

DUALITAS SIFAT-SIFAT PADA LATIS

SKRIPSI

**OLEH
SITI MARIAM OKTIA MARLIANA
NIM. 14610011**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018**

DUALITAS SIFAT-SIFAT PADA LATIS

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
Siti Mariam Oktia Marlina
NIM. 14610011**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018**

DUALITAS SIFAT-SIFAT PADA LATIS

SKRIPSI

Oleh
Siti Mariam Oktia Marlina
NIM. 14610011

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 07 November 2018

Pembimbing I,



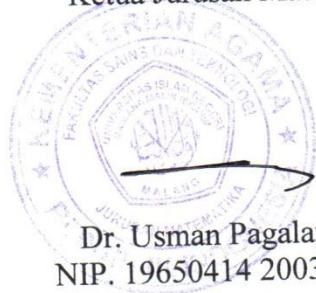
Evawati Alisah, M.Pd
NIP. 19720604 199903 2 001

Pembimbing II,



Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

DUALITAS SIFAT-SIFAT PADA LATIS

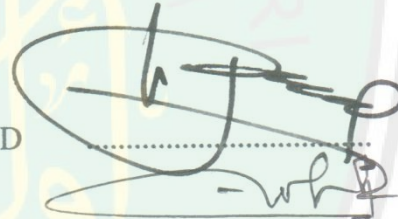
SKRIPSI

Oleh
Siti Mariam Oktia Marlina
NIM.14610011

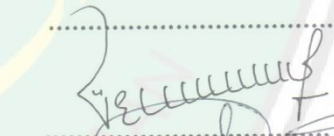
Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal 26 November 2018

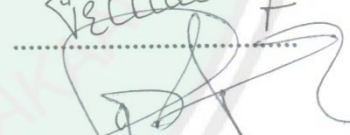
Penguji Utama : Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D



Ketua Penguji : H. Wahyu H. Irawan, M.Pd



Sekretaris Penguji : Evawati Alisah, M.Pd



Anggota Penguji : Dr. Abdussakir, M.Pd



Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP.196504142003121 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Siti Mariam Oktia Marlina

NIM : 14610011

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Dualitas Sifat-sifat Pada Latis

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 07 November 2018
Yang membuat pernyataan,



Siti Mariam Oktia Marlina
NIM. 14610011

MOTO

“Maka nikmat Tuhanmu yang manakah yang kamu dustakan”



PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda Supriyadi, ibunda Purwati, adinda Septia Devi Latifah, segenap keluarga penulis yang selalu memberikan doa, semangat, dan motivasi bagi penulis, serta sahabat-sahabat yang selalu mendukung dan selalu hadir di kala sedih dan senang.



KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt. atas rahmat, taufik, serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terimakasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Evawati Alisah, M.Pd, selaku dosen pembimbing 1 yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan berbagi pengalaman yang berharga kepada penulis.
5. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku dosen pembimbing 2 yang senantiasa mengarahkan penulis dalam melakukan penelitian.
6. Ayahanda Supriyadi dan ibunda Purwati yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis

7. Adinda tersayang Septia Devi Latifah yang selalu memberikan dukungan, doa, dan motivasi bagi penulis.
8. Seluruh teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2014 khususnya teman-teman kelas A dan teman-teman “KB5” yang selalu ada di kala senang dan sedih dalam rangka proses penyelesaian penelitian ini.
9. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik berupa moril maupun materiil.

Penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat kepada para pembaca, khususnya bagi penulis secara pribadi.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, November 2018

Penulis,

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR TABEL	xii
ABSTRAK	xiii
ABSTRACT	xiv
ملخص	xv
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Tujuan Penelitian	4
1.4 Manfaat Penelitian	4
1.5 Batasan Masalah	5
1.6 Metode Penelitian	5
1.7 Sistematika Penulisan	6
BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Himpunan	8
2.2 Operasi Himpunan	12
2.3 Relasi Biner	16
2.4 FPB dan KPK	18
2.5 Latis	20
2.6 Dualitas.....	28
2.7 Kajian Ilmu Pengetahuan dalam Al-Quran.....	30
BAB III PEMBAHASAN	
3.1 Dualitas Sifat-sifat pada Latis	34
3.2 Kajian Dualitas dalam Al-Quran	58

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan	61
4.2 Saran	61

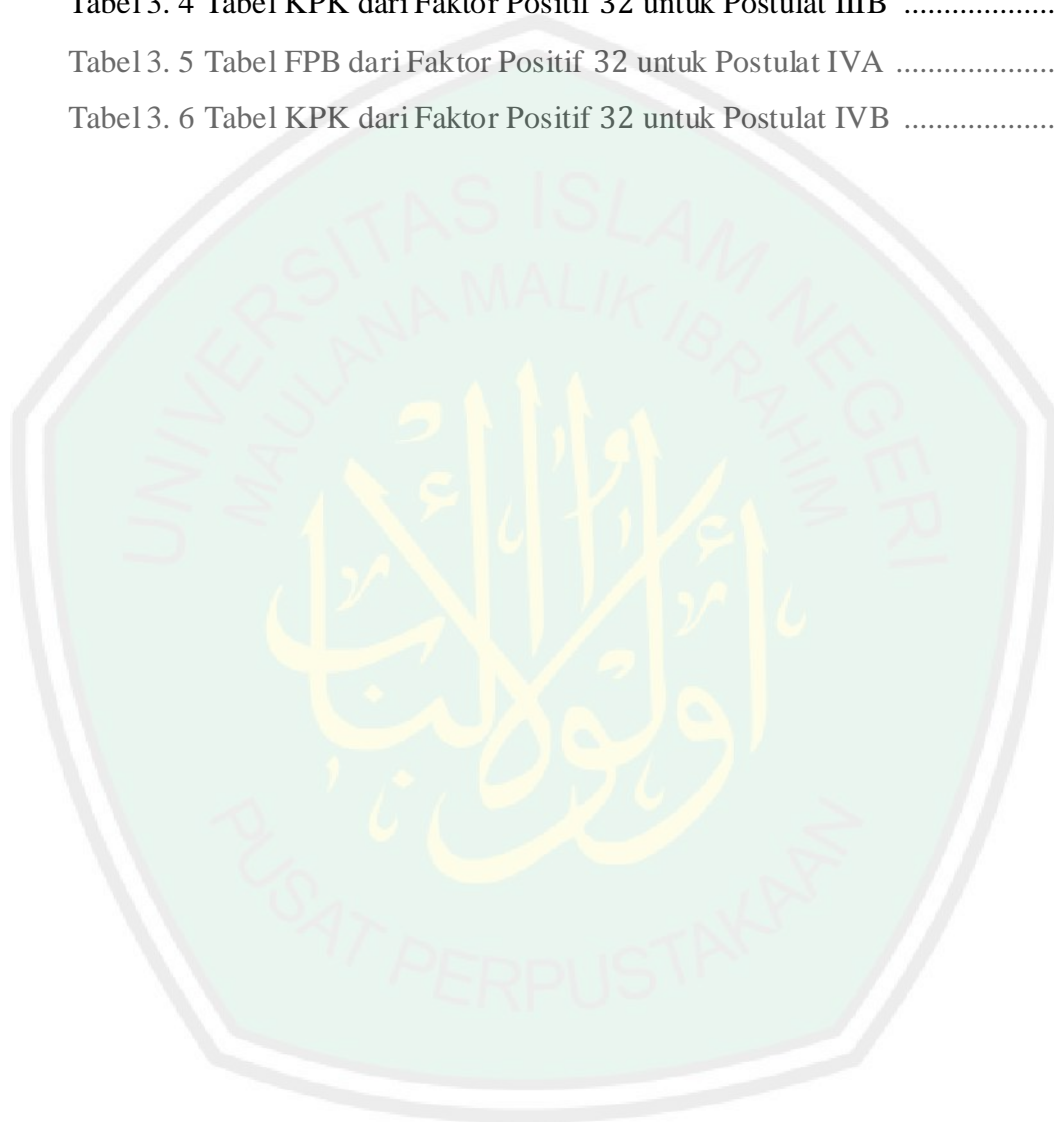
DAFTAR RUJUKAN	62
-----------------------------	----

RIWAYAT HIDUP



DAFTAR TABEL

Tabel 3. 1 Tabel FPB dari Faktor Positif 32 untuk Postulat IIA	35
Tabel 3. 2 Tabel KPK dari Faktor Positif 32 untuk Postulat IIB	35
Tabel 3. 3 Tabel FPB dari Faktor Positif 32 untuk Postulat IIIA	36
Tabel 3. 4 Tabel KPK dari Faktor Positif 32 untuk Postulat IIIB	37
Tabel 3. 5 Tabel FPB dari Faktor Positif 32 untuk Postulat IVA	39
Tabel 3. 6 Tabel KPK dari Faktor Positif 32 untuk Postulat IVB	40



ABSTRAK

Marliana, Siti Mariam Oktia. 2018. **Dualitas Sifat-sifat pada Latis**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing (I) Evawati Alisah, M.Pd. (II) Dr. Abdussakir, M.Pd.

