ESTIMASI PARAMETER SISTEM PERSAMAAN SIMULTAN DENGAN METODE *LIMITED INFORMATION MAXIMUM LIKELIHOOD*

SKRIPSI

OLEH
AFWAN GHOFUR
NIM. 14610013

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018

ESTIMASI PARAMETER SISTEM PERSAMAAN SIMULTAN DENGAN METODE *LIMITED INFORMATION MAXIMUM LIKELIHOOD*

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Afwan Ghofur
NIM. 14610013

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018

ESTIMASI PARAMETER SISTEM PERSAMAAN SIMULTAN DENGAN METODE *LIMITED INFORMATION MAXIMUM LIKELIHOOD*

SKRIPSI

Oleh
Afwan Ghofur
NIM. 14610013

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 07 November 2018

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Abdul Aziz, M.Si	Evawati Alisah, M.Pd
NIP. 19760318 200604 1 002	NIP. 19720604 199903 2 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

ESTIMASI PARAMETER SISTEM PERSAMAAN SIMULTAN DENGAN METODE *LIMITED INFORMATION MAXIMUM LIKELIHOOD*

SKRIPSI

Oleh
Afwan Ghofur
NIM. 14610013

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 07 November 2018

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Abdul Aziz, M.Si	Evawati Alisah, M.Pd
NIP. 19760318 200604 1 002	NIP. 19720604 199903 2 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

ESTIMASI PARAMETER SISTEM PERSAMAAN SIMULTAN DENGAN METODE *LIMITED INFORMATION MAXIMUM LIKELIHOOD*

SKRIPSI

Oleh
Afwan Ghofur
NIM. 14610013

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 05 Desember 2018

Penguji Utama	: Dr. Sri Harini, M.Si	....
Ketua Penguji	: Ria Dhea Layla Nur Karisma, M.Si	....
Sekretaris Penguji	: Abdul Aziz, M.Si	....
Anggota Penguji	: Evawati Alisah, M.Pd	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

ESTIMASI PARAMETER SISTEM PERSAMAAN SIMULTAN DENGAN METODE *LIMITED INFORMATION MAXIMUM LIKELIHOOD*

SKRIPSI

Oleh
Afwan Ghofur
NIM. 14610013

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 05 Desember 2018

Penguji Utama	:	Dr. Sri Harini, M.Si	....
Ketua Penguji	:	Ria Dhea Layla Nur Karisma, M.Si	....
Sekretaris Penguji	:	Abdul Aziz, M.Si	....
Anggota Penguji	:	Evawati Alisah, M.Pd	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Afwan Ghofur
NIM	: 14610013
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Estimasi Parameter Sistem Persamaan Simultan dengan Metode *Limited Information Maximum Likelihood*

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 7 November 2018
Yang membuat pernyataan,

Afwan Ghofur
NIM. 1461001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Afwan Ghofur
NIM	: 14610013
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Estimasi Parameter Sistem Persamaan Simultan dengan Metode *Limited Information Maximum Likelihood*

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 7 November 2018
Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL
5AEF9AFF434017089
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Afwan Ghofur
NIM. 14610013

MOTTO

خَيْرُ الناسِ أَنْفَعُهُمْ لِلناسِ

"*Sebaik-baik manusia adalah yang paling bermanfaat bagi manusia*"
(HR. Ahmad, ath-Thabrani, ad-Daruqutni).

“Pengalaman Organisasi Penentu Kesuksesan, Bukan Hanya IPK”
(Anis Baswedan)

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan kepada:

Kedua orang tua, ayahanda tercinta Sumardi dan Ibunda tercinta Sulikah, serta kakak saya Syahrul Aziz beserta istri dan segenap keluarga penulis yang senantiasa dengan ikhlas mendoakan, memberi nasihat, semangat, dan kasih sayang yang tak ternilai kepada penulis, dan sahabat-sahabat penulis yang senantiasa menemani di kala senang dan sedih.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Selama proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu, ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Abdul Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Abdul Aziz, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan berbagi pengalaman yang berharga kepada penulis.
5. Evawati Alisah, M.Pd, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.

6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.
7. Bapak Sumardi dan ibu Sulikah serta kakak Syahrul Aziz beserta istri yang selalu memberikan do'a, semangat, serta motivasi kepada penulis.
8. Keluarga Pinus Nurul, Mariam, Yeni, Dian, Hanif, dan Ridho yang selalu menemani, membantu, dan memberikan dukungan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
9. Keluarga besar HMJ "Integral" Matematika, SEMA-F SAINTEK, SEMA-U Univeritas, Pengurus Pusat IKAHIMATIKA INDONESIA, UKM Seni Religius, dulur-dulur FKMB Banyuwangi, IMADA Blokagung, sahabat-sahabat PMII Rayon "Pencerahan" Galileo SAINTK, dan PMII Komisariat Sunan Ampel Malang, yang telah memberikan ilmu yang tak akan pernah saya dapat di bangku kuliah.
10. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2014 (MATH EIGEN), khususnya Matematika-A yang berjuang bersama-sama untuk meraih cita-cita.
11. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu-persatu, yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materiil.

Akhirnya penulis berharap semoga dengan rahmat dan izin-Nya mudah-mudahan skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan pembaca. *Amiin.*

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 07 November 2018

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR SIMBOL

Simbol	Keterangan	Jenis
$\vec{...}$	Simbol suatu vektor	Operator
$...^{-1}$	Invers	Operator
$...'$	Transpose	Operator
a	Elemen pada matriks *A*	Skalar
a_i	Koefisien pada SPL	Skalar
a_{ij}	Elemen pada matriks *A*	Skalar
A	Simbol suatu matriks	Matriks
A_B	*Augmented matrix*	Matriks
$\propto$	Taraf signifikansi	Skalar
b_i	Koefisien pada SPL	Skalar
b_{ij}	Elemen pada matriks *B*	Skalar
μ	Mean	Skalar
σ^2	Variansi	Skalar
${\sigma^2}_1$	Variansi yang terdapat pada persamaan pertama	Vektor
σ	Standart deviasi	Skalar
t	Obeservasi pada periode waktu ke-*t*	Skalar
n	Banyaknya observsi 1, 2, ..., *n*	Vektor
M	Jumlah variabel endogen di dalam sistem persamaan simultan	Indeks
m	Jumlah variabel endogen di dalam sebuah persamaan tertentu	Indeks

K	Jumlah variabel *predetermined* di dalam sistem persamaan simultan	Indeks
k	Jumlah variabel *predetermined* di dalam sebuah persamaan tertentu	Indeks
B	Matriks koefisien variabel endogen pada sistem persamaan simultan	Matriks
Γ	Matriks koefisien variabel *predetermined* pada sistem persamaan simultan	Matriks
Y	Variabel endogen	Matriks
y_1	Vektor observasi variabel endogen yang terdapat pada persamaan pertama	Vektor
y_{1t}	Vektor observasi variabel endogen yang terdapat pada persamaan pertama pada periode waktu ke-*t*	Vektor
Y_1	Matriks observasi variabel endogen lain yang terdapat pada persamaan pertama	Matriks
X	Variabel *predetermined*	Matriks
x_{1t}	Vektor observasi variabel *predetermined* yang terdapat pada persamaan pertama pada periode waktu ke-*t*	Vektor
Z_1	Matriks variabel *predetermined* dan endogen	Matriks
δ_1	Matriks koefisien parameter variabel *predetermined* dan endogen	Vektor
β_{10}	Konstanta pada persamaan pertama	Skalar
β_{12}	Parameter variabel endogen pada persamaan pertama	Skalar
γ_{11}	Parameter variabel *predetermined* pada persamaan pertama	Skalar
u_1	Vektor observasi variabel galat yang terdapat pada persamaan ke-1	Vektor
u_{1t}	Vektor observasi variabel galat yang terdapat pada persamaan ke-1 pada periode waktu ke-*t*	Vektor

R^2	Koefisien determinasi	Skalar
r^2	Koefisien korelasi	Skalar

ABSTRAK

Ghofur, Afwan. 2018. **Estimasi Parameter Sistem Persamaan Simultan dengan Metode *Limited Information Maximum Likelihood***. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Abdul Aziz, M.Si. (II) Evawati Alisah, M.Pd.

Kata Kunci: Estimasi Parameter, Sistem Persamaan Simultan, *Overidentified*, *Limited Information Maximum Likelihood*.

Sistem persamaan simultan adalah model yang terdiri dari dua atau lebih persamaan, yang variabelnya saling berkaitan atau memiliki hubungan dua arah. Variabel sistem persamaan simultan disebut variabel endogen dan variabel *predetermined*. Pada penelitian ini model persamaan simultan terdiri dari 2 variabel endogen dan 4 variabel *predetermined*. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui hasil estimasi parameter dan implementasinya pada sistem persamaan simultan dengan metode *Limited Information Maximum Likelihood* (LIML). Metode LIML digunakan untuk mengestimasi parameter sistem persamaan simultan yang teridentifikasi secara *overidentified*. Metode LIML juga disebut metode persamaan tunggal, yaitu mengestimasi parameter setiap persamaan dalam sistem persamaan simultan secara individu. Langkah-langkah dalam metode LIML yaitu (1) menentukan model persamaan simultan (2) identifikasi model (3) estimasi parameter dengan metode LIML pada setiap persamaan. Berdasarkan hasil penelitian diperoleh bahwa estimasi parameter sistem parameter sistem persamaan simultan dengan metode LIML, adalah:

$$\hat{\delta}_{1_{liml}} = (Z_1{}'Z_1)^{-1}Z_1{}'y_1 \text{ dan } \hat{\delta}_{2_{liml}} = (Z_2{}'Z_2)^{-1}Z_2{}'y_2$$

Hasil estimasi parameter metode LIML diimplementasikan pada data Produk Domestik Regional Bruto (PDRB) dan kemiskinan tahun 2000-2013 di Indonesia, sehingga diperoleh model persamaan simultan PDRB dan kemiskinan sebagai berikut:

$$\text{PD} = 5228183 - 118810{,}47\ \text{KE} + 8{,}755515\ \text{EX} - 18{,}166159\ \text{IM}$$

$$\text{KE} = 83{,}6719 - 0{,}00000001486\ \text{PD} + 0{,}547844\ \text{TP} + 0{,}455393\ \text{KP}$$

Penelitian ini dapat dikembangkan dengan menggunakan metode sistem, yaitu *Three Stage Least Squares* (3SLS) atau *Full Information Maximum Likelihood* (FIML).

ABSTRACT

Ghofur, Afwan. 2018. **Parameters Estimation of Simultaneous Equation Systems with the Limited Information Maximum Likelihood Method**. Thesis. Department of Mathematics. Faculty of Science and Technology. Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisors: (I) Abdul Aziz, M.Sc. (II) Evawati Alisah, M.Pd.

Keywords: Parameter Estimation, Simultaneous Equation System, Overidentified, Limited Information Maximum Likelihood.

The simultaneous equation system is a model consisting two or more equations, whose variables are interrelated or have two-way relationships. Variables of simultaneous equations system are called endogenous variables and predetermined variables. In this study the simultaneous equation model consists of two endogenous variables and four predetermined variables. This study aims to determine the results of parameter estimation and its implementation in a simultaneous equations system with Limited Information Maximum Likelihood (LIML) method. The LIML method is used to estimate the parameters of simultaneous equation system that is identified as overidentified. The LIML method is also called as the single equation method, which is estimating the parameters of each equation in simultaneous equations system individually. The steps in the LIML method are (1) determining the simultaneous equation model (2) identifying the model (3) estimating the parameter with the LIML method in each equation. Based on the study results, it was found that the system parameter estimation of simultaneous equations system parameters with the LIML method are:

$$\hat{\delta}_{1_{liml}} = (\mathrm{Z}_1{}'\mathrm{Z}_1)^{-1}\mathrm{Z}_1{}'y_1 \text{ dan } \hat{\delta}_{2_{liml}} = (\mathrm{Z}_2{}'\mathrm{Z}_2)^{-1}\mathrm{Z}_2{}'y_2$$

The LIML method estimation results are implemented on data on Gross Regional Domestic Product (GRDP) and poverty in 2000-2013 in Indonesia, so that the simultaneous GRDP and poverty equation models are obtained as follows:

$$\mathrm{PD} = 5228183 - 118810{,}47\ \mathrm{KE} + 8{,}755515\ \mathrm{EX} - 18{,}166159\ \mathrm{IM}$$

$$\mathrm{KE} = 83{,}6719 - 0{,}00000001486\ \mathrm{PD} + 0{,}547844\ \mathrm{TP} + 0{,}455393\ \mathrm{KP}$$

This research can be developed by using system methods, namely Three Stage Least Squares (3SLS) or Full Information Maximum Likelihood (FIML).

الملخص

غفور، عفوًا. ٢٠١٨. **تقدير معلمات نظام المعادلات الآنية باستخدام طريقة *Limited Information Maximum Likelihood***. بحث جامعي. شعبة الرياضيات كلية العلوم والتكنولوجيا الجامعة الإسلامية الحكوميّة مولانا مالك إبراهيم مالانج. مستشار: (١) عبد العزيز ماجستير، (٢) آفا واتي اليسة ماجستير.

كلمات البحث: تقدير المعلمة، نظام المعادلات الآنية، *Limited Information, Overidentified Maximum Likelihood.*

نظام المعادلة المتزامنة هو نموذج يتكون من معادلتين أو أكثر، متغيراتهما مترابطة أو لها علاقة ثنائية. تسمى متغيرات النظام للمعادلات المتزامنة المتغيرات الداخلية والمتغيرات المحددة سلفًا. في هذه الدراسة، يتكون نموذج المعادلة المتزامنة من متغيرين داخليين و اربعة متغيرات *Predetermined*. تهدف هذه الدراسة إلى تحديد نتائج تقدير المعلمة وتنفيذها في نظام من المعادلات المتزامنة باستخدام طريقة (LIML) *Limited Information Maximum Likelihood*. يتم استخدام طريقة LIML لتقدير معلمات نظام معادلة متزامن يتم تحديده *Overidentified*. وتسمى طريقة LIML أيضًا طريقة المعادلة المفردة، التي تقوم بتقدير معلمات كل معادلة في نظام معادلات متزامنة على حدة. الخطوات في طريقة LIML هي (١) تحديد نموذج المعادلة المتزامنة (٢) تحدد النموذج (٣) تقدير المعلمة بطريقة LIML في كل معادلة. بناءً نتائج الدراسة، تبين أن تقدير معلمة النظام لمعلمات النظام للمعادلات المتزامنة مع طريقة LIML هي:

$$\hat{\delta}_{1_{liml}} = (Z_1{}'Z_1)^{-1}Z_1{}'y_1 \quad و \quad \hat{\delta}_{2_{liml}} = (Z_2{}'Z_2)^{-1}Z_2{}'y_2$$

يتم تنفيذ نتائج تقييم طريقة LIML على بيانات حول *Gross Regional Domestic Product* (GRDP) والفقر في ٢٠٠٠–٢٠١٣ في اندونسيا، بحيث يتم الحصول على نماذج معادلة GRDP والفقر المنتزامنة على النحو التالي:

$$PD = 5228183 - 118810{,}47\ KE + 8{,}755515\ EX - 18{,}166159\ IM$$

$$KE = 83{,}6719 - 0{,}00000001486\ PD + 0{,}547844\ TP + 0{,}455393\ KP$$

يمكن تطوير هذا البحث باستخدام طريقة النظام، وهي(3SLS) *Three Stage Least Squares* أو *Full Information Maximum Likelihood* (FIML).

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan alat dan bahasa dasar banyak ilmu. Salah satu ilmu yang merupakan penerapan dari matematika adalah ekonometri. Ekonometri yaitu suatu ilmu yang memanfaatkan matematika dan teori statistik dalam mencari parameter dari pada hubungan ekonomi, sebagaimana didalilkan oleh teori ekonomi. Matematika dalam ekonomi digunakan sebagai media atau alat untuk menyederhanakan penyajian dan pemahaman masalah. Model-model dalam matematika digabungkan dengan konsep-konsep ekonomi sehingga penerapan matematika dapat menerangkan konsep ekonomi (Aziz, 2010:1).

Ekonometrika adalah ilmu yang mencakup teori ekonomi, matematika, dan statistika dalam satu kesatuan sistem yang bulat, menjadi suatu ilmu yang berdiri sendiri dan berlainan dengan ilmu ekonomi, matematika, maupun statistika. Ekonometrika digunakan sebagai alat analisis ekonomi yang bertujuan untuk menguji kebenaran teori ekonomi yang berupa hubungan antar variabel ekonomi dengan data empiris. Terdapat beberapa metode penyelesaian dalam masalah ilmu ekonometri (Gujarati, 1999:1).

Model yang paling sering ditemui dalam berbagai kasus biasanya berupa model persamaan tunggal. Namun, selain model persamaan tunggal ada juga model persamaan simultan atau sistem persamaan simultan. Model persamaan tunggal yaitu model dimana hanya terdapat satu variabel tak bebas Y dan satu atau lebih variabel bebas X. Namun, terkadang dalam beberapa model sering terdapat saling ketergantungan antar variabel, dimana bukan hanya variabel X yang bisa mempengaruhi variabel Y, tetapi juga variabel Y bisa mempengaruhi variabel X. Sehingga dalam model tersebut terjadi hubungan dua arah. Model yang seperti itu disebut dengan sistem persamaan simultan (Gujarati, 1999:307).

Estimasi telah disinggung dalam Al-Qur,an surat Al-Jaatsiyah ayat 24 sebagai berikut:

وَقَالُواْ مَا هِيَ إِلَّا حَيَاتُنَا ٱلدُّنۡيَا نَمُوتُ وَنَحۡيَا وَمَا يُهۡلِكُنَآ إِلَّا ٱلدَّهۡرُۚ وَمَا لَهُم بِذَٰلِكَ مِنۡ عِلۡمٍۖ إِنۡ هُمۡ إِلَّا يَظُنُّونَ ﴿٢٤﴾

Artinya : "*Dan mereka berkata: 'Kehidupan ini tidak lain hanyalah kehidupan di dunia saja, kita mati dan kita hidup dan tidak ada yang akan membinasakan kita selain masa'. Dan mereka sekali-kali tidak mempunyai pengetahuan tentang itu, mereka tidak lain hanyalah menduga-duga saja*" (Q.S. Al-Jaatsiyah/45:24).

Al-Maraghi (1989:277) pada surat Al-Jaatsiyah ayat 24 menjelaskan orang-orang musyrik yang telah disebutkan sebagian sifat mereka berkata bahwa yang ada hanyalah dunia ini saja. Suatu kaum mati, kemudian hiduplah yang lain. Tidak ada kebangkitan dan tidak ada kiamat. Jadi lewatnya malam dan siang itulah yang mempengaruhi kebiasaan orang dan mereka menimbulkan setiap peristiwa kepada masa. Kehidupan ini hanyalah kehidupan dunia saja dan bahwa yang membinasakan adalah masa, mereka tidaklah mempunyai ilmu yang didasarkan kepada akal maupun *naql* (kitab). Mereka hanyalah menyangka, membuat perkiraan saja tanpa adanya hujjah yang jitu, yang mereka jadikan pegangan. Hal ini sangat jelas sekali bahwa yang ada kaitannya dengan estimasi adalah kalimat yang berbunyi "mereka adalah menyangka, membuat perkiraan saja tanpa adanya hujjah yang dijadikan pegangan". Akan tetapi, lain halnya dengan ilmu matematika. Meskipun mengestimasi (memperkirakan), harus mempunyai pegangan teori dalam arti mengetahui dan paham ilmu-ilmu yang mempelajari hal tersebut.

Ada dua metode estimasi parameter pada sistem persamaan simultan, yaitu *Limited Information Method* (Metode Informasi Terbatas) dan *Full Information Method* (Metode Informasi Lengkap). Metode informasi terbatas disebut juga sebagai metode persamaan tunggal sedangkan metode informasi lengkap disebut juga sebagai metode sistem (Gujarati, 1999:337).

Metode *Two Stage Least Squares* (2SLS) dan *Limited Information Maximum Likelihood* (LIML) keduanya menggunakan informasi yang terbatas dalam mengestimasi nilai parameter sehingga kedua metode tersebut adalah sepadan. Informasi terbatas berarti dalam menaksir parameter, kedua metode tersebut hanya menggunakan informasi yang berasal dari persamaan yang akan diestimasi tanpa menggunakan seluruh informasi yang ada pada sistem persamaan simultan sehingga keduanya termasuk dalam metode persamaan tunggal *(Single Equation Methods*) (Maddala, 2009:379).

Metode estimasi parameter pada sistem persamaan simultan merujuk pada penelitian oleh Syafaat (1996) menyatakan bahwa estimasi parameter persamaan simultan dapat menggunakan metode 2SLS, LIML, dan *Three Stage Least Square* (3SLS). LIML merupakan salah satu teknik pendugaan parameter struktural di mana persamaannya *overidentifed.* Metode LIML mirip dengan 2SLS, di mana keduanya sama-sama menggunakan semua peubah eksogen dalam model. Namun ada sedikit perbedaan, jika 2SLS meminimisasi perbedaan dua set *error varians,* maka LIML meminimisasi dalam *unexplained varians*. Metode pendugaan LIML apabila digunakan untuk menduga persamaan yang *overidentifed* akan menghasilkan parameter yang lebih besar dari nilai dugaan parameter yang diperoleh dari 2SLS dan 3SLS. Namum demikian, apabila persamaan yang diduga bersifat *exactly identifed*, maka nilai dugaan parameter yang diperoleh metode LIML akan sama dengan metode 2SLS.

Penelitian oleh Bekti, dkk (2014) menghasilkan model persamaan simultan pada kasus hubungan kemiskinan dan Produk Domestik Regional Bruto (PDRB) dengan menggunakan metode 2SLS. Model sistem persamaan simultan yang digunakan adalah 2 variabel endogen dan 3 variabel *predetermined*. Hasil penelitian ini menyatakan bahwa pemodelan persamaan simultan pada persamaan PDRB diperoleh: PDRB = $-2{,}6\times10^{5} + 1{,}9\times10^{4}$ Kemiskinan + $1{,}4\times10^{-1}$ Ekspor + $9{,}7\times10^{-2}$ Impor, sedangkan pada persamaan kemiskinan diperoleh: Kemiskinan = $1{,}4\times10^{1} - 2{,}6\times10^{-5}$ PDRB $- 5{,}3\times10^{-6}$ Ekspor + $3{,}8\times10^{-7}$ Penduduk. Pada model PDRB, variabel yang signifikan berpengaruh terhadap PDRB adalah kemiskinan, ekspor, dan impor. Pada model kemiskinan, variabel yang signifikan berpengaruh terhadap kemiskinan adalah jumlah penduduk.

Daniantari (2011) menghasilkan model persamaan simultan pada studi kasus hubungan PDRB dan stok uang dengan metode 2SLS. Model sistem persamaan simultan yang digunakan adalah 2 variabel endogen dan 2 variabel *predetermined*. Hasil estimasi dengan metode 2SLS pada persamaan PDRB diperoleh: $\hat{Y}_t = 402{,}362 + 4{,}223\ I_t + 1{,}216\ G_t$. Sedangkan pada persamaan stok uang diperoleh: $M_t = -153{,}335 + 0{,}498\ \hat{Y}_t$. Hasil estimasi menunjukkan bahwa PDRB dipengaruhi oleh investasi, dan stok uang dipengaruhi oleh PDRB. Hal ini dapat dilihat dari nilai signifikan sebesar 0,000.

Model dalam penelitian ini, diambil dari penelitian terdahulu oleh Soemartini (2016) yang menghasilkan model persamaan simultan pada kasus hubungan PDRB dan pertumbuhan ekonomi dengan metode 2SLS. Penelitian ini menggunakan model dengan 2 variabel endogen dan 4 variabel *predetermined.* Hasil pemodelan sistem persamaan simultan menghasilkan model Y_{1t} = 11,023 – 0,021Y_{2t} + 0,003X_{1t} – 0,311X_{2t}, sedangkan pada model Y_{2t} = –76,225 + 5,392Y_{1t} + 0,509X_{3t} – 0,007X_{4t}. Pertumbuhan ekonomi dengan variabel-variabel makro lainnya mempengaruhi PDB, dengan R^2 = 99,8% dan PDB beserta variabel-variabel makro lainnya juga mempengaruhi pertumbuhan ekonomi dengan R^2 = 93,6% secara signifikan.

Berdasarkan latar belakang tersebut, peneliti akan menggunakan model dalam Soemartini (2016) pada kasus hubungan PDRB dan kemiskinan dengan metode LIML. Berdasarkan uraian di atas didapatkan judul: "Estimasi Parameter Sistem Persamaan Simultan dengan Metode *Limited Information Maximum Likelihood".*

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, rumusan masalah dari penelitian ini adalah:

1. Bagaimana hasil estimasi parameter sistem persamaan simultan dengan metode LIML?
2. Bagaimana implementasi metode LIML pada sistem persamaan simultan studi kasus PDRB dan kemiskinan?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah tersebut, tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Mengetahui hasil estimasi parameter sistem persamaan simultan dengan metode LIML.
2. Mengetahui nilai-nilai parameter dengan metode LIML pada sistem persamaan simultan studi kasus PDRB dan kemiskinan.

1.4 Batasan Masalah

Agar tidak terjadi kerancuan terhadap maksud dan isi dari penelitian ini, maka perlu adanya pembatasan masalah sebagai berikut:

1. Sistem persamaan simultan hanya terdiri dari 2 variabel endogen dan 4 variabel *predetermined*.
2. Sistem persamaan simultan bersifat linier.
3. Setiap data berdistribusi normal.
4. Identifikasi sistem persamaan simutan adalah *overidentified*.
5. Software yang digunakan adalah Maple 8 dan Eviews 10.
6. Parameter yang diteliti adalah δ.
7. Menggunakan data sekunder pada penelitian Soemartini 2016.

1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat, antara lain:

1. Bagi Peneliti

   Menambah wawasan di bidang ekonometrika pada sistem persamaan simultan khususnya metode LIML.

2. Bagi Mahasiswa

   Sebagai bahan referensi melaksanakan penelitian tentang ekonometrika.

3. Bagi Pihak Lain

   Sebagai sumbangan pemikiran keilmuan matematika di bidang ekonometrika.

1.6 Sistematika Penulisan

Gambaran menyeluruh mengenai estimasi parameter sistem persamaan simultan dengan metode LIML, penelitian ini terdiri dari:

1. Bab I Pendahuluan

   Bab ini menjelaskan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan.

2. Bab II Kajian Pustaka

   Bab ini menjelaskan tentang teori dasar yang menunjang materi pokok pembahasan, yaitu matriks dan vektor, korelasi dan regresi, sistem persamaan linier, teori peluang, sistem persamaan simultan, estimasi parameter sistem persamaan simultan, penelitian terdahulu, dan kajian estimasi dalam Islam.

3. Bab III Metode Penelitian

   Bab ini menjelaskan tentang pendekatan penelitian, sumber data, variabel penelitian, dan tahap analisis.

4. Bab IV Pembahasan

   Bab ini menjelaskan tentang estimasi parameter pada sistem persamaan simultan dengan menggunakan metode LIML, implementasi metode LIML pada sistem persamaan simultan PDRB dan kemiskinan dan kajian estimasi parameter sistem persamaan simultan dalam islam.

