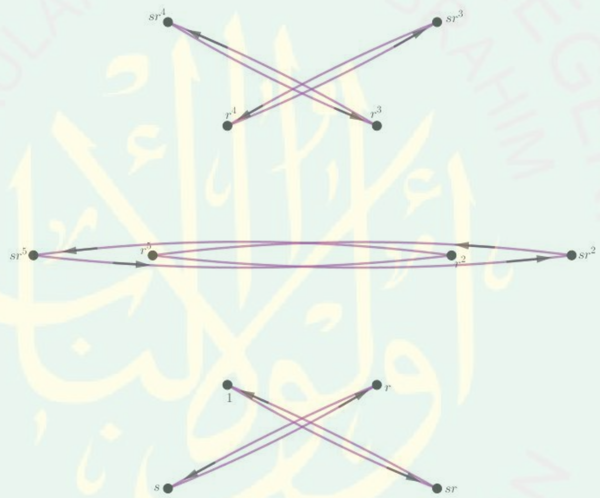


Gambar 3.30 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_{12} dengan Operator r^5

Dari gambar 3.30 dapat diketahui bahwa dekomposisi digraf *Cayley* dengan operator r^5 juga memiliki 2 komponen sikel $n = 6\ (C_6)$ dengan arah yang berlawanan dari gambar 3.26.



Gambar 3.31 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_{12} dengan Operator s



Gambar 3.32 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_{12} dengan Operator sr

Gambar 3.33 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_{12} dengan Operator sr^2

Gambar 3.34 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_{12} dengan Operator sr^3

Gambar 3.35 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_{12} dengan Operator sr^4

Gambar 3.36 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_{12} dengan Operator sr^5

Sedangkan dari gambar 3.31, 3.32, 3.33, 3.34, 3.35 dan 3.36 dapat diketahui bahwa dekomposisi digraf *Cayley* dengan operator s, sr, sr^2, sr^3, sr^4 dan sr^5 memiliki masing-masing n komponen sikel-2 (C_2) dimana $n = 6$.

Sehingga dari gambar dekomposisi digraf *Cayley* dari grup dihedral-12 (D_{12}) didapatkan 2 graf dekomposisi yang masing-masing memiliki 2 komponen graf sikel-n (C_n) dimana $n = 6$, 2 graf dekomposisi yang masing-masing memiliki

4 komponen graf sikel-$\frac{1}{2}n$ $(C_{\frac{1}{2}n})$ dimana $\frac{1}{2}n = \frac{1}{2}(6) = 3$ dan 7 graf dekomposisi yang masing-masing memiliki n komponen graf sikel-2 (C_2).

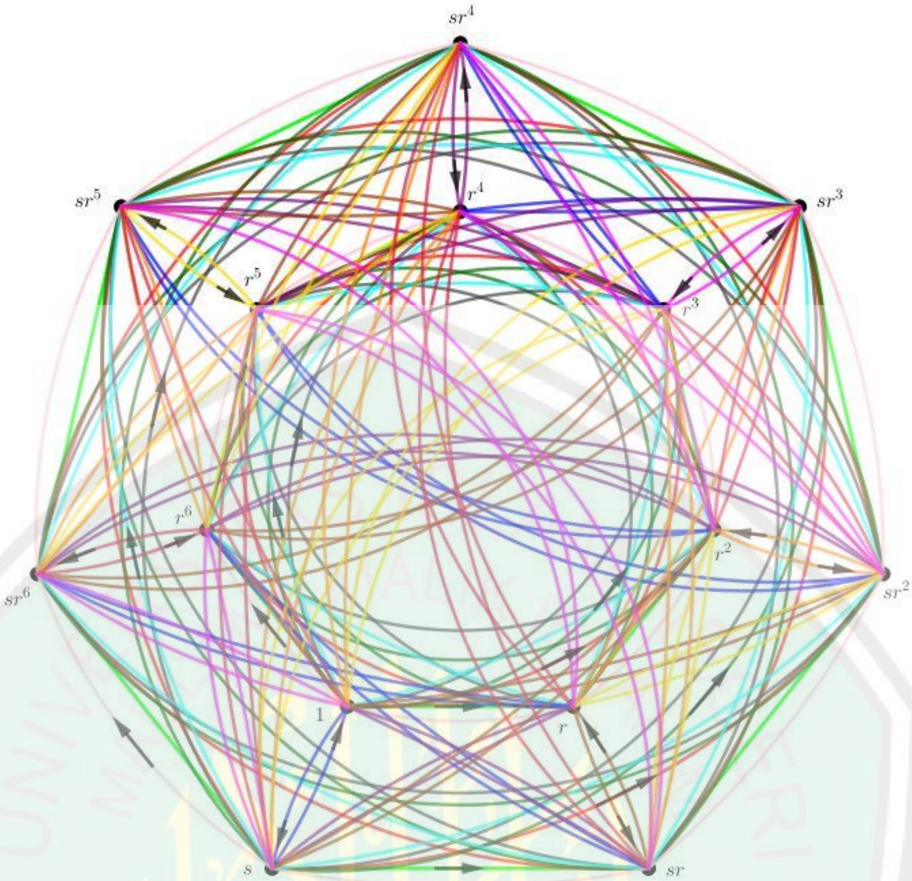
3.5 Grup Dihedral-14 (D_{14})

Cara menggambar digraf *Cayley* dari grup dihedral-$2n$ dimana $n = 7$, maka terlebih dahulu diketahui elemen-elemen dari grup dihedral-14 (D_{14}) yaitu $\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}$. Setelah itu D_{14} diberikan operasi komposisi "∘" sehingga didapatkan tabel *Cayley* seperti berikut:

Tabel 3.5 Tabel Cayley dari Grup D_{14}

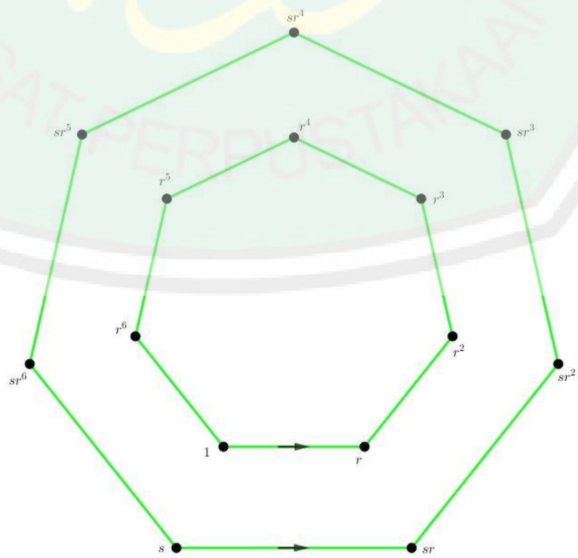
$\circ$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{r^2}$	$\boldsymbol{r^3}$	$\boldsymbol{r^4}$	$\boldsymbol{r^5}$	$\boldsymbol{r^6}$	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{sr}$	$\boldsymbol{sr^2}$	$\boldsymbol{sr^3}$	$\boldsymbol{sr^4}$	$\boldsymbol{sr^5}$	$\boldsymbol{sr^5}$
$\mathbf{1}$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
$\boldsymbol{r}$	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
$\boldsymbol{r^2}$	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
$\boldsymbol{r^3}$	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3
$\boldsymbol{r^4}$	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2
$\boldsymbol{r^5}$	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr
$\boldsymbol{r^6}$	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s
$\boldsymbol{s}$	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
$\boldsymbol{sr}$	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
$\boldsymbol{sr^2}$	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4
$\boldsymbol{sr^3}$	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3
$\boldsymbol{sr^4}$	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2
$\boldsymbol{sr^5}$	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r
$\boldsymbol{sr^6}$	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1