Kata Kunci: Latis, Dualitas.

Latis L adalah suatu aljabar dengan dua operasi (dilambangkan dengan $*$ dan $\#$), yang memenuhi beberapa aksioma, yaitu kedua operasi bersifat idempoten, kedua operasi bersifat asosiatif dan komutatif, serta berlaku absorpsi terhadap kedua operasi tersebut. Latis juga dipandang sebagai *poset* (*partially ordered set*) dengan sifat-sifat tertentu. Pada skripsi ini dibahas tentang dualitas sifat-sifat pada latis, yaitu dengan memberikan definisi dan contoh yang berkaitan dengan dualitas sifat-sifat pada latis.

Tujuan penelitian ini adalah menjelaskan dualitas sifat-sifat pada latis. Adapun dualitas sifat-sifat pada latis yaitu yaitu:

- Jika dalam suatu latis $a \leq b$ dan $c \leq d$, maka $a * c \leq b * d$, untuk setiap $a, b, c \in L$.
- Jika dalam suatu latis $a \geq b$ dan $c \geq d$, maka $a * c \geq b * d$, untuk setiap $a, b, c \in L$.
- Untuk setiap $a, b, c \in L$, $a * (b \# c) \geq (a * b) \# (a * c)$.
- Untuk setiap $a, b, c \in L$, $a \# (b * c) \leq (a \# b) * (a \# c)$.
- Untuk setiap $a, b, c \in L$,
$$(a \# b) * (b \# c) * (a \# c) \geq (a * b) \# (b * c) \# (a * c)$$
- Untuk setiap $a, b, c \in L$,
$$(a * b) \# (b * c) \# (a * c) \leq (a \# b) * (b \# c) * (c \# a)$$
- $a * (b \# c) \geq b \# (a * c)$ dengan $a \geq b$ dan c sebarang.
- $a \# (b * c) \leq b * (a \# c)$ dengan $a \leq b$ dan c sebarang.

Selain itu terdapat beberapa definisi khusus mengenai contoh latis yang selanjutnya digunakan untuk membuktikan dualitas sifa-sifat pada latis berlaku pada contoh tersebut. Bagi penelitian selanjutnya dapat dikembangkan kajian dualitas pada latis dengan memberikan lebih banyak contoh, sehingga membentuk suatu teorema atau sifat-sifat baru yang berkaitan dengan dualitas sifat-sifat pada latis.

ABSTRACT

Marliana, Siti Mariam Oktia. 2018. **Properties Duality of Lattice**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisor: (1) Evawati Alisah, M.Pd (2) Dr. Abdussakir, M.Pd.

Keywords: Lattice, Duality.

Latis L is an algebra with the two relation (denoted with $*$ and $\#$), which meet several axioms, i.e. both relations are idempoten, both relationships are associative and commutative, as well as apply absorption against both relationships. Lattice is also seen as a poset (partially ordered set) with certain properties. This thesis discussed about properties duality of lattice, namely by providing definitions and examples related to properties duality of lattice and proving properties that are related to properties duality of the lattice.

The purpose of this study is to describe properties that are related to properties duality of lattice. As for properties duality of lattice, namely:

- a. If in a given latis $a \leq b$ and $c \leq d$, then $a * c \leq b * d$, for any $a, b, c \in L$.
- b. If in a given latis $a \geq b$ and $c \geq d$, then $a * c \geq b * d$, for any $a, b, c \in L$.
- c. For any $a, b, c \in L$, $a * (b \# c) \geq (a * b) \# (a * c)$.
- d. For any $a, b, c \in L$, $a \# (b * c) \leq (a \# b) * (a \# c)$.
- e. For any $a, b, c \in L$, $(a \# b) * (b \# c) * (a \# c) \geq (a * b) \# (b * c) \# (a * c)$.
- i. For any $a, b, c \in L$, $(a * b) \# (b * c) \# (a * c) \leq (a \# b) * (b \# c) * (c \# a)$.
- j. $a * (b \# c) \geq b \# (a * c)$ where $a \geq b$ and any c in L .
- k. $a \# (b * c) \leq b * (a \# c)$ where $a \leq b$ and any c in L .

In addition there are several specific definitions regarding sample of lattice who then used to prove properties duality of lattice effect on the sample. Further research can be developed for the study of duality in the lattice by giving more examples, thus forming a theorem or new properties related to duality in the latis.

ملخص

مارلينا، ستي مريم اوكتيا . 2018. خصائص معادية في لاتيس. بحث جامعي. شعبة الرياضيات كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المستشار: (1) ايفاوتي أليسا الماجستير (2) الدكتور عبدالشاعر الماجستير.

الكلمات الرئيسية: لاتيس ، معادية.

لاتيس L جبري بعلاقة اثنين (تتم الإشارة إليها مع $*$) و $\#$)، بديهيات عدة يلتقي فيها، تنطبق طبيعة العلاقة، وأن العلاقات $idempotent$ هما التقابلي و $commutative$ ، كذلك تطبيق امتصاص ضد كل العلاقات. لاتيس كما يعتبر من بوست (جزئياً أمرت مجموعة) مع خصائص معينة. هذه الأطروحة تناقش حول ازدواجية خصائص شعرية، إلا وهي تقدم تعريف وأمثلة تتعلق بازواجية خصائص شعرية وإثبات الخصائص التي تتعلق بازواجية خصائص في لاتيس.

والغرض من هذه الدراسة هو وصف الخصائص التي تتعلق بازواجية خصائص شعرية. أما بالنسبة لازدواجية خصائص في لاتيس ينطبق على:

أ. إذا كان في لاتيس معين $a \leq b$ و $c \leq d$ ، ثم التيار $(a * c) \leq (b * d)$ دينار بحريني، $a, b, c \in L$.

ب. إذا كان في لاتيس معين $a \geq b$ و $c \geq d$ ، ثم التيار $(a * c) \geq (b * d)$ دينار بحريني، $a, b, c \in L$.

ج. لأي $a, b, c \in L$ ، $(b \# c) \geq (a * b) \# (a * c)$.

د. لأي $a, b, c \in L$ ، $(b \# c) \geq (a * b) \# (a * c)$.

ث. لأي $a, b, c \in L$ ،

$$(a \# b) * (b \# c) * (a \# c) \geq (a * b) \# (b * c) \# (a * c)$$

ل. لأي $a, b, c \in L$ ،

$$(a * b) \# (b * c) \# (a * c) \leq (a \# b) * (b \# c) * (c \# a)$$

وبالإضافة إلى ذلك هناك العديد من تعريفات محددة فيما يتعلق بعينه من شعرية الذين تستخدم بعد ذلك لإثبات خصائص شعرية الأثر معادية في العينة. لإجراء مزيد من البحوث يمكن أن تكون الدراسة المتقدمة من العداء في شعرية بإعطاء مزيد من الأمثلة، ومن ثم تشكيل نظرية أو خصائص جديدة ذات الصلة إلى أونابيتيسيد في لاتيس-فيما يتعلق بطبيعة ازدواجية في لاتيس.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pada saat ini telah banyak muncul berbagai permasalahan dikarenakan adanya globalisasi. Seiring berjalannya waktu ilmu pengetahuan berkembang semakin tinggi, dan semakin luas. Dengan permasalahan-permasalahan yang muncul saat ini manusia diharuskan mempelajari ilmu yang semakin berkembang sehingga dapat membantu memberikan solusi terhadap permasalahan yang terjadi.