5. Bab V Penutup

Bab ini menjelaskan tentang kesimpulan dan saran dari pembahasan.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Vektor dan Matriks

2.1.1 Definisi Vektor

Menurut Imrona (2013:14) bahwa vektor adalah besaran yang mempunyai besar dan arah. Vektor dilambangkan oleh huruf kecil tebal atau huruf kecil dengan panah diatasnya, sehingga vektor a dapat ditulis sebagai $\boldsymbol{a}$ atau $\vec{a}$. Secara analitis, sebuah vektor pada bidang dapat dinyatakan sebagai pasangan bilangan terurut, misalkan $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$. Sedangkan vektor dalam ruang (R^3) secara analitis dinyatakan sebagai tiga bilangan terurut, $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Sebuah vektor dapat ditulis sebagai sebuah matriks satu kolom, yaitu:

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = (a_1, a_2) \text{ dan } \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = (a_1, a_2, a_3)$$

Anton (2004:241) menyatakan bahwa sebuah vektor $\boldsymbol{b}$ dikatakan kombinasi linier dari vektor-vektor $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_r}$, vektor tersebut dapat dituliskan:

$$\boldsymbol{b} = k_1\boldsymbol{a_1} + k_2\boldsymbol{a_2} \dots + k_r\boldsymbol{a_r}$$

dimana $k_1, k_2, \dots, k_r$ adalah skalar.

Jika $S = \{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_r}\}$ adalah himpunan vektor, maka persamaan vektor:

$$k_1\boldsymbol{a_1} + k_2\boldsymbol{a_2} \dots + k_r\boldsymbol{a_r} = 0 \qquad (2.1)$$

mempunyai paling sedikit satu pemecahan, yaitu:

$$k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_r = 0$$

Jika ini adalah satu-satunya pemecahan, maka S dinamakan himpunan bebas linier. Tetapi jika ada pemecahan lain, maka S dinamakan himpunan tak bebas linier.

2.1.2 Operasi Vektor

1. Penjumlahan Vektor

   Menurut Anton (2004:134) jika $\boldsymbol{a}$ dan $\boldsymbol{b}$ adalah dua vektor sebarang, maka jumlah $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ adalah vektor yang ditentukan sebagai berikut: Tempatkan vektor $\boldsymbol{b}$ sedemikian sehingga titik awalnya berhimpitan dengan titik akhir $\boldsymbol{a}$. Vektor $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ diwakili oleh anak panah dari titik awal $\boldsymbol{a}$ hingga titik akhir $\boldsymbol{b}$.

   Jika $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$ dan $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$, maka berlaku (Imrona, 2013:15):

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$$

2. Pengurangan Vektor

   Menurut Anton (2004:135) jika $\boldsymbol{a}$ dan $\boldsymbol{b}$ adalah dua vektor sebarang, maka selisih $\boldsymbol{b}$ dari $\boldsymbol{a}$ di definisikan oleh $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$.

   Jika $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$ dan $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$, maka berlaku (Imrona, 2013:15):

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}+(-1)\boldsymbol{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$$

3. Perkalian Vektor

   Menurut Anton (2004:135) jika $\boldsymbol{a}$ adalah vektor tidak nol dan k bilangan riil tidaknol (skalar), maka hasil kali $k\boldsymbol{a}$ didefinisikan sebagai vektor yang panjangnya $|k|$ kali panjang $\boldsymbol{a}$ dan arahnya sama seperti arah $\boldsymbol{a}$ jika $k>0$ dan berlawanan dengan arah $\boldsymbol{a}$ jika $k < 0$. Definisikan $k\boldsymbol{a} = 0$, dimana $k = 0$ atau $\boldsymbol{a} = 0$.

Jika $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ dan $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$, maka berlaku (Imrona, 2013:15):

$$k\boldsymbol{a} = (ka_1, ka_2, ka_3)$$

Misalkan $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ dan $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$, hasil kali silang antara $\boldsymbol{a}$ dan $\boldsymbol{b}$ adalah:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \hat{\imath} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \hat{\jmath} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \hat{k}$$

dimana $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, dan $\hat{k}$ merupakan vektor-vektor satuan dalam R^3.

2.1.3 Definisi Matriks

Menurut Anton (2004:26) suatu matriks adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut disebut entri dari matriks. Ukuran matriks dijelaskan dengan menyatakan banyaknya baris (garis hoizontal) dan banyaknya kolom (garis vertikal) yang terdapat dalam matriks tersebut.

Matriks adalah susunan bilangan atau fungsi yang tersusun dalam baris dan kolom serta diapit oleh dua kurung siku. Bilangan atau fungsi tersebut dinamakan elemen dari matriks. Matriks dilambangkan dengan huruf besar sedangkan elemen dilambangkan dengan huruf kecil. Pada matriks dikenal dengan ukuran matriks yang disebut ordo, yaitu banyak baris × banyak kolom (tanda × bukan menyatakan perkalian, tetapi hanya sebagai tanda pemisah), seperti contoh berikut (Imrona, 2013:1):

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$$

Matriks A berordo 2×4, dengan elemen $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{21}, a_{22}, a_{23}$ dan a_{24}.

Anton (2004:28) menyatakan bahwa dua matriks dikatakan sama atau setara jika keduanya mempunyai ukuran yang sama dan entri-entri yang bersesuaian dalam kedua matriks tersebut sama. Anggota pada baris *i* dan kolom *j* dari sebuah matriks *A* dinyatakan dengan a_{ij}. Jadi, sebuah matriks yang berdimensi *m x n* secara umum dapat dituliskan sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{21} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ atau } A_{mxn} = \{a_{ij}\} \qquad (2.2)$$

2.1.4 Operasi Matriks

1. Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Menurut Anton (2004:28) jika A dan B adalah matriks-matriks dengan ukuran yang sama, maka jumlah $A + B$ adalah matriks yang diperoleh dengan menjumlahkan entri-entri pada B dengan entri-entri yang bersesuaian pada A. Selisih $A - B$ adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangkan entri-entri pada A dengan entri-entri yang bersesuaian pada B. Matriks dengan ukuran yang berbeda tidak dapat dijumlahkan atau dikurangkan.

Misalkan $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, dengan $i = 1, 2, \ldots, m$ dan $j = 1, 2, \ldots, n$. Jumlah matriks A dan B, dinyatakan oleh $C = A + B$, yang memenuhi (Imrona, 2013:4):

Syarat : ordo *A* = ordo *B*

Aturan : $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ (elemen yang seletak dijumlahkan).

2. Perkalian Matriks dengan Skalar

Menurut Anton (2004:29) jika A adalah matriks sebarang dan c adalah skalar sebarang, maka hasil kali (*product*) cA adalah matriks yang diperoleh dari perkalian setiap entri pada matriks A dengan bilangan c. Matriks cA disebut sebagai kelipatan skalar dari A.

Misalkan $A = [a_{ij}]$, dengan $i = 1, 2, \dots, m$ dan $j = 1, 2, \dots, n$. Perkalian matriks A dengan skalar k dinyatakan oleh $C = kA$, yang memenuhi (Imrona, 2013:5):

Syarat : tidak ada

Aturan : $c_{ij} = k\, a_{ij}$ (setiap elemen matriks A dikalikan dengan skalar k).

3. Perkalian Dua Matriks

Menurut Anton (2004:30) jika A adalah matriks $m\, x\, r$ dan B adalah matriks $r\, x\, n$, maka hasilkali AB adalah matriks $m\, x\, n$ yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut: mencari entri pada baris i dan kolom j dari AB, pisahkan baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B. Kalikan entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut dan kemudian jumlahkan hasil kali yang diperoleh.

Jika $A = [a_{ij}]$, dengan $i = 1, 2, \dots, m$ dan $j = 1, 2, \dots, n$ dan $B = [b_{jk}]$ dengan $k = 1,2, \dots, r$, perkalian matriks A dan B yang dinyatakan oleh $C = AB$ memenuhi (Imrona, 2013:5):

Syarat : banyak kolom A = banyak baris B

Aturan : $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$ (jumlah dari semua perkalian antara elemen A pada baris ke-i dengan elemen B pada kolom ke-k).

Pada umumnya berlaku sifat $AB \neq BA$ (perkalian matriks tidak bersifat komutatif).

4. Transpos Matriks

Menurut Anton (2004:36) jika A adalah matriks $m\,x\,n$, maka transpos dari A dinyatakan dengan A', didefinisikan sebagai matriks $n\,x\,m$ yang didapatkan dengan mempertukarkan baris-baris dan kolom-kolom dari A, sehingga kolom pertama dari A' adalah baris pertama dari A, kolom kedua dari A' adalah baris kedua dari A, dan seterusnya.

Misalkan $A = [a_{ij}]$, dengan $i = 1, 2, \dots, m$ dan $j = 1, 2, \dots, n$. Transpos matriks A, dinyatakan oleh $B = A'$, didefinisikan sebagai berikut (Imrona, 2013:6):

Syarat : tidak ada

Aturan : $b_{ij} = a_{ij}$ (kolom matriks A menjadi baris matriks A').

Menurut Anton (2004:51), jika ukuran matriks seperti operasi yang diberikan dapat dilakukan, maka:

a. $(A')' = A$

b. $(A + B)' = A' + B'$

c. $(kA)' = (kA)'$, dimana k adalah sebarang skalar

d. $(AB)' = B'A'$

5. Invers Matriks

Anton (2004:46) menyatakan bahwa jika A adalah matriks bujursangkar, dan jika terdapat matriks B yang ukurannya sama sedemikian sehingga $AB = BA = I$, maka A dikatakan dapat dibalik (*invertible*) dan B dinamakan invers (*inverse*) dari A. Jika matriks B tidak dapat didefinisikan, maka A dinyatakan sebagai matriks singular.

Matriks A dapat dibalik, jika $\det(A) \neq 0$, maka inversnya dapat dihitung dengan rumus (Anton, 2004:48):

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) \tag{2.3}$$

Matriks bujursangkar, $A = [a_{ij}]$ dengan $i = 1, 2, \dots, n$ dan $j = 1, 2, \dots, n$, disebut mempunyai invers apabila terdapat matriks A^{-1} sedemikian sehingga (Imrona, 2013:39):

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

dimana I merupakan matriks satuan.

6. Determinan Matriks

Misalkan A adalah suatu matriks bujursangkar. Fungsi determinan dinotasikan dengan "det" dan didefinisikan $\det(A)$ sebagai jumlah dari hasil kali elementer bertanda dari A. $\det(A)$ disebut determinan dari A (Anton, 2004:94).

Lambang determinan matriks A adalah $\det(A)$ atau $|A|$. Determinan dari matriks 2×2 sebagai berikut (Imrona, 2013:49):

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{2.4}$$

Lambang $|\dots|$ di sini bukanlah lambang nilai mutlak, akan tetapi lambang determinan. Matriks 3×3, determinan didefinisikan sebagai berikut:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{2.5}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Menurut Anton (2004:108) jika A dan B adalah matriks bujursangkar yang ukurannya sama, maka $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Jika A dapat dibalik, maka:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

7. *Rank* Matriks

Anton (2004:294) menyatakan bahwa dimensi umum dari ruang baris dan ruang kolom dari suatu matriks A disebut *rank* dari A dan dinyatakan sebagai $\text{rank}(A)$. *Rank* suatu matriks merupakan ordo atau dimensi dari submatriks bujursangkar terbesar dan mempunyai determinan tidak sama dengan nol.

Contoh: $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 0 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Contoh di atas menghasilkan $|A| = 0$, sehingga A adalah matriks singular karena mempunyai determinan = 0. Jadi, meskipun ordonya 3 x 3, *rank*nya adalah kurang dari 3. Diperoleh *rank* sama dengan 2 karena submatriks yang berukuran 2 x 2 didapatkan determinan yang tidak nol. Misalnya saja dengan menghilangkan baris pertama dan kolom pertama dari A, diperoleh matriks $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, dengan $\det(A) = -6$ yang tidak sama dengan 0. Oleh karena itu, tingkat atau rank dari **A** adalah 2 (Gujarati, 1999:383).

8. Turunan Matriks

Menurut Gujarati (1999:385) jika $A' = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n]$ adalah suatu vektor baris dari angka-angka dan $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$ adalah vektor kolom dari variabel $X_1, X_2, \dots, X_n$, sehingga:

$$\frac{\partial(A'X)}{\partial X} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = A \tag{2.6}$$

Bukti:

$$\frac{\partial(A'X)}{\partial X} = \frac{\partial(A'X)}{\partial \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}}$$

$$= \frac{\partial(a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n)}{\partial \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial(A'X)}{\partial X_1} \\ \frac{\partial(A'X)}{\partial X_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial(A'X)}{\partial X_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = A$$

Perhatikan matriks $X'AX$ sedemikian rupa, jika

$$X'AX = [X_1 \quad X_2 \quad \dots \quad X_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

maka diferensial matriks tersebut adalah (Gujarati, 1999:385):

$$\frac{\partial(X'AX)}{\partial X} = 2AX \tag{2.7}$$

X merupakan vektor kolom dari n elemen, atau

$$\frac{\partial(X'AX)}{\partial X} = 2X'A \tag{2.8}$$

X merupakan vektor baris dari n elemen.

Bukti:

$$X'AX = [X_1 \quad X_2 \quad \dots \quad X_n]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

$$= [a_{11}X_1 + \cdots + a_{n1}X_n \quad a_{12}X_1 + \cdots + a_{n2}X_n$$

$$\dots \quad a_{1n}X_1 + \cdots + a_{nn}X_n]\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

$$= (a_{11}X_1 + \cdots + a_{n1}X_n)X_1 + (a_{12}X_1 + \cdots + a_{n2}X_n)X_2 +$$

$$\dots + (a_{1n}X_1 + \cdots + \quad a_{nn}X_n)X_n$$

$$= a_{11}X_1^2 + \cdots + a_{n1}X_nX_1 + a_{12}X_1X_2 + \cdots + a_{n2}X_nX_2$$

$$+a_{1n}X_1X_n + \cdots + a_{nn}X_n^2$$

$$\frac{\partial(X'AX)}{\partial X} = \frac{\partial(X'AX)}{\partial\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial(X'AX)}{\partial X_1} \\ \frac{\partial(X'AX)}{\partial X_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial(X'AX)}{\partial X_n} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + \cdots + a_{1n}X_n) \\ 2(a_{12}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + \cdots + a_{2n}X_n) \\ \vdots \\ 2(a_{1n}X_1 + a_{2n}X_2 + a_{3n}X_3 + \cdots + a_{nn}X_n) \end{bmatrix}$$

$$= 2\begin{bmatrix} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + \cdots + a_{1n}X_n \\ a_{12}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + \cdots + a_{2n}X_n \\ \vdots \\ a_{1n}X_1 + a_{2n}X_2 + a_{3n}X_3 + \cdots + a_{nn}X_n \end{bmatrix}$$

$$= 2\sum a_{ij}X_i$$

$$= 2AX$$

Sistem Persamaan Linier

Menurut Anton (2004:2) sebuah garis yang terletak pada bidang xy dapat dinyatakan secara aljabar dalam suatu persamaan berbentuk:

$$a_1x + a_2y = b$$

dimana $a_1, a_2,$ dan b merupakan konstanta real, dan a_1, a_2 tidak sama dengan nol. Persamaan ini disebut persamaan linier dengan variabel x dan y. Secara umum, bentuk persamaan linier didefinisikan dengan n variabel $x_1, x_2, \dots, x_n$ yaitu:

$$\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \dots + \alpha_nx_n = b$$

dimana $a_1, a_2, \dots, a_n$ dan b merupakan konstanta real, $x_1, x_2, \dots, x_n$ merupakan variabel bebas, dan b disebut suku konstan.

Imrona (2013:28) menyatakan bahwa sistem persamaan linier (SPL) adalah sehimpunan persamaan linier yang menjadi satu kesatuan, antar persamaan linier saling terikat. Bentuk umum sistem persamaan linear adalah:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n &= b_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \dots + \alpha_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \qquad (2.9)$$

Penyelesaian sistem persamaan linear adalah penyelesaian setiap persamaan linear yang terdapat dalam sistem persamaan linear tersebut.

2.2.1 Sistem Persamaan Linier Sederhana

Perhatikan suatu sistem yang terdiri dari dua persamaan linear dengan dua variabel tidak diketahui x dan y, dinyatakan dengan (Seymour & Marc. 2006:54):

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1, \qquad (a_1, b_1 \neq 0) \\ a_2x + b_2y &= c_2, \qquad (a_2, b_2 \neq 0) \end{aligned} \tag{2.10}$$

Menurut Seymour & Marc (2006:54) menyatakan bahwa solusi umum dari persamaan di atas merupakan salah satu dari tiga tipe penyelesaian. Dan ketiga tipe tersebut adalah:

1. Sistem tidak memiliki penyelesaian

   Dalam hal ini kedua garis saling sejajar. Ini terjadi ketika dua garis memiliki kemiringan yang sama tetapi dengan titik potong pada sumbu y yang berbeda, atau ketika:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

2. Sistem memiliki tepat satu penyelesaian

   Dalam hal ini kedua garis berpotongan di satu titik. Ini terjadi jika garis-garis memiliki kemiringan yang berbeda atau jika koefisien dari x dan y tidak sebanding (proposional):

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

   atau ekuivalen dengan

$$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$$

3. Sistem memiliki tak terhingga banyaknya penyelesaian

Dalam hal ini kedua garis berhimpitan. Ini terjadi jika kedua garis memiliki kemiringan yang sama dan titik potong pada sumbu y yang sama, atau ketika koefisien-koefisien dan konstanta-konstantanya sebanding (proposional):

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

2.2.2 Sistem Persamaan Linier Berganda

Bentuk umum persamaan linear dengan m persamaan dengan n variabel yang tidak diketahui sebagai berikut (Supranto. 1984:205):

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh:

$$AX = B$$

Penyelesaian dari sistem persamaan tersebut adalah dengan menggunakan metode invers, yaitu (Supranto. 1984:198):

$$AX = B$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$IX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -11 \\ -16 \\ 21 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{19} \begin{bmatrix} 9 & -23 & -11 \\ 1 & 8 & -3 \\ -3 & 14 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -11 \\ -16 \\ 21 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh penyelesainnya adalah $x_1 = 2$, $x_2 = -4$, dan $x_3 = 1$.

Metode invers tersebut digunakan apabila matriks A adalah matriks bujursangkar $(n \times n)$ dan non singular. Jika matriks A bukan matriks bujursangkar atau matriks A adalah matriks bujursangkar yang singular maka metode yang digunakan adalah invers semu (*pseudoinverse)*, sehingga solusinya sebagai berikut: (Aziz. 2010:19)

$$AX = B$$

$$(A'A)X = A'B$$

$$(A'A)^{-1}(A'A)X = (A'A)^{-1}A'B$$

$$X = (A'A)^{-1}A'B$$

2.3 Korelasi dan Regresi Linier

2.3.1 Korelasi

Menurut Algifari (2000:45) bahwa analisis korelasi adalah alat statistik yang dapat digunakan untuk mengetahui derajat hubungan linier antara satu variabel dengan variabel lain. Umumnya analisis korelasi digunakan dalam hubungannya dengan analisis regresi untuk mengukur ketepatan garis regresi dalam menjelaskan variasi nilai variabel terikat. Ukuran statistik yang dapat menggambarkan hubungan antara suatu variabel dengan variabel lain adalah koefisien determinasi dan koefisien korelasi.

Koefisien determinasi adalah salah satu nilai statistik yang dapat digunakan untuk mengetahui apakah ada hubungan pengaruh antara dua variabel. Nilai koefisien determinasi menunjukkan persentase variasi nilai variabel dependen yang dapat dijelaskan oleh persamaan regresi yang dihasilkan (Algifari, 2000:45):

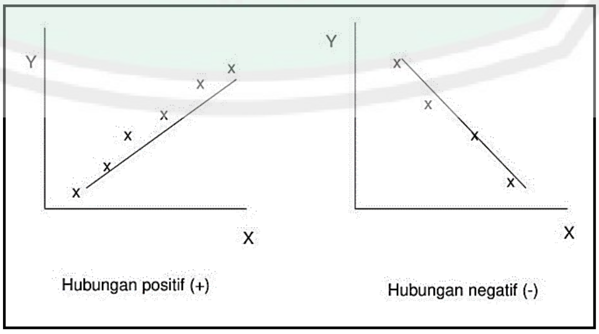
$$R^2 = \frac{(n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i)^2}{[n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2][n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} y_i)^2]} \qquad (2.11)$$

dan rumus untuk menghitung koefisien relasinya (Algifari, 2000:53):

$$r = \sqrt{\frac{[n(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i) - (\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} y_i)]^2}{[n(\sum_{i=1}^{n} x_i^2) - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2][n(\sum_{i=1}^{n} y_i^2) - (\sum_{i=1}^{n} y_i)^2]}}$$

$$= \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} y_i)^2}} \qquad (2.12)$$

Korelasi merupakan angka yang menunjukkan arah dan kuatnya hubungan antar variabel atau lebih. Artinya dinyatakan dalam bentuk hubungan positif atau negatif, sedangkan kuatnya hubungan dinyatakan mengunakan besarnya koefisien korelasi. Hubungan dua variabel atau lebih dinyatakan positif, apabila nilai satu variabel ditingkatkan maka akan meningkatkan variabel yang lain, dan apabila nilai satu variabel diturunkan maka akan menurunkan variabel yang lain. Sedangkan hubungan dua variabel atau lebih dinyatakn negatif, apabila nilai satu variabel ditingkatkan maka akan menurunkan variabel yang lain, dan apabila nilai satu variabel diturunkan maka akan meningkatkan variabel yang lain.



Gambar 2.1 Korelasi Positif dan Negatif

Kuatnya hubungan antara variabel dinyatakan dalam koefisien korelasi. Koefisien korelasi positif terbesar = 1 dan koefisien korelasi negatif terbesar = -1, sedangkan yang terkecil = 0. Apabila besarnya antara dua variabel atau lebih itu mempunyai koefisien korelasi = 1 atau -1, maka hubungan tersebut sempurna. Dalam arti kejadian-kejadian pada varaibel yang satu akan dapat dijelaskan atau diprediksikan oleh variabel yang lain tanpa terjadi kesalahan (*error*).

Tabel 2.1 Interpretasi Terhadap Koefisien Korelasi

Interval Koefisien	Tingkat Hubungan
0,00 – 0,199	Sangat Rendah
0,20 – 0,399	Rendah
0,40 – 0,599	Sedang
0,60 – 0,799	Kuat
0,80 – 1,00	Sangat Kuat

Sifat-sifat koefisien korelasi (Algifari, 2000:54):

1. Koefisien korelasi dapat positif atau negatif, tanda bergantung dari tanda kovarian dari dua variabel tersebut.
2. Besarnya koefisien korelasi dari -1 sampai dengan 1, jadi dapat ditulis $-1 \leq r \leq 1$.
3. Koefisien memiliki sifat simetris, artinya koefisien korelasi antara X dan Y sama dengan koefisien korelasi y dan x.
4. Koefisien memiliki korelasi bebas dari pengaruh nilai asli dan nilai skala. Artinya, jika $x^* = ax + c$ dan $y^* = by + d$, dimana $a > 0, b > 0$, dan c, d adalah konstan, maka koefisien korelasi antara x^* dan y^* sama dengan korelasi antara variabel aslinya, yaitu antara x dan y.

5. Koefisien korelasi hanya ukuran derajat hubungan linier saja, tidak mampu memberikan gambaran mengenai derajat hubungan non linier.

2.3.2 Regresi Linier Sederhana

Analisis regresi bertujuan untuk menunjukkan hubungan matematis antara variabel terikat dengan variabel bebas. Secara umum, model regresi linear dengan satu variabel adalah sebagai berikut (Supranto, 2009:182):

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + u \tag{2.13}$$

dimana:

y : variabel terikat

x : variabel bebas

β: parameter konstanta yang tidak diketahui nilainya dan harus diestimasi

u : galat

2.3.3 Regresi Linier Berganda

Menentukan nilai variabel terikat (y) perlu diperhatikan variabel bebas (x) yang mempengaruhinya terlebih dahulu, dengan demikian harus diketahui hubungan antara satu variabel terikat dengan beberapa variabel bebas. Jika semua variabel bebas diketahui, maka dapat dipergunakan model persamaan regresi linier berganda sebagai berikut (Supranto, 2009:239):

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \cdots + \beta_K x_{Ki} + u_i \tag{2.14}$$

dimana:

y = variabel terikat

x = variabel bebas

β = parameter konstanta yang tidak diketahui nilainya dan harus diestimasi

u = galat

$i = 1,2,\dots,n$

2.3.4 Pendekatan Matriks Dalam Model Regresi Linier

Sumodiningrat (1994:193) menyatakan bahwa model regresi dengan variabel terikat y dan k variabel bebas $x_1, x_2, \dots, x_k$ dengan $i = 1,2,\dots,n$, ditulis:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + u_i$$

Oleh karena *i* menunjukkan banyaknya observasi, sehingga terdapat *n* persamaan sebagai berikut (Sumodiningrat, 1994:193):

$$\begin{array}{l} y_1 = \beta_0 + \beta_1 x_{11} + \beta_2 x_{12} + \beta_3 x_{13} + \cdots + \beta_k x_{1k} + u_1 \\ y_2 = \beta_0 + \beta_1 x_{21} + \beta_2 x_{22} + \beta_3 x_{23} + \cdots + \beta_k x_{2k} + u_2 \\ \vdots \quad\;\; \vdots \quad\;\; \vdots \qquad\; \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \vdots \qquad\; \vdots \qquad \vdots \\ y_n = \beta_0 + \beta_1 x_{n1} + \beta_2 x_{n2} + \beta_3 x_{n3} + \cdots + \beta_k x_{nk} + u_n \end{array}$$

dapat ditulis dalam bentuk matriks:

$$y = X\beta + u \tag{2.15}$$

dimana:

$$y_{n\times 1} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad x_{n\times(k+1)} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots & x_{2k} \\ 1 & x_{31} & x_{32} & x_{33} & \cdots & x_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix}$$

$$\beta_{(k+1)\times 1} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} \qquad u_{n\times 1} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

Mendapatkan estimasi β dengan menententukan dua vektor ($\hat{\beta}$ dan u) sebagai berikut (Sumodiningrat, 1994:194):

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix} \qquad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

hasil estimasi dari persamaan (2.15) dapat ditulis:

$$y = X\hat{\beta} + u$$

$$u = y - X\hat{\beta}$$

Sekarang meminimumkan:

$$\sum_{i=1}^{n} {u_i}^2 = {u_1}^2 + {u_2}^2 + \cdots + {u_n}^2$$

$$= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

$$= u'u \tag{2.16}$$

Jadi

$$u^2 = u'u$$

$$= \left(y - X\hat{\beta}\right)'\left(y - X\hat{\beta}\right)$$

$$= y'y - \hat{\beta}'X'y - y'X\hat{\beta} + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}$$

Oleh karena $\hat{\beta}'X'y$ adalah skalar (1×1), sehingga matriks transposnya adalah Sumodiningrat (1994:194):

$$\hat{\beta}'X'y = y'X\hat{\beta}$$

Jadi

$$u'u = y'y - 2\hat{\beta}'X'y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta} \tag{2.17}$$

2.4 Distribusi Normal

Distribusi normal pertama kali diperkenalkan oleh Abraham De Moivre seorang ahli metematika berkebangsaan Perancis yang melarikan diri ke Inggris sekitar tahun 1685. Distribusi Normal mempunyai model kurva berbentuk simetris setangkup, menyerupai genta di sekitar satu nilai yang bertepatan dengan puncak kurva yang menjulur ke kiri dan menjulur ke kanan mendekati sumbu datar sebagai asimtotnya (Wibisono, 2005:290).

Sebuah variabel random X mengikuti distribusi normal dengan mean μ dan varian $\sigma^2 > 0$ dapat dilambangkan dengan $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Fungsi kepadatan peluang dari distribusi normal dapat ditulis dalam bentuk Sumodiningrat (1994:38):

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad (2.18)$$

Dimana $-\infty < X < \infty$, $-\infty < \mu < \infty$ dan $0 < \sigma < \infty$.