Selanjutnya dengan menggunakan tabel *Cayley* tersebut maka dapat diperoleh digraf *Cayley* dari grup dihedral-14 (D_{14}) sebagai berikut:



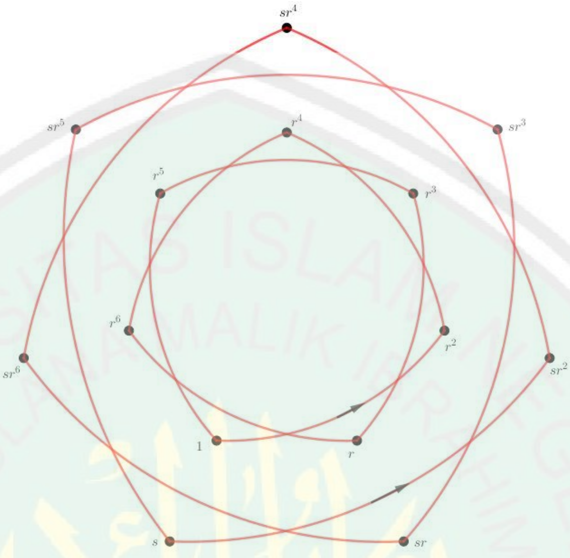
Gambar 3.37 Digraf Cayley dari Grup D_{14}

Kemudian dari gambar 3.37 dapat dibentuk dekomposisi sebagai berikut:

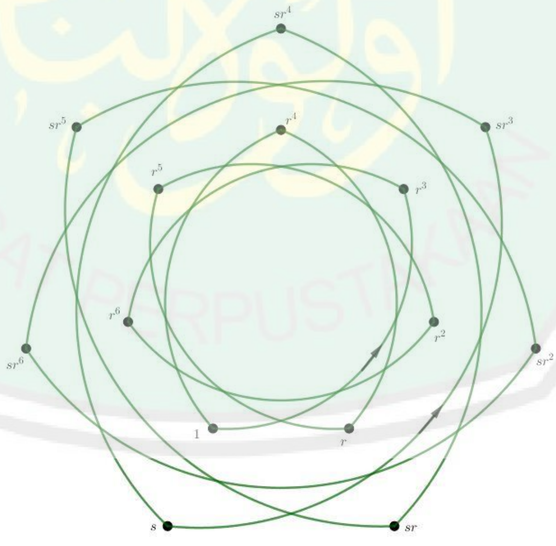


Gambar 3.38 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_{14} dengan Operator r

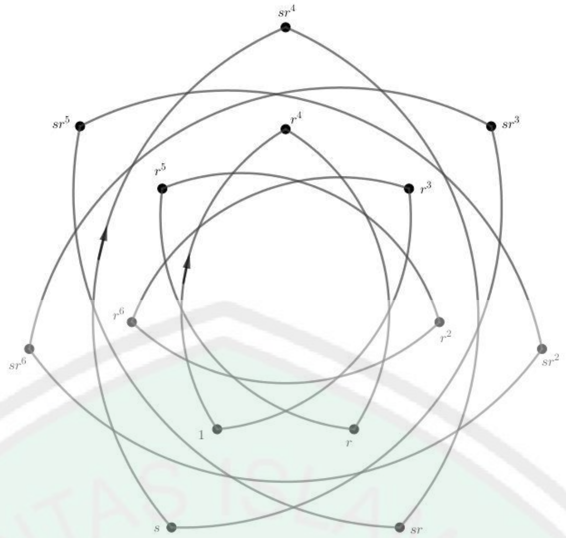
Dari gambar 3.38 dapat diketahui bahwa dekomposisi digraf *Cayley* dengan operator r memiliki 2 komponen sikel $n = 7$ (C_7).



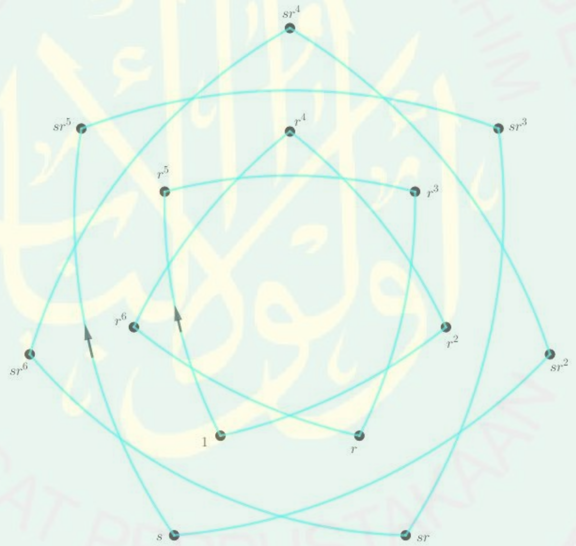
Gambar 3.39 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_{14} dengan Operator r^2



Gambar 3.40 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_{14} dengan Operator r^3

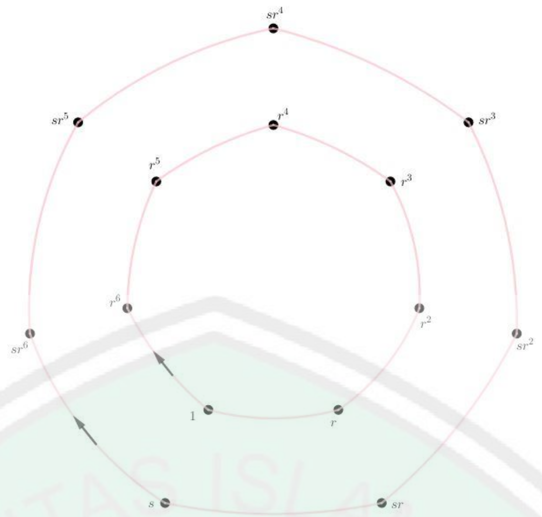


Gambar 3.41 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_{14} dengan Operator r^4