Allah Swt. berfirman dalam QS. Ali Imran ayat 7 berikut:

هُوَ الَّذِي أَنْزَلَ عَلَيَّ كِتَابَ مِنْهُ آيَاتٍ مُخْتَلَفَاتٍ أَمْ أَلِ كِتَابٍ وَآخِرُ
مُشْتَبِهَاتٍ فَأَمَّا الَّذِينَ فِي قُلُوبِهِمْ زَيْغٌ فَيَتَّبِعُونَ مَا تَشَبَهَ مِنْهُ أَبِ تَعَاً أَلِ فِتٍةٍ
وَأَبِ تَعَاً تَأْوِيلَهُ وَمَا يَعِ لَمْ تَأْوِيلَهُ إِلَّا اللَّهُ وَالرَّسُخُونَ فِي أَلِ عِلِّمٍ يَقُولُونَ ءَأَمَّنَّا بِهِ
كُلٌّ مِّنْ عِنْدِ رَبِّنَا وَمَا يَذَّكَّرُ إِلَّا أُولُو أَلِ أَلِ بٍ

“Dialah yang menurunkan kitab (al-Quran) kepadamu (Muhammad). Di dalamnya terdapat ayat-ayat yang jelas yang menjadi dasar bagi kitab ini, sedangkan yang lain adalah yang maknanya tersembunyi. Tetapi bagi mereka yang di dalam hatinya terdapat keburukan, mereka mengikuti sebagian dari yang maknanya tersembunyi itu, berusaha untuk menyebabkan keburukan dengan mencari-cari (sendiri) maknanya dengan penafsiran mereka sendiri, sedangkan tiada yang mengetahui penafsirannya (yang tersembunyi itu) kecuali Allah Swt., dan mereka yang memiliki pengetahuan kuat dan mendalam berkata, “Kami percaya kepada-Nya, seluruhnya berasal dari Tuhan kami, dan tiada yang bisa memikirkannya kecuali orang-orang yang berakal.”” (QS. Ali Imran:7).

Dalam surat Ali Imran ayat 7 dijelaskan pokok dari isi al-Quran adalah ayat-ayat *muhkamat* dan lainnya adalah ayat *mutasyabihat*. Orang yang hatinya condong dalam kesesatan akan mengikuti ayat *mutasyabihat* yang kurang jelas maksud dan tujuannya dan mencari-cari takwilnya. Sedangkan orang-orang yang dalam ilmunya akan beriman kepada al-Quran dari ayat-ayat *muhkamat* maupun

ayat-ayat *mutasyabihat*, dan percaya hanya Allah Swt. yang mengetahui takwil dari ayat-ayat dalam al-Quran. Begitulah betapa pentingnya bagi setiap orang mencari ilmu. Dengan ilmu setiap orang akan berpikir berulang kali untuk melakukan hal-hal yang tidak dapat masuk dalam akal pikiran. Berbeda halnya dengan orang yang tidak berilmu, orang yang tidak berilmu tidak akan berpikir dua kali untuk melakukan apapun, tidak peduli baik ataupun buruk.

Banyak sekali ilmu yang ada saat ini. Mulai dari ilmu dasar yang telah diajarkan oleh para ilmuan zaman dahulu sampai dikembangkan oleh para ilmuan yang telah banyak di era ini. Matematika menurut Yuhasriati (2012) merupakan salah satu ilmu dasar yang memegang peranan penting dalam perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi maupun dalam membentuk kepribadian manusia. Matematika juga ilmu yang sangat membantu kehidupan sehari-hari, membantu mempermudah, mengefektifkan, dan mengefisienkan pekerjaan-pekerjaan manusia.

Aljabar merupakan salah satu bidang matematika yang mempunyai banyak sekali materi yang dapat dibahas, di antaranya adalah himpunan, relasi himpunan, operasi himpunan, grup, ring, dan lattice. Suatu himpunan adalah setiap daftar, kumpulan, atau kelas objek-objek yang didefinisikan dengan jelas. Pada umumnya suatu himpunan dilambangkan dengan huruf kapital seperti A, B, X, Y, S sedangkan anggotanya dilambangkan dengan huruf tak kapital a, b, x, y, s (Lipschutz, 1995:1). Relasi himpunan adalah suatu aturan yang memasangkan setiap anggota satu himpunan dengan anggota himpunan yang lain, dilambangkan dengan R . Relasi terurut parsial R di S merupakan relasi yang melibatkan dua anggota di himpunan S yang memenuhi sifat refleksif, antisimetris, dan transitif.

Himpunan terurut parsial atau *poset* (*partially ordered set*) adalah suatu himpunan yang dilengkapi dengan relasi terurut parsial R . Relasi konvers yang dilambangkan oleh R' dengan $xR'y$ berlaku jika dan hanya jika yRx untuk setiap $x, y \in S$ (Sukardjono, 2002:32).

Latis L adalah struktur aljabar dengan dua operasi biner dilambangkan dengan $*$ dan $\#$ yang memenuhi sifat-sifat tertentu, yaitu kedua operasinya bersifat idempoten, asosiatif, komutatif, dan juga absorpsi terhadap kedua operasi tersebut (Gratzer, 2011:12). Latis dapat dikembangkan menjadi beberapa sub pembahasan di antaranya, yaitu latis umum, latis modular, latis semi-modular, dan latis distributif. Pada latis umum dibahas mengenai dualitas pada latis, irisan, dan gabungan pada latis, syarat penutupan dan panjang, komplemen, sublatis atau latis bagian, dan juga homomorfisma pada latis.

Latis L juga dipandang sebagai suatu *poset* dengan sifat $a \leq b$, a direlasikan kurang dari sama dengan b , jika dan hanya jika $a * b = a$ dan $a \# b = b$. Himpunan L yang terurut parsial oleh \leq' atau \geq , relasi lebih dari sama dengan merupakan dualitas dari himpunan L yang terurut parsial oleh \leq . (Sukardjono, 2002:32). Sehingga, karena relasi \geq merupakan relasi terurut parsial maka relasi \geq memenuhi sifat refleksif, antisimetris, dan transitif. Dengan demikian berlaku $a \geq b$ jika dan hanya jika $a * b = b$ dan $a \# b = a$. Sehingga $a \geq b$ merupakan dualitas dari $a \leq b$ begitu juga dengan pernyataan urutan parsialnya (Sukardjono, 2002:66).

Pada penelitian sebelumnya yang juga berkaitan dengan latis yang membahas teorema-teorema beserta contohnya, yaitu pada penelitian Lailatul Fitriyah (2015) telah dibahas mengenai ideal pada latis, dan pada penelitian

Faizatul Wahidah (2017) telah dibahas mengenai homomorfisma pada latis. Oleh karena itu, pada penelitian selanjutnya penulis tertarik untuk mengkaji bagian dari latis yang lain yaitu dualitas sifat-sifat pada latis yang dalam penelitian ini juga membahas teorema-teorema dan contoh dualitas sifat-sifat pada latis.

Berdasarkan permasalahan di atas, penulis ingin mengetahui lebih lanjut mengenai teori latis. Merujuk pada buku yang ada, belum dijelaskan mengenai dualitas pada latis secara lebih detil. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk membahasnya, sehingga skripsi ini oleh penulis diberi judul “Dualitas Sifat-sifat pada Latis”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah yang dibahas dalam penelitian ini adalah bagaimana dualitas sifat-sifat pada latis?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian ini adalah mendeskripsikan dualitas sifat-sifat pada latis.

1.4 Manfaat Penelitian

Dari penulisan skripsi ini penulis berharap agar penelitian ini bermanfaat bagi berbagai kalangan, antara lain:

1. Bagi Penulis

- a. Untuk menambah pemahaman tentang konsep yang ada dalam matematika, yang dalam penelitian ini dikhususkan pada latis.

- b. Sebagai sarana latihan untuk menambah penguasaan penulis dalam mengkaji latis terutama mengenai dualitas sifat-sifat latis.
2. Bagi Pembaca
 - a. Sebagai tambahan literatur atau wawasan untuk kajian lebih lanjut khususnya yang sedang mempelajari latis.
 - b. Menambah pengetahuan pembaca tentang latis
 3. Bagi Lembaga
 - a. Sebagai bahan informasi mengenai pembelajaran latis yang masih terbatas referensinya.
 - b. Sebagai tambahan kepustakaan.

1.5 Batasan Masalah

Dilihat dari latar belakang mengenai dualitas yang menjelaskan banyak dualitas pada latis, maka peneliti membatasi masalah dalam penelitian ini yaitu membahas dualitas sifat-sifat pada latis.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode kajian pustaka. Untuk menganalisis dualitas sifat-sifat pada latis, terlebih dahulu akan dikaji mengenai definisi dan teorema-teorema pada latis, kemudian dikaji mengenai definisi dan teorema-teorema dualitas sifat-sifat pada latis.

Langkah-langkah yang akan digunakan dalam analisis penelitian ini adalah

1. Mencari literatur utama yang dijadikan acuan dalam pembahasan ini. Literatur yang dimaksud adalah buku yang ditulis oleh Sukradjono (2002).

2. Mengumpulkan berbagai literatur pendukung, baik yang bersumber dari buku-buku, jurnal, artikel, diktat kuliah, internet, dan lainnya yang berhubungan dengan permasalahan yang dibahas dalam penelitian ini.
3. Memahami dan mempelajari konsep dualitas pada latris.
4. Menentukan himpunan dan membuktikan himpunan tersebut adalah latris.
5. Membuktikan teorema-teorema latris berlaku pada latris tersebut.
6. Membuktikan teorema-teorema dualitas berlaku pada latris tersebut.

