PELABELAN LATIS MENGGUNAKAN METODE *DILWORTH*

SKRIPSI

OLEH
RIDHO SHOLEHURROHMAN
NIM. 14610014

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018

PELABELAN LATIS MENGGUNAKAN METODE *DILWORTH*

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Ridho Sholehurrohman
NIM. 14610014

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018

PELABELAN LATIS MENGGUNAKAN METODE *DILWORTH*

SKRIPSI

Oleh
Ridho Sholehurrohman
NIM. 14610014

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 07 November 2018

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Evawati Alisah, M.Pd	Juhari, M.Si
NIP. 19720604 199903 2 001	NIP. 19840209 20160801 1 005

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PELABELAN LATIS MENGGUNAKAN METODE *DILWORTH*

SKRIPSI

Oleh
Ridho Sholehurrohman
NIM. 14610014

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
Dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 26 November 2018

Penguji Utama	: Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D	....
Ketua Penguji	: H. Wahyu H. Irawan, M.Pd	....
Sekertaris Penguji	: Evawati Alisah, M.Pd	....
Anggota Penguji	: Juhari, M.Si	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Ridho Sholehurrohman
NIM	: 14610014
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Pelabelan Latis Menggunakan Metode *Dilworth*

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 28 November 2018
Yang membuat pernyataan,

Ridho Sholehurrohman
NIM. 14610014

MOTO

Belajar dari kegagalan adalah hal yang terbaik.

Saat Allah SWT mendorong kamu kejurang, percayalah

kalau hanya ada dua hal yang munkin terjadi. Mungkin saja Allah akan menagkap kamu, atau ingin kita belajar bagaimana caranya kita terbang.

QS. Al-Muzzamil:8

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda Saher Amrullah dan Ibunda Aridah yang senantiasa mendo'akan memberi nasihat dan dukungan, serta Kakakku Dwi Febri Hidayati dan Keponakanku Ayyash Zaidan Nur Fahmi.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Evawati Alisah, M.Pd, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan berbagi pengalaman yang berharga kepada penulis.
3. Juhari, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.
4. Bapak dan Ibu serta kakak tercinta yang selalu memberikan do'a, semangat, serta motivasi kepada penulis sampai saat ini.
5. Sahabat-sahabat terbaik penulis khususnya keluarga pinus (Ghofur, Nurul F, Lia, Dian, Yeni, Hanif) yang selalu menemani, membantu, dan memberikan dukungan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

6. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu-persatu, yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materiil.

Semoga Allah Swt melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Akhirnya penulis berharap semoga dengan rahmat dan izin-Nya mudah-mudahan skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan bagi pembaca. *Amiin.*

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 28 september 2018

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Sholehurrohman, Ridho. 2018. **Pelabelan Latis menggunakan Metode *Dilworth***. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Evawati Alisah, M.Pd. (II) Juhari, M.Si.

Kata kunci: Latis, Graf dari Latis, Pelabelan Graf dari Latis, Metode *Dilworth*

Latis L adalah suatu aljabar yang dikenai dua operasi biner (dilambangkan dengan $\times$ dan $+$), yang memenuhi beberapa aksioma, yaitu kedua operasi bersifat idempoten, kedua operasi bersifat asosiatif dan komutatif, serta berlaku absorpsi terhadap relasi yang dinotasikan kedua operasi. Misal $(F(n), \leq, +, \times)$ adalah latis faktor bilangan bulat positif non prima. Diagram latis $(F(n), \leq, +, \times)$ dapat dipandang sebagai graf karena memenuhi definisi dari graf. Sehingga himpunan titik pada $(F(n), \leq)$ adalah semua anggota himpunan bagian dari $F(n)$ sedemikian sehingga setiap titik yang berbeda $a, b \in F(n)$, $a \leq b \Leftrightarrow a$ adalah faktor dari b. Didefinikan penjumlahan $a + b = kpk(a, b)$ dan perkalian $ab =$ fpb(a, b) untuk setiap $a, b \in F(n)$ adalah elemen-elemen terurut yang terhubung langsung, maka latis $F(n)$ yang dibentuk adalah $F(n) = \{x \in \mathbb{Z}^+ : kpk(x, n) = n\}$.

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui pelabelan latis menggunakan metode *dilworth*. Pelabelan graf latis $F(n)$ dengan menggunakan metode *dilworth* adalah suatu pelabelan $\xi : F(n) \rightarrow \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ di mana ξ didefinisikan oleh

$$\xi(x) = \sum_{k=0}^{n} \chi_{cov^k R(3)}(x) \cdot k$$

Di mana $\chi_A(x)$ adalah fungsi karakteristik yang didefinisikan oleh

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & ; \text{jika } x \in A \\ 0 & ; \text{jika } x \notin A \end{cases}$$

Algoritma Pelabelan *Dilworth*

Pertama, menentukan himpunan-himpunan cover $(cov^k F(n))$ untuk masing-masing $k \in \mathbb{Z}^+$ yang bersesuaian dengan graf latis faktor $(F(n), +, \times)$. Kedua, menentukan hasil pemetaan dari setiap x dibawah ξ, dimana x adalah anggota $F(n)$. Ketiga, menggambar graf dari latis $F(n)$ yang belum dilabelkan. Kempat, memasangkan label pada setiap titik di graf latis $F(n)$ yang sesuai dengan hasil dari langkah kedua. Langkah terakhir, Interpretasi hasil dari pelabelan.

Hasil penelitian ini adalah:

Konjektur pelabelan latis menggunakan metode *dilworth* yaitu graf latis faktor n $(F(n), +, \times)$ dimana n adalah bilangan bulat positif non prima yang habis dibagi oleh 2 buah bilangan prima p dan q dengan pelabelan $\xi(x) = \sum_{k=0}^{n} \chi_{cov^k F(n)}(x) \cdot k$.

ABSTRACT

Sholehurrohman, Ridho. 2018. **Lattice Labeling with *Dilworth* Method**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Supervisor: (I) Evawati Alisah, M.Pd. (II) Juhari, M.Si.

Keywords: Lattice, Graph of Lattice, Graph Labeling of Lattice, *Dilworth* Method

Lattice L is an algebra which are two binary operations (denoted with $\times$ and $+$), which meet several axioms, that both operations are idempoten, the two operations are associative and comutative, as well as prevailing against absorption relationship denoted by borth operations. Example. $(F(n), +, \times, \leq)$ was lattice positive integer factors of latis non prime. The diagram of lattice $(F(n), +, \times, \leq)$ can be viewed as a graph because it meets the definition of graph. In a way the set of points on the $(F(n), \leq)$ are all members of a subset of $F(n)$ such that each distinct point $a, b \in F(n), a \leq b \Leftrightarrow a$ is the relation of b. Denoted sum $a + b = kpk(a, b)$ and multiplication $ab = fpb(a, b)$ for each $a, b \in F(n)$ is sorted elements are directly connected and degenerate (a perfectly ordered), then the lattice $F(n)$ formed is $F(n) = \{x \in Z^+ : \text{kpk}(x, n) = n\}$.

The purpose of this research is to find lattice labeling with *dilwoth* method. Graph labeling of lattice $F(n)$, using the method of *dilworth* is a labeling $\xi: F(n) \to \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ where ξ is defined by

$$\xi(x) = \sum_k \chi_{cov^k R(3)}(x) \cdot k$$

Where $\chi_A(x)$ is a function of the characteristics defined by

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & ; \text{if } x \in A \\ 0 & ; \text{if } x \notin A \end{cases}$$

Algorithm Labeling *Dilworth*

Firts, determine the set cover $(cov^k F(n))$ for each $k \in \mathbb{Z}^+$ corresponding to a count of lattice factor $(F(n), +, \times)$. Second, etermine the results of mapping every x under ξ, where x is member of $F(n)$. Tird, draw a graph of lattice $F(n)$ that have not been labeled. Fourth, pair the label on every point graph of lattice $F(n)$ that corresponds to the result of step 2. Fifth, interpretation of the results of the labeling.

Result of this research:

Conjecture lattice labeling with *dilwoth* method is graph of lattice factor n $(F(n), +, \times, \leq)$, n is the positive integer non prime are depleted is divided by 2 primes p and q with labeling $\xi(x) = \sum_{k=0}^{n} \chi_{cov^k F(n)}(x) \cdot k$.

ملخص

صالح الرحمن، رضي. ٢٠١٨ . **وضع اسلو لاتيس باستخدام طريقة *Dilworth***. شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعة الإسلامية الحكوميه مولانا مالك إبراهيم مالانج.
المشرف: (١) إيفاواتي أليسا الماجستيرة (٢) جوهرى الماجستير

الكلمات الدالة: لاتيس, مخطط، وضع اسلو لاتيس، مخطط لاتيس، وصف مخطط من لاتيس, طريقة *Dilworth*

لاتيس L هو الجبر التي كانت عملية ثنائي (يمثلها + و ×)، أن تفي ببعض البديهيات، أي العمليتين إيديمبوتين، العملية الثانية على حد سواء النقابي وكوموتاتيف، وكذلك تطبيق العلاقة على استيعاب عملية دينوتاسيكان الثاني. مثل $(F(n), \leq, +, \times)$ هو لاتيس عامل عددا صحيحاً موجباً الوجاهة. مخطط لاتيس $(F(n), \leq, +, \times)$ يمكن اعتبار مخطط نظراً لأنه يفي بتعريف مخطط. حيث أن المجموعة من ؤوس على $(F(n), \leq)$ جميع الأعضاء في مجموعة فرعية من $F(n)$ أن كل نقطة من ؤوس متميزة، $a, b \in F(n),\ a \leq b \Leftrightarrow a$ عامل b. تعريف إضافة $a + b = fpb(a, b)$ و الضرب $ab = kpk(a, b)$ لكل $a, b \in F(n)$ ثم لاتيس $F(n)$ شكلت هي $F(n) = \{x \in \mathbb{Z}^+ : kpk(x, n) = n\}$

والغرض من هذا البحث معرفة وضع اسلو لاتيس باستخدام طريقة *dilworth* وصف مخطط من لاتيس $R(n)$ باستخدام نظرية *dilworth* هو العلامات $\xi: R(n) \to \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ فيها ξ التي يحددها

$$\xi(x) = \sum_k \chi_{cov^k R(n)}(x) \cdot k.$$

فيها $\chi_A(x)$ يتم تعريف الدالة المميزة التي

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & ; \text{jika } x \in A \\ 0 & ; \text{jika } x \notin A. \end{cases}$$

خوارزمية وضع العلامات *dilworth*

الأولى، تحديد تغطية مجموعة مجموعة $(cov^k R(n)$ إلي $k \in \mathbb{Z}^+$ المقابلة لعدد معامل لاتيس $(R(n), +, \times)$. ثانيا، تحديد نتائج التعيين لكل x إلي ξ، التي $x \in R(n)$. الثالثة، رسم

مخطط لاتيس $R(n)$ أن لم يكن القطاع الخاص المسمى. الرابع، زوج التسمية على كل نقطة في لاتيس غراف $R(n)$ التي تناسبها مع النتيجة على ثانيا. الخامس، تفسير نتائج العلامات.

نتائج هذا البحث:

حدس وضع اسلو لاتيس باستخدام طريقة *dilworth* هو وضع اسلو لاتيس عامل n $(F(n), +, \times)$حيث n هو يتم قسمة عدد صحيح موجب تنضب الوجاهة غير عددين أوليين عامل p و q مع العلامات.

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pelabelan merupakan pemetaan bijektif yang memetakan unsur himpunan titik atau memetakan unsur himpunan sisi atau memetakan titik dan sisi atau sisi ke bilangan asli. Berdasarkan unsur yang dilabeli, pelabelan dibagi menjadi tiga jenis, yaitu pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total. Pelabelan titik adalah pelabelan dengan domain himpunan titik, pelabelan sisi adalah pelabelan dengan domain himpunan sisi, dan pelabelan total adalah pelabelan dengan domain gabungan antara himpunan titik dan himpunan sisi (Nisa dkk, 2015).

Pelabelan latis merupakan salah satu topik yang muncul dalam teori latis. Pelabelan latis merupakan pemetaan sebarang latis finite yang dihubungkan ke latis lain dengan sifat-sifat yang terpenuhi (Vijay K, 2009). Menurut Gretzer (2011) dikatakan suatu latis adalah poset di mana setiap pasang unsur a, b mempunyai suatu batas bawah terbesar (disajikan oleh $a \cap b$) yang berada di dalam himpunan itu. Pelabelan a, b dari latis L terbatas adalah suatu pemasangan himpunan titik-titik, sedemikian sehingga terhubung langsung (*adjacend*) dengan aturan - aturan tertentu.

Allah Swt. berfirman didalam surat an-Nisa (4) ayat 1, yang berbunyi:

يَا أَيُّهَا النَّاسُ اتَّقُوا رَبَّكُمُ الَّذِي خَلَقَكُمْ مِنْ نَفْسٍ وَاحِدَةٍ وَخَلَقَ مِنْهَا زَوْجَهَا وَبَثَّ مِنْهُمَا رِجَالًا كَثِيرًا وَنِسَاءً ۚ
وَاتَّقُوا اللَّهَ الَّذِي تَسَاءَلُونَ بِهِ وَالْأَرْحَامَ ۚ إِنَّاللَّهَكَانَعَلَيْكُمْرَقِيبًا﴿النساء:١﴾

"Hai sekalian manusia, bertakwalah kepada Tuhan-mu *yang telah menciptakan kamu dari seorang diri, dan dari padanya Allah menciptakan isterinya; dan dari pada keduanya Allah memperkembang biakkan laki-laki dan perempuan yang banyak. Dan bertakwalah kepada Allah yang dengan (mempergunakan) nama-Nya kamu saling meminta satu sama lain, dan (peliharalah) hubungan*

silaturrahim. Sesungguhnya Allah selalu menjaga dan mengawasi kamu"(QS. An-Nisa/4:1)"

Dalam surat an-Nisa ayat satu dijelaskan bahwa derajat manusia disisi Allah sama, hanya mereka yang tinggi derajatnya adalah orang yang paling bertaqwa. Dan orang–orang yang bertaqwa adalah orang-rang yang menjaga tali persaudaraan (silaturrahim), menjaga hubungan baik antar sesama manusia. Manusia saling membutuhkan satu sama lain dan membentuk suatu kelompok atau golongan. Salah satu bidang matematika yang membahas keterhubungan tersebut adalah aljabar, di antara teori dalam aljabar adalah himpunan, grup, ring, ideal, teori latis, dan sebagainya. Struktur aljabar dengan satu operasi biner yang memenuhi sifat-sifat tertentu disebut dengan grup. Sedangkan struktur aljabar dengan dua operasi biner yang memenuhi sifat tertentu disebut ring. Dalam perkembangannya, dua operasi biner yang memenuhi sifat tertentu disebut juga teori latis. Suatu latis L adalah suatu alajabar yang dikenal dua operasi biner (dilambangkan dengan $\times$ dan $+$), yang memenuhi beberapa postulat yaitu kedua operasi bersifat idempoten, kedua operasi bersifat assosiatif dan komutatif, serta berlaku absorpsi terhadap kedua operasi (Gratzer, 2011:12).

Teori Latis berkembang dengan beberapa Teorema yang salah satunya adalah Teorema *Dilworth*. Dalam kaitannya Latis sebagai suatu order dapat dideskripsikan sebagai hubungan antara sifat komponen-komponennya. Sedangkan teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang mempelajari sifat-sifat graf. Graf G adalah pasangan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dari objek-objek yang disebut titik, dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut sisi. Jika (u, v) merupakan sisi dari G, maka u dan v adalah titik yang terhubung langsung (Chartrand, dkk, 2016:3). Graf dapat dinamakan demikian karena dapat diwakili secara grafis, dan representasi grafis ini yang membantu dalam memahami beberapa sifat-sifatnya (Bondy dan Murty, 2008:2).

Teori latis juga mempelajari tentang diagram latis yang merupakan representasi dari latis itu sendiri. Pada penelitian sebelumnya, yang sudah dilakukan oleh Zainal Abidin (2009) membahas tentang Kajian graf latis factor bilangan prima berpangkat n dan graf latis faktor bilangan $2^n \times 10$. Menjelaskan Definisi dasar dan Teorema-Teorema pada graf latis factor bilangan prima. Faizatul Wahidah (2017) membahas tentang homomorfisma latis. Menjelaskan Definisi dasar dan Teorema-Teorema pada latis serta hanya menjelaskan sifat-sifat homomorfisma dari latis beserta bukti dan contohnya. Dan Eka Restu (2018) membahas tentang $Eccentric - Distance\ Sum$ pada graf dari latis himpunan kuasa. Menjelaskan tentang Definisi dan Teorema-Teorema $Eccentric - Distance\ Sum$ serta graf dari latis himpunan kuasa. Dalam perkembangan latis adalah graf, timbul praduga jika latis adalah graf maka komponen latis bisa diwarnai atau dilabeli. Teorema *Dilworth* adalah teorema yang paling dikenal pada teori latis. Teorema *Dilworth* membahas rantai setiap dua unsur yang komparabel, distributif latis *Dilworth*, batas bawah terbesar dari latis, modularitas latis, gambar graf dengan diagram hasse. Semua struktur atau motode *Dilworth* berkaitan dengan pelabelan latis (*labeling lattice*).

Berdasarkan permasalahan di atas, penulis ingin mengetahui lebih jauh dan menganalisis tentang teori latis. Merujuk pada jurnal-jurnal ilmiah dan penelitian yang ada belum dapat menjelaskan tentang *labeling* Teorema *Dilworth* pada teori latis secara lebih jelas. Karena penelitain sebelumnya belum membahas tentang pelabelan bilangan bulat tak negatif pada titik atau sisi atau keduanya dengan memenuhi aturan–aturan tertentu.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah yang diberikan dalam penelitian ini adalah cara melakukan pelabelan latis menggunakan metode *Dilworth*?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui pelabelan latis menggunakaan metode *Dilworth*.

1.4 Batasan Masalah

Sesuai rumusan masalah dan tujuan penelitian, serta agar pembahasan lebih fokus maka pembahasan masalah yang diberikan adalah pelabelan latis yang digunakan dalam pembahasan dikhususkan pada faktor bilangan bulat positif non prima.

1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan mampu menambah wawasan peneliti dalam melakukan penelitian dan menambah wawasan peneliti dalam memahami teori latis serta mengembangkannya. Penelitian ini diharapkan menjadi landasan dasar untuk penelitian selanjutnya.

1.6 Metode Penelitian

Penelitian dilakukan dengan melakukan kajian terhadap buku-buku teori graf, teori latis dan beberapa hasil penelitian sebelumnya terkait dengan pelabelan, terutama pelabelan titik dan pelabelan menggunakan metode *Dilworth*. Pola pembahasan penelitian ini dimulai dari hal-hal khusus (induktif) menuju pada suatu generalisasi yang bersifat deduktif. Secara garis besar langkah penelitian ini sebagai berikut:

a. Menentukan graf dari latis faktor bilangan bulat positif non prima, (Gambar 2.1)
b. Membuktikan modularitas latis dari graf latis $F(n)$, (2.4.1 Latis Modular)
c. Langkah-langkah label pada graf dari latis $F(n)$ dengan menggunakan Teorema *dilworth*, (2.4 Latis dan 2.7 Teorema *Dilworth*)
d. Membuat konjektur berdasarkan pola yang ditemukan untuk suatu kasus yang dirumuskan menjadi suatu teorema pelabelan graf dari latis faktor $F(n)$ serta membuktikannya.