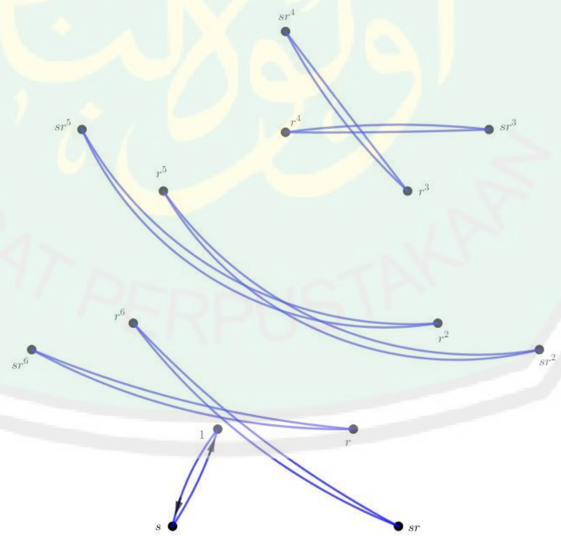
Gambar 3.42 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_{14} dengan Operator r^4

Dari gambar 3.39, 3.40, 3.41 dan 3.42 dapat diketahui bahwa dekomposisi digraf *Cayley* dengan operator r^2, r^3, r^4 dan r^5 memiliki masing-masing 2 komponen yang jika direntangkan membentuk sikel $n = 7$ (C_7).

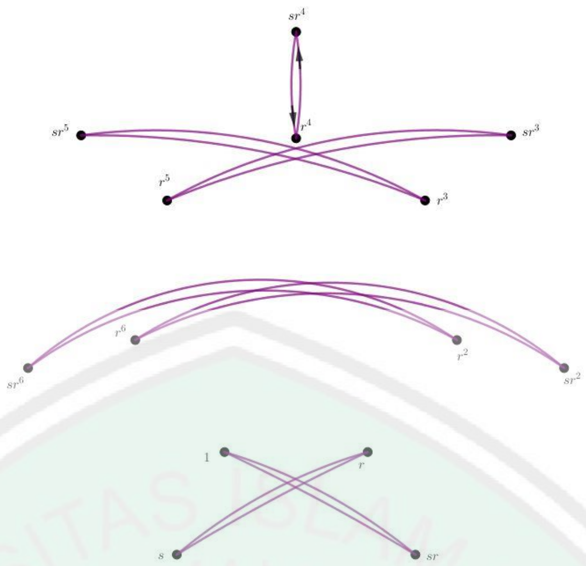


Gambar 3.43 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_{14} dengan Operator r^6

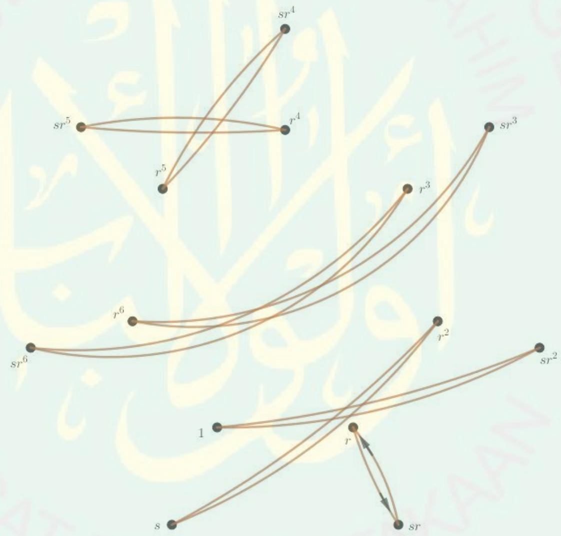
Dari gambar 3.43 dapat diketahui bahwa dekomposisi digraf *Cayley* dengan operator r^6 juga memiliki 2 komponen sikel $n = 7$ (C_7) dengan arah yang berlawanan dari gambar 3.38.



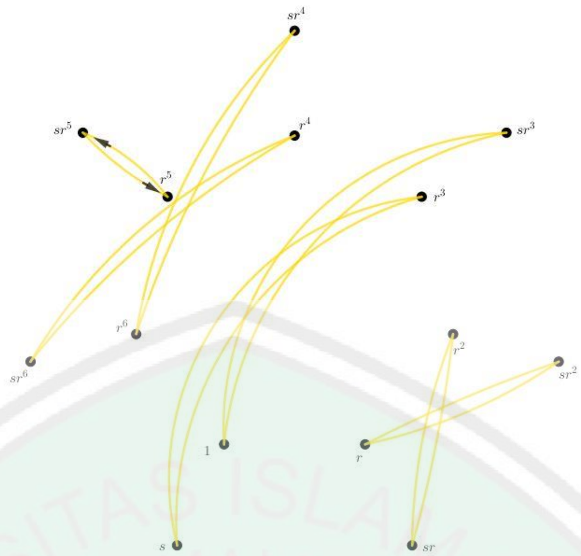
Gambar 3.44 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_{14} dengan Operator s



Gambar 3.45 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_{14} dengan Operator sr

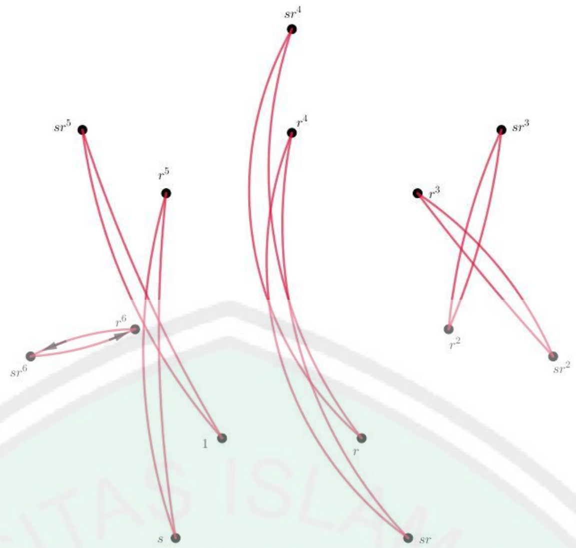


Gambar 3.46 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_{14} dengan Operator sr^2



Gambar 3.47 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_{14} dengan Operator sr^3

Gambar 3.48 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_{14} dengan Operator sr^4



Gambar 3.49 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_{14} dengan Operator sr^5

Gambar 3.50 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_{14} dengan Operator sr^6

Sedangkan dari gambar 3.44, 3.45, 3.46, 3.47, 3.48, 3.49 dan 3.50 dapat diketahui bahwa dekomposisi digraf *Cayley* dengan operator $s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5$ dan sr^6 memiliki masing-masing n komponen sikel-2 (C_2) dimana $n = 7$.