1.7 Sistematika Penulisan

Dalam penulisan penelitian ini, penulis menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab, dan masing-masing bab dibagi dalam subbab dengan sistematika penulisan sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pada bab ini berisi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Pada bab ini menyajikan konsep-konsep yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain himpunan, relasi himpunan, operasi himpunan, FPB dan KPK, definisi latris, definisi dualitas, dan kajian ilmu pengetahuan dalam al-Quran.

Bab III Pembahasan

Pada bab ini membahas dualitas sifat-sifat pada latris dan kajian dualitas dalam Islam.

Bab IV Penutup

Pada bab ini berisi kesimpulan dari pembahasan dan saran bagi pembaca.



BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Himpunan

Konsep himpunan adalah suatu konsep mendasar dalam semua cabang ilmu matematika. Istilah himpunan seringkali dijumpai dalam aljabar abstrak.

Definisi 2.1

Himpunan secara intuitif adalah setiap daftar, kumpulan atau kelas objek-objek yang didefinisikan dengan jelas. Himpunan-himpunan akan selalu dinyatakan dengan huruf-huruf kapital, sedangkan anggota-anggotanya atau objek-objeknya selalu dinyatakan dengan huruf tak kapital (Lipschutz, 1995).

Terdapat beberapa istilah yaitu himpunan, anggota, dan relasi keanggotaan (\in). Misalkan A himpunan dan a adalah anggota dari A , dinotasikan dengan $a \in A$, atau dapat diartikan dengan A memuat a . Sebaliknya, penulisan $a \notin A$ berarti a bukan anggota A atau A tidak memuat a (Arifin, 2000:1). Menurut Abdussakir (2007:103) himpunan juga dapat dinyatakan dengan mendaftar semua anggotanya di dalam tanda kurung kurawal yaitu $\{ \}$.

Beberapa hal yang perlu dicatat mengenai himpunan adalah:

- a. Himpunan harus terdefinisi dengan jelas,
- b. Anggota-anggota yang disebutkan dalam suatu himpunan harus berbeda,
- c. Urutan penyebutan anggota dalam suatu himpunan tidak diperhatikan,

(Abdussakir, 2014:54).

Contoh

Didefinisikan A himpunan bilangan bulat positif, maka dapat ditulis:

$$A = \{1, 2, 3, \dots\}$$

atau,

$$A = \{x | x \in \mathbb{Z}^+\}$$

Definisi 2.2

Himpunan A disebut himpunan bagian dari himpunan B atau himpunan B disebut himpunan induk dari himpunan A , dilambangkan dengan

$$A \subset B \text{ atau } B \supset A$$

apabila setiap unsur di A termuat dalam B , yaitu jika $x \in A$ maka $x \in B$.

Negasi dari $A \subset B$ ditulis $\not\subset$ atau $\not\supset$ yang berarti ada $x \in A$ sedemikian sehingga $x \notin B$ (Lipschutz, 1988:37).

Definisi 2.3

Suatu himpunan A dikatakan merupakan himpunan bagian sejati (*proper subset*) dari himpunan B , jika $A \subseteq B$ dan terdapat sedikitnya satu anggota dari B yang bukan anggota A , yang dilambangkan dengan $A \subset B$ (Mas'ood, 2013).

Dengan kata lain $A \subset B$ artinya $A \subseteq B$ tetapi B bukan merupakan himpunan bagian dari A , dilambangkan dengan $B \not\subseteq A$. Dapat juga diartikan $A \subset B$ jika dan hanya jika $A \subseteq B$, dengan $A \neq B$.

Contoh

Perhatikan himpunan

$$A = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$$

$$B = \{5, 10, 15, 20, \dots\}$$

$$C = \{x \mid x \text{ prima}, x > 2\} = \{3, 5, 7, 11, \dots\}$$

Maka $C \subset A$ karena setiap bilangan prima yang lebih dari 2 merupakan bilangan ganjil. Tetapi $B \not\subset A$ karena $10 \in B$ dan $10 \notin A$.

Contoh

Misalkan \mathbb{N} menyatakan himpunan bilangan bulat positif, \mathbb{Z} menyatakan himpunan bilangan bulat, \mathbb{Q} menyatakan himpunan bilangan rasional, dan \mathbb{R} menyatakan himpunan bilangan riil. Maka

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Definisi 2.4

Himpunan semesta adalah himpunan semua objek yang dibicarakan, diberi simbol S . Sedangkan himpunan kosong adalah suatu himpunan yang tidak mempunyai anggota yang diberi simbol \emptyset atau $\{\}$.

Sifat himpunan kosong adalah,

- Merupakan himpunan bagian dari setiap himpunan
- Himpunan kosong adalah tunggal

Bukti pernyataan di atas adalah sebagai berikut:

- Dengan metode kontradiksi, ambil sebarang himpunan A dan misalkan $\emptyset \not\subset A$. Menurut definisi himpunan bagian, $\emptyset \not\subset A$ berarti bahwa $(\exists x) x \in \emptyset$ dan $x \notin A$. Terjadilah kontradiksi pada $x \in \emptyset$ karena menurut definisinya, \emptyset adalah himpunan yang tidak memiliki anggota.
- Sifat tunggal himpunan kosong juga dibuktikan dengan metode kontradiksi. Misalkan ada dua himpunan kosong, yaitu \emptyset_1, \emptyset_2 yang masing-masing tidak mempunyai anggota, dan $\emptyset_1 \neq \emptyset_2$. Menurut sifat satu himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari sebarang himpunan A , dengan A mungkin

juga himpunan kosong. Karena \emptyset_1 adalah himpunan kosong, maka $\emptyset_1 \subset A$ untuk sebarang A . Kemudian ambil $A = \emptyset_2$ sehingga $\emptyset_1 \subset \emptyset_2$, dengan cara yang sama maka diperoleh $\emptyset_2 \subset \emptyset_1$, maka menurut definisi $\emptyset_1 = \emptyset_2$. Hal ini bertentangan dengan pernyataan yang mengatakan bahwa $\emptyset_1 \neq \emptyset_2$. Jadi terbukti bahwa \emptyset adalah tunggal

(Limbong & Prijono, 2006).

Anggota-anggota suatu himpunan sering berupa himpunan juga. Biasanya digunakan sebutan seperti “kelas”, “koleksi”, dan “keluarga” untuk himpunan dari himpunan. Kata kelas bagian, koleksi bagian, keluarga bagian memiliki arti yang serupa dengan himpunan bagian (Lipschutz, 1988).

Contoh

Anggota dari kelas $\{\{2, 3\}, \{2\}, \{5, 6\}\}$ adalah $\{2, 3\}$, $\{2\}$, dan $\{5, 6\}$.

Definisi 2.5

Misalkan A adalah sebarang himpunan. Himpunan kuasa dari A , disimbolkan dengan $P(A)$, adalah himpunan yang anggota-anggotanya adalah semua himpunan bagian A . Jika himpunan A memiliki jumlah anggota sebanyak n , maka $P(A)$ mempunyai anggota sebanyak 2^n (Limbong & Prijono, 2006).

Contoh

Diketahui $A = \{x, y\}$. Carilah himpunan kuasa dari A .

Jawab:

Himpunan-himpunan bagian dari A adalah \emptyset , $\{x\}$, $\{y\}$, dan $\{x, y\}$. Maka $P(A) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$. Perhatikan bahwa \emptyset dan A selalu merupakan anggota $P(A)$ karena keduanya merupakan himpunan bagian dari A .

Contoh

Jika $A = \{a, b, c\}$, maka

$$P(A) = \{A, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \emptyset\}$$

Contoh:

Misalkan A dan B adalah himpunan. Buktikan bahwa jika $A \subset B$, maka $P(A) \subset P(B)$.

Jawab:

Dengan diketahuinya $A \subset B$, akan dibuktikan bahwa $P(A) \subset P(B)$. Ambil $X \in P(A)$, harus dibuktikan bahwa $X \in P(B)$. Menurut definisi himpunan kuasa, anggota-anggota $P(A)$ adalah semua himpunan-himpunan bagian dari A sehingga jika $X \in P(A)$, maka $X \subset A$. Tetapi, diketahui bahwa $A \subset B$, maka didapat $X \subset A \subset B$ atau lebih khusus lagi $X \subset B$. Menurut definisi himpunan kuasa, jika $X \subset B$, maka berarti bahwa $X \in P(B)$. Terbukti bahwa jika $X \in P(A)$ maka $X \in P(B)$ atau $P(A) \subset P(B)$.

