

**JUMLAH JARAK EKSENTRIK GRAF PEMBAGI NOL DARI  
GELANGGANG  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  DENGAN  $p, q$  BILANGAN PRIMA**

**SKRIPSI**

**OLEH  
IKA NUR KHASANA  
NIM. 14610022**



**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2018**

**JUMLAH JARAK EKSENTRIK GRAF PEMBAGI NOL DARI  
GELANGGANG  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  DENGAN  $p, q$  BILANGAN PRIMA**

**SKRIPSI**

**Diajukan Kepada  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam  
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh  
IKA NUR KHASANA  
NIM. 14610022**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2018**

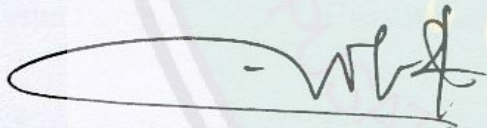
**JUMLAH JARAK EKSENTRIK GRAF PEMBAGI NOL DARI  
GELANGGANG  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  DENGAN  $p, q$  BILANGAN PRIMA**

**SKRIPSI**

Oleh  
**IKA NUR KHASANA**  
NIM. 14610022

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji  
Tanggal 08 November 2018

Pembimbing I,



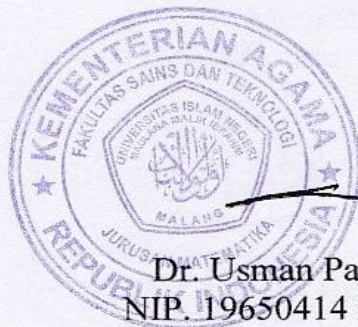
H. Wahyu H. Irawan, M.Pd  
NIP. 19710420 200003 1 003

Pembimbing II,



Dr. Ahmad Barizi, M.A  
NIP. 19731212 199803 1 008

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si  
NIP. 19650414 200312 1 001

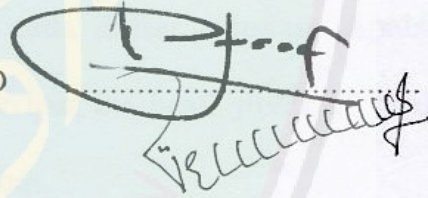
**JUMLAH JARAK EKSENTRIK GRAF PEMBAGI NOL DARI  
GELANGGANG  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  DENGAN  $p, q$  BILANGAN PRIMA**

**SKRIPSI**

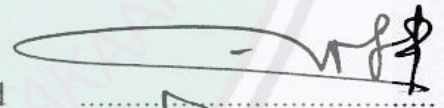
Oleh  
**Ika Nur Khasana**  
**NIM. 14610022**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi  
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan  
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)  
Tanggal 28 November 2018

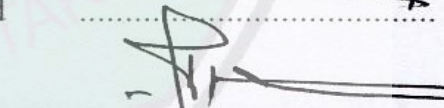
Penguji Utama : Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D



Ketua Penguji : Evawati Alisah, M.Pd



Sekretaris Penguji : H. Wahyu H. Irawan, M.Pd



Anggota Penguji : Dr. Ahmad Barizi, M.A



Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si  
NIP. 19650414 200312 1 001

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Ika Nur Khasana

NIM : 14610022

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Jumlah Jarak Eksentrik Graf Pembagi Nol dari Gelanggang

$\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  dengan  $p, q$  Bilangan Prima

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 08 November 2018

Yang membuat pernyataan,



Ika Nur Khasana  
NIM. 14610022

## MOTO

“Barangsiapa yang menghendaki kehidupan dunia  
maka wajib baginya memiliki ilmu,  
dan barangsiapa yang menghendaki kehidupan akhirat,  
maka wajib baginya memiliki ilmu  
dan barangsiapa yang menghendaki keduanya  
maka wajib baginya memiliki ilmu”

(HR. Tirmidzi)



## PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda Amir Mahmud dan Ibunda Nurhayati tercinta yang dengan ikhlas selalu mendoakan, memberikan dorongan moral, spiritual, finansial dan doa restunya kepada penulis dalam menuntut ilmu agar selalu diridhai Allah Swt. Kepada Pakde Boiran dan Bude Darmi tersayang yang juga telah memberikan semangat, motivasi serta doa-doanya kepada anak-anaknya hingga kami dapat membanggakan keluarga. Dan kepada Adik Akhmad Nur Hidayat teruslah berjuang untuk berbakti dan membanggakan kedua orangtua.



## KATA PENGANTAR

*Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh*

Segala puji bagi Allah Swt. atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada Rasulullah Muhammad Saw yang telah membimbing manusia kepada ajaran yang paling benar, yakni ajaran agama islam.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Abdul Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. H. Wahyu H. Irwan, M.Pd, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan berbagai pengalaman yang berharga kepada penulis.



5. Dr. Ahmad Barizi, M.A, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagai ilmunya kepada penulis.
6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terimakasih atas segala ilmu dan bimbingannya.
7. Bapak Amir Mahmud dan Ibu Nurhayati yang senantiasa mendoakan dan memberi dukungan dalam segala bentuk yang tak mungkin terbalaskan.
8. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2014, terutama kelas A yang berjuang bersama-sama untuk menggapai cita-cita, terimakasih atas kenangan-kenangan indah yang dirajut bersama dalam menggapai impian.
9. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan bagi pembaca.

*Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh*

Malang, November 2018

Penulis

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b>	
<b>HALAMAN PENGAJUAN</b>	
<b>HALAMAN PERSETUJUAN</b>	
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b>	
<b>HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN</b>	
<b>HALAMAN MOTO</b>	
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b>	
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	viii
<b>DAFTAR ISI</b> .....	x
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	xii
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xiv
<b>ABSTRAK</b> .....	xvi
<b>ABSTRACT</b> .....	xvii
<b>ملخص</b> .....	xviii
<b>BAB I PENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	6
1.3 Tujuan Penelitian .....	6
1.4 Batasan Masalah .....	6
1.5 Manfaat Penelitian .....	6
1.6 Metode Penelitian .....	7
1.7 Sistematika Penulisan .....	8
<b>BAB II KAJIAN PUSTAKA</b>	
2.1 Grup .....	10
2.2 Gelanggang .....	12
2.3 Graf .....	17
2.3.1 Definisi Graf .....	18
2.3.2 Terhubung Langsung dan Terkait Langsung .....	19
2.3.3 Derajat Titik .....	20
2.3.4 Graf-graf Khusus .....	22
2.3.5 Graf Terhubung .....	24
2.3.6 Jarak Pada Graf Terhubung .....	25

2.3.7 Graf Pembagi Nol .....	28
2.4 Kajian Teori Graf dalam Al-Qur'an .....	30

### BAB III PEMBAHASAN

3.1 Gelanggang $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ untuk $p, q$ Bilangan Prima dengan Operasi Penjumlahan dan Operasi Perkalian .....	37
3.2 Graf Pembagi Nol dari Gelanggang $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ untuk $p, q$ Bilangan Prima .....	41
3.2.1 Graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_q$ dengan $q = 2, 3, 5, 7, 11$ .....	42
3.2.2 Graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_q$ dengan $q = 2, 3, 5, 7, 11$ .....	47
3.2.3 Graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_q$ dengan $q = 2, 3, 5, 7, 11$ .....	54
3.3 Jumlah Jarak Eksentrik Graf Pembagi Nol dari Gelanggang $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ untuk $p, q$ Bilangan Prima .....	64
3.3.1 Jumlah Jarak Eksentrik Graf Pembagi Nol dari Gelanggang $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_q$ dengan $q = 2, 3, 5, 7, 11$ .....	65
3.3.2 Jumlah Jarak Eksentrik Graf Pembagi Nol dari Gelanggang $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_q$ dengan $q = 2, 3, 5, 7, 11$ .....	76
3.3.3 Jumlah Jarak Eksentrik Graf Pembagi Nol dari Gelanggang $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_q$ dengan $q = 2, 3, 5, 7, 11$ .....	89
3.4 Integrasi Jarak pada Graf dengan Al-Quran .....	112

### BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan .....	116
4.2 Saran .....	116

DAFTAR RUJUKAN .....	117
----------------------	-----

### RIWAYAT HIDUP

## DAFTAR TABEL

Tabel 2. 1 Tabel <i>Cayley</i> dari $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ dengan Operasi + .....	13
Tabel 2. 2 Tabel <i>Cayley</i> dari $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ dengan Operasi + .....	14
Tabel 2. 3 Eksentrisitas dan Titik Eksentrik Graf $G$ .....	26
Tabel 2. 4 Eksentrisitas dan Titik Eksentrik Graf $G_4$ .....	27
Tabel 2. 5 Beberapa Bilangan Prima, Komposit, dan Pembaginya .....	35
Tabel 3. 1 Graf Bipartisi Komplit $K_{1,n}$ .....	46
Tabel 3. 2 Graf Bipartisi Komplit $K_{2,n}$ .....	53
Tabel 3. 3 Graf Bipartisi Komplit $K_{4,n}$ .....	60
Tabel 3. 4 Graf bipartisi komplit $K_{m,n}$ .....	62
Tabel 3. 5 Eksentrisitas Graf Komplit $K_2$ .....	65
Tabel 3. 6 Eksentrisitas Graf Bipartisi Komplit $K_{1,2}$ .....	66
Tabel 3. 7 Eksentrisitas Graf Bipartisi Komplit $K_{1,4}$ .....	67
Tabel 3. 8 Eksentrisitas Graf Bipartisi Komplit $K_{1,6}$ .....	69
Tabel 3. 9 Eksentrisitas Graf Bipartisi Komplit $K_{1,10}$ .....	72
Tabel 3. 10 Eksentrisitas Graf Bipartisi Komplit $K_{2,1}$ .....	76
Tabel 3. 11 Eksentrisitas Graf Bipartisi Komplit $K_{2,2}$ .....	77
Tabel 3. 12 Eksentrisitas Graf Komplit $K_{2,4}$ .....	79
Tabel 3. 13 Eksentrisitas Graf Bipartisi Komplit $K_{2,6}$ .....	81
Tabel 3. 14 Eksentrisitas Graf Bipartisi Komplit $K_{2,10}$ .....	84
Tabel 3. 15 Eksentrisitas Graf Bipartisi Komplit $K_{4,1}$ .....	89
Tabel 3. 16 Eksentrisitas Graf Bipartisi Komplit $K_{4,2}$ .....	91
Tabel 3. 17 Eksentrisitas Graf Bipartisi Komplit $K_{4,4}$ .....	93
Tabel 3. 18 Eksentrisitas Graf Komplit $K_{4,6}$ .....	96

Tabel 3. 19 Eksentrisitas Graf Bipartisi Komplit  $K_{4,10}$  ..... 100  
Tabel 3. 20 Jumlah Jarak Eksentrik Graf Pembagi Nol ..... 106



## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Graf $G$ .....	18
Gambar 2.2	Graf $G$ yang Terhubung Langsung .....	19
Gambar 2.3	Graf $G_1$ .....	21
Gambar 2.4	Graf $G$ merupakan Graf Beraturan-4 .....	22
Gambar 2.5	Graf $K_1, K_2, K_3$ dan $K_4$ .....	23
Gambar 2.6	$G_1$ Graf Bipartisi dan $G_2$ Graf Bintang .....	24
Gambar 2.7	Graf $G$ Terhubung .....	26
Gambar 2.8	Graf $G_4$ .....	27
Gambar 2.9	Graf Pembagi Nol dari Gelanggang $\mathbb{Z}_{10}$ .....	29
Gambar 2.10	Graf Hubungan antara Allah Swt. dengan Hamba-Nya dan Graf Hubungan antara Sesama Hamba .....	32
Gambar 3. 1	Graf $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ .....	42
Gambar 3. 2	Graf $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3)$ .....	43
Gambar 3. 3	Graf $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5)$ .....	44
Gambar 3. 4	Graf $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_7)$ .....	45
Gambar 3. 5	Graf $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{11})$ .....	46
Gambar 3. 6	Graf $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2)$ .....	48
Gambar 3. 7	Graf $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)$ .....	49
Gambar 3. 8	Graf $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)$ .....	50
Gambar 3. 9	Graf $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7)$ .....	51
Gambar 3. 10	Graf $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{11})$ .....	52
Gambar 3. 11	Graf $\Gamma(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2)$ .....	55
Gambar 3. 12	Graf $\Gamma(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_3)$ .....	56
Gambar 3. 13	Graf $\Gamma(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5)$ .....	57

Gambar 3. 14 Graf $\Gamma(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7)$ .....	58
Gambar 3. 15 Graf $\Gamma(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{11})$ .....	60
Gambar 3. 16 Graf $\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$ dengan $p, q$ Bilangan Prima .....	62
Gambar 3. 17 Graf Komplit $K_2$ .....	65
Gambar 3. 18 Graf Bipartisi Komplit $K_{1,2}$ .....	66
Gambar 3. 19 Graf Bipartisi Komplit $K_{1,4}$ .....	67
Gambar 3. 20 Graf Bipartisi Komplit $K_{1,6}$ .....	68
Gambar 3. 21 Graf Bipartisi Komplit $K_{1,10}$ .....	71
Gambar 3. 22 Graf Bipartisi Komplit $K_{2,1}$ .....	76
Gambar 3. 23 Graf Bipartisi Komplit $K_{2,2}$ .....	77
Gambar 3. 24 Graf Bipartisi Komplit $K_{2,4}$ .....	78
Gambar 3. 25 Graf Bipartisi Komplit $K_{2,6}$ .....	80
Gambar 3. 26 Graf Bipartisi Komplit $K_{2,10}$ .....	83
Gambar 3. 27 Graf Bipartisi Komplit $K_{4,1}$ .....	89
Gambar 3. 28 Graf Bipartisi Komplit $K_{4,2}$ .....	91
Gambar 3. 29 Graf Bipartisi Komplit $K_{4,4}$ .....	93
Gambar 3. 30 Graf Bipartisi Komplit $K_{4,6}$ .....	95
Gambar 3. 31 Graf Bipartisi Komplit $K_{4,10}$ .....	99
Gambar 3. 32 Interpretasi Graf pada Jarak Waktu Shalat .....	114

## ABSTRAK

Khasana, Ika Nur. 2018. **Jumlah Jarak Eksentrik Graf Pembagi Nol dari Gelanggang  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  dengan  $p, q$  Bilangan Prima**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) H.Wahyu H. Irawan, M.Pd. (II) Dr. Ahmad Barizi, M.A.

**Kata Kunci:** pembagi nol, gelanggang  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ , graf pembagi nol, eksentrisitas titik, titik eksentrik, jumlah jarak eksentrik

Kajian graf dalam gelanggang merupakan salah satu permasalahan yang menarik untuk diteliti. Misalkan  $R$  adalah suatu gelanggang maka unsur tak nol  $a$  di  $R$  disebut pembagi nol jika terdapat  $b$  unsur tak nol dari  $R$  sehingga  $a \cdot b = 0$ . Graf pembagi nol dari suatu gelanggang komutatif  $R$  didefinisikan sebagai graf sederhana dengan titik-titiknya adalah anggota pembagi nol dari suatu gelanggang komutatif tersebut. Kedua titik misalkan  $x$  dan  $y$  dikatakan terhubung jika dan hanya jika  $x \cdot y = 0$  dimana  $x, y \neq 0$ . Salah satu contoh gelanggang komutatif adalah gelanggang  $\mathbb{Z}_p$  dengan  $p$  bilangan prima, disebut juga dengan daerah integral. Namun berdasarkan definisi, daerah integral tidak mempunyai unsur pembagi nol sehingga tidak terdapat graf pembagi nol dari daerah integral. Misalkan  $G = (V, E)$  merupakan graf terhubung maka jumlah jarak eksentrik dari graf  $G$  tersebut dapat didefinisikan sebagai  $\xi^{ds}(G) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} [e(u) + e(v)] d(u, v)$  dengan  $e(u)$  adalah eksentrisitas titik  $u$  di graf  $G$  dan  $d(u, v)$  adalah jarak antara  $u$  dan  $v$ . Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui dan membuktikan teorema jumlah jarak eksentrik graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  dengan  $p, q$  bilangan prima.

Berdasarkan hasil pembahasan, diperoleh kesimpulan bahwa jumlah jarak eksentrik graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  adalah 2, dan untuk gelanggang  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  untuk  $p = 2, q \geq 3$  dan  $q$  bilangan prima adalah  $4q^2 - 9q + 5$ . Sedangkan untuk jumlah jarak eksentrik graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  dengan  $p \geq 3$  dan  $q \geq 3$  adalah  $4p^2 + 4q^2 + 4pq - 16p - 16q + 20$ .



## ABSTRACT

Khasana, Ika Nur. 2018. **The Eccentric Distance Sum of Zero Divisor Graph of a Ring  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  with  $p, q$  Prime**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Islamic State University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) H.Wahyu H. Irawan, M.Pd. (II) Dr. Ahmad Barizi, M.A.

**Keyword:** zero divisor, ring  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ , zero divisor graph, eccentricity, the eccentric distance sum

Study of graph in the ring is an interesting research problem. Let  $R$  be a ring then a nonzero element  $a$  of  $R$  is called a zero divisor if there is a nonzero element  $b$  in  $R$  such that  $a \cdot b = 0$ . The zero divisor graph of a commutative ring  $R$  is defined as a simple graph with vertices are zero divisor elements of the commutative ring. Two vertices,  $x$  and  $y$  are said to be connected if and only if  $x \cdot y = 0$  where  $x, y \neq 0$ . One example of a commutative ring is the ring  $\mathbb{Z}_p$  with  $p$  prime called the integral domain. But by definition, the integral domain does not have a zero divisor element. Let  $G = (V, E)$  is a connected graph, the eccentric distance sum of graph  $G$  can be defined as  $\xi^{ds}(G) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} [e(u) + e(v)]d(u, v)$  with  $e(u)$  is eccentricity vertex  $u$  in graph  $G$  and  $d(u, v)$  is distance between vertex  $u$  and  $v$ . The purpose of this research is to find out and prove theorems of the eccentric distance sum of zero divisor graph of a ring  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  with  $p, q$  prime.

The results show that the eccentric distance sum of zero divisor graph of a ring  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  is 2 and for the ring  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  with  $p = 2, q \geq 3$  and  $q$  prime integers is  $4q^2 - 9q + 5$ . As for the eccentric distance sum of zero divisor graph of a ring  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  with  $p \geq 3$  dan  $q \geq 3$  and  $q$  prime numbers is  $4p^2 + 4q^2 + 4pq - 16p - 16q + 20$ .

## ملخص

حسنا، إيكّا نور. ٢٠١٨. مقدار مسافة *Eccentric* المخططة صفر المقسوم من حلقة  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  مع  $p, q$  عدد أولي. البحث الجامعي. شعبة الرياضيات، كلية العلو و التكنولوجيا، الجامعة الاسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف: (١) الحاج وحيو هنكي ايراوان الماجستير التريبة (٢) الدكتور أحمد باريزي الماجستير.

الكلمات المفتاحية: صفر المقسوم، حلقة  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ ، المخططة صفر المقسوم، *eccentricity*، مقدار المسافة *eccentric*

دراسة غراف في حلقة هي واحده من المشاكل التي تم للبحث. اسمحوا  $R$  يكون حلقة ثم يسمى عنصر غير صفري  $a$  من  $R$  يسمى صفر المقسوم إذا كان هناك عنصر غير صفري  $b$  في  $R$  بحيث  $a \cdot b = 0$ . يتم تعريف المخططة صفر المقسوم من حلقة  $R$  commutative كمخطط بسيط مع القمم هو صفر القاسم عناصر من حلقة *commutative*. كلا القمم، واسمحوا  $x$  و  $y$  ويقال ان تكون متصلا إذا فقط إذا  $x \cdot y = 0$  حيث  $x, y \neq 0$ . واحد الامثلة علي الحلقة *commutative* هو الحلقة  $\mathbb{Z}_p$  مع  $p$  رئيس وزراء دعا *integral domain*. ولكن بحكم التعريف، *integral domain* لا يحتوي علي عنصر صفر المقسوم. دعوانا  $G = (V, E)$  هو مخطط متصلة، ويمكن تعريف مقدار المسافة *eccentric* من مخطط  $G$  كما  $\xi^{ds}(G) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} [e(u) + e(v)]d(u,v)$  حيث  $d(u,v)$  هو المسافة بين الذروة  $u$  و  $v$ . والغرض من هذا البحث هو معرفه وإثبات النظريات من مقدار المسافة *eccentric* المخططة صفر المقسوم من حلقة  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  مع  $p, q$  برايم.

تظهر النتائج ان مقدار المسافة *eccentric* المخططة صفر المقسوم من حلقة  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  هو 2 ومن أجل حلقة  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  مع  $p = 2, q \geq 3$  و  $q$  برايم هو  $4q^2 - 9q + 5$ . اما بالنسبة مقدار المسافة *eccentric* المخططة صفر المقسوم من حلقة  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  مع  $q \geq 3$  و  $p \geq 3$  و  $q$  برايم هو  $4p^2 + 4q^2 + 4pq - 16p - 16q + 20$ .

## BAB I

### PENDAHULUAN

#### 1.1 Latar Belakang

Al-Qur'an adalah wahyu Allah Swt. yang diturunkan kepada Nabi Muhammad Saw merupakan mu'jizat paling besar pengaruhnya. Al-Quran merupakan sumber utama dari segala sumber yang berisi tentang kisah-kisah orang-orang serta nabi-nabi terdahulu, perintah dan larangan sebagai pedoman dan petunjuk hidup bagi manusia, serta kabar gembira dan ancaman yang diberikan oleh Allah Swt. kepada umat muslim yang melaksanakan atau tidak menjalankan perintah dan larangan-Nya.

Salah satu keistimewaan Al-Qur'an yang paling utama adalah hubungannya dengan ilmu pengetahuan, begitu pentingnya ilmu pengetahuan dalam Al-Qur'an sehingga Allah Swt. menurunkan ayat yang pertama kali dalam al-Quran surat Al-'Alaq/96:1-5 yang berbunyi:

اقْرَأْ بِاسْمِ رَبِّكَ الَّذِي خَلَقَ (١) خَلَقَ الْإِنْسَانَ مِنْ عَلَقٍ (٢) اقْرَأْ وَرَبُّكَ الْأَكْرَمُ (٣) الَّذِي عَلَّمَ بِالْقَلَمِ (٤) عَلَّمَ الْإِنْسَانَ مَا لَمْ يَعْلَمْ (٥)

*“Bacalah dengan (menyebut) nama Tuhanmu Yang menciptakan. Dia telah menciptakan manusia dari segumpal darah. Bacalah, dan Tuhanmulah Yang Maha Pemurah. Yang mengajar (manusia) dengan perantaran kalam. Dia mengajar kepada manusia apa yang tidak diketahuinya.” (Q.S. Al-Alaq/96 : 1-5)*

Pada surah Al-Alaq ayat 1-5 di atas, menjelaskan tentang perintah membaca merupakan hal yang sangat penting bagi manusia. Allah Swt. telah menciptakan manusia dari segumpal darah dan memuliakannya dengan mengajar membaca, menulis dan memberikannya pengetahuan. Dengan kata lain, manusia

yang mulia dihadapan Allah Swt. apabila manusia tersebut memiliki ilmu pengetahuan dengan cara belajar. *Iqra* yang berarti bacalah merupakan simbol diwajibkannya untuk mempelajari ilmu pengetahuan bagi umat muslim karena dengan mempelajari ilmu pengetahuan diharapkan dapat mempertebal keyakinan terhadap Allah Swt.

Matematika merupakan salah satu cabang ilmu pengetahuan yang mendasari berbagai macam ilmu yang lain. Seiring dengan perkembangan teknologi, matematika juga mengalami perkembangan yang membuat para ilmuwan untuk mengembangkannya semakin meningkat. Salah satu cabang matematika yang dapat diteliti lebih lanjut adalah teori graf. Dalam berbagai hal, graf menjadi alat pemodelan yang sangat baik untuk menjelaskan dan menyelesaikan suatu permasalahan. Penelitian tentang teori graf hingga saat ini masih banyak dikaji oleh para ilmuwan karena aplikasinya masih dibutuhkan dalam berbagai bidang.

Suatu graf  $G$  didefinisikan sebagai himpunan  $V$  tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik (*vertex*) bersama dengan himpunan  $E$  yang mungkin kosong dari sisi (*edge*) yang menghubungkan sepasang titik. Graf  $G$  yang mempunyai himpunan dari titik-titik  $V$  dan himpunan sisi  $E$  dapat dituliskan dengan notasi  $G = (V, E)$ . (Chartrand, dkk, 2016:3).

Dalam Al-Quran, Pencipta (Allah Swt.) dan hamba-hamba-Nya dapat direpresentasikan oleh titik-titik dari suatu graf sedangkan sisi-sisinya merupakan representasi dari hubungan antara Allah Swt. dengan hamba-hamba-Nya dan hubungan antara sesama hamba yang terjalin. Sebagaimana firman Allah Swt. dalam Q.S An-Nisa' ayat 36 yang berbunyi:

وَأَعْبُدُوا اللَّهَ وَلَا تُشْرِكُوا بِهِ شَيْئًا ۚ وَبِالْوَالِدَيْنِ إِحْسَانًا وَبِذِي الْقُرْبَىٰ وَالْيَتَامَىٰ وَالْمَسَاكِينِ وَالْجَارِ ذِي الْقُرْبَىٰ وَالْجَارِ الْجُنُبِ وَالصَّاحِبِ بِالْجَنبِ وَابْنِ السَّبِيلِ وَمَا مَلَكَتْ أَيْمَانُكُمْ ۗ إِنَّ اللَّهَ لَا يُحِبُّ مَن كَانَ مُخْتَالًا فَخُورًا (٣٦)

*“Sembahlah Allah dan janganlah kamu mempersekutukan-Nya dengan sesuatupun. Dan berbuat baiklah kepada dua orang ibu-bapa, karib-kerabat, anak-anak yatim, orang-orang miskin, tetangga yang dekat dan tetangga yang jauh, dan teman sejawat, ibnu sabil dan hamba sahayamu. Sesungguhnya Allah tidak menyukai orang-orang yang sombong dan membangga-banggakan diri.” (Q.S An-Nisa’/4:36)*

Pada Q.S An-Nisa ayat 36 di atas, menjelaskan tentang perintah Allah Swt. untuk menyembah hanya kepada-Nya saja dan mengarahkan segala bentuk ibadah kepada-Nya. Selain itu, Allah Swt. memerintah untuk selalu berbuat baik dalam hal ucapan maupun dalam hal perbuatan kepada kedua orang tua, baik kerabat dekat maupun jauh, anak yatim, orang-orang miskin, tetangga jauh dan lain-lain.

Kajian graf dalam gelanggang merupakan salah satu permasalahan yang menarik untuk diteliti. Menurut Gilbert dan Gilbert (2009:258) gelanggang  $R$  didefinisikan sebagai suatu himpunan tak kosong  $R$  bersama dengan dua operasi biner yang terdefinisi yakni penjumlahan (+) dan perkalian ( $\times$ ) yang memenuhi sifat grup abelian terhadap operasi penjumlahan, asosiatif terhadap operasi perkalian, serta bersifat distributif terhadap penjumlahan dan perkalian. Apabila gelanggang tersebut bersifat komutatif terhadap operasi perkalian maka disebut dengan gelanggang komutatif.

Salah satu contoh gelanggang komutatif adalah daerah integral. Menurut Gallian (2006:255) daerah integral merupakan gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan dan tidak memiliki unsur pembagi nol. Gelanggang  $\mathbb{Z}_p$ , yakni gelanggang himpunan bilangan bulat modulo  $p$  dengan  $p$  bilangan prima

merupakan gelanggang komutatif yang tidak memiliki pembagi nol sehingga gelanggang tersebut merupakan daerah integral.

Pada penelitian ini, gelanggang yang digunakan adalah gelanggang komutatif yang memiliki unsur pembagi nol. Dengan kata lain, gelanggang yang digunakan merupakan gelanggang komutatif yang bukan merupakan daerah integral. Sehingga gelanggang yang digunakan adalah gelanggang  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ , yakni gelanggang hasil kali kartesian himpunan bilangan bulat modulo  $p$  dengan himpunan bilangan bulat modulo  $q$  untuk  $p, q$  bilangan prima.

Graf pembagi nol dari gelanggang komutatif telah diperkenalkan oleh Beck pada tahun 1988 dalam jurnalnya "Coloring of Commutative Ring". Beck menyatakan bahwa graf pembagi nol dari gelanggang komutatif yang dinotasikan dengan  $\Gamma(R)$  adalah suatu graf dengan titik-titiknya adalah semua elemen dari gelanggang  $R$  dan dua titik terhubung jika perkalian titik keduanya sama dengan nol.

Penelitian mengenai graf pembagi nol tersebut dilanjutkan oleh Anderson dan Lingston pada tahun 1999 yang mendefinisikan graf pembagi nol dari gelanggang komutatif adalah suatu graf dengan titik-titiknya adalah semua elemen dari gelanggang  $R$  dan dengan dua titik yang berbeda, misalkan  $x$  dan  $y$  terhubung oleh suatu sisi atau bertetangga jika dan hanya jika  $x \cdot y = 0$ . Dengan demikian titik 0 akan bertetangga dengan semua titik dan titik yang bukan 0 pasti terhubung dengan titik 0. Selanjutnya penelitian tersebut, dikaji kembali oleh Wicaksono dan Sholeha pada tahun 2013 yang membahas tentang sifat-sifat graf pembagi nol dari ring komutatif dengan elemen kesatuan.

Misalkan  $G$  graf terhubung dan misalkan  $u$  dan  $v$  merupakan titik di  $G$ . Jarak (*distance*) dari  $u$  dan  $v$  di  $G$ , dinotasikan dengan  $d(u, v)$  adalah panjang lintasan  $u - v$  di  $G$ . Eksentrisitas (*eccentricity*) titik  $u$  di  $G$ , dinotasikan dengan  $e(u)$ , adalah jarak terbesar dari  $u$  ke semua titik di  $G$ . Jika  $u$  dan  $v$  adalah titik pada  $G$  sehingga  $e(u) = d(u, v)$ , maka  $v$  disebut titik eksentrik dari  $u$ . Dengan kata lain, titik  $v$  disebut dengan titik eksentrik dari  $u$  jika jarak dari  $u$  ke  $v$  sama dengan eksentrisitas dari  $u$ . Menurut Padmapriya dan Mathad (2017:52), jumlah jarak eksentrik atau *the eccentric distance sum* didefinisikan sebagai  $\xi^{ds}(G) = \sum_{u \in V(G)} e(u) D(u)$  dimana  $e(u)$  merupakan eksentrisitas titik  $u$  di  $G$  dan  $D(u) = \sum_{v \in V(G)} d(u, v)$  merupakan jumlah dari semua jarak dari titik  $u$ .

Permasalahan yang muncul dalam pembahasan mengenai jumlah jarak eksentrik dari suatu graf adalah menentukan pola umum jumlah jarak eksentrik dari graf tersebut. Pola umum tersebut merupakan suatu konjektur yang perlu dibuktikan agar menjadi sebuah teorema. Salah satu penelitian tentang jumlah jarak eksentrik dari suatu graf telah dilakukan oleh Yu, dkk pada tahun 2011 yang membahas tentang jumlah jarak eksentrik dari graf pohon dan graf *unicyclic*. Kemudian pada tahun 2017, Padmapriya P dan Veena Mathad melakukan penelitian tentang jumlah jarak eksentrik dari graf roda, graf bintang, graf sapu dan graf lollipop. Oleh karena itu, dalam penelitian ini penulis tertarik untuk meneliti tentang jumlah jarak eksentrik graf pembagi nol yang disajikan dalam judul “Jumlah Jarak Eksentrik Graf Pembagi Nol dari Gelanggang  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  dengan  $p, q$  Bilangan Bulat Prima”.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana teorema jumlah jarak eksentrik graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  dengan  $p, q$  bilangan bulat prima.

## 1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas maka tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui dan membuktikan teorema jumlah jarak eksentrik graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  dengan  $p, q$  bilangan bulat prima.

## 1.4 Batasan Masalah

Penelitian ini hanya membahas tentang jumlah jarak eksentrik graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  dengan  $p, q$  bilangan prima. Penulis akan membatasi gelanggang  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  dengan  $p = 2, 3$  dan  $5$  dan  $q = 2, 3, 5, 7$  dan  $11$ .

## 1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberi manfaat sebagai berikut:

### 1. Bagi Penulis

Manfaat penelitian ini bagi penulis adalah sebagai pembelajaran untuk memahami serta menentukan pola umum jumlah jarak eksentrik graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  dengan  $p, q$  bilangan bulat prima sehingga dapat mengembangkan wawasan ilmu pengetahuan khususnya dibidang teori graf.

### 2. Bagi Mahasiswa

Bagi mahasiswa, penelitian ini dapat dijadikan sebagai bahan rujukan dan pembelajaran mengenai jumlah jarak eksentrik graf pembagi nol dari suatu gelanggang.



### 3. Bagi Lembaga

Bagi lembaga, hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai sumbangan teori dalam pengembangan kajian dalam teori graf khususnya pada kajian jumlah jarak eksentrik graf pembagi nol dari suatu gelanggang.

#### 1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi pustaka, yaitu dengan mengumpulkan data dan informasi dari berbagai sumber seperti buku, artikel, jurnal dan lain-lain. Penelitian ini dilakukan dengan mengkaji buku-buku tentang gelanggang komutatif dan teori graf dan jurnal-jurnal yang memuat topik tentang graf pembagi nol. Langkah selanjutnya menentukan jumlah jarak eksentrik dari beberapa contoh graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  dengan  $p, q$  bilangan prima.

Adapun langkah-langkah yang digunakan peneliti dalam membahas penelitian ini adalah

1. Menunjukkan himpunan  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  untuk  $p, q$  bilangan prima bersama dengan operasi penjumlahan (+) dan operasi perkalian ( $\times$ ) merupakan gelanggang.
2. Menunjukkan unsur pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  untuk  $p, q$  bilangan prima berdasarkan definisi unsur pembagi nol dari suatu gelanggang.
3. Menggambar beberapa contoh graf pembagi nol dari suatu gelanggang  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  dengan  $p, q$  bilangan bulat prima.
4. Menentukan jarak dari setiap titik ke titik-titik yang lain pada graf pembagi nol tersebut.

5. Menentukan titik eksentrik dari setiap titik kemudian menentukan jumlah jarak eksentrik dari setiap contoh graf pembagi nol dari suatu gelanggang  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  dengan  $p, q$  bilangan bulat prima.
6. Melalui beberapa contoh tersebut, kemudian dicari pola tertentu. Pola yang didapatkan merupakan suatu konjektur atau dugaan. Konjektur yang didapatkan tersebut kemudian dibuktikan.

### 1.7 Sistematika Penulisan

Dalam penulisan penelitian ini, penulis menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari atas 4 bab, dan masing-masing bab dibagi dalam subbab dengan sistematika penulisan sebagai berikut:

#### BAB I : PENDAHULUAN

Pada bab ini diharapkan mampu memberikan gambaran terhadap isi penelitian agar pembaca dapat mengetahui apa yang dimaksud dalam pembahasan. Bab ini memiliki beberapa pokok subbahasan yang meliputi: latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan.

#### BAB II : KAJIAN PUSTAKA

Pada bab ini terdiri atas konsep-konsep yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep (teori-teori) tersebut antara lain membahas tentang pengertian grup, pengertian gelanggang, unsur pembagi nol pada suatu gelanggang, pengertian graf, graf yang terhubung langsung dan terkait langsung, graf-graf khusus, dan lain-lain.

### BAB III : PEMBAHASAN

Dalam bab ini pertama penulis akan menunjukkan himpunan  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  untuk  $p, q$  bilangan prima bersama dengan operasi penjumlahan (+) dan operasi perkalian ( $\times$ ) merupakan gelanggang. Selanjutnya akan ditunjukkan unsur pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  untuk  $p, q$  bilangan prima dan menggambarkan graf pembagi nolnya. Selanjutnya akan ditentukan eksentrisitas titik-titik dan titik eksentrik graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  untuk  $p, q$  bilangan prima kemudian akan ditentukan jumlah jarak eksentrik dari setiap contoh graf pembagi nol dari gelanggang tersebut. Pola yang didapatkan dari contoh-contoh tersebut merupakan suatu konjektur atau dugaan. Konjektur yang didapatkan tersebut kemudian dibuktikan.