Sehingga dari gambar dekomposisi digraf *Cayley* dari grup dihedral-14 (D_{14}) didapatkan 6 graf dekomposisi yang masing-masing memiliki 2 komponen graf sikel-n (C_n) dimana $n = 7$ dan 7 graf dekomposisi yang masing-masing memiliki n komponen graf sikel-2 (C_2).

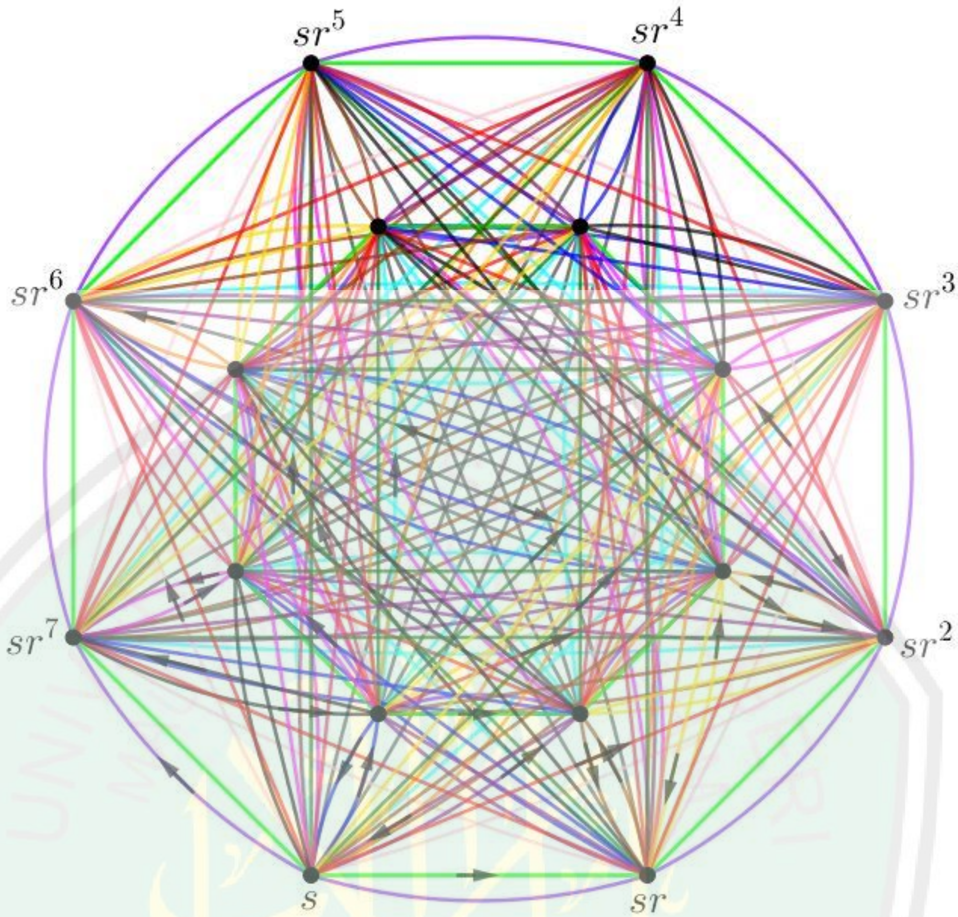
3.6 Grup Dihedral-16 (D_{16})

Cara menggambar digraf *Cayley* dari grup dihedral-2n dimana $n = 8$, maka terlebih dahulu diketahui elemen-elemen dari grup dihedral-16 (D_{16}) yaitu $\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}$. Setelah itu D_{16} diberikan operasi komposisi "∘" sehingga didapatkan tabel *Cayley* seperti berikut:

Tabel 3.6 Tabel Cayley dari Grup D_{16}

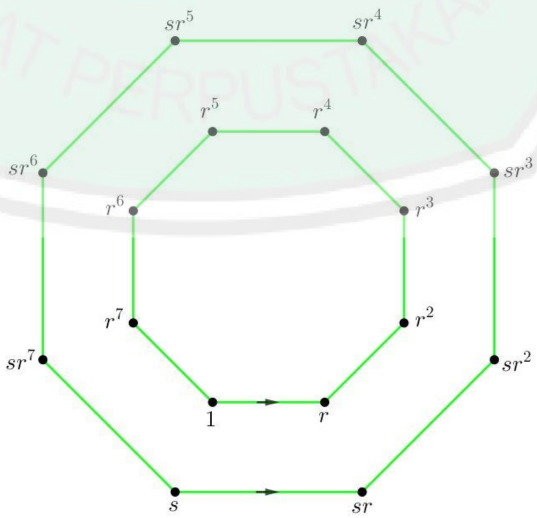
$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r^3	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^4	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3
r^5	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2
r^6	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr
r^7	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	r^7	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^4	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3
sr^5	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2
sr^6	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r
sr^7	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1

Selanjutnya dengan menggunakan tabel *Cayley* tersebut maka dapat diperoleh digraf *Cayley* dari grup dihedral-16 (D_{16}) sebagai berikut:



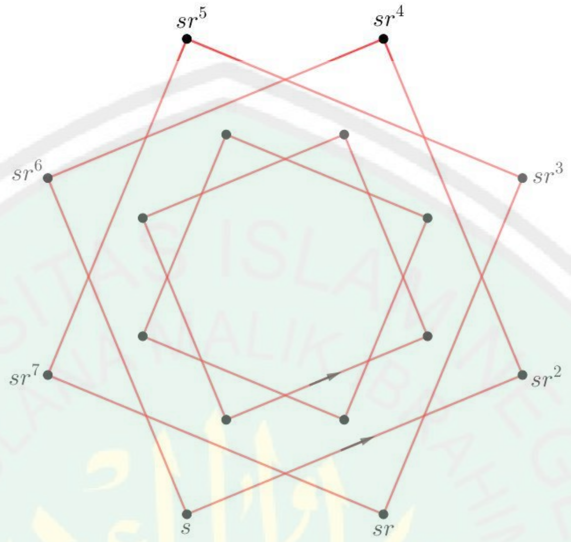
Gambar 3.51 Digraf Cayley dari Grup D_{16}

Kemudian dari gambar 3.51 dapat dibentuk dekomposisi sebagai berikut:



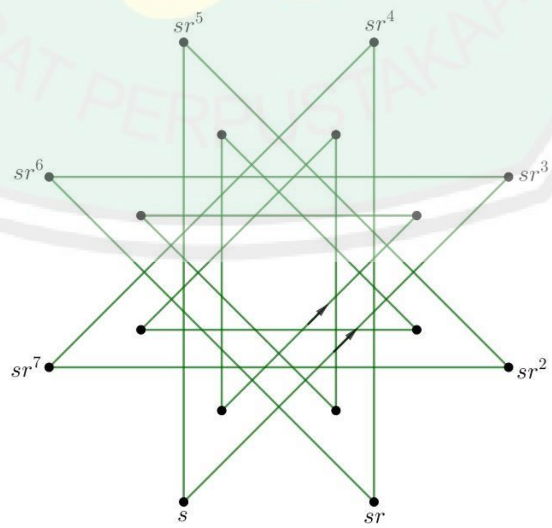
Gambar 3.52 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_{16} dengan Operator r

Dari gambar 3.52 dapat diketahui bahwa dekomposisi digraf *Cayley* dengan operator r memiliki 2 komponen sikel $n = 8$ (C_8).