1.7 Sistematika Penulisan

Untuk mempermudah memahami penulisan ini secara keseluruhan, maka penulis menggambarkan sistematika penulisannya sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pada bab ini membahas tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Pada bab ini menyajikan konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain membahas tentang himpunan, relasi, parsial order, latis, sublatis, latis moduar, diagram latis, graf, terhubung langsung, derajat titik, graf terhubung, jarak pada graf, pelabelan, teorema *dilworth*, dan kajian agama islam.

Bab III Pembahasan

Pada bab ini membahas metode *dilworth* pada latis untuk melabelan komonen latis dan kajian pelabelan latis dalam agama islam.

Bab IV Penutup

Bab ini berisi kesimpulan dari penelitian serta saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Himpunan

Istilah himpunan seringkali dijumpai ketika mempelajari aljabar abstrak. Hal ini dikarenakan himpunan merupakan dasar dari berbagai pembahasan mengenai struktur aljabar. Definisi himpunan dapat dilihat sebagai berikut:

Definisi 2.1

Himpunan (*set*) didefinisikan sebagai kumpulan objek atau koleksi objek-objek yang terdefinisi dengan jelas (*well defined*). Maka "objek" dalam definisi tersebut sangat luas. Objek dapat berupa objek nyata dan dapat juga berupa objek abstrak. Objek dapat berbentuk orang, nama orang, hewan, benda, bilangan, planet, nama hari atau lainnya. Sebagai contoh kumpulan nama-nama hari dalam satu minggu. Himpunan dapat dinyatakan dengan mendaftar semua anggotanya didalam tanda kurung kurawal yaitu { } (Abdussakir, 2007: 103).

Untuk lebih mempertajam, terdapat tiga pengertian dasar, yaitu himpunan, anggota, dan relasi keanggotaan $\in$. Misalkan X himpunan dan a anggota. Penulisan $a \in X$ berarti a anggota X, atau X memuat a. Sebaliknya, penulisan $a \notin X$ berarti a bukan anggota X, atau X tidak memuat a. Anggota himpunan X dapat dikatakan juga sebagai unsur himpunan X. Jika ada anggota a yang memenuhi $a \in X$, maka X dikatakan mempunyai anggota, atau himpunan tak hampa. Sebaliknya, jika himpunan X tidak mempunyai anggota, maka himpunan X dikatakan himpunan hampa dan ditandai dengan $\emptyset$ (Arifin, 2000:1).

Suatu himpunan dikatakan hingga atau tak hingga sesuai banyaknya anggota yang dikandung. Himpunan bilangan asli antara 1 dan 100 merupakan contoh untuk himpunan hingga. Himpunan yang tidak mempunyai anggota atau himpunan hampa juga merupakan suatu himpunan hingga. Sedangkan himpunan semua bilangan asli merupakan contoh himpunan tak hingga. Himpunan semua bilangan asli, bulat, rasional, nyata, dan kompleks berturut-turut diberi tanda $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, dan, $\mathbb{C}$. Masing-masing adalah himpunan tak hingga (Arifin, 2000: 1).

Contoh:

Didefinisikan himpunan bilangan bulat positif, maka dapat ditulis:

$$A = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

atau

$$A = \{x | x \in \mathbb{Z}\}$$

Masing-masing objek dalam himpunan A disebut anggota atau elemen himpunan dan dapat ditulis,

$$x \in A \text{ artinya } x \text{ anggota himpunan } A$$

Definisi 2.2

Misalkan A dan B himpunan. Himpunan B dinyatakan himpunan bagian (*subset*) dari A. Jika setiap anggota himpunan B juga merupakan anggota himpunan A, maka ditulis

$$B \subseteq A$$

Dapat dibaca bahwa B himpunan bagian dari A, B $subset$ A, B termuat di A, A memuat B, secara simbolik

$$B \subseteq A \Leftrightarrow (x \in B \Rightarrow x \in A)$$

Berdasarkan definisi tersebut, jika A sebarang himpunan tak kosong, makadiperoleh bahwa,

$$A \subseteq A \text{ dan } \emptyset \subseteq A$$

Misalkan A dan B himpunan. Himpunan B dikatakan bukan himpunan bagian dari A ditulis:

$$B \nsubseteq A$$

dan jika ada anggota himpunan B yang bukan anggota himpunan A (Abdussakir, 2009:10).

Contoh:

Misalkan $A = \{1,2,3,4,6,12\}$ dan B = {2,4,7}

Maka B bukan himpunan bagian A, karena ada anggota B yang bukan merupakan anggota A, yaitu 7. Jadi dapat ditulis $B \nsubseteq A$.

2.2 Relasi

Relasi merupakan salah satu bagian penting dalam aljabar. Secara umum relasi diDefinisikan sebagai suatu aturan yang memasangkan anggota himpunan ke himpunan yang lain.

Definisi 2.3

Misalkan A dan B adalah dua himpunan tak kosong, maka suatu relasi R dari A ke B adalah suatu himpunan bagian dari $A \times B$ (Mas'od, 2013: 9).

Contoh:

Misalkan terdapat himpunan $A = \{a, b, c\}$, maka suatu relasi yang mungkin adalah $R = \{(a, c), (a, a), (b, c), (c, a)\}$.

Bila R suatu relasi pada A maka $(a, b) \in R$, ditulis dengan aRb.

Definisi 2.4

Misalkan R adalah suatu relasi pada A, maka R disebut:

1. Refleksif jika aRa untuk semua $a \in A$.

   Contoh: Misalkan diberikan $A = \{1,2,3,4\}$, suatu relasi R dinamakan refleksif jika dan hanya jika $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$.

2. Simetris jika aRb maka bRa untuk semua $a, b \in A$

   Contoh: Misalkan diberikan $A = \{1,2,3\}$, suatu relasi R dinamakan simetris jika dan hanya jika $R = \{(1,2), (2,1), (1,3), (3,1)\}$.

3. Transitif jika aRb dan bRc, maka aRc untuk semua $a, b, c \in A$

   Contoh: Misalkan diberikan $A = \{1,2,3,4\}$, suatu relasi R dinamakan transitif jika dan hanya jika $R = \{(1,1), (2,3), (3,4), (2,4)\}$.

4. Antisimetris jika aRb dan bRa, maka $a = b$ untuk semua $a, b \in A$

   Misalkan diberikan $A = \{2,4,5\}$, suatu relasi R dinamakan antisimetris jika dan hanya jika $R = \{(2,2), (4,4), (5,5), (4,2)\}$.

Berdasarkan definisi diatas didapatkan:

a. R disebut relasi ekuivalen pada A, jika R refleksif, simetris, dan transitif.

b. R disebut relasi terurut parsial (*partial order*) pada A, jika T refleksif,antisimetris, dan transitif.

(Mas'od, 2013: 9)

2.3 Terurut Parsial

Definisi 2.5

Diberikan himpunan S didefinisikan relasi *partial order* atau terurut parsial O di S merupakan relasi yang melibatkan dua unsur di S yang memenuhi sifat-sifat:

(i) Refleksif: untuk setiap a di S, berlaku aOa.

(ii) Antisimetris: jia aOb bOa, maka $a = b$.

(iii) Transitif: jika aOb dan bOc, maka aOc.

(Sukardjono, 2002:27)

Contoh:

Diberikan $X = \{1, 2, 3\}$, dan diketahui

$$R_1 = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1)\},$$

maka R_1 adalah relasi simetrik tetapi bukan relasi refleksif pada X. Kemudian diketahui juga

$$R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$

maka R_2 merupakan relasi refleksif tetapi bukan relasi simetrik pada X.

Contoh:

Jika $X = \{1, 2, 3, 4\}$, maka $R_1 = \{(1, 1), (2, 3), (3, 4), (2, 4)\}$ adalah relasi transitif pada X. Sedangkan $R_2 = \{(1, 3), (3, 2)\}$ bukan relasi transitif karena $\{(1, 3), (3, 2)\} \in R_2$ tetapi $(1, 2) \notin R_2$.

Definisi 2.6

Suatu himpunan S yang disertai dengan relasi terurut parsial O yang telah didefinisikan disebut himpunan terurut parsial atau *poset* (*partially ordered set*).

2.4 Latis

Suatu Latis dapat dipandang dari beberapa sudut pandang, dari sudut pandang aljabar dan dari sudut pandang teori himpunan. Oleh karena itu penerapan teori Latis sangat luas dan penting dalam cabang-cabang lain matematika maupun sains yang sejenis. Dalam hal ini penulis akan membahas suatu Latis dari sudut pandang aljabar.

Definisi 2.6

Suatu Latis L adalah suatu aljabar dengan dua operasi biner (dilambangkan dengan perkalian $\times$ dan penjumlahan $+$) yang memenuhi postulat-postulat berikut:

IA	$a \times b \in L$	L tertutup terhadap operasi $\times$
IB	$a + b \in L$	L tertutup terhadap operasi $+$
IIA	$a \times b = b \times a$	operasi $\times$ bersifat komutatif
IIB	$a + b = b + a$	operasi $+$ bersifat komutatif
IIIA	$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$	operasi $\times$ bersifat asosiatif
IIIB	$a + (b + c) = (a + b) + c$	operasi $+$ bersifat asosiatif
IVA	$a \times (a + b) = a$	absorpsi terhadap operasi $+$
IVB	$a + (a \times b) = a$	absorpsi terhadap operasi $\times$

dimana a, b, dan c adalah elemen yang ada di L (Sukardjono, 2002:39)

Contoh:

Misalkan unsur-unsur dari latis L adalah keenambelas faktor dari bilangin asli 216, yaitu:

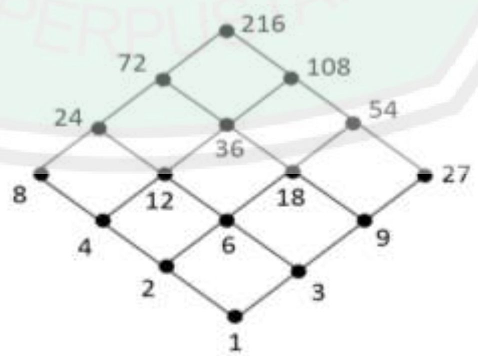
$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 27, 36, 54, 72, 108, 216.$$

Himpunan ini memuat fpb tunggal dan kpk tunggal dari setiap dua anggota dari himpunan itu, dengan jika kita Definisikan $fpb(a, b) = ab$, $kpk(a, b) = a + b$, Postulat IA, IB dari Definisi 1 dipenuhi. Sifat komutatif (Postulat IIA, IIB) dipenuhi. Postulat IIIA, IIIB (asosiatif dipenuhi) dan sifat absorpsi (Postulat IVA, IVB) juga terpenuhi.

Untuk menggambar diagram latis sebagai poset perlu diperhatikan aturan-aturan sebagai berikut:

1. Faktor terkecil sampai faktor terbesar digambar terlebih dahulu.
2. Dimulai dari faktor terkecil diletakkan paling bawah dan diakhiri faktor paling besat diletakkan paling atas.
3. Posisi faktor yang lebih kecil diletakkan lebih bawah dibandingkan dengan faktor yang lebih besar.
4. Misal a, b, dan c adalah faktor dari p dan $a \neq b \neq c, a < b$. a akan terhubung pada b jika a membagi b $(a|b)$, dan tidak ada c sedemikian sehingga $(c|b)$ dan $(a|c)$

Dengan mengikuti aturan-aturan tersebut akan didapatkan diagram latis seperti berikut:



Gambar 2.1 Diagram Graf Latis Faktor

Teorema 2.1

Misal latis L dan $a \in L$ maka $aa = a$ (Sukardjono, 2002:39)

Bukti:

$a \times a = a \times (a + (a \times b))$ menurut IVB

$= a$ menurut IVA

Teorema 2.2

Misal latis L dan $a \in L$ maka $a + a = a$ (Sukardjono, 2002:39).

Bukti:

$a + a = a + (a \times a)$ menurut Teorema 2.1

$= a$ menurut IVB

Teorema 2.3

Misal latis L dan $a, b \in L$. Jika $a \times b = a$, maka $a + b = b$ (Sukardjono, 2002:40).

Bukti:

$a + b = (a \times b) + b$ menurut ketentuan a

$= b + (a \times b)$ menurut IIB

$= b + (b \times a)$ menurut IIA

$= b$ menurut IVB

Teorema 2.4

Misal L adalah suatu latis dan $a, b \in L$. Jika $a + b = b$, maka $a \times b = a$ (Sukardjono, 2002:40).

Bukti:

$a \times b = a \times (a + b)$ menurut ketentuan b

$= a$ menurut IVA

Definisi 2.7

Didefinisikan suatu relasi R diantara dua unsur dalam suatu latis dengan:

i. aRb jika dan hanya jika $a \times b = a$

Berdasarkan Teorema 2.3 bahwa jika $a \times b = a$ maka $a + b = b$,

Jadi, $a \times b = a$

ii. aRb jika dan hanya jika $a + b = b$

Berdasarkan Teorema 2.4 bahwa jika $a + b = b$ maka $a \times b = a$,

Jadi, $a + b = b$

(Sukardjono, 2002:40).

Contoh**:**

Misalkan $(L, \times, +)$ adalah suatu latis, dengan L adalah himpunan yang unsur-unsurnya merupakan kelipatan dari 2 yaitu $L = \{2, 4\}$. didefinisikan bahwa $a \times b = FPB(a, b)$ dan $a + b = KPK(a, b)$, maka tunjukkan bahwa untuk semua $a, b \in L$ berlaku aRb.

Jawab:

Pertama akan ditunjukkan untuk semua $a, b \in L$ berlaku aRb jika dan hanya jika $a \times b = a$, yaitu:

a. Saat $a = 2$ dan $b = 2$

$a \times b = a$

$2 \times 2 = 2$

$2 = 2$

b. Saat $a = 2$ dan $b = 4$

$a \times b = a$

$2 \times 4 = 2$

$2 = 2$

c. Saat $a = 4$ dan $b = 2$

$a \times b = a$

$4 \times 2 = 4$

$2 \neq 4$

Karena untuk $a = 4$ dan $b = 4$ tidak memenuhi kondisi aRb jika dan hanya jika $a \times b = a$ maka untuk semua $2, 4 \in L$ tidak berlaku aRb.

Teorema 2.5

Misal L suatu latis dan $a, b \in L$, maka berlaku aRa (Sukardjono, 2002:40).

Bukti:

$a \times a = a$ menurut Teorema 2.1)

Berdasarkan Definisi 2.7 (i) maka terbukti bahwa $aRa\ \forall a \in L$.

Teorema 2.6

Misal L suatu Latis dan $a, b \in L$, maka berlaku jika aRb dan bRa, maka $a = b$ (Sukardjono, 2002:40).

Bukti:

$a = a \times b$ menurut ketentuan pertama dan Definisi 2.7 (i)

$= b \times a$ menurut postulat IIA

$= b$ menurut ketentuan kedua dan Definisi 2.7 (i)

Teorema 2.7

Misal L suatu latis dan $a, b \in L$, maka berlaku jika aRb dan bRc, maka aRc (Sukardjono, 2002:40).

Bukti:

$a \times c = (a \times b) \times c$ menurut ketentuan pertama dan Definisi 2.7 (i)

$= a \times (b \times c)$ menurut IIIA

$= a \times b$ menurut ketentuan kedua dan Definisi 2.7 (i)

$= a$ menurut keteentuan pertama dan Definisi 2.7 (i)

Jadi terbukti bahwa aRc menurut Definisi 2.7 (i).

Relasi R pada Teorema 2.5-2.7 merupakan relasi terurut parsial karena bersifat refleksif (Teorema 2.5), antisimetris (Teorema 2.6), dan transitif (Teorema 2.7). Relasi terurut parsial dituliskan dengan $a \leq b$ untuk aRb (Sukardjono, 2002:41).

Teorema 2.8

Suatu latis adalah poset (*partially ordered set*) dengan sifat $a \leq b$ yang berarti $a \times b = a$ dan $a + b = b$ (Sukardjono, 2002:41).

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa jika $a \leq b$, maka berlaku $a \times b = a$ dan $a + b = b$. Karena $a \leq b$, maka untuk semua $a, b \in L$ berlaku sifat refleksif, antisimetris, dan transitif. Pertama akan dibuktikan bahwa jika $a \leq b$, maka $a \times b = a$, yaitu:

$a \times b = a \times a$ karena berlaku sifat antisimetris

$= a$ karena berlaku sifat refleksif

Karena $a, b \in L$, maka $a \times b = a \in L$. Berdasarkan Teorema 2.1 jika $a \times b = a \in L$, maka $a + b = b \in L$, sehingga terbukti bahwa jika $a \leq b$, maka berlaku $a \times b = a$ dan $a + b = b$.

Teorema 2.9

Misal L suatu latis dan $a, b \in L$, maka berlaku $(a \times b) \leq a$ (Sukardjono, 2002:42).

Bukti:

Berdasarkan Definisi 2.7 (ii) maka untuk $(a \times b) \leq a$ berlaku $(a \times b) + a = a$, sehingga akan dibuktikan bahwa $(a \times b) + a = a$ sebagai berikut:

$(a \times b) + a = a + (a \times b)$ (menurut postulat IIB)

$= a$ (menurut postulat IVB)

Maka

$(a \times b) \leq a$ (menurut Definisi 2.7 (ii))

Teorema 2.10

Misal L suatu latis dan $a, b \in L$, maka berlaku $a \leq (a + b)$ (Sukardjono, 2002:42).

Bukti:

Berdasarkan Definisi 2.7 (i) maka untuk $a \leq (a + b)$ berlaku $a \times (a + b) = a$, sehingga akan dibuktikan untuk $a \times (a + b) = a$ sebagai berikut:

$a \times (a + b) = a$ (menurut postulat IVA)

maka,

$a \leq (a + b)$ (menurut Definisi 2.7(i))

Teorema 2.11

Misal L suatu Latis dan $a, b \in L$, maka berlaku $(a \times b) \leq b$ (Sukardjono, 2002:42).

Bukti:

$(b \times a) \leq b$ (menurut Teorema 2.9)

Tetapi,

$b \times a = a \times b$ (menurut postulat IIA)

Jadi,

$(a \times b) \leq b$

Akibatnya adalah bahwa $a \times b$ merupakan suatu batas bawah dari pasangan berurtut (a, b).

Teorema 2.12

Misal L suatu latis dan $a, b \in L$, maka berlaku $b \leq (a + b)$ (Sukardjono, 2002:42).