2.2 Operasi Himpunan

Operasi pada himpunan meliputi operasi gabungan (*union*), irisan (*intersection*), komplemen, dan perkalian Cartesius (Abdussakir, 2014). Dari operasi-operasi ini dapat dibentuk himpunan baru dari himpunan-himpunan yang diketahui

Definisi 2.6

A gabungan B ditulis dengan $A \cup B$ adalah himpunan yang semua anggotanya merupakan anggota A atau anggota B , dan disimbolkan dengan $A \cup B = \{x | x \in A \text{ atau } x \in B\}$ (Mas'ood, 2013).

Definisi 2.7

A irisan B ditulis dengan $A \cap B$ adalah himpunan yang semua anggotanya merupakan anggota A dan sekaligus anggota B , dan disimbolkan dengan $A \cap B = \{x | x \in A \text{ dan } x \in B\}$ (Mas' oed, 2013).

Contoh

Himpunan $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ dan himpunan $B = \{d, e, f, g\}$, maka $A \cap B = \{d, e, f\}$, dan $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$.

Definisi 2.8

Selisih himpunan A dan B adalah himpunan dari anggota-anggota yang termuat di A tetapi tidak termuat di B , dan dinotasikan dengan $A - B$ (Lipschutz, 1995).

Contoh

Misalkan $A = \{a, b, c, d\}$ dan $B = \{f, b, d, g\}$, maka $A - B = \{a, c\}$.

Definisi 2.9

Komplemen dari suatu himpunan A adalah himpunan dari elemen-elemen yang tidak termuat di A , yaitu selisih dari himpunan semesta S dan A , dan disimbolkan dengan A^c (Lipschutz, 1995:20).

Contoh

Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dengan $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Maka $A^c = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Operasi himpunan selanjutnya yaitu, perkalian Cartesius. Perbedaan perkalian Cartesius dengan operasi gabungan dan irisan hasil adalah pada hasil operasinya. Pada perkalian Cartesius dua himpunan akan dihasilkan himpunan baru yang anggotanya berupa pasangan berurutan, artinya pada pasangan

berurutan (a, b) mempunyai makna khusus (Abdussakir, 2014).

Definisi 2.10

Misalkan A dan B himpunan. Perkalian Cartesius himpunan A dan B , ditulis $A \times B$, adalah himpunan semua pasangan berurutan (a, b) dengan $a \in A$ dan $b \in B$. Dalam notasi himpunan dapat dinyatakan

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

(Abdussakir, 2014).

Contoh:

Misalkan $A = \{a, b\}$ dan $B = \{1, 2, 3\}$.

Maka

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

$$B \times A = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}.$$

Definisi 2.11

Operasi gabungan, irisan, dan komplemen memenuhi beberapa hukum, yaitu:

a. Idempoten

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

b. Asosiatif

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

c. Komutatif

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

d. Distributif

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

e. Identitas

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap S = A$$

$$A \cup S = S$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

f. Komplemen

$$A \cup A^c = S$$

$$A \cap A^c = \emptyset$$

$$(A^c)^c = A$$

$$(S^c)^c = \emptyset, \emptyset^c = S$$

g. De Morgan

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

(Lipschutz, 1988:39).

Definisi 2.12 (Operasi biner)

Misalkan S suatu himpunan tidak kosong. Operasi \times pada anggota-anggota S disebut operasi biner, jika setiap dua elemen $a, b \in S$ maka $a \times b \in S$, dapat juga dikatakan bahwa \times pada S merupakan pemetaan dari $S \times S$ ke S , atau operasi yang bersifat tertutup pada S (Sukirman, 2005).

Contoh

Misalkan \mathbb{Z} adalah himpunan bilangan bulat. Operasi $+$ pada \mathbb{Z} adalah operasi biner, sebab operasi $+$ merupakan pemetaan dari $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ke \mathbb{Z} , yaitu $\forall (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ maka $a + b \in \mathbb{Z}$. Ingat bahwa jumlah dua bilang bulat adalah bilangan bulat pula. Operasi $(:)$ pembagian pada \mathbb{Z} bukan merupakan operasi biner, sebab ada $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $(a : b) \notin \mathbb{Z}$, misalnya $(3, 4) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dan $(3 : 4) \notin \mathbb{Z}$.

Misalkan operasi $*$ pada S adalah suatu operasi biner,

- a. Apabila $\forall a, b \in S$ berlaku $a * b = b * a$, maka operasi $*$ pada S bersifat komutatif.

- b. Apabila $\forall a, b, c \in S$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$, maka dikatakan bahwa operasi $*$ pada S bersifat asosiatif.
- c. Jika ada $e \in S$ sedemikian sehingga $\forall a \in S$ berlaku $a * e = e * a = a$, maka e disebut elemen identitas terhadap $*$.
- d. Jika $\forall a \in S, \exists b \in S$ sedemikian sehingga $a * b = b * a = e$ maka b disebut invers dari a terhadap operasi $*$. Invers dari a ditulis a^{-1} .

(Sukirman, 2005).

2.3 Relasi Biner

Relasi merupakan salah satu bagian yang sering digunakan dalam pelajaran aljabar. Secara umum relasi adalah suatu aturan yang memasangkan setiap anggota himpunan dengan anggota himpunan yang lain.

Definisi 2.13

Misalkan A dan B adalah dua himpunan tak kosong, maka suatu relasi biner R dari A ke B adalah suatu himpunan bagian dari $A \times B$. Jika $A = B$, maka R disebut relasi biner pada A (Mas'ood, 2019).

Jika R suatu relasi pada A , maka $(a, b) \in R$ ditulis dengan aRb (Mas'ood, 2013:9).

Contoh:

Misalkan himpunan $A = \{a, b, c\}$, maka suatu relasi dari A ke A yang mungkin adalah $R = \{(a, c), (a, a), (b, c), (c, a)\}$.

Contoh

Relasi $(<)$ pada himpunan $A = \{1, 2, 3\}$ adalah himpunan $\{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$ dan relasi \leq pada A adalah $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$.

Definisi 2. 14

Misalkan S adalah himpunan. Relasi R di S merupakan relasi terurut parsial yang melibatkan dua unsur di S yang memenuhi sifat-sifat:

- (i) Refleksif: untuk setiap a di S , berlaku aRa ,
- (ii) Antisimetris: jika aRb dan bRa , maka $a = b$,
- (iii) Transitif: jika aRb dan bRc , maka aRc

(Sukardjono, 2002:27).

Contoh

Diberikan $X = \{1, 2, 3\}$, dan diketahui

$$R_1 = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1)\},$$

maka R_1 adalah relasi simetrik tetapi bukan relasi refleksif pada X . Kemudian diketahui juga

$$R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$

maka R_2 merupakan relasi refleksif tetapi bukan relasi simetrik pada X .

Contoh

Jika $X = \{1, 2, 3, 4\}$, maka $R_1 = \{(1, 1), (2, 3), (3, 4), (2, 4)\}$ adalah relasi transitif pada X . Sedangkan $R_2 = \{(1, 3), (3, 2)\}$ bukan relasi transitif karena $\{(1, 3), (3, 2)\} \in R_2$ tetapi $(1, 2) \notin R_2$.

Definisi 2. 15

Suatu himpunan S yang disertai dengan relasi terurut parsial disebut himpunan terurut parsial atau *poset* (*partially ordered set*) (Sukardjono, 2002:28).

2.4 FPB dan KPK

Faktor Persekutuan Terbesar (FPB) dari beberapa bilangan adalah faktor persekutuan yang paling besar di antara faktor-faktor persekutuan dari bilangan yang diketahui. Sedangkan Kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK) dari dua bilangan adalah kelipatan persekutuan yang paling kecil di antara kelipatan-kelipatan persekutuan dari dua bilangan yang diketahui (Desriyati, dkk, 2011).

Definisi 2.16

Jika a dan b adalah sebarang bilangan bulat dengan $a \neq 0$, maka a dikatakan pembagi b , dinotasikan dengan $a|b$, jika dan hanya jika terdapat bilangan bulat c sedemikian sehingga $b = a \times c$. Jika $a|b$, maka a disebut pembagi atau faktor dari b , dan b disebut kelipatan atau perkalian dari a (Muhsetyo, dkk., 1985:90).

Definisi 2.17

Jika bilangan bulat positif d adalah pembagi bilangan bulat b dan c , maka d disebut pembagi persekutuan b dan c (Muhsetyo, dkk., 1985:109).