Jika $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, maka $\mathrm{Z} = \frac{X-\mu}{\sigma}$ mengikuti distribusi normal standar dengan fungsi kepadatan peluang (Sumodiningrat, 1994:39):

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}z^2\right] \qquad (2.19)$$

dimana $-\infty < z < \infty$. Mempunyai mean 0 dan varian 1 atau dapat ditulis $\mathrm{Z} = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

Winarno (2007:3.10) menjelaskan bahwa salah satu uji untuk mengetahui sifat normalitas dari data yaitu menggunakan Uji *Jarque-Bera* (JB). Uji JB adalah salah satu uji normalitas jenis *goodness of fit test* yang mana mengukur apakah *skewness* dan *kurtosis* sampel sesuai dengan distribusi normal. Uji ini didasarkan pada kenyataan bahwa nilai *skewness* dan *kurtosis* dari distribusi normal sama dengan nol. Oleh karena itu, nilai absolut dari parameter ini bisa menjadi ukuran penyimpangan distribusi dari normal. Pada penerapannya nilai JB dibandingkan dengan nilai Chi-Square (χ^2) tabel sebagai berikut:

$$f \equiv \frac{p(p+1)(p+2)}{6}$$

$$\equiv \frac{1(1+1)(1+2)}{6} = 1$$

dimana p = dimensi, maka nilai tabel ${\chi^2}_{f+1} = {\chi^2}_{1+1} = {\chi^2}_2$. sehingga diperoleh derajat kebebasan (df) sebesar 2.

Adapun langkah-langkah untuk melakukan uji normalitas dengan uji JB adalah (Winarno, 2007:9):

1. Menghitung nilai *Skewness* dan nilai *Kurtosis*

   Skewness (kemencengan) adalah ukuran asimetri distribusi data di sekitar mean. Jadi, *Skewness* memberikan informasi tentang kesimetrian sebuah distribusi probabilitas. *Skewness* diukur dengan rumus:

$$Skewness = \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}}\left(\frac{\mathrm{Y_i}-\bar{\mathrm{Y}}}{\hat{\sigma}}\right)^3 \qquad (2.20)$$

   $\hat{\sigma}$ adalah estimator deviasi standar yang dihitung berdasarkan rumus:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}}(\mathrm{Y_i}-\bar{\mathrm{Y}})^2}{\mathrm{N}-1}}\sqrt{\frac{\mathrm{N}-1}{\mathrm{N}}} = \sqrt{\frac{\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}}(\mathrm{Y_i}-\bar{\mathrm{Y}})^2}{\mathrm{N}}} \qquad (2.21)$$

   Suatu distribusi dikatakan normal jika *skewness* mendekati nol. *Positive skewness* menunjukkan bahwa distribusi datanya memiliki ekor panjang di sisi kanan, dan *negatif skewness* memiliki ekor panjang di sisi kiri.

   Kurtosis mengukur ketinggian suatu distribusi, dengan rumus sebagai berikut:

$$Kurtosis = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{Y_i - \overline{Y}}{\hat{\sigma}}\right)^4 \qquad (2.22)$$

Suatu distribusi dikatakan normal jika nilai *kurtosis* mendekati 3. Bila *kurtosis* melebihi 3, maka distribusi data dikatakan *leptokurtic* terhadap normal. Bila *kurtosis* kurang dari 3, distribusi datanya datar (*platykurtic*) dibanding dengan data berdistribusi normal.

Apakah serangkaian data mendekati distribusi normal dapat dievaluasi secara informal dengan memeriksa nilai rata-rata dan nilai median, kemencengan mendekati nol, dan *kurtosis* mendekati tiga.

2. Menghitung nilai JB

$$JB = \frac{N}{6}\left(Skewness^2 + \frac{(Kurtosis-3)^2}{4}\right) \qquad (2.23)$$

3. Sehingga untuk mengambil keputusan apakah data berdistribusi normal atau tidak, dapat dilakukan dengan membandingkan nilai JB hitung dengan nilai χ^2 tabel. Aturan pengambilan keputusannya adalah sebagai berikut:
   - Jika nilai JB hitung > dari nilai χ^2 tabel

     Maka hipotesis menyatakan bahwa data berdistribusi normal ditolak.
   - Jika nilai JB hitung < nilai χ^2 tabel

     Maka hipotesis menyatakan bahwa data berdistribusi normal diterima.

Pengambilan keputusan dapat juga dilakukan dengan melihat nilai probabilitas dari JB hitung. Jika nilai probabilitas JB lebih kecil dari α, maka hipotesis nol ditolak, sehingga dapat disimpulkan bahwa data tidak berdistribusi normal. Sebaliknya, jika nilai probabilitas JB lebih besar dari α, maka hipotesis nol diterima, sehingga dapat disimpulkan bahwa data berdistribusi normal.

2.5 Sistem Persamaan Simultan

Menurut Ekananda (2015:304), sistem persamaan simultan atau model persamaan simultan adalah suatu himpunan persamaan dengan variabel terikat dalam satu atau lebih persamaan, juga merupakan variabel bebas dalam beberapa persamaan lainnya, yaitu satu variabel sekaligus mempunyai dua peranan yaitu sebagai variabel terikat dan variabel bebas.

Ada situasi di mana hubungan satu arah antara Y dan X seperti itu tidak bisa dipertahankan. Sangat mungkin bahwa X tidak hanya memepengaruhi Y, tetapi Y juga bisa mempengaruhi satu X atau lebih. Oleh karena itu, dalam sistem persamaan simultan ini hubungan sebab akibat yang terjadi berlangsung dua arah. Selain itu, dalam sistem persamaan simultan terdapat lebih dari satu persamaan. Hal ini jelas berbeda dengan model persamaan tunggal yang hanya memiliki satu persamaan saja. Jumlah persamaan dalam sistem persamaan simultan tersebut adalah sama dengan jumlah variabel tak bebas (Gujarati, 1999:307).

2.5.1 Notasi Umum Sistem Persamaan Simultan

Secara umum, bentuk persamaan struktural sistem persamaan simultan dapat ditulis sebagai berikut (Kmenta, 1990:655):

$$
\begin{gathered}
\beta_{11}y_{1t} + \beta_{12}y_{2t} + \cdots + \beta_{1M}y_{Mt} + \gamma_{11}x_{1t} + \gamma_{12}x_{2t} + \cdots + \gamma_{1K}x_{Kt} = u_{1t} \\
\beta_{21}y_{1t} + \beta_{22}y_{2t} + \cdots + \beta_{2M}y_{Mt} + \gamma_{21}x_{1t} + \gamma_{22}x_{2t} + \cdots + \gamma_{2K}x_{Kt} = u_{2t} \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
\beta_{M1}y_{1t} + \beta_{M2}y_{2t} + \cdots + \beta_{MM}y_{Mt} + \gamma_{M1}x_{1t} + \gamma_{M2}x_{2t} + \cdots + \gamma_{MK}x_{Kt} = u_{Mt}
\end{gathered}
\tag{2.24}
$$

Misalkan:

$$\mathrm{Y} = \begin{bmatrix} \mathrm{y}_{1\mathrm{t}} \\ \mathrm{y}_{2\mathrm{t}} \\ \vdots \\ \mathrm{y}_{M\mathrm{t}} \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{X} = \begin{bmatrix} \mathrm{x}_{1\mathrm{t}} \\ \mathrm{x}_{2\mathrm{t}} \\ \vdots \\ \mathrm{x}_{K\mathrm{t}} \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{U} = \begin{bmatrix} \mathrm{u}_{1\mathrm{t}} \\ \mathrm{u}_{2\mathrm{t}} \\ \vdots \\ \mathrm{u}_{M\mathrm{t}} \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1M} \\ \beta_{21} & \beta_{21} & \cdots & \beta_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{M1} & \beta_{M1} & \cdots & \beta_{MM} \end{bmatrix}, \qquad \Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1K} \\ \gamma_{21} & \gamma_{21} & \cdots & \gamma_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{M1} & \gamma_{M1} & \cdots & \gamma_{MK} \end{bmatrix}$$

Maka ditulis menjadi:

$$\mathrm{BY} + \Gamma\mathrm{X} = \mathrm{U} \tag{2.25}$$

Keterangan:

Y = Vektor variabel endogen berukuran *M* x 1

X = Vektor variabel *predetermined* berukuran *K* x 1

U = Vektor galat berukuran *M* x 1

B = Matriks koefisien variabel endogen berukuran *M* x *M*

Γ = Matriks koefisien variabel *predetermined* berukuran *M* x *K*

Menurut Gujarati (1999:320), model sistem persamaan umum dalam *M* variabel endogen dapat ditulis sebagai persamaan:

$$\begin{aligned} y_{1t} &= \beta_{12}y_{2t} + \beta_{13}y_{3t} + \cdots + \beta_{1M}y_{Mt} + \gamma_{11}x_{1t} + \gamma_{12}x_{2t} + \cdots \\ &\quad + \gamma_{1K}x_{Kt} + u_{1t} \\ y_{2t} &= \beta_{21}y_{1t} + \beta_{23}y_{3t} + \cdots + \beta_{2M}y_{Mt} + \gamma_{21}x_{1t} + \gamma_{22}x_{2t} + \cdots \\ &\quad + \gamma_{2K}x_{Kt} + u_{2t} \\ y_{3t} &= \beta_{31}y_{1t} + \beta_{32}y_{2t} + \cdots + \beta_{3M}y_{Mt} + \gamma_{31}x_{1t} + \gamma_{32}x_{2t} + \cdots \qquad (2.26) \\ &\quad + \gamma_{3K}x_{Kt} + u_{3t} \\ \vdots \quad & \quad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ y_{Mt} &= \beta_{M1}y_{1t} + \beta_{M2}y_{2t} + \cdots + \beta_{M,(M-1)}y_{(M-1),t} + \gamma_{M1}x_{1t} + \gamma_{M2}x_{2t} \end{aligned}$$

$$+\cdots+\gamma_{Mk}x_{Kt}+u_{Mt}$$

dimana:

$y_1, y_2, \ldots y_M$ = M variabel endogen pada sistem persamaan simultan

$x_1, x_2, \ldots, x_K$ = K variabel *predetermined* pada sistem persamaan simultan

$u_1, u_2, \ldots, u_M$ = M galat pada sistem persamaan simultan

$t = 1,2, \ldots, n$ = Banyaknya observasi total pada periode ke-t

β = Koefisien variabel endogen

γ = Koefisien variabel *predetermined*

Gujarati (1999:308) memberikan contoh model sistem persamaan simultan dalam 2 variabel endogen dan 1 variabel *predetermined* sebagai berikut:

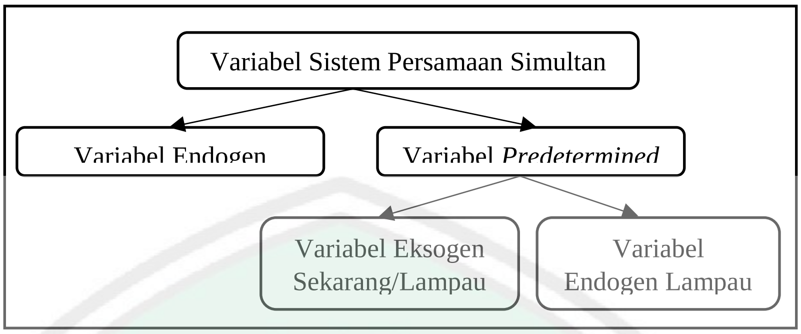
$$y_{1t}=\beta_{10}+\beta_{12}y_{2t}+\gamma_{11}x_{1t}+u_{1t} \quad (2.27.a)$$

$$y_{2t}=\beta_{20}+\beta_{21}y_{1t}+\gamma_{21}x_{1t}+u_{2t} \quad (2.27.b)$$

y_1 dan y_2 adalah variabel endogen, x_1 adalah variabel *predetermined*, u_1 dan u_2 adalah variabel galat. Variabel y_1 dan y_2 kedua-duanya stokastik, oleh karena itu dapat ditunjukkan bahwa variabel yang menjelasakan y_2 yang bersifat stokastik dalam persamaan (2.27.a) didistribusikan secara bebas dari u_1 dan variabel yang menjelaskan y_1 yang bersifat stokastik dalam persamaan (2.27.b) didistribusikan secara bebas dari u_2, penerapan OLS klasik untuk persamaan-persamaan ini secara individual akan membawa ke estimasi parameter yang tak konsisten.

2.5.2 Variabel Sistem Persamaan Simultan

Menurut Gujarati (1999:320), variabel-variabel yang masuk dalam sistem persamaan simultan ada dua jenis yaitu bersifat endogen (yaitu variabel-variabel yang nilainya ditetapkan di dalam sistem) dan ditetapkan lebih dulu (*predetermined*) (yaitu variabel-variabel yang nilainya ditetapkan di luar sistem).



Gambar 2.2 Variabel Sistem Persamaan Simultan

Variabel endogen diperlakukan sebagai variabel stokastik, dan nilai-nilainya ditentukan dengan memasukkan nilai variabel-variabel lain di dalam sistem. Variabel *predetermined* diperlakukan sebagai variabel non-stokastik yang nilai-nilainya sudah tertentu atau sudah ditentukan. Umumnya, notasi *y* dipakai sebagai simbol variabel endogen, sedangkan notasi *x* untuk variabel *predetermined* (Gujarati, 1999:320).

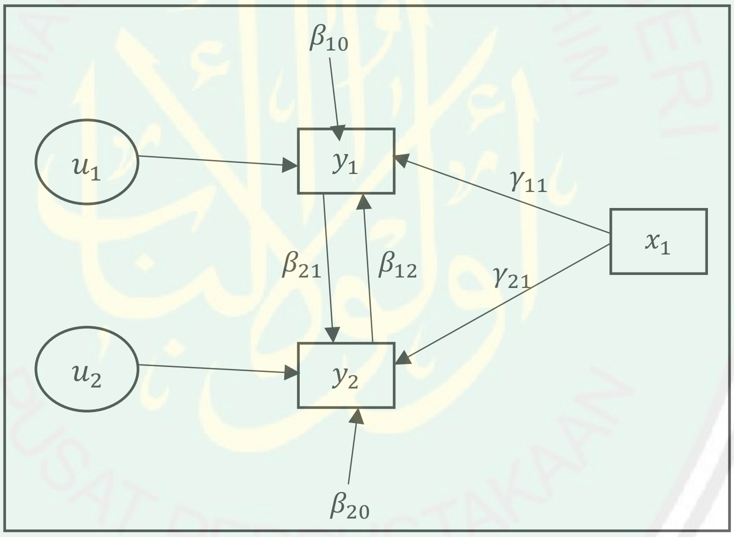
Menurut Ekananda (2015:304), variabel endogen adalah variabel terikat di dalam sistem persamaan simultan yang nilainya ditentukan di dalam model, walaupun variabel tersebut mungkin juga muncul sebagai variabel bebas di dalam sistem persamaan simultan. Sedangkan variabel *predetermined* adalah variabel yang nilainya tidak ditentukan secara langsung di dalam model. Variabel *predetermined* dibagi menjadi dua, yaitu variabel eksogen dan variabel lag endogen. Variabel lag diasumsikan tidak ada korelasi serial dengan galat di dalam persamaan yang mengandung variabel lag tersebut.

Variabel *predetermined* dapat digolongkan lagi menjadi dua, yaitu (Gujarati, 1999:320):

1. Variabel eksogen, baik yang merupakan eksogen sekarang maupun eksogen waktu lampau. Misalnya, x_t adalah variabel eksogen sekarang, dan x_{t-1} merupakan variabel eksogen waktu lampau.
2. Variabel endogen waktu lampau. Misalnya y_{t-1}.

Jadi, x, x_{t-1}, dan y_{t-1} adalah variabel *predetermined*, yang nilai-nilainya tidak ditentukan oleh sistem dalam periode waktu sekarang. Setiap variabel yang akan dipakai dalam sistem persamaan simultan terlebih dahulu harus digolong-golongkan secara jelas sebelum sampai pada langkah estimasi.

Lebih jelasnya perhatikan sistem persamaan simultan pada persamaan (2.27) secara skematis dapat digambar seperti berikut:



Gambar 2.3 Sistem Persamaan Simultan

dimana y adalah variabel endogen, x adalah variabel *predetermined*, dan u adalah galat.

2.5.3 Masalah Identifikasi Sistem Persamaan Simultan

Gujarati (1999:322) mendefinisikan bahwa masalah identifikasi adalah apakah estimasi angka dari parameter persamaan struktural dapat diperoleh dari koefisien bentuk reduksi yang diestimasi. Jika hal ini dapat dilakukan, maka dapat dikatakan bahwa persamaan tersebut teridentifikasi (*identified*). Jika tidak dapat dilakukan, maka dapat dikatakan bahwa persamaan tersebut tidak teridentifikasi (*unidentified*) atau kurang teridentifikasi (*underidentified*).

Suatu sistem persamaan dikatakan *exactly identified* apabila nilai parameter yang unik dapat diperoleh, artinya hanya ada satu nilai untuk setiap koefisien parameter struktural. *Over identified* apabila dapat diperoleh lebih dari satu nilai parameter persamaan struktural. *Under identified* apabila tidak dapat diperoleh nilai parameter persamaan struktural. *Identified* apabila mungkin untuk mendapatkan nilai parameter dari estimasi persamaan reduksi (Ekananda, 2015:304).

2.5.4 Aturan Identifikasi Sistem Persamaan Simultan

Menurut Sumodiningrat (1994:386) bahwa cara lain yang dapat dikembangkan untuk melakukan identifikasi persamaan adalah identifikasi kondisi *order* dan *rank*. Oleh karena itu, sebelum menguji kondisi identifikasi, terlebih dahulu harus dibuat kerangka bentuk umum dari sistem persamaan simultan.

Memahami kondisi *order* dan *rank*, diberikan notasi-notasi sebagai berikut (Gujarati, 1999:329):

M = Banyaknya variabel endogen dalam sistem

m = Banyaknya variabel endogen dalam sebuah persamaan tertentu

K = Banyaknya variabel *predetermined* dalam sistem

k = Banyaknya variabel *predetermined* dalam sebuah persamaan tertentu.

2.5.4.1 Identifikasi Kondisi Order

Sumodiningrat (1994:386) menyatakan bahwa kondisi *order* merupakan kondisi yang diperlukan tetapi belum cukup untuk memastikan kondisi identifikasi. Kondisi *order* menyatakan bahwa syarat identifikasi dari suatu persamaan struktural adalah jumlah variabel *predetermined* yang tidak dimasukkan dalam persamaan, sekurang-kurangnya harus sebanyak jumlah variabel endogen yang terdapat dalam persamaan dikurangi satu.

Gujarati (1999:330) menjelaskan bahwa identifikasi terhadap kondisi *order* yaitu dalam sebuah model yang terdiri dari M persamaan simultan, agar sebuah persamaan teridentifikasi, apabila jumlah variabel *predetermined* yang dikeluarkan dari persamaan itu, harus tidak lebih dari jumlah variabel endogen yang dimasukkan di dalam persamaan itu dikurangi satu, yaitu:

$$\mathrm{K}-\mathrm{k} \geq \mathrm{m}-1 \tag{2.28}$$

Jika $\mathrm{K}-\mathrm{k}=\mathrm{m}-1$, maka persamaan itu tepat, tetapi jika $\mathrm{K}-\mathrm{k}>\mathrm{m}-1$, maka persamaan itu terlalu teridentifikasi.

Sebagai gambaran terhadap identifikasi kondisi *order* dan *rank*, anggaplah sistem persamaan simultan hipotesis berikut di bawah ini (Ekananda, 2015:314):

$$\begin{aligned}
y_{1t} &= \beta_{10}+\beta_{12}y_{2t}+\beta_{13}y_{3t}+\gamma_{11}x_{1t}+u_{1t}\\
y_{2t} &= \beta_{20}+\beta_{23}y_{3t}+\gamma_{21}x_{1t}+\gamma_{22}x_{2t}+u_{2t}\\
y_{3t} &= \beta_{30}+\beta_{31}y_{1t}+\gamma_{31}x_{1t}+\gamma_{32}x_{2t}+u_{3t}\\
y_{4t} &= \beta_{40}+\beta_{41}y_{1t}+\beta_{42}y_{2t}+\gamma_{43}x_{3t}+u_{4t}
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Pertama, menentukan identifikasi sistem persamaan simultan terhadap kondisi *order* seperti tabel di bawah ini (Ekananda, 2015:315):

Tabel 2.2 Identifikasi Kondisi *Order*

No. Persamaan	$(K-k)$	$(m-1)$	Keterangan
1	$3-1=2$	$3-1=2$	Tepat Teridentifikasi
2	$3-2=1$	$2-1=1$	Tepat Teridentifikasi
3	$3-2=1$	$2-1=1$	Tepat Teridentifikasi
4	$3-1=2$	$3-1=2$	Tepat Teridentifikasi

Hasil identifikasi menunjukkan bahwa masing-masing persamaan tepat teridentifikasi.

2.5.4.2 Identifikasi Kondisi Rank

Suatu persamaan sudah bisa teridentifikasi menurut kondisi *order*, tetapi bisa saja terjadi bahwa persamaan tersebut tidak teridentifikasi jika diuji dengan kondisi *rank* (Sumodiningrat, 1994:389).

Kriteria identifikasi yang ke dua adalah kriteria kondisi *rank*. Istilah tingkat (*rank*) berkenaan dengan *rank* suatu matriks dan diberikan oleh ordo terbesar matriks bujur sangkar yang determinannya tidak nol. Secara alternatif tingkat suatu matriks adalah jumah terbesar dari kolom yang secara linier bebas dari matriks itu (Ekananda, 2015:314).

Sebuah sistem persamaan simultan yang terdiri dari M persamaan dengan M variabel endogen, suatu persamaan dikatakan teridentifikasi jika dan hanya jika paling sedikit ada satu determinan tidak nol. Determinan tersebut adalah determinan dari suatu susunan matriks berukuran $(\mathrm{M}-1)$ x $(\mathrm{M}-1)$ yang dapat dibentuk melalui koefisien-koefisien variabel, baik endogen maupun *predetermined*, yang tidak tercakup di dalam persamaan tertentu namun tercakup di dalam persamaan-persamaan yang lain di dalam model itu (Gujarati, 1999:332).

Langkah-langkah yang dapat dilakukan dalam menentukan kondisi *rank* adalah sebagai berikut (Gujarati, 1999:333):

1. Tuliskan sistem persamaan simultan dalam suatu bentuk tabel.
2. Coret koefisien-koefisien pada baris yang muncul di dalam persamaan yang sedang diidentifikasi.
3. Coret kolom yang sesuai dengan koefisien yang terdapat dalam langkah 2 yang tidak sama dengan nol.
4. Catat angka yang tertinggal dalam tabel, kemudian akan diketahui koefisien dari variabel yang dimasukkan dalam sistem persamaan tetapi tidak dalam persamaan yang sedang diidentifikasi. Dari catatan ini, bentuklah semua matriks (seperti matriks A), dari ordo $M - 1$ dan dapatkan determinan yang bersangkutan. Jika sekurang-kurangnya satu determinan yang tidak nol dapat diperoleh, persamaan yang diidentifikasi adalah (tepat atau terlalu) teridentifikasi. *Rank* dari matriks A, dalam kasus ini adalah tepat sama dengan $M - 1$. Jika semua determinan $(M - 1) \times (M - 1)$ yang mungkin adalah nol, *rank* dari matriks A adalah kurang dari $(M - 1)$, maka persamaan yang diidentifikasi adalah tidak teridentifikasi.

Berdasarkan pembahasan pada identifikasi terhadap kondisi *order* dan *rank* di atas, maka dapat disimpulkan mengenai prinsip-prinsip identifikasi sebuah persamaan struktural dalam suatu sistem persamaan simultan, yaitu (Gujarati, 1999:334):

1. Jika $\mathrm{K} - \mathrm{k} > \mathrm{m} - 1$ dan *rank* dari matriks A adalah $\mathrm{M} - 1$, maka persamaan itu terlalu teridentifikasi.

2. Jika $K - k = m - 1$ dan *rank* dari matriks A adalah $M - 1$, maka persamaan itu tepat teridentifikasi.
3. Jika $K - k \geq m - 1$ dan *rank* dari matriks A lebih kecil dari pada $M - 1$, maka persamaan itu kurang teridentifikasi.
4. Jika $K - k < m - 1$ dan *rank* dari matriks A lebih kecil dari pada $M - 1$, maka persamaan itu tidak teridentifikasi.

Menurut Maddala (2009:363) menyatakan bahwa ada cara yang lebih praktis untuk melihat kondisi identifikasi pada persamaan simultan. Misalkan pada persamaan simultan tertentu yang terdiri dari 3 persamaan. y_1, y_2, dan y_3 sebagai variabel endogen, sedangkan x_1, x_2, dan x_3 sebagai variabel *predetermined*. Melihat kondisi identifikasi dengan membuat sebuah tabel sebagai berikut:

Tabel 2.3 Koefisien - Koefisien Identifikasi Kondisi *Rank*

Pers.	y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	x_3
1	√	0	√	√	0	√
2	√	0	0	√	0	√
3	0	√	√	√	√	0

Tanda 0 berarti variabel pada kolom tidak terdapat pada persamaan baris, sedangkan tanda √ berarti variabel pada kolom terdapat pada persamaan baris.

Sebuah persamaan dikatakan *overidentified* apabila banyaknya tanda 0 lebih dari $(m - 1)$, sedangkan persamaan dikatakan *exactly identified* apabila banyaknya tanda 0 sama dengan $(m - 1)$, dan persamaan dikatakan *underidentified* apabila banyaknya tanda 0 kurang dari $(m - 1)$ (Maddala, 2009:363).

Menyelediki kondisi *rank*, sistem persamaan simultan (2.29) harus diubah kedalam bentuk struktural sebagai berikut (Ekananda, 2015:314):

$$
\begin{aligned}
&-\beta_{10} + y_{1t} - \beta_{12}y_{2t} - \beta_{13}y_{3t} - \gamma_{11}x_{1t} = u_{1t} \\
&-\beta_{20} + y_{2t} - \beta_{23}y_{3t} - \gamma_{21}x_{1t} - \gamma_{22}x_{2t} = u_{2t} \\
&-\beta_{30} - \beta_{31}y_{1t} + y_{3t} - \gamma_{31}x_{1t} - \gamma_{32}x_{2t} = u_{3t} \\
&-\beta_{40} - \beta_{41}y_{1t} - \beta_{42}y_{2t} + y_{4t} - \gamma_{43}x_{3t} = u_{4t}
\end{aligned} \tag{2.30}
$$

Untuk memudahkan identifikasi, tuliskan bentuk struktural sistem persamaan simultan tersebut ke dalam sebuah tabel berikut (Ekananda, 2015:314):

Tabel 2.4 Koefisien-Koefisien Persamaan Struktural

Koefisien-koefisien								
No.	C	y_1	y_2	y_3	y_4	x_1	x_2	x_3
1	$-\beta_{10}$	1	$-\beta_{12}$	$-\beta_{13}$	0	$-\gamma_{11}$	0	0
2	$-\beta_{20}$	0	1	$-\beta_{23}$	0	$-\gamma_{21}$	$-\gamma_{22}$	0
3	$-\beta_{30}$	$-\beta_{31}$	0	1	0	$-\gamma_{31}$	$-\gamma_{32}$	0
4	$-\beta_{40}$	$-\beta_{41}$	$-\beta_{42}$	0	1	0	0	$-\gamma_{43}$

Perhatikan persamaan pertama, tidak memasukkan variabel y_4, x_2, dan x_3 (ini dinyatakan dengan 0 dalam baris pertama pada Tabel 2.4. Diketahui dari sistem persamaan simultan di atas bahwa $M = 4$. Agar persamaan ini dapat teridentifikasi, harus didapatkan sekurang-kurangnya satu determinan tidak nol dari ordo 3 x 3 (diperoleh dari $(M-1)(M-1)$) dari koefisien variabel yang tidak dimasukkan dalam persamaan ini, tetapi dimasukkan di dalam persamaan lain. Mendapatkan determinan, mula-mula cari matriks yang relevan dari koefisien variabel y_4, x_2 dan x_3 yang dimasukkan di dalam persamaan lain. Dalam kasus ini, hanya ada matriks yang didefinisikan sebagai berikut (Ekananda, 2015:314):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma_{22} & 0 \\ 0 & -\gamma_{32} & 0 \\ 1 & 0 & -\gamma_{43} \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = (0)(-\gamma_{32})(-\gamma_{43}) + (-\gamma_{22})(0)(1) + (0)(0)(0) - (1)(-\gamma_{32})(0) - (0)(0)(0) - (-\gamma_{43})(0)(-\gamma_{22})$$

$$= 0 + 0 + 0 - 0 - 0$$

$$= 0$$

Jika $\det(A) = 0$, maka $rank(A)$ adalah kurang dari 3. Oleh karena itu, jika persamaan pertama tidak memenuhi kondisi *rank*, maka dikatakan bahwa persamaan pertama tidak teridentifikasi.