Bukti:

$b \leq (b + a)$ (menurut Teorema 2.10)

Tetapi,

$b + a = a + b$ (menurut IIB)

Jadi,

$b \leq (a + b)$

Akibatnya adalah bahwa $a + b$ merupakan batas atas dari pasangan berurut (a, b).

Teorema 2.13

Misal L suatu Latis dan $a, b \in L$, maka berlaku jika $c \leq a$ dan $c \leq b$, maka $c \leq (a \times b)$ (Sukardjono, 2002:42).

Bukti:

$c = c \times a$ (menurut ketentuan pertama dan Definisi 2.7 (i))

$= (c \times b) \times a$ (menurut ketentuan kedua dan Definisi 2.7 (i))

$= c \times (b \times a)$ (menurut postulat IIIA)

$= c \times (a \times b)$ (menurut postulat IIA)

Dengan demikian $c \leq (a \times b)$ berdasarkan Definisi 2.7 (i)

Jadi $a \times b$ adalah batas bawah terbesar dari pasangan berururt (a, b).

Teorema 2.14

Misal L suatu latis dan $a, b \in L$, maka berlaku jika $a \leq d$ dan $b \leq d$, maka $(a + b) \leq d$ (Sukardjono, 2002:42).

Bukti:

$(a+b)+d = a+(b+d)$ (menurut postulat IIIB)

$= a+d$ (menurut ketentuan kedua dan Definisi 2.7 (ii))

$= d$ (menurut ketentuan pertama)

Dengan demikian $a+b \leq d$ menurut Definisi 2.7 (ii).

Jadi $a+b$ merupakan batas atas terkecil dari pasangan a, b.

Teorema 2.15

Misal L suatu latis dan $a, b, c \in L$, maka berlaku $a \leq b$ dan $b \leq c$ maka $a \leq c$ (Vijay K, 2009:3).

Bukti:

Akan dibuktikan untuk $a \leq (b+c)$ (menurut Definisi 2.8 (1)) berlaku $a \times (b+c)$. Maka akan berakibat $a \leq (b+c) = a \times (b+c)$.

Jika $a \times (b+c) = (a \times b) + (b+c)$ (menurut Definisi 2.9 (i) $\{a \times b = a\}$)

$a \times (b+c) = (a \times b) \leq c$ (menurut Definisi 2.9 (ii) $\{(b+c) = c\}$)

Maka, $a \times b \ \leq c$

Definisi 2.8 (Sublatis)

Misalkan $(H, \times, +)$ dan $(P, \times, +)$ adalah suatu latis. H dikatakan sublatis dari P jika H adalah himpunan bagian dari P dengan $a, b \in H$, maka $a \times b \in H$ dan $a+b \in H$ (operasi $(\times)$ dan $(+)$ adalah operasi yang ada di P) (Gratzer, 2011:31).

Bukti:

Misalkan diberikan dua latis $(H, \times, +)$ dan $(P, \times, +)$ dengan $H = \{a, b\}$ dan $P = \{a, b, c\}$, dimana H adalah himpunan bagian dari P, maka akan ditunjukkan bahwa H adalah sublatis dari P.

Definisi 2.7 (i) ditunjukkan bahwa:

$a \times b = a$, dimana $a \in H$ dan $a \in P$

$b \times a = b$, dimana $b \in H$ dan $b \in P$

Definisi 2.7 (ii) ditunjukkan bahwa

$a + b = b$, dimana $b \in H$ dan $b \in P$

$b + a = a$, dimana $a \in H$ dan $b \in P$

Menurut Teorema 2.7 ditunjukkan bahwa:

$c \times a = c$, dimana $c \in H$ dan $c \notin P$

$a + c = c$, dimana $c \in H$ dan $c \notin P$

Maka,

$H = \{a, b\}$ adalah sublatis $P = \{a, b, c\} \leftrightarrow a, b$ ada di P

Definisi 2.9 (Sublatis)

1. Diberikan order P suatu Latis dengan$A \subseteq P$ (sublatis) adalah *Down-set* jika $a \in A$ dan $b \leq a$ maka $b \in A$. Untuk setiap $H \subseteq P$ akan ditunjukan $\downarrow_p H$ digeneralisasi oleh H pada P bahwa:

   $$\downarrow_p H = \{\text{a} \in P | a \leq b, \qquad b \in H\}$$

2. Dua *Down-set* adalah *Up-set*, $A \subseteq P$(sublatis) jika $a \in A$ dan $b \geq a$ maka $y \in A$ dan dinotasikan $\uparrow_p H, \uparrow H, \uparrow h$.

(Gratzer, 2010:7)

Teorema 2.16

Diberikan order P dan Q dengan operasi perkalian $P \times Q$ dan $P = Q$, terdiri dari $(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2)$ jika $(a_1 \leq b_1)$ pada P dan $(a_2 \leq b_2)$ pada Q akan ditunjukkan bahwa $(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2)$ dengan operasi tersebut adalah benar. (Gratzer, 2010:7)

Bukti:

$(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2)$ adalah $(a_1 \leq b_1) \in P \times (a_2 \leq b_2) \in H$ (Definisi 3.0 (i)

$(b_1 \geq a_1) \in P \times (b_2 \geq a_2) \in H$ (Definisi 3.0 (ii))

Jadi, $\uparrow_p H = P \times H$ (Definisi 3.0 (ii))

Definisi 2.10

Diberikan P dan Q suatu latis L dengan opoerasi Union $P \cup Q$ adalah $P + Q$ dimana elemen $a, b \in P \cup Q$ didefinisikan $a \leq b$ akan memenuhi beberapa kondisi:

1. $a, b \in P \; dan \; a \leq_P b$
2. $a, b \in Q \; dan \; a \leq_Q b$
3. $a \in P \; dan \; b \in Q$

(Gratzer, 2010:8)

Teorema 2.17

Misakan L suatu latis, jika $a, b \in L$, maka berlaku $a \leq_P (b + a)$, di mana $P \subseteq L$ (Gratzer, 2010:8).

Bukti:

Berdasarkan Definisi 3.1 (1) maka untuk $a \leq_P (b + a)$ pada (postulat IVA) berlaku $(b + a) = a$, sehingga akan terbukti bahwab $a \leq_P (b + a)$ adalah benar. Maka $a \leq_P b$ (menurut Definisi 3.1(1))

Lemma 1.1

Order $(L; \leq)$ adalah latis jika $\sup H$ dan $\inf H$ ada untuk himpunan sublatis terbatas H dari L (Gratzer,2010:9).

Bukti:

Tunjukkan $(L; \leq)$ memenuhi definisi dan tunjukkan $H \subseteq L$ bukan himpunan kosong dan terbatas. Jika $H = \{a\}$ maka $\sup H = \inf H = a$.

Jika $H = \{a_o, \ldots, a_{n-1}\}$ untuk semua $n \geq 1$, maka

$$\sup\{\ldots \sup\{\sup\{a_o, a_1\}, a_2\}, \ldots, a_{n-1}\} = \sup\ H,$$

Untuk argumen induktif yang mudah.

Contoh:

Jika $H = \{a, b, c\}$ maka himpunan $d = \sup\{a, b\}$ dan $e = \sup\{c, d\}$, tunjukkan $e = \sup\{H\}$.

Jawab:

$a, b \leq d$ dan $c, d \leq e$ berlaku (karena transitif menurut Teorema 2.7)

Jelas bahwa $a, b, c \leq e$ (Teorema 2.7 tentang aRc),

Maka $e = \sup\{a, b, c\}$, terbukti bahwa $e = \sup\{H\}$.

Definisi 2.11(Dual Prinsip)

Didefinisikan jika $(L; \leq)$ suatu latis, maka dual $L^\delta = (L; \geq)$. Sehingga dual prinsip berlaku pada latis dengan notasi:

$$a \vee b = \sup(a, b)$$

$$a \wedge b = \inf(a, b)$$

Dan dua kondisi (notasi) diatas berlaku untuk kondisi:

Idempoten: 1. $a \vee a = a$

2. $a \wedge a = a$

Comutatif: 1. $a \vee b = b \vee a$

2. $a \wedge b = b \wedge a$

Assosiatif: 1. $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$

2. $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$

Absorpsi: 1. $a \vee (a \wedge b) = a$

2. $a \wedge (a \vee b) = a$

(Gratzer, 2010:10)

Teorema 2.18

Misal a, b yang dioperasikan dengan opoerasi *meet* $(\wedge)$ dan *join* $(\vee)$ adalah suatu latis L, jika $a \leq b$ maka $\sup\{a, b\} = b$, jadi $(a \vee b) = b$ (Gratzer, 2010:11)

Bukti:

$a \leq b$ jika $a \vee b = b$ (menurut Teorema 2.8)

$a \leq b = a + b = b$ (Definisi 2.7)

$a \leq b$ jika $a \wedge b = a$ (menurut Teorema 2.8)

$a \leq b = a \times b = a$ (Definisi 2.7)

Teorema 2.19

i. Diberikan order $\mathcal{L} = (L; \leq)$ suatu latis. Himpunan $a \vee b = \sup\{a, b\}$, $a \wedge b = \inf\{a, b\}$ maka $\mathcal{L}^{alg} = (L; \vee, \wedge)$ adalah suatu latis.

ii. Diberikan aljabar $\mathcal{L} = (L; \vee, \wedge)$ suatu latis. Himpunan $a \leq b$ jika $a \vee b = b$ maka $\mathcal{L}^{ord} = (L; \leq)$ adalah order dan order $\mathcal{L}^{ord}$ adalah latis.

iii. Diberikan order $\mathcal{L} = (L; \leq)$ suatu latis. Maka $(\mathcal{L}^{alg})^{ord} = \mathcal{L}$.

iv. Diberikan aljabar $\mathcal{L} = (L; \vee, \wedge)$ sutau latis. Maka $(\mathcal{L}^{old})^{alg} = \mathcal{L}$

(Gratzer, 2010:13)

Bukti:

(i) $\mathcal{L}^{alg} = (L; \vee, \wedge)$ adalah benar (menurut Definisi 3.2)

(ii) $a \leq b = a \vee b = b$ (menurut Teorema 2.8 dan Definisi 2.7)

$L \subseteq \mathcal{L}^{ord}$ yang dioperasikan $\leq$ (menurut Definisi 2.9)

Maka $\mathcal{L}^{ord} = (L; \leq)$ adalah suatu latis

(iii) Order $\mathcal{L} = (L; \leq)$ berlaku operasi $\vee$, maka $(\mathcal{L}^{old})^{alg} = \mathcal{L}$ (menurut Definisi 3.2) karena berlaku dual prinsip.

(iv) Aljabar $\mathcal{L} = (L; \vee, \wedge)$ suatu latis, maka $(\mathcal{L}^{alg})^{ord} = \mathcal{L}$ (menurut Definisi 3.2) karena berlaku dual prinsip.

Definisi 2.12 konsep distributif latis *meet* and *joint*

1. Diberikan $a, b, c \in L$ berlaku distributif latis dengan operasi$(\wedge, \vee)$:

   i. $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

   ii. $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

(Gratzer, 2010:15)

2. Diberikan $a, b, c \in L$ berlaku distributuf latis dengan operasi Ji (*Joint-irreducible*) dan Mi(*Meet-irreducible*):

   i. Ji(*Joint-irreducible*)

   Jika $a \neq 0$ dan $a = b \vee c$

   Maka $a = b$ atau $a = c$

   ii. Mi(*Meet-irreducible*)

   Jika $a \neq 1$ dan $a = b \wedge c$

   Maka $a = b$ dan $a = c$

(Gratzer, 2010:102)

Teorema 2.20

Misal Aljabar $\mathcal{L} = (L; \vee, \wedge)$ suatu latis, dimana $a, b, c \in L$ berlaku distributif latis pada L (Gratzer, 2010:15)

Bukti:

Latis L adalah sublatis aljabar $\mathcal{L}$ yang dioperasikan dengan $(\vee, \wedge)$ (menurut Definisi 2.8).

$\mathcal{L} = (L; \vee, \wedge)$ benar berlaku distributif dengan:

$a \vee (b \wedge c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ dimana $a, b, c \in L, L \subseteq \mathcal{L}$

maka $a, b, c \in \mathcal{L}$ (Definisi 3.3 (1.i))

$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ dimana $a, b, c \in L, L \subseteq \mathcal{L}$

maka $a, b, c \in \mathcal{L}$ (Definisi 3.3 (1.ii))

jadi, benar bahwa $\mathcal{L} = (L; \vee, \wedge)$ berlaku distributif.

2.4.1 Latis Modular

Definisi 2.13

Misal L latis, jika pada L berlaku:

$$a \geq b \rightarrow a(b + c) = ab + ac = b + ac$$

Untuk setiap $a, b \in L$, maka L disebut latis modular (Sukardjono:118)

Teorema 2.21

Misal $a, b, c \in L$. Jika $a \geq b$ dan $a \geq c$, maka

$a \geq b + c$

$\boldsymbol{a}(b + c) = b + c = b + ac$

Bukti:

Misalkan $a \leq b \iff a = ab$

$b \leq a \iff b = ab$

$c \leq a \iff c = ca$

$a \leq c \iff ca$

Maka $a \le b \Leftrightarrow a(b+c) = ab + ac$

$$= b + c$$

Sehingga $a \le b \Rightarrow a(b+c) = b + c$

$$ac = c$$

$$c \le a$$

$$(b+c) \le a$$

$$a \ge (b+c)$$

Terbukti bahwa $a \ge (b+c)$

Jadi, $a \ge b \Rightarrow a(b+c) = ab + ac = b + ac$

Maka $a \ge b \Rightarrow ab = b$

$a \ge b \Rightarrow ac = c$

Sehingga $a \ge b \Rightarrow a(b+c) = b + c = b + ac$

Teorema 2.22

Misal L latis modular, jika $a = b$, maka

$a(b+c) = ab + ac = b + ac = a$

Bukti:

$a(b+c) = a(a+c)$	ketentuan b
$= (aa) + c$	menururt IIB
$= a + c$	Teorema 1
$= b + (ac)$	keterangan b
$= a + ac$	menurut IVB

Teorema 2.23

Suatu sublatis dari modular adalah modular (Sukardjono,2002:118)

Bukti:

Misalkan S adalah sublatis modular dari latis modular L, dan a, b, c di S dengan $a \geq b$ Karena L modular, $a(b + c) = b + ac$, tetapi unsur-unsur ini anggota S, karena akibatnya S adalah modular.

Teorema 2.24

Suatu latis non-modular harus memuat sublatis yang isomorphic latis "pentagonal" (sukardjono,2002:119)

Teorema 2.25

Suatu latis adalah latis modular jika dan hanya jika itu tidak memuat sublatis yang isomorphic dengan latis "pentagonal". (Sukardjono,2002:123)

Bukti:

Karena L modular, L harus memuat unsur-unsur p, q, r dengan $p \geq q$ sedemikian sehingga $p(q + r) = q + pr$. Menurut Teorema ketidaksamaan modular dalam sebarang latis berlaku $p \geq q \Rightarrow p(q + r) \geq q + pr$. Maka

$$p(q + r) \geq q + pr \text{...(1)}$$

Perhatikan rantai ini

$$pr \leq q + r \geq p(q + r) \leq q + r$$

Karena $p(q + r) = q + r$, maka $q \leq pr$, $q + r \leq pr + r = r \leq q + r$.

Akibatnya $r = q + r$ dan $p(q + r) = pr = q + r$ komparabel dengan (1), dan berakibat:

$$p(q + r) \leq q + pr$$

Karena $p(q+r) = q+r$, maka $p \geq q + rpr \geq (q+r)r = r \geq pr$, akibatnya $r = pr$ dan $q + pr = q + r = p(q+r)$ komparabel dengan (1), akibatnya adalah

$$pr(q+r) \leq q+r$$

Sekarang perhatikan rantai ini

$$pr \leq r \leq q+r$$

Baru saja dilihat bahwa $r = q + r$ komparabel dengan (1) dan dengan demikian pula halnya $r = pr$. Dengan demikian dalam L mempunyai dua rantai yang berterminal sama

$pr \leq q + r \geq p(q+r) \leq q + r$......................................(2)

$pr \leq r \leq q + r$..(3)

Karena r terletak dirantai (2), maka $p(q+r) \leq r$, sehingga

$p(q+r) = pp(q+r) \leq pr$ komparabel dengan (2), sedangkan jika $p(q+r) > r$, maka $p \geq p(q+r)$ sehingga $pr = r$ komparabel dengan (3).

Teorema 2.26

Suatu latis adalah modular jika dan hanya jika untuk unsur-unsur a, b, c ketiga relasi $a \geq b, ac = bc, a + c = b + c$

Bersama-sama mengakibatkan $a = b$ (Sukardjono,2002,123)

Teorema 2.27

Setiap bayangan homorfhisma H dari latis modular L adalah modular. (sukardjono,2002:124)

Teorema 2.28

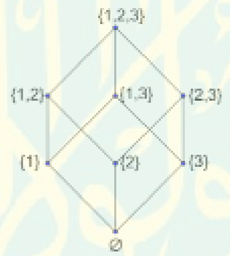
Hasil kali $L \times M$ dari latis L dan M adalah modular, jika dan hanya jika L dan M adalah modular. (sukardjono,2002:125)

2.4.2 Diagram Latis

Secara konvensinal suatu poset disajikan oleh suatu diagram yang biasa dikenal dengan diagram hasse atau diagram latis sebagai berikut: unsur-unsur disajikan oleh lingkaran kecil atau titik-titik. Jika b menutup a, lingkaran yang menyajikan a dihubungkan ke lingkaran yang menyajikan b oleh garis yang menanjak (Sukardjono, 2002:29).

Contoh**:**

Misal latis$(L, \leq)$, dengan $V = \{1,2,3\}$. Perhatikan relasi himpunan bagian $(\subseteq)$ yang didefinisikan sebagai: $\big(\forall S, T \in \mathcal{P}(V)\big), S \subseteq T \Leftrightarrow \big((\forall x)x \in S \Rightarrow x \in T\big)$ Gambar diagram $\mathcal{P}(V)$ yang didefinisikan terurut parsial oleh relasi '$\leq$' adalah sebagai berikut:



Gambar 2.2 Diagram Latis $\boldsymbol{\mathcal{P}(V)}$

Dapat diperiksa dalam setiap diagram latis himpunan kuasa, banyaknya unsur yang terletak pada baris yang sama di atas unsur yang terendah selalu $C(n,r)$, dengan demikian tabel berbentuk segitiga dari $C(n,r)$ yang terkait dengan nama Pascal (Segitiga Pascal) untuk setiap diagram distribusi unsur-unsur pada berbagai tingkatan adalah sebagai berikut.