Contoh:

Misalkan himpunan A mempunyai anggota bilangan bulat positif pembagi dari 18, maka $A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$. Himpunan bilangan bulat positif pembagi 42 dinyatakan sebagai $B = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$. Maka $A \cap B = \{1, 2, 3, 6\}$ merupakan himpunan pembagi persekutuan 18 dan 42 yang bulat positif. Di antara pembagi persekutuan tersebut, 6 merupakan pembagi persekutuan terbesar dari 18 dan 42.

Definisi 2.18

FPB dari dua bilangan bulat tidak nol a dan b , dinotasikan dengan (a, b) ,

adalah bilangan bulat positif terbesar d sehingga d membagi a dinotasikan dengan $d|a$ dan d membagi b dinotasikan dengan $d|b$ (Muhsetyo, dkk., 1985:110).

FPB dari dua bilangan bulat positif adalah perkalian dari perpangkatan terkecil sebarang faktor-faktor persekutuan yang muncul pada pemfaktoran dua bilangan itu menjadi faktor-faktor prima (Muhsetyo, dkk., 1985:111).

Contoh:

Carilah FPB dari 24 dan 36

Jawab

$$24 = 2^3 \cdot 3$$

$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$

Karena FPB membagi 24 dan 36, FPB tidak dapat memuat faktor 2 lebih dari dua kali atau faktor 3 lebih dari satu kali. Jadi FPB dari 24 dan 36 adalah $2^2 \cdot 3 = 12$.

Definisi 2.19

Jika FPB dari dua bilangan bulat a dan b adalah 1, maka a dan b disebut relatif prima (Muhsetyo, dkk., 1985:112).

Contoh:

5 dan 7 adalah relatif prima, karena $(5, 7) = 1$.

Definisi 2.20

Suatu bilangan bulat positif m adalah kelipatan persekutuan terkecil (KPK) dari bilangan bulat b dan c , dinotasikan dengan $[a, b]$, jika b dan c membagi m dan jika m adalah bilangan bulat positif terkecil yang dapat dibagi b dan c (Muhsetyo, dkk., 1985:115).

KPK dari dua bilangan bulat positif adalah perkalian dari perpangkatan tertinggi dari semua faktor prima yang terdapat pada faktorisasi prima dari masing-masing bilangan (Muhsetyo, dkk., 1985:116).

Contoh:

Carilah KPK dari 8 dan 12.

$$8 = 2^3$$

$$12 = 2^2 \cdot 3$$

Jika masing-masing faktor prima adalah untuk membagi KPK, maka KPK harus memuat 2 sebagai faktor sebanyak tiga kali dan memuat faktor 3 sebanyak satu kali. Jadi, KPK dari 8 dan 12 adalah $2^3 \cdot 3 = 24$.

Contoh:

Carilah KPK dari 120 dan 180.

$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$\text{Jadi, KPK}(120, 180) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360.$$

2.5 Latis

Latis dapat dipandang dengan banyak cara yang berbeda. Dapat dipandang sebagai aljabar atau sebagai *poset*. Berikut ini dijelaskan latis yang dipandang sebagai aljabar dan sebagai poset.

Definisi 2.21

Suatu latis L adalah suatu aljabar dengan dua operasi biner dilambangkan dengan perkalian $*$ dan penjumlahan $\#$ yang memenuhi postulat- postulat berikut, untuk semua a, b, c di L ,

IA	$a * a = a$	operasi $*$ bersifat idempoten
IB	$a \# a = a$	operasi $\#$ bersifat idempoten
IIA	$a * b = b * a$	operasi $*$ komutatif
IIB	$a \# b = b \# a$	operasi $\#$ komutatif
IIIA	$a * (b * c) = (a * b) * c$	operasi $*$ asosiatif
IIIB	$a \# (b \# c) = (a \# b) \# c$	operasi $\#$ asosiatif
IVA	$a * (a \# b) = a$	absorpsi terhadap operasi $*$
IVB	$a \# (a * b) = a$	absorpsi terhadap operasi $\#$

(Sukardjono, 2002:39).

Teorema 2.1

Misal L adalah suatu latih dan $a \in L$. Jika $a * b = a$, maka $a \# b = b$
(Sukardjono, 2002:40).

Bukti:

$$\begin{aligned}
 a \# b &= (a * b) \# b && \text{menurut ketentuan } a \\
 &= b \# (a * b) && \text{menurut IIB} \\
 &= b \# (b * a) && \text{menurut IIA} \\
 &= b && \text{menurut IVB}
 \end{aligned}$$

Jadi terbukti jika $a * b = a$, maka $a \# b = b$.

Teorema 2.2

Misal L adalah suatu latih dan $a, b \in L$. Jika $a \# b = b$, maka $a * b = a$
(Sukardjono, 2002:40).

Bukti:

$$\begin{aligned}
 a * b &= a * (a \# b) \text{ menurut ketentuan } b \\
 &= a \text{ menurut IVA}
 \end{aligned}$$

Jadi terbukti jika $a \# b = b$, maka $a * b = a$.

Definisi 2.22

Didefinisikan suatu relasi R di antara dua anggota dalam suatu latris dengan

(i) aRb jika dan hanya jika $a * b = a$, dan

(ii) aRb jika dan hanya jika $a \# b = b$

(Sukardjono, 2002:40).

Contoh:

Misalkan $(L, *, \#)$ adalah suatu latris, dengan $L = \{2, 4\}$. Didefinisikan operasi biner yang dilambangkan dengan $*$ dan $\#$, dengan $*$ diartikan sebagai FPB dan $\#$ diartikan sebagai KPK. Dapat dituliskan juga untuk $a * b = (a, b)$ dan $a \# b = [a, b]$, maka tunjukkan bahwa untuk semua $a, b \in L$ berlaku aRb .

Jawab:

Akan ditunjukkan bahwa untuk semua $a, b \in L$ berlaku aRb jika dan hanya jika $a * b = a$ dan $a \# b = b$, yaitu:

a. Untuk $a = 2$ dan $b = 2$

$$a * b = a \qquad a \# b = b$$

$$2 * 2 = 2 \qquad 2 \# 2 = 2$$

$$2 = 2 \qquad 2 = 2$$

b. Untuk $a = 2$ dan $b = 4$

$$a * b = a \qquad a \# b = b$$

$$2 * 4 = 2 \qquad 2 \# 4 = 4$$

$$2 = 2 \qquad 4 = 4$$

c. Untuk $a = 4$ dan $b = 2$

$$a * b = a \qquad a \# b = b$$

$$4 * 2 = 4 \qquad 4 \# 2 = 2$$

$$2 \neq 4 \qquad 4 \neq 2$$

d. Untuk $a = 4$ dan $b = 4$

$$a * b = a \qquad a \# b = b$$

$$4 * 4 = 4 \qquad 4 \# 4 = 4$$

$$4 = 4 \qquad 4 \# 4 = 4$$

Karena untuk $a = 4$ dan $b = 2$ tidak memenuhi kondisi aRb jika dan hanya jika $a * b = a$ maka untuk semua $2, 4 \in L$ hanya berlaku $2R2, 2R4$ dan $4R4$.

Teorema 2.3

Misal L adalah suatu latris, maka untuk setiap $a, b \in L$ berlaku aRa (Sukardjono, 2002:40).

Bukti:

$$a * a = a \qquad \text{menurut postulat IA}$$

dan

$$a \# a = a \qquad \text{menurut postulat IB}$$

Jadi, menurut Definisi 2.22 terbukti untuk $aRa, \forall a \in L$.

Teorema 2.4

Misal L adalah suatu latris, maka untuk setiap $a, b \in L$ berlaku jika aRb dan bRa , maka $a = b$ (Sukardjono, 2002:40).

Bukti:

$$\begin{aligned} a &= a * b && \text{menurut ketentuan pertama dan Definisi 2.22} \\ &= b * a && \text{menurut postulat IIA} \\ &= b && \text{menurut ketentuan kedua dan Definisi 2.22} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} b &= a \# b && \text{menurut ketentuan kedua dan Definisi 2.22} \\ &= b \# a && \text{menurut postulat IIB} \\ &= a && \text{menurut ketentuan pertama dan Definisi 2.22} \end{aligned}$$

Jadi, terbukti jika aRb dan bRa maka $a = b$ untuk setiap $a, b \in L$.

Teorema 2.5

Misal L suatu latris, maka untuk setiap $a, b \in L$ berlaku jika aRb dan bRc , maka aRc (Sukardjono, 2002:40).