Meskipun kondisi *order* menunjukkan persamaan pertama teridentifikasi, akan tetapi kondisi *rank* menunjukkan bahwa persamaan pertama tidak teridentifikasi. Ternyata, kolom atau baris dari matriks A tidak bebas secara linier, berarti bahwa ada suatu hubungan antara variabel-variabel y_4, x_2 dan x_3. Sebagai hasilnya, mungkin tidak mempunyai cukup informasi untuk mengestimasi parameter dari persamaan pertama, persamaan bentuk reduksi untuk model tadi akan menunjukkan bahwa tidak mungkin untuk mendapatkan koefisien struktural dari persamaan pertama dari koefisien bentuk reduksi (Gujarati, 1999:333).

Persamaan kedua dan ketiga juga tidak memenuhi kondisi *rank*, sehingga belum bisa dikatakan teridentifikasi, meskipun sudah memenuhi kondisi *order*. Perhatikan persamaan keempat, variabel y_3, x_1 dan x_2 tidak terkandung di dalamnya. Menurut kondisi *rank* harus ada sekurang-kurangnya satu determinan tidak sama dengan nol yang berdimensi 3 dari matriks koefisien variabel-variabel y_3, x_1 dan x_2 pada persamaan pertama, kedua, dan ketiga. Matriks tersebut katakanlah matriks B sebagai berikut (Ekananda, 2015:316):

$$B = \begin{bmatrix} -\beta_{13} & -\gamma_{11} & 0 \\ -\beta_{23} & -\gamma_{21} & -\gamma_{22} \\ 1 & -\gamma_{31} & -\gamma_{32} \end{bmatrix}$$

$$\det(B) = (-\beta_{13})(-\gamma_{21})(-\gamma_{32}) + (-\gamma_{11})(-\gamma_{22})(1) + (0)(-\beta_{23})(-\gamma_{31}) - (1)(-\gamma_{21})(0) - (-\gamma_{31})(-\gamma_{22})(-\beta_{13}) - (-\gamma_{32})(-\beta_{23})(-\gamma_{11})$$

$$= -\beta_{13}\gamma_{21}\gamma_{32} + \gamma_{11}\gamma_{22}1 + \gamma_{31}\gamma_{22}\beta_{13} + \gamma_{32}\beta_{23}\gamma_{11}$$

$$\neq 0$$

Jika $\det(A) \neq 0$, maka $rank(A)$ adalah sama dengan 3. Oleh karena itu, jika persamaan keempat memenuhi kondisi *order* dan *rank*, maka persamaan keempat tepat teridentifikasi.

Selanjutnya, menentukan hasil identifikasi terhadap kondisi *order* dan *rank* seperti tabel di bawah ini (Ekananda, 2015:316):

Tabel 2.5 Hasil Identifikasi Kondisi *Order* dan *Rank*

No.	$(K - k)$	$(m - 1)$	Identifikasi *Order*	Identifikasi *Rank*	Kesimpulan
1	$3 - 1 = 2$	$3 - 1 = 2$	Tepat Teridentifikasi	*Rank* < $M - 1 = 3$	Tidak Teridentifikasi
2	$3 - 2 = 1$	$2 - 1 = 1$	Tepat Teridentifikasi	*Rank* < $M - 1 = 3$	Tidak Teridentifikasi
3	$3 - 2 = 1$	$2 - 1 = 1$	Tepat Teridentifikasi	*Rank* < $M - 1 = 3$	Tidak Teridentifikasi
4	$3 - 1 = 2$	$3 - 1 = 2$	Tepat Teridentifikasi	*Rank* = $M - 1 = 3$	Tepat Teridentifikasi

Parameter-parameter persamaan struktural dapat diestimasi jika persamaan tersebut dalam kondisi tepat atau terlalu teridentifikasi. Jika persamaan struktural dalam kondisi kurang atau tidak teridentifikasi, maka tidak pernah dapat diestimasi (Sumodiningrat, 1994:392).

2.5.5 Metode Estimasi Sistem Persamaan Simultan

Menurut Gujarati (1999:337) menyatakan bahwa jika model M persamaan umum dalam M variabel endogen yang diberikan dalam persamaan (2.26) dapat menggunakan dua pendekatan untuk mengestimasi persamaan yaitu metode persamaan tunggal dan metode sistem.

2.5.5.1 Metode Persamaan Tunggal

Metode yang mengestimasi setiap persamaan dalam sistem persamaan simultan secara individual dengan memperhitungkan setiap pembatasan yang ditempatkan pada persamaan itu (seperti tidak dimasukkannya beberapa variabel), tanpa mengkhawatirkan mengenai pembatasan atas persamaan lain dalam sistem. Karena itu, disebut metode informasi terbatas (Gujarati, 1999:337).

Terdapat beberapa metode yang termasuk dalam metode persamaan tunggal ini, yaitu (Kmenta, 1990:672-690):

1. Kuadrat terkecil tak langsung (*Indirect Least Square* / ILS)
2. Kuadrat terkecil dua tahap (*Two Stage Least Square* / 2SLS)
3. Penduga *k*-kelas (*k-class Estimators*)
4. Metode informasi terbatas kemungkinan terbesar (*Limited Information Maximum Likelihood* / LIML)

2.5.5.2 Metode Sistem

Metode yang mengestimasi semua persamaan dalam model secara simultan, dengan memperhitungkan semua pembatasan pada persamaan tadi dengan mengabaikan atau tidak adanya beberapa variabel (Gujarati, 1999:337).

Terdapat beberapa metode yang termasuk dalam metode sistem ini, yaitu (Kmenta, 1990:695-701):

1. Kuadrat terkecil tiga tahap (*Three Stage Least Squares* / 3SLS)
2. Informasi penuh kemungkinan terbesar (*Full Information Maximum Likelihood*/FIML).

Jika model persamaan simultan tepat teridentifikasi maka persamaan terebut dapat diestimasi dengan menggunakan ILS, tetapi jika menghasilkan identifikasi yang berlebih, maka metode tersebut tidak tepat lagi karena dengan menggunakan metode ILS akan memberikan taksiran majemuk dalam persamaan yang teralu didentifikasi, dan biasanya diestimasi dengan menggunakan 2SLS, 3SLS, LIML, FIML, dan GLS (Ekananda, 2015:319).

2.6 Estimasi Parameter

2.6.1 Definisi Estimasi Parameter

Estimasi adalah proses yang menggunakan sampel (statistik) untuk mengestimasi hubungan parameter dengan populasi yang tidak diketahui. Estimasi merupakan suatu pernyataan mengenai parameter populasi yang diketahui berdasarkan dari sampel, dalam hal ini peubah acak yang diambil dari populasi yang bersangkutan. Jadi dengan estimasi ini keadaan parameter populasi dapat diketahui (Hasan, 2002:11).

Murray dan Larry (2007:166) menyatakan terdapat dua jenis estimasi parameter, yaitu:

1. Estimasi titik

   Estimasi dari sebuah parameter populasi yang dinyatakan oleh bilangan tunggal disebut sebagai estimasi titik dari parameter tersebut. Sebuah nilai yang diperoleh dari sampel dan digunakan sebagai estimasi dari parameter yang nilainya tidak diketahui. Misalkan $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ merupakan sampel acak berukuran n dari X, maka statistik yang berkaitan dengan θ dinamakan estimasi dari θ. Setelah sampel diambil, nilai-nilai yang dihitung dari sampel itu digunakan sebagai taksiran titik bagi θ. Menurut Sumodiningrat (1994:43) bahwa tujuan penaksir titik adalah untuk mendapatkan nilai tunggal yang merupakan taksiran terbaik bagi parameter yang di selidiki.

2. Estimasi Interval

   Estimasi dari parameter populasi yang dinyatakan dengan dua buah bilangan. diantara posisi parameternya diperkirakan berbeda disebut estimasi interval. Estimasi interval mengindikasikan tingkat kepresisian atau akurasi dari sebuah estimasi sehingga estimasi interval akan dianggap semakin baik jika mendekati estimasi titik. Menurut Sumodiningrat (1994:44) bahwa tujuan penaksir interval adalah untuk mendapatkan nilai parameter yang sebenarnya terletak antara batas bawah dan batas atas suatu interval.

2.6.2 Metode *Maximum Likelihood*

Estimasi parameter *maximum likelihood* adalah menentukan parameter sedemikian sehingga jumlah probabilitas paling besar. Metode yang diperkenalkan di sini menggunakan distribusi normal pada *maximum likelihood,* yang akan dijelaskan sebagai berikut. Jika pada distribusi normal, fungsi distribusi (*probability distribution function*- PDF) dinyatakan dengan (Ekananda, 2015:225):

$$
\begin{aligned}
f(x|\mu,\sigma^2) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right] \qquad (2.31)
\end{aligned}
$$

dimana μ adalah rata-rata, x adalah data, dan σ adalah standart deviasi.

Menurut persamaan (2.15), misalkan X_i vektor $1 \times (k+1)$, untuk $i = 1,2,\dots,n$. Maka $y_i = X_i\beta + u_i$ sehingga $y_i \sim N(X_i\beta, \sigma^2)$. Jika diberikan X_i, β dan σ^2 dan diasumsikan bahwa $y_1, y_2, \cdots, y_n$ saling bebas, maka fungsi distribusi peluang dari y_i adalah (Aziz, 2010:33):

$$
f(y_i|X_i\beta,\sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(y_i - X_i\beta)^2\right] \qquad (2.32)
$$

dimana $f(y_1, y_2, \cdots, y_n) = f(y_1)f(y_2)\cdots f(y_n)$ sehingga fungsi distribusi peluang gabungan dari y adalah (Aziz, 2010:33):

$$
\begin{aligned}
f(y|X\beta,\sigma^2) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(y_i - X_i\beta)^2\right] \\
&= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - X_i\beta)^2\right] \\
&= \left(\sqrt{2\pi\sigma^2}\right)^{-n} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - X_i\beta)^2\right] \\
&= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - X_i\beta)^2\right] \\
&= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}{u_i}^2\right] \\
&= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}u'u\right] \\
&= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(y - X\beta)'(y - X\beta)\right] \qquad (2.33)
\end{aligned}
$$

persamaan di atas menjadi fungsi *likelihood* sebagai berikut (Aziz, 2010:33):

$$l(\beta, \sigma^2 | X, y) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(y - X\beta)'(y - X\beta)\right] \quad (2.34)$$

Nilai turunan dari fungsi *likelihood* maka fungsi *likelihood* akan diubah ke bentuk logaritma. Sehingga fungsi *log-likelihood*-nya adalah (Aziz, 2010:33):

$$\begin{aligned} L = \ln l &= -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}(y - X\beta)'(y - X\beta) \\ &= -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}(y' - \beta'X')(y - X\beta) \\ &= -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}(y'y - y'X\beta - \beta'X'y + \beta'X'X\beta) \\ &= -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}(y'y - (y'X\beta)' - \beta'X'y + \beta'X'X\beta) \\ &= -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}(y'y - \beta'X'y - \beta'X'y + \beta'X'X\beta) \\ &= -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}(y'y - 2\beta'X'y + \beta'X'X\beta) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Mengestimasi parameter β yaitu dengan cara mendeferensialkan fungsi *log-likelihood* terhadap β:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \beta} &= \frac{\partial}{\partial \beta}\left(-\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}(y'y - 2\beta'X'y + \beta'X'X\beta)\right) \\ &= 0 - \frac{1}{2\sigma^2}(0 - 2X'y + X'X\beta + (\beta'X'X)') \\ &= -\frac{1}{2\sigma^2}(-2X'y + X'X\beta + X'X\beta) \\ &= -\frac{1}{2\sigma^2}(-2X'y + 2X'X\beta) \\ &= \frac{1}{\sigma^2}(X'y - X'X\beta) \end{aligned} \quad (2.36)$$

Kemudian disama dengankan nol:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\sigma^2}(X'y - X'X\beta) \\ &= \frac{1}{\sigma^2}(X'y) - \frac{1}{\sigma^2}(X'X\beta) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sigma^2}(X'X\beta) = \frac{1}{\sigma^2}(X'y)$$

$$X'X\beta = X'y$$

$$(X'X)^{-1}(X'X)\beta = (X'X)^{-1}X'y$$

$$I\beta = (X'X)^{-1}X'y$$

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$$

Jadi estimasi parameter dari β adalah (Aziz, 2010:34):

$$\hat{\beta}_{ml} = (X'X)^{-1}X'y \tag{2.37}$$

Sedangkan turunan kedua dari β selalu bernilai negatif yaitu sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial\beta'\partial\beta} = \frac{\partial}{\partial\beta'}\left(\frac{\partial L}{\partial\beta}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial\beta'}\left(\frac{1}{\sigma^2}(X'y - X'X\beta)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial\beta'}\left(\frac{1}{\sigma^2}X'y - \frac{1}{\sigma^2}X'X\beta\right)$$

$$= 0 - \frac{1}{\sigma^2}X'X$$

$$= -\frac{X'X}{\sigma^2} \tag{2.38}$$

Hasil di atas menunjukkan bahwa turunan kedua β merupakan matriks definit negatif, sehingga β merupakan nilai yang memaksimumkan fungsi *log-likelihood* (Aziz, 2010:12).

2.6.3 Metode *Limited Information Maximum Likelihood*

Estimasi persamaan tunggal lainnya, yang dikenal sebagai estimasi *Limited Information Maximum Likelihood* (LIML), juga termasuk keluarga k kelas dan konsisten. Metode ini menggunakan prinsip kemungkinan terbesar *(maximum* *likelihood)*. Sama seperti metode 2SLS, metode ini dapat digunakan untuk mengestimasi parameter yang persamaan strukturnya tepat diidentifikasi atau terlalu diidentifikasi LIML diperoleh dengan memaksimumkan fungsi likelihood untuk pengamatan pada variabel endogen termasuk dalam persamaan yang akan diestimasi. Ungkapan informasi terbatas berarti bahwa, dalam mengatur fungsi likelihood, kita membatasi diri pada variabel endogen yang muncul dalam persamaan yang sedang diselidiki dan mengabaikan pembatasan yang terlalu teridentifikasi pada persamaan struktural lainnya. misalkan persamaan yang ingin diestimasi adalah yang pertama pada sistem (Kmenta, 1990:690).

2.6.4 Sifat Estimasi Parameter

Wibisono (2005:362) menyatakan bahwa, satu hal yang menjadi tujuan dalam estimasi adalah estimator harus mendekati nilai sebenarnya dari parameter yang diestimasi tersebut. Misalkan terdapat parameter β. Estimator tak bias (*Unibiasedness*) bagi parameter β, jika:

$$E(\hat{\beta}) = \beta \tag{2.39}$$

Pembuktian sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
E(\hat{\beta}_{ml}) &= E((X'X)^{-1}X'y) \\
&= E\big((X'X)^{-1}X'(X\beta + u)\big) \\
&= E((X'X)^{-1}X'X\beta + (X'X)^{-1}X'u) \\
&= E((X'X)^{-1}X'X\beta) + E((X'X)^{-1}X')E(u) \\
&= E((X'X)^{-1}X'X\beta) + E((X'X)^{-1}X') * 0 \\
&= E((X'X)^{-1}X'X\beta) + 0 \\
&= E(I\beta)
\end{aligned}$$

$$= E(\beta)$$

$$= \beta$$

2.7 Produk Domestik Regional Bruto

Menurut Sukirno (2010) salah satu indikator penting untuk mengetahui kondisi ekonomi di suatu daerah dalam suatu periode tertentu adalah data Produk Domestik Regional Bruto (PDRB), baik atas harga berlaku maupun atas dasar harga konstan. PDRB pada dasarnya merupakan jumlah nilai tambah yang dihasilkan oleh seluruh unit usaha dalam suatu daerah tertentu, atau merupakan jumlah nilai barang dan jasa akhir (neto) yang dihasilkan oleh seluruh unit ekonomi.

PDRB atas dasar harga berlaku menggambarkan nilai tambah barang dan jasa yang dihitung menggunakan harga yang berlaku pada setiap tahun, sedangkan PDRB atas dasar harga konstan menunjukkan nilai tambah barang dan jasa tersebut yang dihitung menggunakan harga yang berlaku pada satu tahun tertentu sebagai dasar. PDRB atas dasar harga berlaku dapat digunakan untuk melihat pergeseran dan struktur ekonomi, sedangkan harga konstan digunakan untuk mengetahui pertumbuhan ekonomi dari tahun ke tahun (Sukirno, 2010).

PDRB digunakan untuk berbagai tujuan tetapi yang terpenting adalah untuk mengukur kinerja keseluruhan. Jumlah ini akan sama dengan jumlah nilai nominal dari konsumsi, investasi, pengeluaran pemerintah untuk barang dan jasa, serta ekspor netto. Untuk menghitung angka-angka PDRB ada tiga pendekatan yang dapat digunakan, yaitu berikut ini (BPS, 2015):

1. Pendekatan produksi

   Pendekatan produksi produk nasional atau produk domestik bruto diperoleh dengan menjumlahkan nilai pasar dari seluruh barang dan jasa yang dihasilkan oleh berbagai sektor dalam perekonomian. PDRB adalah jumlah nilai tambah atas barang dan jasa yang dihasilkan oleh berbagai unit produksi di suatu wilayah daerah dalam jangka waktu tertentu (biasanya satu tahun).

Persamaan fungsi produksi pada pendekatan produksi adalah sebagai berikut:

$$Y = f(K, L, t) \tag{2.40}$$

dimana: K = modal

L = tenaga kerja

t = teknologi

2. Pendekatan pendapatan

Pendekatan pendapatan adalah suatu pendekatan pendapatan nasional yang diperoleh dengan cara menjumlahkan pendapatan dari berbagi dari faktor produksi yang menyumbang terhadap proses produksi.

3. Pendekatan pengeluaran

Pendekatan pengeluaran adalah pendekatan pendapatan nasional atau produk domestik regional bruto yang diperoleh dengan cara menjumlahkan nilai pasar dari seluruh pemintaan akhir atas output yang dihasilkan dalam perekonomian, diukur pada harga pasar yang berlaku. Dengan kata lain, produk nasional atau produk domestik regional bruto adalah penjumlahan nilai pasar dari permintaan sektor rumah tangga untuk barang-barang konsumsi dan jasa-jasa (C), permintaan sektor bisnis barang-barang investasi (I), pengeluaran pemerintah untuk barang-barangdan jasa-jasa (G), dan pengeluaran sektor luar negeri untuk kegiatan ekspor dan impor $(X - M)$.

Perhitungan output pada perekonomian dengan pendekatan pengeluaran dijelaskan dalam persamaan berikut:

$$Y = C + I + G + NX \tag{2.41}$$

dimana:

Y = Produk Domestik Regional Bruto

C = konsumsi

I = investasi

G = pengeluaran pemerintah

NX = ekspor neto (ekspor dikurangi impor)

Berdasarkan pemaparan diatas dapat disimpulkan bahwa PDRB adalah jumlah nilai tambah yang dihasilkan oleh seluruh unit usaha dalam suatu daerah tertentu pada suatu perekonomian yang dapat menggambarkan pertumbuhan ekonomi maupun perubahan struktur ekonomi.

2.8 Kemiskinan

Kemiskinan merupakan masalah yang dihadapi oleh seluruh negara, terutama di negara berkembang seperti Indonesia. Hal ini dikarenakan kemiskinan itu bersifat multidimensional artinya karena kebutuhan manusia itu bermacam-macam, maka kemiskinan pun memiliki banyak aspek primer yang berupa miskin akan aset, organisasi sosial politik, pengetahuan, dan keterampilan serta aspek sekunder yang berupa miskin akan jaringan sosial, sumber-sumber keuangan dan informasi. Dimensi-dimensi kemiskinan tersebut termanifestasikan dalam bentuk kekurangan gizi, air, perumahan yang sehat, perawatan kesehatan yang kurang baik, dan tingkat pendidikan yang rendah. Selain itu, dimensi-dimensi kemiskinan saling berkaitan baik secara langsung maupun tidak langsung. Hal ini berarti kemajuan atau kemunduran pada salah satu aspek dapat mempengaruhi kemajuan atau kemunduran aspek lainnya (Simatupang dan Dermoredjo, 2009).

Menurut Simatupang dan Dermoredjo (2009) beberapa indikator kemiskinan yaitu sebagai berikut:

1. Indikator Kemiskinan Berdasarkan Dimensi Ekonomi

Berdasarkan sudut pandang ekonomi, kemiskinan adalah bentuk ketidakmampuan dari pendapatan sseorang untuk memenuhi kebutuhan pokok atas kebutuhan dasar. Dimensi ekonomi dari kemiskinan diartikan sebagai kekurangan sumber daya yang dapat digunakan untuk meningkatkan taraf kesejahteraan masyarakat.

a. Pendapatan Per Kapita

Pendapatan per kapita menyatakan besarnya rata-rata pendapatan masyarakat di suatu daerah selama kurun waktu satu tahun. Besarnya pendapatan per kapita dihitung dari besarnya output dibagi oleh jumlah penduduk di suatu daerah selama satu tahun. Pendpatan perkapita dapat dihitung dengan rumus:

$$Y_{per\ kapita} = \frac{Y_t}{Pop_t} \qquad (2.42)$$

dimana:

$Y_{per\ kapita}$ = pendapatan per kapita

Y_t = pendapatan pada tahun t

Pop_t = jumlah penduduk pada tahun t

b. Garis Kemiskinan

Garis Kemiskinan (GK) merupakan penjumlahan dari Garis Kemiskinan Makanan (GKM) dan Garis Kemiskinan Non Makanan (GKNM). Penduduk yang memiliki rata-rata pengeluaran perkapita per bulan dibawah garis kemiskinan dikategorikan sebagai penduduk miskin. Rumus perhitungan menurut BPS adalah:

$$GK = GKM + GKNM \tag{2.43}$$

c. Persentase Penduduk Miskin

Head Count Index (HCI-P0) adalah persentase penduduk yang berada dibawah Garis Kemiskinan (GK). Rumus perhitungan untuk persentase penduduk miskin adalah:

$$P_{\alpha} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{q}\left[\frac{z-y_i}{z}\right]^{\alpha} \tag{2.44}$$

dimana:

α = 0

z = Garis kemiskinan

y_i = Rata-rata pengeluaran per kapita penduduk

q = Banyaknya penduduk di bawah garis kemiskinan

n = Jumlah penduduk

2. Indikator Kemiskinan Berdasarkan Dimensi Peran Pemerintah

Pemerintah sebagai regulator juga sebagai dinamisator dalam suatu perekonomian merupakan salah satu pihak yang memiliki peran sentral dalam upaya untuk menanggulangi permasalahan kemiskinan. Program penanggulangan masalah kemiskinan dibiayai melalui Anggaran Pembangunan dan Belanja Nasional (APBN). Bentuk pelaksanaan APBN meliputi investasi pemerintah untuk sumber daya manusia dan investasi pemerintah di bidang fisik.

a. Investasi Pemerintah di Bidang Sumber Daya Manusia

Investasi pemerintah di bidang sumber daya manusia bertujuan untuk meningkatkan kualitas sumber data manusia yang direalisasikan di bidang pendidikan, agama, kebudayaan, kesejahteraan, pembinaan wanita dan anak-anak, pengembangan kualitas tenaga kerja, pengembangan ilmu pengetahuan dan teknologi, dan pendidikan agama.

b. Investasi Pemerintah di Bidang Fisik

Investasi pemerintah di bidang fisik adalah pengeluaran pemerintah yang secara umum ditujukan untuk kesejahteraan masyarakat yang direalisasikan ke dalam pembangunan fisik. Salah satu contoh investasi di bidang fisik adalah perdagangan, tujuan dari suatu negara melakunan perdagangan internasional yaitu ekspor dan impor dapat menjadi motor penggerak bagi pertumbuhan ekonomi. Ekspor sebagai salah satu pendorong pertumbuhan ekonomi menunjukkan semakin banyaknya output nasional, mengindikasikan bahwa banyaknya orang yang bekerja, sehingga seharusnya akan mengurangi pengangguran dan kemiskinan.

2.9 Penelitian Terdahulu

Model dalam penelitian ini mengacu pada penelitian sebelumnya oleh Soemartini (2016) menyatakan bahwa untuk memperoleh model persamaan simultan pada hubungan PDRB dan pertumbuhan ekonomi menggunakan metode 2SLS. Data yang digunakan pada penelitian ini adalah data sekunder tahunan yang diperoleh dari BPS Indonesia pada tahun 2000-2013. Variabel yang digunakan pada penelitian ini ada dua, yaitu variabel endogen dan variabel *predetermined*. Variabel endogen meliputi PDRB (y_{1t}) dan pertumbuhan ekonomi (y_{2t}). Sedangkan variabel *predetermined* meliputi ekspor (x_{1t}), impor (x_{2t}), pengangguran (x_{3t}), dan kepadatan penduduk (x_{4t}).

Model persamaan simultan yang digunakan adalah sebagai berikut:

$$y_{1t} = \beta_{10} + \beta_{12}y_{2t} + \gamma_{11}x_{1t} + \gamma_{12}x_{2t} + u_{1t} \quad (2.45.a)$$

$$y_{2t} = \beta_{20} + \beta_{21}y_{1t} + \gamma_{23}x_{3t} + \gamma_{24}x_{4t} + u_{2t} \quad (2.41.b)$$

Persamaan (2.41) keduanya merupakan persamaan yang *overidentified* sehingga bisa menggunakan metode *two stage least squares* (2SLS).

Penelitian tersebut menyatakan bahwa estimasi dengan metode 2SLS menghasilkan model sistem persamaan simultan sebagai berikut:

$$y_{1t} = 11.023 - 0.021\, y_{2t} + 0.003\, x_{1t} - 0.311\, x_{2t} \quad (2.46.a)$$

$$y_{2t} = -76.225 + 5.392\, y_{1t} + 0.509\, x_{3t} - 0.007\, x_{4t} \quad (2.41.b)$$

Hasil estimasi menunjukkan bahwa dengan menggunakan $a = 0.05$ dalam persamaan pertama, PDRB dipengaruhi secara signifikan oleh pertumbuhan ekonomi, ekspor, dan impor. Koefisien determinasi menunjukkan bahwa pengaruh dalam model dapat dijelaskan oleh variabel pertumbuhan ekonomi, ekspor, dan impor sebesar 99,8% sedangkan 0,02% dipengaruhi oleh faktor lain. Untuk persamaan kedua dengan menggunakan $a = 0.05$ PDRB, tingkat pengangguran dan kepadatan penduduk juga mempengaruhi pertumbuhan ekonomi secara signifikan. Koefisien determinasi menunjukkan bahwa pengaruh dalam model dapat dijelaskan oleh variabel PDRB, tingkat pengangguran, dan kepadatan penduduk secara bersama-sama sebesar 93,6% sedangkan 6.4% dipengaruhi oleh faktor lain.