### BAB IV : PENUTUP

Pada bab ini penulis memberikan kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan dan juga dilengkapi dengan saran-saran yang berkaitan dengan hasil penelitian.

## BAB II

### KAJIAN PUSTAKA

#### 2.1. Grup

Menurut Dummit dan Foote (2004:16-17) grup adalah struktur aljabar dengan suatu operasi biner yang memenuhi beberapa aksioma. Operasi biner  $\star$  pada himpunan tak kosong  $G$  adalah suatu pemetaan dari  $G \times G$  ke  $G$ . Misalkan  $(G, \star)$  adalah grup maka  $(G, \star)$  harus memenuhi empat aksioma, yaitu tertutup terhadap operasi  $\star$ , bersifat asosiatif, memiliki identitas dan setiap elemennya memiliki invers.

##### Definisi 2.1.1

- (1) Grup adalah suatu pasangan berurut  $(G, \star)$  dengan  $G$  berupa himpunan dan  $\star$  adalah operasi biner pada  $G$  yang memenuhi aksioma-aksioma berikut:
  - i. Tertutup terhadap operasi  $\star$ , yakni  $a \star b \in G$  untuk semua  $a, b \in G$ ,
  - ii.  $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$ , untuk semua  $a, b, c \in G$  (yakni  $\star$  bersifat asosiatif),
  - iii. Terdapat  $e \in G$  sehingga  $a \star e = e \star a = a$ , untuk semua  $a \in G$  ( $e$  disebut unsur *identitas* dari  $G$ ),
  - iv. Untuk setiap  $a \in G$ , terdapat  $a^{-1} \in G$  sehingga  $a \star a^{-1} = a^{-1} \star a = e$  ( $a^{-1}$  disebut *invers* dari  $a$ ).
- (2) Grup  $(G, \star)$  disebut *grup Abelian* atau grup komutatif jika  $a \star b = b \star a$  untuk semua  $a, b \in G$ .

Sebagai contoh, akan ditunjukkan bahwa  $(\mathbb{Z}, +)$  dengan  $\mathbb{Z}$  merupakan himpunan bilangan bulat merupakan grup dengan memenuhi aksioma-aksioma

di atas. Ambil sebarang  $a, b \in \mathbb{Z}$  maka  $a + b \in \mathbb{Z}$ , sehingga  $\mathbb{Z}$  bersifat tertutup terhadap operasi  $+$ . Selanjutnya ambil sebarang  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  maka  $(a + b) + c = a + (b + c) \in \mathbb{Z}$ , sehingga  $\mathbb{Z}$  bersifat asosiatif terhadap operasi  $+$ . Misalkan  $I \in \mathbb{Z}$ , untuk setiap  $a \in \mathbb{Z}$  maka  $a + I = a$  dan  $I + a = a$ , sehingga diperoleh  $I = a - a = 0$ . Jadi elemen identitasnya adalah 0. Selanjutnya misalkan  $b \in \mathbb{Z}$  adalah invers dari  $a$  atau dapat ditulis  $a^{-1} = b$ , untuk setiap  $a \in \mathbb{Z}$  maka  $a + b = 0$  dan  $b + a = 0$ , sehingga diperoleh  $b = 0 - a = -a$  atau dapat dikatakan invers dari  $a$  adalah  $-a$ . Karena himpunan bilangan bulat  $\mathbb{Z}$  tertutup terhadap operasi  $+$ , bersifat asosiatif, terdapat elemen identitas, dan untuk setiap elemen di  $\mathbb{Z}$  memiliki invers, maka himpunan bilangan bulat  $\mathbb{Z}$  dengan operasi  $+$  merupakan grup.

### Definisi 2.1.2

Misalkan  $G$  adalah suatu grup. Subhimpunan  $H$  dari  $G$  adalah *subgrup* dari  $G$  jika  $H$  tak kosong dan  $H$  tertutup terhadap operasi di  $G$  dan invers (yakni  $x, y \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$  dan  $xy \in H$ ). Himpunan  $H$  adalah subgrup dari  $G$ , dilambangkan dengan  $H \leq G$  (Dummit dan Foote, 2004: 46).

Berdasarkan Definisi 2.1.2, misalkan  $H$  adalah subhimpunan tak kosong dari  $G$  yang tertutup terhadap operasi  $\star$  di  $G$  dan invers, yakni  $x, y \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$  dan  $x \star y \in H$ . Dalam hal ini, penulisan  $x \star y \in H$  dapat dituliskan sebagai  $xy \in H$ . Operasi  $\star$  di  $H$  bersifat asosiatif dikarenakan operasi  $\star$  di  $H$  adalah pembatasan operasi  $\star$  di  $G$  pada  $H$ . Karena  $H$  tak kosong, maka terdapat  $h \in H$ . Sifat ketertutupan dari  $H$  terhadap operasi di  $G$  dan invers mengakibatkan  $h^{-1} \in H$  dan  $hh^{-1} \in H$ . Padahal  $hh^{-1} = e$ . Jadi  $H$  memiliki unsur identitas,

khususnya identitas di  $H$  sama dengan unsur identitas di  $G$ . Dengan demikian  $H$  memenuhi aksioma grup. Jadi subgrup adalah grup.

## 2.2. Gelanggang

Menurut Dummit dan Foote (2004: 223) gelanggang adalah suatu himpunan tak kosong bersama dengan dua operasi biner yang dilambangkan dengan  $(R, +, \times)$  yakni operasi penjumlahan (dinotasikan dengan  $+$ ) dan operasi perkalian (dinotasikan dengan  $\times$ ) yang memiliki sifat grup Abelian terhadap operasi  $+$ , asosiatif terhadap operasi  $\times$  serta bersifat distributif terhadap operasi  $+$  dan  $\times$ .

### Definisi 2.2.1

(1) Gelanggang (*ring*)  $R$  adalah suatu himpunan bersama dua operasi biner  $+$  dan  $\times$  (disebut penjumlahan dan perkalian) yang memenuhi aksioma-aksioma berikut:

- i.  $(R, +)$  adalah suatu grup Abelian,
- ii. Operasi  $\times$  bersifat asosiatif:  $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ , untuk semua  $a, b, c \in R$
- iii. pada  $R$  berlaku hukum distributif: untuk semua  $a, b, c \in R$ ,

$$(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c) \text{ dan}$$

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c).$$

(2) Gelanggang  $R$  disebut gelanggang komutatif jika operasi perkaliannya bersifat komutatif.

(3) Gelanggang  $R$  disebut gelanggang dengan unsur satuan (memuat 1) jika terdapat  $0 \neq 1 \in R$  dengan  $1 \times a = a \times 1 = a$ , untuk semua  $a \in R$ .

Pada definisi di atas, operasi  $\times$  pada gelanggang  $R$  yakni  $a \times b \in R$  untuk  $a, b \in R$  dapat dituliskan sebagai  $ab \in R$ . Sebagai contoh, himpunan hasil kali kartesian  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2)\}$  dengan operasi  $+$  dan  $\times$  merupakan gelanggang. Pertama akan ditunjukkan himpunan hasil kali kartesian  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$  dengan operasi  $+$  merupakan grup Abelian. Operasi  $+$  pada himpunan  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$  didefinisikan sebagai  $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$  dengan  $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ . Perhatikan tabel berikut.

Tabel 2. 1 Tabel Cayley dari  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$  dengan Operasi  $+$

$+$	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(1,0)	(1,1)	(1,2)
(0,0)	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(1,0)	(1,1)	(1,2)
(0,1)	(0,1)	(0,2)	(0,0)	(1,1)	(1,2)	(1,0)
(0,2)	(0,2)	(0,0)	(0,1)	(1,2)	(1,0)	(1,1)
(1,0)	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(0,0)	(0,1)	(0,2)
(1,1)	(1,1)	(1,2)	(1,0)	(0,1)	(0,2)	(0,0)
(1,2)	(1,2)	(1,0)	(1,1)	(0,2)	(0,0)	(0,1)

Berdasarkan tabel 2.1 di atas,  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$  bersifat tertutup dan asosiatif terhadap operasi  $+$  karena untuk sebarang  $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$  maka  $(a, b) + (c, d) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$  dan  $((a, b) + (c, d)) + (e, f) = (a, b) + ((c, d) + (e, f)) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ . Misalkan  $I \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ , untuk setiap  $(a, b) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$  maka

$$\begin{aligned}
 (a, b) + I &= (a, b) & \text{dan} & & I + (a, b) &= (a, b) \\
 I &= (a, b) - (a, b) & & & I &= (a, b) - (a, b) \\
 I &= (a - a, b - b) & & & I &= (a - a, b - b) \\
 I &= (0, 0) & & & I &= (0, 0)
 \end{aligned}$$

Jadi elemen identitasnya adalah  $(0,0)$ . Selain itu, himpunan  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$  juga memuat invers, karena untuk setiap  $(a,b) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$  terdapat  $(c,d) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$  sedemikian sehingga  $(a,b) + (c,d) = (0,0) = I$ . Selanjutnya himpunan  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$  juga bersifat komutatif terhadap operasi  $+$  karena untuk sebarang  $(a,b), (c,d) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$  maka  $(a,b) + (c,d) = (c,d) + (a,b) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ . Dengan demikian himpunan  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$  dengan operasi  $+$  merupakan grup Abelian.

Selanjutnya akan ditunjukkan himpunan hasil kali kartesian  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$  dengan operasi  $\times$  bersifat asosiatif. Operasi  $\times$  pada himpunan  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$  didefinisikan sebagai  $(a,b) \times (c,d) = (a \times c, b \times d)$  dengan  $(a,b), (c,d) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ . Perhatikan tabel berikut:

Tabel 2. 2 Tabel Cayley dari  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$  dengan Operasi  $+$

$\times$	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(1,0)	(1,1)	(1,2)
(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)
(0,1)	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,0)	(0,1)	(0,2)
(0,2)	(0,0)	(0,2)	(0,1)	(0,0)	(0,2)	(0,1)
(1,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(1,0)	(1,0)	(1,0)
(1,1)	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(1,0)	(1,1)	(1,2)
(1,2)	(0,0)	(0,2)	(0,1)	(1,0)	(1,2)	(1,1)

Berdasarkan tabel 2.2 di atas,  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$  bersifat tertutup dan asosiatif terhadap operasi  $\times$  karena untuk sebarang  $(a,b), (c,d), (e,f) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$  maka  $(a,b) \times (c,d) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$  dan  $((a,b) \times (c,d)) \times (e,f) = (a,b) \times ((c,d) \times (e,f)) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ . Selanjutnya pada  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$  juga berlaku sifat distributif yaitu  $(a,b) \times ((c,d) + (e,f)) = (a \times c, b \times d) + (a \times e, b \times f) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$  dan



$((a, b) + (c, d)) \times (e, f) = (a \times e, b \times f) + (c \times e, d \times f) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$  untuk sebarang  $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ . Karena aksioma i dan ii terpenuhi maka himpunan hasil kali kartesian  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$  dengan operasi  $+$  dan  $\times$  merupakan gelanggang.

### Definisi 2.2.2

Misalkan  $R$  adalah suatu gelanggang.

- (1) Unsur tak nol  $a$  di  $R$  disebut pembagi nol jika terdapat  $b$  unsur tak nol dari  $R$  sehingga  $ab = 0$  atau  $ba = 0$ .
- (2) Misalkan gelanggang  $R$  mempunyai unsur satuan  $1 \neq 0$ . Unsur  $u$  di  $R$  disebut *unit* jika terdapat unsur  $v$  dari  $R$  sedemikian sehingga  $uv = vu = 1$ . (Dummit dan Foote, 2004:226).

Gelanggang  $R$  dengan unsur satuan  $1$ , dimana  $1 \neq 0$  disebut gelanggang pembagian (*skewfield*) jika setiap  $0 \neq u \in R$  memiliki invers terhadap perkalian, yakni terdapat  $v \in R$  sedemikian hingga  $uv = vu = 1$ . Suatu gelanggang pembagian yang komutatif disebut lapangan (*field*). Misalkan  $F$  adalah lapangan, maka dapat diartikan bahwa  $F$  adalah grup Abelian terhadap penjumlahan,  $F - \{0\}$  adalah grup Abelian terhadap perkalian, dan di  $F$  berlaku sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan.

### Definisi 2.2.3

Gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan  $1 \neq 0$  disebut daerah integral jika gelanggang tersebut tidak memiliki pembagi nol (Dummit dan Foote, 2004: 228).

**Definisi 2.2.4**

Menurut Gallian (2006: 258) karakteristik dari suatu gelanggang  $R$  adalah bilangan bulat positif terkecil  $n$  sedemikian sehingga  $nx = 0$  untuk setiap  $x$  di  $R$ . Jika tidak terdapat bilangan bulat positif yang demikian maka dapat dikatakan karakteristik dari suatu gelanggang tersebut adalah 0. Karakteristik dari suatu gelanggang  $R$  dinotasikan dengan  $\text{char } R$ .

Sebagai contoh, gelanggang bilangan bulat mempunyai karakteristik 0. Misalkan  $\mathbb{Z}_5 = \{0,1,2,3,4\}$  dengan operasi penjumlahan dan perkalian merupakan gelanggang. Jadi gelanggang  $\mathbb{Z}_5$  mempunyai karakteristik 5.

**Definisi 2.2.5**

Subgelanggang dari gelanggang  $R$  adalah subgrup dari  $(R, +)$  yang tertutup terhadap perkalian (Dummit dan Foote, 2004: 228).

Berdasarkan definisi tersebut, misalkan  $R$  merupakan gelanggang dengan operasi penjumlahan dan perkalian. Misalkan juga  $S$  adalah subgrup dari  $R$  yang tertutup terhadap operasi perkalian. Karena  $S$  adalah subgrup, maka  $S$  adalah subhimpunan dari  $R$ , oleh karena itu sifat komutatif pada operasi penjumlahan di  $R$  juga berlaku di  $S$ . Dengan demikian,  $S$  adalah grup Abelian terhadap penjumlahan. Selanjutnya sifat asosiatif pada operasi perkalian dan distributif perkalian terhadap penjumlahan di  $S$  diwarisi dari  $R$ . Dengan demikian, subgelanggang adalah suatu gelanggang. Setiap gelanggang  $(R, +, \times)$  sedikitnya memiliki dua subgelanggang, yaitu  $\{0\}$  dan  $R$  yang selanjutnya disebut dengan subgelanggang trivial.

### Definisi 2.2.6

Menurut Dummit dan Foote (2004:242) misalkan  $R$  adalah gelanggang,  $I$  adalah subhimpunan dari  $R$  dan  $r \in R$ .

- (1)  $rI = \{ra | a \in I\}$  dan  $Ir = \{ar | a \in I\}$ .
- (2) Subhimpunan  $I$  dari  $R$  disebut *ideal kiri* dari  $R$  jika
  - i.  $I$  adalah subgelanggang dari  $R$ .
  - ii.  $I$  tertutup terhadap perkalian kiri oleh unsur di  $R$ , yakni  $rI \subseteq I$ , untuk semua  $r \in R$ .

Sedangkan subhimpunan  $I$  dari  $R$  disebut *ideal kanan* dari  $R$  jika memenuhi point (i) dan point (ii) digantikan oleh:

- iii.  $I$  tertutup terhadap perkalian kanan oleh unsur dari  $R$ , yakni  $Ir \subseteq I$ , untuk semua  $r \in R$ .

- (3) Suatu subhimpunan  $I$  yang merupakan ideal kiri dan ideal kanan disebut *ideal* dari  $R$ .

Ideal merupakan subgelanggang yang mempunyai sifat khusus, yakni perkalian setiap unsur di gelanggang dengan unsur di ideal ada di ideal.

### 2.3. Graf

Teori graf mempunyai banyak aplikasi praktis dalam berbagai disiplin ilmu, misalnya dalam biologi, ilmu komputer, ekonomi, teknik, informatika, linguistik, matematika, kesehatan, dan ilmu-ilmu sosial. Dalam berbagai hal, graf menjadi alat pemodelan yang sangat baik untuk menjelaskan dan menyelesaikan suatu permasalahan. Penelitian tentang teori graf hingga saat ini masih banyak

dikaji oleh para ilmuwan karena aplikasinya masih dibutuhkan dalam berbagai bidang.

### 2.3.1 Definisi Graf

#### Definisi 2.3.1

Graf  $G$  didefinisikan sebagai pasangan himpunan  $(V, E)$  ditulis dengan notasi  $G = (V, E)$  yang dalam hal ini  $V$  adalah himpunan tak kosong dari titik-titik (*vertex*) dan  $E$  adalah himpunan yang mungkin kosong dari sisi (*edge*) yang menghubungkan sepasang titik (Chartrand, dkk, 2016:3).

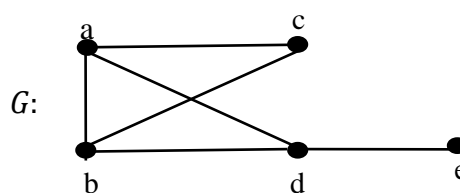
Dari definisi graf di atas menerangkan bahwa  $V$  tidak boleh kosong, sedangkan  $E$  boleh kosong. Graf yang hanya memiliki satu titik tanpa adanya sisi dinamakan graf trivial. Menurut Chartrand, dkk (2016:4) himpunan titik di  $G$  dinotasikan dengan  $V(G)$  dan himpunan sisi dinotasikan dengan  $E(G)$  sedangkan banyaknya unsur di  $V(G)$  disebut *order* dari  $G$  dan dilambangkan dengan  $p(G)$  dan banyaknya unsur di  $E(G)$  disebut *size* atau ukuran dari  $G$  dan dilambangkan dengan  $q(G)$ . Jika graf yang dibicarakan hanya graf  $G$  maka order dan size dari graf  $G$  tersebut cukup ditulis dengan  $p$  dan  $q$  saja.

Sebagai contoh, perhatikan graf  $G$  yang memuat himpunan titik  $V(G)$  dan himpunan sisi  $E(G)$  seperti berikut ini:

$$V(G) = \{a, b, c, d, e\}$$

$$E(G) = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, d), (b, c), (d, e)\}.$$

Graf  $G$  tersebut secara lebih jelas dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2. 1 Graf G

Graf  $G$  di atas mempunyai titik sebanyak 5 sehingga order  $G$  adalah  $p = 5$ . Graf  $G$  mempunyai sisi sebanyak 6 sehingga ukuran graf  $G$  adalah  $q = 6$ . Secara rinci himpunan titik dan himpunan sisi dari graf  $G$  dapat diuraikan sebagai berikut:

$$V(G) = \{a, b, c, d, e\}$$

$$E(G) = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, d), (b, c), (d, e)\}$$

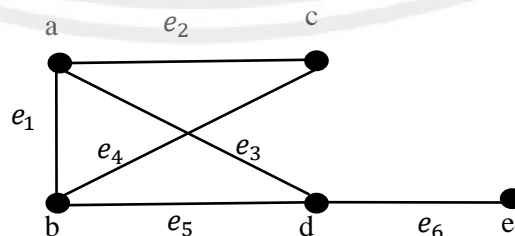
dapat juga ditulis dengan  $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$  dan  $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$  dengan  $e_1 = (a, b)$ ,  $e_2 = (a, c)$ ,  $e_3 = (a, d)$ ,  $e_4 = (b, d)$ ,  $e_5 = (b, c)$  dan  $e_6 = (d, e)$ .

### 2.3.2 Terhubung Langsung dan Terkait Langsung

#### Definisi 2.3.2

Sisi  $e = (u, v)$  dikatakan menghubungkan titik  $u$  dan  $v$ . Jika  $e = (u, v)$  adalah sisi di graf  $G$ , maka  $u$  dan  $v$  disebut terhubung langsung (*adjacent*),  $v$  dan  $e$  serta  $u$  dan  $e$  disebut terkait langsung (*incident*), dan titik  $u$  dan  $v$  disebut ujung dari  $e$ . Dua sisi berbeda  $e_1$  dan  $e_2$  disebut terhubung langsung jika terkait langsung pada satu titik yang sama. Untuk selanjutnya, sisi  $e = (u, v)$  akan ditulis  $e = uv$  (Abdussakir, dkk, 2009: 6).

Perhatikan kembali graf  $G$  berikut.



Gambar 2. 2 Graf  $G$  yang Terhubung Langsung

Berdasarkan gambar 2.2 di atas, titik a dan titik b terhubung langsung, demikian pula dengan titik a dan titik c, titik a dan titik d, serta titik d dan titik e. Titik a dan titik e tidak terhubung langsung, demikian pula dengan titik b dan titik e, serta titik c dan titik e. Sisi  $e_1$  terkait langsung dengan titik a dan titik b. Sisi  $e_2$  terkait langsung dengan titik a dan titik c. Sisi  $e_1$  tidak terkait langsung dengan titik c dan titik d. Perlu diperhatikan bahwa satu sisi hanya dapat terkait langsung dengan dua titik berbeda. Hal ini terjadi karena satu sisi hanya menghubungkan dua titik berbeda. Sisi  $e_1$  dan  $e_2$  terhubung langsung karena terkait langsung pada satu titik yang sama, yaitu titik a. Sisi  $e_1$  dan  $e_6$  tidak terhubung langsung karena tidak terkait langsung pada titik yang sama.

### 2.3.3 Derajat Titik

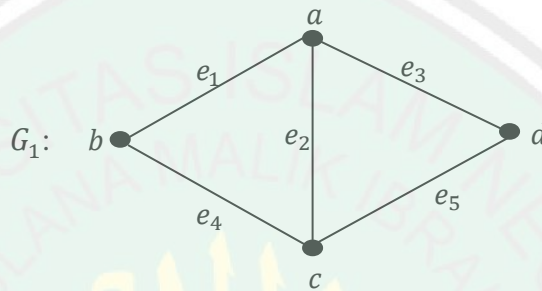
#### Definisi 2.3.3

Derajat dari titik  $v$  di graf  $G$ , ditulis  $deg_G(v)$  adalah banyaknya sisi di  $G$  yang terkait langsung dengan  $v$  (Chartrand, dkk, 2016:5).

Menurut Abdussakir, dkk (2009:9) jika  $v$  adalah titik pada graf  $G$ , maka himpunan semua titik di  $G$  yang terhubung langsung dengan  $v$  disebut dengan lingkungan dari  $v$  dan ditulis  $N_G(v)$ . Derajat dari titik  $v$  di graf  $G$ , ditulis  $deg_G(v)$  adalah banyaknya sisi di  $G$  yang terkait langsung dengan  $v$ . Dalam konteks pembicaraan hanya terdapat satu graf  $G$ , maka tulisan  $deg_G(v)$  disingkat menjadi  $deg(v)$  dan  $N_G(v)$  disingkat menjadi  $N(v)$ . Jika dikaitkan dengan konsep lingkungan, derajat titik  $v$  di graf  $G$  adalah banyaknya anggota dalam  $N(v)$ . Jadi  $deg(v) = |N(v)|$ .

Titik yang berderajat genap disebut dengan titik genap (*even vertices*) dan titik yang berderajat ganjil disebut dengan titik ganjil (*ood vertices*). Sedangkan titik yang berderajat nol disebut *isolated vertices* dan titik yang berderajat satu disebut titik ujung (*end vertices*) (Chartrand, dkk, 2016:6).

Perhatikan graf  $G_1$  berikut yang mempunyai titik  $V(G) = \{a, b, c, d\}$  dan himpunan sisi  $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ .



Gambar 2. 3 Graf  $G_1$

Pada gambar di atas, diperoleh bahwa

$$N(a) = \{b, c, d\}$$

$$N(b) = \{a, c\}$$

$$N(c) = \{a, b, d\}$$

$$N(d) = \{a, c\}$$

Dengan demikian, maka

$$\deg(a) = 3$$

$$\deg(b) = 2$$

$$\deg(c) = 3$$

$$\deg(d) = 2$$

Titik  $b$  dan  $d$  adalah titik genap, titik  $c$  dan  $a$  adalah titik ganjil. Karena tidak ada yang berderajat 0 atau 1, maka tidak terdapat titik terisolasi dan titik ujung pada graf  $G_1$ . Hubungan antara jumlah derajat semua titik dalam suatu graf

$G$  dengan banyak sisi yaitu  $q$  adalah  $\sum_{v \in G} \deg(v) = 2q$  yang dinyatakan dalam teorema berikut.

### Teorema 2.3.1

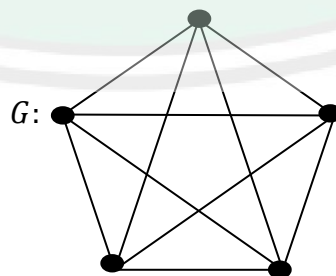
Misalkan  $G$  graf dengan order  $p$  dan ukuran  $q$ , dengan  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ . Maka  $\sum_{i=1}^p \deg(v) = 2q$  (Abdussakir, dkk, 2009:11).

Bukti:

Setiap menghitung derajat suatu titik di  $G$ , maka suatu sisi dihitung satu kali. Karena setiap sisi menghubungkan dua titik berbeda maka ketika menghitung derajat semua titik, sisi akan terhitung dua kali. Dengan demikian diperoleh bahwa jumlah semua derajat titik di  $G$  sama dengan dua kali jumlah sisi di  $G$ .

### 2.3.4 Graf-graf Khusus

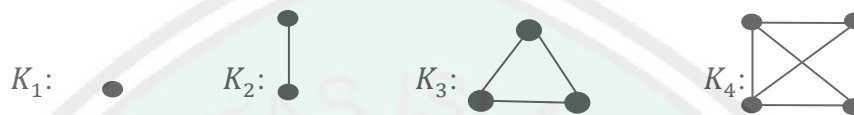
Berkaitan dengan titik, sisi, dan derajat pada graf, terdapat beberapa graf yang memiliki sifat-sifat khusus. Abdussakir, dkk (2009:20) menyatakan bahwa suatu graf  $G$  dapat dikatakan beraturan- $r$  atau beraturan dengan derajat  $r$  jika masing-masing titik  $v$  di  $G$ , maka  $\deg(v) = r$  untuk bilangan bulat tak negatif  $r$ . Graf beraturan-3 biasa juga disebut dengan graf kubik. Pada gambar 2.4 dibawah ini, graf  $G_1$  dan graf  $G_2$  masing-masing beraturan-4.



Gambar 2. 4 Graf  $G$  merupakan Graf Beraturan-4



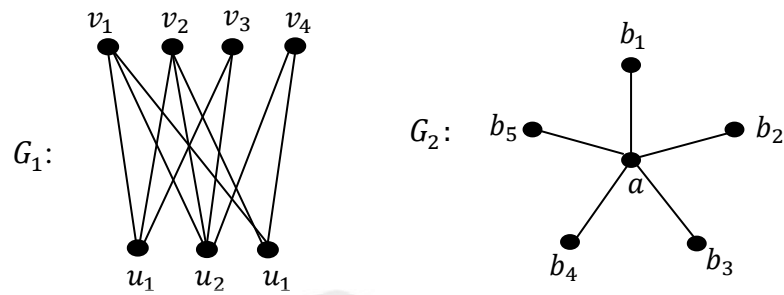
Chartrand, dkk (2016:4) menyatakan bahwa graf komplit (*Complete Graph*) adalah graf dengan dua titik yang berbeda saling terhubung langsung (*adjacent*). Graf komplit dengan order  $n$  dinyatakan dengan  $K_n$ . Dengan demikian, maka graf  $K_n$  merupakan graf beraturan-  $(n - 1)$  dengan order  $p = n$  dan ukuran  $q = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ . Berikut ini adalah gambar graf  $K_1, K_2, K_3$ , dan  $K_4$ .



Gambar 2. 5 Graf  $K_1, K_2, K_3$ , dan  $K_4$

Graf  $G$  dikatakan *bipartisi* jika himpunan titik pada  $G$  dapat dipartisi menjadi dua himpunan tak kosong  $V_1$  dan  $V_2$  sehingga masing-masing sisi pada graf  $G$  tersebut menghubungkan satu titik di  $V_1$  dengan satu titik di  $V_2$ . Jika  $G$  adalah graf bipartisi beraturan- $r$  dengan  $r \geq 1$ , maka  $|V_1| = |V_2|$ . Graf  $G$  dikatakan partisi- $n$  jika himpunan titiknya dapat dipartisi menjadi sebanyak  $n$  himpunan tak kosong  $V_1, V_2, \dots, V_n$  sehingga masing-masing sisi pada graf  $G$  menghubungkan titik pada  $V_i$  dengan titik pada  $V_j$  untuk  $i \neq j$ . Jika  $n = 3$ , graf partisi- $n$  disebut graf tripartis (Abdussakir, dkk, 2009:20).

Suatu graf  $G$  disebut bipartisi komplit jika  $G$  adalah graf bipartisi dan masing-masing titik pada suatu partisi terhubung langsung dengan semua titik pada partisi yang lain. Graf bipartisi komplit dengan  $m$  titik pada salah satu partisi dan  $n$  titik pada partisi yang lain ditulis  $K_{m,n}$ . Graf bipartisi komplit  $K_{1,n}$  disebut graf bintang (*star*) dan dinotasikan dengan  $S_n$ . Jadi,  $S_n$  mempunyai order  $(n - 1)$  dan ukuran  $n$ . Pada gambar berikut ini, graf  $G_1$  adalah graf bipartisi  $K_{3,4}$  dengan himpunan partisi  $V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  dan  $V_2 = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$  dan  $G_2$  adalah graf bintang  $K_{1,5}$  atau  $S_5$  (Abdussakir, dkk, 2009:22).



Gambar 2. 6  $G_1$  Graf Bipartisi dan  $G_2$  Graf Bintang

### 2.3.5 Graf Terhubung

Misalkan  $G$  graf dan  $u, v$  adalah titik di  $G$  (yang tidak harus berbeda). Jalan  $u - v$  pada graf  $G$  adalah barisan berhingga yang selang-seling antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik dan diakhiri dengan titik  $W: u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n = v$  dengan  $e_i = v_{i-1}v_i$  untuk  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  adalah sisi di  $G$ .  $v_0$  disebut titik awal,  $v_n$  disebut titik akhir, titik  $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$  disebut titik internal, dan  $n$  menyatakan panjang dari  $W$ . Jika  $v_0 \neq v_n$  maka  $W$  disebut jalan terbuka. Jika  $v_0 = v_n$  maka  $W$  disebut jalan tertutup. Jalan yang tidak mempunyai sisi disebut dengan jalan trivial (Abdussakir, dkk, 2009:20).

Jalan tertutup tak trivial yang semua titiknya berbeda disebut siklus. Graf berbentuk siklus dengan titik sebanyak  $n$ ,  $n \geq 3$ , disebut graf siklus dan ditulis  $C_n$ . Panjang siklus terpendek pada suatu graf siklik disebut *girth* dari  $G$  dan dinotasikan dengan  $g(G)$ . Graf siklus sering juga disebut sebagai graf lingkaran karena gambarnya dapat dibentuk menjadi lingkaran. Graf siklus juga dapat digambarkan dalam bentuk poligon.  $C_3$  dapat disebut segitiga,  $C_4$  dapat disebut sebagai segiempat, dan secara umum  $C_n$  dapat disebut sebagai segi- $n$ .

Misalkan  $u$  dan  $v$  titik berbeda pada graf  $G$ . Titik  $u$  dan  $v$  dikatakan terhubung (*connected*) jika terdapat lintasan  $u - v$  di  $G$ . Suatu graf  $G$  dikatakan terhubung (*connected*) jika untuk setiap titik  $u$  dan  $v$  yang berbeda di  $G$  terhubung. Dengan kata lain, suatu graf  $G$  dikatakan terhubung (*connected*) jika setiap titik  $u$  dan  $v$  di  $G$  terdapat lintasan  $u - v$  di  $G$ . Sebaliknya, jika ada dua titik  $u$  dan  $v$  di  $G$ , tetapi tidak ada lintasan  $u - v$  di  $G$ , maka  $G$  dikatakan tak terhubung atau *disconnected* (Abdussakir, dkk, 2009:20).

### 2.3.6 Jarak Pada Graf Terhubung

#### Definisi 2.3.4

Misalkan  $G$  graf terhubung dan  $u$  dan  $v$  merupakan titik di  $G$ . Jarak (*distance*) dari  $u$  ke  $v$  di  $G$ , dinotasikan dengan  $d(u, v)$ , adalah panjang lintasan  $u - v$  di  $G$ . Himpunan titik di  $G$  dengan fungsi jarak ini membentuk ruang metrik. Untuk setiap titik  $u, v$ , dan  $w$  di  $G$ , maka

- a.  $d(u, v) \geq 0$  dan  $d(u, v) = 0$  jika dan hanya jika  $u = v$ .
- b.  $d(u, v) = d(v, u)$
- c.  $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$  (Abdussakir, dkk, 2009:56)

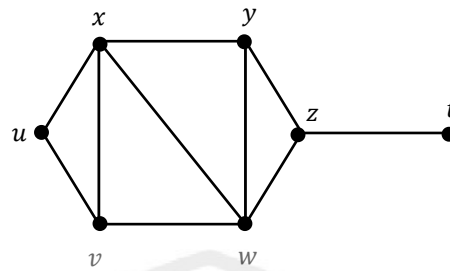
#### Definisi 2.3.5

Menurut Abdussakir, dkk (2009:56) eksentrisitas (*eccentricity*) titik  $u$  di  $G$ , dinotasikan dengan  $e(u)$ , adalah jarak terbesar dari  $u$  ke semua titik di  $G$  sehingga

$$e(u) = \max \{d(u, v) | v \in V(G)\}$$

Jika  $u$  dan  $v$  adalah titik pada  $G$  sehingga  $e(u) = d(u, v)$  maka  $v$  disebut titik eksentrik dari  $u$ . Dengan kata lain, titik  $v$  disebut titik eksentrik dari  $u$  jika jarak dari  $u$  ke  $v$  sama dengan eksentrisitas dari  $u$  (Abdussakir, dkk, 2009:57).

Perhatikan contoh berikut.



Gambar 2. 7 Graf  $G$  Terhubung

Berdasarkan gambar 2.7 dapat dilihat eksentrisitas dan titik eksentrik di graf  $G$  sebagai berikut:

Tabel 2. 3 Eksentrisitas dan Titik Eksentrik Graf  $G$

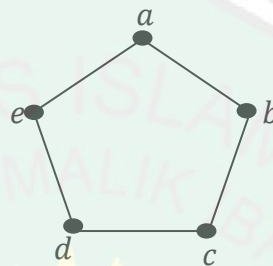
Titik	Eksentrisitas	Titik Eksentrik
$t$	$e(t) = 4$	$u$
$u$	$e(u) = 4$	$t$
$v$	$e(v) = 4$	$z$
$w$	$e(w) = 2$	$t, u$
$x$	$e(x) = 3$	$t$
$y$	$e(y) = 2$	$t, v, u$
$z$	$e(z) = 3$	$u$

Dari tabel 2.3 diatas, diperoleh bahwa  $d(x, y) = 1$ ,  $d(x, w) = 1$ ,  $d(x, v) = 1$ ,  $d(x, u) = 1$ ,  $d(x, z) = 2$ , dan  $d(x, t) = 3$ . Jadi, eksentrisitas titik  $x$  di  $G$  adalah  $e(x) = 3$  dan titik eksentrik dari  $x$  adalah  $t$ . Selanjutnya akan didefinisikan *the eccentric distance sum* atau jumlah jarak eksentrik dari suatu graf sebagai berikut.

#### Definisi 2.3.6

Misalkan  $G = (V, E)$  merupakan graf terhubung. *The eccentric distance sum* atau jumlah jarak eksentrik dari graf  $G$  didefinisikan sebagai  $\xi^{ds}(G) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} [e(u) + e(v)]d(u, v)$  dengan  $e(u)$  adalah eksentrisitas titik  $u$  di graf  $G$  dan  $d(u, v)$  adalah jarak antara  $u$  dan  $v$  (Padmapriya dan Mathad, 2017:51).

Sedangkan menurut Yu, dkk, (2011:99) misalkan  $G$  graf terhubung dengan  $V(G)$  merupakan himpunan titik-titik di  $G$ . *The eccentric distance sum* atau jumlah jarak eksentrik dapat didefinisikan sebagai  $\xi^{ds}(G) = \sum_{v \in V(G)} e(v) D_G(v)$  dimana  $e(v)$  merupakan eksentrisitas titik  $v$  di  $G$  dan  $D_G(v) = \sum_{u \in V(G)} d(u, v)$  merupakan jumlah dari semua jarak dari titik  $v$ . Sebagai contoh perhatikan gambar 2.8 berikut.