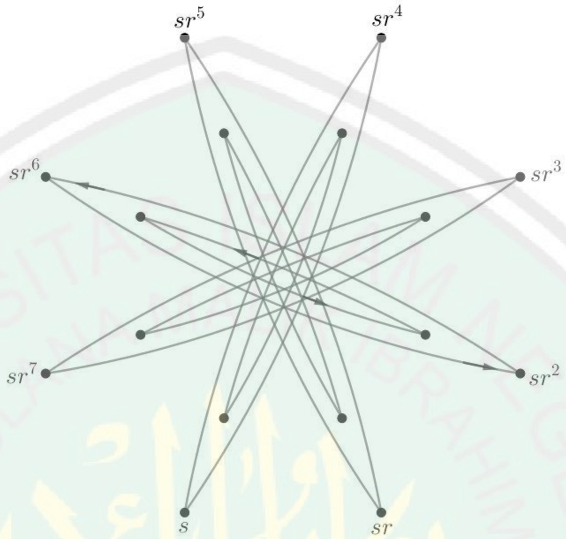
Gambar 3.53 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_{16} dengan Operator r^2

Dari gambar 3.53 dapat diketahui bahwa dekomposisi digraf *Cayley* dengan operator r^2 memiliki 4 komponen sikel $\frac{1}{2}n = \frac{1}{2}(8) = 4$ (C_4).



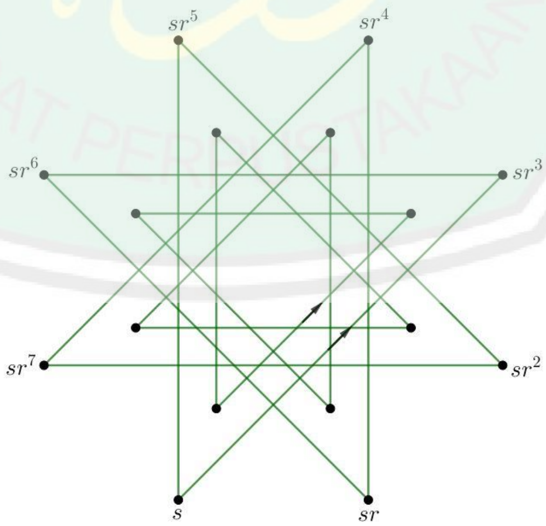
Gambar 3.54 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_{16} dengan Operator r^3

Dari gambar 3.54 dapat diketahui bahwa dekomposisi digraf *Cayley* dengan operator r^3 memiliki 2 komponen yang jika direntangkan membentuk sikel $n = 8$ (C_8).



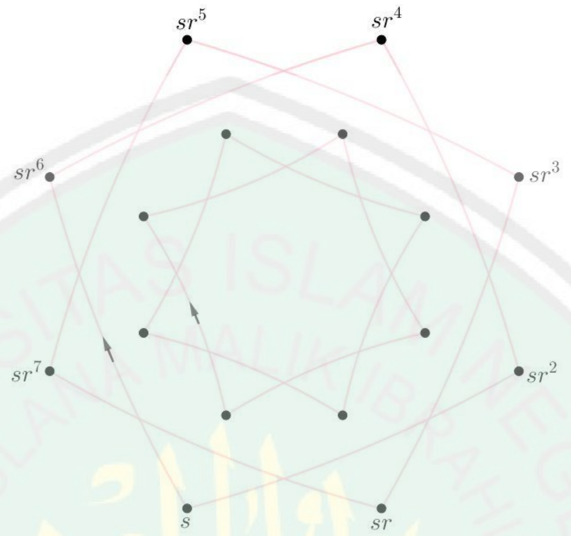
Gambar 3.55 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_{16} dengan Operator r^4

Dari gambar 3.55 dapat diketahui bahwa dekomposisi digraf *Cayley* dengan operator r^4 memiliki n komponen sikel-2 (C_2).



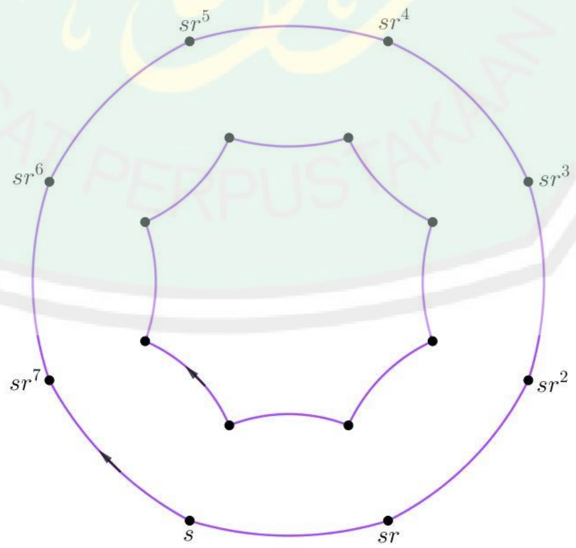
Gambar 3.56 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_{16} dengan Operator r^5

Dari gambar 3.56 dapat diketahui bahwa dekomposisi digraf *Cayley* dengan operator r^5 memiliki 2 komponen yang jika direntangkan membentuk sikel $n = 8$ (C_8).



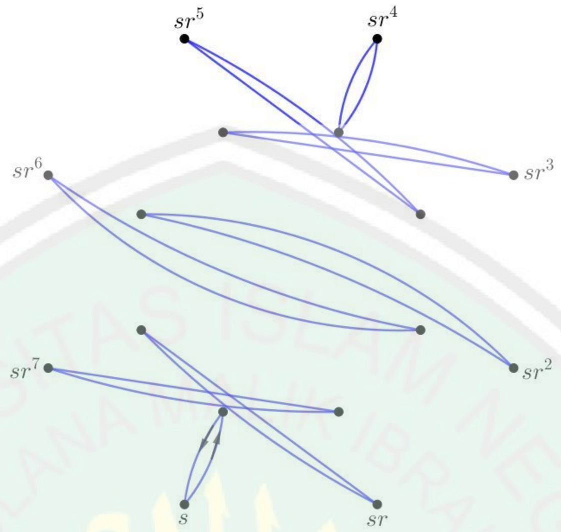
Gambar 3.57 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_{16} dengan Operator r^5

Dari gambar 3.57 dapat diketahui bahwa dekomposisi digraf *Cayley* dengan operator r^5 memiliki 4 komponen sikel $\frac{1}{2}n = \frac{1}{2}(8) = 4$ (C_4).