2.10 Kajian Estimasi Parameter dalam Islam

Estimasi (pendugaan) dijelasknan dalam Al-Qur'an Surat Ash-Shaffaat ayat 147 yang berbunyi sebagai berikut:

وَأَرسَلنَهُ إِلَىٰ مِاْئَةِ أَلفٍ أَو يَزِيدُونَ ﴿١٤٧﴾

Artinya : "*Dan Kami utus dia kepada seratus ribu orang atau lebih*" (Q.S. Ash-Shaffat/37:147).

Menurut Tafsir Jalalain Q.S. Ash-Shaffat ayat 147 bahwa وَأَرسَلنَٰهُ (*dan kami utus dia*) sesudah itu, sebagaimana status sebelumnya, kepada kaum bunainawiy yang tinggal di daerah mausul, إِلَىٰ مِاْئَةِ أَلفٍ أَو (*kepada seratus ribu orang atau*) bahkan, يَزِيدُونَ (*lebih dari itu*) yani lebih da pulu atau tiga puluh atau tujuh puluh ribu orang (Al-Mahalli & As-Suyuthi, 2010:640).

Al-Maraghi dalam Tafsir Al Maraghi (1974:148), menceritakan bahwa Nabi Yunus diutus oleh kaum itu dan mereka ada 100.000 bahkan lebih. Maka menjadi stabil keadaan mereka dan beriman kepada Yunus. Karena, setelah Yunus keluar dari kalangan mereka, mereka berpikir benar-benar telah melakukan kekeliruan, dan jika mereka tidak mengikuti Rasul, maka mereka akan binasa, seperti yang terjadi atas umat-umat sebelum mereka. Maka tatkala Yunus kembali kepada mereka dan menyeru kepada Tuhannya, maka mereka menyambut seruan Yunus itu dengan taat dan tunduk kepada perintah dan larangan Allah. Maka kami anugrahi kenikmatan kepada mereka dalam kehidupan ini hingga ajal, dan mereka pun mati sebagaimana matinya orang orang lain.

Pada surat Ash-Shaaffat ayat 147 tersebut dijelaskan bahwa Nabi Yunus diutus kepada umatnya yang jumlahnya 100.000 orang atau lebih. Jika membaca ayat tersebut secara seksama, maka terdapat rasa atau kesan ketidakpastian dalam menentukan jumlah umat Nabi Yunus. Mengapa harus menyatakan 100.000 atau lebih? Mengapa tidak menyatakan dengan jumlah yang sebenarnya? Bukankah Allah SWT mengetahui yang ghaib dan yang nyata? Bukankah Allah SWT Maha Mengetahui segala sesuatu, termasuk jumlah umat Nabi Yunus (Abdussakir, 2007:153).

Abdusysyakir (2007:155-156), juga mengatakan dalam bukunya bahwa estimasi adalah keterampilan untuk menentukan sesuatu tanpa melakukan proses perhitungan secara eksak. Dalam matematika terdapat tiga jenis estimasi yaitu:

1. Estimasi Banyak atau Jumlah (*Numerositas*)

   Estimasi banyak adalah menentukan banyaknya objek tanpa menghitung secara eksak. Objek di sini maknanya sangat luas. Objek dapat bermakna orang, uang, kelereng, titik, dan mobil. Estimasi pada surat Ash-Shaaffat ayat 147 ini adalah estimasi banyak yaitu banyaknya orang.

2. Estimasi Pengukuran

   Estimasi pengukuran adalah menentukan ukuran sesuatu tanpa menghitung secara eksak. Ukuran di sini maknanya sangat luas. Ukuran dapat bermakna waktu, panjang, luas, usia dan volume. Ketika melihat orang berjalan tanpa menanyakan tanggal lahirnya, pembaca dapat menebak atau menaksir usianya. Atau pembaca menaksir waktu yang diperlukan untuk melakukan perjalanan dari Malang ke Jakarta menggunakan sepeda motor. Pembaca juga dapat mengestimasi benda hanya melihat suatu bentuknya.

3. Estimasi Komputasional

   Estimasi komputasional adalah menentukan hasil suatu operasi hitung tanpa menghitungnya secara eksak. Ketika dimintai menentukan hasil 97 x 23 dalam waktu sepuluh detik, seorang mungkin akan melihat puluhannya saja, sehingga memperoleh hasil 90 x 20 = 1800 inilah estimasi komputasional. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa seseorang mungkin akan menghitung dengan cara membulatkan kepuluhan terdekat.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Pendekatan Penelitian

Pendekatan penelitian yang digunakan pada penelitian ini adalah studi literatur dan deskriptif kuantitatif. Pada studi literatur yaitu dengan mengumpulkan bahan-bahan pustaka yang dibutuhkan oleh peneliti sebagai acuan dalam menyelesaikan penelitian. Sedangkan pendekatan deskriptif kuantitatif yaitu dengan menganalisis data sekunder yang sesuai dengan kebutuhan peneliti.

3.2 Sumber Data

Pada penelitian ini data yang digunakan adalah data sekunder yang merupakan data tahunan dalam selang waktu 2000 – 2013 bersumber dari Badan Pusat Statistik Indonesia tahun 2015 dalam Soemartini (2016).

3.3 Variabel Penelitian

Variabel sistem persamaan simultan yang digunakan dalam penelitian ini ada dua jenis yaitu:

1. Variabel Endogen yaitu PDRB dan kemiskinan
2. Variabel *Predetermined* yaitu meliputi ekspor, impor, tingkat pengangguran, dan kepadatan penduduk.

3.4 Analisis Data

3.4.1 Estimasi Parameter Metode LIML

Langkah-langkah estimasi parameter sistem persamaan simultan dengan metode LIML adalah sebagai berikut:

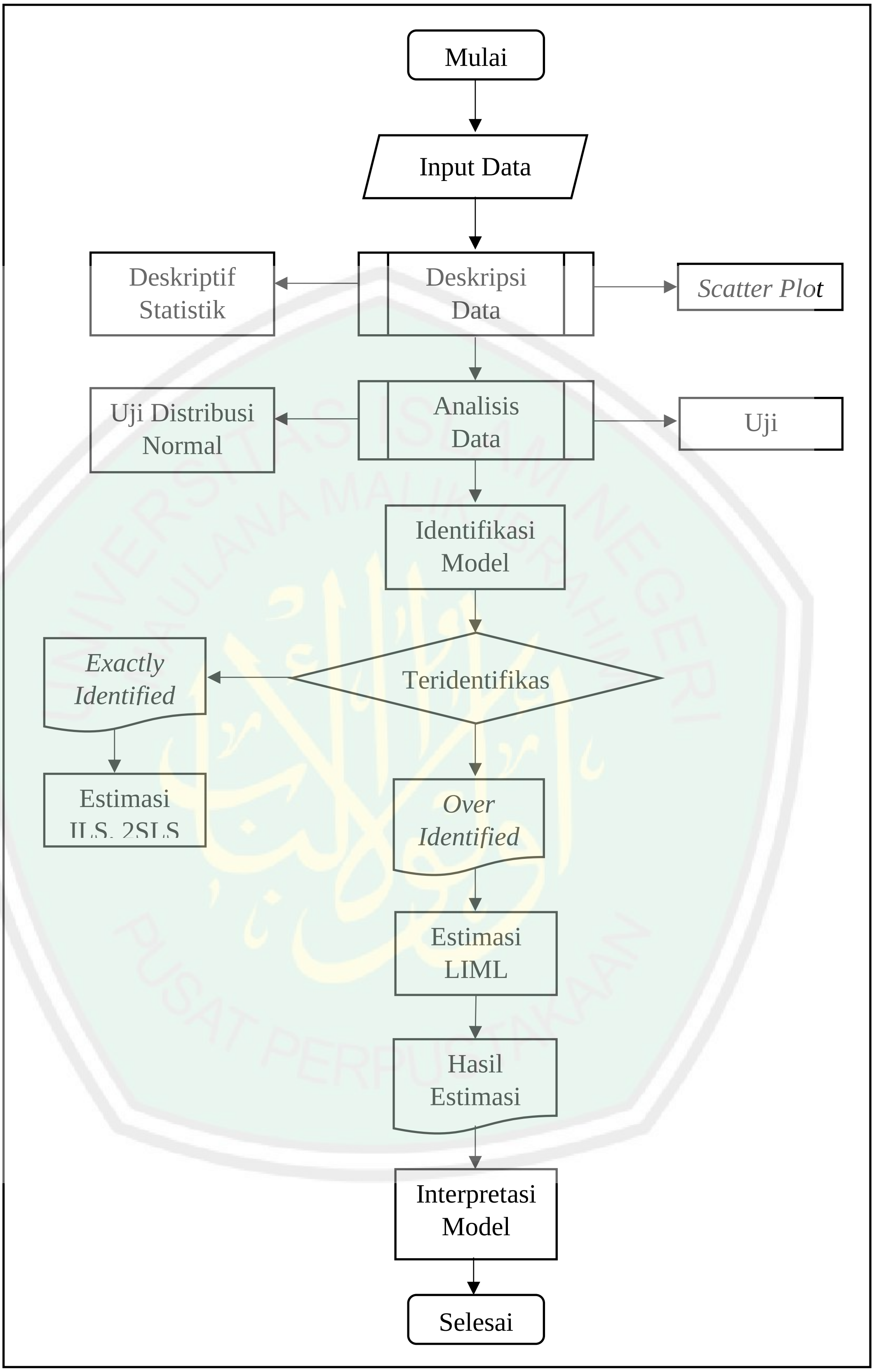
1. Menentukan sistem persamaan simultan.
2. Melakukan identifikasi sistem persamaan simultan.
3. Melakukan estimasi parameter pada sistem persamaan simultan dengan metode LIML.
   a. Menuliskan salah satu persamaan simultan dalam bentuk matriks.
   b. Menentukan fungsi distribusi peluang gabungan dari salah satu persamaan simultan.
   c. Menentukan fungsi *likelihood* dari salah satu persamaan simultan.
   d. Merubah fungsi *likelihood* ke dalam bentuk logaritma.
   e. Menurunkan fungsi *log-likelihood* terhadap parameter kemudian disama dengankan nol.
   f. Mencari turunan kedua dari parameter untuk menjamin nilai maksimum.

3.4.2 Implementasi Metode LIML Pada Sistem Persamaan Simultan PDRB dan Kemiskinan

Langkah-langkah implementasi metode LIML pada sistem persamaan simultan PDRB dan kemiskinan adalah sebagai berikut:

1. Melakukan deskripsi data yang terdiri dari statistika deskriptif dan *scatterplot* pada data sistem persamaan simultan PDRB dan kemiskinan.
2. Melakukan analisis data yang terdiri dari uji distribusi normal dan uji korelasi pada setiap data sistem persamaan simultan PDRB dan kemiskinan.

3. Menentukan sistem persamaan simultan PDRB dan kemiskinan.
4. Mengidentifikasi kondisi *order* dan identifikasi kondisi *rank* pada sistem persamaan simultan PDRB dan kemiskinan.
5. Menghitung estimasi parameter persamaan simultan PDRB dan kemiskinan dengan metode LIML.
6. Menginterpretasi model persamaan simultan PDRB dan kemiskinan.



Gambar 3.1 *Flowchart*

BAB IV

PEMBAHASAN

4.1 Estimasi Parameter Metode LIML

Estimasi parameter sistem persamaan simultan dengan menggunakan metode LIML dengan langkah-langkah sebagai berikut:

4.1.1 Sistem Persamaan Simultan

Pembahasan pada penelitian ini menggunakan sistem persamaan simultan pada persamaan (2.41) yaitu sebagai berikut:

$$y_{1t} = \beta_{10} + \beta_{12}y_{2t} + \gamma_{11}x_{1t} + \gamma_{12}x_{2t} + u_{1t} \quad (4.1.a)$$

$$y_{2t} = \beta_{20} + \beta_{21}y_{1t} + \gamma_{23}x_{3t} + \gamma_{24}x_{4t} + u_{2t} \quad (4.1.b)$$

Keterangan:

y_{1t}, y_{2t} : Variabel endogen di dalam sistem persamaan simultan pada periode waktu ke-*t* berdistribusi normal.

$x_{1t}, x_{2t}, x_{3t}, x_{4t}$: Variabel *predetermind* di dalam sistem persamaan simultan pada periode waktu ke-*t* berdistribusi normal.

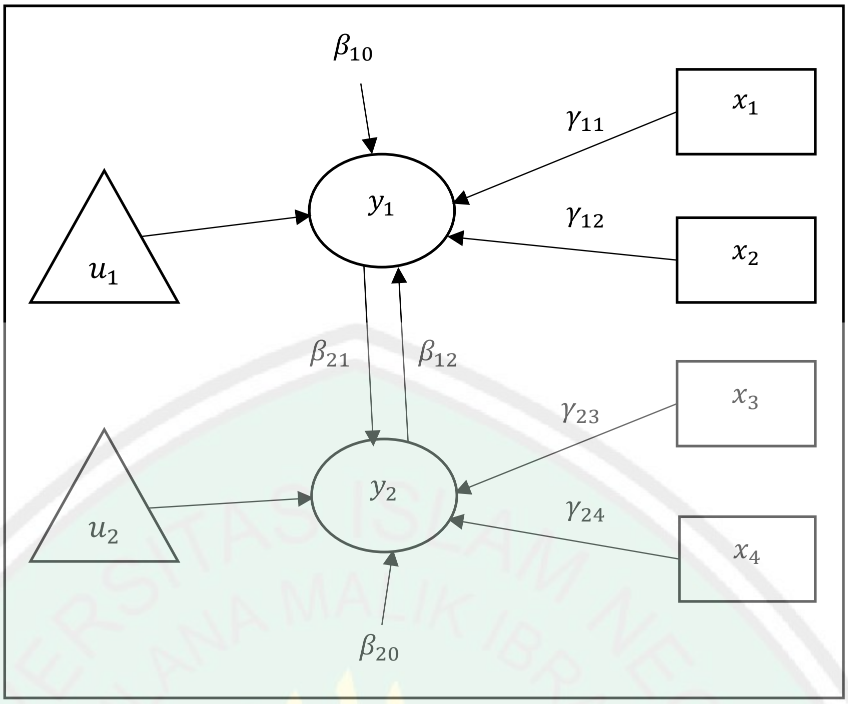
$\beta_{10}, \beta_{20},$: Konstanta di dalam sistem persamaan simultan.

β_{12}, β_{21} : Koefisien variabel endogen dalam sistem persamaan simultan.

$\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{24}$: Koefisien variabel *predetermind* di dalam sistem persamaan simultan

u_{1t}, u_{2t} : Variabel galat di dalam sistem persamaan simultan pada periode waktu ke-*t*.

Persamaan (4.1) secara skematis dapat digambar seperti berikut:



Gambar 4.1 Model Sistem Persamaan Simultan

Gambar 4.1 menunjukkan bahwa adanya hubungan yang simultan (hubungan dua arah) yaitu antara variabel y_1 dan y_2. Variabel y_1 pada persamaan (4.1.a) sebagai variabel terikat, akan tetapi pada persamaan (4.1.b) sebagai variabel bebas, begitupun sebaliknya berlaku pada variabel y_2. Persamaan (4.1.a) menyatakan bahwa y_1 merupakan fungsi dari y_2, x_1, dan x_2. Sedangkan persamaan (4.1.b) menyatakan bahwa y_2 merupakan fungsi dari y_1, x_3, dan x_4.

4.1.2 Identifikasi Sistem Persamaan Simultan

Identifikasi sistem persamaan simultan secara kondisi *order* pada persamaan (4.1) diubah ke dalam bentuk persamaan struktural sebagai berikut:

$$-\beta_{10} + y_{1t} - \beta_{12}y_{2t} - \gamma_{11}x_{1t} - \gamma_{12}x_{2t} = u_{1t} \qquad (4.2.a)$$

$$-\beta_{20} - \beta_{21}y_{1t} + y_{2t} - \gamma_{23}x_{3t} - \gamma_{24}x_{4t} = u_{2t} \qquad (4.2.b)$$

Kemudian bentuk struktural persamaan tersebut ditulis ke dalam tabel berikut:

Tabel 4.1 Koefisien-Koefisien Persamaan Simultan

Koefisien-koefisien							
Pers.	C	Y_1	Y_2	X_1	X_2	X_3	X_4
4.1.a	$-\beta_{10}$	1	$-\beta_{11}$	$-\gamma_{11}$	$-\gamma_{12}$	0	0
4.1.b	$-\beta_{20}$	$-\beta_{21}$	1	0	0	$-\gamma_{23}$	$-\gamma_{24}$

Menurut Tabel 4.1, dapat diketahui bahwa $M = 2$ dan $K = 4$. Pada persamaan (4.2) keduanya mempunyai jumlah variabel yang sama yaitu $\mathrm{m} = 2$ dan $\mathrm{k} = 2$.

4.1.2.1 Identifikasi Kondisi *Order*

Identifikasi kondisi *order* dapat lebih mudah diperoleh dengan membuat tabel seperti di bawah ini:

Tabel 4.2 Identifikasi Kondisi *Order* Pada Sistem Persamaan Simultan

No. Persamaan Identifikasi	Jumlah Variabel *Predetermined* yang dikeluarkan, $(K - k)$	Jumlah Variabel *Endogenos* yang dimasukkan dikurangi satu, $(m - 1)$	Keterangan
4.1.a	$4 - 2 = 2$	$2 - 1 = 1$	*Overidentified*
4.1.b	$4 - 2 = 2$	$2 - 1 = 1$	*Overidentified*

Menurut persamaan (2.28), dapat diketahui hasil identifikasi kondisi *order* menunjukkan bahwa kedua persamaan *over identified* yang berarti setiap persamaan terlalu teridentifikasi.

4.1.2.2 Identifikasi Kondisi *Rank*

Identifikasi kondisi *order* belum cukup untuk menunjukkan kondisi identifikasi suatu persamaan. Oleh karena itu, harus diidentifikasi menggunakan kondisi *rank* untuk menunjukkan terdidentifikasi atau tidak sebuah persamaan tersebut.

Identifikasi kondisi *rank* dapat diperoleh dengan melihat pada Tabel 4.1. Diketahui bahwa setiap persamaan mempunyai banyaknya tanda 0 lebih dari $(m - 1 = 2 - 1 = 1)$, sehingga dapat diketahui bahwa setiap persamaan terlalu teridentifikasi. Jika identifikasi kondisi *order* dan *rank* sudah terpenuhi, maka dapat disimpulkan bahwa setiap persamaan *over identified* yaitu terlalu teridentifikasi.

4.1.3 Estimasi Parameter pada Sistem Persamaan Simultan Metode *Limited Information Maximum Likelihood*

Metode LIML merupakan metode *Limited Information Method* (Metode Informasi Terbatas) artinya sebuah metode yang hanya menggunakan informasi terbatas dalam mengestimasi parameter. Metode yang mengestimasi setiap persamaan dalam sistem persamaan simultan secara individual. Karena kedua persamaan memiliki jumlah variabel endogen dan variabel *predetermined* yang sama dan teridentifikasi secara *overidentified*, maka hanya diambil contoh pada persamaan (4.1.a).

1. Penulisan persamaan simultan dalam bentuk matriks

Berdasarkan persamaan (4.1.a), dengan $t = 1,2, \dots, n$ diperoleh:

$$y_{11} = \beta_{10} + \beta_{12}y_{21} + \gamma_{11}x_{11} + \gamma_{12}x_{21} + u_{11}$$

$$y_{12} = \beta_{10} + \beta_{12}y_{22} + \gamma_{11}x_{12} + \gamma_{12}x_{22} + u_{12}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$y_{1n} = \beta_{10} + \beta_{12}y_{2n} + \gamma_{11}x_{1n} + \gamma_{12}x_{2n} + u_{1n}$$

Misalkan:

$$\mathrm{y}_1 = \begin{bmatrix} \mathrm{y}_{11} \\ \mathrm{y}_{12} \\ \vdots \\ \mathrm{y}_{1n} \end{bmatrix} \quad \mathrm{Z}_1 = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{y}_{21} & \mathrm{x}_{11} & \mathrm{x}_{21} \\ 1 & \mathrm{y}_{22} & \mathrm{x}_{12} & \mathrm{x}_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \mathrm{y}_{2n} & \mathrm{x}_{1n} & \mathrm{x}_{2n} \end{bmatrix} \quad \delta_1 = \begin{bmatrix} \beta_{10} \\ \beta_{12} \\ \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad \mathrm{u}_1 = \begin{bmatrix} \mathrm{u}_{11} \\ \mathrm{u}_{12} \\ \vdots \\ \mathrm{u}_{1n} \end{bmatrix}$$

Sehingga persamaan (4.1.a) menjadi:

$$y_1 = \mathrm{Z}_1\delta_1 + \mathrm{u}_1 \tag{4.3}$$

Keterangan:

y_1 = Vektor observasi variabel endogen yang terdapat pada persamaan ke-1 yang berukuran $\mathrm{n} \times 1$

Z_1 = Matriks observasi variabel endogen lain dan variabel *predetermined* yang terdapat pada persamaan ke-1 yang berukuran $\mathrm{n} \times 4$

δ_1 = Vektor koefisien variabel endogen dan variabel *predetermined* pada persamaan ke-1 yang berukuran 4×1

u_1 = Vektor galat pada persamaan ke-1 yang berukuran $\mathrm{n} \times 1$

Sedangkan untuk persamaan (4.1.b), dimana $t = 1,2,\dots,n$ dengan cara yang sama seperti persamaan (4.1.a) sehingga diperoleh:

$$y_2 = \mathrm{Z}_2\delta_2 + \mathrm{u}_2 \tag{4.4}$$

2. Penentuan fungsi distribusi peluang gabungan

Berdasarkan persamaan (2.33), maka dari persamaan (4.3) sehingga diperoleh fungsi distribusi peluang gabungan dari y_1 adalah:

$$f_1(y_1|\mathrm{Z}_1\delta_1,\sigma^2{}_1) = (2\pi\sigma^2{}_1)^{-\frac{n}{2}}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2{}_1}(y_1-\mathrm{Z}_1\delta_1)'(y_1-\mathrm{Z}_1\delta_1)\right] \tag{4.5}$$

Sedangkan untuk persamaan (4.1.b), dengan cara yang sama seperti persamaan (4.1.a) sehingga diperoleh fungsi distribusi peluang gabungan dari y_2 adalah:

$$f_2(y_2|Z_2\delta_2, \sigma^2{}_2) = (2\pi\sigma^2{}_2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2{}_2}(y_2 - Z_2\delta_2)'(y_2 - Z_2\delta_2)\right] \quad (4.6)$$

3. Penentuan fungsi *likelihood*

Jika nilai δ_1 dan $\sigma^2{}_1$ tidak diketahui tetapi nilai data y_1 dan Z_1 sudah diketahui, maka persamaan di atas menjadi fungsi *likelihood* sebagai berikut:

$$l_1(\delta_1, \sigma^2{}_1|y_1, Z_1) = (2\pi\sigma^2{}_1)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2{}_1}(y_1 - Z_1\delta_1)'(y_1 - Z_1\delta_1)\right] \quad (4.7)$$

Sedangkan untuk persamaan (4.1.b), dengan cara yang sama seperti persamaan (4.1.a) sehingga diperoleh fungsi *likelihood* adalah sebagai berikut:

$$l_2(\delta_2, \sigma^2{}_2|y_2, Z_2) = (2\pi\sigma^2{}_2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2{}_2}(y_2 - Z_2\delta_2)'(y_2 - Z_2\delta_2)\right] \quad (4.8)$$

4. Fungsi *likelihood* dirubah ke dalam bentuk logaritma

Mempermudah perhitungan dengan cara nilai turunan dari fungsi *likelihood* diubah ke bentuk logaritma. Sehingga fungsi *log-likelihood*-nya adalah:

$$\begin{aligned}
L_1 &= \ln l_1 \\
&= -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2{}_1) - \frac{1}{2\sigma^2{}_1}(y_1 - Z_1\delta_1)'(y_1 - Z_1\delta_1) \\
&= -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2{}_1) - \frac{1}{2\sigma^2{}_1}(y_1{}' - \delta_1{}'Z_1{}')(y_1 - Z_1\delta_1) \\
&= -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2{}_1) - \frac{1}{2\sigma^2{}_1}(y_1{}'y_1 - y_1{}'Z_1\delta_1 - \delta_1{}'Z_1{}'y_1 + \delta_1{}'Z_1{}'Z_1\delta_1) \\
&= -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2{}_1) - \frac{1}{2\sigma^2{}_1}(y_1{}'y_1 - (y_1{}'Z_1\delta_1)' - \delta_1{}'Z_1{}'y_1 + \delta_1{}'Z_1{}'Z_1\delta_1) \\
&= -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2{}_1) - \frac{1}{2\sigma^2{}_1}(y_1{}'y_1 - \delta_1{}'Z_1{}'y_1 - \delta_1{}'Z_1{}'y_1 + \delta_1{}'Z_1{}'Z_1\delta_1) \\
&= -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2{}_1) - \frac{1}{2\sigma^2{}_1}(y_1{}'y_1 - 2\delta_1{}'Z_1{}'y_1 + \delta_1{}'Z_1{}'Z_1\delta_1) \quad (4.9)
\end{aligned}$$

Sedangkan untuk persamaan (4.1.b), dengan cara yang sama seperti persamaan (4.1.a) sehingga diperoleh fungsi *log-likelihood*-nya sebagai berikut:

$$L_2 = \ln l_2 = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2{}_2) - \frac{1}{2\sigma^2{}_2}(y_2{}'y_2 - 2\delta_2{}'Z_2{}'y_2 + \delta_2{}'Z_2{}'Z_2\delta_2) \quad (4.10)$$

5. Fungsi *log-likelihood* diturunkan terhadap parameter kemudian disama denganken nol.

Mengestimasi parameter δ_1 yaitu dengan cara fungsi *log-likelihood* diturunkan terhadap δ_1:

$$\frac{\partial L_1}{\partial \delta_1} = \frac{\partial}{\partial \delta_1}\left(-\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2{}_1) - \frac{1}{2\sigma^2{}_1}(y_1{}'y_1 - 2\delta_1{}'Z_1{}'y_1 + \delta_1{}'Z_1{}'Z_1\delta_1)\right)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial \delta_1}\left(\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2{}_1)\right) - \frac{\partial}{\partial \delta_1}\left(\frac{1}{2\sigma^2{}_1}(y_1{}'y_1 - 2\delta_1{}'Z_1{}'y_1 + \delta_1{}'Z_1{}'Z_1\delta_1)\right)$$

$$= -0 - \frac{\partial}{\partial \delta_1}\left(\frac{1}{2\sigma^2{}_1}(y_1{}'y_1 - 2\delta_1{}'Z_1{}'y_1 + \delta_1{}'Z_1{}'Z_1\delta_1)\right)$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2{}_1}\left(0 - 2Z_1{}'y_1 + (Z_1{}'Z_1\delta_1 + (\delta_1{}'Z_1{}'Z_1)')\right)$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2{}_1}\left(-2Z_1{}'y_1 + (Z_1{}'Z_1\delta_1 + Z_1{}'Z_1\delta_1)\right)$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2{}_1}(-2Z_1{}'y_1 + 2Z_1{}'Z_1\delta_1)$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2{}_1}(2(-Z_1{}'y_1 + Z_1{}'Z_1\delta_1))$$

$$= \frac{1}{\sigma^2{}_1}(Z_1{}'y_1 - Z_1{}'Z_1\delta_1) \quad (4.11)$$

Kemudian disama dengankan nol untuk memperoleh bentuk estimator parameter secara LIML:

$$0 = \frac{1}{\sigma^2{}_1}(Z_1{}'y_1 - Z_1{}'Z_1\delta_1)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2{}_1}(Z_1{}'y_1) - \frac{1}{\sigma^2}(Z_1{}'Z_1\delta_1)$$

$$\frac{1}{\sigma^2{}_1}(Z_1{}'Z_1\delta_1) = \frac{1}{\sigma^2{}_1}(Z_1{}'y_1)$$

$$Z_1'Z_1\delta_1 = Z_1'y_1$$

$$(Z_1'Z_1)^{-1}(Z_1'Z_1)\delta_1 = (Z_1'Z_1)^{-1}Z_1'y_1$$

$$I\delta_1 = (Z_1'Z_1)^{-1}Z_1'y_1$$

$$\hat{\delta}_{1_{liml}} = (Z_1'Z_1)^{-1}Z_1'y_1 \quad (4.12)$$

Sedangkan untuk persamaan (4.1.b), dengan cara yang sama seperti persamaan (4.1.a) sehingga diperoleh turunan pertama fungsi *log-likelihood* terhadap δ_2 sebagai berikut:

$$\frac{\partial L_2}{\partial \delta_2} = \frac{1}{\sigma^2{}_2}(Z_2'y_2 - Z_2'Z_2\delta_2) \quad (4.13)$$

Kemudian disama dengankan 0 sehingga diperoleh:

$$\hat{\delta}_{2_{liml}} = (Z_2'Z_2)^{-1}Z_2'y_2 \quad (4.14)$$

6. Mencari turunan kedua dari δ_1 untuk menjamin nilai yang memaksimumkan fungsi

Diperoleh turunan kedua terhadap δ_1 yaitu sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 L_1}{\partial \delta_1' \partial \delta_1} = \frac{\partial}{\partial \delta_1'}\left(\frac{\partial L_1}{\partial \delta_1}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \delta_1'}\left(\frac{1}{\sigma^2{}_1}(Z_1'y_1 - Z_1'Z_1\delta_1)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \delta_1'}\left(\frac{1}{\sigma^2{}_1}Z_1'y_1 - \frac{1}{\sigma^2}Z_1'Z_1\delta_1\right)$$

$$= 0 - \frac{1}{\sigma^2{}_1}Z_1'Z_1$$

$$= -\frac{Z_1'Z_1}{\sigma^2{}_1} \quad (4.15)$$

Persamaan (4.15) menunjukkan bahwa turunan kedua δ_1 merupakan matriks definit negatif, sehingga δ_1 merupakan nilai yang memaksimumkan fungsi *log-likelihood*.