Gambar 2. 8 Graf  $G_4$

Berdasarkan gambar 2.8 dapat dilihat eksentrisitas dan titik eksentrik di graf  $G_4$  sebagai berikut.

Tabel 2. 4 Eksentrisitas dan Titik Eksentrik Graf  $G_4$

Titik	Eksentrisitas	Titik Eksentrik
$a$	$e(a) = 2$	$c, d$
$b$	$e(b) = 2$	$d, e$
$c$	$e(c) = 2$	$a, e$
$d$	$e(d) = 2$	$a, b$
$e$	$e(e) = 2$	$b, c$

Berdasarkan tabel 2.4 di atas, jumlah jarak eksentrik dari graf  $G_4$  dapat ditentukan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \xi^{ds}(G_4) &= [e(a) + e(b)]d(a, b) + [e(a) + e(c)]d(a, c) + [e(a) + e(d)]d(a, d) \\ &\quad + [e(a) + e(e)]d(a, e) + [e(b) + e(c)]d(b, c) \\ &\quad + [e(b) + e(d)]d(b, d) + [e(b) + e(e)]d(b, e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +[e(c) + e(d)]d(c, d) + [e(c) + e(e)]d(c, e) \\
& = (2 + 2)1 + (2 + 2)2 + (2 + 2)2 + (2 + 2)1 + (2 + 2)1 + (2 + 2)2 \\
& \quad + (2 + 2)2 + (2 + 2)1 + (2 + 2)2 \\
& = 4 + 8 + 8 + 4 + 4 + 8 + 8 + 4 + 8 \\
& = 56
\end{aligned}$$

### 2.3.7 Graf Pembagi Nol

#### Definisi 2.3.7

Diberikan  $R$  adalah gelanggang komutatif dengan elemen satuan dan pembagi nolnya adalah  $Z(R)$ . Sebuah graf pembagi nol,  $\Gamma(R)$  adalah graf sederhana dengan titik-titiknya adalah anggota pembagi nol dari suatu gelanggang komutatif tersebut. Kedua titik misalkan  $x$  dan  $y$  dikatakan terhubung jika dan hanya jika  $x \cdot y = 0$  dimana  $x, y \neq 0$  (Wicaksono dan Sholeha, 2013:2).

Sebagai contoh, misalkan suatu himpunan  $\mathbb{Z}_{10} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}\}$  dengan operasi penjumlahan dan perkalian merupakan suatu gelanggang komutatif. Dalam gelanggang ini terdapat lima buah pembagi nol yang tak nol, yakni  $\bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}$ , dan  $\bar{8}$  sedemikian sehingga

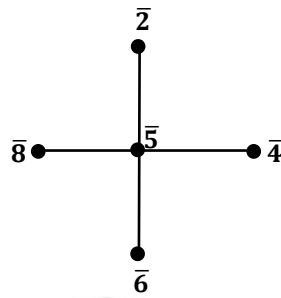
$$\bar{2} \times \bar{5} = \bar{0}$$

$$\bar{4} \times \bar{5} = \bar{0}$$

$$\bar{6} \times \bar{5} = \bar{0}$$

$$\bar{8} \times \bar{5} = \bar{0}$$

Himpunan semua unsur pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_{10}$  adalah  $Z(\mathbb{Z}_{10}) = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{8}\}$ . Sehingga berdasarkan definisi 2.3.6 diatas, dapat digambarkan dalam sebuah graf pembagi nol sebagai berikut.



Gambar 2. 9 Graf Pembagi Nol dari Gelanggang  $\mathbb{Z}_{10}$

### Teorema 2.3.2

Diberikan suatu gelanggang komutatif  $R$  maka  $\Gamma(R)$  merupakan graf pembagi nol dari gelanggang komutatif  $R$  terhubung dengan  $\text{diam}(\Gamma(R)) \leq 3$ .

Bukti:

Misalkan  $R$  merupakan gelanggang komutatif dan  $Z(R)$  adalah himpunan unsur pembagi nol yang tidak nol. Ambil sebarang  $a, b \in Z(R)$  untuk  $a$  dan  $b$  yang berbeda. Misalkan  $a \cdot b = 0$ , maka terdapat lintasan  $a - b$  dengan  $d(a, b) = 1$ . Selanjutnya, misalkan  $a \cdot b \neq 0$ , maka  $a$  dan  $b$  tidak terhubung oleh suatu sisi. Untuk  $a^2 = 0$  dan  $b^2 = 0$  terdapat lintasan  $a - ab - b$  dengan  $d(a, b) = 2$ . Untuk  $a^2 \neq 0$  dan  $b^2 = 0$  maka terdapat  $c \in Z(R) - \{a, b\}$  dengan  $a \cdot c = 0$ . Jika  $c \cdot b = 0$  maka terdapat lintasan  $a - c - b$  dengan  $d(a, b) = 2$ , jika  $c \cdot b \neq 0$  maka terdapat lintasan  $a - cb - b$  dengan  $d(a, b) = 2$ . Selanjutnya untuk  $a^2 \neq 0$  dan  $b^2 \neq 0$  maka terdapat  $e, f \in Z(R) - \{a, b\}$  dimana  $e \cdot a = 0$  dan  $f \cdot b = 0$ . Jika  $e = f$  maka terdapat lintasan  $a - e - b$  atau  $a - f - b$  dengan  $d(a, b) = 2$ . Jika  $e \neq f$  maka untuk  $e \cdot f = 0$  terdapat lintasan  $a - e - f - b$  dengan  $d(a, b) = 3$ . Sedangkan untuk  $e \cdot f \neq 0$  maka terdapat lintasan  $a - ef - b$  dengan  $d(a, b) = 2$ .

## 2.4 Kajian Teori Graf dalam Al-Qur'an

Mempelajari matematika yang sesuai dengan paradigma *ulul albab*, tidak cukup hanya berbekal kemampuan intelektual semata, tetapi perlu didukung secara bersama dengan kemampuan emosional dan spiritual. Pola pikir deduktif dan logis dalam matematika juga bergantung pada kemampuan intuitif dan imajinatif serta mengembangkan pendekatan rasionalis, empiris dan logis (Abdussakir, 2007:24).

Firman Allah Swt. dalam surah Al-Baqarah ayat 2 yang berbunyi:

ذٰلِكَ الْكِتٰبُ لَا رَيْبَ ۙ فِيْهِ ۙ هُدًى لِّلْمُتَّقِيْنَ (۲)

*“Kitab (Al Quran) ini tidak ada keraguan padanya; petunjuk bagi mereka yang bertakwa,” (Q.S Al-Baqarah:2)*

Ibnu katsir meriwayatkan bahwa makna *“alkitab”* dalam ayat ini adalah Alquran. Begitupula Imam Alqurtubi dalam tafsirnya meriwayatkan makna *“alkitab”* dalam ayat ini adalah Alquran yang telah dijanjikan kepada Nabi Muhammad yang akan diturunkan kepadanya. Alquran merupakan kitab suci yang tak diragukan lagi kebenaran pesan yang dikandungnya dan menjadi petunjuk bagi orang-orang yang bertakwa dalam menjalani hidup di dunia.

Salah satu keistimewaan Al-Qur'an yang paling utama adalah hubungannya dengan ilmu pengetahuan, begitu pentingnya ilmu pengetahuan dalam Al-Qur'an sehingga Allah Swt. menurunkan ayat yang pertama kali dalam Q.S Al-'Alaq ayat 1 sampai 5. Ayat tersebut menjelaskan tentang perintah membaca merupakan hal yang sangat penting bagi manusia. Allah Swt. telah menciptakan manusia dari segumpal darah dan memuliakannya dengan mengajar membaca, menulis dan memberikannya pengetahuan. Dengan kata lain, manusia



yang mulia dihadapan Allah Swt. apabila manusia tersebut memiliki ilmu pengetahuan dengan cara belajar.

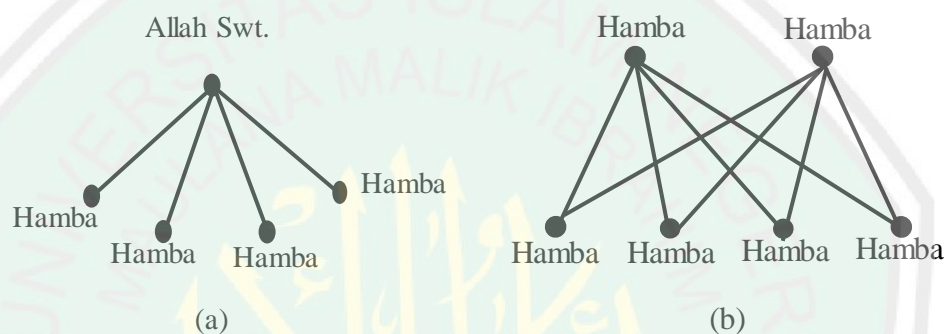
Salah satu ilmu pengetahuan yang dapat diintegrasikan dari Al-Qur'an adalah matematika. Cabang-cabang matematika yang ada dalam Al-Quran diantaranya adalah masalah statistik, pemodelan matematika, struktur aljabar, logika, teori graf, dan lain-lain. Dalam penelitian ini topik yang dapat diambil dalam matematika adalah teori graf. Graf menurut definisi merupakan suatu himpunan tak kosong yang memuat objek-objek yang disebut titik dan suatu daftar pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda yang disebut dengan sisi. Titik dan sisi merupakan substansi utama dari teori graf ini.

Dalam Al-Quran, Pencipta (Allah Swt.) dan hamba-hamba-Nya dapat direpresentasikan oleh titik-titik dari suatu graf sedangkan sisi-sisinya merupakan representasi dari hubungan antara Allah Swt. dengan hamba-hamba-Nya dan hubungan antara sesama hamba yang terjalin. Sebagaimana firman Allah Swt. dalam Q.S An-Nisa' 4 ayat 36 yang berbunyi:

وَأَعْبُدُوا اللَّهَ وَلَا تُشْرِكُوا بِهِ شَيْئًا ۚ وَبِالْوَالِدَيْنِ إِحْسَانًا وَبِذِي الْقُرْبَىٰ وَالْيَتَامَىٰ وَالْمَسَاكِينِ وَالْجَارِ ذِي الْقُرْبَىٰ وَالْجَارِ الْجُنُبِ وَالصَّاحِبِ بِالْجَنبِ وَابْنِ السَّبِيلِ وَمَا مَلَكَتْ أَيْمَانُكُمْ ۚ إِنَّ اللَّهَ لَا يُحِبُّ مَن كَانَ مُخْتَالًا فَخُورًا (٣٦)

*“Sembahlah Allah dan janganlah kamu mempersekutukan-Nya dengan sesuatupun. Dan berbuat baiklah kepada dua orang ibu-bapa, karib-kerabat, anak-anak yatim, orang-orang miskin, tetangga yang dekat dan tetangga yang jauh, dan teman sejawat, ibnu sabil dan hamba sahayamu. Sesungguhnya Allah tidak menyukai orang-orang yang sombong dan membangga-banggakan diri” (Q.S An-Nisa’:36).*

Interpretasi secara teori graf dari ayat tersebut, titik-titik dalam suatu graf dapat direpresentasikan sebagai Pencipta (Allah Swt.) dan hamba-hamba-Nya sedangkan sisi-sisinya merupakan representasi dari hubungan antara Allah Swt. dengan hamba-hamba-Nya dan hubungan antara sesama hamba yang terjalin, *Hablun min Allah wa Hablun min An-Nas*. Sehingga graf yang dapat terbentuk dari interpretasi tersebut berupa graf bintang dan graf bipartisi komplit sebagai berikut.



Gambar 2. 10 (a) Graf Hubungan antara Allah Swt. dengan Hamba-Nya, (b) Graf Hubungan antara Sesama Hamba

Allah Swt. memerintahkan kepada hamba-Nya untuk selalu menyembah dan mengerjakan segala bentuk ibadah hanya kepada-Nya. Menurut Faqih (2000), Allah Yang Maha Suci dan Maha Tinggi memerintahkan supaya beribadah kepada-Nya yang Esa tiada sekutu bagi-Nya, karena Dialah yang menciptakan, memberi nikmat, dan memberi karunia kepada makhluk-Nya sepanjang masa dan keadaan. Dialah yang paling berhak dibanding makhluk-Nya untuk diesakan dan tidak ada sekutu dengan apapun di antara makhluk-makhluk-Nya.

Pada ayat diatas, setelah Allah Swt memerintahkan untuk selalu beribadah kepada-Nya, kemudian Allah Swt. melarang hamba-Nya untuk menyekutukan diri-Nya dengan yang lain. Mengabdikan dan menyembah kepada Allah Swt.

dinamakan ibadah. Beribadah dengan penuh keikhlasan hati, mengaku keesaan-Nya dan tidak mempersekutukan-Nya dengan sesuatu.

Allah Swt. berfirman dalam surah Al-Ikhlâs ayat 1 sampai 4 yang berbunyi:

قُلْ هُوَ اللَّهُ أَحَدٌ (١) اللَّهُ الصَّمَدُ (٢) لَمْ يَلِدْ وَلَمْ يُولَدْ (٣) وَ لَمْ يَكُنْ لَهُ كُفُوًا أَحَدٌ (٤)

“Katakanlah: "Dialah Allah, Yang Maha Esa. Allah adalah Tuhan yang bergantung kepada-Nya segala sesuatu. Dia tiada beranak dan tidak pula diperanakkan, dan tidak ada seorangpun yang setara dengan Dia." (Q.S Al-Ikhlâs:1-4)

Tujuan utama kehadiran Al-Qur'an adalah memperkenalkan Allah Swt. dan mengajak manusia untuk mengesakan-Nya serta patuh kepada-Nya. Surat ini memperkenalkan Allah Swt. dengan memerintahkan Nabi Muhammad Saw. Untuk menyampaikan sekaligus menjawab pertanyaan sementara orang tentang Tuhan yang beliau sembah. Ayat di atas menyatakan: *katakanlah* wahai Nabi Muhammad kepada yang bertanya kepadamu bahkan kepada siapa pun bahwa *Dia* Yang Wajib wujud-Nya dan yang berhak disembah adalah Allah Tuhan Yang Maha Esa.

Menurut M. Quraish Shihab (2002:715) kata (أَحَدٌ) *ahad/esa* terambil dari akar kata (وحدة) *wahdah/kesatuan*. Kata (أَحَدٌ) *ahad* bisa berfungsi sebagai nama dan sifat bagi sesuatu. Apabila ia berkedudukan sebagai sifat, maka ia hanya digunakan untuk Allah Swt. semata. Dalam ayat pertama yang ditafsirkan ini, kata

(أَحَدٌ) *ahad* berfungsi sebagai sifat Allah Swt., dalam arti bahwa Allah Swt memiliki sifat tersendiri yang tidak dimiliki oleh selain-Nya.

Keesaan dzat mengandung pengertian bahwa seseorang harus percaya bahwa Allah Swt. tidak terdiri dari unsur-unsur atau bagian-bagian. Karena bila zat Yang Kuasa itu terdiri dari dua unsur atau lebih – betapapun kecilnya unsur atau bagian itu, atau dengan kata unsur lain (bagian) itu merupakan syarat bagi wujud-Nya. Hal ini bertentangan dengan sifat Ketuhanan yang tidak membutuhkan sesuatu apapun (Shihab, 2002:717).

Keesaan dalam perbuatan mengandung arti bahwa segala sesuatu yang berada di alam raya ini, baik sistem kerjanya maupun sebab dan wujudnya, kesemuanya adalah hasil perbuatan Allah Swt. semata. Apa yang dikehendaki-Nya terjadi, dan apa yang tidak dikehendaki-Nya tidak akan terjadi, tidak ada daya (untuk memperoleh manfaat), tidak pula kekuatan ada daya (untuk menolak mudharat) kecuali bersumber dari Allah Swt. Tetapi ini bukan berarti bahwa Allah Swt. berlaku sewenang-wenang, atau “bekerja” tanpa sistem. Keesaan perbuatan-Nya dikaitkan dengan hukum-hukum, atau takdir dan sunatullah yang ditetapkan-Nya. Keesaan ini merupakan hal-hal yang harus diketahui dan diyakini (Shihab, 2002:718).

Keesaan beribadah secara tulus kepada-Nya yang merupakan perwujudan dari makna keesaan terdahulu. Salah satu ragam ibadah yang paling jelas adalah amalan tertentu yang ditetapkan cara dan atau kadarnya langsung oleh Allah Swt. atau melalui Rasul-Nya, dan yang secara populer dikenal dengan istilah ibadah *mahdhah* (murni) (Shihab, 2002:719s).

Interpretasi konsep keesaan Allah Swt. dalam matematika salah satunya dapat dilihat dari bilangan prima. Menurut Abdussakir (2014:42) suatu bilangan bulat  $p > 1$  dikatakan prima jika faktor positifnya hanyalah 1 dan  $p$  (dirinya sendiri). Bilangan 1 tidak prima karena hanya mempunyai satu pembagi. Bilangan yang tidak prima dan bukan bilangan 1 disebut bilangan komposit. Sekarang akan dikaji makna bilangan prima secara matematika. Perhatikan tabel berikut untuk melihat perbedaan bilangan prima dan bilangan komposit.

Tabel 2. 5 Beberapa Bilangan Prima, Komposit, dan Pembaginya

Bilangan prima	Pembagi	Bilangan komposit	Pembagi
7	<b>1,7</b>	8	<b>1,2,4,8</b>
11	<b>1,11</b>	20	<b>1,2,4,5,10,20</b>
29	<b>1,29</b>	40	<b>1,2,4,5,8,10,20,40</b>
97	<b>1,97</b>	100	<b>1,2,4,5,10,20,25,50,100</b>

Berdasarkan tabel 2.5 diatas terlihat bahwa ketika bilangan prima difaktorkan dan faktornya atau pembaginya diurutkan mulai dari yang terkecil sampai yang terbesar akan diperoleh bilangan prima tersebut selalu berdekatan dengan 1. Tidak ada pembagi yang lain yang terdapat diantara bilangan prima itu sendiri dengan bilangan 1. Sedangkan pada bilangan komposit diperoleh bahwa ketika pembaginya diurutkan mulai dari yang terkecil sampai yang terbesar akan diperoleh bilangan komposit tersebut tidak berdekatan dengan bilangan 1. Dapat dikatakan bahwa terdapat pembagi yang lain diantara bilangan komposit dan bilangan 1. Semakin besar bilangan komposit tersebut maka terdapat pembagi yang lain yang cenderung semakin banyak diantara bilangan komposit dan bilangan 1.

Jika hal ini dimaknai dan direnungi, maka pribadi prima adalah pribadi yang selalu dekat dengan Yang Satu, Yang Esa, Dzat yang Maha Tunggal, yaitu Allah Swt. sebagaimana disebutkan dalam Q.S Al-Ikhlâs ayat 1 diatas.

Pribadi prima adalah pribadi yang tidak ada penghalang antara dirinya dengan Allah Swt. Hati orang yang mempunyai kepribadian prima selalu terpaut dengan Allah Swt. Tidak ada penyakit dalam hati pribadi prima yang dapat menghalangi hubungannya dengan Allah Swt.



### BAB III

#### PEMBAHASAN

#### 3.1 Gelanggang $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ untuk $p, q$ Bilangan Prima dengan Operasi Penjumlahan dan Operasi Perkalian

Diketahui himpunan  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q = \{(\overline{0}, \overline{0}), (\overline{0}, \overline{1}), \dots, (\overline{p-1}, \overline{q-1})\}$  untuk  $p, q$  bilangan prima. Penulis mendefinisikan operasi penjumlahan (+) dan perkalian ( $\times$ ) di  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  sebagai  $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$  dan  $(a, b) \times (c, d) = (ac, bd)$  untuk setiap  $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ . Berdasarkan definisi 2.2.1, akan ditunjukkan himpunan  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  untuk  $p, q$  bilangan prima bersama dengan operasi + dan operasi  $\times$  yang terdefinisi di  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  memenuhi aksioma-aksioma berikut:

i.  $(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q, +)$  adalah suatu grup Abelian

Akan ditunjukkan bahwa operasi + tertutup di  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ . Ambil sebarang  $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  dengan  $a, c \in \mathbb{Z}_p$  dan  $b, d \in \mathbb{Z}_q$  maka  $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ . Karena  $(a, b) + (c, d) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  maka operasi + tertutup di  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ . Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa operasi + bersifat assosiatif. Ambil sebarang  $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  dengan  $a, c, e \in \mathbb{Z}_p$  dan  $b, d, f \in \mathbb{Z}_q$  maka

$$\begin{aligned} ((a, b) + (c, d)) + (e, f) &= (a + c, b + d) + (e, f) \\ &= (a + c + e, b + d + f) \\ &= (a + (c + e), b + (d + f)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (a, b) + (c + e, d + f) \\
 &= (a, b) + ((c, d) + (e, f))
 \end{aligned}$$

Karena  $((a, b) + (c, d)) + (e, f) = (a, b) + ((c, d) + (e, f))$  maka himpunan  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  bersifat assosiatif terhadap operasi  $+$ .

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa terdapat unsur identitas terhadap operasi  $+$  di  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ . Misalkan  $I = (x, y) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  dengan  $x \in \mathbb{Z}_p$  dan  $y \in \mathbb{Z}_q$ , untuk setiap  $(a, b) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  dengan  $a \in \mathbb{Z}_p$  dan  $b \in \mathbb{Z}_q$  maka

$$I + (a, b) = (a, b)$$

$$(x, y) + (a, b) = (a, b)$$

$$(x + a, y + b) = (a, b)$$

Karena  $(x + a, y + b) = (a, b)$  maka dapat dituliskan sebagai  $x + a = a$  dan  $y + b = b$ . Oleh karena  $x + a = a$  dan  $y + b = b$  maka  $x = \bar{0}$  dan  $y = \bar{0}$ . Dengan demikian unsur identitas dari  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  terhadap operasi  $+$  adalah  $I = (x, y) = (\bar{0}, \bar{0}) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ .

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa untuk setiap  $(m, n) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  dengan  $m \in \mathbb{Z}_p$  dan  $n \in \mathbb{Z}_q$  mempunyai invers penjumlahan. Misalkan  $(a, b) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  dengan  $a \in \mathbb{Z}_p$  dan  $b \in \mathbb{Z}_q$  adalah invers penjumlahan dari  $(m, n) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  maka

$$(a, b) + (m, n) = (\bar{0}, \bar{0})$$

$$(a + m, b + n) = (\bar{0}, \bar{0})$$

Karena  $(a + m, b + n) = (\bar{0}, \bar{0})$  maka dapat dituliskan sebagai  $a + m = \bar{0}$  dan  $b + n = \bar{0}$ . Oleh karena  $a + m = \bar{0}$  maka  $a = \bar{0} - \bar{m} = \overline{p - m} \in \mathbb{Z}_p$  dan karena  $b + n = \bar{0}$  maka  $b = \bar{0} - \bar{n} = \overline{q - n} \in \mathbb{Z}_q$ . Dengan demikian untuk setiap



$(m, n) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  dengan  $m \in \mathbb{Z}_p$  dan  $n \in \mathbb{Z}_q$  terdapat  $(a, b) = (\overline{p-m}, \overline{q-n}) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  yang merupakan invers dari  $(m, n) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ .

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa operasi  $+$  bersifat komutatif. Ambil sebarang  $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  dengan  $a, c \in \mathbb{Z}_p$  dan  $b, d \in \mathbb{Z}_q$ . Perhatikan bahwa,  $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

$$= (c + a, d + b)$$

$$= (c, d) + (a, b)$$

Karena  $(a, b) + (c, d) = (c, d) + (a, b)$ , maka operasi  $+$  pada  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  bersifat komutatif. Dengan demikian,  $(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q, +)$  adalah suatu grup Abelian.

ii. Operasi  $\times$  bersifat asosiatif.

Akan ditunjukkan bahwa operasi  $\times$  bersifat asosiatif. Ambil sebarang  $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  dengan  $a, c, e \in \mathbb{Z}_p$  dan  $b, d, f \in \mathbb{Z}_q$  maka

$$((a, b) \times (c, d)) \times (e, f) = (ac, bd) \times (e, f)$$

$$= (ace, bdf)$$

$$= (a(ce), b(df))$$

$$= (a, b) \times (ce, df)$$

$$= (a, b) \times ((c, d) \times (e, f))$$

Karena  $((a, b) \times (c, d)) \times (e, f) = (a, b) \times ((c, d) \times (e, f))$  maka himpunan  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  bersifat asosiatif terhadap operasi  $\times$ .

iii. Pada  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  berlaku sifat distributif

Ambil sebarang  $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  dengan  $a, c, e \in \mathbb{Z}_p$  dan  $b, d, f \in \mathbb{Z}_q$  maka

$$\begin{aligned}
(a, b) \times ((c, d) + (e, f)) &= (a, b) \times (c + e, d + f) \\
&= (a(c + e), b(d + f)) \\
&= (ac + ae, bd + bf) \\
&= (ac, bd) + (ae, bf) \\
&= ((a, b) \times (c, d)) + ((a, b) \times (e, f))
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
((a, b) + (c, d)) \times (e, f) &= (a + c, b + d) \times (e, f) \\
&= ((a + c)e, (b + d)f) \\
&= (ae + ce, bf + df) \\
&= (ae, bf) + (ce, df) \\
&= ((a, b) \times (e, f)) + ((c, d) \times (e, f))
\end{aligned}$$

Karena  $(a, b) \times ((c, d) + (e, f)) = ((a, b) \times (c, d)) + ((a, b) \times (e, f))$  dan  $((a, b) + (c, d)) \times (e, f) = ((a, b) \times (e, f)) + ((c, d) \times (e, f))$  maka  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  bersifat distributif terhadap operasi  $\times$ .

iv. Pada  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  berlaku sifat komutatif terhadap operasi  $\times$

Ambil sebarang  $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  dengan  $a, c \in \mathbb{Z}_p$  dan  $b, d \in \mathbb{Z}_q$ .

Perhatikan bahwa,  $(a, b) \times (c, d) = (ac, bd)$

$$= (ca, db)$$

$$= (c, d) \times (a, b)$$

Karena  $(a, b) \times (c, d) = (c, d) \times (a, b)$ , maka operasi  $\times$  pada  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  bersifat komutatif.

Karena aksioma i, ii, dan iii terpenuhi, maka himpunan  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  untuk  $p, q$  bilangan prima bersama dengan operasi  $+$  dan operasi  $\times$  yang terdefinisi di

$\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  adalah gelanggang. Selanjutnya karena operasi  $\times$  bersifat komutatif juga, maka gelanggang  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  adalah suatu gelanggang Abelian.

### 3.2 Graf Pembagi Nol dari Gelanggang $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ untuk $p, q$ Bilangan Prima

Batasan gelanggang yang digunakan pada penelitian ini adalah gelanggang  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  dengan  $p = 2, 3, 5$  dan  $q = 2, 3, 5, 7, 11$ . Berdasarkan definisi 2.2.2, unsur pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  dengan  $p, q$  bilangan prima dapat didefinisikan sebagai berikut.

#### Definisi 3.1

Misalkan  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  dengan  $p, q$  bilangan prima merupakan suatu gelanggang maka unsur tak nol  $(a, b) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  disebut pembagi nol jika terdapat unsur tak nol  $(c, d) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  sedemikian sehingga  $(a, b) \times (c, d) = (\bar{0}, \bar{0})$ . Himpunan semua unsur pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  dengan  $p, q$  bilangan prima dinyatakan dengan  $Z(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$ .

Selanjutnya berdasarkan definisi 2.3.7, graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  dengan  $p, q$  bilangan prima dapat didefinisikan sebagai berikut.

#### Definisi 3.2

Graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  untuk  $p, q$  bilangan prima didefinisikan sebagai graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$  dengan titik-titiknya adalah unsur-unsur pembagi nol  $Z(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$ . Misalkan  $(a, b), (c, d) \in Z(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$ , titik  $(a, b)$  dan  $(c, d)$  merupakan titik-titik yang berbeda di  $Z(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$  dikatakan terhubung jika dan hanya jika  $(a, b) \times (c, d) = (\bar{0}, \bar{0})$  dengan  $(a, b) \neq (\bar{0}, \bar{0})$  dan  $(c, d) \neq (\bar{0}, \bar{0})$ .

### 3.2.1 Graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_q$ dengan $q = 2, 3, 5, 7, 11$

Berikut adalah beberapa contoh graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_q$  dengan  $p = 2, 3, 5, 7, 11$ .

#### 1. Graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ .

Diketahui himpunan  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1})\}$  bersama dengan operasi  $+$  dan operasi  $\times$  merupakan gelanggang. Pada gelanggang  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  terdapat 2 unsur pembagi nol yaitu  $(\bar{0}, \bar{1})$  dan  $(\bar{1}, \bar{0})$  sedemikian sehingga  $(\bar{0}, \bar{1}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$ . Himpunan semua unsur pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  adalah  $Z(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) = \{(0,1), (1,0)\}$ .

Sehingga dapat digambarkan dalam sebuah graf pembagi nol sebagai berikut.



Gambar 3. 1 Graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$

Bentuk graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  merupakan graf komplet  $K_2$  atau graf bipartisi komplet  $K_{1,1}$  karena terdapat dua titik yang berbeda yaitu  $(\bar{0}, \bar{1})$  dan  $(\bar{1}, \bar{0})$  yang saling terhubung langsung.

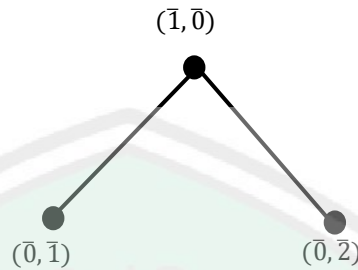
#### 2. Graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ .

Diketahui himpunan  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{2})\}$  bersama dengan operasi  $+$  dan operasi  $\times$  merupakan gelanggang. Pada gelanggang  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$  terdapat 3 unsur pembagi nol yaitu  $(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2})$  dan  $(\bar{1}, \bar{0})$  sedemikian sehingga

$$(\bar{0}, \bar{1}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

$$(\bar{0}, \bar{2}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

Himpunan semua unsur pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$  adalah  $Z(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3) = \{(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{0})\}$ . Sehingga dari unsur pembagi nol tersebut dapat digambarkan dalam sebuah graf pembagi nol sebagai berikut.



Gambar 3.2 Graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3)$

Bentuk graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$  merupakan graf bintang  $S_2$  atau graf bipartisi komplit  $K_{1,2}$  karena terdapat titik  $(\bar{1}, \bar{0})$  yang terhubung langsung dengan titik  $(\bar{0}, \bar{1})$  dan  $(\bar{0}, \bar{2})$ .

### 3. Graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$

Diketahui himpunan  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{3}), (\bar{1}, \bar{4})\}$  bersama dengan operasi  $+$  dan operasi  $\times$  merupakan gelanggang. Pada gelanggang  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$  terdapat 5 unsur pembagi nol yaitu  $(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4})$  dan  $(\bar{1}, \bar{0})$  sehingga

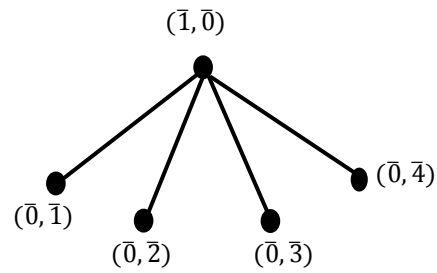
$$(\bar{0}, \bar{1}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

$$(\bar{0}, \bar{2}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

$$(\bar{0}, \bar{3}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

$$(\bar{0}, \bar{4}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

Himpunan semua unsur pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$  adalah  $Z(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5) = \{(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{1}, \bar{0})\}$ . Sehingga dari unsur pembagi nol tersebut dapat digambarkan dalam sebuah graf pembagi nol sebagai berikut.

Gambar 3. 3 Graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5)$ 

Bentuk graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$  merupakan graf bintang  $S_4$  atau graf bipartisi komplit  $K_{1,4}$  karena terdapat titik  $(\bar{1}, \bar{0})$  yang terhubung langsung dengan titik  $(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3})$  dan  $(\bar{0}, \bar{4})$ .

#### 4. Graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_7$

Diketahui himpunan  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_7 = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{3}), (\bar{1}, \bar{4}), (\bar{1}, \bar{5}), (\bar{1}, \bar{6})\}$  bersama dengan operasi  $+$  dan operasi  $\times$  merupakan gelanggang. Pada gelanggang  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_7$  terdapat 7 unsur pembagi nol yaitu  $(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6})$  dan  $(\bar{1}, \bar{0})$  sehingga

$$(\bar{0}, \bar{1}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

$$(\bar{0}, \bar{2}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

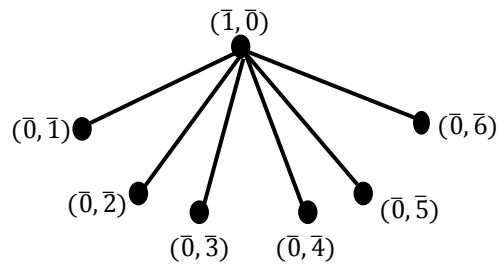
$$(\bar{0}, \bar{3}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

$$(\bar{0}, \bar{4}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

$$(\bar{0}, \bar{5}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

$$(\bar{0}, \bar{6}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

Himpunan semua unsur pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_7$  adalah  $Z(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_7) = \{(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{1}, \bar{0})\}$ . Sehingga dari unsur pembagi nol tersebut dapat digambarkan dalam sebuah graf pembagi nol sebagai berikut.

Gambar 3. 4 Graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_7)$ 

Bentuk graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_7$  merupakan graf bintang  $S_6$  atau graf bipartisi komplit  $K_{1,6}$  karena terdapat titik  $(\bar{1}, \bar{0})$  yang terhubung langsung dengan titik  $(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5})$  dan  $(\bar{0}, \bar{6})$ .

#### 5. Unsur pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{11}$

Diketahui himpunan  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{11} = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{8}), (\bar{0}, \bar{9}), (\bar{0}, \bar{10}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{3}), (\bar{1}, \bar{4}), (\bar{1}, \bar{5}), (\bar{1}, \bar{6}), (\bar{1}, \bar{7}), (\bar{1}, \bar{8}), (\bar{1}, \bar{9}), (\bar{1}, \bar{10})\}$  dengan operasi  $+$  dan operasi  $\times$  merupakan gelanggang. Pada gelanggang  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{11}$  terdapat 11 unsur pembagi nol yaitu  $(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{8}), (\bar{0}, \bar{9}), (\bar{0}, \bar{10})$  dan  $(\bar{1}, \bar{0})$  sedemikian sehingga

$$(\bar{0}, \bar{1}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

$$(\bar{0}, \bar{2}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

$$(\bar{0}, \bar{3}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

$$(\bar{0}, \bar{4}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

$$(\bar{0}, \bar{5}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

$$(\bar{0}, \bar{6}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

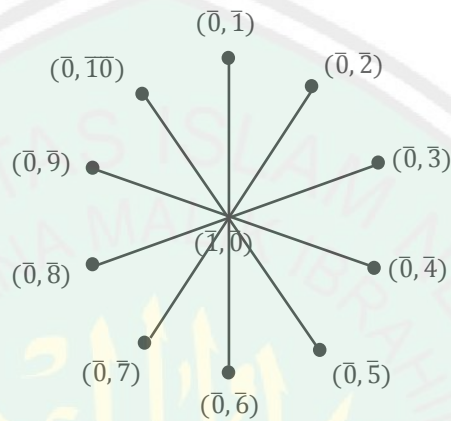
$$(\bar{0}, \bar{7}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

$$(\bar{0}, \bar{8}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

$$(\bar{0}, \bar{9}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

$$(\bar{0}, \bar{10}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

Himpunan semua unsur pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{11}$  adalah  $Z(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{11}) = \{(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{8}), (\bar{0}, \bar{9}), (\bar{0}, \bar{10}), (\bar{1}, \bar{0})\}$ . Sehingga dari unsur pembagi nol tersebut dapat digambarkan dalam sebuah graf pembagi nol sebagai berikut.



Gambar 3. 5 Graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{11})$

Bentuk graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{11}$  merupakan graf bintang  $S_{10}$  atau graf bipartisi komplit  $K_{1,10}$  karena terdapat titik  $(\bar{1}, \bar{0})$  yang terhubung langsung dengan titik  $(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{8}), (\bar{0}, \bar{9})$  dan  $(\bar{0}, \bar{10})$ .

Berdasarkan gambar 3.1 sampai 3.5 diatas, diperoleh kesimpulan graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_q$  dengan  $q = 2, 3, 5, 7, 11$  dalam bentuk tabel berikut.