Tabel 2.1 Segitiga Paskal

n \ r	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							

1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

(Sumber: Sukardjono: 48)

Contoh:

Misal pada diagram latis $\mathcal{P}(V)$ pada Gambar 2.1 maka,

1. $C(3,0)$ atau 1 himpunan pada baris terendah atau pertama
2. $C(3,1)$ atau 3 himpunan pada baris kedua
3. $C(3,2)$ atau 3 himpunan pada baris ketiga
4. $C(3,3)$ atau 1 himpunan pada baris keempat

Definisi 2.14

Kombinasi adalah himpunan bagian yang elemen-elemennya telah dipilih dari unsur elemen yang berbeda. Suatu kombinasi$r$ adalah himpunan bagian r dari suatuhimpunan n. Banyaknyakombinasi $r$dari himpunan n dilambangkan dengan $C(n,r)$ atau dengan $\binom{n}{r}$ yang diartikan sebagai "$n$dipilih$r$" dan dirumuskan sebagai:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}, (0 \leq r \leq n)$$ (Webb, 2014: 54).

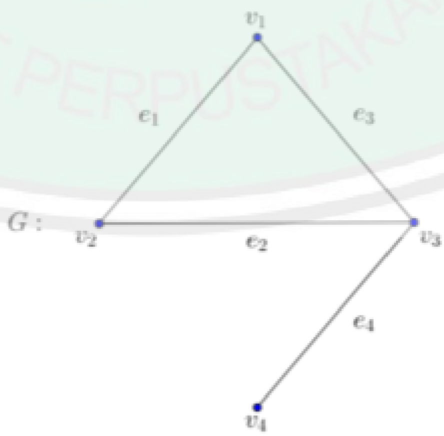
2.5 Graf

Definisi 2.15

Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik yang berbeda di V yang disebut sebagai sisi. Untuk menunjukkan bahwa graf G memiliki himpunan titik V dan himpunan sisi E, ditulis$G = (V, E)$. Untuk menekankan bahwa V dan E adalah himpunan titik dan himpunan sisi dari graf G, sering ditulis V sebagai $V(G)$ dan E sebagai $E(G)$. Setiap sisi (u, v) pada G biasanya dinotasikan dengan uv atau vu. Banyaknya titik pada graf G disebut order dari G dan banyaknya sisi pada graf G disebut ukuran dari G. Biasanya order dari graf G dinotasikan sebagai p dan ukuran dari graf G dinotasikan sebagai q. Suatu graf dengan order 1 disebut graf trivial.Suatu graf dengan ukuran 0 disebut graf kosong (Chartrand, dkk, 2016:4).

Contoh:

Graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_1v_3, v_3v_4\}$yang ditunjukkan pada Gambar 2.2, dapat pula dituliskan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ dengan $e_1 = (v_1v_2), e_2 = (v_2v_3), e_3 = (v_1v_3)$, dan $e_4 = (v_3v_4)$. Graf G tersebut mempunyai order$p = 4$ dan ukuran $q = 4$.



Gambar 2.3 Graf ***G***

2.5.1 Terhubung Langsung dan Terkait Langsung

Definisi 2.16

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*), v dan e serta u dan e disebut terkait langsung (*incident*), dan titik u disebut ujung dari e. Dua sisi berbeda (u, v) dan (v, w) disebut terhubung langsung jika terkait langsung pada satu titik yang sama (Abdussakir, dkk, 2009:6).

Contoh:

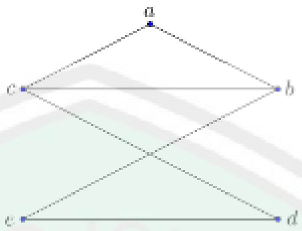
Berdasarkan Gambar 2.2, titik v_1 dan v_2 terhubung langsung di G, sementara titik v_1 dan v_4 tidak terhubung langsung. Sisi $e_1$terkait langsung dengan titik v_1 dan v_2, namun tidak terkait langsung dengan titik $v_3$dan v_4. Sisi e_1 dan e_2 terhubung langsung di G, karena terkait langsung pada satu titik yang sama yaitu titik v_2.

2.5.2 Derajat Titik

Definisi 2.17

Derajat titik v dari graf G adalah banyaknya titik di G yang terhubung langsung dengan titik v. Oleh karena itu, derajat dari v merupakan banyaknya titik pada persekitarannya $N(v)$. Derajat titik dinotasikan dengan $\deg_G v$ atau lebih singkatnya $\deg v$. Dengan demikian, $\deg v = |N(v)|$. Suatu titik yang berderajat 0 disebut titik terasing dan titik yang berderajat 1 disebut titik ujung atau daun. Suatu sisi yang insiden dengan titik ujung disebut sisi pendan. Derajat terbesar dari semua titik di G disebut derajat maksimum dari G dan dinotasikan dengan $\Delta(G)$. Derajat minimum dari G dinotasikan dengan $\delta(G)$. Sehingga, jika v

adalah titik dari graf G dengan order n, maka $0 \leq \delta(G) \leq \deg v \leq \Delta(G) \leq n - 1$. Untuk graf F pada Gambar 2.3, $deg_F a = \deg_F d = \deg_F e = 2$ dan $deg_F b = deg_F c = 3$. Oleh karena itu, $\delta(G) = 2$ dan $\Delta(G) = 3$. (Chartrand, dkk, 2016:5).

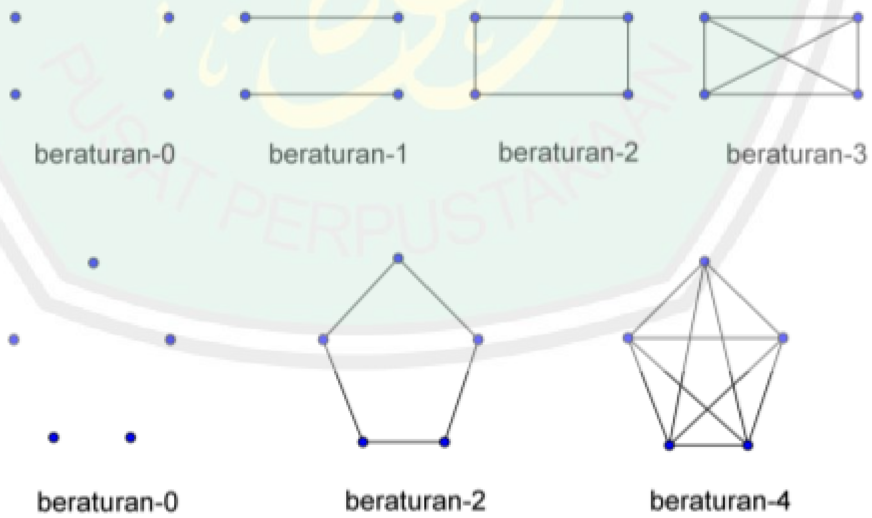


Gambar 2.4 Graf ***F***

2.5.3 Graf Beraturan

Definisi 2.18

Graf G adalah graf beraturan jika titik di G memiliki derajat titik yang sama dan disebut beraturan-r jika derajat titiknya sebanyak r (Chartrand, dkk, 2016:12). Berikut ini adalah contoh dari graf beraturan.



Gambar 2.5 Graf Beraturan

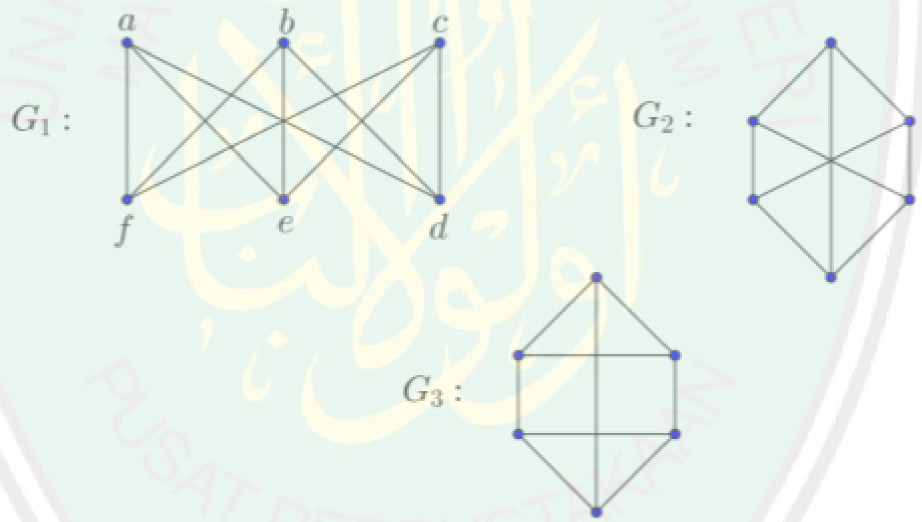
2.5.4 Graf Isomorfik dan Graf Identik

Definisi 2.19

Misalkan G dan H graf. Graf G disebut isomorfik dengan graf H, jika terdapat fungsi ϕ yang bersifat bijektif dari $V(G)$ ke $V(H)$, yang disebut isomorfisme, sedemikian hingga $uv \in E(G)$ jika dan hanya jika $\phi(u)\phi(v) \in E(H)$. Jika graf G isomorfik dengan graf H, maka dinotasikan dengan $G \cong H$ (Abdussakir, dkk, 2009:24).

Contoh:

Pada Gambar 2.6 berikut, graf G_1, G_2, dan G_3 adalah graf dengan order 6 dan ukuran 9.



Gambar 2.6 Graf Isomorfik

Pada gambar di atas, G_1 dan G_2 adalah isomorfik. Sebagai contoh, fungsi ϕ dari $V(G_1)$ ke $V(G_2)$ yang didefinisikan dengan:

$\phi(a) = u$, $\phi(b) = w$, $\phi(c) = y$, $\phi(d) = v$, $\phi(e) = x$, $\phi(f) = z$ adalah isomorfisme. Pada sisi lain, G_1 dan G_3 tidak isomorfik. Pada G_3 terdapat 3 titik yang saling terhubung langsung $(o, p, q$ atau $s, t, r)$, tetapi pada G_1 tidak ada. Tentu saja, G_2 tidak isomorfik dengan G_3.

Untuk mengecek dua graf isomorfik atau tidak, terkadang diperlukan banyak waktu untuk melakukannya. Berikut diberikan beberapa sifat yang mudah dicek untuk menentukan dua graf isomorfik atau tidak. Jika dua graf isomorfik, maka akan dipenuhi sifat-sifat berikut:

a. Keduanya mempunyai order yang sama.

b. Keduanya mempunyai ukuran yang sama.

Keduanya mempunyai banyak titik berderajat i yang sama, untuk $i \in \mathbb{N}$ (Abdussakir, dkk, 2009:26).

Definisi 2.20

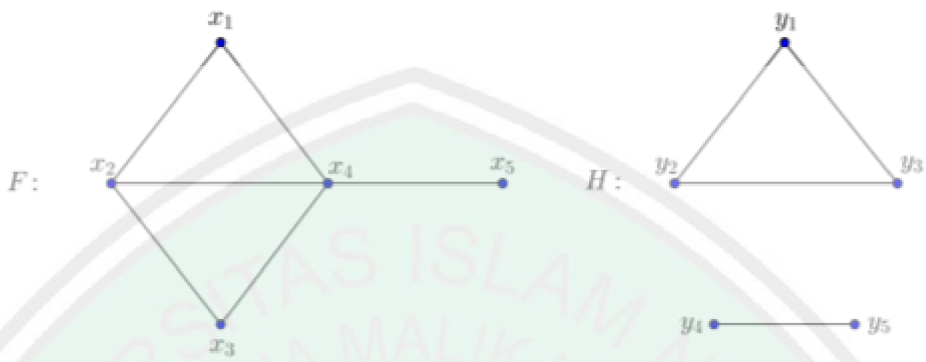
Dua graf G dan H disebut identik, dinotasikan dengan $G = H$, jika $V(G) = V(H)$ dan $E(G) = E(H)$. Dengan kata lain, graf G identik dengan H jika keduanya memuat himpunan titik yang sama dan memuat himpunan sisi yang sama. Jika $G = H$, maka jelaslah $G \cong H$. Di lain pihak, jika $G \cong H$, maka belum tentu $G = H$ (Abdussakir, dkk, 2009:27). Pada Gambar 2.6, ternyata G_1dan G_2 tidak identik, meskipun $V(G_1) = V(G_2)$ dan $G_1 \cong G_2$ sebab $ab \in E(G_2)$ tetapi $ab \notin E(G_1)$.

2.5.5 Graf Terhubung

Definisi 2.21

Misalkan u dan v adalah titik berbeda pada graf G. Titik u dan v dikatakan terhubung (*connected*) jika untuk setiap titik u dan v yang berbeda di G terhubung. Dengan kata lain, suatu graf G dikatakan terhubung (*connected*) jika untuk setiap titik u dan v yang berbeda di G terdapat lintasan u-v di G. Sebaliknya jika ada dua titik u dan v di G tetapi tidak ada lintasan u-v di G, maka

G dikatakan tak terhubung (*disconnected*) (Abdussakir, dkk, 2009:56). Graf F pada Gambar 2.8 adalah graf terhubung sedangkan graf H adalah graf tidak terhubung.



Gambar 2.7 Graf Terhubung ***F*** dan Graf Tidak Terhubung ***H***

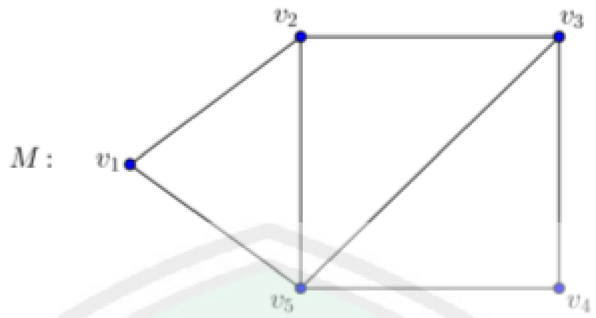
2.5.6 Jarak pada Graf

Definisi 2.22

Jika u dan v adalah titik yang berbeda pada graf terhubung G, maka terdapat suatu lintasan u-v di G. Sehingga dapat jadi terdapat beberapa lintasan u-v di G dengan kemungkinan panjang yang berbeda. Jarak $d_G(u,v)$ dari titik u ke titik v pada graf terhubung G merupakan panjang terkecil dari suatu lintasan u-v di G. Jarak dari titik u ke titik v pada suatu graf G dinotasikan dengan $d(u,v)$. Suatu lintasan u-v dari panjang $d(u,v)$ disebut geodesik u-v. (Chartrand, dkk, 2016:44). Jumlah jarak yang dinotasikan $D(u)$ merupakan jumlah jarak antara titik u dan semua titik dari graf G (Padmapriya dan Mathad, 2017:51). Jumlah jarak dari titik u pada suatu graf G didefinisikan sebagai:

$$D(u) = \sum_{v \in V(G)} d(u,v) \text{(Ilic, dkk, 2011:590).}$$

Contoh:



Gambar 2.8 Graf ***M***

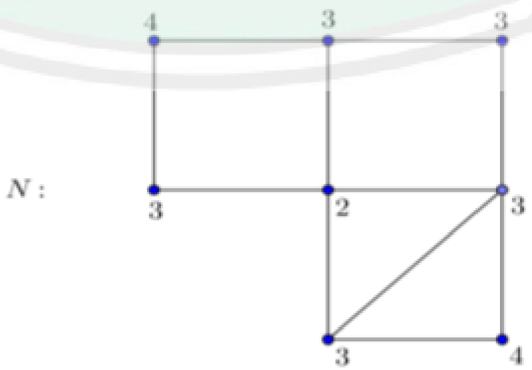
Pada graf M diperoleh bahwa $d(v_1, v_2) = 1$ karena panjang terkecil dari lintasan v_1-v_2 adalah satu. Begitu juga dengan $d(v_1, v_5) = 1$, $d(v_1, v_3) = d(v_1, v_3) = 2$. $d(v_1, v_3) = 2$ karena panjang terkecil lintasan v_1-v_3 adalah dua.

$$D(v_1) = d(v_1, v_2) + d(v_1, v_3) + d(v_1, v_4) + d(v_1, v_5) = 6$$

2.5.7 Eksentrisitas Suatu Titik

Definisi 2.23

Eksentrisitas titik v pada suatu graf terhubung G disimbolkan $e(v)$ adalah jarak terbesar antara titik v dengan sebarang titik pada graf G. Eksentrisitas titik v didefinisikan sebagai $e(v) = \max\{d(u, v) | \, u \in V(G)\}$ (Padmapriya dan Mathad, 2017:51).



Gambar 2.9 Eksentrisitas Titik di Graf ***N***

2.6 Pelabelan

Definisi 2.29

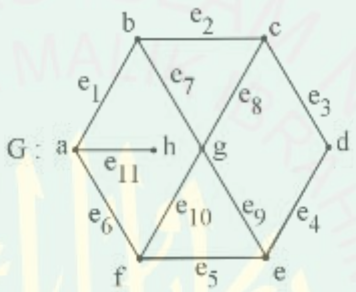
Pelabelan pada suatu graf adalah pemetaan yang memetakan unsur-unsur pada suatu graf ke bilangan-bilangan (biasanya ke bilangan bulat positif atau bilangan bulat negatif) (W.D Wallis dkk, 2000:2).

Ada beberapa pelabelan dalam graf, diantaranya pelabelan titik, pelabelan sisi, pelabelan total. Pelabelan titik adalah pemetaan yang memetakan titik-titik pada suatu graf ke beberapa bilangan. Pelabelan sisi adalah pemetaan yang memetakan sisi-sisi pada suatu graf ke beberapa bilangan.

Definisi 2.24

Pelabelan pada suatu graf adalah suatu pemetaan satu-satu yang memetakan himpunan dari elemen-elemen graf ke himpunan bilangan atau sebarang pemetaan (fungsi) yang memasangkan unsur-unsur graf(titik atau sisi) dengan bilangan (biasanya bilangan bulat). Jika domain dari fungsi adalah titik maka pelabelan disebut pelabelan titik (*vertex labellings*). Jika domain dari fungsi adalah sisi maka pelabelan disebut pelabelan sisi(*edge labelling*) dan jika domainnya adalah titik dan sisi, maka disebut pelabelan total (*total labelling*) (W.D Wallis dkk, 2000:2).

Pelabelan titik mrupakan fungsi atau pemetaan dimana domaininya adalah titik. Pada pelabelan titik harus metahui derajat titik. Jika v adalah titik pada graf G, maka himpunan semua titik di G yang menghubungkan langsung dengan v disebut lingkungan dari v dan ditulis $N_G(v)$. Derajat dari titik v di graf G, ditulis $deg_G(v)$, adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung dengan v. Dalam konteks pembicaraan hanya terdapat satu graf G, maka tulisan $deg_G(v)$disingkat menjadi $deg(v)$ dan $N_G(v)$ disingkat menjadi $N(v)$. Jika dikaitkan dengan konsep lingkungan, derajat titik v di graf G adalah banyaknya anggota dalam $N(v)$. Jadi, $\deg(v) = |N_G(v)|$. Titik yang berderajat 0 disebut titik terasing atau titik terisolasi. Titik yang berderajat 1 disebut titik ujung atau titik akhir. Titik yang berderajat genap disebut titik genap dan titik yang berderajat ganjil disebut titik ganjil. Derajat maksium titik di G dilambangkan $D(G)$ dan derajat titik minimum di G dilambangkan dengan $d(G)$ (Abdussakir dkk, 2009:9).