Bukti:

$$\begin{aligned} a * c &= (a * b) * c && \text{menurut ketentuan pertama dan Definisi 2.22} \\ &= a * (b * c) && \text{menurut IIIA} \\ &= a * b && \text{menurut ketentuan kedua dan Definisi 2.22} \\ &= a && \text{menurut ketentuan pertama dan Definisi 2.22} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} a \# c &= a \# (b \# c) && \text{menurut ketentuan kedua dan Definisi 2.22} \\ &= (a \# b) \# c && \text{menurut IIIA} \\ &= b \# c && \text{menurut ketentuan pertama dan Definisi 2.22} \\ &= c && \text{menurut ketentuan kedua dan Definisi 2.22} \end{aligned}$$

Jadi terbukti untuk aRc , menurut Definisi 2.22

Relasi R pada Teorema 2.3 sampai Teorema 2.5 adalah relasi terurut parsial karena memenuhi sifat-sifat refleksif (Teorema 2.3), antisimetris (Teorema 2.4), dan transitif (Teorema 2.5) (Sukardjono, 2002:27).

Teorema 2.6

Suatu latris adalah *poset*, dengan sifat $a \leq b$ yang berarti $a * b = a$ dan $a \# b = b$ (Sukardjono, 2002:41).

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa jika $a \leq b$, maka berlaku $a * b = a$ dan $a \# b = b$. Karena $a \leq b$, maka untuk semua $a, b \in L$ berlaku sifat refleksif, antisimetris, dan transitif. Pertama akan dibuktikan bahwa jika $a \leq b$, maka $a * b = a$, yaitu:

$$\begin{aligned} a * b &= a * a \quad \text{karena berlaku sifat antisimetris} \\ &= a \quad \text{karena berlaku sifat refleksif} \end{aligned}$$

Karena $a, b \in L$, maka $a * b = a$. Berdasarkan Teorema 2.1 jika $a * b = a$, maka $a \# b = b$, sehingga terbukti bahwa jika $a \leq b$, maka berlaku $a * b = a$ dan $a \# b = b$.

Teorema 2.7

Misal L suatu latris, maka untuk semua $a, b \in L$ berlaku $(a * b) \leq a$ (Sukardjono, 2002:42).

Bukti:

$$\begin{aligned} (a * b) * a &= a * (a * b) \quad \text{menurut IIA} \\ &= (a * a) * b \quad \text{menurut IIIA} \\ &= a * b \quad \text{menurut IA} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}(a * b) \# a &= a \# (a * b) && \text{menurut IIB} \\ &= a && \text{menurut IVB}\end{aligned}$$

Maka $(a * b) \leq a$ menurut Definisi 2.22.

Teorema 2.8

Misal L suatu latris, maka untuk semua $a, b \in L$ berlaku $a \leq (a \# b)$ (Sukardjono, 2002:42).

Bukti:

$$a * (a \# b) = a \quad \text{menurut IVA}$$

dan

$$\begin{aligned}a \# (a \# b) &= (a \# a) \# b && \text{menurut IIIB} \\ &= a \# b && \text{menurut IB}\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $a \leq a \# b$ menurut Definisi 2.22.

Teorema 2.9

Misal L adalah suatu latris, maka untuk semua $a, b \in L$ berlaku $(a * b) \leq b$ (Sukardjono, 2002:42).

Bukti:

$$(b * a) \leq b \quad \text{menurut Teorema 2.9}$$

tetapi,

$$b * a = a * b$$

Jadi terbukti bahwa $a * b \leq b$ menurut IIA.

Teorema 2.10

Misal L adalah suatu latris, maka untuk semua $a, b \in L$ berlaku $b \leq a \# b$ (Sukardjono, 2002:42).

Bukti:

$$b \leq (b \# a) \quad \text{menurut Teorema 2.8}$$

tetapi,

$$b \# a = a \# b$$

Jadi terbukti bahwa $b \leq a \# b$ menurut IIB.

Teorema 2.11

Misal L adalah suatu latih, untuk semua $a, b, c \in L$ maka jika $c \leq a$ dan $c \leq b$ berlaku $c \leq (a * b)$ (Sukardjono, 2002:42).

Bukti:

$$\begin{aligned} c &= c * a && \text{menurut ketentuan pertama dan Definisi 2.22} \\ &= (c * b) * a && \text{menurut ketentuan kedua dan Definisi 2.22} \\ &= c * (b * a) && \text{menurut IIIA} \\ &= c * (a * b) && \text{menurut IIA} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} a * b &= a * (c \# b) && \text{menurut ketentuan kedua dan Definisi 2.22} \\ &= (a * c) \# (a * b) && \text{menurut sifat distributif} \\ &= c \# (a * b) && \text{menurut ketentuan pertama dan Definisi 2.22} \end{aligned}$$

Dengan demikian terbukti $c \leq a * b$ menurut Definisi 2.22

Teorema 2.12

Misal L adalah suatu latih, untuk setiap $a, b, c \in L$ maka jika $a \leq c$ dan $b \leq c$ berlaku $a \# b \leq c$ (Sukardjono, 2002:42).

Bukti:

$$\begin{aligned} (a \# b) * c &= (a * c) \# (b * c) && \text{menurut sifat distributif} \\ &= a \# b && \text{ketentuan pertama, kedua, Definisi. 2.22} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
 (a \# b) \# c &= a \# (b \# c) && \text{menurut IIIB} \\
 &= a \# c && \text{menurut ketentuan kedua dan Definisi. 2.22} \\
 &= c && \text{menurut ketentuan pertama}
 \end{aligned}$$

Dengan demikian maka terbukti bahwa $a \# b \leq c$.

2.6 Dualitas

Arti kata dualitas dalam Kamus Besar Bahasa Indonesia (KBBI) yaitu keadaan menjadi rangkap dua atau memiliki sifat rangkap dua.

Definisi 2.23

Relasi konvers yaitu jika diberikan relasi R , R' disebut relasi konvers dengan $xR'y$ jika dan hanya jika yRx (Sukardjono, 2002:32).

Teorema 2.13

Jika suatu himpunan S terurut parsial oleh relasi R , maka S terurutkan parsial oleh relasi konvers R' (Sukardjono, 2002:32).

Bukti:

Karena aRa , maka diperoleh $aR'a$ untuk setiap $a \in S$. Dengan demikian maka R' memenuhi sifat refleksif.

Jika $aR'b$ dan $bR'a$, berdasarkan definisi relasi R' diperoleh bRa dan aRb .

Tetapi R adalah relasi terurut parsial yang memenuhi sifat antisimetrik, sehingga $b = a$. Dengan demikian maka R' memenuhi sifat antisimetris.

Jika $aR'b$ dan $bR'c$ maka menurut definisi R' diperoleh bRa dan cRb .

Karena R terurut parsial yang memenuhi sifat transitif, akibatnya diperoleh cRa atau menurut definisi R' berarti $aR'c$. Sehingga R' memenuhi sifat transitif.

Karena R' memenuhi sifat refleksif, antisimetris, dan transitif, akibatnya R' merupakan relasi terurut parsial. Sehingga untuk setiap $a, b, c \in S$, maka S terurutkan parsial oleh R' .

Definisi 2.24

Himpunan S yang terurut parsial oleh R' disebut dual dari S yang terurut parsial oleh R . Dual dari himpunan S disimbolkan dengan S' . (Sukardjono, 2002:32).

Contoh:

Misalkan terdapat $S = \{2, 4, 6, 8, 12\}$ dengan $a \leq b$ yang berarti $a|b$, a membagi b . Dual dari himpunan ini terdiri atas bilangan-bilangan yang sama dengan $a \leq b$ yang berarti $b|a$, a kelipatan dari b .

Definisi 2.25

Misalkan T adalah himpunan bagian dari *poset* S untuk $a, t \in T$ dan $b \in S$,

- i-a Jika $a \leq t$, a disebut unsur terkecil dari T .
- i-b Jika $a \geq t$, a disebut unsur terbesar dari T .
- ii-a Anggota terkecil adalah tunggal. Karena jika a_1, a_2 adalah anggota-anggota terkecil, $a_1 \leq a_2, a_2 \leq a_1$, maka $a_1 = a_2$.
- ii-b Anggota terbesar adalah tunggal. Karena jika a_1, a_2 adalah anggota-anggota terbesar, $a_1 \geq a_2, a_2 \geq a_1$, maka $a_1 = a_2$.
- iii-a Jika $T = S$, anggota terkecil ini disebut anggota nol, dengan notasi o atau 0 .
- iii-b Jika $T = S$, anggota terbesar ini disebut anggota satuan, dengan notasi u atau U atau I .