Tabel 3. 1 Graf Bipartisi Komplit  $K_{1,n}$

Gelanggang $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_q$	Bentuk Graf Bipartisi Komplit $K_{1,n}$
Untuk $q = 2$	Graf bipartisi komplit $K_{1,1}$
Untuk $q = 3$	Graf bipartisi komplit $K_{1,2}$
Untuk $q = 5$	Graf bipartisi komplit $K_{1,4}$
Untuk $q = 7$	Graf bipartisi komplit $K_{1,6}$



Untuk $q = 11$	Graf bipartisi komplit $K_{1,10}$
Untuk $q$ bilangan prima	Graf bipartisi komplit $K_{1,q-1}$

Dengan melihat tabel 3.1 diperoleh teorema 3.1 yaitu sebagai berikut.

### **Teorema 3.1**

Diberikan  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_q$  dengan  $q$  bilangan prima merupakan gelanggang.

Untuk  $q \geq 2$ , graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_q$  adalah graf bipartisi komplit  $K_{1,q-1}$ .

Bukti:

Diketahui himpunan  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_q = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), \dots, (\bar{0}, \overline{q-1}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}), \dots, (\bar{1}, \overline{q-1})\}$  dengan  $q$  bilangan prima bersama dengan operasi  $+$  dan operasi  $\times$  merupakan gelanggang. Himpunan semua unsur pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_q$  adalah  $Z(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_q) = \{(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), \dots, (\bar{0}, \overline{q-1}), (\bar{1}, \bar{0})\}$ .

Berdasarkan definisi dari graf pembagi nol, maka diperoleh keterhubungan dari graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_q)$  yaitu  $(\bar{1}, \bar{0}) \times (\bar{0}, a_i) = (\bar{0}, \bar{0})$  untuk  $a_i = \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots, \overline{q-1} \in \mathbb{Z}_q$ .

Artinya, hanya titik  $(\bar{1}, \bar{0})$  yang terhubung langsung dengan titik-titik lainnya di  $Z(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_q)$ . Sehingga graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_q)$  adalah graf komplit  $K_{1,q-1}$  dengan titik  $(\bar{1}, \bar{0})$  merupakan titik pusat.

### **3.2.2 Graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_q$ dengan $q = 2, 3, 5, 7, 11$**

Berikut adalah beberapa contoh graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_q$  dengan  $p = 2, 3, 5, 7, 11$ .

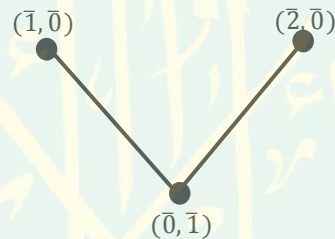
### 1. Graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$

Diketahui himpunan  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{1})\}$  bersama dengan operasi  $+$  dan operasi  $\times$  merupakan gelanggang. Pada gelanggang  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$  terdapat 3 unsur pembagi nol yaitu  $(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0})$  dan  $(\bar{2}, \bar{0})$  sedemikian sehingga

$$(\bar{0}, \bar{1}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

$$(\bar{0}, \bar{1}) \times (\bar{2}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

Himpunan semua unsur pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$  adalah  $Z(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2) = \{(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0})\}$ . Sehingga dapat digambarkan dalam sebuah graf pembagi nol sebagai berikut.



Gambar 3. 6 Graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2)$

Bentuk graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$  merupakan graf bintang  $S_2$  atau graf bipartisi komplit  $K_{2,1}$  karena terdapat titik  $(\bar{0}, \bar{1})$  yang terhubung langsung dengan titik  $(\bar{1}, \bar{0})$  dan  $(\bar{2}, \bar{0})$ .

### 2. Graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$

Diketahui himpunan  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{2})\}$  bersama dengan operasi  $+$  dan operasi  $\times$  merupakan gelanggang. Pada gelanggang  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$  terdapat 4 unsur pembagi nol yaitu  $(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{0})$  dan  $(\bar{2}, \bar{0})$  sedemikian sehingga

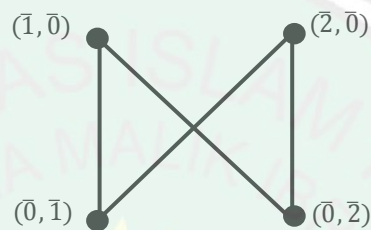
$$(\bar{0}, \bar{1}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

$$(\bar{0}, \bar{2}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

$$(\bar{0}, \bar{1}) \times (\bar{2}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

$$(\bar{0}, \bar{2}) \times (\bar{2}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

Himpunan semua unsur pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$  adalah  $Z(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) = \{(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0})\}$ . Sehingga dapat digambarkan dalam sebuah graf pembagi nol sebagai berikut.



Gambar 3. 7 Graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)$

Bentuk graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$  merupakan graf bipartisi komplit  $K_{2,2}$  karena terdapat titik  $(\bar{1}, \bar{0})$  dan  $(\bar{2}, \bar{0})$  yang masing-masing terhubung langsung dengan titik  $(\bar{0}, \bar{1})$  dan  $(\bar{0}, \bar{2})$ .

### 3. Graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$

Diketahui himpunan  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{3}), (\bar{1}, \bar{4}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{3}), (\bar{2}, \bar{4})\}$  bersama dengan operasi  $+$  dan operasi  $\times$  merupakan gelanggang. Pada gelanggang  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$  terdapat 6 unsur pembagi nol yaitu  $(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{1}, \bar{0})$  dan  $(\bar{2}, \bar{0})$  sedemikian sehingga

$$(\bar{0}, \bar{1}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

$$(\bar{0}, \bar{2}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

$$(\bar{0}, \bar{3}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

$$(\bar{0}, \bar{4}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

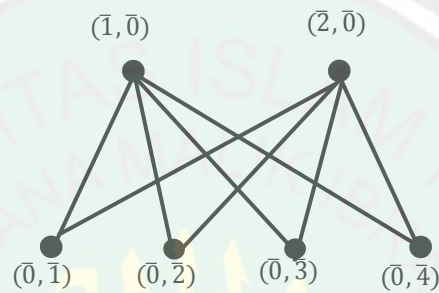
$$(\bar{0}, \bar{1}) \times (\bar{2}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

$$(\bar{0}, \bar{2}) \times (\bar{2}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

$$(\bar{0}, \bar{3}) \times (\bar{2}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

$$(\bar{0}, \bar{4}) \times (\bar{2}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

Himpunan semua unsur pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$  adalah  $Z(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5) = \{(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0})\}$ . Sehingga dapat digambarkan dalam sebuah graf pembagi nol sebagai berikut.



Gambar 3. 8 Graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)$

Bentuk graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$  merupakan graf bipartisi komplit  $K_{2,4}$  karena terdapat titik  $(\bar{1}, \bar{0})$  dan  $(\bar{2}, \bar{0})$  yang masing-masing terhubung langsung dengan titik  $(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3})$  dan  $(\bar{0}, \bar{4})$ .

#### 4. Graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7$

Diketahui himpunan  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7 = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{3}), (\bar{1}, \bar{4}), (\bar{1}, \bar{5}), (\bar{1}, \bar{6}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{3}), (\bar{2}, \bar{4}), (\bar{2}, \bar{5}), (\bar{2}, \bar{6})\}$  bersama dengan operasi  $+$  dan operasi  $\times$  merupakan sebuah gelanggang. Pada gelanggang  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7$  terdapat 8 unsur pembagi nol yaitu  $(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{1}, \bar{0})$  dan  $(\bar{2}, \bar{0})$  sedemikian sehingga

$$(\bar{0}, \bar{1}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

$$(\bar{0}, \bar{2}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

$$(\bar{0}, \bar{3}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

$$(\bar{0}, \bar{4}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

$$(\bar{0}, \bar{5}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

$$(\bar{0}, \bar{6}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

$$(\bar{0}, \bar{1}) \times (\bar{2}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

$$(\bar{0}, \bar{2}) \times (\bar{2}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

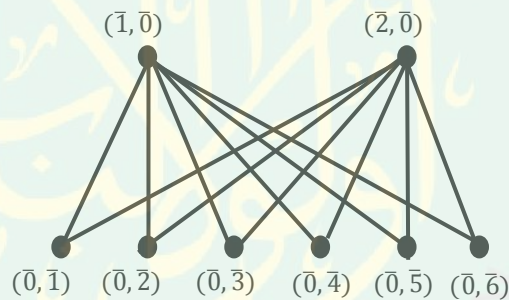
$$(\bar{0}, \bar{3}) \times (\bar{2}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

$$(\bar{0}, \bar{4}) \times (\bar{2}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

$$(\bar{0}, \bar{5}) \times (\bar{2}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

$$(\bar{0}, \bar{6}) \times (\bar{2}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

Himpunan unsur pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7$  adalah  $Z(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7) = \{(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0})\}$ . Sehingga dapat digambarkan dalam sebuah graf pembagi nol sebagai berikut.



Gambar 3. 9 Graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7)$

Bentuk graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7$  merupakan graf bipartisi komplit  $K_{2,6}$  karena terdapat titik  $(\bar{1}, \bar{0})$  dan  $(\bar{2}, \bar{0})$  yang masing-masing terhubung langsung dengan titik  $(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{5})$  dan  $(\bar{0}, \bar{6})$ .

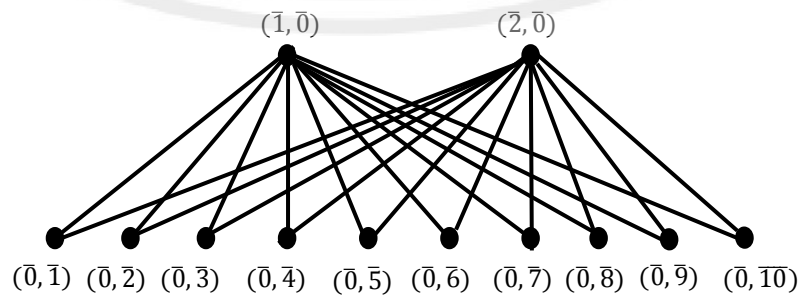
##### 5. Graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{11}$

Diketahui himpunan  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{11} = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{8}), (\bar{0}, \bar{9}), (\bar{0}, \bar{10}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{3}), (\bar{1}, \bar{4}), (\bar{1}, \bar{5}), (\bar{1}, \bar{6}), (\bar{1}, \bar{7}), (\bar{1}, \bar{8}), (\bar{1}, \bar{9}), (\bar{1}, \bar{10}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{3}), (\bar{2}, \bar{4}), (\bar{2}, \bar{5}), (\bar{2}, \bar{6}), (\bar{2}, \bar{7}),$

$(2,8), (2,9), (2,10)\}$  bersama dengan operasi  $+$  dan operasi  $\times$  merupakan sebuah gelanggang. Pada gelanggang  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{11}$  terdapat 12 unsur pembagi nol yaitu  $(0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (0,5), (0,6), (0,7), (0,8), (0,9), (0,10), (1,0)$  dan  $(2,0)$  sedemikian sehingga

$$\begin{array}{ll} (0,1) \times (1,0) = (0,0) & (0,1) \times (2,0) = (0,0) \\ (0,2) \times (1,0) = (0,0) & (0,2) \times (2,0) = (0,0) \\ (0,3) \times (1,0) = (0,0) & (0,3) \times (2,0) = (0,0) \\ (0,4) \times (1,0) = (0,0) & (0,4) \times (2,0) = (0,0) \\ (0,5) \times (1,0) = (0,0) & (0,5) \times (2,0) = (0,0) \\ (0,6) \times (1,0) = (0,0) & (0,6) \times (2,0) = (0,0) \\ (0,7) \times (1,0) = (0,0) & (0,7) \times (2,0) = (0,0) \\ (0,8) \times (1,0) = (0,0) & (0,8) \times (2,0) = (0,0) \\ (0,9) \times (1,0) = (0,0) & (0,9) \times (2,0) = (0,0) \\ (0,10) \times (1,0) = (0,0) & (0,10) \times (2,0) = (0,0) \end{array}$$

Himpunan unsur pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{11}$  adalah  $Z(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{11}) = \{(0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (0,5), (0,6), (0,7), (0,8), (0,9), (0,10), (1,0), (2,0)\}$ . Sehingga dapat digambarkan dalam sebuah graf pembagi nol sebagai berikut.



Gambar 3. 10 Graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{11})$

Bentuk graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{11}$  merupakan graf bipartisi komplit  $K_{2,10}$  karena terdapat titik  $(\bar{1}, \bar{0})$  dan  $(\bar{2}, \bar{0})$  yang masing-masing terhubung langsung dengan titik  $(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{8}), (\bar{0}, \bar{9})$  dan  $(\bar{0}, \bar{10})$ .

Berdasarkan gambar 3.6 sampai 3.10 diatas, dapat ditarik kesimpulan graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_q$  dengan  $q \geq 2$  dalam bentuk tabel berikut.

Tabel 3. 2 Graf Bipartisi Komplit  $K_{2,n}$

Gelanggang $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_q$	Bentuk Graf Bipartisi Komplit $K_{2,n}$
Untuk $q = 2$	Graf bipartisi komplit $K_{2,1}$
Untuk $q = 3$	Graf bipartisi komplit $K_{2,2}$
Untuk $q = 5$	Graf bipartisi komplit $K_{2,4}$
Untuk $q = 7$	Graf bipartisi komplit $K_{2,6}$
Untuk $q = 11$	Graf bipartisi komplit $K_{2,10}$
Untuk $q \in$ bilangan prima	Graf bipartisi komplit $K_{2,q-1}$

Dengan melihat tabel 3.2 diperoleh teorema 3.2 yaitu sebagai berikut

### Teorema 3.2

Diberikan  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_q$  dengan  $q$  bilangan prima merupakan gelanggang. Untuk  $q \geq 2$ , graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_q$  adalah graf bipartisi komplit  $K_{2,q-1}$

Bukti:

Diketahui himpunan  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_q = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), \dots, (\bar{0}, \overline{q-1}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}), \dots, (\bar{1}, \overline{q-1}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{1}), \dots, (\bar{2}, \overline{q-1})\}$  dengan  $q$  bilangan prima bersama dengan operasi  $+$  dan operasi  $\times$  merupakan gelanggang. Himpunan semua unsur pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_q$  adalah  $Z(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_q) = \{(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), \dots, (\bar{0}, \overline{q-1}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0})\}$ . Berdasarkan definisi dari graf pembagi nol, maka diperoleh keterhubungan dari graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_q)$  yaitu  $(\bar{1}, \bar{0}) \times (\bar{0}, a_i) = (\bar{0}, \bar{0})$  dan  $(\bar{2}, \bar{0}) \times (\bar{0}, a_i) = (\bar{0}, \bar{0})$  untuk  $a_i = \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots, \overline{q-1} \in \mathbb{Z}_q$ . Derajat titik

$(\bar{1}, \bar{0})$  di graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_q)$  atau  $\deg(\bar{1}, \bar{0}) = q - 1$ , karena terdapat  $q - 1$  titik yang terhubung langsung dengan titik  $(\bar{1}, \bar{0})$ . Begitupula untuk derajat titik  $(\bar{2}, \bar{0})$  di graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_q)$  atau  $\deg(\bar{2}, \bar{0}) = q - 1$ , karena terdapat  $q - 1$  titik yang terhubung langsung dengan titik  $(\bar{2}, \bar{0})$ . Sedangkan untuk derajat titik  $(\bar{0}, a_i)$  dengan  $a_i = \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots, \overline{q-1} \in \mathbb{Z}_q$  di graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_q)$  mempunyai  $\deg(\bar{0}, a_i) = 2$ , karena terdapat titik  $(\bar{1}, \bar{0})$  dan  $(\bar{2}, \bar{0})$  yang masing-masing terhubung langsung dengan titik  $(\bar{0}, a_i)$ . Dengan demikian diperoleh untuk  $q \geq 2$  graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_q)$  merupakan graf bipartisi komplit  $K_{2, q-1}$ .

### 3.3.3 Graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_q$ dengan $q = 2, 3, 5, 7, 11$

Berikut adalah beberapa contoh graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_q$  dengan  $p = 2, 3, 5, 7, 11$

#### 1. Graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2$

Diketahui himpunan  $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2 = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{1}), (\bar{3}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{1}), (\bar{4}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{1})\}$  bersama dengan operasi  $+$  dan operasi  $\times$  merupakan sebuah gelanggang. Pada gelanggang  $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2$  terdapat 5 unsur pembagi nol yaitu  $(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{0})$  dan  $(\bar{4}, \bar{0})$  sedemikian sehingga

$$(\bar{0}, \bar{1}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

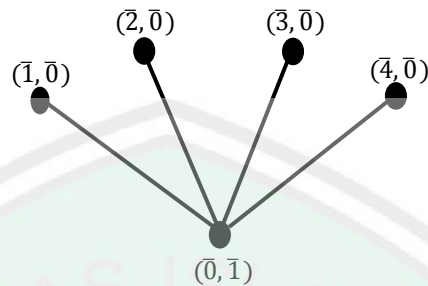
$$(\bar{0}, \bar{1}) \times (\bar{2}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

$$(\bar{0}, \bar{1}) \times (\bar{3}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

$$(\bar{0}, \bar{1}) \times (\bar{4}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$



Himpunan unsur pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2$  adalah  $Z(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2) = \{(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{0})\}$ . Sehingga dapat digambarkan dalam sebuah graf pembagi nol sebagai berikut.



Gambar 3. 11 Graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2)$

Bentuk graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2$  merupakan graf bintang  $S_4$  atau graf bipartisi komplit  $K_{4,1}$  karena terdapat titik  $(\bar{0}, \bar{1})$  yang masing-masing terhubung langsung dengan titik  $(\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{0}),$  dan  $(\bar{4}, \bar{0})$ .

## 2. Graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_3$

Diketahui himpunan  $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_3 = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{2}), (\bar{3}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{1}), (\bar{3}, \bar{2}), (\bar{4}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{1}), (\bar{4}, \bar{2})\}$  bersama dengan operasi  $+$  dan operasi  $\times$  merupakan sebuah gelanggang. Pada gelanggang  $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_3$  terdapat 6 unsur pembagi nol yaitu  $(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{0}),$   $(\bar{4}, \bar{0})$  sedemikian sehingga

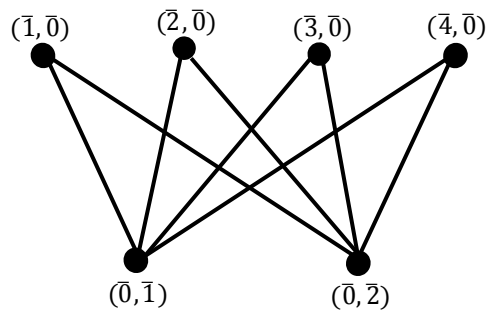
$$(\bar{0}, \bar{1}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0}) \qquad (\bar{0}, \bar{2}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

$$(\bar{0}, \bar{1}) \times (\bar{2}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0}) \qquad (\bar{0}, \bar{2}) \times (\bar{2}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

$$(\bar{0}, \bar{1}) \times (\bar{3}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0}) \qquad (\bar{0}, \bar{2}) \times (\bar{3}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

$$(\bar{0}, \bar{1}) \times (\bar{4}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0}) \qquad (\bar{0}, \bar{2}) \times (\bar{4}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

Himpunan unsur pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_3$  adalah  $Z(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_3) = \{(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{0})\}$ . Sehingga dapat digambarkan dalam sebuah graf pembagi nol sebagai berikut.

Gambar 3. 12 Graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_3)$ 

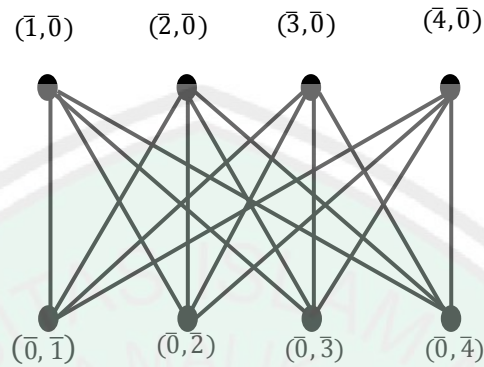
Bentuk graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_3$  merupakan graf bipartisi komplit  $K_{4,2}$  karena terdapat titik  $(\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{0})$  dan  $(\bar{4}, \bar{0})$  yang masing-masing terhubung langsung dengan titik  $(\bar{0}, \bar{1})$  dan  $(\bar{0}, \bar{2})$ .

### 3. Graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$

Diketahui himpunan  $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{3}), (\bar{1}, \bar{4}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{3}), (\bar{2}, \bar{4}), (\bar{3}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{1}), (\bar{3}, \bar{2}), (\bar{3}, \bar{3}), (\bar{3}, \bar{4}), (\bar{4}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{1}), (\bar{4}, \bar{2}), (\bar{4}, \bar{3}), (\bar{4}, \bar{4})\}$  bersama dengan operasi  $+$  dan operasi  $\times$  merupakan sebuah gelanggang. Pada gelanggang  $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$  terdapat 8 unsur pembagi nol yaitu  $(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{0})$  dan  $(\bar{4}, \bar{0})$  sedemikian sehingga

$$\begin{array}{ll}
 (\bar{0}, \bar{1}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0}) & (\bar{0}, \bar{1}) \times (\bar{3}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0}) \\
 (\bar{0}, \bar{2}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0}) & (\bar{0}, \bar{2}) \times (\bar{3}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0}) \\
 (\bar{0}, \bar{3}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0}) & (\bar{0}, \bar{3}) \times (\bar{3}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0}) \\
 (\bar{0}, \bar{4}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0}) & (\bar{0}, \bar{4}) \times (\bar{3}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0}) \\
 (\bar{0}, \bar{1}) \times (\bar{2}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0}) & (\bar{0}, \bar{1}) \times (\bar{4}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0}) \\
 (\bar{0}, \bar{2}) \times (\bar{2}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0}) & (\bar{0}, \bar{2}) \times (\bar{4}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0}) \\
 (\bar{0}, \bar{3}) \times (\bar{2}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0}) & (\bar{0}, \bar{3}) \times (\bar{4}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0}) \\
 (\bar{0}, \bar{4}) \times (\bar{2}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0}) & (\bar{0}, \bar{4}) \times (\bar{4}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})
 \end{array}$$

Himpunan semua unsur pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$  adalah  $Z(R) = \{(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{0})\}$ . Sehingga dapat digambarkan dalam sebuah graf pembagi nol sebagai berikut.



Gambar 3. 13 Graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5)$

Bentuk graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$  merupakan graf bipartisi komplit  $K_{4,4}$  karena terdapat titik  $(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3})$  dan  $(\bar{0}, \bar{4})$  yang masing-masing terhubung langsung dengan titik  $(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3})$  dan  $(\bar{0}, \bar{4})$ .

#### 4. Graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$

Diketahui himpunan  $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7 = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{3}), (\bar{1}, \bar{4}), (\bar{1}, \bar{5}), (\bar{1}, \bar{6}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{3}), (\bar{2}, \bar{4}), (\bar{2}, \bar{5}), (\bar{2}, \bar{6}), (\bar{3}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{1}), (\bar{3}, \bar{2}), (\bar{3}, \bar{3}), (\bar{3}, \bar{4}), (\bar{3}, \bar{5}), (\bar{3}, \bar{6}), (\bar{4}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{1}), (\bar{4}, \bar{2}), (\bar{4}, \bar{3}), (\bar{4}, \bar{4}), (\bar{4}, \bar{5}), (\bar{4}, \bar{6})\}$  bersama dengan operasi  $+$  dan operasi  $\times$  merupakan sebuah gelanggang. Pada gelanggang  $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$  terdapat 10 unsur pembagi nol yaitu  $(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{0})$  dan  $(\bar{4}, \bar{0})$  sedemikian sehingga

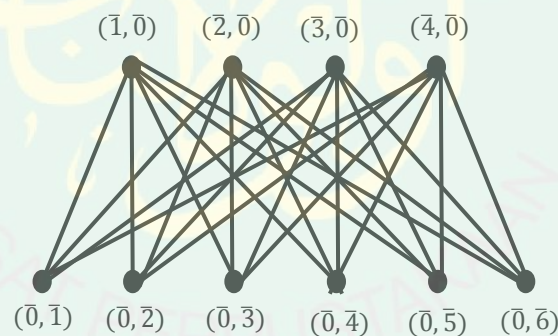
$$(\bar{0}, \bar{1}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0}) \quad (\bar{0}, \bar{1}) \times (\bar{3}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

$$(\bar{0}, \bar{2}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0}) \quad (\bar{0}, \bar{2}) \times (\bar{3}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

$$(\bar{0}, \bar{3}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0}) \quad (\bar{0}, \bar{3}) \times (\bar{3}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

$$\begin{array}{ll}
 (\bar{0}, \bar{4}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0}) & (\bar{0}, \bar{4}) \times (\bar{3}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0}) \\
 (\bar{0}, \bar{5}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0}) & (\bar{0}, \bar{5}) \times (\bar{3}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0}) \\
 (\bar{0}, \bar{6}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0}) & (\bar{0}, \bar{6}) \times (\bar{3}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0}) \\
 (\bar{0}, \bar{1}) \times (\bar{2}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0}) & (\bar{0}, \bar{1}) \times (\bar{4}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0}) \\
 (\bar{0}, \bar{2}) \times (\bar{2}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0}) & (\bar{0}, \bar{2}) \times (\bar{4}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0}) \\
 (\bar{0}, \bar{3}) \times (\bar{2}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0}) & (\bar{0}, \bar{3}) \times (\bar{4}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0}) \\
 (\bar{0}, \bar{4}) \times (\bar{2}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0}) & (\bar{0}, \bar{4}) \times (\bar{4}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0}) \\
 (\bar{0}, \bar{5}) \times (\bar{2}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0}) & (\bar{0}, \bar{5}) \times (\bar{4}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0}) \\
 (\bar{0}, \bar{6}) \times (\bar{2}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0}) & (\bar{0}, \bar{6}) \times (\bar{4}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})
 \end{array}$$

Himpunan semua unsur pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$  adalah  $Z(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7) = \{(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{0})\}$ . Sehingga dapat digambarkan dalam sebuah graf pembagi nol sebagai berikut.



Gambar 3. 14 Graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7)$

Bentuk graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$  merupakan graf bipartisi komplit  $K_{4,6}$  karena terdapat titik  $(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3})$  dan  $(\bar{0}, \bar{4})$  yang masing-masing terhubung langsung dengan titik  $(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5})$  dan  $(\bar{0}, \bar{6})$ .

##### 5. Graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{11}$

Diketahui himpunan  $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{11} = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{8}), (\bar{0}, \bar{9}), (\bar{0}, \bar{10}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{3}), (\bar{1}, \bar{4}), (\bar{1}, \bar{5}), (\bar{1}, \bar{6}), (\bar{1}, \bar{7}), (\bar{1}, \bar{8}), (\bar{1}, \bar{9}), (\bar{1}, \bar{10}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{3}), (\bar{2}, \bar{4}), (\bar{2}, \bar{5}), (\bar{2}, \bar{6}), (\bar{2}, \bar{7}), (\bar{2}, \bar{8}), (\bar{2}, \bar{9}), (\bar{2}, \bar{10}), (\bar{3}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{1}), (\bar{3}, \bar{2}), (\bar{3}, \bar{3}), (\bar{3}, \bar{4}), (\bar{3}, \bar{5}), (\bar{3}, \bar{6}), (\bar{3}, \bar{7}), (\bar{3}, \bar{8}), (\bar{3}, \bar{9}), (\bar{3}, \bar{10}), (\bar{4}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{1}), (\bar{4}, \bar{2}), (\bar{4}, \bar{3}), (\bar{4}, \bar{4}), (\bar{4}, \bar{5}), (\bar{4}, \bar{6}), (\bar{4}, \bar{7}), (\bar{4}, \bar{8}), (\bar{4}, \bar{9}), (\bar{4}, \bar{10})\}$  bersama dengan operasi  $+$  dan operasi  $\times$  merupakan sebuah gelanggang. Pada gelanggang  $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{11}$  terdapat 14 unsur pembagi nol yaitu  $(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{8}), (\bar{0}, \bar{9}), (\bar{0}, \bar{10}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{0})$  dan  $(\bar{4}, \bar{0})$  sedemikian sehingga

$(\bar{0}, \bar{1}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{1}) \times (\bar{3}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$
$(\bar{0}, \bar{2}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{2}) \times (\bar{3}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$
$(\bar{0}, \bar{3}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{3}) \times (\bar{3}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$
$(\bar{0}, \bar{4}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{4}) \times (\bar{3}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$
$(\bar{0}, \bar{5}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{5}) \times (\bar{3}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$
$(\bar{0}, \bar{6}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{6}) \times (\bar{3}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$
$(\bar{0}, \bar{7}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{7}) \times (\bar{3}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$
$(\bar{0}, \bar{8}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{8}) \times (\bar{3}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$
$(\bar{0}, \bar{9}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{9}) \times (\bar{3}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$
$(\bar{0}, \bar{10}) \times (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{10}) \times (\bar{3}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$
$(\bar{0}, \bar{1}) \times (\bar{2}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{1}) \times (\bar{4}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$
$(\bar{0}, \bar{2}) \times (\bar{2}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{2}) \times (\bar{4}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$
$(\bar{0}, \bar{3}) \times (\bar{2}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{3}) \times (\bar{4}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$
$(\bar{0}, \bar{4}) \times (\bar{2}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{4}) \times (\bar{4}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$
$(\bar{0}, \bar{5}) \times (\bar{2}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{5}) \times (\bar{4}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$
$(\bar{0}, \bar{6}) \times (\bar{2}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{6}) \times (\bar{4}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$

$$(\bar{0}, \bar{7}) \times (\bar{2}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

$$(\bar{0}, \bar{7}) \times (\bar{4}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

$$(\bar{0}, \bar{8}) \times (\bar{2}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

$$(\bar{0}, \bar{8}) \times (\bar{4}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

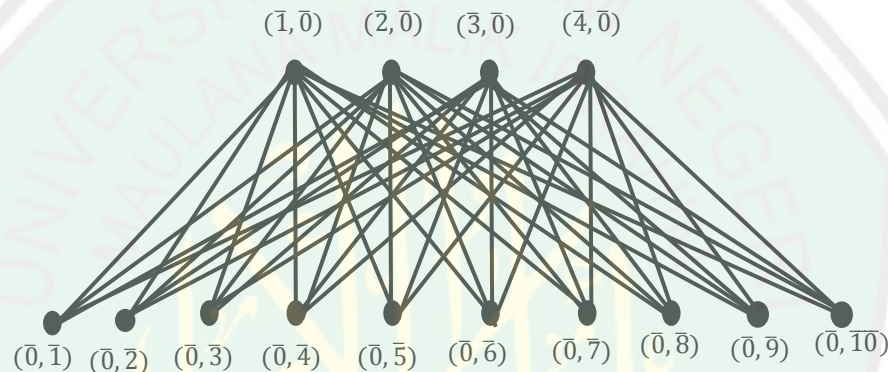
$$(\bar{0}, \bar{9}) \times (\bar{2}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

$$(\bar{0}, \bar{9}) \times (\bar{4}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

$$(\bar{0}, \bar{10}) \times (\bar{2}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

$$(\bar{0}, \bar{10}) \times (\bar{4}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

Himpunan semua unsur pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{11}$  adalah  $Z(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{11}) = \{(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{8}), (\bar{0}, \bar{9}), (\bar{0}, \bar{10}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{0})\}$ . Sehingga dapat digambarkan dalam sebuah graf pembagi nol sebagai berikut.



Gambar 3. 15 Graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{11})$

Bentuk graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{11}$  merupakan graf bipartisi komplit  $K_{4,10}$  karena terdapat titik  $(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3})$  dan  $(\bar{0}, \bar{4})$  yang masing-masing terhubung langsung dengan titik  $(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{8}), (\bar{0}, \bar{9})$  dan  $(\bar{0}, \bar{10})$ .

Berdasarkan gambar 3.10 sampai 3.15 diatas, diperoleh kesimpulan graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_q$  dengan  $q = 2, 3, 5, 7, 11$  dalam bentuk tabel berikut.

Tabel 3. 3 Graf Bipartisi Komplit  $K_{4,n}$

Gelanggang $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_q$	Bentuk Graf Bipartisi Komplit $K_{4,n}$
Untuk $q = 2$	Graf bipartisi komplit $K_{4,1}$
Untuk $q = 3$	Graf bipartisi komplit $K_{4,2}$
Untuk $q = 5$	Graf bipartisi komplit $K_{4,4}$

Untuk $q = 7$	Graf bipartisi komplit $K_{4,6}$
Untuk $q = 11$	Graf bipartisi komplit $K_{4,10}$
Untuk $q$ bilangan prima	Graf bipartisi komplit $K_{4,q-1}$

Dengan melihat tabel 3.3 diperoleh teorema 3.3 sebagai berikut.

### Teorema 3.3

Diberikan  $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_q$  dengan  $q$  bilangan prima merupakan gelanggang.

Untuk  $q \geq 2$ , graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_q$  adalah graf bipartisi komplit  $K_{4,q-1}$ .

Bukti:

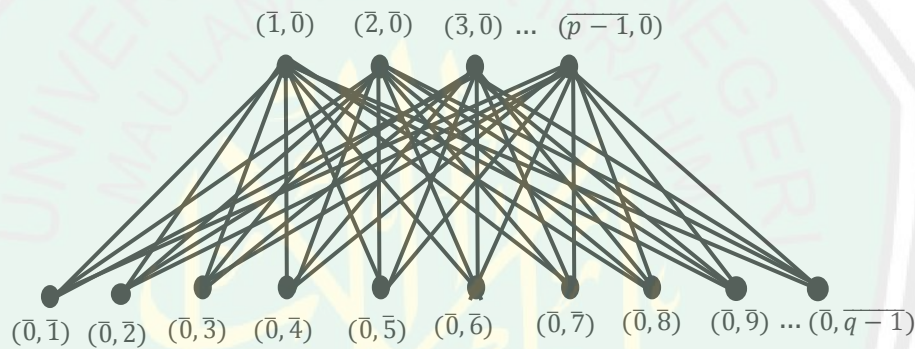
Diketahui himpunan  $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_q = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), \dots, (\bar{0}, \overline{q-1}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}), \dots, (\bar{1}, \overline{q-1}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{1}), \dots, (\bar{2}, \overline{q-1}), (\bar{3}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{1}), \dots, (\bar{3}, \overline{q-1}), (\bar{4}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{1}), \dots, (\bar{4}, \overline{q-1})\}$  bersama dengan operasi  $+$  dan operasi  $\times$  merupakan gelanggang. Himpunan semua unsur pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_q$  adalah  $(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_q) = \{(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), \dots, (\bar{0}, \overline{q-1}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{0})\}$ .

Berdasarkan definisi graf pembagi nol, maka diperoleh keterhubungan dalam graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_q)$  yaitu  $(\bar{1}, \bar{0}) \times (\bar{0}, a_i) = (\bar{0}, \bar{0})$ ,  $(\bar{2}, \bar{0}) \times (\bar{0}, a_i) = (\bar{0}, \bar{0})$ ,  $(\bar{3}, \bar{0}) \times (\bar{0}, a_i) = (\bar{0}, \bar{0})$ , dan  $(\bar{4}, \bar{0}) \times (\bar{0}, a_i) = (\bar{0}, \bar{0})$  untuk  $a_i = \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{q-1} \in \mathbb{Z}_q$ .

Derajat titik  $(\bar{1}, \bar{0})$  di graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_q)$  atau  $\deg(\bar{1}, \bar{0}) = q - 1$ , karena terdapat  $q - 1$  sisi yang terkait langsung dengan titik  $(\bar{1}, \bar{0})$ . Begitupula untuk derajat titik  $(\bar{2}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{0})$ , dan  $(\bar{4}, \bar{0})$  di graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_q)$  atau  $\deg(\bar{2}, \bar{0}) = \deg(\bar{3}, \bar{0}) = \deg(\bar{4}, \bar{0}) = q - 1$  karena terdapat  $q - 1$  sisi yang masing-masing terkait langsung dengan titik  $(\bar{2}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{0})$ , dan  $(\bar{4}, \bar{0})$ . Sedangkan derajat titik  $(\bar{0}, a_i)$  untuk  $a_i = \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{q-1} \in \mathbb{Z}_q$  di graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_q)$  mempunyai  $\deg(\bar{0}, a_i) = 4$ , karena terdapat titik  $(\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{0})$  dan  $(\bar{4}, \bar{0})$  yang masing-masing terhubung

langsung dengan titik  $(\bar{0}, a_i)$ . Dengan demikian diperoleh untuk  $q \geq 2$  graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_q)$  merupakan graf bipartisi komplit  $K_{4, q-1}$

Berdasarkan unsur pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  dengan  $p = 2, 3, 5$  dan  $q = 2, 3, 5, 7, 11$  diatas diperoleh kesimpulan secara umum bahwa himpunan semua unsur pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  dengan  $p, q$  bilangan prima adalah  $Z(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q) = \{(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), \dots, (\bar{0}, \overline{q-1}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{0}), \dots, (\overline{p-1}, \bar{0})\}$ . Sehingga dapat digambarkan dalam sebuah graf pembagi nol sebagai berikut.