Gambar 2.10 Label Graf ***G***

Perhatikan Gambar 2.10 yang mempunyai $V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}\}$. Berdasarkan gambar tersebut diperoleh bahwa: $N(a) = \{b, f, h\}$, $N(b) = \{a, c, g\}$, $N(c) = \{b, d, g\}$, $N(d) = \{c, e\}$, $N(g) = \{b, c, f, e\}$ dan sebagainya. Dengan demikian $\deg(a) = 3$, $\deg(b) = 3, \deg(c) = 3, \deg(d) = 2, \deg(g) = 4$ dan sebagainya. Diperoleh bahwa derajat maksimum di G adalah $D(G) = 4$ dan derajat minimum di G adalah $d(G) = 2$.

Kenyataaannya bahwa jumlah derajat semua titik yang hasilnya sama dengan dua kali banyak sisinya ini berlaku secara umum untuk semua graf. Hubungan antara jumlah derajat semua titik dalam suatu graf G dengan banyaknya sisi, yaitu q adalah

$$\sum_{v \in G} \deg(v) = 2q$$

Disebut sebagai "Teorema Pertama dalam Teori Graf" yang dinyatakan dalam Teorema berikut (Abdussakir, dkk, 2009:11).

Teorema 2.30

Misalkan G graf dengan order p dan ukuran q, dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_p\}$ maka

$$\sum_{i=1}^{p} \deg(v_i) = 2p$$

Bukti:

Setiap menghitung derajat suatu titik di G, maka suatu sisi dihitung 1 kali. Karena setiap sisi meghubungkan dua titik berbeda maka ketika menghitung derajat semua titik, sisi akan terhitung 2 kali. Dengan demikian diperoleh bahwa jumlah semua derajat di G sama dengan dua kali jumlah sisi di G. Terbukti bahwa

$$\sum_{i=1}^{p} \deg(v_i) = 2p$$

Berdasarkan hubungan tersebut, maka banyaknya titik ganjil dalam suatu graf selalu genap. Hal ini dinyatakan dalam Teorema berikut.

Teorema 2.31

Banyaknya titik ganjil dalam suatu graf selalu genap (Chartrand dan Lesniak, 1986:6 & Abdussakir, dkk, 2009:12)

Bukti:

Misalkan G adalah graf. Misalkan X adalah himpunan titik genap di G dan Y adalah himpunan titik ganjil di G. Maka

$$\sum_{v \in G} \deg(v) = \sum_{v \in X} \deg(v) + \sum_{v \in Y} \deg(v) = 2q$$

Karena X adalah himpunan titik genap maka $\sum_{v \in X} \deg(v)$ adalah genap. Karena $2q$ adalah bilangan genap dan $\sum_{v \in X} \deg(v)$ juga genap maka $\sum_{v \in Y} \deg(v)$ haruslah bilangan genap. Dan karena Y himpunan titik ganjil dan $\sum_{v \in Y} \deg(v)$ adalah bilangan genap, maka banyaknya titik di Y haruslah genap, sebab jika banyak titik di Y ganjil maka $\sum_{v \in Y} \deg(v)$ adalah ganjil. Terbukti bahwa banyaknya titik ganjil di G adalah genap.

2.7 Teorema *Dilworth*

Pada bagian ini akan dibahas mengenai teori teorema *dilworth*. Dari semua teori latis, munkin yang paling terkenal adalah teorema *dilworth* untuk pemetaan sebuah poset atau latis. Selain itu juga akan dibahas definisi-definisi dan teroema-teorema khusus teorema *dilworth* pada latis.

Teorema 2.32

Setiap latis P terbatas adalah gabungan dari rantai berukuran(P) (Gratzer, 2010:402).

Bukti: dimisalkan $a, b \in P \cup P$ maka $a \leq b$ (Definisi 2.10)

Terbukti bahwa latis P adalah $a \cup b$ dimana $a \leq b$ (Definisi 2.10)

Definisi 2.33 *Dilworth* tertutup

Jika L adalah latis terbatas, berlaku :

i. $cov_k L = \{a \in L | a \; penutup \; elemen \; k\}$

j. $cov^k L = \{a \in L | a \; tertutup \; oleh \; elemen \; k\}$

Dinotasikan bahwa $cov_0 L = \{0\}$, $cov^o L = \{1\}$, $cov_1 L =$ Ji L, dan $cov^1 L =$ Mi L.

(Gratzer, 2010:402)

Teorema 2.33

Diberikan k bilang bulat tidak negatif dan L latismodular terbatas. Maka,

$$|cov_k L| = |cov^k L|$$

(Gratzer, 2010:402)

Bukti:

Untuk elemen a di latis terbatas, diberikan a^+yang dioperasikan dengan operasi *join* dari semua elemen tertutup a, dan diberikan a_+ dioperasikan dengan operasi *meet* dari semua elemen tertutup a. Jika a berlaku operasi Ji maka $a^+ = a^*$ (Definisi 3.3). Jika L adalah modular, maka interval $[a, a^+]$ dan $[a_+, a]$ adalah complemen modular latis.

$|cov_k L| = |cov^k L|$ (Teorema2.24)

Ji L = Mi L (Definisi 3.9)

Dimana interval $a, \dots, a^+$, Ji L = $a \vee, \dots, \vee\, a^+$

Maka $a = a^1, \dots, a = a^+$ (Definisi 3.3)

Untuk interval $a_+, \dots, a$, Mi L= $a_+ \wedge, \dots, \wedge a$

Maka $a_+ = a, \dots, a_1 = a$ (Definisi 3.3)

Jadi, $|cov_k L| = |cov^k L|$ adalah latis modular atau modular latis.

Teorema 2.34

Diberikan k bilang bulat tidak negatif dan L latismodular terbatas. Maka angka elemen x dimana panjang$(x^+) -$ panjang$(x) = k$ sama dengan angka elemen y dimana panjang$(x) -$ panjang$(y_+) = k$.

Apabila $k = 1$, konjektur yang sesuai dari Teorema 464, terdapat suatu operasi bijektif

$$\varphi : \{0\} \cup \mathrm{Ji}L \to \{1\} \cup \mathrm{Mi}L$$

Dimana $j \leq \varphi(j)$untuk semua $j \in \{0\} \cup \mathrm{Ji}L$. (Gratzer, 2010:403)

2.8 Kajian Agama Tentang Pelabelan Latis

Aljabar merupakan cabang dari matematika. Aljabar terbagi menjadi dua, yaitu aljabar abstrak dan aljabar linier. Ilmu aljabar merupakan salah satu cabang matematika yang penting dan memiliki banyak manfaat, karena teori-teorinya dapat diterapkan untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari. Saat ini ilmu aljabar semakin berkembang pesat, karena berhubungan dengan himpunan, poset, latis, pelabelan latis, dan sifat-sifat struktur di dalamnya.

Pelabelan latis adalah suatu pemetaan yang memetakan unsur-unsur pada suatu latis ke bilangan-bilangan dan biasanya ke bilangan bulat positif atau bilangan bulat negatif. Suatu pemetaan latis terhubung dengan menguhubungkan titik atau mewarnai sebuah titik-titiknya dan jika dimisalkan suatu titik adalah manusia, dimana manusia saling berhubungan dan berkumul membentuk suatu kelompok (latis adalah himpunan tak kosong dengan operasi biner dan aksioma aksioma yang berlaku). Keterkaitkan dalam kehidupan sehari-hari, didalam al-qur'an kajian tentang hubungan sangat banyak. Hubungan kepada sang pencipta,hubungan dengan sesama manusia, dan hubungan dengan makhluk ciptaan-Nya.

Didalam kajian tentang hubungan antara manusia dengan manusia yang lain dikatakan saling bersilaturahmi. Salah satu ayat dalam alqur'an surat an-Nisa ayat 1 sebagai berikut:

يَا أَيُّهَا النَّاسُ اتَّقُوا رَبَّكُمُ الَّذِي خَلَقَكُمْ مِنْ نَفْسٍ وَاحِدَةٍ وَخَلَقَ مِنْهَا زَوْجَهَا وَبَثَّ مِنْهُمَا رِجَالًا كَثِيرًا وَنِسَاءً ۚ
وَاتَّقُوا اللَّهَ الَّذِي تَسَاءَلُونَ بِهِ وَالْأَرْحَامَ ۚ إِنَّاللَّهَكَانَعَلَيْكُمْرَقِيبًا﴿النساء:١﴾

Artinya:

"Hai sekalian manusia, bertakwalah kepada Tuhan-mu yang telah menciptakan kamu dari seorang diri, dan dari padanya Allah menciptakan isterinya; dan dari pada keduanya Allah memperkembang biakkan laki-laki dan perempuan yang

banyak. Dan bertakwalah kepada Allah yang dengan (mempergunakan) nama-Nya kamu saling meminta satu sama lain, dan (peliharalah) hubungan silaturrahim. Sesungguhnya Allah selalu menjaga dan mengawasi kamu"(QS. An-Nisa/4 :1).

Salah satu ayat dalam alqur'an surat an-Nisa ayat 1 yang dijelaskan bahwa manusia yang berbangsa bangsa, bersuku-suku, dan mempuanyai agama yang berbeda agar mereka saling mengenal satu dengan yang lain. Artinya dijelaskan diatas hubungan antar manusia (*hablum min al-nas)* menjadikan prinsip dasar untuk menjalani kehidupan dan menjaga keseimbangan dengan menjalin hubungan baik antar umat manusia.

BAB III
HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas pelabelan graf dari latis menggunakan Teorema *dilworth*'s yaitu graf dari latis bilangan bulat positif non prima. Untuk pembahasan graf dari latis di antaranya dengan menentukan bentuk umum graf dari latis faktor bilangan bulat positif non prima.

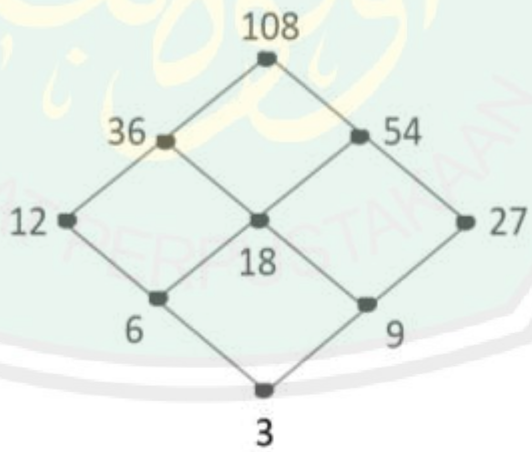
3.1 Pelabelan Latis Menggunakan Metode *Dilworth*

3.1.1 Menentukan Graf dari Latis Faktor Bilangan Bulat Positif Non Prima (BBPNP) yang berasal dari Diagram Latis

Untuk menentukan bentuk umum graf dari latis faktor bilangan bulat positif non prima, terlebih dahulu diberikan contoh-contoh graf dari latis faktor bilangan bulat positif non-prima berikut:

Contoh 3.1

Latis faktor 108 dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.1 Graf dari Latis ***L*** faktor BBPNP**108**

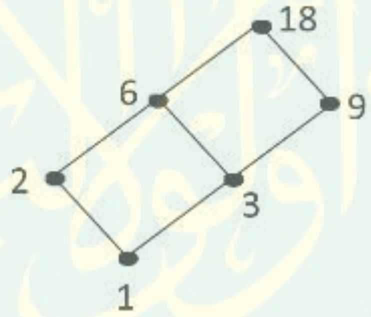
Pada penelitian ini latis faktor dari n yang disimbolkan $F(n)$, sehingga latis diatas disimbolkan sebagai $(F(108), \leq, +, \times)$, dimana kita mendefinisikan

$F(108) = \{108, \dots, 3\}$ dan untuk setiap $a, b \ \in F(108)$, $a \leq b \Leftrightarrow a$ adalah faktor dari b. Didefinikan penjumlahan $a + b =$ kpk (a, b) dan perhatikan ab =fpb (a, b) untuk setiap $a, b \in F(108)$.

Diagram latis terdiri dari titik dan garis, dimana titik merupakan anggota dari latis $F(n)$ dan garis adalah pengaitannya. Titik dan garis dapat dipandang sebagai graf dengan tunduk terhadap definisi latis. Selanjutnya graf ini diberi label dengan tunduk terhadap definisi latis dan defiisi pelabelan pada graf yang secaraspesifik mengikuti Teorema *dilworth*.

Contoh 3.2

Latis faktor 18, dengan operasi yang serupa dengan contoh sebelumnya, digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.2 Graf dari Latis $\boldsymbol{L}$ faktor BBPNP **18**

Misalkan n adalah bilangan bulat positif non-prima yang habis dibagi oleh tepat 2 buah bilangan prima p dan q. Maka, kita dapat mendefinikan latis faktor n,$(F(n), \leq, +, \ \times)$, sebagai berikut:

Definisi 3.1

Misalkan n adalah bilangan bulat positif non-primayang habis dibagi oleh tepat 2 buah bilangan prima p dan q, maka latis faktor n, $(F(n), \ +, \ \times)$, adalah latis yang dibentuk oleh himpunan

$$F(n) = \{x \in \mathbb{Z}^+ : kpk(x, n) = n\}$$

Dan operasi pada latis ini adalah $+$ dan $\times$ yang diDefinisikan oleh:

$$a + b = kpk(a, b)$$

$$ab = fpb(a, b)$$

Pada latis ini, $a \leq b$ jika dan hanya jika $a \in F(b)$.

Untuk menggambar latis faktor n sebagai suatu graf, diberikan beberapa proposisi dan teorema berikut:

Definisi 3.2:

Untuk $m, n \in \mathbb{Z}^+$, dan $x \in F(n)$, didefinisikan secara rekursif himpunan faktor tingkat-m dari x sebagai berikut:

$$F_0(x) = \{x\}$$

$$F_{m+1}(x) = \left\{ y \in F(x)\backslash\{x\} : y \in F(z)\backslash\{z\} \Rightarrow \left(z \in \bigcup_{k=0}^{m} F_k(x) \text{ atau } z \notin F(x) \right) \right\}$$

Klaim 3.3:

Kardinalitas himpunan $F_1(x)$ menyatakan banyaknya cabang utama di bawah x pada graf latis $F(n)$.

Bukti:

Cabang utama dari x adalah faktor maksimal dari x, yaitu himpunan $\{y \in F(x)\{x\} : w \in F(x)$ yang berakibat $(w = x \oplus F(y))$.

Untuk y yang demikian, maka apabila$x \in F(x)$ dan$y \in F(z)\backslash\{z\}$ maka $z = x$, yaitu

$$z \in \bigcup_{k=0}^{0} F_0(x)$$

Sehingga cabang utama dalam x adalah $F_1(x)$. (Terbukti)

Definisi 3.4:

Untuk $n \in \mathbb{Z}^+$, dan $x \in F(n)$, orde faktor atau tingkat faktor dari suatu elemen $x \in F(n)$ dinotasikan sebagai $\phi(x)$ dan diefinisikan sebagai berikut.

$$\phi(x) = \sum_m \chi_{F_m(n)}(x) \cdot k$$

di mana $\chi_A(x)$ adalah fungsi karakteristik yang didefinisikan oleh:

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & ;\text{jika } x \in A \\ 0 & ;\text{jika } x \notin A \end{cases}$$

Selanjutnya, untuk mempermudah dalam menentukan dan membuktikan pola dari graf latis $F(n)$ secara umum, penulis mendefinisikan:

Lemma 3.5:

Untuk $n \in \mathbb{Z}^+$, habis dibagi oleh tepat m bilangan prima berbeda $p_1, \dots, p_m$, maka berlaku:

a. $F_1(x) \neq \emptyset$ Untuk setiap $x \in F(n)\backslash\{1\}$, dan $F_1(1) = \emptyset$,

b. Jika n habis dibagi oleh tepat 2 buah bilangan prima, maka,

$$|F_1(x)| = \begin{cases} 1; & x \in \text{Ji } F(n) \\ 2; & x \notin \text{Ji } F(n) \cup \{1\} \\ 0; & x = 1 \end{cases}$$

Bukti:

a. Jelas bahwa 1 tidak memiliki faktor selain dirinya sendiri, sehingga $F_1(1) = \emptyset$. Selanjutnya, asumsikan $x \in F(n)\backslash\{1\}$, maka $x = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_m^{r_m}$ untuk suatu $r_1, \dots, r_m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, di mana r_i tidak seluruhnya nol. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $r_1 > 0$. Ambil $y = p_1^{r_1 - 1} p_2^{r_2} \dots p_m^{r_m}$. Apabila $y \in F(z)\backslash\{z\}$, maka haruslah $z = p_1^{r_1 - 1 + s_1} p_2^{r_2 + s_2} \dots p_m^{r_m + s_m} q$ untuk suatu $s_1, \dots, s_m, q \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ di mana $0 < q \nmid n$, dan s_i tidak seluruhnya nol.

Apabila $q > 1$, maka jelas bahwa $z \nmid n$, sehingga $z \notin F(n)$, yang mengakibatkan $z \notin F(x)$. Dengan demikian, misalkan $q = 1$. Tinjau 3 kasus berikut:

1. Kasus 1: $(s_1 = 0)$ Apabila $s_1 = 0$, maka haruslah terdapat $s_j \in \{s_2, \ldots, s_m\}$ sedmikian sehingga $s_j > 0$, yang mengakibatkan $z = p_1^{r_1 - 1} p_2^{r_2} \ldots p_j^{r_j + s_j} \ldots p_m^{r_m} \notin F(x)$.
2. Kasus 2: $(s_1 = 1, s_2 = \cdots = s_m = 0)$ apabila $s_1 = 1$, dan $s_2 = \cdots = s_m = 0$, maka $z = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots p_m^{r_m} = x$, sehingga $z \in F_0(x) = \bigcup_{k=0}^{0} F_k(x)$.
3. Kasus 3: $(s_1 = 1, s_j > 0)$ apabila $s_1 = 1$, dan $s_j > 0$, untuk suatu $j \in \{1, \ldots, m\}$, maka $z = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots p_j^{r_j + s_j} \ldots p_m^{r_m} = x p_j^{s_j}$, sehingga $z \notin F(x)$.
4. Kasus 4: $(s_1 > 1)$ apabila $s_1 > 1$, , maka $z = p_1^{r_1 + s_1} p_2^{r_2 + s_2} \ldots p_m^{r_m + s_m} = x p_1^{s_1} \ldots p_m^{s_m}$, sehingga $z \notin F(x)$.

Dengan demikian, pada seluruh kasus, jelas bahwa $y \in F(z) \backslash \{z\}$ mengakibatkan $z \in \bigcup_{k=0}^{m} F_k(x)$ atau atau $z \notin F(x)$. Jadi disimpulkan bahwa $y \in F_1(x)$. Sehingga $F_1(x) \neq \emptyset$.

b. Untuk $|F_1(x)| = 1$ jika $x \in Ji\ F(n)$

Misalkan n tepat dibagi oleh 2 bilangan prima p, q. Misalkan $x \in Ji\ F(n)$, dan $x \neq 0$. Ambil sebarang $y, z \in F(n)$ sedemikian sehingga $y \vee z = kpk\{y, z\} = x$. Jelas bahwa y dan z berbentuk $y = p^{l_1} q^{l_2}, z = p^{r_1} q^{r_2}$.