Sedangkan untuk persamaan (4.1.b), dengan cara yang sama seperti persamaan (4.1.a) sehingga diperoleh turunan kedua terhadap δ_2 yaitu sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 L_2}{\partial \delta_2{}' \partial \delta_2} = -\frac{Z_2{}' Z_2}{\sigma^2{}_2} \qquad (4.16)$$

Persamaan (4.16) menunjukkan bahwa turunan kedua δ_2 merupakan matriks definit negatif, sehingga δ_2 merupakan nilai yang memaksimumkan fungsi *log-likelihood*.

4.2 Implementasi Metode LIML Pada Sistem Persamaan Simultan PDRB dan Kemiskinan

Implementasi metode LIML pada sistem persamaan simultan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

4.2.1 Deskripsi Data

Deskripsti data persamaan simultan PDRB dan kemiskinan di Indonesia Tahun 2000-2013 pada penelitian ini menggunakan statistika deskriptif dan *scatterplot*.

4.2.1.1 Statistika Deskriptif

Analisis statistika deskriptif variabel sistem persamaan simultan PDRB dan kemiskinan pada tahun 2000-2013 sebanyak 14 observasi menggunakan tabel sebagai berikut:

Tabel 4.3 Analisis Statistika Deskriptif

	PDRB (Milyar Rupiah)	Kemiskinan (Juta Orang)	Ekspor (Juta US$)	Impor (Juta US$)	Tingkat Pengangguran (Juta Orang)	Kepadatan Penduduk (Jiwa/km^2)
Mean	3772812.	34.69286	114013.2	91823.17	8.958571	118212.8
Median	3347250.	35.62500	107449.8	67769.45	9.120000	117687.4
Maximum	2032256.	39.30000	203496.6	191689.5	11.38000	129881.7
Minimum	0.502625	28.31000	56320.90	30962.10	5.810000	105638.8
Sum	52819368	485.7000	1596184.	1285524.	125.4200	1654979.

Tabel 4.3 menunjukkan bahwa jumlah PDRB atas harga berlaku menurut provinsi di Indonesia pada tahun 2000-2013 adalah sebesar 52819368 milyar rupiah, dengan rata-rata 3772812 milyar rupiah. PDRB terendah terjadi pada tahun 2000 yaitu sebesar 0,502625 miliyar rupiah, sedangkan PDRB tertinggi yaitu sebesar 2032256 miliyar rupiah pada tahun 2013.

Jumlah penduduk miskin di Indonesia pada tahun 2000-2013 adalah mencapai 485,7 juta orang, dengan rata-rata sebesar 34,69 juta orang. Penduduk miskin terendah terjadi pada tahun 2013 yaitu sebesar 28,31 juta orang 2013, sedangkan kemiskinan tertinggi yaitu sebesar 39,3 juta orang pada tahun 2006.

Jumlah nilai ekspor di Indonesia pada tahun 2000-2013 adalah 1.596.184 Juta US$, dengan rata-rata sebesar 114.013,2 Juta US$. Nilai ekspor terendah terjadi pada tahun 2001 yaitu sebesar 56.320,9 Juta US$, sedangkan nilai ekspor tertinggi yaitu sebesar 203.496,6 Juta US$ pada tahun 2011.

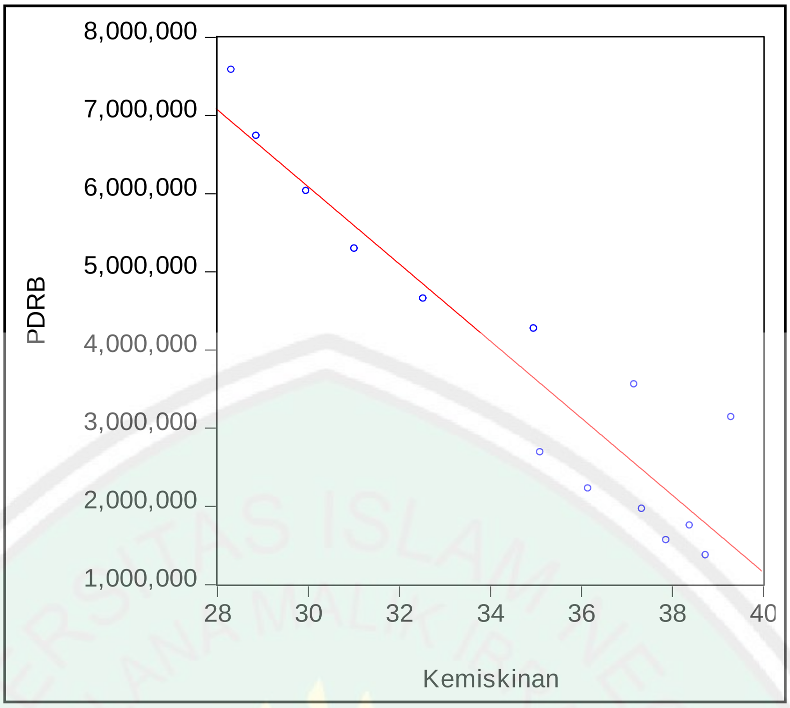
Jumlah nilai impor di Indonesia pada tahun 2000-2013 adalah 1.285.524 Juta US$, dengan rata-rata sebesar 91.823,17 Juta US$. Nilai impor terendah terjadi pada tahun 2001 yaitu sebesar 30.962,1 Juta US$, sedangkan nilai impor tertinggi yaitu sebesar 191.689,5 Juta US$ pada tahun 2012.

Jumlah pengangguran di Indonesia pada tahun 2000-2013 adalah mencapai 125,42 juta orang, dengan rata-rata 8,95 juta orang. Pengangguran terendah terjadi pada tahun 2000 yaitu sebesar 5,81 juta orang, sedangkan pengangguran tertinggi yaitu sebesar 11,38 pada tahun 2005.

Jumlah kepadatan penduduk di Indonesia pada tahun 2000-2013 adalah sebanyak 1.654.979 Juta/Km^2, dengan rata-rata sebesar 118.212,8 Juta/Km^2. Kepadatan penduduk terendah terjadi pada tahun 2000 yaitu sebesar 105.638,8 Juta/Km^2, sedangkan kepadatan penduduk tertinggi yaitu sebesar 129.881,7 Juta/Km^2 pada tahun 2013.

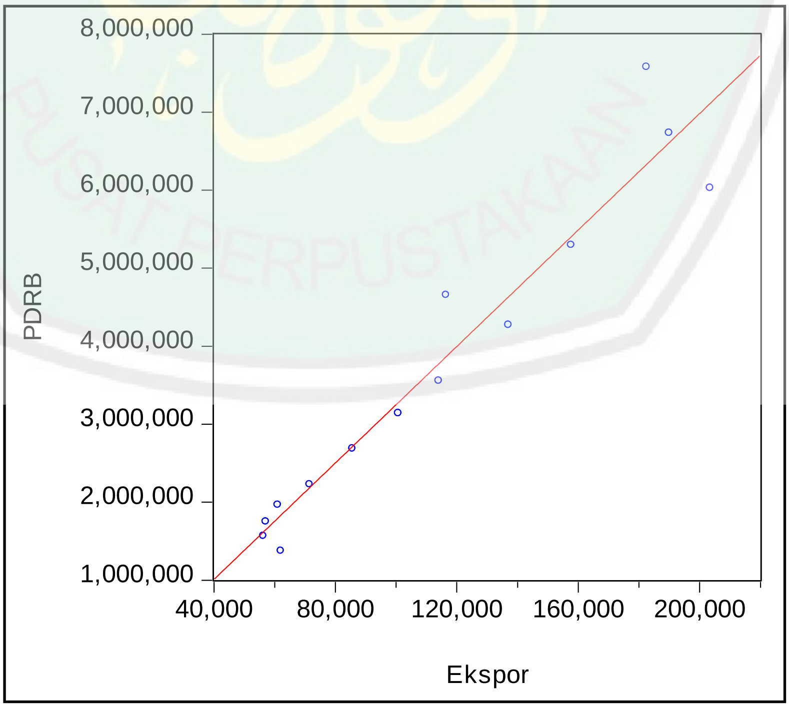
4.2.1.2 *Scatterplot*

Hubungan antar variabel yang digunakan dalam model ini harus bersifat linear. Oleh karena itu, sebaiknya setiap variabel digambar menggunakan *scatterplot* untuk mengetahui apakah hubungan antar variabel bersifat linear atau nonlinear.



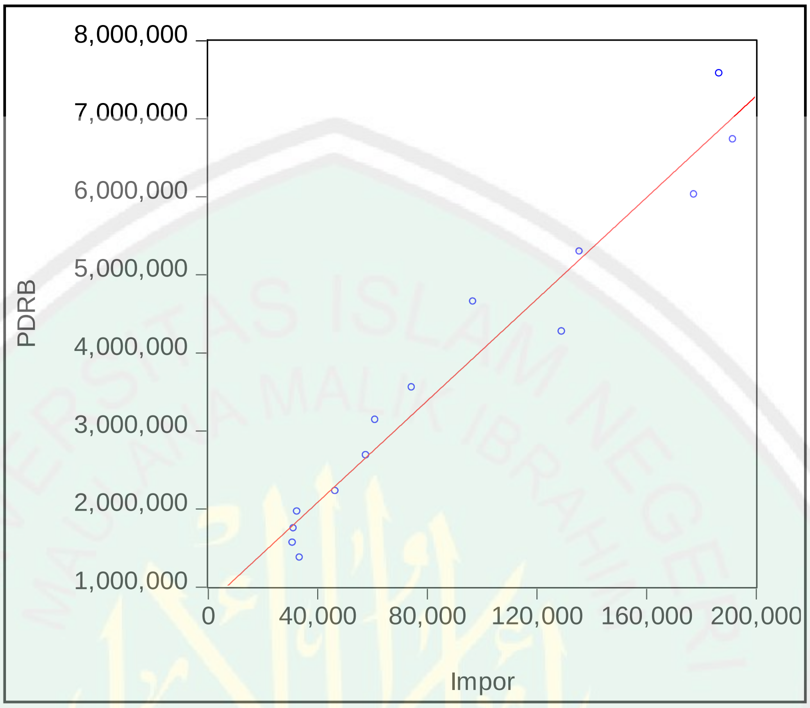
Gambar 4.2 Hubungan Variabel PDRB dengan Kemiskinan

Gambar 4.2 menunjukkan bahwa hubungan variabel PDRB dengan Kemiskinan digambarkan dengan garis lurus. Hal ini menunjukkan bahwa hubungan antar variabel bersifat linear.



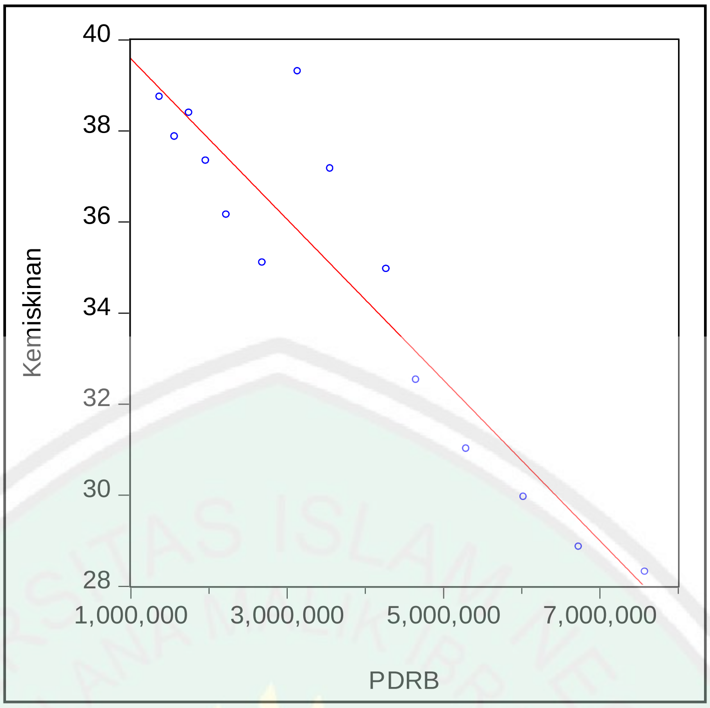
Gambar 4.3 Hubungan Variabel PDRB dengan Ekspor

Gambar 4.3 menunjukkan bahwa hubungan antar variabel PDRB dengan Ekspor digambarkan dengan garis lurus. Hal ini menunjukkan bahwa hubungan antar variabel bersifat linear.



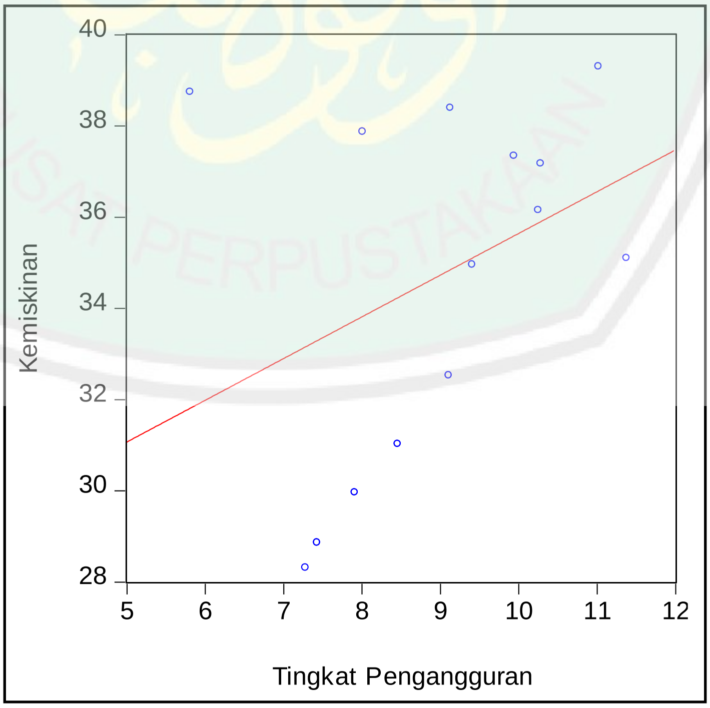
Gambar 4.4 Hubungan Variabel PDRB dengan Impor

Gambar 4.4 menunjukkan bahwa hubungan antar variabel PDRB dengan Impor digambarkan dengan garis lurus. Hal ini menunjukkan bahwa hubungan antar variabel bersifat linear.



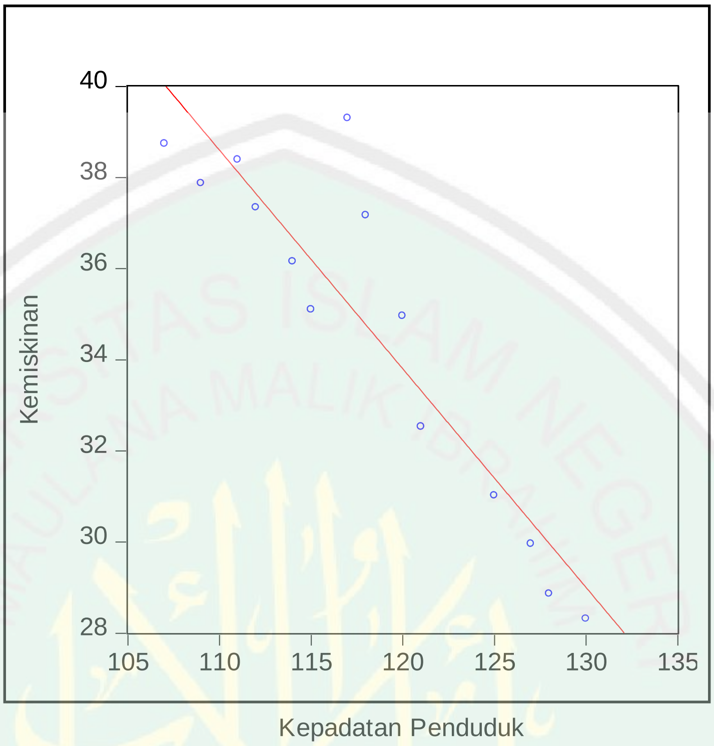
Gambar 4.5 Hubungan Variabel Kemiskinan dengan PDRB

Gambar 4.5 menunjukkan bahwa hubungan antar variabel kemiskinan dengan PDRB digambarkan dengan garis lurus. Hal ini menunjukkan bahwa hubungan antar variabel bersifat linear.



Gambar 4.6 Hubungan Variabel Kemiskinan dengan Tingkat Pengangguran

Gambar 4.6 menunjukkan bahwa hubungan antar variabel kemiskinan dengan tingkat pengangguran digambarkan dengan garis lurus. Hal ini menunjukkan bahwa hubungan antar variabel bersifat linear.



Gambar 4.7 Hubungan Variabel Kemiskinan dengan Kepadatan Penduduk

Gambar 4.7 menunjukkan bahwa hubungan antar variabel kemiskinan dengan kepadatan penduduk digambarkan dengan garis lurus. Hal ini menunjukkan bahwa hubungan antar variabel bersifat linear.

Jadi dapat disimpulkan bahwa hubungan setiap variabel sistem persamaan simultan PDRB dan kemiskinan digambarkan dengan garis lurus. Hal ini menunjukkan bahwa hubungan setiap variabel bersifat linear.

4.2.2 Analisis Data

Analisis data persamaan simultan PDRB dan kemiskinan di Indonesia Tahun 2000-2013 pada penelitian ini menggunakan uji distribusi normal dan uji korelasi.

4.2.2.1 Uji Distribusi Normal

Sebelum melakukan estimasi parameter, terlebih dahulu dilakukan uji normalitas pada setiap variabel untuk mengatahui data berdistribusi normal atau tidak. Uji normalitas dilakukan menggunakan uji *probability* JB. Hipotesis yang diberikan sebagai berikut:

H_0 : Data berdistribusi normal

H_1 : Data tidak berdistribusi normal

Uji Kriteria pengambilan keputusannya adalah sebagai berikut:

1. Jika nilai *p-value* $< 0{,}05$ atau JB hitung > dari nilai χ^2 tabel, maka H_0 ditolak, sehingga dapat disimpulkan bahwa data tidak berdistribusi normal.
2. Jika nilai *p-value* $> 0{,}05$ atau JB hitung < nilai χ^2 tabel, maka H_0 diterima, sehingga dapat disimpulkan bahwa data berdistribusi normal.

Pada penelitian ini menggunakan nilai α (alpha) adalah 0,05 dan derajat kebebasan (df) sebesar 2 menurut χ^2 tabel pada lampiran 2 diperoleh 5,99. Menurut persamaan (2.23), sehingga dapat diketahui nilai JB hitung yang ditunjukkan pada tabel berikut:

Tabel 4.4 Nilai Probability Jarque Bera

	PDRB	Kemiskinan	Ekspor	Impor	Tingkat Pengangguran	Kepadatan Penduduk
Probability	0.553510	0.486071	0.518711	0.448874	0.812998	0.717309
Jarque-Bera	1.182949	1.442800	1.312815	1.602024	0.414054	0.664497

- Menurut Tabel 4.4 pada data PDRB diperoleh nilai *p-value* sebesar 0,553510 dan Jarque-Bera sebesar 1,182949. Karena nilai *p*-JB $> 0{,}05$ atau JB hitung < nilai χ^2 tabel sehingga H_0 diterima, artinya data PDRB berdistribusi normal.

- Menurut Tabel 4.4 pada data kemiskinan diperoleh nilai *p-value* sebesar 0,486071 dan Jarque-Bera sebesar 1,442800. Karena nilai p-JB $>$ 0,05 atau JB hitung < nilai χ^2 tabel sehingga H_0 diterima, artinya data kemiskinan berdistribusi normal.
- Menurut Tabel 4.4 pada data ekspor diperoleh nilai *p-value* sebesar 0,518711dan Jarque-Bera sebesar 1,312815. Karena nilai p-JB $>$ 0,05 atau JB hitung < nilai χ^2 tabel sehingga H_0 diterima, artinya data ekspor berdistribusi normal.
- Menurut Tabel 4.4 pada data impor diperoleh nilai *p-value* sebesar 0,448874dan Jarque-Bera sebesar 1,602024. Karena nilai p-JB $>$ 0,05 atau JB hitung < nilai χ^2 tabel sehingga H_0 diterima, artinya data impor berdistribusi normal.
- Menurut Tabel 4.4 pada data tingkat pengangguran diperoleh nilai *p-value* sebesar 0,812998 dan Jarque-Bera sebesar 0,414054. Karena nilai p-JB $>$ 0,05 atau JB hitung < nilai χ^2 tabel sehingga H_0 diterima, artinya data tingkat pengangguran berdistribusi normal.
- Menurut Tabel 4.4 pada data kepadatan penduduk diperoleh nilai *p-value* sebesar 0,717309 dan Jarque-Bera sebesar 0,664497. Karena nilai p-JB $>$ 0,05 atau JB hitung < nilai χ^2 tabel sehingga H_0 diterima, artinya data kepadatan penduduk berdistribusi normal.

Jadi, dapat disimpulkan bahwa semua data yang digunakan dalam penelitian ini berdistribusi normal.

4.2.2.2 Uji Korelasi

Korelasi merupakan angka yang menunjukkan arah dan kuatnya hubungan antar variabel atau lebih. Artinya dinyatakan dalam bentuk hubungan positif atau negatif, sedangkan kuatnya hubungan dinyatakan mengunakan besarnya koefisien korelasi.

Menurut persamaan (2.12) diperoleh koefisien korelasi dari variabel sistem persamaan simultan PDRB yang dituliskan dalam tabel di bawah ini:

Tabel 4.5 Koefisien Korelasi Persamaan PDRB

	PDRB
Kemiskinan	-0,93264
Ekspor	0,963643
Impor	0,976393

Menurut Tabel 4.5 diketahui bahwa hubungan variabel PDRB dengan Kemiskinan mempunyai nilai koefisien korelasi sebesar -0,93264. Pada Tabel 2.1, jika koefisien korelasi bernilai negatif dan nilainya mendekati 1, maka PDRB dengan kemiskinan memiliki hubungan yang sangat kuat. Sesuai dengan Gambar 4.2, hal ini berarti jika PDRB semakin meningkat, maka jumlah penduduk miskin akan semakin menurun.

Menurut Tabel 4.5 diketahui bahwa hubungan variabel PDRB dengan ekspor mempunyai nilai koefisien korelasi sebesar 0,963643. Pada Tabel 2.1, jika koefisien korelasi bernilai positif dan nilainya mendekati 1, maka PDRB dengan ekspor memiliki hubungan yang sangat kuat. Sesuai dengan Gambar 4.3, hal ini berarti jika PDRB semakin meningkat, maka nilai ekspor juga akan semakin meningkat.

Menurut Tabel 4.5 diketahui bahwa hubungan variabel PDRB dengan impor mempunyai nilai koefisien korelasi sebesar 0,976393. Pada Tabel 2.1, jika koefisien korelasi bernilai positif dan nilainya mendekati 1, maka PDRB dengan impor memiliki hubungan yang sangat kuat. Sesuai dengan Gambar 4.4, hal ini berarti jika PDRB semakin meningkat, maka nilai impor juga akan semakin meningkat.

Menurut persamaan (2.12) diperoleh koefisien korelasi dari variabel sistem persamaan simultan kemiskinan yang dituliskan dalam tabel di bawah ini:

Tabel 4.6 Koefisien Korelasi Persamaan Kemiskinan

	Kemiskinan
PDRB	-0,93264
Tingkat Pengangguran	0,373636
Kepadatan Penduduk	-0,91165

Menurut Tabel 4.6 diketahui bahwa hubungan variabel Kemiskinan dengan PDRB mempunyai nilai koefisien korelasi sebesar -0,93264. Pada Tabel 2.1, jika koefisien korelasi bernilai negatif dan nilainya mendekati 1, maka kemiskinan dengan PDRB memiliki hubungan yang sangat kuat. Sesuai dengan Gambar 4.5, hal ini berarti jika jumlah penduduk miskin semakin menurun, maka PDRB akan semakin meningkat.

Menurut Tabel 4.6 diketahui bahwa hubungan variabel Kemiskinan dengan tingkat pengangguran mempunyai nilai koefisien korelasi sebesar 0.373636. Pada Tabel 2.1, jika koefisien korelasi bernilai positif dan nilainya pada interval ke dua, maka kemiskinan dengan tingkat pengangguran memiliki hubungan yang rendah. Sesuai dengan Gambar 4.6, hal ini berarti jika jumlah penduduk miskin menurun, maka tingkat pengangguran juga menurun.

Menurut Tabel 4.6 diketahui bahwa hubungan variabel Kemiskinan dengan kepadatan penduduk mempunyai nilai koefisien korelasi sebesar -0.911646. Pada Tabel 2.1, jika koefisien korelasi bernilai negatif dan nilainya mendekati 1, maka kemiskinan dengan kepadatan penduduk memiliki hubungan yang sangat kuat. Sesuai dengan Gambar 4.7, hal ini berarti jika jumlah penduduk miskin semakin menurun, maka kepadatan penduduk juga semakin menurun.

4.2.3 Sistem Persamaan Simultan PDRB dan Kemiskinan

Model ekonomi makro yang digunakan dalam penelitian ini terdiri dari dua persamaan struktural. Persamaan struktural yang pertama menyatakan bahwa fungsi PDRB dipengaruhi oleh besarnya nilai ekspor dan impor. Sedangkan persamaan struktural yang kedua menyatakan bahwa kemiskinan dipengaruhi oleh besarnya tingkat pengangguran dan kepadatan penduduk.