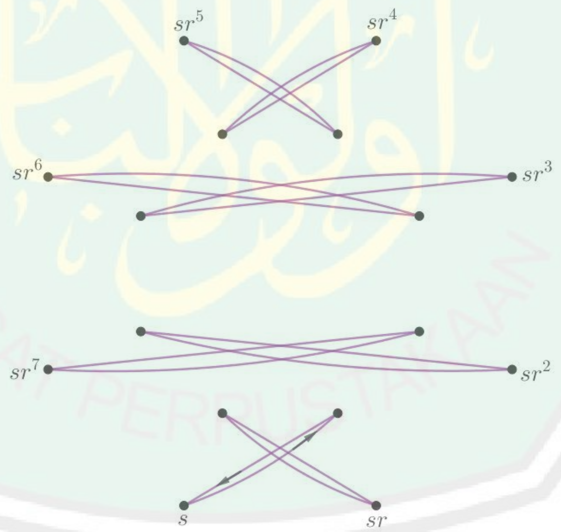


Gambar 3.58 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_{16} dengan Operator r^7

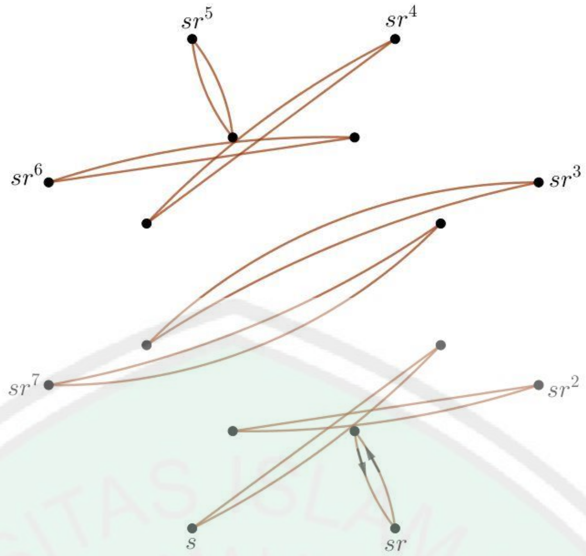
Dari gambar 3.58 dapat diketahui bahwa dekomposisi digraf *Cayley* dengan operator r^7 memiliki 2 komponen sikel $n = 8$ (C_8).



Gambar 3.59 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_{16} dengan Operator s

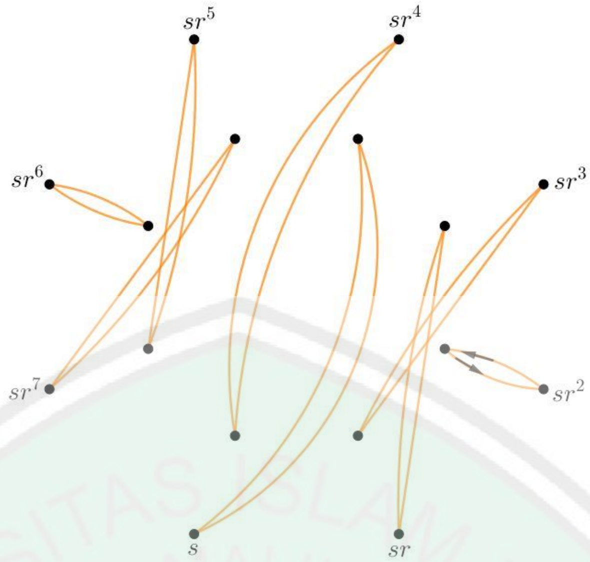


Gambar 3.60 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_{16} dengan Operator sr

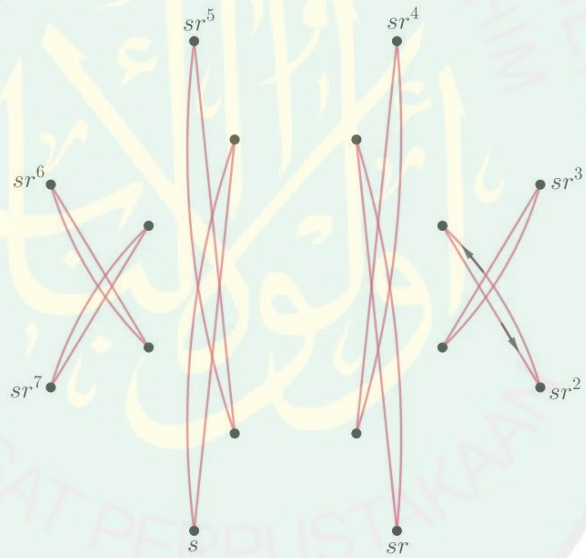


Gambar 3.61 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_{16} dengan Operator sr^2

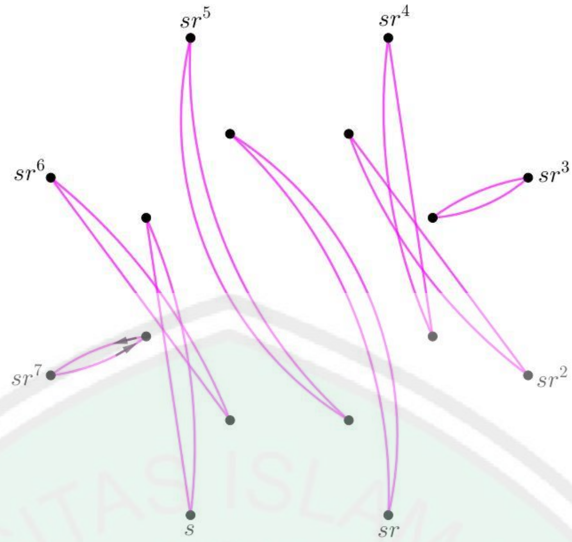
Gambar 3.62 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_{16} dengan Operator sr^3



Gambar 3.63 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_{16} dengan Operator sr^4



Gambar 3.64 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_{16} dengan Operator sr^5



Gambar 3.65 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_{16} dengan Operator sr^6

Gambar 3.66 Dekomposisi Digraf Cayley dari Grup D_{16} dengan Operator sr^7

Sedangkan dari gambar 3.59, 3.60, 3.61, 3.62, 3.63, 3.64, 3.65 dan 3.66 dapat diketahui bahwa dekomposisi digraf *Cayley* dengan operator $s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6$ dan sr^7 memiliki masing-masing n komponen sikel-2 (C_2) dimana $n = 8$.