Sehingga $y \vee z = kpk\{y, z\}$

$$= kpk\{p^{l_1} q^{l_2}, p^{r_1} q^{r_2}\}$$

$$= p^{max\{p^{l_1} q^{l_2}\}} q^{\,max\{p^{r_1} q^{r_2}\}}$$

$= x$

Tetapi, karena $x \in Ji\, F(n)$, maka haruslah $y = x$, atau $z = x$. Tanpa mengurangi pengumuman, misalkan $y = x$, maka $p^{max\{p^{l_1}q^{l_2}\}}q^{\,max\{p^{r_1}q^{r_2}\}} = p^{l_1}q^{l_2}$, sehingga $\max\{l_1, r_1\} = L_1$ daan $\max\{l_2, r_2\} = L_2$, yang berarti $l_1 > r_1$ dan $l_2 > r_2$. Sehingga diperoleh $z \in F(y)$. Dengan cara serupa, apabila $x = z$, maka $y \in F(z)$. Dengan demikian, karena y, z adalah sebarang, maka berlaku $\forall\, y, z$ yang memenuhi $y \vee z = kpk\{y, z\} = x$ berlaku $y \in F(z)$ atau $z \in F(y)$.

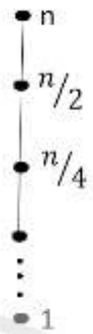
Ambil $y \in F_1(x)$, ambil sebarang $z \in F(x)$, $z \neq y$, maka jelas bahwa (berdasarkan implikasi diatas) $y \in F(z)$ atau $z \in F(y)$. Tetapi $y \in F(z)$ mengakibatkan $y \in F(z)\backslash\{z\} \in F(x)\backslash\{x\}$ yang berarti $y \notin F(z)$. Sehingga haruslah $z \in F(y)\backslash\{y\} \in F(x)\backslash\{x\}$ dengan demikian $z \notin F_1(x)$. Jadi $\forall\, z \in F(x), z \neq y, z \neq x$ berlaku $z \notin F_1(x)$ hanya memiliki 1 anggota, yaitu y. Dengan kata lain $|F_1(x)| = 1$.

Untuk $|F_1(x)| = 2$, jika $x \notin Ji\, F(n) \cup \{1\}$

Misalkan $F_1(x) \neq 2$, karena n hanya terbagi oleh 2 bilangan prima, maka $|F_1(x)| < 2$. Karena $x \neq 1$, maka $|F_1(x)| \neq 0$. Jadi $|F_1(x)| = 1$. Konvers dari pernyataan tersebut adalah jika $x \in Ji\, F(n) \cup \{1\}$, maka $|F_1(x)| \neq 1$. Jadi $|F_1(x)| = 2$.

Proposisi 3.5

Apabila n adalah bilangan BBPNP yang habis dibagi 2 dan tidak habis dibagi oleh bilangan prima lainya, maka graf dari latis faktor n, $(F(n), +, \times)$, berbentuk:



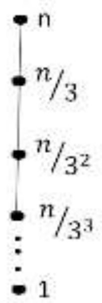
Gambar 3.3 Graf dari Latis $\boldsymbol{F(n)}$, di mana $\boldsymbol{n}$ habis dibagi $\mathbf{2}$

Bukti:

Ambil sebarang $x \in F(n)\backslash\{1\}$, maka dapat ditulis $x = \frac{n}{2^k}$ untuk suatu $k \in \mathbb{Z}^+$. Selanjutnya, berdasarkan lemma 3.5, $|F_1(x)| > 0$. Asumsikan $y = \frac{n}{2^{k_1}} \in F_1(x)$, dan $|F_1(x)| > 1$ maka terdapat $z = \frac{n}{2^{k_2}} \in F_1(x)$, di mana $k_1 \neq k_2$. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $k_1 < k_2$ (kasus $k_1 > k_2$ dibuktikan dengan cara serupa), maka $z \in F(y)\backslash\{y\}$. Tetapi $z \in F_1(x)$, sehingga mengakibatkan $y \in \bigcup_{k=0}^{0} F_k(x) = F_0(x) = \{x\}$ atau $y \notin F(x)$. Karena jelas bahwa $y \notin F(x)$, maka haruslah $y \in \bigcup_{k=0}^{0} F_k(x) = F_0(x) = \{x\}$. Tetapi, hal ini merupakan kontradiksi dengan pernyataan $y \in F_1(x)$. Dengan demikian, maka haruslah $y = z$, sehingga terbukti $|F_1(x)| = 1$ untuk setiap $x \in F(n)\backslash\{1\}$. Dengan demikian, setiap x di $F(n)\backslash\{1\}$ hanya memiliki satu cabang ke bawah sehingga graf latis $F(n)$ berbentuk seperti pada gambar 3.3.

Proposisi 3.7

Apabila n adalah bilangan BBPNP yang habis dibagi bilangan 3 dan tidak habis dibagi oleh bilangan prima lainya, maka graf dari latis faktor n, $(F(n), +, \times)$, berbentuk:



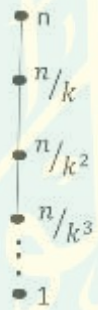
Gambar 3.4 Graf dari Latis $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{n})$ dimana $\boldsymbol{n}$ habis dibagi **3**

Bukti:

Serupa dengan bukti untuk proposisi 3.6.

Proposisi 3.8

Apabila n adalah bilangan BBPNP yang hanya habis dibagi $k$dimana k adalah bilangan prima maka graf dari latis faktor n, $(F(n),\ +,\ \times)$, berbentuk:



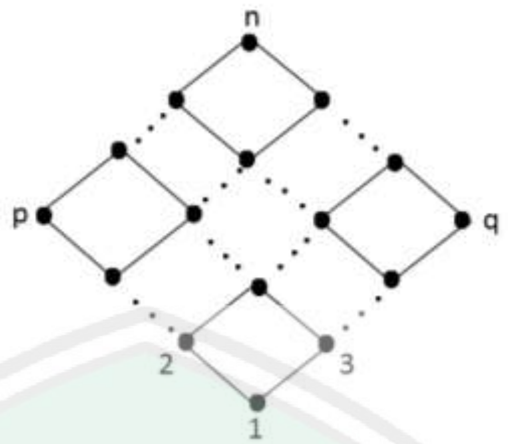
Gambar 3.5 Graf dari Latis $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{n})$ dimana $\boldsymbol{n}$ habis dibagi $\boldsymbol{k}$(bilangan prima)

Bukti:

Serupa dengan bukti untuk proposisi 3.6.

Proposisi 3.5

Apabila n adalah bilangan BBPNP yang hanya habis dibagi 2 dan 3,maka graf dari latis faktor n, $(F(n), +,\ \times)$, berbentuk:



Gambar 3.6 Graf dari Latis $\boldsymbol{F(n)}$ dimana $\boldsymbol{n}$yang habis dibagi**2** bilangan prima (**2** dan **3**)

Dimana$p = \max\{x = 2k: x|n\}$

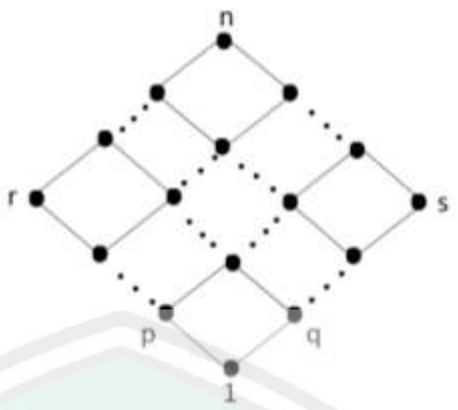
$$q = \max\{x = 3k: x|n\}$$

Bukti:

Ambil sebarang $x = 2^i,\ i = 1, \dots, \log_2 p,$ maka jelas bahwa $x \in$ Ji $F(n)$ sehingga berdasarkan lemma 3.5, $|F_1(x)| = 1$ sehingga x hanya memiliki satu cabang ke bawah yang juga merupakan anggota Ji $F(n)$. Serupa juga untuk $y = 3^j,\ j = 1, \dots, \log_3 q,\ y$ hanya memiliki satu cabang ke bawah yang juga merupakan anggota Ji $F(n)$. Selanjutnya, berdasarkan lemma 3.5, $F_1(1) = \emptyset$ sehingga 1 tidak memiliki cabang ke bawah, dan $|F_1(x)| = 2$ untuk setiap $x \in F(n) \backslash ($Ji $F(n) \cup \{1\})$. Sehingga, untuk x selain dari anggota Ji $F(n)$ dan $\{1\}$, x memiliki dua buah cabang ke bawah. Dengan demikian, berbentuk seperti pada gambar 3.5.

Teorema 3.6

Apabila n adalah bilangan bulat positif non-prima yang habis dibagi oleh tepat 2 buah bilangan prima yang disimbolkan oleh p dan q, maka graf latis dari faktor n yaitu $(F(n),\ +,\ \times)$ berbentuk:



Gambar 3.7 Graf dari Latis $\boldsymbol{F(n)}$dimana $\boldsymbol{n}$ habis dibagi oleh **2** buah bilangan prima$\boldsymbol{p}$ dan $\boldsymbol{q}$

Dimana $r = \max\{x = p^k : x|n,\ k \in \mathbb{Z}^+\}$

$s = \max\{x = q^k : x|n,\ k \in \mathbb{Z}^+\}$

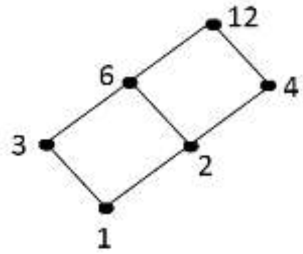
Bukti:

Ambil sebarang $x = p^i,\ i = 1, \dots, \log_p r,$ maka jelas bahwa $x \in$ Ji $F(n)$ sehingga berdasarkan lemma 3.5, $|F_1(x)| = 1$ sehingga x hanya memiliki satu cabang ke bawah yang juga merupakan anggota Ji $F(n)$. Serupa juga untuk $y = q^j,\ j = 1, \dots, \log_q s,\ y$ hanya memiliki satu cabang ke bawah yang juga merupakan anggota Ji $F(n)$. Selanjutnya, berdasarkan lemma 3.5, $F_1(1) = \emptyset$ sehingga 1 tidak memiliki cabang ke bawah, dan $|F_1(x)| = 2$ untuk setiap $x \in F(n) \backslash (\text{Ji } F(n) \cup \{1\})$. Sehingga, untuk x selain dari anggota Ji $F(n)$ dan $\{1\}$, x memiliki dua buah cabang ke bawah. Dengan demikian, berbentuk seperti pada gambar 3.6.

Teorema diatas memberikan gambaran secara umum dari graf latis faktor n dimana n adalah bilangan yang habis dibagi oleh tepat 2 buah bilangan prima.

Contoh 3.3:

Gambarlah graf dari latis $F(12)$



Gambar 3.8 Graf dari Latis $\boldsymbol{F}(\mathbf{12})$

Latis $F(12)$ adalah latis faktor dari bilangan 12, dimana terdapat 6 faktor dari bilangan12 seperti dilukiskan dalam Gambar 3.7 diatas,secara terurut adalah $1, 2, 3, 4, 6, 12$. Latis $(F(12), \leq)$ dibangun oleh himpunan faktor dari 12, yaitu:

$$F(12) = \{1,2,3,4,5,6,12\}$$

3.1.2 Membuktikan Modularitas Latis dari Graf Latis Faktor n

Untuk melabelkan graf latis faktor n dengan menggunakan theorema *dilworth*, sebagaimana dijelaskan pada sub-bab Teorema *dilworth*, syaratuntuk melabeli graf latis menggunakan Teorema *dilworth* adalah latis tersebut harus latis modular.

Latis modular adalah latis istimewa, latis kelas pertama dan berisi hukum modularitas, Definisi-Definisi, Teorema-Teorema, postulat-postulat yang sangat menarik untuk diteliti.

Untuk keperluan bukti membuktikan modularitas latis dari graf latis faktor n, penulis menyusun teorema latis modular dari definisi latis pada buku (sukardjono, 2002) sehingga tampak jelas, keterkaitan membuktikan modularitas latis dari graf latis faktor n. Pada subbab ini kita akan membuktikan bahwa latis faktor n yaitu $(F(n), +, \times)$ adalah latis modular. Berikut adalah teorema yang menyatakan modularitas dari latis faktor n:

Teorema 3.7

Apabila n adalah bilangan bulat positif non-prima yang habis dibagi oleh tepat 2 buah bilangan prima yang disimbolkan oleh p dan q, maka latis dari faktor n yaitu $(F(n),\ +,\ \times)$ adalah latis modular.

Bukti:

Misalkan n adalah bilangan bulat positif non-prima yang habis dibagi oleh tepat 2 buah bilangan prima yang disimbolkan oleh p dan q. Selanjutnya ambil $a, b, c \in F(n)$, sedemikian sehingga $a \geq b$, maka $b \in F(a)$ sehingga

$$kpk(a,b) = a, \qquad \text{dan}, \qquad fpb(a,b) = b$$

Dengan demikian,

$$\begin{aligned} a(b+c) &= fpb(a, b+c) \\ &= fpb\big(a, kpk(b,c)\big) \\ &= kpk(fpb(a,b), fpb(a,c)) \\ &= kpk(b, fpb(a,c)) \\ &= b + fpb(a,c) \\ &= b + ac \end{aligned}$$

Terbukti.

Berdasarkan teorema diatas, terbukti bahwa latis $F(n)$ adalah latis modular. Pada subbab sebelumnya, yaitu pada Teorema 2.24 telah dinyatakan bahwa setiap latis modular$(L, +, \times)$ memenuhi:

$$|cov_k L| = |cov^k L|$$

untuk setiap k bilang bulat tidak negatif.

Karenalatis$(F(n), +, \times)$ adalah latis modular, maka untuk setiap k bilang bulat tidak negatif berlaku:

$$|cov_k F(n)| = |cov^k F(n)|$$

Pada subbab berikut, akan diilustrasikan pelabelan graf dari latis faktor $F(n)$ dengan menggunakan teorema *dilworth*.

3.1.3 Pelabelan pada Graf dari Latis $F(n)$ menggunakan Metode *Dilworth*

Pelabelan graf latis $F(n)$ dengan menggunakan teorema *dilworth* adalah suatu pelabelan $\xi: F(n) \to \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$di mana ξ diDefinisikan oleh

$$\xi(x) = \sum_{k=0}^{n} \chi_{cov^k F(n)}(x) \cdot k$$

Di mana $\chi_A(x)$ adalah fungsi karakteristik yang diDefinisikan oleh

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & ; \text{jika } x \in A \\ 0 & ; \text{jika } x \notin A \end{cases}$$

Untuk memahami bagaimana pelabelan *dilworth* dilakukan, berikut diberikan langkah-langkah atau algoritma untuk melabelkan graf latis faktor $(F(n), +, \times)$:

Algoritma 3.1: Pelabelan *Dilworth*

Langkah 1: Menentukan himpunan-himpunan cover $(cov^k F(n))$ untuk masing-masing $k \in \mathbb{Z}^+$ yang bersesuaian dengan graf latis faktor $(F(n), +, \times)$.

Langkah 2: Menentukan hasi pemetaan dari setaiap x dibawah ξ, dimana x adalah anggota $F(n)$

Langkah 3: Menggambar graf dari latis $F(n)$ yang belum dilabelkan

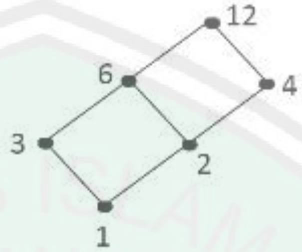
Langkah 4: Memasangkan label pada setiap titik di graf latis $F(n)$ yang sesuai dengan hasil dari langkah 2

Langkah 5: Interpretasi hasil dari pelabelan

Sebagai ilustrasi dari pelabelan metode *dilworth* diatas, diberikan beberapa contoh berikut:

Contoh 3.4

Graf dari latis $F(12)$ adalah sebagi berikut:



Gambar 3.9 Graf dari Latis $\boldsymbol{F}(\mathbf{12})$ yang akan diberi Label dengan Aturan Pemetaan ξ

Penerapkan pelabelan ξ di atas,

Untuk $x = 1$, diperoleh:

$$\chi_{cov^0F(n)}(1) \cdot 0 = 0, \quad \text{karena } 1 \notin cov^0F(n)$$

$$\chi_{cov^1F(n)}(1) \cdot 1 = 0, \quad \text{karena } 1 \notin cov^1F(n)$$

$$\chi_{cov^2F(n)}(1) \cdot 2 = 2, \quad \text{karena } 1 \in cov^2F(n)$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\chi_{cov^nF(n)}(1) \cdot n = 0, \quad \text{karena } 1 \notin cov^nF(n)$$

sehingga;

$$\xi(1) = \sum_{k=0}^{n} \chi_{cov^kF(n)}(1) \cdot k$$

$$= \chi_{cov^0F(n)}(1) \cdot 0 + \chi_{cov^1F(n)}(1) \cdot 1$$

$$+\chi_{cov^2F(n)}(1) \cdot 2 + \cdots + \chi_{cov^nF(n)}(1) \cdot n$$

$$= (0 \cdot 0) + (0 \cdot 1) + (1 \cdot 2) + \cdots + (0 \cdot n)$$

$$= 2$$

Untuk $x = 2$, diperoleh:

$$\chi_{cov^0 F(n)}(2) \cdot 0 = 0, \quad \text{karena } 2 \notin cov^0 F(n)$$

$$\chi_{cov^1 F(n)}(2) \cdot 1 = 0, \quad \text{karena } 2 \notin cov^1 F(n)$$

$$\chi_{cov^2 F(n)}(2) \cdot 2 = 2, \quad \text{karena } 2 \in cov^2 F(n)$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\chi_{cov^n F(n)}(2) \cdot n = 0, \quad \text{karena } 2 \notin cov^n F(n)$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} \xi(2) &= \sum_{k=0}^{n} \chi_{cov^k F(n)}(2) \cdot k \\ &= \chi_{cov^0 F(n)}(2) \cdot 0 + \chi_{cov^1 F(n)}(2) \cdot 1 \\ &\quad + \chi_{cov^2 F(n)}(2) \cdot 2 + \cdots + \chi_{cov^n F(n)}(2) \cdot n \\ &= (0 \cdot 0) + (0 \cdot 1) + (1 \cdot 2) + \cdots + (0 \cdot n) \\ &= 2 \end{aligned}$$