Adapun sistem persamaan simultan pada penelitian ini mengacu pada persamaan (4.1) adalah sebagai berikut:

$$\mathrm{PD_t} = \beta_{10} - \beta_{12}\mathrm{KE_t} + \gamma_{11}\mathrm{EX_t} - \gamma_{12}\mathrm{IM_t} + \mathrm{u_{1t}} \quad (4.17.a)$$

$$\mathrm{KE_t} = \beta_{20} - \beta_{21}\mathrm{PD_t} + \gamma_{23}\mathrm{TP_t} + \gamma_{24}\mathrm{KP_t} + \mathrm{u_{2t}} \quad (4.17.b)$$

dimana:

$\mathrm{PD_t}$ = Produk Domestik Regional Bruto (PDRB) atas dasar harga berlaku menurut provinsi pada tahun ke-t (Milyar Rupiah)

$\mathrm{KE_t}$ = Jumlah penduduk miskin pada tahun ke-t (Juta Orang)

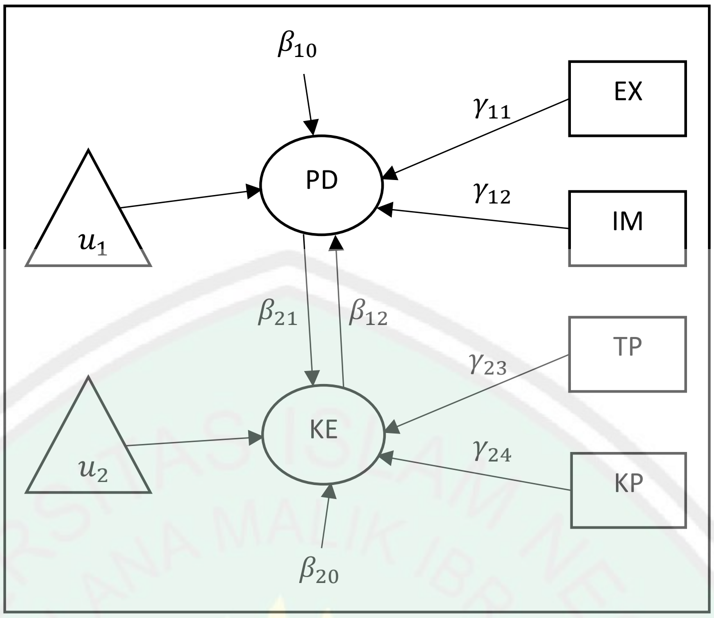
$\mathrm{EX_t}$ = Nilai ekspor migas dan nonmigas pada tahun ke-t (Juta US$)

$\mathrm{IM_t}$ = Nilai impor migas dan nonmigas pada tahun ke-t (Juta US$)

$\mathrm{TP_t}$ = Tingkat pengangguran pada tahun ke-t (Juta Orang)

$\mathrm{KP_t}$ = Kepadatan penduduk pada tahun ke-t (Jiwa/KM^2)

Persamaan (4.17) secara skematis dapat digambar seperti berikut:



Gambar 4.8 Model Sistem Persamaan Simultan PDRB dan Kemiskinan

4.2.4 Identifikasi Sistem Simultan Persamaan PDRB dan Kemiskinan

Identifikasi persamaan simultan menggunakan identifikasi kondisi *order* dan kondisi *rank.*

4.2.4.1 Identifikasi Kondisi Order

Identifikasi persamaan terhadap kondisi *order* yaitu apabila jumlah variabel *predetermined* yang dikeluarkan dari persamaan itu, harus tidak lebih dari jumlah variabel endogen yang dimasukkan di dalam persamaan itu dikurangi satu, sebagai berikut:

a. Persamaan (4.17.a)

M = 2 (PD_t dan KE_t) m = 2 (PD_t dan KE_t)

K = 4 (EX_t, IM_t, TP_t, dan TP_t) k = 2 (EX_t dan IM_t)

Karena

$$K - k \geq m - 1$$

$$4 - 2 \geq 2 - 1$$

$$2 \geq 1$$

Maka persamaan (4.17.a) merupakan persamaan yang *overidentified*.

b. Persamaan (4.17.b)

M = 2 (PD_t dan KE_t) m = 2 (PD_t dan KE_t)

K = 4 (EX_t, IM_t, TP_t, dan TP_t) k = 2 (TP_t dan TP_t)

Karena

$$K - k \geq m - 1$$

$$4 - 2 \geq 2 - 1$$

$$2 \geq 1$$

Maka persamaan (4.17.b) merupakan persamaan yang *overidentified*.

Tabel 4.7 Identifikasi Kondisi *Order*

No. Pers.	$(K - k)$	$(m - 1)$	Keterangan
4.17.a	$4 - 2 = 2$	$2 - 1 = 1$	*Overidentified*
4.17.b	$4 - 2 = 2$	$2 - 1 = 1$	*Overidentified*

4.2.4.2 Identifikasi Kondisi Rank

Setelah dilakukan identifikasi kondisi *order*, dapat diketahui bahwa persamaan (4.17.a) dan (4.17.b) merupakan persamaan yang *overidentified*. Tetapi, kondisi tersebut belum cukup untuk menunjukkan kondisi identifikasi suatu persamaan. Oleh karena itu, harus diidentifikasi menggunakan kondisi *rank* untuk menunjukkan terdidentifikasi atau tidak sebuah persamaan tersebut. Hal ini berarti bahwa, walaupun suatu persamaan sudah bisa diidentifikasi menurut kondisi *order*, tetapi bisa saja terjadi bahwa persamaan tersebut tidak teridentifikasi apabila diidentifikasi dengan kondisi *rank*.

Menyelediki kondisi *rank*, persamaan (4.17.a) dan (4.17.b) harus diubah kedalam bentuk struktural sebagai berikut:

$$-\beta_{10} + PD_t - \beta_{12}KE_t - \gamma_{11}EX_t - \gamma_{12}IM_t = u_{1t} \qquad (4.18.a)$$

$$-\beta_{20} - \beta_{21}PD_t + KE_t - \gamma_{23}TP_t - \gamma_{24}KP_t = u_{2t} \qquad (4.18.b)$$

Bentuk struktural persamaan (4.18) maka ditulis ke dalam sebuah tabel berikut:

Tabel 4.8 Identifikasi Kondisi *Rank*

Koefisien-koefisien							
No. Pers	C	PD_t	KE_t	EX_t	IM_t	TP_t	KP_t
4.17.a	$-\beta_{10}$	1	$-\beta_{12}$	$-\gamma_{11}$	$-\gamma_{12}$	0	0
4.17.b	$-\beta_{20}$	$-\beta_{21}$	1	0	0	$-\gamma_{23}$	$-\gamma_{24}$

Menurut Tabel 4.8 untuk menentukan identifikasi kondisi *rank*, diketahui bahwa setiap persamaan mempunyai banyaknya tanda 0 lebih dari $(m - 1 = 2 - 1 = 1)$, sehingga dapat diketahui bahwa setiap persamaan terlalu teridentifikasi. Jika identifikasi kondisi *order* dan *rank* sudah terpenuhi, maka dapat disimpulkan bahwa setiap persamaan *over identified* yaitu terlalu teridentifikasi

4.2.5 Estimasi Parameter Persamaan Simultan PDRB dan Kemiskinan dengan Metode LIML

Berdasarkan identifikasi kondisi *order* dan *rank*, menunjukkan bahwa persamaan (4.17.a) dan (4.17.b) *overidentified*. Oleh karena itu, persamaan (4.17.a) dan (4.17.b) dapat diestimasi dengan menggunakan metode LIML.

1. Memperoleh estimasi parameter pada persamaan (4.17.a), maka perlu diketahui:

$$Z_1 = \begin{bmatrix} 1 & KE_1 & EX_1 & IM_1 \\ 1 & KE_2 & EX_2 & IM_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & KE_{14} & EX_{14} & IM_{14} \end{bmatrix} \qquad y_1 = \begin{bmatrix} PD_1 \\ PD_2 \\ \vdots \\ PD_{14} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 38{,}74 & 62124 & 33514{,}8 \\ 1 & 37{,}87 & 56320{,}9 & 30962{,}1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 28{,}31 & 182551{,}8 & 186628{,}7 \end{bmatrix} \qquad = \begin{bmatrix} 1374048{,}62 \\ 1564471{,}65 \\ \vdots \\ 7578118{,}87 \end{bmatrix}$$

Selengkapnya lihat di lampiran 1. Hasil estimasi parameter yang mengacu pada persamaan (4.12) adalah sebagai berikut:

$$\hat{\delta}_{1_{liml}} = (Z_1{}'Z_1)^{-1}Z_1{}'y_1$$

$$= \begin{bmatrix} 5{,}2281830\ 10^6 \\ -1{,}1881047\ 10^5 \\ 8{,}755515 \\ -18{,}166159 \end{bmatrix}$$

Diperoleh nilai estimator parameter pada persamaan (4.17.a) sebagai berikut:

$$\beta_{10} = 5228183$$

$$\beta_{12} = -118810{,}47$$

$$\gamma_{11} = 8{,}755515$$

$$\gamma_{12} = -18{,}166159$$

2. Memperoleh estimasi parameter pada persamaan (4.17.b), maka perlu diketahui:

$$Z_2 = \begin{bmatrix} 1 & PD_1 & TP_1 & KP_1 \\ 1 & PD_2 & TP_2 & KP_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & PD_{14} & TP_{14} & KP_{14} \end{bmatrix} \qquad y_2 = \begin{bmatrix} KE_1 \\ KE_2 \\ \vdots \\ KE_{14} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1374048{,}62 & 5{,}81 & 107 \\ 1 & 1564471{,}65 & 8{,}01 & 109 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 7578118{,}87 & 7{,}28 & 130 \end{bmatrix} \qquad = \begin{bmatrix} 38{,}74 \\ 37{,}87 \\ \vdots \\ 28{,}31 \end{bmatrix}$$

Hasil estimasi parameter yang mengacu pada persamaan (4.14) adalah sebagai berikut:

$$\hat{\delta}_{2_{liml}} = (Z_2{}'Z_2)^{-1}Z_2{}'y_2$$

$$= \begin{bmatrix} 83.6719 \\ -1{,}486\ 10^{-8} \\ 0{,}547844 \\ 0{,}455393 \end{bmatrix}$$

Diperoleh nilai estimator parameter pada persamaan (4.17.b)sebagai berikut:

$$\beta_{20} = 83{,}6719$$

$$\beta_{21} = -0{,}00000001486$$

$$\gamma_{23} = 0{,}547844$$

$$\gamma_{24} = 0{,}455393$$

Sehingga pada persamaan (4.17) dapat ditulis menjadi model persamaan simultan sebagai berikut:

$$PD = 5228183 - 118810{,}47\ KE + 8{,}755515\ EX - 18{,}166159\ IM \quad (4.19.a)$$

$$KE = 83{,}6719 - 0{,}00000001486\ PD + 0{,}547844\ TP + 0{,}455393\ KP \quad (4.19.b)$$

Persamaan (4.19.a) diperoleh bahwa variabel kemiskinan dan impor berpengaruh secara negatif, sedangkan ekspor berpengaruh secara positif, artinya antara ketiga variabel tersebut ada pengaruh terhadap PDRB. Hal ini berarti jika kemiskinan naik 1 poin dan variabel yang lain konstan, maka PDRB akan turun sebesar 118810,47. Jika ekspor naik 1 poin dan variabel yang lain konstan, maka PDRB akan naik sebesar 8,755515. Jika impor naik 1 poin dan variabel yang lain konstan, maka PDRB akan turun sebesar 18,166159. Jika kemiskinan, ekspor dan impor bernilai tetap, maka PDRB akan naik sebesar 5228183.

Persamaan (4.19.b) diperoleh bahwa variabel PDRB berpengaruh secara negatif, sedangkan tingkat pengangguran dan kepadatan penduduk berpengaruh secara positif, artinya antara ketiga variabel tersebut ada pengaruh terhadap kemiskinan. Hal ini berarti jika PDRB naik 1 poin dan variabel yang lain konstan, maka kemiskinan akan turun sebesar 0,00000001486. Jika tingkat pengangguran naik 1 poin dan variabel yang lain konstan, maka kemiskinan akan naik sebesar 0,547844. Jika kepadatan penduduk naik 1 poin dan variabel yang lain konstan, maka kemiskinan akan naik sebesar 0,455393. Jika PDRB, tingkat pengangguran dan kepadatan penduduk bernilai tetap, maka kemiskinan akan naik sebesar 83,6719.

Model persamaan simultan PDRB dan kemiskinan dengan metode LIML adalah persamaan (4.19.a) dan (4.19.b). Koefisien determinasi menunjukkan bahwa pengaruh dalam model persamaan PDRB dapat dijelaskan oleh variabel kemiskinan, ekspor, dan impor sebesar 86% sedangkan 14% dipengaruhi oleh faktor lain. Koefisien determinasi menunjukkan bahwa pengaruh dalam model persamaan kemiskinan dapat dijelaskan oleh variabel PDRB, tingkat pengangguran, dan kepadatan penduduk secara bersama-sama sebesar 80% sedangkan 20% dipengaruhi oleh faktor lain. Model simultan tersebut memberikan hasil bahwa kemiskinan signifikan mempengaruhi PDRB pada $\alpha=12\%$, namun PDRB tidak mempengaruhi kemiskinan. Artinya, dengan $\alpha=12\%$ tidak ada hubungan simultan antara PDRB dan kemiskinan. Sementara itu, dengan $\alpha=32\%$ terdapat hubungan simultan antara PDRB dan kemiskinan.

4.3 Kajian Estimasi Parameter Sistem Persamaan Simultan dalam Islam

Pada bab ini akan membahas integrasi antara Q.S. Ash-Shaffaat ayat 147 dengan konsep estimasi dalam matematika. Konsep estimasi dalam matematika ternyata telah ada sejak zaman Nabi Muhammad SAW. Hal ini terbukti dalam Al-Qur’an surat Ash-Shaffaat ayat 147, yang secara tidak langsung telah melahirkan konsep pendugaan (estimasi).

وَأَرۡسَلۡنَٰهُ إِلَىٰ مِاْئَةِ أَلۡفٍ أَوۡ يَزِيدُونَ ﴿١٤٧﴾

Artinya : "*Dan Kami utus dia kepada seratus ribu orang atau lebih*" (Q.S. Ash-Shaffat/37:147).

Pengertian pendugaan dalam surat Ash-Shaffaat ayat 147 mempunyai makna estimasi banyak, maksudnya adalah menghitung jumlah umat Nabi Yunus tidak secara pasti, akan tetapi melalui penaksiran/pendugaan (estimasi). Dari sini diketahui bahwa pendugaan dalam ayat tersebut merupakan estimasi dalam konsep sederhana dalam matematika yang digunakan untuk perhitungan dasar matematika.

Pada surat Ash-Shaffaat ayat 147 yang menunjukan makna estimasi terletak pada lafadz مِاْئَةِ أَلۡفٍ أَوۡ يَزِيدُونَ yang artinya "*seratus ribu orang atau lebih*", kalimat tersebut menjelaskan bahwa dalam menentukan jumlah umat Nabi Yunus tidak dengan perhitungan secara pasti. Jika dipahami pada arti "atau" menurut perhitungannnya adalah seratus ribu/lebih, maka ayat ini menyatakan jumlah mereka banyak. Akan tetapi jika dipahami dengan arti "dan/bahkan", maka artinya adalah mereka diutus kepada dua kelompok, yang pertama berjumlah seratus ribu dan yang kedua adalah yang lebih dari itu. Sehingga terdapat perbedaan pendapat para ulama' dalam menafsirkan ayat tersebut. Para ulama' mempunyai perbedaan pendapat dalam menafsirkan kalimat "*kepada seratus ribu orang atau lebih*", karena ayat tersebut tidak ada kejelasan dalam menerangkan jumlah umat Nabi Yunus secara pasti. Para ulama memperkirakan jumlah umat Nabi Yunus dengan jumlah yang berbeda-beda, tetapi meskipun demikian tidak ada yang mengatakan bahwa kurang dari 100.000 orang.

Dari uraian diatas diketahui bahwa terdapat perbedaan pendapat para ulama' dalam menduga banyaknya umat Nabi Yunus. Kata yang bermakna *lebih* itu oleh para ulama' diduga sebanyak 20.000 orang, 30.000 orang, atau 70.000 orang. Ada juga yang hanya mengatakan *lebih saja*. Jika mengatakan *lebih saja*, maka bisa saja 10.000 orang atau 15.000 orang, hal ini karena ayat tersebut tidak mengatakan jumlah umat Nabi Yunus yang sebenarnya. Jika umat Nabi Yunus dapat dinyatakan dalam X, maka niali X tersebut berada dalam skala interval 100.000 < X < 200.000, artinya umat Nabi Yunus tidak kurang dari 100.000 dan juga tidak sampai 200.000 orang.

Perbedaan makna estimasi dalam surat Ash-Shaffaat dengan estimasi parameter dalam penelitian ini terletak pada objek yang diestimasi dan syarat atau sifat-sifat yang harus dipenuhi. Dalam surat Ash-Shaffaat ayat 147 mengestimasi terhadap banyaknya jumlah sesuatu dan syarat estimasi berupa interval yaitu 100.000 < X < 200.000, sedangkan dalam penelitian ini mengestimasi model persamaan simultan yang estimatornya berupa rumus, yang dapat diterapkan dalam penelitian. Estimasi parameter mempunyai syarat yang harus memenuhi sifat-sifat yaitu tidak bias, konsisten dan efisien. Hal ini membuktikan bahwa Al-Qur'an tidak hanya mengandung tentang ilmu-ilmu agama saja, akan tetapi juga banyak menjelaskan tentang ilmu pengetahuan umum modern yang ada disekitar kita. Di dalam Al-Qur'an, konsep-konsep ilmu pengetahuan tidak disajikan secara langsung, akan tetapi berupa pengetahuan yang membutuhkan penafsiran secara mendalam untuk bisa memahaminya.

Selain estimasi, dalam penelitian ini juga membahas tentang sistem persamaan simultan, yang mana dalam Al-Qur'an telah dijelaskan dalam Surat Al-Isro' ayat 7 sebagai berikut:

إِنۡ أَحۡسَنتُمۡ أَحۡسَنتُمۡ لِأَنفُسِكُمۡۖ وَإِنۡ أَسَأۡتُمۡ فَلَهَاۚ فَإِذَا جَآءَ وَعۡدُ ٱلۡأٓخِرَةِ لِيَسُـٔۥاْ وُجُوهَكُمۡ وَلِيَدۡخُلُواْ
ٱلۡمَسۡجِدَ كَمَا دَخَلُوهُ أَوَّلَ مَرَّةٖ وَلِيُتَبِّرُواْ مَا عَلَوۡاْ تَتۡبِيرًا ﴿٧﴾

Artinya : "*Jika kamu berbuat baik (berarti) kamu berbuat baik bagi dirimu sendiri dan jika kamu berbuat jahat, maka (kejahatan) itu bagi dirimu sendiri, dan apabila datang saat hukuman bagi (kejahatan) yang kedua, (Kami datangkan orang-orang lain) untuk menyuramkan muka-muka kamu dan mereka masuk ke dalam mesjid, sebagaimana musuh-musuhmu memasukinya pada kali pertama dan untuk membinasakan sehabis-habisnya apa saja yang mereka kuasai.*" (Q.S. Al-Imran/17:7).

Persamaan simultan adalah persamaan dimana ada hubungan timbal balik antar variabel *Y* dan *X* sehingga terjadi sebab dan akibat yang terjadi berlangsung dua arah. Dari ayat di atas yang menunjukkan makna persamaan simultan terdapat pada lafadz إِن أَحسَنتُم أَحسَنتُم لِأَنفُسِكُم yang artinya "*jika kamu berbuat baik (berarti) kamu berbuat baik bagi dirimu sendiri"*. Allah SWT memerintahkan kepada hambanya untuk selalu tolong-menolong dalam kebaikan dan takwa, misalnya dengan memberi sedekah kapada orang lain yang membutuhkan, atau perbuatan baik lainnya. Allah SWT telah berjanji akan melipat gandakan rizki orang yang bersedekah, jika difikir secara logika bahwa jika kita mengeluarkan harta kita untuk bersedekah, maka harta kita akan berkurang, tetapi sejatinya hal itu salah. Sebenarnya jika seseorang mau bersedekah, maka sejatinya hartanya akan bertambah. Hal ini jelas bahwa ada hubungan timbal balik yang terjadi, yaitu orang yang bersedekah akan mendapatkan balasan kebaikan dari Allah SWT, selain itu juga dapat menjaga keharmonisan dalam hubungan persaudaraan.

Dimisalkan:

Y_1 = Berbuat baik

Y_2 = Berbuat baik bagi dirimu sendiri

X_1 = Bersedekah

X_2 = Saling menolong

X_3 = Mendapatkan balasan kebaikan dari Allah SWT

Sehingga diperoleh variabel sistem persamaan simultan sebagai berikut:

Y_1, Y_2 : Variabel endogen

X_1, X_2, X_3 : Variabel *predetermind*

Diperoleh model sistem persamaan simultan sebagai berikut:

$$Y_1 = \beta_{10} + \beta_{12}Y_2 + \gamma_{11}X_1 + \gamma_{12}X_2 + u_1$$

$$Y_2 = \beta_{20} + \beta_{21}Y_1 + \gamma_{23}X_3 + u_2$$

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada penelitian ini, dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Estimasi parameter sistem persamaan simultan dengan metode LIML pada persamaan berikut:

$$y_{1t} = \beta_{10} + \beta_{12}y_{2t} + \gamma_{11}x_{1t} + \gamma_{12}x_{2t} + u_{1t}$$

$$y_{2t} = \beta_{20} + \beta_{21}y_{1t} + \gamma_{23}x_{3t} + \gamma_{24}x_{4t} + u_{2t}$$

Dapat ditulis menjadi:

$$y_1 = Z_1\delta_1 + u_1$$

$$y_2 = Z_2\delta_2 + u_2$$

Sehingga diperoleh estimasi parameter sebagai berikut:

$$\hat{\delta}_{1_{liml}} = (Z_1'Z_1)^{-1}Z_1'y_1$$

$$\hat{\delta}_{2_{liml}} = (Z_2'Z_2)^{-1}Z_2'y_2$$

2. Implementasi metode LIML pada persamaan simultan PDRB dan Kemiskinan diperoleh model persamaan sebagai berikut:

$$PD = 5228183 - 118810{,}47\ KE + 8{,}755515\ EX - 18{,}166159\ IM$$

$$KE = 83{,}6719 - 0{,}00000001486\ PD + 0{,}547844\ TP + 0{,}455393\ KP$$

5.2 Saran

1. Peneliti selanjutnya dapat menggunakan sistem persamaan simultan dengan 3 variabel endogen atau lebih.

2. Penelitian ini dapat dikembangkan dengan menggunakan metode sistem yaitu *Three Stage Least Squares* (3SLS) atau (*Full Information Maximum Likelihood* (FIML).

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika.* Malang: UIN Press.

Algifari. 2000. *Analisis Regresi Teori, Kasus, dan Solusi. Edisi Kedua.* Yogyakarta: BPFE Yogyakarta.

Al-Mahalli dan As-Suyuthi. 2010. *Tafsir Jalalain Jilid 3.* Surabaya: Pustaka eLBA.

Al-Maraghi. 1989. *Terjemahan Tafsir Al-Maraghi.* Semarang: CV Toha Putra.

Anton, Howard. 2004. *Aljabar Linier Elementer Edisi Kedelapan Jilid 1.* Jakarta: Penerbit Erlangga.

Aziz, Abdul. 2010. *Ekonometrika (Teori & Praktik Eksperimen dengan Matlab).* Malang: UIN-Maliki Pres.

Bekti, Dwi Rokhana., David, Gita N, Priscillia, dan Serlyana. 2014. Model Persamaan Simultan Pada Analisis Hubungan Kemiskian dan PDRB. *Mathematics and Statistics Department, School of Computer Science, Binus University*, Vol.5, 810-817.

Badan Pusat Statistik (BPS). 2015. *Statistik Indonesia Tahun 2010.* Jakarta Pusat: Badan Pusat Statistik

Daniantari, Theresia Retno. 2011. Estimasi Model Persamaan Simultan dengan Metode Two Stage Least Squares dan Penerapanya. *Skripsi*.

Ekananda, Mahyus. 2015. *Ekonometrika Dasar.* jakarta: Mitra Wacana Media.

Gujarati, Darmodar N. 1999. *Ekonometrika Dasar Terjemahan Sumarno Zain.* Jakarta: Penerbit Erlangga.

Hasan, Iqbal. 2002. *Pokok-Pokok Materi Statistik 1 (Statistik Deskriptif).* Jakarta: Bumi Aksara.

Kmenta, Jan. 1990. *Elements of Econometrics Second Edition.* New York: Macmillan Publishing Company.

Murray dan Larry. 2007. *Statistik Edisi ke 3.* Jakarta: Erlangga.

Maddala, Gangadhrrao Soundalyarao. 2009. *Introduction To Econometrics Fourth Edition.* England: Wiley.

Seymour dan Marc. 2006. *Aljabar Linear. Edisi Ketiga.* Jakarta: PT. Gelora Aksara Utama.

Simatupang, Pantjar dan Dermoredjo Saktyanu K. 2009. *Dampak Investasi Sumber Daya Manusia Terhadap Pertumbuhan Ekonomi dan Kemiskinan di Indonesia.* Prisma, Hal 17-31, No 1.

Soemartini. 2016. Penerapan Metode Two Stage Least Squares Pada Model Persamaan Simultan Dalam Memprediksi PDRB dan Pertumbuhan Ekonomi. *Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Padjadjaran*, ISSN: 2528-4630.

Sukirno, Sadono. 2000. *Makro Ekonomi Modern*. Jakarta: PT Raja Grafindo Persada

Sumodiningrat, Gunawan. 1994. *Pengantar Ekonometrika.* Yogyakarta: BPFE.

Supranto, Johannes. 1984. *Supranto, J. . Pengantar Matrix.* Jakarta: LP-FEUI.

Supranto, Johannes. 2009. *Statistik Teori dan Aplikasi Jilid II.* Jakarta: Erlangga.

Syafaat, Nizwar. 1996. Pendugaan Parameter Persamaan Simultan dengan Metode Pendugaan OLS, 2SLS, LIML dan 3SLS. *Ekonomi dan Keuangan Indonesia* , Volume XLIV Nomor 4.

Wibisono, Yusuf. 2005. *Metode Statistik.* Yogyakarta: Gajah Mada University.

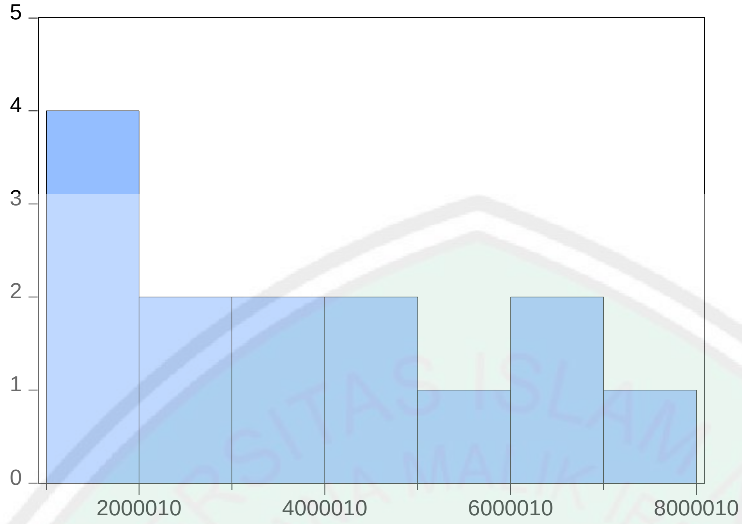
Winarno, Wing Wahyu. 2007. *Analisis Ekonometrika dan Statistika dengan EViews.* Yogyakarta: UPP Sekolah Tinggi Ilmu Manajemen YKPN.