Gambar 3. 16 Graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$  dengan  $p, q$  Bilangan Prima

Berdasarkan tabel 3.1, 3.2, dan 3.3 diperoleh kesimpulan secara umum graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  untuk  $p$  dan  $q$  bilangan prima adalah sebagai berikut.

Tabel 3. 4 Graf bipartisi komplit  $K_{m,n}$

Gelanggang $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$	Bentuk Graf $K_{m,n}$	
Untuk $p = 2$	$q = 2$	Graf komplit $K_{1,1}$
	$q = 3$	Graf bipartisi komplit $K_{1,2}$
	$q = 5$	Graf bipartisi komplit $K_{1,4}$
	$q = 7$	Graf bipartisi komplit $K_{1,6}$
	$q = 11$	Graf bipartisi komplit $K_{1,10}$
	$q \in$ bilangan prima	Graf bipartisi komplit $K_{1, q-1}$
Untuk $p = 3$	$q = 2$	Graf bipartisi komplit $K_{2,1}$
	$q = 3$	Graf bipartisi komplit $K_{2,2}$
	$q = 5$	Graf bipartisi komplit $K_{2,4}$



	$q = 7$	Graf bipartisi komplit $K_{2,6}$
	$q = 11$	Graf bipartisi komplit $K_{2,10}$
	$q \in \text{bilangan prima}$	Graf bipartisi komplit $K_{2,q-1}$
Untuk $p = 5$	$q = 2$	Graf bipartisi komplit $K_{4,1}$
	$q = 3$	Graf bipartisi komplit $K_{4,2}$
	$q = 5$	Graf bipartisi komplit $K_{4,4}$
	$q = 7$	Graf bipartisi komplit $K_{4,6}$
	$q = 11$	Graf bipartisi komplit $K_{4,10}$
	$q \in \text{bilangan prima}$	Graf bipartisi komplit $K_{4,q-1}$
Untuk $p \in \text{bilangan prima}$	$q \in \text{bilangan prima}$	Graf bipartisi komplit $K_{p-1,q-1}$

Dengan melihat tabel 3.4 diperoleh kesimpulan secara umum yaitu pada teorema 3.4 sebagai berikut.

#### Teorema 3.4

Diberikan  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  dengan  $p, q$  bilangan prima merupakan gelanggang. Graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  adalah graf bipartisi komplit  $K_{p-1,q-1}$  untuk  $p, q$  bilangan prima.

Bukti:

Diketahui himpunan  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), \dots, (\bar{p}-1, \bar{q}-1)\}$  bersama dengan operasi  $+$  dan operasi  $\times$  merupakan gelanggang. Himpunan semua unsur pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  adalah  $(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q) = \{(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), \dots, (\bar{0}, \bar{q}-1), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0}), \dots, (\bar{p}-1, \bar{0})\}$ . Berdasarkan definisi graf pembagi nol, maka diperoleh keterhubungan dalam graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$  yaitu  $(a_i, \bar{0}) \times (\bar{0}, b_j) = (\bar{0}, \bar{0})$ , untuk  $a_i = \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{p}-1 \in \mathbb{Z}_p$  dan  $b_j = \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{q}-1 \in \mathbb{Z}_q$ . Derajat titik  $(a_i, \bar{0})$  di graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_q)$  atau  $\text{deg}(a_i, \bar{0})$  adalah  $q-1$ , karena terdapat  $q-1$  titik yang terhubung langsung dengan titik  $(a_i, \bar{0})$ . Sedangkan derajat titik  $(\bar{0}, b_j)$  untuk di graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_q)$  atau  $\text{deg}(\bar{0}, b_j) = p-1$ , karena terdapat  $p-1$  titik

yang terhubung langsung dengan titik  $(\bar{0}, a_i)$ . Dengan demikian diperoleh graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$  merupakan graf bipartisi komplit  $K_{p-1, q-1}$ .

### 3.3 Jumlah Jarak Eksentrik Graf Pembagi Nol dari Gelanggang $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ untuk $p, q$ Bilangan Prima

Berdasarkan definisi 2.3.5, jumlah jarak eksentrik dari graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  dengan  $p, q$  bilangan prima dapat didefinisikan sebagai berikut.

#### Definisi 3.3

Misalkan graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$  merupakan graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  dengan  $p, q$  bilangan prima. Jumlah jarak eksentrik dari graf tersebut didefinisikan sebagai.

$$\begin{aligned} \xi^{ds}(\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)) = & \sum_{\{(\bar{0}, \bar{a}), (\bar{b}, \bar{0})\} \subseteq V(\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q))} [e(\bar{0}, \bar{a}) + e(\bar{b}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{a}), (\bar{b}, \bar{0})) \\ & + \sum_{\{(\bar{a}, \bar{0}), (\bar{b}, \bar{0})\} \subseteq V(\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q))} [e(\bar{a}, \bar{0}) + e(\bar{0}, \bar{b})] d((\bar{a}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{b})) \\ & + \sum_{\{(\bar{0}, \bar{a}), (\bar{0}, \bar{b})\} \subseteq V(\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q))} [e(\bar{0}, \bar{a}) + e(\bar{0}, \bar{b})] d((\bar{0}, \bar{a}), (\bar{0}, \bar{b})) \end{aligned}$$

dengan  $e(\bar{0}, \bar{a}), e(\bar{0}, \bar{b}), e(\bar{a}, \bar{0})$  dan  $e(\bar{b}, \bar{0})$  masing-masing adalah eksentrisitas titik  $(\bar{0}, \bar{a}), (\bar{0}, \bar{b}), (\bar{a}, \bar{0})$  dan  $e(\bar{b}, \bar{0})$  di graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$  dan  $d((\bar{0}, \bar{a}), (\bar{b}, \bar{0}))$  adalah jarak antara titik  $(\bar{0}, \bar{a})$  dan titik  $(\bar{b}, \bar{0})$ ,  $d((\bar{a}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{b}))$  adalah jarak antara titik  $(\bar{a}, \bar{0})$  dan titik  $(\bar{0}, \bar{b})$  dan  $d((\bar{0}, \bar{a}), (\bar{0}, \bar{b}))$  adalah jarak antara titik  $(\bar{0}, \bar{a})$  dan titik  $(\bar{0}, \bar{b})$ .

Berikut merupakan beberapa contoh jumlah jarak eksentrik graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  untuk  $p = 2,3,5$  dan  $q = 2,3,5,7,11$

### 3.3.1 Jumlah Jarak Eksentrik Graf Pembagi Nol dari Gelanggang $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_q$ dengan $q = 2, 3, 5, 7, 11$

#### 1. Graf pembagi nol $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$

Graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  merupakan graf komplit  $K_2$  digambarkan sebagai berikut.



Gambar 3. 17 Graf Komplit  $K_2$

Jarak masing-masing titik ke titik yang lain pada graf di atas adalah  $d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0})) = d((\bar{1}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1})) = 1$ . Dengan menghitung jarak tersebut dapat ditentukan eksentrisitas dan titik eksentrik dalam tabel berikut.

Tabel 3. 5 Eksentrisitas Graf Komplit  $K_2$

Titik	Eksentrisitas	Titik Eksentrik
$(\bar{0}, \bar{1})$	1	$(\bar{1}, \bar{0})$
$(\bar{1}, \bar{0})$	1	$(\bar{0}, \bar{1})$

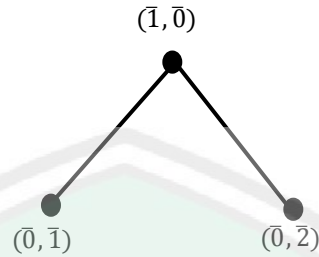
Berdasarkan tabel diatas, jumlah jarak eksentrik dari graf pembagi nol  $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$  dapat ditunjukkan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \xi^{ds}(\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)) &= \sum_{\{(\bar{0}, \bar{a}), (\bar{b}, \bar{0})\} \subseteq V(\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2))} [e(\bar{0}, \bar{a}) + e(\bar{b}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{a}), (\bar{b}, \bar{0})) \\ &= [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{1}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0})) \\ &= [1 + 1]1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh jumlah jarak eksentrik graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  adalah 2.

## 2. Graf pembagi nol $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3)$

Graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$  merupakan graf bipartisi komplit  $K_{1,2}$  atau graf bintang  $S_2$  digambarkan sebagai berikut.



Gambar 3. 18 Graf Bipartisi Komplit  $K_{1,2}$

Jarak masing-masing titik ke titik yang lain pada graf di atas adalah  $d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0})) = 1$ ,  $d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{0})) = 1$  dan  $d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2})) = 2$ . Dengan menghitung jarak tersebut dapat ditentukan eksentrisitas dan titik eksentrik dalam tabel berikut.

Tabel 3. 6 Eksentrisitas Graf Bipartisi Komplit  $K_{1,2}$

Titik	Eksentrisitas	Titik Eksentrik
$(\bar{0}, \bar{1})$	2	$(\bar{0}, \bar{2})$
$(\bar{0}, \bar{2})$	2	$(\bar{0}, \bar{1})$
$(\bar{1}, \bar{0})$	1	$(\bar{0}, \bar{1})$ dan $(\bar{0}, \bar{2})$

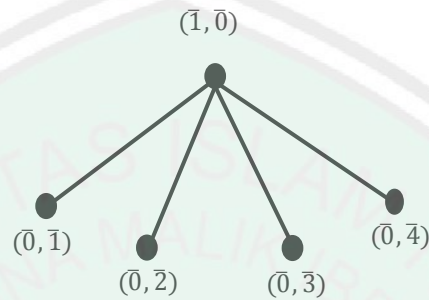
Berdasarkan tabel diatas, jumlah jarak eksentrik dari graf pembagi nol  $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3)$  dapat ditunjukkan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 \xi^{ds}(\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3)) &= \sum_{\{(\bar{0}, \bar{a}), (\bar{b}, \bar{0})\} \subseteq V(\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3))} [e(\bar{0}, \bar{a}) + e(\bar{b}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{a}), (\bar{b}, \bar{0})) \\
 &+ \sum_{\{(\bar{0}, \bar{a}), (\bar{0}, \bar{b})\} \subseteq V(\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3))} [e(\bar{0}, \bar{a}) + e(\bar{0}, \bar{b})] d((\bar{0}, \bar{a}), (\bar{0}, \bar{b})) \\
 &= [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{1}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{1}, \bar{0})] \\
 &\quad d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \bar{2})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2})) \\
 &= [2 + 1]1 + [2 + 1]1 + [2 + 2]2 \\
 &= (2 + 1)(2)(1) + (2 + 2)(1)(2) \\
 &= 14
 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh jumlah jarak eksentrik graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$  adalah 14.

### 3. Graf pembagi nol $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5)$

Graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$  merupakan graf bipartisi komplit  $K_{1,4}$  atau graf bintang  $S_4$  digambarkan sebagai berikut.



Gambar 3. 19 Graf Bipartisi Komplit  $K_{1,4}$

Jarak masing-masing titik ke titik yang lain pada graf di atas adalah  $d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0})) = 1$ ,  $d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2})) = 2$ ,  $d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{3})) = 2$ ,  $d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{4})) = 2$ ,  $d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{0})) = 1$ ,  $d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3})) = 2$ ,  $d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{4})) = 2$ ,  $d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{1}, \bar{0})) = 1$ ,  $d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4})) = 2$  dan  $d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{1}, \bar{0})) = 1$ . Dengan menghitung jarak tersebut dapat ditentukan eksentrisitas dan titik eksentrik dalam tabel berikut.

Tabel 3. 7 Eksentrisitas Graf Bipartisi Komplit  $K_{1,4}$

Titik	Eksentrisitas	Titik Eksentrik
$(\bar{0}, \bar{1})$	2	$(\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}),$ dan $(\bar{0}, \bar{4})$
$(\bar{0}, \bar{2})$	2	$(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{3}),$ dan $(\bar{0}, \bar{4})$
$(\bar{0}, \bar{3})$	2	$(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2})$ dan $(\bar{0}, \bar{4})$
$(\bar{0}, \bar{4})$	2	$(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2})$ dan $(\bar{0}, \bar{3})$
$(\bar{1}, \bar{0})$	1	$(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3})$ dan $(\bar{0}, \bar{4})$

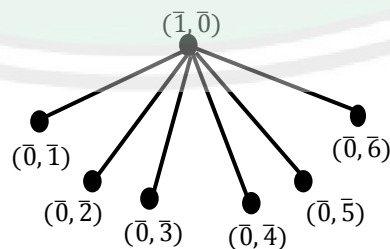
Berdasarkan tabel diatas, jumlah jarak eksentrik dari graf pembagi nol  $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5)$  dapat ditunjukkan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\xi^{ds}(\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5)) &= \sum_{\{(\bar{0}, \bar{a}), (\bar{b}, \bar{0})\} \subseteq V(\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5))} [e(\bar{0}, \bar{a}) + e(\bar{b}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{a}), (\bar{b}, \bar{0})) \\
&+ \sum_{\{(\bar{0}, \bar{a}), (\bar{0}, \bar{b})\} \subseteq V(\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5))} [e(\bar{0}, \bar{a}) + e(\bar{0}, \bar{b})] d((\bar{0}, \bar{a}), (\bar{0}, \bar{b})) \\
&= [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{1}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{1}, \bar{0})] \\
&\quad d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{1}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{1}, \bar{0})) \\
&\quad + [e(\bar{0}, \bar{4}) + e(\bar{1}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{1}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \bar{2})] \\
&\quad d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2})) + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \bar{3})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{3})) \\
&\quad + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \bar{4})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{4})) + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{0}, \bar{3})] \\
&\quad d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3})) + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{0}, \bar{4})] d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{4})) \\
&\quad + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{0}, \bar{4})] d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4})) \\
&= [2 + 1]1 + [2 + 1]1 + [2 + 1]1 + [2 + 1]1 + [2 + 2]2 \\
&\quad + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 \\
&= (2 + 1)(4)(1) + (2 + 2)(3)(2) + (2 + 2)(2)(2) \\
&\quad + (2 + 2)(1)(2) \\
&= 60
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh jumlah jarak eksentrik graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$  adalah 60.

#### 4. Graf pembagi nol $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_7)$

Graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_7$  merupakan graf bipartisi komplit  $K_{1,6}$  atau graf bintang  $S_6$  digambarkan sebagai berikut.



Gambar 3. 20 Graf Bipartisi Komplit  $K_{1,6}$

Jarak masing-masing titik ke titik yang lain pada graf di atas adalah

$$d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0})) = 1, \quad d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2})) = 2, \quad d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{3})) = 2,$$

$$d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{4})) = 2, \quad d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{5})) = 2, \quad d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{6})) = 2,$$

$$d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{0})) = 1, \quad d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3})) = 2, \quad d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{4})) = 2,$$

$$d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{5})) = 2, \quad d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{6})) = 2, \quad d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{1}, \bar{0})) = 1,$$

$$d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4})) = 2, \quad d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{5})) = 2, \quad d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{6})) = 2,$$

$$d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{1}, \bar{0})) = 1, \quad d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5})) = 2, \quad d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{6})) = 2,$$

$$d((\bar{0}, \bar{5}), (\bar{1}, \bar{0})) = 1, \quad d((\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6})) = 2 \text{ dan } d((\bar{0}, \bar{6}), (\bar{1}, \bar{0})) = 1. \text{ Dengan}$$

menghitung jarak tersebut dapat ditentukan eksentrisitas dan titik eksentrik dalam tabel berikut.

Tabel 3. 8 Eksentrisitas Graf Bipartisi Komplit  $K_{1,6}$

Titik	Eksentrisitas	Titik Eksentrik
$(\bar{0}, \bar{1})$	2	$(\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5})$ dan $(\bar{0}, \bar{6})$
$(\bar{0}, \bar{2})$	2	$(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5})$ dan $(\bar{0}, \bar{6})$
$(\bar{0}, \bar{3})$	2	$(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5})$ dan $(\bar{0}, \bar{6})$
$(\bar{0}, \bar{4})$	2	$(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{5})$ dan $(\bar{0}, \bar{6})$
$(\bar{0}, \bar{5})$	2	$(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4})$ dan $(\bar{0}, \bar{6})$
$(\bar{0}, \bar{6})$	2	$(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4})$ dan $(\bar{0}, \bar{5})$
$(\bar{1}, \bar{0})$	1	$(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5})$ dan $(\bar{0}, \bar{6})$

Berdasarkan tabel diatas, jumlah jarak eksentrik dari graf pembagi nol  $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_7)$  dapat ditunjukkan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \xi^{ds}(\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_7)) &= \sum_{\{(\bar{0}, \bar{a}), (\bar{b}, \bar{0})\} \subseteq V(\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_7))} [e(\bar{0}, \bar{a}) + e(\bar{b}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{a}), (\bar{b}, \bar{0})) \\ &+ \sum_{\{(\bar{0}, \bar{a}), (\bar{0}, \bar{b})\} \subseteq V(\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_7))} [e(\bar{0}, \bar{a}) + e(\bar{0}, \bar{b})] d((\bar{0}, \bar{a}), (\bar{0}, \bar{b})) \end{aligned}$$

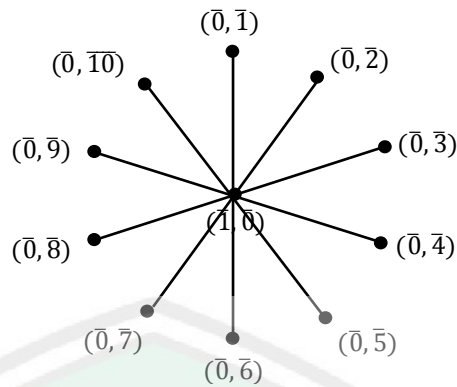
$$\begin{aligned}
&= [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{1}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{1}, \bar{0})] \\
&\quad d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{1}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{1}, \bar{0})) \\
&\quad + [e(\bar{0}, \bar{4}) + e(\bar{1}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{1}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{5}) + e(\bar{1}, \bar{0})] \\
&\quad d((\bar{0}, \bar{5}), (\bar{1}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{6}) + e(\bar{1}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{6}), (\bar{1}, \bar{0})) \\
&\quad + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \bar{2})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2})) + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \bar{3})] \\
&\quad d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{3})) + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \bar{4})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{4})) \\
&\quad + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \bar{5})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{5})) + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \bar{6})] \\
&\quad d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{6})) + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{0}, \bar{3})] d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3})) \\
&\quad + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{0}, \bar{4})] d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{4})) + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{0}, \bar{5})] \\
&\quad d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{5})) + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{0}, \bar{6})] d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{6})) \\
&\quad + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{0}, \bar{4})] d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4})) + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{0}, \bar{5})] \\
&\quad d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{5})) + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{0}, \bar{6})] d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{6})) \\
&\quad + [e(\bar{0}, \bar{4}) + e(\bar{0}, \bar{5})] d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5})) + [e(\bar{0}, \bar{4}) + e(\bar{0}, \bar{6})] \\
&\quad d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{6})) + [e(\bar{0}, \bar{5}) + e(\bar{0}, \bar{6})] d((\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6})) \\
&= [2 + 1]1 + [2 + 1]1 + [2 + 1]1 + [2 + 1]1 + [2 + 1]1 \\
&\quad + [2 + 1]1 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 \\
&\quad + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 \\
&\quad + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 \\
&\quad + [2 + 2]2 \\
&= (2 + 1)(6)(1) + (2 + 2)(5)(2) + (2 + 2)(4)(2) \\
&\quad + (2 + 2)(3)(2) + (2 + 2)(2)(2) + (2 + 2)(1)(2) \\
&= 138
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh jumlah jarak eksentrik graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_7$  adalah 138.

##### 5. Graf pembagi nol $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{11})$

Graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{11}$  merupakan graf bipartisi komplit  $K_{1,10}$  atau graf bintang  $S_{10}$  digambarkan sebagai berikut.



Gambar 3. 21 Graf Bipartisi Komplit  $K_{1,10}$ 

Jarak masing-masing titik ke titik yang lain pada graf di atas adalah

$$d((0,1), (1,0)) = 1, \quad d((0,1), (0,2)) = 2, \quad d((0,1), (0,3)) = 2,$$

$$d((0,1), (0,4)) = 2, \quad d((0,1), (0,5)) = 2, \quad d((0,1), (0,6)) = 2,$$

$$d((0,1), (0,7)) = 2, \quad d((0,1), (0,8)) = 2, \quad d((0,1), (0,9)) = 2,$$

$$d((0,1), (0,10)) = 2, \quad d((0,2), (1,0)) = 1, \quad d((0,2), (0,3)) = 2,$$

$$d((0,2), (0,4)) = 2, \quad d((0,2), (0,5)) = 2, \quad d((0,2), (0,6)) = 2,$$

$$d((0,2), (0,7)) = 2, \quad d((0,2), (0,8)) = 2, \quad d((0,2), (0,9)) = 2,$$

$$d((0,2), (0,10)) = 2, \quad d((0,3), (1,0)) = 1, \quad d((0,3), (0,4)) = 2,$$

$$d((0,3), (0,5)) = 2, \quad d((0,3), (0,6)) = 2, \quad d((0,3), (0,7)) = 2,$$

$$d((0,3), (0,8)) = 2, \quad d((0,3), (0,9)) = 2, \quad d((0,3), (0,10)) = 2,$$

$$d((0,4), (1,0)) = 1, \quad d((0,4), (0,5)) = 2, \quad d((0,4), (0,6)) = 2,$$

$$d((0,4), (0,7)) = 2, \quad d((0,4), (0,8)) = 2, \quad d((0,4), (0,9)) = 2,$$

$$d((0,4), (0,10)) = 2, \quad d((0,5), (1,0)) = 1, \quad d((0,5), (0,6)) = 2,$$

$$d((0,5), (0,7)) = 2, \quad d((0,5), (0,8)) = 2, \quad d((0,5), (0,9)) = 2,$$

$$d((0,5), (0,10)) = 2, \quad d((0,6), (1,0)) = 1, \quad d((0,6), (0,7)) = 2,$$

$d((\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{8})) = 2,$        $d((\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{9})) = 2,$        $d((\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{10})) = 2,$   
 $d((\bar{0}, \bar{7}), (\bar{1}, \bar{0})) = 1,$        $d((\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{8})) = 2,$        $d((\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{9})) = 2,$   
 $d((\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{10})) = 2,$        $d((\bar{0}, \bar{8}), (\bar{1}, \bar{0})) = 1,$        $d((\bar{0}, \bar{8}), (\bar{0}, \bar{9})) = 2,$   
 $d((\bar{0}, \bar{8}), (\bar{0}, \bar{10})) = 2,$        $d((\bar{0}, \bar{9}), (\bar{1}, \bar{0})) = 1,$        $d((\bar{0}, \bar{9}), (\bar{0}, \bar{10})) = 2$  dan  
 $d((\bar{0}, \bar{10}), (\bar{1}, \bar{0})) = 1.$  Dengan menghitung jarak tersebut dapat ditentukan eksentrisitas dan titik eksentrik dalam tabel berikut.

Tabel 3. 9 Eksentrisitas Graf Bipartisi Komplit  $K_{1,10}$ 

Titik	Eksentrisitas	Titik Eksentrik
$(\bar{0}, \bar{1})$	2	$(\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{8}), (\bar{0}, \bar{9}), (\bar{0}, \bar{10})$
$(\bar{0}, \bar{2})$	2	$(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{8}), (\bar{0}, \bar{9}), (\bar{0}, \bar{10})$
$(\bar{0}, \bar{3})$	2	$(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{8}), (\bar{0}, \bar{9}), (\bar{0}, \bar{10})$
$(\bar{0}, \bar{4})$	2	$(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{8}), (\bar{0}, \bar{9}), (\bar{0}, \bar{10})$
$(\bar{0}, \bar{5})$	2	$(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{8}), (\bar{0}, \bar{9}), (\bar{0}, \bar{10})$
$(\bar{0}, \bar{6})$	2	$(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{8}), (\bar{0}, \bar{9}), (\bar{0}, \bar{10})$
$(\bar{0}, \bar{7})$	2	$(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{8}), (\bar{0}, \bar{9}), (\bar{0}, \bar{10})$
$(\bar{0}, \bar{8})$	2	$(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{9}), (\bar{0}, \bar{10})$
$(\bar{0}, \bar{9})$	2	$(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{8}), (\bar{0}, \bar{10})$
$(\bar{0}, \bar{10})$	2	$(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{8}), (\bar{0}, \bar{9})$
$(\bar{1}, \bar{0})$	1	$(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{8}), (\bar{0}, \bar{9}),$ $(\bar{0}, \bar{10})$

Berdasarkan tabel diatas, jumlah jarak eksentrik dari graf pembagi nol  $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{11})$  dapat ditunjukkan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 \xi^{ds}(\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{11})) &= \sum_{\{(\bar{0}, \bar{a}), (\bar{b}, \bar{0})\} \subseteq v(\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{11}))} [e(\bar{0}, \bar{a}) + e(\bar{b}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{a}), (\bar{b}, \bar{0})) \\
 &+ \sum_{\{(\bar{0}, \bar{a}), (\bar{0}, \bar{b})\} \subseteq v(\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{11}))} [e(\bar{0}, \bar{a}) + e(\bar{0}, \bar{b})] d((\bar{0}, \bar{a}), (\bar{0}, \bar{b})) \\
 &= [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{1}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{1}, \bar{0})]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& d((\bar{0}, 2), (\bar{1}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, 3) + e(\bar{1}, \bar{0})] d((\bar{0}, 3), (\bar{1}, \bar{0})) \\
& + [e(\bar{0}, 4) + e(\bar{1}, \bar{0})] d((\bar{0}, 4), (\bar{1}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, 5) + e(\bar{1}, \bar{0})] \\
& d((\bar{0}, 5), (\bar{1}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, 6) + e(\bar{1}, \bar{0})] d((\bar{0}, 6), (\bar{1}, \bar{0})) \\
& + [e(\bar{0}, 7) + e(\bar{1}, \bar{0})] d((\bar{0}, 7), (\bar{1}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, 8) + e(\bar{1}, \bar{0})] \\
& d((\bar{0}, 8), (\bar{1}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, 9) + e(\bar{1}, \bar{0})] d((\bar{0}, 9), (\bar{1}, \bar{0})) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{10}) + e(\bar{1}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{10}), (\bar{1}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, 2)] \\
& d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, 2)) + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, 3)] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, 3)) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, 4)] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, 4)) + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, 5)] \\
& d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, 5)) + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, 6)] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, 6)) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, 7)] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, 7)) + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, 8)] \\
& d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, 8)) + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, 9)] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, 9)) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \bar{10})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{10})) + [e(\bar{0}, 2) + e(\bar{0}, 3)] \\
& d((\bar{0}, 2), (\bar{0}, 3)) + [e(\bar{0}, 2) + e(\bar{0}, 4)] d((\bar{0}, 2), (\bar{0}, 4)) \\
& + [e(\bar{0}, 2) + e(\bar{0}, 5)] d((\bar{0}, 2), (\bar{0}, 5)) + [e(\bar{0}, 2) + e(\bar{0}, 6)] \\
& d((\bar{0}, 2), (\bar{0}, 6)) + [e(\bar{0}, 2) + e(\bar{0}, 7)] d((\bar{0}, 2), (\bar{0}, 7)) \\
& + [e(\bar{0}, 2) + e(\bar{0}, 8)] d((\bar{0}, 2), (\bar{0}, 8)) + [e(\bar{0}, 2) + e(\bar{0}, 9)] \\
& d((\bar{0}, 2), (\bar{0}, 9)) + [e(\bar{0}, 2) + e(\bar{0}, \bar{10})] d((\bar{0}, 2), (\bar{0}, \bar{10})) \\
& + [e(\bar{0}, 3) + e(\bar{0}, 4)] d((\bar{0}, 3), (\bar{0}, 4)) + [e(\bar{0}, 3) + e(\bar{0}, 5)] \\
& d((\bar{0}, 3), (\bar{0}, 5)) + [e(\bar{0}, 3) + e(\bar{0}, 6)] d((\bar{0}, 3), (\bar{0}, 6)) \\
& + [e(\bar{0}, 3) + e(\bar{0}, 7)] d((\bar{0}, 3), (\bar{0}, 7)) + [e(\bar{0}, 3) + e(\bar{0}, 8)] \\
& d((\bar{0}, 3), (\bar{0}, 8)) + [e(\bar{0}, 3) + e(\bar{0}, 9)] d((\bar{0}, 3), (\bar{0}, 9)) \\
& + [e(\bar{0}, 3) + e(\bar{0}, \bar{10})] d((\bar{0}, 3), (\bar{0}, \bar{10})) + [e(\bar{0}, 4) + e(\bar{0}, 5)] \\
& d((\bar{0}, 4), (\bar{0}, 5)) + [e(\bar{0}, 4) + e(\bar{0}, 6)] d((\bar{0}, 4), (\bar{0}, 6)) \\
& + [e(\bar{0}, 4) + e(\bar{0}, 7)] d((\bar{0}, 4), (\bar{0}, 7)) + [e(\bar{0}, 4) + e(\bar{0}, 8)] \\
& d((\bar{0}, 4), (\bar{0}, 8)) + [e(\bar{0}, 4) + e(\bar{0}, 9)] d((\bar{0}, 4), (\bar{0}, 9)) \\
& + [e(\bar{0}, 4) + e(\bar{0}, \bar{10})] d((\bar{0}, 4), (\bar{0}, \bar{10})) + [e(\bar{0}, 5) + e(\bar{0}, 6)] \\
& d((\bar{0}, 5), (\bar{0}, 6)) + [e(\bar{0}, 5) + e(\bar{0}, 7)] d((\bar{0}, 5), (\bar{0}, 7))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + [e(\bar{0}, \bar{5}) + e(\bar{0}, \bar{8})] d((\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{8})) + [e(\bar{0}, \bar{5}) + e(\bar{0}, \bar{9})] \\
& d((\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{9})) + [e(\bar{0}, \bar{5}) + e(\bar{0}, \bar{10})] d((\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{10})) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{6}) + e(\bar{0}, \bar{7})] d((\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{7})) + [e(\bar{0}, \bar{6}) + e(\bar{0}, \bar{8})] \\
& d((\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{8})) + [e(\bar{0}, \bar{6}) + e(\bar{0}, \bar{9})] d((\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{9})) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{6}) + e(\bar{0}, \bar{10})] d((\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{10})) + [e(\bar{0}, \bar{7}) + e(\bar{0}, \bar{8})] \\
& d((\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{8})) + [e(\bar{0}, \bar{7}) + e(\bar{0}, \bar{9})] d((\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{9})) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{7}) + e(\bar{0}, \bar{10})] d((\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{10})) + [e(\bar{0}, \bar{8}) + e(\bar{0}, \bar{9})] \\
& d((\bar{0}, \bar{8}), (\bar{0}, \bar{9})) + [e(\bar{0}, \bar{8}) + e(\bar{0}, \bar{10})] d((\bar{0}, \bar{8}), (\bar{0}, \bar{10})) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{8}) + e(\bar{0}, \bar{10})] d((\bar{0}, \bar{8}), (\bar{0}, \bar{10})) + [e(\bar{0}, \bar{9}) + e(\bar{0}, \bar{10})] \\
& d((\bar{0}, \bar{9}), (\bar{0}, \bar{10})) \\
& = [2 + 1]1 + [2 + 1]1 + [2 + 1]1 + [2 + 1]1 + [2 + 1]1 \\
& \quad + [2 + 1]1 + [2 + 1]1 + [2 + 1]1 + [2 + 1]1 + [2 + 1]1 \\
& \quad + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 \\
& \quad + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 \\
& \quad + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 \\
& \quad + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 \\
& \quad + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 \\
& \quad + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 \\
& \quad + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 \\
& \quad + [2 + 2]2 \\
& = (2 + 1)(10)(1) + (2 + 2)(5)(2) + (2 + 2)(4)(2) \\
& \quad + (2 + 2)(3)(2) + (2 + 2)(2)(2) + (2 + 2)(5)(2) \\
& \quad + (2 + 2)(4)(2) + (2 + 2)(3)(2) + (2 + 2)(2)(2) \\
& \quad + (2 + 2)(1)(2) \\
& = 390
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh jumlah jarak eksentrik graf pembagi nol dari gelanggang

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{11}$  adalah 390.

Berdasarkan jumlah jarak eksentrik graf pembagi nol diatas, diperoleh kesimpulan secara umum sebagai berikut.

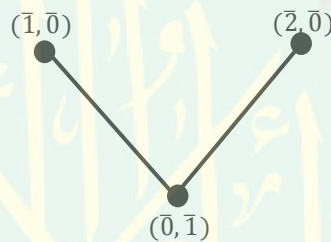
$$\begin{aligned}
\xi^{ds} \left( \Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_q) \right) &= \sum_{\{(\bar{0}, \bar{a}), (\bar{b}, \bar{0})\} \subseteq V(\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_q))} [e(\bar{0}, \bar{a}) + e(\bar{b}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{a}), (\bar{b}, \bar{0})) \\
&+ \sum_{\{(\bar{0}, \bar{a}), (\bar{0}, \bar{b})\} \subseteq V(\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_q))} [e(\bar{0}, \bar{a}) + e(\bar{0}, \bar{b})] d((\bar{0}, \bar{a}), (\bar{0}, \bar{b})) \\
&= [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{1}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{1}, \bar{0})] \\
&\quad d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{1}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{1}, \bar{0})) + \dots \\
&\quad + [e(\bar{0}, \bar{q}-1) + e(\bar{1}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{q}-1), (\bar{1}, \bar{0})) \\
&\quad + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \bar{2})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2})) + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \bar{3})] \\
&\quad d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{3})) + \dots + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \bar{q}-1)] \\
&\quad d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{q}-1)) + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{0}, \bar{3})] d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3})) \\
&\quad + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{0}, \bar{4})] d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{4})) + \dots \\
&\quad + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{0}, \bar{q}-1)] d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{q}-1)) + \dots \\
&\quad + [e(\bar{0}, \bar{q}-2) + e(\bar{0}, \bar{q}-1)] d((\bar{0}, \bar{q}-2), (\bar{0}, \bar{q}-1)) \\
&= (1+2)(q-1)(1) + (2+2)(q-2)(2) + (2+2) \\
&\quad (q-3)(2) + (2+2)(q-4)(2) + \dots + (2+2)(2)(2) \\
&\quad + (2+2)(1)(2) \\
&= (1+2)(q-1)(1) + (2+2)(2)[(q-2) + (q-3) \\
&\quad + (q-4) + \dots + 2 + 1] \\
&= (1+2)(q-1)(1) + (2+2)(2) \left( \frac{(q-2)}{2} ((q-2) + 1) \right) \\
&= (1+2)(q-1)(1) + (2+2)(2) \left( \frac{(q-2)(q-1)}{2} \right) \\
&= 3(q-1) + 4(q-2)(q-1) \\
&= (q-1)(3 + 4(q-2)) \\
\xi^{ds} \left( \Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_q) \right) &= 4q^2 - 9q + 5
\end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh bahwa, pola jumlah jarak eksentrik graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_q$  dengan  $q$  bilangan prima dan  $q \geq 3$  adalah  $4q^2 - 9q + 5$ . Sedangkan untuk  $q = 2$ , pola tersebut tidak berlaku karena graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$  merupakan graf komplit  $K_2$  yang memiliki jumlah jarak eksentrik 2.

### 3.3.2 Jumlah Jarak Eksentrik Graf Pembagi Nol dari Gelanggang $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_q$ dengan $q = 2, 3, 5, 7, 11$

#### 1. Graf pembagi nol $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2)$

Graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$  merupakan graf bipartisi komplit  $K_{2,1}$  digambarkan sebagai berikut.