Untuk $x = 3$, diperoleh:

$$\chi_{cov^0 F(n)}(3) \cdot 0 = 0, \quad \text{karena } 3 \notin cov^0 F(n)$$

$$\chi_{cov^1 F(n)}(3) \cdot 1 = 1, \quad \text{karena } 3 \in cov^1 F(n)$$

$$\chi_{cov^2 F(n)}(3) \cdot 2 = 0, \quad \text{karena } 3 \notin cov^2 F(n)$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\chi_{cov^n F(n)}(3) \cdot n = 0, \quad \text{karena } 3 \notin cov^n F(n)$$

sehingga;

$$\begin{aligned} \xi(3) &= \sum_{k=0}^{n} \chi_{cov^k F(n)}(3) \cdot k \\ &= \chi_{cov^0 F(n)}(3) \cdot 0 + \chi_{cov^1 F(n)}(3) \cdot 1 \end{aligned}$$

$$+\chi_{cov^2F(n)}(3)\cdot 2+\cdots+\chi_{cov^nF(n)}(3)\cdot n$$

$$=(0\cdot 0)+(1\cdot 1)+(0\cdot 2)+\cdots+(0\cdot n)$$

$$=1$$

Untuk$x=4$, diperoleh:

$\chi_{cov^0F(n)}(4)\cdot 0=0,$ karena $4\notin cov^0F(n)$

$\chi_{cov^1F(n)}(4)\cdot 1=1,$ karena $4\in cov^1F(n)$

$\chi_{cov^2F(n)}(4)\cdot 2=0,$ karena $4\notin cov^2F(n)$

$\vdots$ $\vdots$

$\chi_{cov^nF(n)}(4)\cdot n=0,$ karena $4\notin cov^nF(n)$

sehingga;

$$\xi(4)=\sum_{k=0}^{n}\chi_{cov^kF(n)}(4)\cdot k$$

$$=\chi_{cov^0F(n)}(4)\cdot 0+\chi_{cov^1F(n)}(4)\cdot 1$$

$$+\chi_{cov^2F(n)}(4)\cdot 2+\cdots+\chi_{cov^nF(n)}(4)\cdot n$$

$$=(0\cdot 0)+(1\cdot 1)+(0\cdot 2)+\cdots+(0\cdot n)$$

$$=1$$

Untuk $x=6$, diperoleh:

$\chi_{cov^0F(n)}(6)\cdot 0=0,$ karena $6\notin cov^0F(n)$

$\chi_{cov^1F(n)}(6)\cdot 1=1,$ karena $6\in cov^1F(n)$

$\chi_{cov^2F(n)}(6)\cdot 2=0,$ karena $6\notin cov^2F(n)$

$\vdots$ $\vdots$

$\chi_{cov^nF(n)}(6)\cdot n=0,$ karena $6\notin cov^nF(n)$

sehingga;

$$\xi(6) = \sum_{k=0}^{n} \chi_{cov^k F(n)}(6) \cdot k$$

$$= \chi_{cov^0 F(n)}(6) \cdot 0 + \chi_{cov^1 F(n)}(6) \cdot 1$$

$$+\chi_{cov^2 F(n)}(6) \cdot 2 + \cdots + \chi_{cov^n F(n)}(6) \cdot n$$

$$= (0 \cdot 0) + (1 \cdot 1) + (0 \cdot 2) + \cdots + (0 \cdot n) = 1$$

Untuk $x = 12$, diperoleh:

$$\begin{array}{ll} \chi_{cov^0 F(n)}(12) \cdot 0 = 0, & \text{karena } 12 \in cov^0 F(n) \\ \chi_{cov^1 F(n)}(12) \cdot 1 = 0, & \text{karena } 12 \notin cov^1 F(n) \\ \chi_{cov^2 F(n)}(12) \cdot 2 = 0, & \text{karena } 12 \notin cov^2 F(n) \\ \vdots & \vdots \\ \chi_{cov^n F(n)}(12) \cdot n = 0, & \text{karena } 12 \notin cov^n F(n) \end{array}$$

sehingga;

$$\xi(12) = \sum_{k=0}^{n} \chi_{cov^k F(n)}(12) \cdot k$$

$$= \chi_{cov^0 F(n)}(12) \cdot 0 + \chi_{cov^1 F(n)}(12) \cdot 1$$

$$+\chi_{cov^2 F(n)}(12) \cdot 2 + \cdots + \chi_{cov^n F(n)}(12) \cdot n$$

$$= (0 \cdot 0) + (0 \cdot 1) + (0 \cdot 2) + \cdots + (0 \cdot n)$$

$$= 0$$

Jadi, Untuk $x \in F(12)$ lainnya, $\xi(x)$ diberikan sebagai berikut:

$\xi(1) = 2,$

$\xi(2) = 2,$

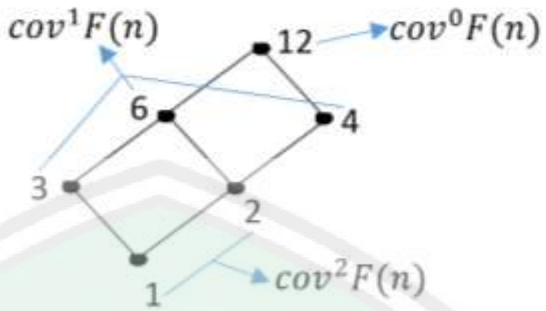
$\xi(3) = 1,$

$\xi(4) = 1,$

$\xi(6) = 1,$

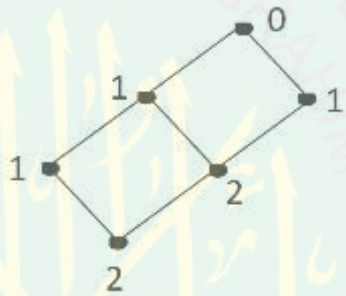
$\xi(12) = 0,$

Gambar graf latis$F(n)$ yang menunjukkan $Cov^n F(n)$



Gambar 3.10 Graf dari Latis $\boldsymbol{F}(\mathbf{12})$ yang menunjukan $\boldsymbol{cov^n F}(\boldsymbol{n})$

Setelah dilabeli, graf latis $F(n)$ sebagai berikut:



Gambar 3.11 Graf dari Latis $\boldsymbol{F}(\mathbf{12})$ yang akan diberi Label dengan Aturan Pemetaan ξ

Dengan demikian, pelabelan dari latis $F(12)$ dapat mengikuti pemetaan di atas. Pelabelan pada graf dari latis $(F(12), +, \times)$ menggunakan Teorema *dilworth* (cover bawah) menunjukkan bahwa terdapat 2 titik berderajat 2, 3 titik berderajat 1 dan 1 titik berderajat 0.

Selain menggunakan pelabelan berdasarkan fungsi karakteristik himpunan covering atas $(cov^k F(n))$, kita dapat juga dapat menggunakan pelabelan berdasarkan fungsi karakteristik himpunan covering bawah $(cov_k\ F(n))$ untuk melabelkan graf latis faktor $F(n)$. Ilustrasinya adalah sebagai berikut.

Contoh 3.5: Pelabelan Latis $F(36)$

Latis $(F(36), +, \times)$ dibangun oleh himpunan $F(36) = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$ dengan menggunakan menggunakan pemetaan ξ seperti pada contoh sebelumnya, diperoleh pelabelan berikut:

Untuk $x = 1$, diperoleh:

$$\chi_{cov_0 F(n)}(1) \cdot 0 = 0, \quad \text{karena } 1 \in cov_0 F(n)$$

$$\chi_{cov_1 F(n)}(1) \cdot 1 = 0, \quad \text{karena } 1 \notin cov_1 F(n)$$

$$\chi_{cov_2 F(n)}(1) \cdot 2 = 0, \quad \text{karena } 1 \notin cov_2 F(n)$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\chi_{cov_k F(n)}(1) \cdot n = 0, \quad \text{karena } 1 \notin cov_k F(n)$$

sehingga;

$$\xi(1) = \sum_{k=0}^{n} \chi_{cov_k F(n)}(1) \cdot k$$

$$= \chi_{cov_k F(n)}(1) \cdot 0 + \chi_{cov_k F(n)}(1) \cdot 1$$

$$+ \chi_{cov_k F(n)}(1) \cdot 2 + \cdots + \chi_{cov_k F(n)}(1) \cdot n$$

$$= (0 \cdot 0) + (0 \cdot 0) + (1 \cdot 2) + \cdots + (0 \cdot n)$$

$$= 0$$

Untuk $x = 2$, diperoleh:

$$\chi_{cov_0 F(n)}(2) \cdot 0 = 0, \quad \text{karena } 2 \notin cov_0 F(n)$$

$$\chi_{cov_1 F(n)}(2) \cdot 1 = 1, \quad \text{karena } 2 \in cov_1 F(n)$$

$$\chi_{cov_2 F(n)}(2) \cdot 2 = 0, \quad \text{karena } 2 \notin cov_2 F(n)$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\chi_{cov_k F(n)}(1) \cdot n = 0, \quad \text{karena } 1 \notin cov_k F(n)$$

sehingga;

$$\xi(2) = \sum_{k=0}^{n} \chi_{cov_k F(n)}(2) \cdot k$$

$$= \chi_{cov_k F(n)}(2) \cdot 0 + \chi_{cov_k F(n)}(2) \cdot 1$$

$$+ \chi_{cov_k F(n)}(2) \cdot 2 + \cdots + \chi_{cov_k F(n)}(2) \cdot n$$

$$= (0 \cdot 0) + (1 \cdot 1) + (0 \cdot 2) + \cdots + (0 \cdot n)$$

$$= 1$$

Untuk $x = 3$, diperoleh:

$\chi_{cov_0 F(n)}(3) \cdot 0 = 0,$ karena $3 \notin cov_0 F(n)$

$\chi_{cov_1 F(n)}(3) \cdot 1 = 1,$ karena $3 \in cov_1 F(n)$

$\chi_{cov_2 F(n)}(3) \cdot 2 = 0,$ karena $3 \notin cov_2 F(n)$

$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$

$\chi_{cov_k F(n)}(3) \cdot n = 0,$ karena $3 \notin cov_k F(n)$

sehingga;

$$\xi(3) = \sum_{k=0}^{n} \chi_{cov_k F(n)}(3) \cdot k$$

$$= \chi_{cov_k F(n)}(3) \cdot 0 + \chi_{cov_k F(n)}(3) \cdot 1$$

$$+ \chi_{cov_k F(n)}(3) \cdot 2 + \cdots + \chi_{cov_k F(n)}(3) \cdot n$$

$$= (0 \cdot 0) + (1 \cdot 1) + (0 \cdot 2) + \cdots + (0 \cdot n)$$

$$= 1$$

Untuk $x = 4$, diperoleh:

$\chi_{cov_0 F(n)}(4) \cdot 0 = 0,$ karena $4 \notin cov_0 F(n)$

$\chi_{cov_1 F(n)}(4) \cdot 1 = 1,$ karena $4 \in cov_1 F(n)$

$\chi_{cov_2F(n)}(4) \cdot 2 = 0$, karena $4 \notin cov_2F(n)$

$\vdots \qquad \vdots$

$\chi_{cov_kF(n)}(4) \cdot n = 0$, karena $4 \notin cov_kF(n)$

sehingga;

$$\xi(4) = \sum_{k=0}^{n} \chi_{cov_kF(n)}(4) \cdot k$$

$$= \chi_{cov_kF(n)}(4) \cdot 0 + \chi_{cov_kF(n)}(4) \cdot 1$$

$$+\chi_{cov_kF(n)}(4) \cdot 2 + \cdots + \chi_{cov_kF(n)}(4) \cdot n$$

$$= (0 \cdot 0) + (1 \cdot 1) + (0 \cdot 2) + \cdots + (0 \cdot n)$$

$$= 1$$

Untuk $x = 9$, diperoleh:

$\chi_{cov_0F(n)}(9) \cdot 0 = 0$, karena $9 \notin cov_0F(n)$

$\chi_{cov_1F(n)}(9) \cdot 1 = 1$, karena $9 \in cov_1F(n)$

$\chi_{cov_2F(n)}(9) \cdot 2 = 0$, karena $9 \notin cov_2F(n)$

$\vdots \qquad \vdots$

$\chi_{cov_kF(n)}(9) \cdot n = 0$, karena $9 \notin cov_kF(n)$

sehingga;

$$\xi(9) = \sum_{k=0}^{n} \chi_{cov_kF(n)}(9) \cdot k$$

$$= \chi_{cov_kF(n)}(9) \cdot 0 + \chi_{cov_kF(n)}(9) \cdot 1$$

$$+\chi_{cov_kF(n)}(9) \cdot 2 + \cdots + \chi_{cov_kF(n)}(9) \cdot n$$

$$= (0 \cdot 0) + (1 \cdot 1) + (0 \cdot 2) + \cdots + (0 \cdot n)$$

$$= 1$$

Untuk $x = 6$, diperoleh:

$\chi_{cov_0 F(n)}(6) \cdot 0 = 0,$ karena $6 \notin cov_0 F(n)$

$\chi_{cov_1 F(n)}(6) \cdot 1 = 0,$ karena $6 \notin cov_1 F(n)$

$\chi_{cov_2 F(n)}(6) \cdot 2 = 2,$ karena $6 \in cov_2 F(n)$

$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$

$\chi_{cov_k F(n)}(6) \cdot n = 0,$ karena $6 \notin cov_k F(n)$

sehingga;

$$\xi(6) = \sum_{k=0}^{n} \chi_{cov_k F(n)}(6) \cdot k$$

$$= \chi_{cov_k F(n)}(6) \cdot 0 + \chi_{cov_k F(n)}(6) \cdot 1$$

$$+ \chi_{cov_k F(n)}(6) \cdot 2 + \cdots + \chi_{cov_k F(n)}(6) \cdot n$$

$$= (0 \cdot 0) + (0 \cdot 1) + (1 \cdot 2) + \cdots + (0 \cdot n)$$

$$= 2$$

Untuk $x = 12$, diperoleh:

$\chi_{cov_0 F(n)}(12) \cdot 0 = 0,$ karena $12 \notin cov_0 F(n)$

$\chi_{cov_1 F(n)}(12) \cdot 1 = 0,$ karena $12 \notin cov_1 F(n)$

$\chi_{cov_2 F(n)}(12) \cdot 2 = 2,$ karena $12 \in cov_2 F(n)$

$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$

$\chi_{cov_k F(n)}(12) \cdot n = 0,$ karena $12 \notin cov_k F(n)$

sehingga;

$$\xi(12) = \sum_{k=0}^{n} \chi_{cov_k F(n)}(12) \cdot k$$

$$= \chi_{cov_k F(n)}(12) \cdot 0 + \chi_{cov_k F(n)}(12) \cdot 1$$

$$+ \chi_{cov_k F(n)}(12) \cdot 2 + \cdots + \chi_{cov_k F(n)}(12) \cdot n$$

$$= (0 \cdot 0) + (0 \cdot 1) + (1 \cdot 2) + \cdots + (0 \cdot n)$$

$$= 2$$

Untuk $x = 18$, diperoleh:

$\chi_{cov_0 F(n)}(18) \cdot 0 = 0,$ karena $18 \notin cov_0 F(n)$

$\chi_{cov_1 F(n)}(18) \cdot 1 = 0,$ karena $18 \notin cov_1 F(n)$

$\chi_{cov_2 F(n)}(18) \cdot 2 = 2,$ karena $18 \in cov_2 F(n)$

$\vdots$ $\vdots$

$\chi_{cov_k F(n)}(18) \cdot n = 0,$ karena $18 \notin cov_k F(n)$

sehingga;

$$\xi(18) = \sum_{k=0}^{n} \chi_{cov_k F(n)}(18) \cdot k$$

$$= \chi_{cov_k F(n)}(18) \cdot 0 + \chi_{cov_k F(n)}(18) \cdot 1$$

$$+\chi_{cov_k F(n)}(18) \cdot 2 + \cdots + \chi_{cov_k F(n)}(18) \cdot n$$

$$= (0 \cdot 0) + (0 \cdot 1) + (1 \cdot 2) + \cdots + (0 \cdot n)$$

$$= 2$$

Untuk $x = 36$, diperoleh:

$\chi_{cov_0 F(n)}(36) \cdot 0 = 0,$ karena $36 \notin cov_0 F(n)$

$\chi_{cov_1 F(n)}(36) \cdot 1 = 0,$ karena $36 \notin cov_1 F(n)$

$\chi_{cov_2 F(n)}(36) \cdot 2 = 2,$ karena $36 \in cov_2 F(n)$

$\vdots$ $\vdots$

$\chi_{cov_k F(n)}(36) \cdot n = 0,$ karena $36 \notin cov_k F(n)$

sehingga;

$$\xi(36) = \sum_{k=0}^{n} \chi_{cov_k F(n)}(36) \cdot k$$

$$= \chi_{cov_k F(n)}(36) \cdot 0 + \chi_{cov_k F(n)}(36) \cdot 1$$

$$+\chi_{cov_k F(n)}(36) \cdot 2 + \cdots + \chi_{cov_k F(n)}(36) \cdot n$$

$$= (0 \cdot 0) + (0 \cdot 1) + (1 \cdot 2) + \cdots + (0 \cdot n)$$

$$= 2$$

Jadi, Untuk $x \in F(36)$ lainnya, $\xi(x)$ diberikan sebagai berikut:

$\xi(1) = 0,$

$\xi(2) = 1,$

$\xi(3) = 1,$

$\xi(4) = 1,$

$\xi(9) = 1,$

$\xi(6) = 2,$

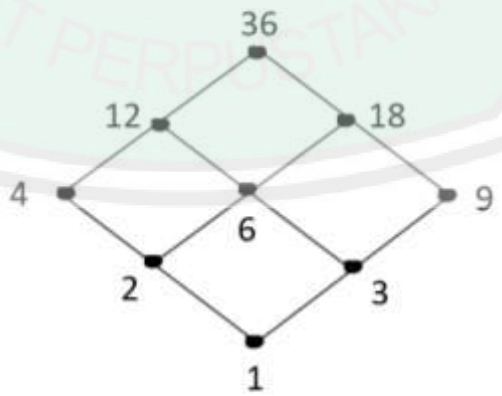
$\xi(12) = 2,$

$\xi(18) = 2,$

$\xi(36) = 2,$

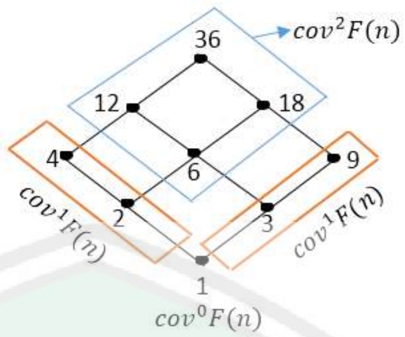
Dimana $\xi(x) = \sum_{k=0}^{n} \chi_{cov_k F(n)}(x) \cdot k$ (cover bawah)

Dan graf dari latis $(F(36), +, *)$ sebelum dilabeli adalah sebagai berikut:



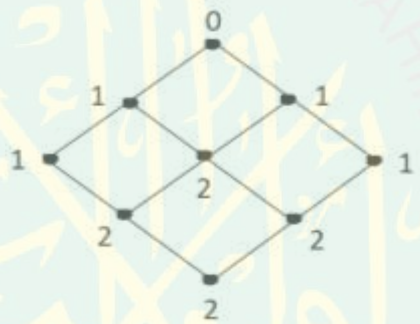
Gambar 3.12 Graf dari Latis $\boldsymbol{F(36)}$

Gambar graf latis $F(n)$ yang menunjukkan $Cov^n F(n)$



Gambar 3.13 Graf dari Latis $\boldsymbol{F(36)}$ yang menunjukan $\boldsymbol{cov_k F(n)}$

Sehingga dapat digambarkan graf dari latis $(F(36), +, \times)$ dengan menggunakan pelabelan *dilworth* sebagi berikut:



Gambar 3.14 Graf dari Latis $\boldsymbol{F(36)}$ yang dilabeli menggunakan metode *dilworth*

Dengan demikian, pelabelan dari latis $F(36)$ dapat mengikuti pemetaan di atas. Pelabelan pada graf dari latis $(F(36), +, \times)$ menggunakan Teorema *dilworth* (cover bawah) menunjukkan bahwa terdapat 4 titik berderajat 2, 4 titik berderajat 1 dan 1 titik berderajat 0.