Sehingga dari gambar dekomposisi digraf *Cayley* dari grup dihedral-16 (D_{16}) didapatkan 4 graf dekomposisi yang masing-masing memiliki 2 komponen graf sikel-n (C_n) dimana $n = 8$, 2 graf dekomposisi yang masing-masing memiliki 4 komponen graf sikel-$\frac{1}{2}n$ ($C_{\frac{1}{2}n}$) dimana $\frac{1}{2}n = \frac{1}{2}(8) = 4$ dan 9 graf dekomposisi yang masing-masing memiliki n komponen graf sikel-2 (C_2).

3.7 Dekomposisi Digraf *Cayley* dari Grup Dihedral

Berdasarkan uraian di atas maka diperoleh bahwa pola dekomposisi digraf *Cayley* dari grup dihedral yang disajikan dalam bentuk tabel berikut:

Tabel 3.7 Tabel Hasil Dekomposisi

<table>
<tr><th>Grup</th><th colspan="2">Jenis Graf</th></tr>
<tr><td>D_6</td><td colspan="2">$2\ C_3 \quad 3\ C_2$</td></tr>
<tr><td>D_8</td><td colspan="2">$2\ C_4 \quad 5\ C_2$</td></tr>
<tr><td>D_{10}</td><td colspan="2">$4\ C_5 \quad 5\ C_2$</td></tr>
<tr><td>D_{12}</td><td colspan="2">$2\ C_6 \quad 2\ C_3 \quad 7\ C_2$</td></tr>
<tr><td>D_{14}</td><td colspan="2">$6\ C_7 \quad 7\ C_2$</td></tr>
<tr><td>D_{16}</td><td colspan="2">$4\ C_8 \quad 2\ C_4 \quad 9\ C_2$</td></tr>
<tr><td>$\vdots$</td><td colspan="2">$\vdots$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">D_{2n}</td><td>n ganjil $(n \geq 3)$</td><td>$(n-1)(C_n) \quad n\ C_2$</td></tr>
<tr><td>n genap $(n \geq 4)$</td><td></td></tr>
</table>

Teorema

Misalkan $\mathcal{D}(\mathrm{D}_{2n}, \mathrm{S})$ adalah suatu digraf *Cayley* dari grup dihedral-$2n$ dengan $S = \{r, r^2, \cdots, r^{n-1}, s, sr, \cdots, sr^{n-1}\}$. Jika n adalah bilangan ganjil maka dekomposisi dari $\mathcal{D}(\mathrm{D}_{2n}, \mathrm{S})$ menghasilkan $(n-1)\ C_n$ dan $n\ C_2$.

Bukti

Digraf *Cayley* dari grup D_{2n} didekomposisi berdasarkan operatornya, yaitu $r, r^2, \cdots, r^{n-1}, s, sr, \cdots, sr^{n-1}$

- Untuk operator r, setiap titik r^i terhubung ke titik r^{i+1} dan setiap titik sr^i terhubung ke titik sr^{n-1+i}. Sebab $r \circ r^i = r^{i+1}$ dan $r \circ sr^i = sr^{n-1+i}$, sehingga menghasilkan sebuah sikel-n (C_n).
- Untuk operator r^2, setiap titik r^i terhubung ke titik r^{i+2} dan setiap titik sr^i terhubung ke titik sr^{n-2+i}. Sebab $r^2 \circ r^i = r^{i+2}$ dan $r^2 \circ sr^i = sr^{n-2+i}$.

$$\vdots$$

- Untuk operator r^{n-1}, setiap titik r^i terhubung ke titik r^{i+n-1} dan setiap titik sr^i terhubung ke titik sr^{i+1}. Sebab $r^{n-1} \circ r^i = r^{i+n-1}$ dan $r^{n-1} \circ sr^i = sr^{i+1}$, sehingga menghasilkan sebuah sikel-n (C_n).
- Untuk operator s, setiap titik r^i terhubung ke titik sr^i karena $s \circ r^i = sr^i$ dan setiap titik sr^i terhubung ke titik r^i karena $s \circ sr^i = r^i$, sehingga menghasilkan sikel-2 (C_2).
- Untuk operator sr, setiap titik r^i terhubung ke titik sr^{i+1} karena $sr \circ r^i = sr^{i+1}$ dan setiap titik sr^i terhubung ke titik r^{n-1+i} karena $sr \circ sr^i = r^{n-1+i}$, sehingga menghasilkan sikel-2 (C_2).

$$\vdots$$

- Untuk operator sr^{n-1}, setiap titik r^i terhubung ke titik sr^{n+i-1} karena $sr^{n-1} \circ r^i = sr^{n+i-1}$ dan setiap titik sr^i terhubung ke titik r^{i+1} karena $sr^{n-1} \circ sr^i = r^{i+1}$, sehingga menghasilkan sikel-2 (C_2).

Berdasarkan uraian di atas, dapat diketahui bahwa graf *Cayley* dari grup dihedral-$2n$ (D_{2n}) dengan n ganjil menghasilkan sikel-n (C_n) sebanyak $n-1$ dan sikel-2 (C_2) sebanyak n.

3.8 Kajian Agama

Salah satu kajian yang biasa dibahas dalam ilmu matematika adalah tentang graf dan digraf. Digraf sendiri merupakan graf yang memiliki arah atau runtutan. Dalam Islam titik-titik pada digraf dapat diinterpretasikan dengan macam-macam salat fardhu maupun sunnah. Jika salat fardhu maghrib diinterpretasikan oleh suatu titik, maka salat sunnah ba'diyah maghrib, salat sunnah qobliyah isya', salat fardhu isya', salat sunnah ba'diyah isya', salat sunnah qobliyah shubuh, salat fardhu shubuh, salat sunnah qobliyah dhuhur, salat fardhu dhuhur, salat sunnah ba'diyah dhuhur, salat sunnah qobliyah ashar, salat fardhu ashar, salat sunnah ba'diyah ashar juga diinterpretasikan oleh titik-titik lain yang saling berurutan. Dimisalkan jika seorang muslim melaksanakan salat fardhu maghrib, maka setelahnya melaksanakan salat fardhu tersebut muslim tersebut dapat melaksanakan salat sunnah ba'diyah maghrib, dan salat-salat tersebut memiliki keutamaan-keutamaan sebagaimana dijelaskan dalam hadis yang diriwayatkan oleh Ummu Habibah, yaitu:

سَمِعْتُ رَسُولَ اللَّهِ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ يَقُولُ : { مَنْ صَلَّى اثْنَتَيْ عَشْرَةَ رَكْعَةً فِي يَوْمِهِ وَلَيْلَتِهِ بُنِيَ لَهُ بِهِنَّ بَيْتٌ فِي الْجَنَّةِ } رَوَاهُ مُسْلِمٌ

Saya mendengar Rasulullah Saw bersabda: "Siapa yang salat 12 rakaat sehari semalam, dibangunkan untuknya satu tempat di surga". (HR. Muslim).