LAMPIRAN-LAMPIRAN

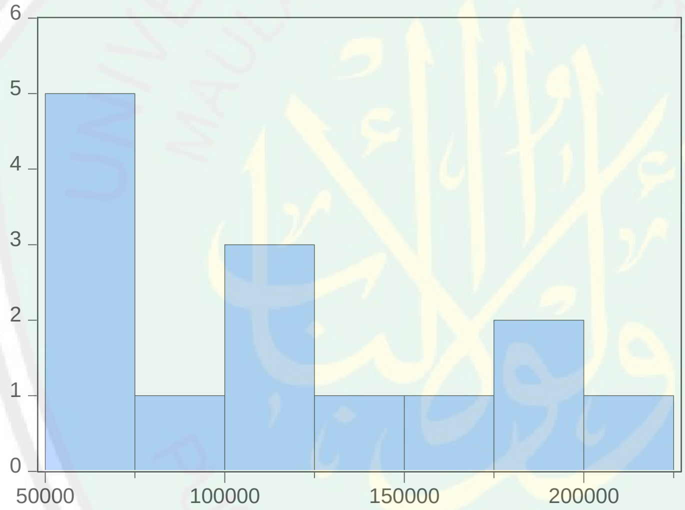
Lampiran 1 Data Penelitian

Tahun	PDRB	Ekspor	Impor	Kemiskinan	Tingkat Pengangguran	Kepadatan Penduduk
2000	1374048,62	62124	33514,8	38,74	5,81	107
2001	1564471,65	56320,9	30962,1	37,87	8,01	109
2002	1750017,54	57158,8	31288,9	38,39	9,13	111
2003	1964592,69	61058,2	32550,7	37,34	9,94	112
2004	2225418,05	71584,6	46524,5	36,15	10,25	114
2005	2686581,71	85660	57700,9	35,10	11,38	115
2006	3138165,94	100798,6	61065,5	39,30	11,02	117
2007	3556333,63	114100,9	74473,4	37,17	10,28	118
2008	4271044,59	137020,4	129197,3	34,96	9,41	120
2009	4653539,25	116510	96829,2	32,53	9,11	121
2010	5295073,58	157779,1	135663,3	31,02	8,46	125
2011	6028802,27	203496,6	177435,6	29,96	7,91	127
2012	6733160,11	190020,3	191689,5	28,86	7,43	128
2013	7578118,87	182551,8	186628,7	28,31	7,28	130

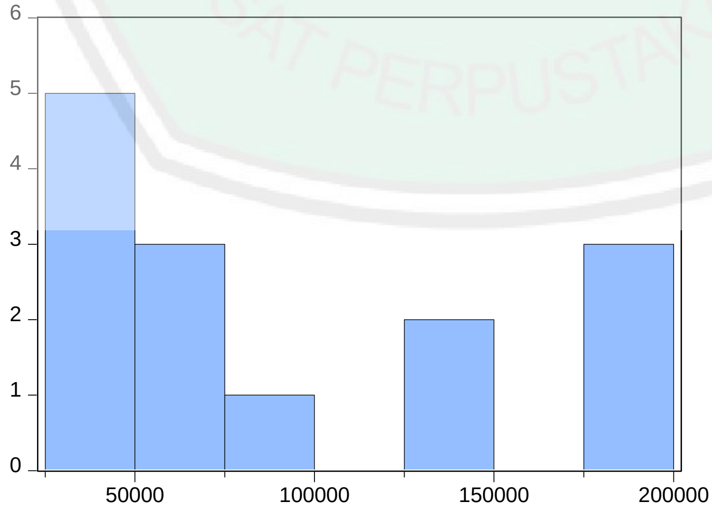
Lampiran 2 Deskriptif Data



Series: PDRB	
Sample 2000 2013	
Observations 14	
Mean	3772812.
Median	3347250.
Maximum	7578119.
Minimum	1374049.
Std. Dev.	2032256.
Skewness	0.502625
Kurtosis	1.991344
Jarque-Bera	1.182949
Probability	0.553510

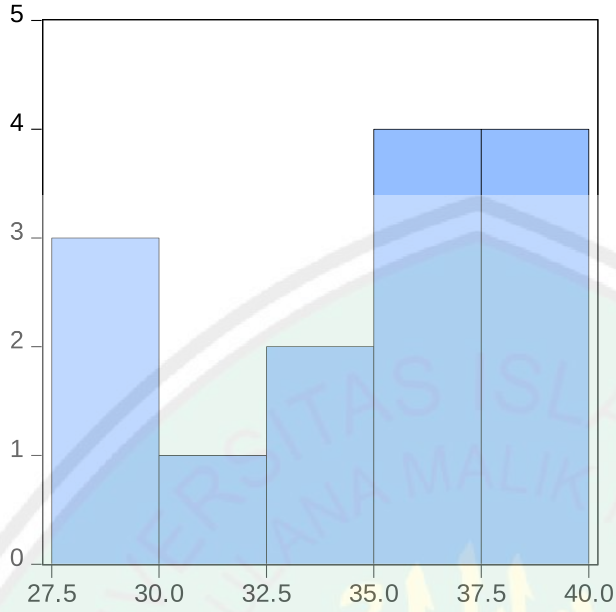


Series: EKSPOR	
Sample 2000 2013	
Observations 14	
Mean	114013.2
Median	107449.8
Maximum	203496.6
Minimum	56320.90
Std. Dev.	52454.51
Skewness	0.446968
Kurtosis	1.795252
Jarque-Bera	1.312815
Probability	0.518711



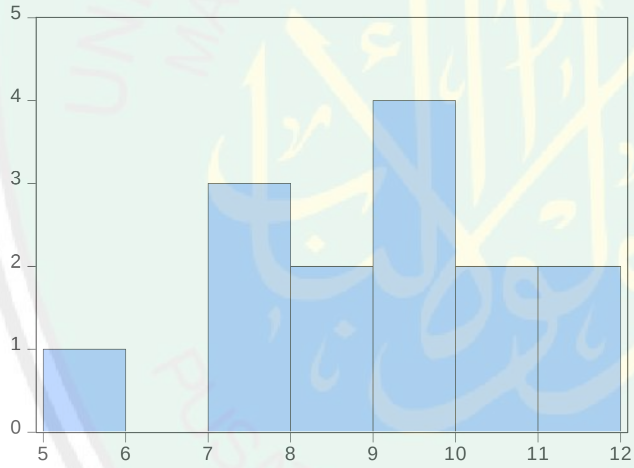
Series: IMPOR	
Sample 2000 2013	
Observations 14	
Mean	91823.17
Median	67769.45
Maximum	191689.5
Minimum	30962.10
Std. Dev.	61004.17
Skewness	0.559587
Kurtosis	1.777798
Jarque-Bera	1.602024
Probability	0.448874

Lampiran 2 (Lanjutan)



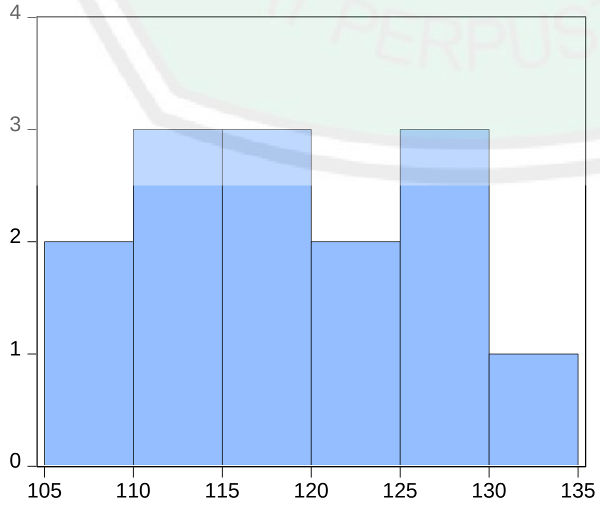
Series: KEMISKINAN
Sample 2000 2013
Observations 14

Mean	34.69286
Median	35.62500
Maximum	39.30000
Minimum	28.31000
Std. Dev.	3.845108
Skewness	-0.478199
Kurtosis	1.751531
Jarque-Bera	1.442800
Probability	0.486071



Series: TINGKAT_PENGANGGURAN
Sample 2000 2013
Observations 14

Mean	8.958571
Median	9.120000
Maximum	11.38000
Minimum	5.810000
Std. Dev.	1.570438
Skewness	-0.271648
Kurtosis	2.356077
Jarque-Bera	0.414054
Probability	0.812998



Series: KEPADATAN_PENDUDUK
Sample 2000 2013
Observations 14

Mean	118.1429
Median	117.5000
Maximum	130.0000
Minimum	107.0000
Std. Dev.	7.336496
Skewness	0.166592
Kurtosis	1.843659
Jarque-Bera	0.844745
Probability	0.655490

Lampiran 3 Korelasi

	PDRB	KEMISKINAN	EKSPOR	IMPOR	KEPADATAN_ PENDUDUK	TINGKAT_PEN GANGGURAN
PDRB	1.000000	-0.932644	0.963643	0.976393	0.986552	-0.298282
KEMISKINAN	-0.932644	1.000000	-0.893220	-0.927836	-0.915443	0.373636
EKSPOR	0.963643	-0.893220	1.000000	0.984438	0.963749	-0.308438
IMPOR	0.976393	-0.927836	0.984438	1.000000	0.960140	-0.369728
KEPADATAN_ PENDUDUK	0.986552	-0.915443	0.963749	0.960140	1.000000	-0.169630
TINGKAT_PEN GANGGURAN	-0.298282	0.373636	-0.308438	-0.369728	-0.169630	1.000000

Lampiran 4 Output Eviews 10

Dependent Variable: PDRB
Method: LIML
Sample: 2000 2013
Included observations: 14
Covariance type: IV
Instrument specification: EKSPOR IMPOR KEPADATAN_PENDUDUK TINGKAT_PENGANGGURAN

R-squared	0.860374	Mean dependent var	3772812.
Adjusted R-squared	0.818486	S.D. dependent var	2032256.
S.E. of regression	865831.6	Sum squared resid	7.50E+12
Durbin-Watson stat	1.486934	LIML min. eigenvalue	1.028707

Dependent Variable: KEMISKINAN
Method: LIML / K-Class
Sample: 2000 2013
Included observations: 14
Covariance type: IV
Instrument specification: EKSPOR IMPOR TINGKAT_PENGANGGURAN KEPADATAN_PENDUDUK

R-squared	0.804594	Mean dependent var	34.69286
Adjusted R-squared	0.745972	S.D. dependent var	3.845108
S.E. of regression	1.937981	Sum squared resid	37.55770
Durbin-Watson stat	1.129031	LIML min. eigenvalue	1.000337

Lampiran 5 Estimasi Parameter dengan Metode LIML (Maple 8)

> restart;
> with(linalg) :
>
$Z1trans := matrix(4, 14, [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 38.74, 37.87, 38.39, 37.34, 36.15, 35.10, 39.30, 37.17, 34.96, 32.53, 31.02, 29.96, 28.86, 28.31, 62124.0, 56320.9, 57158.8, 61058.2, 71584.6, 85660.0, 100798.6, 114100.9, 137020.4, 116510.0, 157779.1, 203496.6, 190020.3, 182551.8, 33514.8, 30962.1, 31288.9, 32550.7, 46524.5, 57700.9, 61065.5, 74473.4, 129197.3, 96829.2, 135663.3, 177435.6, 191689.5, 186628.7]);$

$Z1trans := [[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1],$
$[38.74, 37.87, 38.39, 37.34, 36.15, 35.10, 39.30, 37.17, 34.96, 32.53, 31.02, 29.96, 28.86, 28.31],$
$[62124.0, 56320.9, 57158.8, 61058.2, 71584.6, 85660.0, 1.007986\ 10^5, 1.141009\ 10^5, 1.370204\ 10^5, 1.165100\ 10^5, 1.577791\ 10^5, 2.034966\ 10^5, 1.900203\ 10^5, 1.825518\ 10^5],$
$[33514.8, 30962.1, 31288.9, 32550.7, 46524.5, 57700.9, 61065.5, 74473.4, 1.291973\ 10^5, 96829.2, 1.356633\ 10^5, 1.774356\ 10^5, 1.916895\ 10^5, 1.866287\ 10^5]]$

> $Z1 := transpose(Z1trans);$

$$Z1 := \begin{bmatrix} 1 & 38.74 & 62124.0 & 33514.8 \\ 1 & 37.87 & 56320.9 & 30962.1 \\ 1 & 38.39 & 57158.8 & 31288.9 \\ 1 & 37.34 & 61058.2 & 32550.7 \\ 1 & 36.15 & 71584.6 & 46524.5 \\ 1 & 35.10 & 85660.0 & 57700.9 \\ 1 & 39.30 & 1.007986\ 10^5 & 61065.5 \\ 1 & 37.17 & 1.141009\ 10^5 & 74473.4 \\ 1 & 34.96 & 1.370204\ 10^5 & 1.291973\ 10^5 \\ 1 & 32.53 & 1.165100\ 10^5 & 96829.2 \\ 1 & 31.02 & 1.577791\ 10^5 & 1.356633\ 10^5 \\ 1 & 29.96 & 2.034966\ 10^5 & 1.774356\ 10^5 \\ 1 & 28.86 & 1.900203\ 10^5 & 1.916895\ 10^5 \\ 1 & 28.31 & 1.825518\ 10^5 & 1.866287\ 10^5 \end{bmatrix}$$

> $Z1trans\_Z1 := multiply(Z1trans, Z1);$

$$Z1trans\_Z1 := \begin{bmatrix} 14 & 485.70 & 1.5961842\ 10^6 & 1.2855244\ 10^6 \\ 485.70 & 17042.5238 & 5.303415710\ 10^7 & 4.176918989\ 10^7 \\ 1.5961842\ 10^6 & 5.303415710\ 10^7 & 2.177551859\ 10^{11} & 1.875186175\ 10^{11} \\ 1.2855244\ 10^6 & 4.176918989\ 10^7 & 1.875186175\ 10^{11} & 1.664205379\ 10^{11} \end{bmatrix}$$

Lampiran 5 (Lanjutan)

>
$Y1trans := matrix(1, 14, [1374048.62, 1564471.65, 1750017.54, 1964592.69, 2225418.05, 2686581.71, 3138165.94, 3556333.63, 4271044.59, 4653539.25, 5295073.58, 6028802.27, 6733160.11, 7578118.87]);$

$$Y1trans := [1.37404862\ 10^6, 1.56447165\ 10^6, 1.75001754\ 10^6, 1.96459269\ 10^6, 2.22541805\ 10^6, 2.68658171\ 10^6, 3.13816594\ 10^6, 3.55633363\ 10^6, 4.27104459\ 10^6, 4.65353925\ 10^6, 5.29507358\ 10^6, 6.02880227\ 10^6, 6.73316011\ 10^6, 7.57811887\ 10^6]$$

> $Y1 := transpose(Y1trans);$

$$Y1 := \begin{bmatrix} 1.37404862\ 10^6 \\ 1.56447165\ 10^6 \\ 1.75001754\ 10^6 \\ 1.96459269\ 10^6 \\ 2.22541805\ 10^6 \\ 2.68658171\ 10^6 \\ 3.13816594\ 10^6 \\ 3.55633363\ 10^6 \\ 4.27104459\ 10^6 \\ 4.65353925\ 10^6 \\ 5.29507358\ 10^6 \\ 6.02880227\ 10^6 \\ 6.73316011\ 10^6 \\ 7.57811887\ 10^6 \end{bmatrix}$$

> $Z1trans\_Y1 := multiply(Z1trans, Y1);$

$$Z1trans\_Y1 := \begin{bmatrix} 5.281936850\ 10^7 \\ 1.737711967\ 10^9 \\ 7.357532243\ 10^{12} \\ 6.423683642\ 10^{12} \end{bmatrix}$$

> $invZ1trans\_Z1 := inverse(Z1trans\_Z1);$

$$invZ1trans\_Z1 := [[62.11884438, -1.583337791, 0.00004298616983, -0.0001308808309], [-1.583337636, 0.04131371166, -0.000001978826140, 0.000004091115166], [0.00004298613062, -0.000001978825809, 1.000101938\ 10^{-9}, -9.622824020\ 10^{-10}], [-0.0001308809137, 0.000004091117099, -9.622814633\ 10^{-10}, 1.074468717\ 10^{-9}]]$$

Lampiran 5 (Lanjutan)

> delta[1] := *multiply*(*invZ1trans_Z1*, *Z1trans_Y1*);

$$\delta_1 := \begin{bmatrix} 5.2281830\ 10^6 \\ -1.1881047\ 10^5 \\ 8.755515 \\ -18.166159 \end{bmatrix}$$

>

> *restart*;

> *with*(*linalg*) :

>

Z2trans := *matrix*(4, 14, [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1374048.62, 1564471.65, 1750017.54, 1964592.69, 2225418.05, 2686581.71, 3138165.94, 3556333.63, 4271044.59, 4653539.25, 5295073.58, 6028802.27, 6733160.11, 7578118.87, 5.81, 8.01, 9.13, 9.94, 10.25, 11.38, 11.02, 10.28, 9.41, 9.11, 8.46, 7.91, 7.43, 7.28, 107, 109, 111, 112, 114, 115, 117, 118, 120, 121, 125, 127, 128, 130]);

Z2trans := [[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1.37404862 10^6, 1.56447165 10^6, 1.75001754 10^6, 1.96459269 10^6, 2.22541805 10^6, 2.68658171 10^6, 3.13816594 10^6, 3.55633363 10^6, 4.27104459 10^6, 4.65353925 10^6, 5.29507358 10^6, 6.02880227 10^6, 6.73316011 10^6, 7.57811887 10^6], [5.81, 8.01, 9.13, 9.94, 10.25, 11.38, 11.02, 10.28, 9.41, 9.11, 8.46, 7.91, 7.43, 7.28], [107, 109, 111, 112, 114, 115, 117, 118, 120, 121, 125, 127, 128, 130]]

> *Z2* := *transpose*(*Z2trans*);

$$Z2 := \begin{bmatrix} 1 & 1.37404862\ 10^6 & 5.81 & 107 \\ 1 & 1.56447165\ 10^6 & 8.01 & 109 \\ 1 & 1.75001754\ 10^6 & 9.13 & 111 \\ 1 & 1.96459269\ 10^6 & 9.94 & 112 \\ 1 & 2.22541805\ 10^6 & 10.25 & 114 \\ 1 & 2.68658171\ 10^6 & 11.38 & 115 \\ 1 & 3.13816594\ 10^6 & 11.02 & 117 \\ 1 & 3.55633363\ 10^6 & 10.28 & 118 \\ 1 & 4.27104459\ 10^6 & 9.41 & 120 \\ 1 & 4.65353925\ 10^6 & 9.11 & 121 \\ 1 & 5.29507358\ 10^6 & 8.46 & 125 \\ 1 & 6.02880227\ 10^6 & 7.91 & 127 \\ 1 & 6.73316011\ 10^6 & 7.43 & 128 \\ 1 & 7.57811887\ 10^6 & 7.28 & 130 \end{bmatrix}$$

Lampiran 5 (Lanjutan)

> Z2trans_Z2 := multiply(Z2trans, Z2);

$$Z2trans\_Z2 := \begin{bmatrix} 14 & 5.281936850\ 10^{7} & 125.42 & 1654 \\ 5.281936850\ 10^{7} & 2.529684093\ 10^{14} & 4.608103909\ 10^{8} & 6.431449911\ 10^{9} \\ 125.42 & 4.608103909\ 10^{8} & 1155.6456 & 14792.07 \\ 1654 & 6.431449911\ 10^{9} & 14792.07 & 196108 \end{bmatrix}$$

>

Y2trans := matrix(1, 14, [38.74, 37.87, 38.39, 37.34, 36.15, 35.10, 39.30, 37.17, 34.96, 32.53, 31.02, 29.96, 28.86, 28.31]);

Y2trans := [38.74, 37.87, 38.39, 37.34, 36.15, 35.10, 39.30, 37.17, 34.96, 32.53, 31.02, 29.96, 28.86, 28.31]

> Y2 := transpose(Y2trans);

$$Y2 := \begin{bmatrix} 38.74 \\ 37.87 \\ 38.39 \\ 37.34 \\ 36.15 \\ 35.10 \\ 39.30 \\ 37.17 \\ 34.96 \\ 32.53 \\ 31.02 \\ 29.96 \\ 28.86 \\ 28.31 \end{bmatrix}$$

> Z2trans_Y2 := multiply(Z2trans, Y2);

$$Z2trans\_Y2 := \begin{bmatrix} 485.70 \\ 1.737711967\ 10^{9} \\ 4380.5088 \\ 57046.27 \end{bmatrix}$$

> invZ2trans_Z2 := inverse(Z2trans_Z2);

$invZ2trans\_Z2 := [[1436.685184, 0.00005385155572, 8.969223151, -14.55980515],$
$[0.00005385154966, 2.055230292\ 10^{-12}, 3.585487805\ 10^{-7}, -5.486377442\ 10^{-7}],$
$[8.969215739, 3.585526883\ 10^{-7}, 0.09466716076, -0.09454696806],$
$[-14.55980461, -5.486378318\ 10^{-7}, -0.09454709608, 0.1479287010]]$

Lampiran 5 (Lanjutan)

> delta[2] := *multiply*(*invZ2trans_Z2*, *Z2trans_Y2*);

$$\delta_2 := \begin{bmatrix} 83.6719 \\ -1.486\ 10^{-8} \\ 0.547844 \\ 0.4553[illegible]3 \end{bmatrix}$$

Lampiran 6 Tabel *Chi Square*

Chi-square Distribution Table

d.f.	.995	.99	.975	.95	.9	.1	.05	.025	.01
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	2.71	3.84	5.02	6.63
2	0.01	0.02	0.05	0.10	0.21	4.61	5.99	7.38	9.21
3	0.07	0.11	0.22	0.35	0.58	6.25	7.81	9.35	11.34
4	0.21	0.30	0.48	0.71	1.06	7.78	9.49	11.14	13.28
5	0.41	0.55	0.83	1.15	1.61	9.24	11.07	12.83	15.09
6	0.68	0.87	1.24	1.64	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81
7	0.99	1.24	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.09
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.67
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.48	23.21
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	17.28	19.68	21.92	24.72
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	18.55	21.03	23.34	26.22
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	19.81	22.36	24.74	27.69
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	21.06	23.68	26.12	29.14
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	27.49	30.58
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.54	26.30	28.85	32.00
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	30.81	33.92	36.78	40.29
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	33.20	36.42	39.36	42.98
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	35.56	38.89	41.92	45.64
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	37.92	41.34	44.46	48.28
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	40.26	43.77	46.98	50.89
32	15.13	16.36	18.29	20.07	22.27	42.58	46.19	49.48	53.49
34	16.50	17.79	19.81	21.66	23.95	44.90	48.60	51.97	56.06
38	19.29	20.69	22.88	24.88	27.34	49.51	53.38	56.90	61.16
42	22.14	23.65	26.00	28.14	30.77	54.09	58.12	61.78	66.21
46	25.04	26.66	29.16	31.44	34.22	58.64	62.83	66.62	71.20
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	63.17	67.50	71.42	76.15
55	31.73	33.57	36.40	38.96	42.06	68.80	73.31	77.38	82.29
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	74.40	79.08	83.30	88.38
65	39.38	41.44	44.60	47.45	50.88	79.97	84.82	89.18	94.42
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	85.53	90.53	95.02	100.43
75	47.21	49.48	52.94	56.05	59.79	91.06	96.22	100.84	106.39
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	96.58	101.88	106.63	112.33
85	55.17	57.63	61.39	64.75	68.78	102.08	107.52	112.39	118.24
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	107.57	113.15	118.14	124.12
95	63.25	65.90	69.92	73.52	77.82	113.04	118.75	123.86	129.97
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	118.50	124.34	129.56	135.81

RIWAYAT HIDUP

Afwan Ghofur, lahir di Banyuwangi pada tanggal 03 Februari 1996, biasa dipanggil Ghofur atau lebih akrab disapa “Ghop”. Anak kedua dari 2 (dua) bersaudara pasangan Bapak Sumardi dan Ibu Sulikah. Mempunyai satu kakak laki-laki yang bernama Syahrul Aziz.

Pendidikan dasarnya ditempuh di MI Bahrul Ulum Pandansari lulus pada tahun 2008. Setelah itu melanjutkan sekolah di MTsN Srono yang sekarang menjadi MTs 3 Banyuwangi lulus tahun 2011. Selanjutnya menempuh pendidikan formal di SMA Darussalam dan non-formal di PP Darussalam Blokagung Banyuwangi lulus tahun 2014. Selanjutnya, pada tahun yang sama melanjutkan pendidikan di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang melalui jalur SNMPTN dengan mengambil Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.

Selama menjadi mahasiswa, dia berperan aktif pada organisasi intra kampus, ekstra kampus, maupun antar kampus se-Indonesia dalam rangka mengembangkan kompetensi akademiknya dan membangun jaringan. Dia pernah menjadi Ketua Himpunan Jurusan (HMJ) “Integral” Matematika periode 2016, Kader Pergerakan Mahasiswa Islam Indonesia (PMII) Rayon Pencerahan Galileo Fakultas SAINTEK periode 2016, dan lanjut sebagai pengurus di PMII Komisarat Sunan Ampel Malang tahun 2018. Selain itu, dia juga pernah menjabat di Komisi III Keorganisasian Senat Mahasiswa (SEMA) Fakultas SAINTEK tahun 2017 dan tahun berikutnya sebagai Komisi I Administrasi dan Keuangan SEMA-U UIN Maulana Malik Ibrahim Malang tahun 2018. Selain itu, dia juga pernah menjabat sebagai Pengurus Pusat Ikatan Himpunan Mahasiswa Matmatika (IKAHIMATIKA) Indonesia periode 2016-2018. Selain organisatoris, dia juga akademis. Terbukti dari prestasi akademiknya mendapatat beasiswa DIPA 2016, Beasiswa Prestasi Akademik 2017, dan Beasiswa Prestasi Non-Akademik 2017. Penulis dapat dihubungi melalui gmail: afwanghofur5@gmail.com.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Afwan Ghofur
NIM : 14610013
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Estimasi Parameter Sistem Persamaan Simultan dengan Metode *Limited Information Maximum Likelihood*
Pembimbing I : Abdul Aziz, M.Si
Pembimbing II : Evawati Alisah, M.Pd

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	13 Juli 2018	Konsultasi Bab I, II, III	1.
2.	16 Juli 2018	Konsultasi Keagamaan Bab I, II	2.
3.	20 Juli 2018	Konsultasi Bab III, IV	3.
4.	02 Agustus 2018	Konsultasi Bab IV	4.
5.	14 Agustus 2018	Konsultasi Keagamaan Bab II	5.
6.	20 Agustus 2018	ACC Bab I, II, III	6.
7.	27 Agustus 2018	ACC Bab Keagamaan I, II	7.
8.	05 Oktober 2018	Konsultasi Bab IV	8.
9.	19 Oktober 2018	Konsultasi Bab IV, V	9.
10.	26 Oktober 2018	Konsultasi Bab V	10.
11.	01 November 2018	Konsultasi Keagamaan Bab IV	11.
12.	05 November 2018	Konsultasi Bab III, IV, V	12.
13.	07 November 2018	ACC Keagamaan Keseluruhan	13.
14.	07 November 2018	ACC Keseluruhan	14.

Malang, 07 November 2018
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001