Gambar 3. 22 Graf Bipartisi Komplit  $K_{2,1}$

Jarak masing-masing titik ke titik yang lain pada graf di atas adalah  $d((0, 1), (1, 0)) = 1$ ,  $d((0, 1), (2, 0)) = 1$ , dan  $d((1, 0), (2, 0)) = 2$ . Dengan menghitung jarak tersebut dapat ditentukan eksentrisitas dan titik eksentrik dalam tabel berikut.

Tabel 3. 10 Eksentrisitas Graf Bipartisi Komplit  $K_{2,1}$

Titik	Eksentrisitas	Titik Eksentrik
$(1, 0)$	2	$(2, 0)$
$(2, 0)$	2	$(0, 1)$
$(0, 1)$	1	$(1, 0)$ dan $(2, 0)$

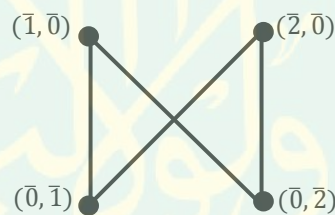
Berdasarkan tabel diatas, jumlah jarak eksentrik dari graf pembagi nol  $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2)$  dapat ditunjukkan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\xi^{ds}(\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2)) &= \sum_{\{(\bar{0}, \bar{a}), (\bar{b}, \bar{0})\} \subseteq V(\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2))} [e(\bar{0}, \bar{a}) + e(\bar{b}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{a}), (\bar{b}, \bar{0})) \\
&+ \sum_{\{(\bar{a}, \bar{0}), (\bar{b}, \bar{0})\} \subseteq V(\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3))} [e(\bar{a}, \bar{0}) + e(\bar{b}, \bar{0})] d((\bar{a}, \bar{0}), (\bar{b}, \bar{0})) \\
&= [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{1}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{2}, \bar{0})] \\
&\quad d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{0})) + [e(\bar{1}, \bar{0}) + e(\bar{2}, \bar{0})] d((\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0})) \\
&= [1 + 2]1 + [1 + 2]1 + [2 + 2]2 \\
&= (1 + 2)(2)(1) + (2 + 2)(1)(2) \\
&= 14
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh jumlah jarak eksentrik graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$  adalah 14.

## 2. Graf pembagi nol $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)$

Graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$  merupakan graf bipartisi komplit  $K_{2,2}$  digambarkan sebagai berikut.



Gambar 3. 23 Graf Bipartisi Komplit  $K_{2,2}$

Jarak masing-masing titik ke titik yang lain pada graf di atas adalah  $d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0})) = 1$ ,  $d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{0})) = 1$ ,  $d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2})) = 2$ ,  $d((\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0})) = 2$ ,  $d((\bar{1}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{2})) = 1$  dan  $d((\bar{2}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{2})) = 1$ . Dengan menghitung jarak tersebut dapat ditentukan eksentrisitas dan titik eksentrik dalam tabel berikut.

Tabel 3. 11 Eksentrisitas Graf Bipartisi Komplit  $K_{2,2}$

Titik	Eksentrisitas	Titik Eksentrik
$(\bar{0}, \bar{1})$	2	$(\bar{0}, \bar{2})$
$(\bar{1}, \bar{0})$	2	$(\bar{2}, \bar{0})$

$(\bar{2}, \bar{0})$	2	$(\bar{1}, \bar{0})$
$(\bar{0}, \bar{2})$	2	$(\bar{0}, \bar{1})$

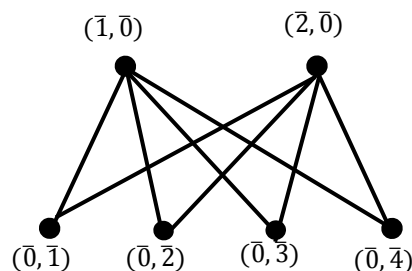
Berdasarkan tabel diatas, jumlah jarak eksentrik dari graf pembagi nol  $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)$  dapat ditunjukkan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\xi^{ds}(\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)) &= \sum_{\{(\bar{a}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{b})\} \subseteq V(\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3))} [e(\bar{a}, \bar{0}) + e(\bar{0}, \bar{b})] d((\bar{a}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{b})) \\
&+ \sum_{\{(\bar{a}, \bar{0}), (\bar{b}, \bar{0})\} \subseteq V(\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3))} [e(\bar{a}, \bar{0}) + e(\bar{b}, \bar{0})] d((\bar{a}, \bar{0}), (\bar{b}, \bar{0})) \\
&+ \sum_{\{(\bar{0}, \bar{a}), (\bar{0}, \bar{b})\} \subseteq V(\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3))} [e(\bar{0}, \bar{a}) + e(\bar{0}, \bar{b})] d((\bar{0}, \bar{a}), (\bar{0}, \bar{b})) \\
&= [e(\bar{1}, \bar{0}) + e(\bar{0}, \bar{1})] d((\bar{1}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1})) + [e(\bar{1}, \bar{0}) + e(\bar{0}, \bar{2})] \\
&\quad d((\bar{1}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{2})) + [e(\bar{2}, \bar{0}) + e(\bar{0}, \bar{1})] d((\bar{2}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1})) \\
&\quad + [e(\bar{2}, \bar{0}) + e(\bar{0}, \bar{2})] d((\bar{2}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{2})) + [e(\bar{1}, \bar{0}) + e(\bar{2}, \bar{0})] \\
&\quad d((\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \bar{2})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2})) \\
&= [2 + 2]1 + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 + [2 + 2]2 \\
&\quad + [2 + 2]2 \\
&= (2 + 2)(2)(1) + (2 + 2)(2)(1) + (2 + 2)(1)(2) \\
&\quad + (2 + 2)(1)(2) \\
&= 32
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh jumlah jarak eksentrik graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$  adalah 32.

### 3. Graf pembagi nol $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)$

Graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$  merupakan graf komplit  $K_{2,4}$  digambarkan sebagai berikut.



Gambar 3. 24 Graf Bipartisi Komplit  $K_{2,4}$



Jarak masing-masing titik ke titik yang lain pada graf di atas adalah

$$d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0})) = 1, \quad d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2})) = 2, \quad d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{3})) = 2,$$

$$d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{4})) = 2, \quad d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{0})) = 1, \quad d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3})) = 2,$$

$$d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{4})) = 2, \quad d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{1}, \bar{0})) = 1, \quad d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4})) = 2,$$

$$d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{1}, \bar{0})) = 1, \quad d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{0})) = 1, \quad d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{0})) = 1,$$

$$d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{2}, \bar{0})) = 1, \quad d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{2}, \bar{0})) = 1 \quad \text{dan} \quad d((\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0})) = 2.$$

Dengan menghitung jarak tersebut dapat ditentukan eksentrisitas dan titik eksentrik dalam tabel berikut.

Tabel 3. 12 Eksentrisitas Graf Komplit  $K_{2,4}$ 

Titik	Eksentrisitas	Titik Eksentrik
$(\bar{0}, \bar{1})$	2	$(\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), \text{ dan } (\bar{0}, \bar{4})$
$(\bar{0}, \bar{2})$	2	$(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{3}), \text{ dan } (\bar{0}, \bar{4})$
$(\bar{0}, \bar{3})$	2	$(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}) \text{ dan } (\bar{0}, \bar{4})$
$(\bar{0}, \bar{4})$	2	$(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}) \text{ dan } (\bar{0}, \bar{3})$
$(\bar{1}, \bar{0})$	2	$(\bar{2}, \bar{0})$
$(\bar{2}, \bar{0})$	2	$(\bar{1}, \bar{0})$

Berdasarkan tabel diatas, jumlah jarak eksentrik dari graf pembagi nol  $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)$  dapat ditunjukkan sebagai berikut.

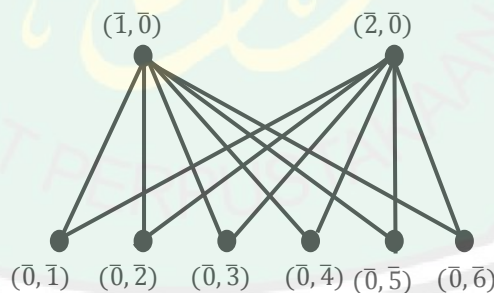
$$\begin{aligned} \xi^{ds}(\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)) &= \sum_{\{(\bar{0}, \bar{a}), (\bar{b}, \bar{0})\} \subseteq V(\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5))} [e(\bar{0}, \bar{a}) + e(\bar{b}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{a}), (\bar{b}, \bar{0})) \\ &+ \sum_{\{(\bar{a}, \bar{0}), (\bar{b}, \bar{0})\} \subseteq V(\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5))} [e(\bar{a}, \bar{0}) + e(\bar{b}, \bar{0})] d((\bar{a}, \bar{0}), (\bar{b}, \bar{0})) \\ &+ \sum_{\{(\bar{0}, \bar{a}), (\bar{0}, \bar{b})\} \subseteq V(\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5))} [e(\bar{0}, \bar{a}) + e(\bar{0}, \bar{b})] d((\bar{0}, \bar{a}), (\bar{0}, \bar{b})) \\ &= [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{1}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{1}, \bar{0})] \\ &\quad d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{1}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{1}, \bar{0})) \\ &\quad + [e(\bar{0}, \bar{4}) + e(\bar{1}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{1}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{2}, \bar{0})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{2}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{0})) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{2}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{2}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{4}) + e(\bar{2}, \bar{0})] \\
& d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{2}, \bar{0})) + [e(\bar{1}, \bar{0}) + e(\bar{2}, \bar{0})] d((\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0})) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \bar{2})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2})) + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \bar{3})] \\
& d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{3})) + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \bar{4})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{4})) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{0}, \bar{3})] d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3})) + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{0}, \bar{4})] \\
& d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{4})) + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{0}, \bar{4})] d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4})) \\
& = [2 + 2]1 + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 \\
& + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 \\
& + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 \\
& = (2 + 2)(4)(1) + (2 + 2)(4)(1) + (2 + 2)(1)(2) \\
& + (2 + 2)(6)(2) \\
& = 88
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh jumlah jarak eksentrik graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$  adalah 88.

#### 4. Graf pembagi nol $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7)$

Graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7$  merupakan graf komplit  $K_{2,6}$  digambarkan sebagai berikut.



Gambar 3. 25 Graf Bipartisi Komplit  $K_{2,6}$

Jarak masing-masing titik ke titik yang lain pada graf di atas adalah

$$\begin{aligned}
d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0})) &= 1, & d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2})) &= 2, & d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{3})) &= 2, \\
d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{4})) &= 2, & d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{5})) &= 2, & d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{6})) &= 2, \\
d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{0})) &= 1, & d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3})) &= 2, & d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{4})) &= 2,
\end{aligned}$$

$d((\bar{0}, 2), (\bar{0}, \bar{5})) = 2,$        $d((\bar{0}, 2), (\bar{0}, \bar{6})) = 2,$        $d((\bar{0}, 3), (\bar{1}, \bar{0})) = 1,$   
 $d((\bar{0}, 3), (\bar{0}, \bar{4})) = 2,$        $d((\bar{0}, 3), (\bar{0}, \bar{5})) = 2,$        $d((\bar{0}, 3), (\bar{0}, \bar{6})) = 2,$   
 $d((\bar{0}, 4), (\bar{1}, \bar{0})) = 1,$        $d((\bar{0}, 4), (\bar{0}, \bar{5})) = 2,$        $d((\bar{0}, 4), (\bar{0}, \bar{6})) = 2,$   
 $d((\bar{0}, \bar{5}), (\bar{1}, \bar{0})) = 1,$        $d((\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6})) = 2,$        $d((\bar{0}, \bar{6}), (\bar{1}, \bar{0})) = 1,$   
 $d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{0})) = 1,$        $d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{0})) = 1,$        $d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{2}, \bar{0})) = 1,$   
 $d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{2}, \bar{0})) = 1,$        $d((\bar{0}, \bar{5}), (\bar{2}, \bar{0})) = 1,$        $d((\bar{0}, \bar{6}), (\bar{2}, \bar{0})) = 1$       dan  
 $d((\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0})) = 2.$  Dengan menghitung jarak tersebut dapat ditentukan eksentrisitas dan titik eksentrik dalam tabel berikut.

Tabel 3. 13 Eksentrisitas Graf Bipartisi Komplit  $K_{2,6}$ 

Titik	Eksentrisitas	Titik Eksentrik
$(\bar{0}, \bar{1})$	2	$(\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5})$ dan $(\bar{0}, \bar{6})$
$(\bar{0}, \bar{2})$	2	$(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5})$ dan $(\bar{0}, \bar{6})$
$(\bar{0}, \bar{3})$	2	$(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5})$ dan $(\bar{0}, \bar{6})$
$(\bar{0}, \bar{4})$	2	$(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{5})$ dan $(\bar{0}, \bar{6})$
$(\bar{0}, \bar{5})$	2	$(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4})$ dan $(\bar{0}, \bar{6})$
$(\bar{0}, \bar{6})$	2	$(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4})$ dan $(\bar{0}, \bar{5})$
$(\bar{1}, \bar{0})$	2	$(\bar{2}, \bar{0})$
$(\bar{2}, \bar{0})$	2	$(\bar{1}, \bar{0})$

Berdasarkan tabel diatas, jumlah jarak eksentrik dari graf pembagi nol  $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7)$  dapat ditunjukkan sebagai berikut.

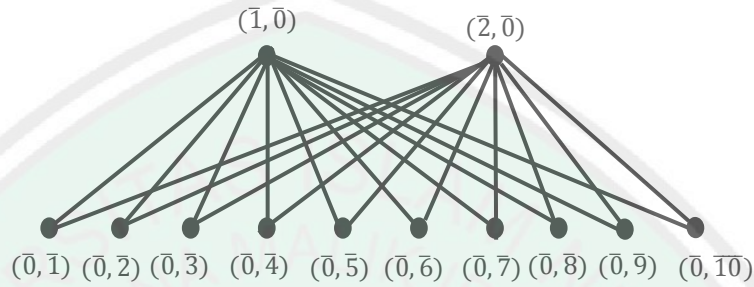
$$\begin{aligned}
 \xi^{ds}(\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7)) &= \sum_{\{(\bar{0}, \bar{a}), (\bar{b}, \bar{0})\} \subseteq V(\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7))} [e(\bar{0}, \bar{a}) + e(\bar{b}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{a}), (\bar{b}, \bar{0})) \\
 &+ \sum_{\{(\bar{a}, \bar{0}), (\bar{b}, \bar{0})\} \subseteq V(\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7))} [e(\bar{a}, \bar{0}) + e(\bar{b}, \bar{0})] d((\bar{a}, \bar{0}), (\bar{b}, \bar{0})) \\
 &+ \sum_{\{(\bar{0}, \bar{a}), (\bar{0}, \bar{b})\} \subseteq V(\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7))} [e(\bar{0}, \bar{a}) + e(\bar{0}, \bar{b})] d((\bar{0}, \bar{a}), (\bar{0}, \bar{b}))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{1}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{1}, \bar{0})] \\
&\quad d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{1}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{1}, \bar{0})) \\
&\quad + [e(\bar{0}, \bar{4}) + e(\bar{1}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{1}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{5}) + e(\bar{1}, \bar{0})] \\
&\quad d((\bar{0}, \bar{5}), (\bar{1}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{6}) + e(\bar{1}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{6}), (\bar{1}, \bar{0})) \\
&\quad + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{2}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{2}, \bar{0})] \\
&\quad d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{2}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{2}, \bar{0})) \\
&\quad + [e(\bar{0}, \bar{4}) + e(\bar{2}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{2}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{5}) + e(\bar{2}, \bar{0})] \\
&\quad d((\bar{0}, \bar{5}), (\bar{2}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{6}) + e(\bar{2}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{6}), (\bar{2}, \bar{0})) \\
&\quad + [e(\bar{1}, \bar{0}) + e(\bar{2}, \bar{0})] d((\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \bar{2})] \\
&\quad d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2})) + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \bar{3})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{3})) \\
&\quad + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \bar{4})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{4})) + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \bar{5})] \\
&\quad d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{5})) + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \bar{6})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{6})) \\
&\quad + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{0}, \bar{3})] d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3})) + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{0}, \bar{4})] \\
&\quad d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{4})) + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{0}, \bar{5})] d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{5})) \\
&\quad + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{0}, \bar{6})] d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{6})) + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{0}, \bar{4})] \\
&\quad d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4})) + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{0}, \bar{5})] d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{5})) \\
&\quad + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{0}, \bar{6})] d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{6})) + [e(\bar{0}, \bar{4}) + e(\bar{0}, \bar{5})] \\
&\quad d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5})) + [e(\bar{0}, \bar{4}) + e(\bar{0}, \bar{6})] d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{6})) \\
&\quad + [e(\bar{0}, \bar{5}) + e(\bar{0}, \bar{6})] d((\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6})) \\
&= [2 + 2]1 + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 \\
&\quad + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 \\
&\quad + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 \\
&\quad + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 \\
&\quad + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 \\
&\quad + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 \\
&= (2 + 2)(6)(1) + (2 + 2)(6)(1) + (2 + 2)(1)(2) \\
&\quad + (2 + 2)(15)(2) \\
&= 176
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh jumlah jarak eksentrik graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7$  adalah 176.

5. Graf pembagi nol  $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{11})$

Graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{11}$  merupakan graf komplit  $K_{2,10}$  digambarkan sebagai berikut.



Gambar 3. 26 Graf Bipartisi Komplit  $K_{2,10}$

Jarak masing-masing titik ke titik yang lain pada graf di atas adalah

$$d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0})) = 1, \quad d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2})) = 2, \quad d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{3})) = 2,$$

$$d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{4})) = 2, \quad d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{5})) = 2, \quad d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{6})) = 2,$$

$$d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{7})) = 2, \quad d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{8})) = 2, \quad d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{9})) = 2,$$

$$d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{10})) = 2, \quad d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{0})) = 1, \quad d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3})) = 2,$$

$$d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{4})) = 2, \quad d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{5})) = 2, \quad d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{6})) = 2,$$

$$d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{7})) = 2, \quad d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{8})) = 2, \quad d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{9})) = 2,$$

$$d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{10})) = 2, \quad d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{1}, \bar{0})) = 1, \quad d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4})) = 2,$$

$$d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{5})) = 2, \quad d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{6})) = 2, \quad d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{7})) = 2,$$

$$d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{8})) = 2, \quad d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{9})) = 2, \quad d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{10})) = 2,$$

$$d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{1}, \bar{0})) = 1, \quad d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5})) = 2, \quad d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{6})) = 2,$$

$$d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{7})) = 2, \quad d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{8})) = 2, \quad d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{9})) = 2,$$

$$d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{10})) = 2, \quad d((\bar{0}, \bar{5}), (\bar{1}, \bar{0})) = 1, \quad d((\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6})) = 2,$$

$$\begin{aligned}
d((\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{7})) &= 2, & d((\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{8})) &= 2, & d((\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{9})) &= 2, \\
d((\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{10})) &= 2, & d((\bar{0}, \bar{6}), (\bar{1}, \bar{0})) &= 1, & d((\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{7})) &= 2, \\
d((\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{8})) &= 2, & d((\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{9})) &= 2, & d((\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{10})) &= 2, \\
d((\bar{0}, \bar{7}), (\bar{1}, \bar{0})) &= 1, & d((\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{8})) &= 2, & d((\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{9})) &= 2, \\
d((\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{10})) &= 2, & d((\bar{0}, \bar{8}), (\bar{1}, \bar{0})) &= 1, & d((\bar{0}, \bar{8}), (\bar{0}, \bar{9})) &= 2, \\
d((\bar{0}, \bar{8}), (\bar{0}, \bar{10})) &= 2, & d((\bar{0}, \bar{9}), (\bar{1}, \bar{0})) &= 1, & d((\bar{0}, \bar{9}), (\bar{0}, \bar{10})) &= 2, \\
d((\bar{0}, \bar{10}), (\bar{1}, \bar{0})) &= 1, & d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{0})) &= 1, & d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{0})) &= 1, \\
d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{2}, \bar{0})) &= 1, & d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{2}, \bar{0})) &= 1, & d((\bar{0}, \bar{5}), (\bar{2}, \bar{0})) &= 1, \\
d((\bar{0}, \bar{6}), (\bar{2}, \bar{0})) &= 1, & d((\bar{0}, \bar{7}), (\bar{2}, \bar{0})) &= 1, & d((\bar{0}, \bar{8}), (\bar{2}, \bar{0})) &= 1, \\
d((\bar{0}, \bar{9}), (\bar{2}, \bar{0})) &= 1, & d((\bar{0}, \bar{10}), (\bar{2}, \bar{0})) &= 1 & \text{ dan } & d((\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0})) &= 2.
\end{aligned}$$

Dengan menghitung jarak tersebut dapat ditentukan eksentrisitas dan titik eksentrik dalam tabel berikut.

Tabel 3. 14 Eksentrisitas Graf Bipartisi Komplit  $K_{1,10}$

Titik	Eksentrisitas	Titik Eksentrik
$(\bar{0}, \bar{1})$	2	$(\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{8}), (\bar{0}, \bar{9}), (\bar{0}, \bar{10})$
$(\bar{0}, \bar{2})$	2	$(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{8}), (\bar{0}, \bar{9}), (\bar{0}, \bar{10})$
$(\bar{0}, \bar{3})$	2	$(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{8}), (\bar{0}, \bar{9}), (\bar{0}, \bar{10})$
$(\bar{0}, \bar{4})$	2	$(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{8}), (\bar{0}, \bar{9}), (\bar{0}, \bar{10})$
$(\bar{0}, \bar{5})$	2	$(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{8}), (\bar{0}, \bar{9}), (\bar{0}, \bar{10})$
$(\bar{0}, \bar{6})$	2	$(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{8}), (\bar{0}, \bar{9}), (\bar{0}, \bar{10})$
$(\bar{0}, \bar{7})$	2	$(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{8}), (\bar{0}, \bar{9}), (\bar{0}, \bar{10})$
$(\bar{0}, \bar{8})$	2	$(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{9}), (\bar{0}, \bar{10})$
$(\bar{0}, \bar{9})$	2	$(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{8}), (\bar{0}, \bar{10})$
$(\bar{0}, \bar{10})$	2	$(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{8}), (\bar{0}, \bar{9})$
$(\bar{1}, \bar{0})$	2	$(\bar{2}, \bar{0})$

$(\bar{2}, \bar{0})$	2	$(\bar{1}, \bar{0})$
----------------------	---	----------------------

Berdasarkan tabel diatas, jumlah jarak eksentrik dari graf pembagi nol  $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{11})$  dapat ditunjukkan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\xi^{ds}(\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{11})) &= \sum_{\{(\bar{0}, \bar{a}), (\bar{b}, \bar{0})\} \subseteq V(\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{11}))} [e(\bar{0}, \bar{a}) + e(\bar{b}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{a}), (\bar{b}, \bar{0})) \\
&+ \sum_{\{(\bar{a}, \bar{0}), (\bar{b}, \bar{0})\} \subseteq V(\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{11}))} [e(\bar{a}, \bar{0}) + e(\bar{b}, \bar{0})] d((\bar{a}, \bar{0}), (\bar{b}, \bar{0})) \\
&+ \sum_{\{(\bar{0}, \bar{a}), (\bar{0}, \bar{b})\} \subseteq V(\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{11}))} [e(\bar{0}, \bar{a}) + e(\bar{0}, \bar{b})] d((\bar{0}, \bar{a}), (\bar{0}, \bar{b})) \\
&= [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{1}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{1}, \bar{0})] \\
&d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{1}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{1}, \bar{0})) \\
&+ [e(\bar{0}, \bar{4}) + e(\bar{1}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{1}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{5}) + e(\bar{1}, \bar{0})] \\
&d((\bar{0}, \bar{5}), (\bar{1}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{6}) + e(\bar{1}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{6}), (\bar{1}, \bar{0})) \\
&+ [e(\bar{0}, \bar{7}) + e(\bar{1}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{7}), (\bar{1}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{8}) + e(\bar{1}, \bar{0})] \\
&d((\bar{0}, \bar{8}), (\bar{1}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{9}) + e(\bar{1}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{9}), (\bar{1}, \bar{0})) \\
&+ [e(\bar{0}, \bar{10}) + e(\bar{1}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{10}), (\bar{1}, \bar{0})) \\
&+ [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{2}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{2}, \bar{0})] \\
&d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{2}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{2}, \bar{0})) \\
&+ [e(\bar{0}, \bar{4}) + e(\bar{2}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{2}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{5}) + e(\bar{2}, \bar{0})] \\
&d((\bar{0}, \bar{5}), (\bar{2}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{6}) + e(\bar{2}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{6}), (\bar{2}, \bar{0})) \\
&+ [e(\bar{0}, \bar{7}) + e(\bar{2}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{7}), (\bar{2}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{8}) + e(\bar{2}, \bar{0})] \\
&d((\bar{0}, \bar{8}), (\bar{2}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{9}) + e(\bar{2}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{9}), (\bar{2}, \bar{0})) \\
&+ [e(\bar{0}, \bar{10}) + e(\bar{2}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{10}), (\bar{2}, \bar{0})) + [e(\bar{1}, \bar{0}) + e(\bar{2}, \bar{0})] \\
&d((\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \bar{2})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2})) \\
&+ [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \bar{3})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{3})) + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \bar{4})] \\
&d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{4})) + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \bar{5})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{5})) \\
&+ [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \bar{6})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{6})) + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \bar{7})] \\
&d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{7})) + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \bar{8})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{8}))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \bar{9})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{9})) + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \bar{10})] \\
& d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{10})) + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{0}, \bar{3})] d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3})) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{0}, \bar{4})] d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{4})) + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{0}, \bar{5})] \\
& d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{5})) + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{0}, \bar{6})] d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{6})) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{0}, \bar{7})] d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{7})) + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{0}, \bar{8})] \\
& d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{8})) + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{0}, \bar{9})] d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{9})) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{0}, \bar{10})] d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{10})) + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{0}, \bar{4})] \\
& d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4})) + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{0}, \bar{5})] d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{5})) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{0}, \bar{6})] d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{6})) + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{0}, \bar{7})] \\
& d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{7})) + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{0}, \bar{8})] d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{8})) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{0}, \bar{9})] d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{9})) + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{0}, \bar{10})] \\
& d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{10})) + [e(\bar{0}, \bar{4}) + e(\bar{0}, \bar{5})] d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5})) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{4}) + e(\bar{0}, \bar{6})] d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{6})) + [e(\bar{0}, \bar{4}) + e(\bar{0}, \bar{7})] \\
& d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{7})) + [e(\bar{0}, \bar{4}) + e(\bar{0}, \bar{8})] d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{8})) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{4}) + e(\bar{0}, \bar{9})] d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{9})) + [e(\bar{0}, \bar{4}) + e(\bar{0}, \bar{10})] \\
& d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{10})) + [e(\bar{0}, \bar{5}) + e(\bar{0}, \bar{6})] d((\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6})) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{5}) + e(\bar{0}, \bar{7})] d((\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{7})) + [e(\bar{0}, \bar{5}) + e(\bar{0}, \bar{8})] \\
& d((\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{8})) + [e(\bar{0}, \bar{5}) + e(\bar{0}, \bar{9})] d((\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{9})) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{5}) + e(\bar{0}, \bar{10})] d((\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{10})) + [e(\bar{0}, \bar{6}) + e(\bar{0}, \bar{7})] \\
& d((\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{7})) + [e(\bar{0}, \bar{6}) + e(\bar{0}, \bar{8})] d((\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{8})) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{6}) + e(\bar{0}, \bar{9})] d((\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{9})) + [e(\bar{0}, \bar{6}) + e(\bar{0}, \bar{10})] \\
& d((\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{10})) + [e(\bar{0}, \bar{7}) + e(\bar{0}, \bar{8})] d((\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{8})) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{7}) + e(\bar{0}, \bar{9})] d((\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{9})) + [e(\bar{0}, \bar{7}) + e(\bar{0}, \bar{10})] \\
& d((\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{10})) + [e(\bar{0}, \bar{8}) + e(\bar{0}, \bar{9})] d((\bar{0}, \bar{8}), (\bar{0}, \bar{9})) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{8}) + e(\bar{0}, \bar{10})] d((\bar{0}, \bar{8}), (\bar{0}, \bar{10})) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{9}) + e(\bar{0}, \bar{10})] d((\bar{0}, \bar{9}), (\bar{0}, \bar{10})) \\
& = [2 + 2]1 + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 + [2 + 2]1
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& +[2+2]1 + [2+2]1 + [2+2]1 + [2+2]1 + [2+2]1 \\
& +[2+2]1 + [2+2]1 + [2+2]1 + [2+2]1 + [2+2]1 \\
& +[2+2]1 + [2+2]1 + [2+2]1 + [2+2]1 + [2+2]1 \\
& +[2+2]2 + [2+2]2 + [2+2]2 + [2+2]2 + [2+2]2 \\
& +[2+2]2 + [2+2]2 + [2+2]2 + [2+2]2 + [2+2]2 \\
& +[2+2]2 + [2+2]2 + [2+2]2 + [2+2]2 + [2+2]2 \\
& +[2+2]2 + [2+2]2 + [2+2]2 + [2+2]2 + [2+2]2 \\
& +[2+2]2 + [2+2]2 + [2+2]2 + [2+2]2 + [2+2]2 \\
& +[2+2]2 + [2+2]2 + [2+2]2 + [2+2]2 + [2+2]2 \\
& +[2+2]2 + [2+2]2 + [2+2]2 + [2+2]2 + [2+2]2 \\
& +[2+2]2 + [2+2]2 + [2+2]2 + [2+2]2 + [2+2]2 \\
& +[2+2]2 \\
& = (2+2)(10)(1) + (2+2)(10)(1) + (2+2)(1)(2) \\
& \quad + (2+2)(45)(2) \\
& = 448
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh jumlah jarak eksentrik graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{11}$  adalah 448.

Berdasarkan jumlah jarak eksentrik graf pembagi nol diatas, diperoleh kesimpulan secara umum untuk jumlah jarak eksentrik graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_q$  sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\xi^{ds} \left( \Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_q) \right) &= \sum_{\{(\bar{0}, \bar{a}), (\bar{b}, \bar{0})\} \subseteq V(\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_q))} [e(\bar{0}, \bar{a}) + e(\bar{b}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{a}), (\bar{b}, \bar{0})) \\
&+ \sum_{\{(\bar{a}, \bar{0}), (\bar{b}, \bar{0})\} \subseteq V(\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_q))} [e(\bar{a}, \bar{0}) + e(\bar{b}, \bar{0})] d((\bar{a}, \bar{0}), (\bar{b}, \bar{0})) \\
&+ \sum_{\{(\bar{0}, \bar{a}), (\bar{0}, \bar{b})\} \subseteq V(\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_q))} [e(\bar{0}, \bar{a}) + e(\bar{0}, \bar{b})] d((\bar{0}, \bar{a}), (\bar{0}, \bar{b})) \\
&= [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{1}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{1}, \bar{0})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{1}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{1}, \bar{0})) \\
& + \dots + [e(\bar{0}, \overline{q-1}) + e(\bar{1}, \bar{0})] d((\bar{0}, \overline{q-1}), (\bar{1}, \bar{0})) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{2}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{2}, \bar{0})] \\
& d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{2}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{2}, \bar{0})) \\
& + \dots + [e(\bar{0}, \overline{q-1}) + e(\bar{2}, \bar{0})] d((\bar{0}, \overline{q-1}), (\bar{2}, \bar{0})) \\
& + [e(\bar{1}, \bar{0}) + e(\bar{2}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2})) + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \bar{2})] \\
& d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2})) + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \bar{3})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{3})) \\
& + \dots + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \overline{q-1})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \overline{q-1})) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{0}, \bar{3})] d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3})) + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{0}, \bar{4})] \\
& d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{4})) + \dots + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{0}, \overline{q-1})] \\
& d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \overline{q-1})) + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{0}, \bar{4})] d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4})) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{0}, \bar{5})] d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{5})) + \dots \\
& + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{0}, \overline{q-1})] d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \overline{q-1})) + \dots \\
& + [e(\bar{0}, \overline{q-2}) + e(\bar{0}, \overline{q-1})] d((\bar{0}, \overline{q-2}), (\bar{0}, \overline{q-1})) \\
& = (2+2)(q-1)(1) + (2+2)(q-1)(1) + (2+2)(1)(2) \\
& + (2+2)(q-2)(2) + (2+2)(q-3)(2) + (2+2) \\
& (q-4)(2) + \dots + (2+2)(2)(2) + (2+2)(1)(2) \\
& = 2(2+2)(q-1)(1) + (2+2)(1)(2) \\
& + (2+2)(2)[(q-2) + (q-3) + (q-4) + \dots + 2+1] \\
& = 4 \left( 2(q-1) + 2 + 2 \left( \frac{(q-2)}{2} ((q-2) + 1) \right) \right) \\
& = 4(2q - 2 + 2 + (q-2)(q-1)) \\
& = 4(2q + q^2 - 3q + 2) \\
& = 4(q^2 - q + 2) \\
& = 4q^2 - 4q + 8
\end{aligned}$$

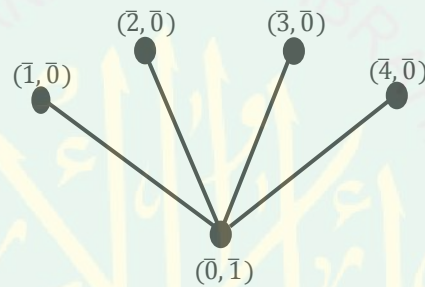
Dengan demikian diperoleh bahwa, pola jumlah jarak eksentrik graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_q$  dengan  $q$  bilangan prima dan  $q \geq 3$  adalah  $4q^2 - 4q + 8$ . Sedangkan untuk  $q = 2$ , pola tersebut tidak berlaku karena bentuk

graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2)$  kongruen dengan bentuk graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3)$  sehingga jumlah jarak eksentrik dari graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2)$  mengikuti pola jumlah jarak eksentrik dari graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_q)$  dengan  $q$  bilangan prima dan  $q \geq 3$ .

### 3.3.3 Jumlah Jarak Eksentrik Graf Pembagi Nol dari Gelanggang $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_q$ dengan $q = 2, 3, 5, 7, 11$

#### 1. Graf pembagi nol $\Gamma(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2)$

Graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2$  merupakan graf bipartis komplit  $K_{4,1}$  atau graf bintang  $S_4$  digambarkan sebagai berikut.



Gambar 3. 27 Graf Bipartisi Komplit  $K_{4,1}$

Jarak masing-masing titik ke titik yang lain pada graf di atas adalah  $d((0, 1), (1, 0)) = 1$ ,  $d((0, 1), (2, 0)) = 1$ ,  $d((0, 1), (3, 0)) = 1$ ,  $d((0, 1), (4, 0)) = 1$ ,  $d((1, 0), (2, 0)) = 2$ ,  $d((1, 0), (3, 0)) = 2$ ,  $d((1, 0), (4, 0)) = 2$ ,  $d((2, 0), (3, 0)) = 2$ ,  $d((2, 0), (4, 0)) = 2$ , dan  $d((3, 0), (4, 0)) = 2$ . Dengan menghitung jarak tersebut dapat ditentukan eksentrisitas dan titik eksentrik dalam tabel berikut.