Penjelasan 12 rakaat tersebut terdapat dalam riwayat Imam at-Tirmidzi:

أَرْبَعًا قَبْلَ الظُّهْرِ ، وَرَكْعَتَيْنِ بَعْدَهَا وَرَكْعَتَيْنِ بَعْدَ الْمَغْرِبِ ، وَرَكْعَتَيْنِ بَعْدَ الْعِشَاءِ ، وَرَكْعَتَيْنِ قَبْلَ صَلَاةِ الْفَجْرِ

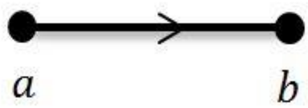
"4 rakaat sebelum Zhuhur. 2 rakaat setelah Zuhur. 2 rakaat setelah Maghrib. 2 rakaat setelah Isya'. Dan 2 rakaat sebelum Shubuh".

Dan salat-salat tersebut memiliki waktunya masing-masing sebagaimana dalam firman Allah dalam al-Quran surat Hud/11:114, yaitu:

وَأَقِمِ الصَّلَاةَ طَرَفَيِ النَّهَارِ وَزُلَفًا مِنَ اللَّيْلِ إِنَّ الْحَسَنَاتِ يُذْهِبْنَ السَّيِّئَاتِ ذَلِكَ ذِكْرَى لِلذَّاكِرِينَ

"Dan dirikanlah salat itu pada kedua tepi siang (pagi dan petang) *dan pada bagian permulaan malam. Sesungguhnya perbuatan-perbuatan yang baik itu menghapuskan* (dosa) *perbuatan-perbuatan yang buruk. Itulah peringatan bagi orang-orang yang ingat".*

Banyak dari para ulama menafsirkan kedua tepi siang disini adalah sebagai salat fardhu dhuhur dan salat fardhu ashar, kemudian dari ayat dan hadis tersebut dapat disimpulkan bahwasanya ada salat sunnah rawatib yang mengiringi salat fardhu. Begitulah ayat dan hadis tersebut menjelaskan bahwa ada salat sunnah yang mengiringi tiap-tiap salat fardhu. Contoh pada kasus di atas adalah setelah seorang muslim melaksanakan salat fardhu dhuhur maka muslim tersebut dapat melaksanakan salat sunnah ba'diyah dhuhur sehingga dari contoh tersebut dapat dipresentasikan pada bentuk digraf bahwa salat fardhu dhuhur dan salat sunnah ba'diyah dhuhur adalah titik-titik yang jika disimbolkan berurutan yaitu a dan b yang mana setelah dari titik a maka akan berjalan ke titik b. Berikut adalah gambar yang mempresentasikannya:



Gambar 3.67 Representasi Digraf dalam Salat

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan perumusan masalah dan pembahasan, maka dapat ditarik kesimpulan bahwa : $\mathcal{D}(\mathrm{D}_{2\mathrm{n}}, S)$ adalah digraf atau graf *Cayley* dari grup D_{2n}, dengan $n \geq 3$. Grup dihedral-n $\mathcal{D}(\mathrm{D}_{2\mathrm{n}})$ dapat didekomposisi menjadi $(n-1)\ C_n$ dan $n\ C_2$ untuk n adalah bilangan ganjil.

4.2 Saran

Pada penelitian selanjutnya diharapkan yang akan diperlakukan dekomposisi adalah jenis graf tertentu dengan komplesitas titik dan garis yang lebih bervariasi misalnya graf cattepillar, graf fan, graf berlian dan lain sebagainya sehingga akan mendapatkan pola yang berbeda.

DAFTAR RUJUKAN

Abdussakir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang.

Bondy, J.A. dan Murty, U.S.R. 1976. *Graph Theory with Application.* Ontario: The Macmillan Press Ltd.

Budayasa, I K. 2007. *Teori Graph dan Aplikasinya*. Surabaya: Unesa University Press.

Chartrand, G. dan Lesniak, L. 1986. *Graphs and Digraphs Third Edition*. California: Chapman & Hall/CRC.

Dummit D.S. dan Foote, R.M.. 1991. *Abstract Algebra.* New Jersey: Prentice Hall, Inc.

Kandasamy, W.B.V. dan Smarandache, F. 2009. *Groups As Graphs*. Romania: Editura Cuart.

Mujiwinarta, Tirta Aldha. 2014. *Graf Cayley pada Grup Modulo-n* (M_n). Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Nazir, M. 1986. *Metode Penelitian.* Bandung: Remaja Rosdakarya.

Prastowo, A. 2011. *Metode Penelitian Kualitatif dala Perspektif Rancangan Penelitian.* Yogyakarta: Ar-Ruzz Media.

Purwanto. 1998. *Matematika Diskrit*. Malang: IKIP Malang.

Raishinghania, M. dan Anggarwal, R. 1980. *Modern Algebra*. New Delhi: S. Chand & Company Ltd.

Raeburn, Iain. 2005. *Graph Algebras*. USA: The American Mathematical Society.

Toomey, G. 2014. *Algebraic Graph Theory: Automorphism Groups and Cayley Graphs*. Allen Institute.

RIWAYAT HIDUP

Muhammad Amiruddin Lathif dilahirkan di Jombang pada hari Sabtu tanggal 25 Desember 1993, merupakan anak pertama dari lima bersaudara, pasangan dari Bapak Muhammad Shobari dan Ibu Aliatul Munafaqoh. Pendidikan dasarnya ditempuh di Tambak Beras Jombang di MI Bahrul Ulum yang ditamatkan pada tahun 2006.

Pada tahun yang sama melanjutkan pendidikan menengah pertama di MTs Mu'allimin Mu'allimat dan kemudian melanjutkan pendidikan menengah atas di MA Mu'allimin Mu'allimat dan menamatkan pendidikan tersebut pada tahun 2012. Pendidikan berikutnya ditempuh di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang melalui jalur SNMPTN dengan mengambil Jurusan Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Muhammad Amiruddin Lathif
NIM : 12610005
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Dekomposisi Digraf *Cayley* dari Grup Dihedral
Pembimbing I : Evawati Alisah, M.Pd
Pembimbing II : Abdul Aziz, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	04 April 2018	Konsultasi Bab I dan Bab II	1.
2.	12 April 2018	Revisi Bab I dan Bab II	2.
3.	20 April 2018	Konsultasi Agama Bab I dan Bab II	3.
4.	30 April 2018	Revisi Agama Bab I dan Bab II	4.
5.	05 Oktober 2018	Konsultasi Bab III dan Bab IV	5.
6.	05 November 2018	Revisi Bab III dan Bab IV	6.
7.	23 November 2018	Konsultasi Agama Bab III	7.
8.	15 Desember 2018	Revisi Agama Bab III	8.
9.	03 Januari 2019	ACC Agama Keseluruhan	9.
10.	28 Februari 2019	ACC Keseluruhan	10.

Malang, 14 Maret 2019
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001