Sebelum dibentuk konjektur mengenai pelabelan graf dari latis $F(n)$ dengan menggunakan metode *dilworth*, terlebih dahulu diberikan lemma berikut:

Lemma 3.8

Apabila n adalah bilangan bulat positif non-prima yang habis dibagi oleh tepat 2 buah bilangan prima yang disimbolkan oleh p dan q.Maka pada latis $(F(n),+,\times)$, $a \vee b = a + b$, dan $a \wedge b = ab$.

Bukti:

Ambil sebarang $a, b \in F(n)$, maka $a \vee b = \sup(a, b)$. Karena $a, b \in F(n)$ dan n tepat habis dibagi oleh 2 buah bilangan prima p dan q, maka terdapat $v, w \in \{p, q\}$ sedemikian sehingga $a = v^{l_1}w^{m_1}$, dan $b = v^{l_2}w^{m_2}$ dimana

$$l_1, l_2, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}^+$$

Dengan demikian,$c = v^l w^m$ adalah kelipatan persekutuan terkecil dari a dan b, di mana $l = \max\{l_1, l_2\}$, dan $m = \max\{m_1, m_2\}$ sehingga diperoleh $c = kpk(a, b) = a + b$. Tetapi karena $a = v^{l_1}w^{m_1} \in F(v^l w^m) = F(c)$, dan $b = v^{l_2}w^{m_2} \in F(v^l w^m) = F(c)$, maka haruslah $\sup(a, b) \in F(c)$.Selanjutnya, misal diasumsikan bahwa $\sup(a, b) \neq c$, maka haruslah $\sup(a, b) = v^{l-l_0}w^{m-m_0} < c$, di mana $l_0, m_0 \in \mathbb{Z}^+$, $0 < l_0 < l$, dan $0 < m_0 < m$. Tetapi $l - l_0 < l_i$, untuk suatu $i \in \{1,2\}$ dengan demikian haruslah bahwa $a = v^{l_1}w^{m_1} > v^{l-l_0}w^{m-m_0}$ atau $b = v^{l_2}w^{m_2} \geq v^{l-l_0}w^{m-m_0}$. Tanpa mengurangi perumuman misalkan $a > v^{l-l_0}w^{m-m_0} = \sup(a, b)$, kontradiksi dengan lemma sebelumnya bahwa $a \leq \sup(a, b)$. Sehingga terbukti bahwa $\sup(a, b) = c$. Dengan demikian

$$a \vee b = \sup(a, b) = c = kpk(a, b) = a + b$$

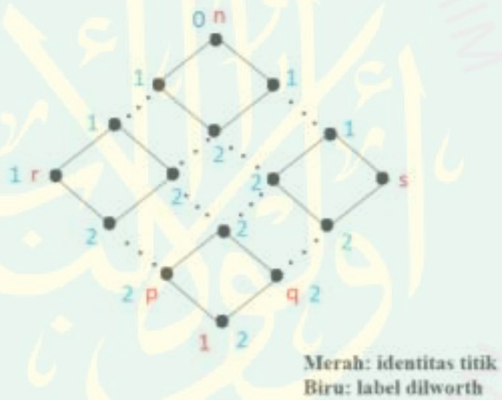
Terbukti.

3.1.4 Konjektur danTeorema Pelabelan Graf dari Latis Faktor $\boldsymbol{F(n)}$

Pada subbab ini kita akan membangun konjektur berdasarkan pola yang ditemukan untuk suatu kasus yang dirumuskan menjadi suatu Teorema pelabelan graf latis faktor $F(n)$ serta membuktikannya.

Konjektur 3.9

Untuk graf latis $(F(n), +, \times)$ dimana n adalah bilangan bulat positif non prima yang habis dibagi oleh 2 buah bilangan prima p dan q. Untuk pelabelan $\xi(x) = \sum_{k=0}^{n} \chi_{cov^k F(n)}(x) \cdot k$, pola labelnya adalah sebagai berikut:



Gambar 3.15 Bentuk Umum Pelabelan Graf dari Latis $\boldsymbol{F(n)}$ menggunakan metode *dilworth*

Untuk membuktikan konjekture diatas, maka terdapat beberapa langkah fundamental yang harus dilakukan yaitu sebagai berikut:

1. Membuktikan bahwa $\xi(n) = 0$, dan $|cov^0 F(n)| = 1$, untuk setiap graf latis $F(n)$,
2. Membuktikan bahwa $\xi(x) = 1$jika dan hanya jika $x = rq^i$ atau $x = sp^j$, di mana $0 \leq i \leq \log_q s$, $0 \leq j \leq \log_p r$, dan s, r diDefinisikan pada Teorema 3.6
3. Membuktikan bahwa untuk setiap $x \in F(n)$berlaku $0 \leq \xi(x) \leq 2$.

3.2 Penggambaran Graf dari Kajian Surat An-Nisa Ayat 1

Suatu pelajaran yang dapat di ambil dari penelitian ini adalah suatu graf terhubung jika dikaitkan dengan kehidupan seperti halnya hubungan manusia dengan Allah, hubungan manusia dengan sesama makhluk Allah terutamanya sesama manusia dalam kehidupan bermasyarakat. Pada dasarnya manusia diciptakan dengan berbagai suku-suku dan berbangsa bangsa.

Pada surat an-Nisa/4 ayat 1, dijelaskan bahwa Allah Swt. berfirman memerintahkan kepada makhluk-Nya agar bertakwa kepada-Nya, yaitu menyembah kepada-Nya semata dan tidak membuat sekutu bagi-Nya. Juga mengingatkan mereka akan kekuasaan-Nya yang telah menciptakan mereka dari seorang diri berkat kekuasaan-Nya orang tersebut adalah Adam a.s dan darinya Allah menciptakan istrinya Hawa diciptakan oleh Allah dari tulang rusuk sebelah kiri bagian belakang Adam a.s ketika ia sedang tidur. Saat Adam a.s terbangun, ia merasa kaget setelah melihatnya, lalu ia langsung jatuh cinta kepadanya. Begitu pula sebaliknya, Hawa jatuh cinta kepada Adam a.s (Ibnu Katsir, An-Nisa: 1)

Allah mengembangbiakkan banyak laki-laki dan perempuan dari Adam dan Hawa, lalu menyebarkan mereka ke seluruh dunia dengan berbagai macam jenis, sifat, warna kulit, dan bahasa mereka. Kemudian sesudah itu hanya kepada-Nya mereka kembali dan dihimpunkan.Dan bertakwalah kepada Allah dengan (mempergunakan) nama-Nya kalian saling meminta satu sama lain, dan (peliharalah) hubungan silaturahmi (Ibnu Katsir, An-Nisa: 1)

Allah berfiman dalam surat an-Nisa ayat 1, bertakwalah kepada Allah SWT dengan saling meminta satu dengan yang lain, kaitan bahwa hubungan manusia dengan sang pentipta Allah Swt. yaitu *hablum minaallah* dengan meminta satu dengan yang lainnya dan memelihara hubungan silaturrahmi dengan sesama manusia yaitu *hablum minannas* (lihat subbab 2.8). Ibnu Katsir, dalam pembahasan suarat An-Nisa: 1 mengatakan salah seorang ulama membaca *waal-arhaama* menjadi *waal-arhaami* yakni dengan bacaan jar karena di-ataf-kan kepada damir yang ada pada bihi. Dengan kata lain, kalian saling meminta satu sama lain dengan menyebut nama Allah dan hubungan silaturahmi.

Allah Swt. adalah pencipta alam semesta, juga pencipta manusia. Jika ibaratkan Allah Swt. adalah semesta dari manusia disimbolkan A, dimana manusia dilambangkan m, dan suatu kaum adalah himpunan m. Dan pasti himpunan m dimulai dari 1 ... n, maka bisa ditulis

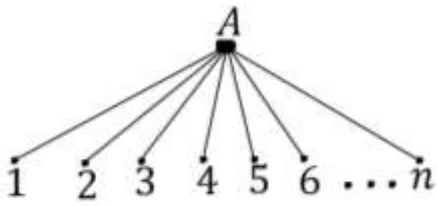
$$\{m\} = \{1..n\}$$

Dan manusia terdiri dari laki-laki (l) dan perempuan (p), dimana perempuan terbuat dari tulang rusuk laki-laki ditulis $p \subseteq l$ (kedudukan laki-laki dihadapan Allah sama). Maka himpunan m dengan semesta A dapat dibuat ilustrasinya dalam graf.

Ilustrasi grafpada surat anNisa ayat 1 sebagai berikut:

1. Graf semesta tentang hubungan manusia dengan Allah SWT, dan
2. Graf himpunan m tentang hubungan manusia dengan manusia yang lainnya
3. Graf tentang diciptakannya istri dari tulang rusuk laki laki $p \subseteq l$.

Penggambaran gambar graf semesta dan himpunan m, dimana m memiliki kedudukan sama dihadapan semesta A, sebagai berikut:



Gambar 3.16 Graf hubungan antarasemesta $\boldsymbol{A}$ dan himpunan $\boldsymbol{m}$

Penggambaran graf identitas, dimana sepasang laki-laki dan perempuan sebenarnya adalah satu. Jika semesta A sublatis, maka himpunan m adalah elemen dari teoreri latis L dan memenuhi sarat-sarat atau Definisi 2.6 tentang latis terhadap operasi $+$ dan operasi $*$, maka akan berlaku Teorema berikut:

Teorema 3.10 perempuan terbuat dari tulang rusuk laki-laki:

Apabila laki-laki dan perempuan adalah elemen dari latis L, ditulis $l, p \in L$. Akan ditunjukan bahwa $l + p = p$ dan $l \times p = l$.

Bukti:

1. $l + p = (l \times p) + p$ menururt ketentuan l

   $= p +(\text{l}\times p)$ menurut IIB

   $= p + (b \times l)$ menurut IIA

   $= p$ menururt IVB

2. $l \times p = l \times (l + p)$ menururt ketentuan p

   $= l$ menurut IVA

Terbukti.

Jika mengikuti subbab 3.3 tentang pelabelan suatu graf faktor $F(n)$, p adalah faktor l, dimana didalam l terdapat p dan akan melabeli dirinya sendiri. Penggambaran dalam graf identitas faktor $F(l)$ adalah sebagai berikut:

Gambar 3.17 Graf Identitas Faktor $\boldsymbol{F(l)}$

Sehingga, himpunan m menjadi:

$$\{m\} = F(l)_1 \dots . F(l)_n$$

Penggambaran semesta A dan $\{m\}$ adalah sebagi berikut:

Gambar 3.18 Graf Identitas Faktor $\boldsymbol{F(l)}$ dengan Semesta $\boldsymbol{A}$

Dengan demikian, pelabelan dari latis $F(l)$ diatas dapat diilustrasikan dengan gambar 3.15. Pelabelan pada graf dari latis menunjukkan bahwa semua derajat dihadapan Allah sama baik laki-laki maupun perempuan meskipun perempuan terbuat dari tulang rusuk laki-laki.

BAB IV
PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan diatas terdapat beberapa kesimpulan, sebagai berikut:

1. Pelabelan menggunakan metode *Dilworth*
   a. Diagram latis terdiri dari titik dan garis, dimana titik merupakan anggota dari latis $F(n)$ dan garis adalah pengaitannya. Titik dan garis dapat dipandang sebagai graf dengan tunduk terhadap Definisi latis.
   b. Latis $F(n)$ adalah latis modular, yaitu pada Teorema 2.24 telah dinyatakan bahwa setiap latis modular $(L,+,\times)$ dan memenuhi:
   $$|cov_k L| = |cov^k L|$$
   untuk setiap k bilang bulat tidak negatif.
   Karena latis $(F(n),+,\times))$ adalah latis modular, maka untuk setiap k bilang bulat tidak negatif berlaku:
   $$|cov_k F(n)| = |cov^k F(n)|$$
   c. Pelabelan graf latis $F(n)$ dengan menggunakan Teorema *dilworth* adalah suatu pelabelan $\xi: F(n) \to \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ di mana ξ diDefinisikan oleh
   $$\xi(x) = \sum_{k=0}^{n} \chi_{cov^k F(n)}(x) \cdot k$$
   Di mana $\chi_A(x)$ adalah fungsi karakteristik yang diDefinisikan oleh
   $$\chi_A(x) \coloneqq \begin{cases} 1 & ; \text{jika } x \in A \\ 0 & ; \text{jika } x \notin A \end{cases}$$

2. Kajian surat an-Nisa (4) ayat 1 dapat dilustrasikan dengan graf, dimana semesta A adalah Allah Swt. dan suatu kaum adalah himpunan $\{m\}$. Dan manusia baik laki-laki dan perempuan memiliki derajat yang sama dihadapan Allah Swt.

4.2 Saran

Berdasarkan penelitian ini, maka bagi penelitian selanjutnya diharapkan dapat mengembangkan penelitian ini dengan menggunakan aturan pelabelan graf latis menggunakan algoritma marging, atau varian lain dari pelabelan graf latis lainnya.

DAFTAR RUJUKAN

Abdussyakir. 2007. Ketika Kyai Mengajar Matematika. Malang:UIN-Malang Press.

Abdussyakir.2009, Matematika 1: Kajian Integratif Matematika dan Al-Qur'an. Malang: UIN-Malang Press.

Abidin, Z. 2009. *Kajian graf latis faktor bilangan prima berpangkat n dan graf latis faktor bilangan* $2^n \times 10$. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.

Arifin, A. 2000. Aljabar. Bandung: Institut Teknologi Bandung.

Bondy, J.A dan Murty, U.S.R. 2008.*Graph Theory*. Springer: The Macmilan Press.

Chartrand, G., Lesniak, L., dan Zhang, P. 2016. *Graphs & Digraphs Sixth Edition.* Boca Raton: CRC Press.

Grag.Vijay K. 2009 *Lattice Theory with Applications*. USA: Univercity of Texas.

Gratzer, G. 2011. *Lattice Theory: Foundation.* Canada: Univercity of Wanitoba.

Hotmah, Nurul. 2013. "Analisis Latis Modular pada Himpunan Matriks Bolean $n \times n$". Malang : Fakultas Sains dan Teknologi. UIN-Malang.

Mas'od. F. 2013. Struktur Aljabar. Jakarta: Akademia Permata.

Nisa Dkk. 2015. Pelabelan *Super Garceful* pada Graf Caterpillar. Jurnal.Volume.1. No. 1 Edisi April 2015. Bandung: UIN Sunan Gunung Djati. (Hal.1-11).

Nur Karimah. Hasna. 2015 Relasi Pengurutan Parsial, Poset, dan Diagram Hasse. Matematika Diskrit – Sem. I Tahun 2015/2016. Bandung: ITB. (Hal. 1-5).

Purwanto. 1998. *Matematika Diskrit.* Malang: IKIP Malang.

Restu, Eka. 2018. "*Eccentric-Distance Sum* pada Graf dari Latis Himpunan Kuasa". Malang : Fakultas Sains dan Teknologi. UIN-Malang.

Rutherford. 1965. *Introduction to Lattice Theory*. London: Great Britain. Sukardjono. 2002. Teori Latis. Jogjakarta: ANDI.

Sukirman. 2005. Pengantar Struktur Aljabar, Malang: Universitar Negeri Malang.

Terjemah Tafsir Ibnu-Katsir Surat An-Nisa/4:1. Quranputaka.com.

Wahidah. Faizatul. 2017. Homomorfisma Latis. Malang: Fakultas Sains dan Teknologi. UIN-Malang.

Wehrung. Friedrich. 2007. *A Solution to Dilworth's Congruence Lattice Problem.* Friedrich Wehrung, 216,pp.610-625. <10.1016/j.aim.2007.05.016>.

Wim and Rob. 2011-13. *Dilworth's Theorem Revisited, an algorithmic proof*. Econometric Istitute Journal (PP.11-13).

RIWAYAT HIDUP

Ridho Sholehurrohman, lahir di Sekincau pada tanggal 28 Januari 1997, biasa dipanggil Ridho. Adik dari Dwi Febri Hidayati yang merupakan anak pertama dari 2 bersaudara pasangan Bapak Saher Amrullah dan Ibu Ardiyah.

Pendidikan dasarnya ditempuh di SD Negeri 1 Sekincau dan lulus pada tahun 2008. Setelah itu melanjutkan sekolah di MTs Nurul Iman Sekincau, lulus tahun 2011. Pendidikan selanjutnya ditempuh di SMA Darussalam di bawah naungan Pondok Pesantren Darussalam dan lulus tahun 2014. Selanjutnya, pada tahun yang sama melanjutkan kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang Jurusan Matematika dan mengabdi di MSAA.

Selama menjadi mahasiswa telah mengikuti beberapa penelitian, diantaranya adalah Penelitian Program Penguatan Studi (P3S) pada tahun 2017. Selain itu, disela-sela kesibukannya menjadi mahasiswa ia juga aktif dalam berbagai organisasi intra maupun ekstra kampus, asisten laboratorium, kepengurusan ma'had UIN Malang, dan tentor privat di LBB Malang.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Ridho Sholehurrohman
NIM : 14610014
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Pelabelan Latis Menggunakan Teorema *Dilworth*
Pembimbing I : Evawati Alisah, M.Pd
Pembimbing II : Juhari, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan	
1	20 Desember 2017	Konsultasi Bab I	1.	
2	14 Februari 2018	Konsultasi Bab II dan III		2.
3	21 Maret 2018	Konsultasi Bab II dan III	3.	
4	28 Maret 2018	Konsultasi Agama Bab II		4.
5	6 April 2018	Konsultasi Agama Bab II	5.	
6	25 September 2018	Konsultasi Bab III		6.
7	3 Oktober 2018	Konsultasi Bab III dan IV	7.	
8	9 Oktober 2018	Konsultasi Keseluruhan		8.
9	22 Oktober 2018	Acc Keseluruhan	9.	
10	27 September 2018	Konsultasi Agama Bab III		10.
11	11 Oktober 2018	Konsultasi Agama Keseluruhan	11.	
12	19 Oktober 2018	Acc Agama Keseluruhan		12.

Malang, 19 November 2018
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 2003 12 1 001