Tabel 3. 15 Eksentrisitas Graf Bipartisi Komplit  $K_{4,1}$

Titik	Eksentrisitas	Titik Eksentrik
$(1, 0)$	2	$(2, 0), (3, 0), (4, 0)$
$(2, 0)$	2	$(1, 0), (3, 0), (4, 0)$
$(3, 0)$	2	$(1, 0), (2, 0), (4, 0)$

$(\bar{4}, \bar{0})$	2	$(\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{0})$
$(\bar{0}, \bar{1})$	1	$(\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{0})$

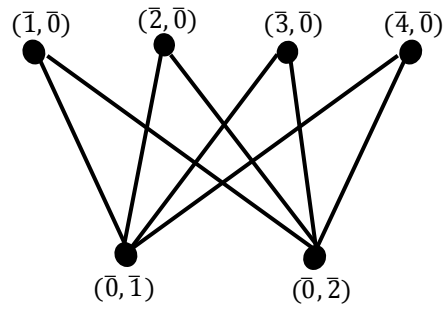
Berdasarkan tabel diatas, jumlah jarak eksentrik dari graf pembagi nol  $\Gamma(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2)$  dapat ditunjukkan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\xi^{ds}(\Gamma(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2)) &= \sum_{\{(\bar{0}, \bar{a}), (\bar{b}, \bar{0})\} \subseteq V(\Gamma(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2))} [e(\bar{0}, \bar{a}) + e(\bar{b}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{a}), (\bar{b}, \bar{0})) \\
&+ \sum_{\{(\bar{a}, \bar{0}), (\bar{b}, \bar{0})\} \subseteq V(\Gamma(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2))} [e(\bar{a}, \bar{0}) + e(\bar{b}, \bar{0})] d((\bar{a}, \bar{0}), (\bar{b}, \bar{0})) \\
&= [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{1}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{2}, \bar{0})] \\
&\quad d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{3}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{3}, \bar{0})) \\
&\quad + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{4}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{4}, \bar{0})) + [e(\bar{1}, \bar{0}) + e(\bar{2}, \bar{0})] \\
&\quad d((\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0})) + [e(\bar{1}, \bar{0}) + e(\bar{3}, \bar{0})] d((\bar{1}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{0})) \\
&\quad + [e(\bar{1}, \bar{0}) + e(\bar{4}, \bar{0})] d((\bar{1}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{0})) + [e(\bar{2}, \bar{0}) + e(\bar{3}, \bar{0})] \\
&\quad d((\bar{2}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{0})) + [e(\bar{2}, \bar{0}) + e(\bar{4}, \bar{0})] d((\bar{2}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{0})) \\
&\quad + [e(\bar{3}, \bar{0}) + e(\bar{4}, \bar{0})] d((\bar{3}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{0})) \\
&= [1 + 2]1 + [1 + 2]1 + [1 + 2]1 + [1 + 2]1 + [2 + 2]2 \\
&\quad + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 \\
&= (1 + 2)(4)(1) + (2 + 2)(6)(2) \\
&= 60
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh jumlah jarak eksentrik graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2$  adalah 60.

## 2. Graf pembagi nol $\Gamma(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_3)$

Graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_3$  merupakan graf bipartis komplit  $K_{4,2}$  digambarkan sebagai berikut.

Gambar 3. 28 Graf Bipartisi Komplit  $K_{4,2}$ 

Jarak masing-masing titik ke titik yang lain pada graf di atas adalah

$$\begin{aligned}
 d((0,1), (1,0)) &= 1, & d((0,1), (2,0)) &= 1, & d((0,1), (3,0)) &= 1, \\
 d((0,1), (4,0)) &= 1, & d((1,0), (2,0)) &= 2, & d((1,0), (3,0)) &= 2, \\
 d((1,0), (4,0)) &= 2, & d((2,0), (3,0)) &= 2, & d((2,0), (4,0)) &= 2, \\
 d((3,0), (4,0)) &= 2, & d((0,2), (1,0)) &= 1, & d((0,2), (2,0)) &= 1, \\
 d((0,2), (3,0)) &= 1, & d((0,2), (4,0)) &= 1, & \text{dan } d((0,1), (0,2)) &= 2.
 \end{aligned}$$

Dengan menghitung jarak tersebut dapat ditentukan eksentrisitas dan titik eksentrik dalam tabel berikut.

Tabel 3. 16 Eksentrisitas Graf Bipartisi Komplit  $K_{4,2}$ 

Titik	Eksentrisitas	Titik Eksentrik
$(1, 0)$	2	$(2, 0), (3, 0), (4, 0)$
$(2, 0)$	2	$(1, 0), (3, 0), (4, 0)$
$(3, 0)$	2	$(1, 0), (2, 0), (4, 0)$
$(4, 0)$	2	$(1, 0), (2, 0), (3, 0)$
$(0, 1)$	2	$(0, 2)$
$(0, 2)$	2	$(0, 1)$

Berdasarkan tabel diatas, jumlah jarak eksentrik dari graf pembagi nol  $\Gamma(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_3)$  dapat ditunjukkan sebagai berikut.

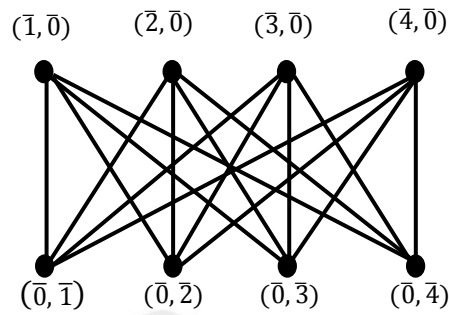
$$\xi^{ds}(\Gamma(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_3)) = \sum_{\{(\bar{a}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{b})\} \subseteq V(\Gamma(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_3))} [e(\bar{a}, \bar{0}) + e(\bar{0}, \bar{b})] d((\bar{a}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{b}))$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\{(\bar{0}, \bar{a}), (\bar{0}, \bar{b})\} \subseteq V(\Gamma(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_3))} [e(\bar{0}, \bar{a}) + e(\bar{0}, \bar{b})] d((\bar{0}, \bar{a}), (\bar{0}, \bar{b})) \\
& + \sum_{\{(\bar{a}, \bar{0}), (\bar{b}, \bar{0})\} \subseteq V(\Gamma(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_3))} [e(\bar{a}, \bar{0}) + e(\bar{b}, \bar{0})] d((\bar{a}, \bar{0}), (\bar{b}, \bar{0})) \\
& = [e(\bar{1}, \bar{0}) + e(\bar{0}, \bar{1})] d((\bar{1}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1})) + [e(\bar{2}, \bar{0}) + e(\bar{0}, \bar{1})] \\
& \quad d((\bar{2}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1})) + [e(\bar{3}, \bar{0}) + e(\bar{0}, \bar{1})] d((\bar{3}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1})) \\
& \quad + [e(\bar{4}, \bar{0}) + e(\bar{0}, \bar{1})] d((\bar{4}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1})) + [e(\bar{1}, \bar{0}) + e(\bar{0}, \bar{2})] \\
& \quad d((\bar{1}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{2})) + [e(\bar{2}, \bar{0}) + e(\bar{0}, \bar{2})] d((\bar{2}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{2})) \\
& \quad + [e(\bar{3}, \bar{0}) + e(\bar{0}, \bar{2})] d((\bar{3}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{2})) + [e(\bar{4}, \bar{0}) + e(\bar{0}, \bar{2})] \\
& \quad d((\bar{4}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{2})) + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \bar{2})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2})) \\
& \quad + [e(\bar{1}, \bar{0}) + e(\bar{2}, \bar{0})] d((\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0})) + [e(\bar{1}, \bar{0}) + e(\bar{3}, \bar{0})] \\
& \quad d((\bar{1}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{0})) + [e(\bar{1}, \bar{0}) + e(\bar{4}, \bar{0})] d((\bar{1}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{0})) \\
& \quad + [e(\bar{2}, \bar{0}) + e(\bar{3}, \bar{0})] d((\bar{2}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{0})) + [e(\bar{2}, \bar{0}) + e(\bar{4}, \bar{0})] \\
& \quad d((\bar{2}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{0})) + [e(\bar{3}, \bar{0}) + e(\bar{4}, \bar{0})] d((\bar{3}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{0})) \\
& = [2 + 2]1 + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 \\
& \quad + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 \\
& \quad + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 \\
& = (2 + 2)(4)(1) + (2 + 2)(4)(1) + (2 + 2)(1)(2) \\
& \quad + (2 + 2)(6)(2) \\
& = 88
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh jumlah jarak eksentrik graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_3$  adalah 88.

### 3. Graf pembagi nol $\Gamma(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5)$

Graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$  merupakan graf komplit  $K_{4,4}$  digambarkan sebagai berikut.

Gambar 3. 29 Graf Bipartisi Komplit  $K_{4,4}$ 

Jarak masing-masing titik ke titik yang lain pada graf di atas adalah

$$d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0})) = 1, \quad d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2})) = 2, \quad d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{3})) = 2,$$

$$d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{4})) = 2, \quad d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{0})) = 1, \quad d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3})) = 2,$$

$$d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{4})) = 2, \quad d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{1}, \bar{0})) = 1, \quad d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4})) = 2,$$

$$d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{1}, \bar{0})) = 1, \quad d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{0})) = 1, \quad d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{0})) = 1,$$

$$d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{2}, \bar{0})) = 1, \quad d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{2}, \bar{0})) = 1, \quad d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{3}, \bar{0})) = 1,$$

$$d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{3}, \bar{0})) = 1, \quad d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{3}, \bar{0})) = 1, \quad d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{3}, \bar{0})) = 1,$$

$$d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{4}, \bar{0})) = 1, \quad d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{4}, \bar{0})) = 1, \quad d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{4}, \bar{0})) = 1,$$

$$d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{4}, \bar{0})) = 1, \quad d((\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0})) = 2, \quad d((\bar{1}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{0})) = 2,$$

$$d((\bar{1}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{0})) = 2, \quad d((\bar{2}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{0})) = 2, \quad d((\bar{2}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{0})) = 2 \quad \text{dan}$$

$$d((\bar{3}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{0})) = 2. \quad \text{Dengan menghitung jarak tersebut dapat ditentukan}$$

eksentrisitas dan titik eksentrik dalam tabel berikut.

Tabel 3. 17 Eksentrisitas Graf Bipartisi Komplit  $K_{4,4}$ 

Titik	Eksentrisitas	Titik Eksentrik
$(\bar{0}, \bar{1})$	2	$(\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4})$
$(\bar{0}, \bar{2})$	2	$(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4})$
$(\bar{0}, \bar{3})$	2	$(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{4})$
$(\bar{0}, \bar{4})$	2	$(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3})$
$(\bar{1}, \bar{0})$	2	$(\bar{2}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{0})$

$(\bar{2}, \bar{0})$	2	$(\bar{1}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{0})$
$(\bar{3}, \bar{0})$	2	$(\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{0})$
$(\bar{4}, \bar{0})$	2	$(\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{0})$

Berdasarkan tabel diatas, jumlah jarak eksentrik dari graf pembagi nol  $\Gamma(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5)$  dapat ditunjukkan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\xi^{ds}(\Gamma(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5)) &= \sum_{\{(\bar{0}, \bar{a}), (\bar{b}, \bar{0})\} \subseteq V(\Gamma(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5))} [e(\bar{0}, \bar{a}) + e(\bar{b}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{a}), (\bar{b}, \bar{0})) \\
&+ \sum_{\{(\bar{a}, \bar{0}), (\bar{b}, \bar{0})\} \subseteq V(\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3))} [e(\bar{a}, \bar{0}) + e(\bar{b}, \bar{0})] d((\bar{a}, \bar{0}), (\bar{b}, \bar{0})) \\
&+ \sum_{\{(\bar{0}, \bar{a}), (\bar{0}, \bar{b})\} \subseteq V(\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3))} [e(\bar{0}, \bar{a}) + e(\bar{0}, \bar{b})] d((\bar{0}, \bar{a}), (\bar{0}, \bar{b})) \\
&= [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{1}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{1}, \bar{0})] \\
&d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{1}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{1}, \bar{0})) \\
&+ [e(\bar{0}, \bar{4}) + e(\bar{1}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{1}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{2}, \bar{0})] \\
&d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{2}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{0})) \\
&+ [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{2}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{2}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{4}) + e(\bar{2}, \bar{0})] \\
&d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{2}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{3}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{3}, \bar{0})) \\
&+ [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{3}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{3}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{3}, \bar{0})] \\
&d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{3}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{4}) + e(\bar{3}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{3}, \bar{0})) \\
&+ [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{4}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{4}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{4}, \bar{0})] \\
&d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{4}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{4}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{4}, \bar{0})) \\
&+ [e(\bar{0}, \bar{4}) + e(\bar{4}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{4}, \bar{0})) + [e(\bar{1}, \bar{0}) + e(\bar{2}, \bar{0})] \\
&d((\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0})) + [e(\bar{1}, \bar{0}) + e(\bar{3}, \bar{0})] d((\bar{1}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{0})) \\
&+ [e(\bar{1}, \bar{0}) + e(\bar{4}, \bar{0})] d((\bar{1}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{0})) + [e(\bar{2}, \bar{0}) + e(\bar{3}, \bar{0})] \\
&d((\bar{2}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{0})) + [e(\bar{2}, \bar{0}) + e(\bar{4}, \bar{0})] d((\bar{2}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{0})) \\
&+ [e(\bar{3}, \bar{0}) + e(\bar{4}, \bar{0})] d((\bar{3}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \bar{2})] \\
&d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2})) + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \bar{3})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{3})) \\
&+ [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \bar{4})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{4})) + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{0}, \bar{3})] \\
&d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3})) + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{0}, \bar{4})] d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{4}))
\end{aligned}$$

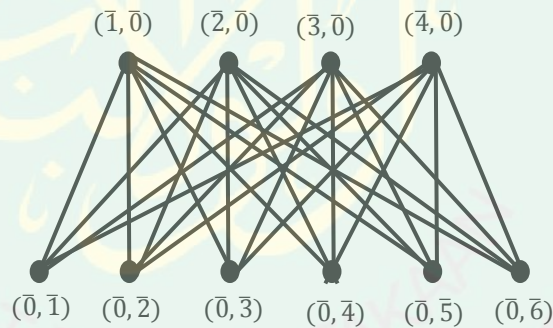


$$\begin{aligned}
& +[e(\bar{0},\bar{3}) + e(\bar{0},\bar{4})] d((\bar{0},\bar{3}),(\bar{0},\bar{4})) \\
& = [2 + 2]1 + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 \\
& \quad + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 \\
& \quad + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 \\
& \quad + [2 + 2]1 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 \\
& \quad + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 \\
& \quad + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 \\
& = (2 + 2)(4)(1) + (2 + 2)(4)(1) + (2 + 2)(4)(1) \\
& \quad + (2 + 2)(4)(1) + (2 + 2)(6)(2) + (2 + 2)(6)(2) \\
& = 160
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh jumlah jarak eksentrik graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$  adalah 160.

#### 4. Graf pembagi nol $\Gamma(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7)$

Graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$  merupakan graf komplit  $K_{4,6}$  digambarkan sebagai berikut.



Gambar 3. 30 Graf Bipartisi Komplit  $K_{4,6}$

Jarak masing-masing titik ke titik yang lain pada graf di atas adalah

$$\begin{aligned}
d((\bar{0},\bar{1}),(\bar{1},\bar{0})) &= 1, & d((\bar{0},\bar{1}),(\bar{0},\bar{2})) &= 2, & d((\bar{0},\bar{1}),(\bar{0},\bar{3})) &= 2, \\
d((\bar{0},\bar{1}),(\bar{0},\bar{4})) &= 2, & d((\bar{0},\bar{1}),(\bar{0},\bar{5})) &= 2, & d((\bar{0},\bar{1}),(\bar{0},\bar{6})) &= 2, \\
d((\bar{0},\bar{2}),(\bar{1},\bar{0})) &= 1, & d((\bar{0},\bar{2}),(\bar{0},\bar{3})) &= 2, & d((\bar{0},\bar{2}),(\bar{0},\bar{4})) &= 2, \\
d((\bar{0},\bar{2}),(\bar{0},\bar{5})) &= 2, & d((\bar{0},\bar{2}),(\bar{0},\bar{6})) &= 2, & d((\bar{0},\bar{3}),(\bar{1},\bar{0})) &= 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4})) &= 2, & d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{5})) &= 2, & d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{6})) &= 2, \\
d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{1}, \bar{0})) &= 1, & d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5})) &= 2, & d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{6})) &= 2, \\
d((\bar{0}, \bar{5}), (\bar{1}, \bar{0})) &= 1, & d((\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6})) &= 2, & d((\bar{0}, \bar{6}), (\bar{1}, \bar{0})) &= 1, \\
d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{0})) &= 1, & d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{0})) &= 1, & d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{2}, \bar{0})) &= 1, \\
d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{2}, \bar{0})) &= 1, & d((\bar{0}, \bar{5}), (\bar{2}, \bar{0})) &= 1, & d((\bar{0}, \bar{6}), (\bar{2}, \bar{0})) &= 1, \\
d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{3}, \bar{0})) &= 1, & d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{3}, \bar{0})) &= 1, & d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{3}, \bar{0})) &= 1, \\
d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{3}, \bar{0})) &= 1, & d((\bar{0}, \bar{5}), (\bar{3}, \bar{0})) &= 1, & d((\bar{0}, \bar{6}), (\bar{3}, \bar{0})) &= 1, \\
d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{4}, \bar{0})) &= 1, & d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{4}, \bar{0})) &= 1, & d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{4}, \bar{0})) &= 1, \\
d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{4}, \bar{0})) &= 1, & d((\bar{0}, \bar{5}), (\bar{4}, \bar{0})) &= 1, & d((\bar{0}, \bar{6}), (\bar{4}, \bar{0})) &= 1, \\
d((\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0})) &= 2, & d((\bar{1}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{0})) &= 2, & d((\bar{1}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{0})) &= 2, \\
d((\bar{2}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{0})) &= 2, & d((\bar{2}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{0})) &= 2 & \text{ dan } & d((\bar{3}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{0})) &= 2.
\end{aligned}$$

Dengan menghitung jarak tersebut dapat ditentukan eksentrisitas dan titik eksentrik dalam tabel berikut.

Tabel 3. 18 Eksentrisitas Graf Komplit  $K_{4,6}$

Titik	Eksentrisitas	Titik Eksentrik
$(\bar{0}, \bar{1})$	2	$(\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6})$
$(\bar{0}, \bar{2})$	2	$(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6})$
$(\bar{0}, \bar{3})$	2	$(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6})$
$(\bar{0}, \bar{4})$	2	$(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6})$
$(\bar{0}, \bar{5})$	2	$(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{6})$
$(\bar{0}, \bar{6})$	2	$(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5})$
$(\bar{1}, \bar{0})$	2	$(\bar{2}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{0})$
$(\bar{2}, \bar{0})$	2	$(\bar{1}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{0})$
$(\bar{3}, \bar{0})$	2	$(\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{0})$

$(\bar{4}, \bar{0})$	2	$(\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{0})$
----------------------	---	--

Berdasarkan tabel diatas, jumlah jarak eksentrik dari graf pembagi nol  $\Gamma(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7)$  dapat ditunjukkan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\xi^{ds}(\Gamma(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7)) &= \sum_{\{(\bar{0}, \bar{a}), (\bar{b}, \bar{0})\} \subseteq V(\Gamma(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7))} [e(\bar{0}, \bar{a}) + e(\bar{b}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{a}), (\bar{b}, \bar{0})) \\
&+ \sum_{\{(\bar{a}, \bar{0}), (\bar{b}, \bar{0})\} \subseteq V(\Gamma(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7))} [e(\bar{a}, \bar{0}) + e(\bar{b}, \bar{0})] d((\bar{a}, \bar{0}), (\bar{b}, \bar{0})) \\
&+ \sum_{\{(\bar{0}, \bar{a}), (\bar{0}, \bar{b})\} \subseteq V(\Gamma(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7))} [e(\bar{0}, \bar{a}) + e(\bar{0}, \bar{b})] d((\bar{0}, \bar{a}), (\bar{0}, \bar{b})) \\
&= [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{1}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{1}, \bar{0})] \\
&\quad d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{1}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{1}, \bar{0})) \\
&\quad + [e(\bar{0}, \bar{4}) + e(\bar{1}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{1}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{5}) + e(\bar{1}, \bar{0})] \\
&\quad d((\bar{0}, \bar{5}), (\bar{1}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{6}) + e(\bar{1}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{6}), (\bar{1}, \bar{0})) \\
&\quad + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{2}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{2}, \bar{0})] \\
&\quad d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{2}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{2}, \bar{0})) \\
&\quad + [e(\bar{0}, \bar{4}) + e(\bar{2}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{2}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{5}) + e(\bar{2}, \bar{0})] \\
&\quad d((\bar{0}, \bar{5}), (\bar{2}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{6}) + e(\bar{2}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{6}), (\bar{2}, \bar{0})) \\
&\quad + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{3}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{3}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{3}, \bar{0})] \\
&\quad d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{3}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{3}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{3}, \bar{0})) \\
&\quad + [e(\bar{0}, \bar{4}) + e(\bar{3}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{3}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{5}) + e(\bar{3}, \bar{0})] \\
&\quad d((\bar{0}, \bar{5}), (\bar{3}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{6}) + e(\bar{3}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{6}), (\bar{3}, \bar{0})) \\
&\quad + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{4}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{4}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{4}, \bar{0})] \\
&\quad d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{4}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{4}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{4}, \bar{0})) \\
&\quad + [e(\bar{0}, \bar{4}) + e(\bar{4}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{4}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{5}) + e(\bar{4}, \bar{0})] \\
&\quad d((\bar{0}, \bar{5}), (\bar{4}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{6}) + e(\bar{4}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{6}), (\bar{4}, \bar{0})) \\
&\quad + [e(\bar{1}, \bar{0}) + e(\bar{2}, \bar{0})] d((\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0})) + [e(\bar{1}, \bar{0}) + e(\bar{3}, \bar{0})] \\
&\quad d((\bar{1}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{0})) + [e(\bar{1}, \bar{0}) + e(\bar{4}, \bar{0})] d((\bar{1}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{0}))
\end{aligned}$$

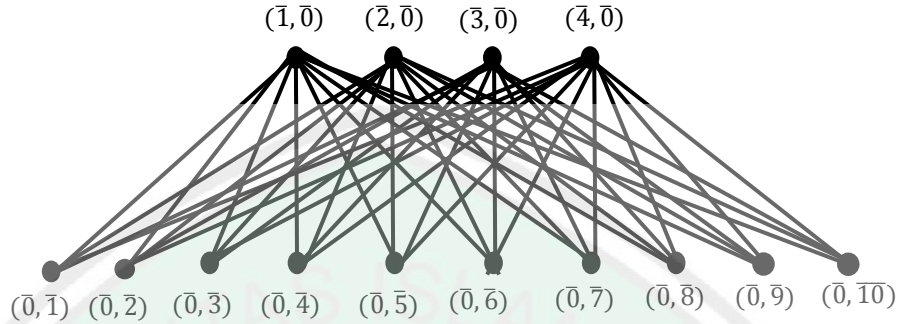
$$\begin{aligned}
& +[e(\bar{2}, \bar{0}) + e(\bar{3}, \bar{0})] d((\bar{2}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{0})) + [e(\bar{2}, \bar{0}) + e(\bar{4}, \bar{0})] \\
& d((\bar{2}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{0})) + [e(\bar{3}, \bar{0}) + e(\bar{4}, \bar{0})] d((\bar{3}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{0})) \\
& +[e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \bar{2})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2})) + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \bar{3})] \\
& d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{3})) + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \bar{4})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{4})) \\
& +[e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \bar{5})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{5})) + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \bar{6})] \\
& d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{6})) + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{0}, \bar{3})] d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3})) \\
& +[e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{0}, \bar{4})] d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{4})) + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{0}, \bar{5})] \\
& d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{5})) + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{0}, \bar{6})] d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{6})) \\
& +[e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{0}, \bar{4})] d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4})) + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{0}, \bar{5})] \\
& d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{5})) + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{0}, \bar{6})] d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{6})) \\
& +[e(\bar{0}, \bar{4}) + e(\bar{0}, \bar{5})] d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5})) + [e(\bar{0}, \bar{4}) + e(\bar{0}, \bar{6})] \\
& d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{6})) + [e(\bar{0}, \bar{5}) + e(\bar{0}, \bar{6})] d((\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6})) \\
& = [2 + 2]1 + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 \\
& + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 \\
& + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 \\
& + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 \\
& + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 + [2 + 2]2 \\
& + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 \\
& + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 \\
& + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 \\
& + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 + [2 + 2]2 \\
& = (2 + 2)(6)(1) + (2 + 2)(6)(1) + (2 + 2)(6)(1) \\
& + (2 + 2)(6)(1) + (2 + 2)(6)(2) + (2 + 2)(15)(2) \\
& = 264
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh jumlah jarak eksentrik graf pembagi nol dari gelanggang

$\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$  adalah 264.

5. Graf pembagi nol  $\Gamma(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{11})$ 

Graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{11}$  merupakan graf komplet  $K_{4,10}$  digambarkan sebagai berikut.

Gambar 3. 31 Graf Bipartisi Komplit  $K_{4,10}$ 

Jarak masing-masing titik ke titik yang lain pada graf di atas adalah

$$d((0,1), (1,0)) = 1, \quad d((0,1), (0,2)) = 2, \quad d((0,1), (0,3)) = 2,$$

$$d((0,1), (0,4)) = 2, \quad d((0,1), (0,5)) = 2, \quad d((0,1), (0,6)) = 2,$$

$$d((0,1), (0,7)) = 2, \quad d((0,1), (0,8)) = 2, \quad d((0,1), (0,9)) = 2,$$

$$d((0,1), (0,10)) = 2, \quad d((0,2), (1,0)) = 1, \quad d((0,2), (0,3)) = 2,$$

$$d((0,2), (0,4)) = 2, \quad d((0,2), (0,5)) = 2, \quad d((0,2), (0,6)) = 2,$$

$$d((0,2), (0,7)) = 2, \quad d((0,2), (0,8)) = 2, \quad d((0,2), (0,9)) = 2,$$

$$d((0,2), (0,10)) = 2, \quad d((0,3), (1,0)) = 1, \quad d((0,3), (0,4)) = 2,$$

$$d((0,3), (0,5)) = 2, \quad d((0,3), (0,6)) = 2, \quad d((0,3), (0,7)) = 2,$$

$$d((0,3), (0,8)) = 2, \quad d((0,3), (0,9)) = 2, \quad d((0,3), (0,10)) = 2,$$

$$d((0,4), (1,0)) = 1, \quad d((0,4), (0,5)) = 2, \quad d((0,4), (0,6)) = 2,$$

$$d((0,4), (0,7)) = 2, \quad d((0,4), (0,8)) = 2, \quad d((0,4), (0,9)) = 2,$$

$$d((0,4), (0,10)) = 2, \quad d((0,5), (1,0)) = 1, \quad d((0,5), (0,6)) = 2,$$

$$d((0,5), (0,7)) = 2, \quad d((0,5), (0,8)) = 2, \quad d((0,5), (0,9)) = 2,$$

$d((\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{10})) = 2,$        $d((\bar{0}, \bar{6}), (\bar{1}, \bar{0})) = 1,$        $d((\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{7})) = 2,$   
 $d((\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{8})) = 2,$        $d((\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{9})) = 2,$        $d((\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{10})) = 2,$   
 $d((\bar{0}, \bar{7}), (\bar{1}, \bar{0})) = 1,$        $d((\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{8})) = 2,$        $d((\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{9})) = 2,$   
 $d((\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{10})) = 2,$        $d((\bar{0}, \bar{8}), (\bar{1}, \bar{0})) = 1,$        $d((\bar{0}, \bar{8}), (\bar{0}, \bar{9})) = 2,$   
 $d((\bar{0}, \bar{8}), (\bar{0}, \bar{10})) = 2,$        $d((\bar{0}, \bar{9}), (\bar{1}, \bar{0})) = 1,$        $d((\bar{0}, \bar{9}), (\bar{0}, \bar{10})) = 2,$   
 $d((\bar{0}, \bar{10}), (\bar{1}, \bar{0})) = 1,$        $d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{0})) = 1,$        $d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{0})) = 1,$   
 $d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{2}, \bar{0})) = 1,$        $d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{2}, \bar{0})) = 1,$        $d((\bar{0}, \bar{5}), (\bar{2}, \bar{0})) = 1,$   
 $d((\bar{0}, \bar{6}), (\bar{2}, \bar{0})) = 1,$        $d((\bar{0}, \bar{7}), (\bar{2}, \bar{0})) = 1,$        $d((\bar{0}, \bar{8}), (\bar{2}, \bar{0})) = 1,$   
 $d((\bar{0}, \bar{9}), (\bar{2}, \bar{0})) = 1,$        $d((\bar{0}, \bar{10}), (\bar{2}, \bar{0})) = 1,$        $d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{3}, \bar{0})) = 1,$   
 $d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{3}, \bar{0})) = 1,$        $d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{3}, \bar{0})) = 1,$        $d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{3}, \bar{0})) = 1,$   
 $d((\bar{0}, \bar{5}), (\bar{3}, \bar{0})) = 1,$        $d((\bar{0}, \bar{6}), (\bar{3}, \bar{0})) = 1,$        $d((\bar{0}, \bar{7}), (\bar{3}, \bar{0})) = 1,$   
 $d((\bar{0}, \bar{8}), (\bar{3}, \bar{0})) = 1,$        $d((\bar{0}, \bar{9}), (\bar{3}, \bar{0})) = 1,$        $d((\bar{0}, \bar{10}), (\bar{3}, \bar{0})) = 1,$   
 $d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{4}, \bar{0})) = 1,$        $d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{4}, \bar{0})) = 1,$        $d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{4}, \bar{0})) = 1,$   
 $d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{4}, \bar{0})) = 1,$        $d((\bar{0}, \bar{5}), (\bar{4}, \bar{0})) = 1,$        $d((\bar{0}, \bar{6}), (\bar{4}, \bar{0})) = 1,$   
 $d((\bar{0}, \bar{7}), (\bar{4}, \bar{0})) = 1,$        $d((\bar{0}, \bar{8}), (\bar{4}, \bar{0})) = 1,$        $d((\bar{0}, \bar{9}), (\bar{4}, \bar{0})) = 1,$   
 $d((\bar{0}, \bar{10}), (\bar{4}, \bar{0})) = 1,$        $d((\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0})) = 2,$        $d((\bar{1}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{0})) = 2,$   
 $d((\bar{1}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{0})) = 2,$        $d((\bar{2}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{0})) = 2,$        $d((\bar{2}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{0})) = 2$       dan  
 $d((\bar{3}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{0})) = 2.$  Dengan menghitung jarak tersebut dapat ditentukan eksentrisitas dan titik eksentrik dalam tabel berikut.

Tabel 3. 19 Eksentrisitas Graf Bipartisi Komplit  $K_{4,10}$ 

Titik	Eksentrisitas	Titik Eksentrik
$(\bar{0}, \bar{1})$	2	$(\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{8}), (\bar{0}, \bar{9}), (\bar{0}, \bar{10})$

$(\bar{0}, \bar{2})$	2	$(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{8}), (\bar{0}, \bar{9}), (\bar{0}, \bar{10})$
$(\bar{0}, \bar{3})$	2	$(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{8}), (\bar{0}, \bar{9}), (\bar{0}, \bar{10})$
$(\bar{0}, \bar{4})$	2	$(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{8}), (\bar{0}, \bar{9}), (\bar{0}, \bar{10})$
$(\bar{0}, \bar{5})$	2	$(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{8}), (\bar{0}, \bar{9}), (\bar{0}, \bar{10})$
$(\bar{0}, \bar{6})$	2	$(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{8}), (\bar{0}, \bar{9}), (\bar{0}, \bar{10})$
$(\bar{0}, \bar{7})$	2	$(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{8}), (\bar{0}, \bar{9}), (\bar{0}, \bar{10})$
$(\bar{0}, \bar{8})$	2	$(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{9}), (\bar{0}, \bar{10})$
$(\bar{0}, \bar{9})$	2	$(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{8}), (\bar{0}, \bar{10})$
$(\bar{0}, \bar{10})$	2	$(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{8}), (\bar{0}, \bar{9})$
$(\bar{1}, \bar{0})$	2	$(\bar{2}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{0})$
$(\bar{2}, \bar{0})$	2	$(\bar{1}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{0})$
$(\bar{3}, \bar{0})$	2	$(\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{0})$
$(\bar{4}, \bar{0})$	2	$(\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{0})$

Berdasarkan tabel diatas, jumlah jarak eksentrik dari graf pembagi nol  $\Gamma(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{11})$  dapat ditunjukkan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 \xi^{ds}(\Gamma(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{11})) &= \sum_{\{(\bar{0}, \bar{a}), (\bar{b}, \bar{0})\} \subseteq V(\Gamma(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{11}))} [e(\bar{0}, \bar{a}) + e(\bar{b}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{a}), (\bar{b}, \bar{0})) \\
 &+ \sum_{\{(\bar{a}, \bar{0}), (\bar{b}, \bar{0})\} \subseteq V(\Gamma(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{11}))} [e(\bar{a}, \bar{0}) + e(\bar{b}, \bar{0})] d((\bar{a}, \bar{0}), (\bar{b}, \bar{0})) \\
 &+ \sum_{\{(\bar{0}, \bar{a}), (\bar{0}, \bar{b})\} \subseteq V(\Gamma(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{11}))} [e(\bar{0}, \bar{a}) + e(\bar{0}, \bar{b})] d((\bar{0}, \bar{a}), (\bar{0}, \bar{b})) \\
 &= [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{1}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{1}, \bar{0})] \\
 &+ [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{1}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{1}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{4}) + e(\bar{1}, \bar{0})] \\
 &d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{1}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{5}) + e(\bar{1}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{5}), (\bar{1}, \bar{0})) \\
 &+ [e(\bar{0}, \bar{6}) + e(\bar{1}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{6}), (\bar{1}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{7}) + e(\bar{1}, \bar{0})] \\
 &d((\bar{0}, \bar{7}), (\bar{1}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{8}) + e(\bar{1}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{8}), (\bar{1}, \bar{0})) \\
 &+ [e(\bar{0}, \bar{9}) + e(\bar{1}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{9}), (\bar{1}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{10}) + e(\bar{1}, \bar{0})] \\
 &d((\bar{0}, \bar{10}), (\bar{1}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{2}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{0})) \\
 &+ [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{2}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{2}, \bar{0})]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{2}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{4}) + e(\bar{2}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{2}, \bar{0})) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{5}) + e(\bar{2}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{5}), (\bar{2}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{6}) + e(\bar{2}, \bar{0})] \\
& d((\bar{0}, \bar{6}), (\bar{2}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{7}) + e(\bar{2}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{7}), (\bar{2}, \bar{0})) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{8}) + e(\bar{2}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{8}), (\bar{2}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{9}) + e(\bar{2}, \bar{0})] \\
& d((\bar{0}, \bar{9}), (\bar{2}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{10}) + e(\bar{2}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{10}), (\bar{2}, \bar{0})) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{3}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{3}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{3}, \bar{0})] \\
& d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{3}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{3}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{3}, \bar{0})) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{4}) + e(\bar{3}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{3}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{5}) + e(\bar{3}, \bar{0})] \\
& d((\bar{0}, \bar{5}), (\bar{3}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{6}) + e(\bar{3}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{6}), (\bar{3}, \bar{0})) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{7}) + e(\bar{3}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{7}), (\bar{3}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{8}) + e(\bar{3}, \bar{0})] \\
& d((\bar{0}, \bar{8}), (\bar{3}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{9}) + e(\bar{3}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{9}), (\bar{3}, \bar{0})) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{10}) + e(\bar{3}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{10}), (\bar{3}, \bar{0})) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{4}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{4}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{4}, \bar{0})] \\
& d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{4}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{4}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{4}, \bar{0})) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{4}) + e(\bar{4}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{4}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{5}) + e(\bar{4}, \bar{0})] \\
& d((\bar{0}, \bar{5}), (\bar{4}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{6}) + e(\bar{4}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{6}), (\bar{4}, \bar{0})) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{7}) + e(\bar{4}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{7}), (\bar{4}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{8}) + e(\bar{4}, \bar{0})] \\
& d((\bar{0}, \bar{8}), (\bar{4}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{9}) + e(\bar{4}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{9}), (\bar{4}, \bar{0})) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{10}) + e(\bar{4}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{10}), (\bar{4}, \bar{0})) + [e(\bar{1}, \bar{0}) + e(\bar{2}, \bar{0})] \\
& d((\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0})) + [e(\bar{1}, \bar{0}) + e(\bar{3}, \bar{0})] d((\bar{1}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{0})) \\
& + [e(\bar{1}, \bar{0}) + e(\bar{4}, \bar{0})] d((\bar{1}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{0})) + [e(\bar{2}, \bar{0}) + e(\bar{3}, \bar{0})] \\
& d((\bar{2}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{0})) + [e(\bar{2}, \bar{0}) + e(\bar{4}, \bar{0})] d((\bar{2}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{0})) \\
& + [e(\bar{3}, \bar{0}) + e(\bar{4}, \bar{0})] d((\bar{3}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \bar{2})] \\
& d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2})) + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \bar{3})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{3})) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \bar{4})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{4})) + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \bar{5})] \\
& d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{5})) + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \bar{6})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{6})) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \bar{7})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{7})) + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \bar{8})] \\
& d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{8})) + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \bar{9})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{9}))
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \bar{10})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{10})) + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{0}, \bar{3})] \\
& d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3})) + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{0}, \bar{4})] d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{4})) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{0}, \bar{5})] d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{5})) + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{0}, \bar{6})] \\
& d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{6})) + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{0}, \bar{7})] d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{7})) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{0}, \bar{8})] d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{8})) + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{0}, \bar{9})] \\
& d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{9})) + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{0}, \bar{10})] d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{10})) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{0}, \bar{4})] d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4})) + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{0}, \bar{5})] \\
& d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{5})) + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{0}, \bar{6})] d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{6})) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{0}, \bar{7})] d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{7})) + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{0}, \bar{8})] \\
& d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{8})) + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{0}, \bar{9})] d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{9})) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{0}, \bar{10})] d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{10})) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{4}) + e(\bar{0}, \bar{5})] d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5})) + [e(\bar{0}, \bar{4}) + e(\bar{0}, \bar{6})] \\
& d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{6})) + [e(\bar{0}, \bar{4}) + e(\bar{0}, \bar{7})] d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{7})) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{4}) + e(\bar{0}, \bar{8})] d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{8})) + [e(\bar{0}, \bar{4}) + e(\bar{0}, \bar{9})] \\
& d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{9})) + [e(\bar{0}, \bar{4}) + e(\bar{0}, \bar{10})] d((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{10})) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{5}) + e(\bar{0}, \bar{6})] d((\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6})) + [e(\bar{0}, \bar{5}) + e(\bar{0}, \bar{7})] \\
& d((\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{7})) + [e(\bar{0}, \bar{5}) + e(\bar{0}, \bar{8})] d((\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{8})) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{5}) + e(\bar{0}, \bar{9})] d((\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{9})) + [e(\bar{0}, \bar{5}) + e(\bar{0}, \bar{10})] \\
& d((\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{10})) + [e(\bar{0}, \bar{6}) + e(\bar{0}, \bar{7})] d((\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{7})) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{6}) + e(\bar{0}, \bar{8})] d((\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{8})) + [e(\bar{0}, \bar{6}) + e(\bar{0}, \bar{9})] \\
& d((\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{9})) + [e(\bar{0}, \bar{6}) + e(\bar{0}, \bar{10})] d((\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{10})) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{7}) + e(\bar{0}, \bar{8})] d((\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{8})) + [e(\bar{0}, \bar{7}) + e(\bar{0}, \bar{9})] \\
& d((\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{9})) + [e(\bar{0}, \bar{7}) + e(\bar{0}, \bar{10})] d((\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{10})) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{8}) + e(\bar{0}, \bar{9})] d((\bar{0}, \bar{8}), (\bar{0}, \bar{9})) + [e(\bar{0}, \bar{8}) + e(\bar{0}, \bar{10})] \\
& d((\bar{0}, \bar{8}), (\bar{0}, \bar{10})) + [e(\bar{0}, \bar{9}) + e(\bar{0}, \bar{10})] d((\bar{0}, \bar{9}), (\bar{0}, \bar{10})) \\
& = [2 + 2]1 + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 \\
& + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 + [2 + 2]1 + [2 + 2]1
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \sum_{\{(\bar{0}, \bar{a}), (\bar{0}, \bar{b})\} \subseteq V(\Gamma(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_q))} [e(\bar{0}, \bar{a}) + e(\bar{0}, \bar{b})] d((\bar{0}, \bar{a}), (\bar{0}, \bar{b})) \\
= & [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{1}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{1}, \bar{0})] \\
& d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{1}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{1}, \bar{0})) + \dots \\
& + [e(\bar{0}, \bar{q}-1) + e(\bar{1}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{q}-1), (\bar{1}, \bar{0})) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{2}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{2}, \bar{0})] \\
& d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{2}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{2}, \bar{0})) + \dots + \\
& [e(\bar{0}, \bar{q}-1) + e(\bar{2}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{q}-1), (\bar{2}, \bar{0})) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{3}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{3}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{3}, \bar{0})] \\
& d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{3}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{3}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{3}, \bar{0})) \\
& + \dots + [e(\bar{0}, \bar{q}-1) + e(\bar{3}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{q}-1), (\bar{3}, \bar{0})) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{4}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{4}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{4}, \bar{0})] \\
& d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{4}, \bar{0})) + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{4}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{4}, \bar{0})) \\
& + \dots + [e(\bar{0}, \bar{q}-1) + e(\bar{4}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{q}-1), (\bar{4}, \bar{0})) \\
& + [e(\bar{1}, \bar{0}) + e(\bar{2}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2})) + [e(\bar{1}, \bar{0}) + e(\bar{3}, \bar{0})] \\
& d((\bar{1}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{0})) + [e(\bar{1}, \bar{0}) + e(\bar{4}, \bar{0})] d((\bar{1}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{0})) \\
& + [e(\bar{2}, \bar{0}) + e(\bar{3}, \bar{0})] d((\bar{2}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{0})) + [e(\bar{2}, \bar{0}) + e(\bar{4}, \bar{0})] \\
& d((\bar{2}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{0})) + [e(\bar{3}, \bar{0}) + e(\bar{4}, \bar{0})] d((\bar{3}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{0})) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \bar{2})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2})) + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \bar{3})] \\
& d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{3})) + \dots + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \bar{q}-1)] \\
& d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{q}-1)) + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{0}, \bar{3})] d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3})) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{0}, \bar{4})] d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{4})) + \dots + \\
& [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{0}, \bar{q}-1)] d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{q}-1)) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{0}, \bar{4})] d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4})) + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{0}, \bar{5})] \\
& d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{5})) + \dots + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{0}, \bar{q}-1)] \\
& d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{q}-1)) + \dots + [e(\bar{0}, \bar{q}-2) + e(\bar{0}, \bar{q}-1)] \\
& d((\bar{0}, \bar{q}-2), (\bar{0}, \bar{q}-1)) \\
= & (2+2)(q-1)(1) + (2+2)(q-1)(1) + (2+2)(q-1)(1) \\
& + (2+2)(q-1)(1) + (2+2)(6)(2) + (2+2)(q-2)(2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(2+2)(q-3)(2) + (2+2)(q-4)(2) + \dots + (2+2)(2)(2) \\
& +(2+2)(1)(2) \\
& = 2(2+2)(q-1)(1) + 2(2+2)(q-1)(1) + (2+2)(6)(2) \\
& \quad + (2+2)(2)[(q-2) + (q-3) + (q-4) + \dots + 2 + 1] \\
& = 4 \left( 2(q-1) + 2(q-1) + 12 + 2 \left( \frac{(q-2)}{2} ((q-2) + 1) \right) \right) \\
& = 4(2q-2 + 2q-2 + 12 + (q-2)(q-1)) \\
& = 4(4q-4 + 12 + q^2 - 3q + 2) \\
& = 4(q^2 + q + 10) \\
& = 4q^2 + 4q + 40
\end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh bahwa, pola jumlah jarak eksentrik graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_q$  dengan  $q$  bilangan prima dan  $q \geq 5$  adalah  $4q^2 + 4q + 40$ . Sedangkan untuk  $q$  bilangan prima dan  $q < 5$ , pola tersebut tidak berlaku karena untuk  $q = 2$  bentuk graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2)$  kongruen dengan bentuk graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5)$  sehingga jumlah jarak eksentrik dari graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2)$  mengikuti pola jumlah jarak eksentrik dari graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_q)$  dengan  $q$  bilangan prima dan  $q \geq 3$ . Dan untuk  $q = 3$  bentuk graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_3)$  kongruen dengan bentuk graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)$  sehingga jumlah jarak eksentrik dari graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_3)$  mengikuti pola jumlah jarak eksentrik dari graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_q)$  dengan  $q$  bilangan prima dan  $q \geq 3$ .

Berdasarkan contoh-contoh diatas, dapat disimpulkan bahwa jumlah jarak eksentrik graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  dengan  $p, q$  bilangan prima dapat disajikan dalam tabel berikut.

Tabel 3. 20 Jumlah Jarak Eksentrik Graf Pembagi Nol

Gelombang $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$		Jumlah Jarak Eksentrik
Untuk $p = 2$	$q = 2$	$(1+1)(1)1$
	$q = 3$	$(1+2)(2)(1) + (2+2)(1)(2)$
	$q = 5$	$(1+2)(4)(1) + (2+2)(3)(2) + (2+2)(2)(2) + (2+2)(1)(2)$

	$q = 7$	$(1 + 2)(6)(1) + (2 + 2)(5)(2) + (2 + 2)(4)(2) + (2 + 2)(3) + (2 + 2)(2)(2) + (2 + 2)(1)(2)$
	$q = 11$	$(1 + 2)(10)(1) + (2 + 2)(9)(2) + (2 + 2)(8)(2) + (2 + 2)(7)(2) + (2 + 2)(6)(2) + (2 + 2)(5)(2) + (2 + 2)(4)(2) + (2 + 2)(3)(2) + (2 + 2)(2)(2) + (2 + 2)(1)(2)$
	$q$ bilangan prima	$(1 + 2)(q - 1)(1) + (2 + 2)(q - 2)(2) + (2 + 2)(q - 3)(2) + \dots + (2 + 2)(2)(2) + (2 + 2)(1)(2)$
Untuk $p = 3$	$q = 2$	$(1 + 2)(2)(1) + (2 + 2)(1)(2)$
	$q = 3$	$(2 + 2)(2)(1) + (2 + 2)(2)(1) + (2 + 2)(1)(2) + (2 + 2)(1)(2)$
	$q = 5$	$(2 + 2)(4)(1) + (2 + 2)(4)(1) + (2 + 2)(1)(2) + (2 + 2)(3)(2) + (2 + 2)(2)(2) + (2 + 2)(1)(2)$
	$q = 7$	$(2 + 2)(6)(1) + (2 + 2)(6)(1) + (2 + 2)(1)(2) + (2 + 2)(5)(2) + (2 + 2)(4)(2) + (2 + 2)(3)(2) + (2 + 2)(2)(2) + (2 + 2)(1)(2)$
	$q = 11$	$(2 + 2)(10)(1) + (2 + 2)(10)(1) + (2 + 2)(1)(2) + (2 + 2)(9)(2) + (2 + 2)(8)(2) + (2 + 2)(7)(2) + (2 + 2)(6)(2) + (2 + 2)(5)(2) + (2 + 2)(4)(2) + (2 + 2)(3)(2) + (2 + 2)(2)(2) + (2 + 2)(1)(2)$
	$q$ bilangan prima	$(2 + 2)(q - 1)(1) + (2 + 2)(q - 1)(1) + (2 + 2)(1)(2) + (2 + 2)(q - 2)(2) + (2 + 2)(q - 3)(2) + \dots + (2 + 2)(2)(2) + (2 + 2)(1)(2)$
Untuk $p = 5$	$q = 2$	$(1 + 2)(4)(1) + (2 + 2)(3)(2) + (2 + 2)(2)(2) + (2 + 2)(1)(2)$
	$q = 3$	$(2 + 2)(4)(1) + (2 + 2)(4)(1) + (2 + 2)(1)(2) + (2 + 2)(3)(2) + (2 + 2)(2)(2) + (2 + 2)(1)(2)$
	$q = 5$	$(2 + 2)(4)(1) + (2 + 2)(4)(1) + (2 + 2)(4)(1) + (2 + 2)(4)(1) + (2 + 2)(3)(2) + (2 + 2)(2)(2) + (2 + 2)(1)(2) + (2 + 2)(3)(2) + (2 + 2)(2)(2) + (2 + 2)(1)(2)$
	$q = 7$	$(2 + 2)(6)(1) + (2 + 2)(6)(1) + (2 + 2)(6)(1) + (2 + 2)(6)(1) + (2 + 2)(3)(2) + (2 + 2)(2)(2) + (2 + 2)(1)(2) + (2 + 2)(5)(2) + (2 + 2)(4)(2) + (2 + 2)(3)(2) + (2 + 2)(2)(2) + (2 + 2)(1)(2)$
	$q = 11$	$(2 + 2)(10)(1) + (2 + 2)(10)(1) + (2 + 2)(10)(1) + (2 + 2)(10)(1) + (2 + 2)(3)(2) + (2 + 2)(2)(2) + (2 + 2)(1)(2) + (2 + 2)(9)(2) + (2 + 2)(8)(2) + (2 + 2)(7)(2) + (2 + 2)(6)(2) + (2 + 2)(5)(2) + (2 + 2)(4)(2) + (2 + 2)(3)(2) + (2 + 2)(2)(2) + (2 + 2)(1)(2)$
	$q$ bilangan prima	$(2 + 2)(q - 1)(1) + (2 + 2)(q - 1)(1) + (2 + 2)(q - 1)(1) + (2 + 2)(q - 1)(1) + (2 + 2)(3)(2) + (2 + 2)(2)(2) + (2 + 2)(1)(2) + (2 + 2)(q - 2)(2) + (2 + 2)(q - 3)(2) + \dots + (2 + 2)(2)(2) + (2 + 2)(1)(2)$

Dengan melihat tabel 3.20, pola jumlah jarak eksentrik graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  dengan  $p, q$  bilangan prima diperoleh bentuk umum sebagai berikut ini.

### Teorema 3.5

Diberikan graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$  merupakan graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  dengan  $p, q$  bilangan prima. Jumlah jarak eksentrik dari graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$  adalah sebagai berikut

- i. Jumlah jarak eksentrik dari graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$  untuk  $p = 2$  dan  $q = 2$  adalah 2.
- ii. Jumlah jarak eksentrik dari graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$  untuk  $p = 2$  dan  $q \geq 3$  adalah  $4q^2 - 9q + 5$ .
- iii. Jumlah jarak eksentrik dari graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$  untuk  $p \geq 3$  dan  $q \geq 3$  adalah  $4p^2 + 4q^2 + 4pq - 16p - 16q + 20$ .

Bukti:

Misalkan graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$  merupakan graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  dengan  $p, q$  bilangan prima. Berdasarkan definisi 3.3 jumlah jarak eksentrik dari graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$  adalah

$$\begin{aligned} \xi^{ds}(\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)) &= \sum_{\{(\bar{0}, \bar{a}), (\bar{b}, \bar{0})\} \subseteq V(\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q))} [e(\bar{0}, \bar{a}) + e(\bar{b}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{a}), (\bar{b}, \bar{0})) \\ &+ \sum_{\{(\bar{a}, \bar{0}), (\bar{b}, \bar{0})\} \subseteq V(\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q))} [e(\bar{a}, \bar{0}) + e(\bar{b}, \bar{0})] d((\bar{a}, \bar{0}), (\bar{b}, \bar{0})) \\ &+ \sum_{\{(\bar{0}, \bar{a}), (\bar{0}, \bar{b})\} \subseteq V(\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q))} [e(\bar{0}, \bar{a}) + e(\bar{0}, \bar{b})] d((\bar{0}, \bar{a}), (\bar{0}, \bar{b})) \end{aligned}$$

i. Untuk graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$  dengan  $p = 2$  dan  $q = 2$

Berdasarkan tabel 3.4, bentuk graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$  untuk  $p = 2$  dan  $q = 2$  merupakan graf komplit  $K_2$ . Jarak masing-masing titik ke titik yang lain pada graf tersebut adalah  $d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0})) = 1$  dan  $d((\bar{1}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1})) = 1$ . Sehingga eksentrisitas titik  $(\bar{0}, \bar{1})$  dan titik  $(\bar{1}, \bar{0})$  masing-masing adalah  $e(\bar{0}, \bar{1}) = 1$  dan  $e(\bar{1}, \bar{0}) = 1$ . Berdasarkan definisi 3.3, diperoleh jumlah jarak eksentrik dari graf komplit  $K_2$  adalah 2. Sehingga jumlah jarak eksentrik dari graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$  adalah  $\xi^{ds}(\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)) = 2$ .

ii. Untuk graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$  dengan  $p = 2$  dan  $q \geq 3$

Berdasarkan tabel 3.4, bentuk graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$  untuk  $p = 2$  dan  $q \geq 3$  merupakan graf bipartisi komplit  $K_{1, q-1}$ . Jarak masing-masing titik ke titik yang lain pada graf tersebut adalah  $d((\bar{0}, \bar{a}_i), (\bar{1}, \bar{0})) = 1$  untuk  $\bar{a}_i = \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots, \overline{q-1} \in \mathbb{Z}_q$  dan  $d((\bar{0}, \bar{a}_i), (\bar{0}, \bar{a}_j)) = 2$  untuk  $\bar{a}_i \neq \bar{a}_j$  dan  $\bar{a}_i = \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots, \overline{q-1} \in \mathbb{Z}_q$  dan  $\bar{a}_j = \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots, \overline{q-1} \in \mathbb{Z}_q$ . Sehingga eksentrisitas titik  $(\bar{0}, \bar{a}_i)$  dan titik  $(\bar{1}, \bar{0})$  masing-masing adalah  $e(\bar{0}, \bar{a}_i) = 2$  untuk  $\bar{a}_i = \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots, \overline{q-1} \in \mathbb{Z}_q$  dan  $e(\bar{1}, \bar{0}) = 1$ . Berdasarkan definisi 3.3, diperoleh jumlah jarak eksentrik dari graf bipartisi komplit  $K_{1, q-1}$  adalah  $4q^2 - 9q + 5$ . Sehingga jumlah jarak eksentrik dari graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$  adalah  $\xi^{ds}(\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)) = 4q^2 - 9q + 5$ .

iii. Untuk graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$  dengan  $p \geq 3$  dan  $q \geq 3$

Berdasarkan tabel 3.4, bentuk graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$  untuk  $p, q \geq 3$  merupakan graf bipartisi komplit  $K_{p-1, q-1}$ . Jarak masing-masing titik ke titik yang lain pada

graf tersebut adalah  $d((\bar{0}, \bar{a}_i), (\bar{b}_i, \bar{0})) = d((\bar{b}_i, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{a}_i)) = 1$  untuk  $\bar{a}_i = \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots, \overline{q-1} \in \mathbb{Z}_q$  dan  $\bar{b}_i = \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots, \overline{p-1} \in \mathbb{Z}_p$ ,  $d((\bar{0}, \bar{a}_i), (\bar{0}, \bar{a}_j)) = 2$  untuk  $\bar{a}_i \neq \bar{a}_j$ ,  $\bar{a}_i = \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots, \overline{q-1} \in \mathbb{Z}_q$  dan  $\bar{a}_j = \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots, \overline{q-1} \in \mathbb{Z}_q$  dan  $d((\bar{b}_i, \bar{0}), (\bar{b}_j, \bar{0})) = 2$  untuk  $\bar{b}_i \neq \bar{b}_j$ ,  $\bar{b}_i = \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots, \overline{q-1} \in \mathbb{Z}_p$  dan  $\bar{b}_j = \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots, \overline{q-1} \in \mathbb{Z}_p$ . Sehingga eksentrisitas titik  $(\bar{0}, \bar{a}_i)$  dan titik  $(\bar{b}_i, \bar{0})$  masing-masing adalah  $e(\bar{0}, \bar{a}_i) = 2$  untuk  $\bar{a}_i = \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots, \overline{q-1} \in \mathbb{Z}_q$  dan  $e(\bar{b}_i, \bar{0}) = 2$  untuk  $\bar{b}_i = \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots, \overline{q-1} \in \mathbb{Z}_p$ . Berdasarkan definisi 3.3, diperoleh jumlah jarak eksentrik dari graf bipartisi komplit  $K_{p-1, q-1}$  adalah

$$\begin{aligned}
\xi^{ds}(\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)) &= \sum_{\{(\bar{0}, \bar{a}), (\bar{b}, \bar{0})\} \subseteq V(\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q))} [e(\bar{0}, \bar{a}) + e(\bar{b}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{a}), (\bar{b}, \bar{0})) \\
&+ \sum_{\{(\bar{a}, \bar{0}), (\bar{b}, \bar{0})\} \subseteq V(\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q))} [e(\bar{a}, \bar{0}) + e(\bar{b}, \bar{0})] d((\bar{a}, \bar{0}), (\bar{b}, \bar{0})) \\
&+ \sum_{\{(\bar{0}, \bar{a}), (\bar{0}, \bar{b})\} \subseteq V(\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q))} [e(\bar{0}, \bar{a}) + e(\bar{0}, \bar{b})] d((\bar{0}, \bar{a}), (\bar{0}, \bar{b})) \\
&= [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{1}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0})) + \dots \\
&+ [e(\bar{0}, \overline{q-1}) + e(\bar{1}, \bar{0})] d((\bar{0}, \overline{q-1}), (\bar{1}, \bar{0})) \\
&+ [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{2}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{0})) + \dots \\
&+ [e(\bar{0}, \overline{q-1}) + e(\bar{2}, \bar{0})] d((\bar{0}, \overline{q-1}), (\bar{2}, \bar{0})) + \dots \\
&+ [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\overline{p-1}, \bar{0})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\overline{p-1}, \bar{0})) + \dots \\
&+ [e(\bar{0}, \overline{q-1}) + e(\overline{p-1}, \bar{0})] d((\bar{0}, \overline{q-1}), (\overline{p-1}, \bar{0})) \\
&+ [e(\bar{1}, \bar{0}) + e(\bar{2}, \bar{0})] d((\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0})) + [e(\bar{1}, \bar{0}) + e(\bar{3}, \bar{0})] \\
&d((\bar{1}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{0})) + \dots + [e(\bar{1}, \bar{0}) + e(\overline{p-1}, \bar{0})] \\
&d((\bar{1}, \bar{0}), (\overline{p-1}, \bar{0})) + [e(\bar{2}, \bar{0}) + e(\bar{3}, \bar{0})] d((\bar{2}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{0})) \\
&+ [e(\bar{2}, \bar{0}) + e(\bar{4}, \bar{0})] d((\bar{2}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{0})) + \dots \\
&+ [e(\bar{2}, \bar{0}) + e(\overline{p-1}, \bar{0})] d((\bar{2}, \bar{0}), (\overline{p-1}, \bar{0}))
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + [e(\bar{3}, \bar{0}) + e(\bar{4}, \bar{0})] d((\bar{3}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{0})) + [e(\bar{3}, \bar{0}) + e(\bar{5}, \bar{0})] \\
& d((\bar{3}, \bar{0}), (\bar{5}, \bar{0})) + \dots + [e(\bar{3}, \bar{0}) + e(\overline{p-1}, \bar{0})] \\
& d((\bar{3}, \bar{0}), (\overline{p-1}, \bar{0})) + \dots + [e(\overline{p-2}, \bar{0}) + e(\overline{p-1}, \bar{0})] \\
& d((\overline{p-2}), (\overline{p-1})) + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \bar{2})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2})) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \bar{3})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{3})) + \dots \\
& + [e(\bar{0}, \bar{1}) + e(\bar{0}, \overline{q-1})] d((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \overline{q-1})) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{0}, \bar{3})] d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3})) + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{0}, \bar{4})] \\
& d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{4})) + \dots + [e(\bar{0}, \bar{2}) + e(\bar{0}, \overline{q-1})] \\
& d((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \overline{q-1})) + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{0}, \bar{4})] d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4})) \\
& + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{0}, \bar{5})] d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{5})) + \dots \\
& + [e(\bar{0}, \bar{3}) + e(\bar{0}, \overline{q-1})] d((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \overline{q-1})) \\
& + \dots + [e(\bar{0}, \overline{q-2}) + e(\bar{0}, \overline{q-1})] d((\bar{0}, \overline{q-2}), (\bar{0}, \overline{q-1})) \\
& = (2+2)(q-1)(1) + (2+2)(q-1)(1) + \dots \\
& + (2+2)(q-1)(1) + (p-2)(2+2)(2) \\
& + (p-3)(2+2)(2) + (p-4)(2+2)(2) + \dots \\
& + (2)(2+2)(2) + (1)(2+2)(2) + (q-2)(2+2)(2) \\
& + (q-3)(2+2)(2) + (q-4)(2+2)(2) + \dots \\
& + (2)(2+2)(2) + (1)(2+2)(2) \\
& = (p-1)(2+2)(q-1)(1) + (2+2)(2) \frac{p-2}{2} ((p-2) + 1) \\
& + (2+2)(2) \frac{q-2}{2} ((q-2) + 1) \\
& = (2+2)(pq - p - q + 1) + (2+2)(p-2)(p-1) \\
& + (2+2)(q-2)(q-1) \\
& = 4(pq - p - q + 1 + p^2 - 3p + 2 + q^2 - 3q + 2) \\
& = 4(p^2 + q^2 + pq - 4p - 4q + 5) \\
& = 4p^2 + 4q^2 + 4pq - 16p - 16q + 20
\end{aligned}$$

Sehingga jumlah jarak eksentrik dari graf  $\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$  untuk  $p, q \geq 3$  adalah

$$4p^2 + 4q^2 + 4pq - 16p - 16q + 20.$$

Dengan demikian diperoleh bahwa, pola jumlah jarak eksentrik graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  adalah 2, dan untuk gelanggang  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  untuk  $p = 2, q \geq 3$  dan  $q$  bilangan prima adalah  $4q^2 - 9q + 5$ . Sedangkan untuk pola jumlah jarak eksentrik graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  dengan  $p \geq 3$  dan  $q \geq 3$  adalah  $4p^2 + 4q^2 + 4pq - 16p - 16q + 20$ .

### 3.4 Integrasi Jarak pada Graf dengan Al-Quran

Shalat merupakan salah satu kewajiban bagi kaum muslimin yang berakal dan sudah mencapai akhir baligh baik laki-laki maupun perempuan. Ibadah shalat dalam islam sangatlah penting, sehingga shalat harus dikerjakan pada waktunya dalam keadaan apapun bagi seorang muslim yang sudah mukalaf. Allah Swt. berfirman dalam Al-Quran tentang shalat ada pada surah An-Nisa`04 ayat 103 yang berbunyi:

فَإِذَا قَضَيْتُمُ الصَّلَاةَ فَادْكُرُوا اللَّهَ قِيَامًا وَقُعُودًا وَعَلَىٰ جُنُوبِكُمْ ۚ فَإِذَا اطْمَأْنَنْتُمْ فَأَقِيمُوا الصَّلَاةَ ۗ إِنَّ

الصَّلَاةَ كَانَتْ عَلَىٰ الْمُؤْمِنِينَ كِتَابًا مَّوْقُوتًا (١٠٣)

“Maka apabila kamu telah menyelesaikan shalat(mu), ingatlah Allah di waktu berdiri, di waktu duduk dan di waktu berbaring. Kemudian apabila kamu telah merasa aman, maka dirikanlah shalat itu (sebagaimana biasa). Sesungguhnya shalat itu adalah fardhu yang ditentukan waktunya atas orang-orang yang beriman” (Q.S An-Nisa`04 ayat 103)

Menurut M. Quraish Shihab (2002) kata *mauqutan* terambil dari kata *waqt* atau waktu. Dari segi bahasa kata ini digunakan dalam arti batas akhir kesempatan untuk menyelesaikan suatu pekerjaan. Setiap shalat mempunyai waktu dalam arti

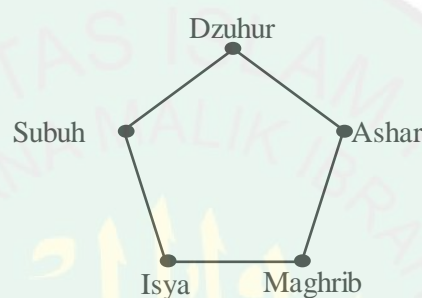
ada masa dimana seseorang harus menyelesaikannya. Apabila masa itu telah berlalu, maka pada dasarnya berlalu juga waktu shalat itu.

Secara lengkap pelaksanaan waktu setiap shalat fardhu telah dijelaskan oleh Rasulullah Saw didalam sebuah hadist yang diriwayatkan oleh Abu Musa Al-Asy'ari r.a yakni sebagai berikut.

*“Dari Rasulullah Saw, bahwasanya ada seorang penanya datang kepada beliau menanyakan waktu sholat, namun beliau tidak menjawab sedikitpun. Kata Abu Musa: maka beliau menyuruh Bilal untuk adzan, lalu beliau melakukan shalat Subuh ketika terbit fajar, sedangkan orang yang satu dengan yang lain hampir tidak mengenali (karena agak gelap). Kemudian beliau menyuruh Bilal menyuarakan adzan, lalu beliau mendirikan shalat dzuhur ketika matahari condong sedikit ke arah barat, sedangkan seseorang mengatakan, “sudah tengah hari”, padahal beliau lebih tahu dari mereka. Kemudian beliau menyuruh Bilal menyuarakan adzan, lalu beliau melakukan shalat ashar ketika matahari masih tinggi. Kemudian beliau menyuruh Bilal menyuarakan adzan lalu beliau melakukan shalat magrib ketika matahari telah terbenam. Kemudian beliau menyuruh Bilal menyuarakan adzan lalu beliau melakukan shalat isya ketika mega merah-merah telah hilang. Kemudian beliau mengakhiri shalat subuh disbanding yang kemarin, sehingga setelah shalat ada dua orang berkata”matahari telah terbit atau hampir terbit.” Kemudian beliau mengkhiri shalat dzuhur disbanding yang kemarin hingga mendekati waktu ashar. Kemudian beliau mengakhiri shalat ashar, sehingga se usai shalat ada dua orang berkata “matahari telah memerh.” Kemudian beliau mengahiri shalat maghrib hingga mega merah hampir hilang. Kemudian beliau mengakhiri shalat isya hingga*

*sepertiga malam pertama. Kemudian beliau melakukan shalat subuh. Setelah itu beliau memanggil orang yang tertanya sebelumnya, lalu beliau bersabda; “waktu shalat adalah antara batas-batas tersebut”.*

Dalam teori graf, shalat dapat direpresentasikan sebagai graf sikel  $C_5$ . Titik-titik pada graf  $C_5$  direpresentasikan sebagai waktu-waktu shalat fardhu. Sehingga dapat digambarkan dalam graf  $C_5$  berikut.



Gambar 3. 32 Interpretasi Graf pada Jarak Waktu Shalat

Titik-titik pada graf  $C_5$  direpresentasikan sebagai waktu-waktu shalat fardhu yakni shalat dzuhur, ashar, magrib isya dan subuh. Dari gambar graf diatas, jarak titik shalat dzuhur dengan shalat ashar adalah 1, jarak titik shalat dzuhur dengan shalat maghrib adalah 2, jarak titik shalat isya dengan shalat dzuhur adalah 2, jarak titik shalat subuh dengan shalat dzuhur adalah 1 dan jarak titik shalat ashar dengan shalat maghrib adalah 1. Sedangkan jarak titik shalat ashar dengan shalat isya adalah 2, jarak titik shalat ashar dengan shalat isya adalah 2, jarak titik shalat ashar dengan shalat subuh adalah 2, jarak titik shalat maghrib dengan shalat isya adalah 1, jarak titik shalat maghrib dengan shalat subuh adalah 2 dan jarak titik shalat isya dengan shalat subuh adalah 1.

Shalat merupakan salah satu ibadah yang telah ditetapkan waktunya. Dengan melihat jarak waktu dari setiap shalat berbeda-beda, shalat fardhu dapat

dilaksanakan kapan saja sesuai dengan waktu yang telah ditetapkan. Dengan melaksanakan shalat fardhu berdasarkan ketentuan waktu-waktu shalat fardhu, memberi hikmah kepada orang mu'min agar selalu mengingat kepada Allah Swt. di dalam berbagai waktu. Dan juga shalat dapat menjadi sarana pembinaan disiplin pribadi yang baik.



## BAB IV

### PENUTUP

#### 4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan diperoleh kesimpulan bahwa jumlah jarak eksentrik graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  adalah 2, dan untuk gelanggang  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  dengan  $p = 2, q \geq 3$  dan  $q$  bilangan prima adalah  $4q^2 - 9q + 5$ . Sedangkan untuk pola jumlah jarak eksentrik graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  dengan  $p \geq 3$  dan  $q \geq 3$  adalah  $4p^2 + 4q^2 + 4pq - 16p - 16q + 20$ .

#### 4.2 Saran

Dalam penulisan penelitian ini, penulis hanya meneliti dan mencari teorema umum jumlah jarak eksentrik graf pembagi nol dari gelanggang  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  dengan  $p, q$  bilangan prima. Penulis memberikan saran kepada para pembaca yang tertarik yang ingin melakukan penelitian terhadap teorema jumlah jarak eksentrik dari gelanggang yang lain.

## DAFTAR RUJUKAN

- Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar*. Malang: UIN-MALIKI Press.
- Abdussakir. 2014. *Matematika dalam Al-Qur'an*. Malang: UIN-MALIKI Press.
- Abdussakir, Azizah, Nilna Niswatin dan Nofandika, Fifi Framelia. 2009. *Teori Graf*. Malang: UIN-Malang Press.
- Anderson, David F dan Livingstone, Philip S. 1999. The Zero-Divisor Graph of Commutative Ring. *Journal of Algebra*. 217:434-447.
- Chartrand, G., Lesniak, L., dan Zhang, P. 2016. *Graphs and Digraphs Sixth Edition*. New York: CRC Pres Taylor and Francis Group.
- Dummit, David S. dan Foote, Richard M. 2004. *Abstract Algebra Third Edition*. USA: John Wiley and Sons, Inc.
- Faqih, Allamah Kamal. 2006. *Tafsir Nurul Quran*. Jakarta: Penerbit Al-Huda
- Gallian, Joseph. A. 2006. *Contemporary Abstract Algebra 8th Edition*. USA: Brooks/Cole, Cengage Learning.
- Padmapriya, P. dan Mathad, V. 2017. The Eccentric-Distance Sum of Some Graphs. *Electronic Journal of Graph Theory and Applications*, 05(1): 51-62.
- Shihab, M. Quraish. 2002. *Tafsir Al-Misbah*. Jakarta: Lentera Hati.
- Wicaksono, Satrio Adi dan Sholeha. 2013. Kajian Sifat-Sifat Graf Pembagi-nol dari Ring Komutatif dengan Elemen Satuan. *Jurnal Sains dan Seni Pomits*, 02(1): 1-5.
- Yu, Guihai, dkk. 2011. On The Eccentric Distance Sum of Tree and Unicyclic Graphs. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 375:99-107.

## RIWAYAT HIDUP



Ika Nur Khasana, lahir di Palaran kota Samarinda pada tanggal 04 Agustus 1996, biasanya dipanggil Ika, merupakan anak pertama dari dua bersaudara, dari pasangan bapak Amir Mahmud dan Ibu Nurhayati. Pendidikan dasarnya ditempuh di kampung halamannya di SD Negeri 019 kecamatan Palaran kota Samarinda yang ditamatkan pada tahun 2008.

Pada tahun yang sama dia melanjutkan pendidikan menengah pertama di SMP Negeri 014 Samarinda yang ditamatkan pada tahun 2011. Kemudian dia melanjutkan pendidikan menengah atas di SMA Negeri 06 Samarinda dan menamatkan pendidikan tersebut pada tahun 2014. Pendidikan berikutnya melalui Jalur Seleksi Nasional Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SNMPTN) tahun 2014, dia tempuh di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dengan mengambil Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.





**KEMENTERIAN AGAMA RI**  
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI**  
**MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG**  
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**  
**Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933**

**BUKTI KONSULTASI SKRIPSI**

Nama : Ika Nur Khasana  
NIM : 14610022  
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika  
Judul Skripsi : Jumlah Jarak Eksentrik Graf Pembagi Nol dari Gelanggang  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  dengan  $p, q$  Bilangan Prima  
Pembimbing I : H. Wahyu H. Irawan, M.Pd  
Pembimbing II : Dr. Ahmad Barizi, M.A

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	24 Mei 2018	Konsultasi Kajian Keagamaan	1.
2.	08 Juni 2018	Revisi Kajian Keagamaan Bab I dan Bab II	2.
3.	25 Juli 2018	Konsultasi Bab I dan Bab II	3.
4.	30 Juli 2018	Revisi Bab I, Bab II, dan Konsultasi Bab III	4.
5.	1 Agustus 2018	ACC Bab I dan Bab II	5.
6.	4 September 2018	ACC Kajian Keagamaan Bab I dan Bab II	6.
7.	12 Oktober 2018	Revisi Kajian Keagamaan Bab III	7.
8.	2 November 2018	Revisi Bab III	8.
9.	7 November 2018	ACC Bab III dan Konsultasi Bab IV	9.
10.	08 November 2018	ACC Keseluruhan Kajian Keagamaan	10.
11.	08 November 2018	ACC Keseluruhan	11.

Malang, 08 November 2018

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si

NIP. 19650414 200312 1 001