- iv-a Jika $a \in T$ dan tidak ada anggota $t \in T$ dengan sifat $t \leq a$, a disebut anggota minimal dari T . Anggota minimal tidak harus tunggal.
- iv-b Jika $a \in T$ dan tidak ada anggota $t \in T$ dengan sifat $t \geq a$, a disebut anggota maksimal dari T . Anggota maksimal tidak harus tunggal.
- v-a Jika $b \leq t$, untuk setiap $t \in T$, b disebut batas bawah dari himpunan bagian T .
- v-b Jika $b \geq t$, untuk setiap $t \in T$, b disebut batas atas dari himpunan bagian T .
- vi-a Jika g anggota batas bawah dari T dengan sifat $b \leq g$ untuk setiap batas bawah b dari T , g disebut batas bawah terbesar dari T .
- vi-b Jika g anggota batas atas dari T dengan sifat $b \geq g$ untuk setiap batas atas b dari T , g disebut batas atas terkecil dari T .
- vii-a Jika anggota batas bawah terbesar g ada, anggota itu tunggal. Karena g adalah batas bawah, maka himpunan batas bawah tidak hampa, dan g adalah anggota terbesar.
- vii-b Jika anggota batas atas terbesar g ada, anggota itu tunggal. Karena g adalah batas atas, maka himpunan batas atas tidak hampa, dan g adalah anggota terbesar.

(Sukardjono, 2002:33).

2.7 Kajian Ilmu Pengetahuan dalam Al-Quran

Di era global ini, sangatlah penting mempelajari banyak ilmu yang harusnya diketahui dan dipelajari. Melihat perkembangan banyak ilmu yang semakin tinggi dan semakin luas. Matematika merupakan salah satu ilmu dasar

dari ilmu-ilmu lain yang wawasannya semakin luas. Ketika duduk dibangku sekolah dasar telah dipelajari mengenai angka-angka dari 0 sampai tak hingga, himpunan-himpunannya, dan operasi dalam matematika yaitu penjumlahan (+), pengurangan (-), perkalian (\times), dan juga pembagian (:). Semakin tinggi tingkatan sekolah maka semakin tinggi ilmu matematika yang dipelajari. Seperti pada bangku kuliah mempelajari ilmu aljabar. Aljabar mempelajari tentang struktur dan sifat-sifatnya, operasi atau hubungan, dan juga mempelajari himpunan. Aljabar mempelajari grup ring dan latis. Latis adalah suatu aljabar dengan dua operasi biner. Masih banyak lagi ilmu-ilmu matematika yang belum diketahui. Oleh karena itu diharuskan mempelajari berbagai ilmu untuk mempermudah segala hal.

Allah Swt. berfirman dalam surat Ali Imran ayat 7 berikut:

هُوَ الَّذِي أَنْزَلَ عَلَيَّ كِتَابَ مِنْهُ آيَاتٌ مُخْتَلَفَاتٌ هُنَّ أُمَّ الْكِتَابِ وَأَخْرُ
 مُشَبَّهَاتٌ فَأَمَّا الَّذِينَ فِي قُلُوبِهِمْ زَيْغٌ فَيَتَّبِعُونَ مَا تَشَبَّهُ مِنْهُ أَبْتِغَاءَ الْفِتَنِ
 وَأَبْتِغَاءَ تَأْوِيلِهِ وَمَا يَعْلَمُ تَأْوِيلَهُ إِلَّا اللَّهُ وَالرَّاسِخُونَ فِي الْعِلْمِ يَقُولُونَ آمَنَّا بِهِ
 كُلٌّ مِنْ عِنْدِ رَبِّنَا وَمَا يَذَّكَّرُ إِلَّا أُولُو الْأَلْبَابِ

“Dialah yang menurunkan kitab (al-Quran) kepadamu (Muhammad). Di dalamnya terdapat ayat-ayat yang jelas yang menjadi dasar bagi kitab ini, sedangkan yang lain adalah yang maknanya tersembunyi. Tetapi bagi mereka yang di dalam hatinya terdapat keburukan, mereka mengikuti sebagian dari yang maknanya tersembunyi itu, berusaha untuk menyebabkan keburukan dengan mencari cari (sendiri) maknanya dengan penafsiran mereka sendiri, sedangkan tiada yang mengetahui penafsirannya (yang tersembunyi itu) kecuali Allah Swt., dan mereka yang memiliki pengetahuan kuat dan mendalam. Mereka berkata, “Kami percaya kepada-Nya, seluruhnya berasal dari Tuhan kami, dan tiada yang bisa memikirkannya kecuali orang-orang yang berakal.”” (QS. Ali Imran:7).

Dalam surat Ali Imran ayat 7 ini menjelaskan tentang satu keistimewaan al-Quran. Kelebihan yang ditunjukkan adalah di dalam al-Quran terdapat ayat-ayat yang jelas yang menjadi dasar al-Quran, sedangkan yang lain adalah yang

maknanya tersembunyi. Ayat-ayat yang maknanya tersembunyi ini, jika dilihat sekilas terlihat rumit karena tingginya tingkatan topik atau karena faktor-faktor lain di dalamnya. Ayat ini digunakan untuk menguji manusia agar memisahkan ulama yang sejati dengan orang-orang yang keras kepala dan tidak setia (Imani, 2006a:126).

Dalam ayat ini diketahui bahwa ayat-ayat al-Quran dibagi ke dalam dua kelompok. Sebagian ayat memiliki konsep yang sedemikian jelas, sehingga tidak membuka peluang bagi penolakan, justifikasi, atau penyalahgunaan. Ayat-ayat ini disebut ayat yang *muhkamat*. Akan tetapi, ada beberapa ayat, yang karena tingginya topik atau bahasan yang jauh di atas jangkauan, seperti alam-alam yang tak terlihat, alam kebangkitan, sifat-sifat Allah Swt., sedemikian tingginya sehingga makna-makna rahasianya yang tersembunyi, dan kedalam realitasnya, membutuhkan kemampuan ilmiah tertentu untuk memahaminya. Ayat-ayat ini disebut ayat *mutasyabihat*. Beberapa orang yang tidak bertanggung jawab mencoba untuk menyalahgunakan ayat ini dengan cara menafsirkannya dengan kebohongan untuk menciptakan keburukan pada umat manusia, dan menyimpangkan mereka dari jalan yang benar. Akan tetapi Allah Swt. dan orang-orang yang memiliki ilmu yang mengakar kuat mengetahui rahasia-rahasia ayat-ayat ini dan menjelaskannya kepada manusia. Mereka adalah yang ada pada barisan pertama dari segi pengetahuan, seperti Nabi dan para imam maksum. Oleh karena itu ilmu sangat penting untuk mengungkap misteri-misteri dalam al-Quran (Imani, 2006a:126).

Karena sangat pentingnya ilmu dalam kehidupan di dunia ini, banyak ayat al-Quran yang menganjurkan manusia untuk menuntut ilmu. Salah satunya telah

dijelaskan pada firman Allah Swt. dalam surat al-Alaq (96) ayat 1-5 berikut:

أَقْرَأْ بِاسْمِ رَبِّكَ الَّذِي خَلَقَ. أَقْرَأْ بِاسْمِ رَبِّكَ الَّذِي خَلَقَ. أَقْرَأْ بِاسْمِ رَبِّكَ الَّذِي خَلَقَ. أَقْرَأْ بِاسْمِ رَبِّكَ الَّذِي خَلَقَ. أَقْرَأْ بِاسْمِ رَبِّكَ الَّذِي خَلَقَ. أَقْرَأْ بِاسْمِ رَبِّكَ الَّذِي خَلَقَ. أَقْرَأْ بِاسْمِ رَبِّكَ الَّذِي خَلَقَ. أَقْرَأْ بِاسْمِ رَبِّكَ الَّذِي خَلَقَ. أَقْرَأْ بِاسْمِ رَبِّكَ الَّذِي خَلَقَ. أَقْرَأْ بِاسْمِ رَبِّكَ الَّذِي خَلَقَ.

“Bacalah dengan (menyebut) nama Tuhanmu yang menciptakan (segala sesuatu di alam semesta ini). Yang telah menciptakan manusia dari segumpal darah beku. Bacalah, dan Tuhanmulah yang maha mulia. Yang mengajar (manusia) dengan pena. Dia mengajarkan manusia apa yang tidak diketahuinya.” (QS. al-Alaq:1-5).

Ayat-ayat awal surat al-Alaq ini menurut keyakinan sebagian besar atau semua musafir merupakan sinaran pertama dari cahaya Ilahi yang menyala di hati suci Nabi Muhammad Saw. Ada hal menarik yang perlu dicatat dari beberapa riwayat Muhammad Saw. adalah seorang buta huruf dan tidak pernah di ajar oleh siapapun. Oleh karenanya turunnya surat al-Alaq merupakan sebuah babakan baru yang terbuka bagi umat manusia dan suatu dekade yang baru ditemukan dalam sejarah umat manusia.

Semula, ayat-ayat ini pada satu sisi membahas perkembangan tubuh manusia dari sesuatu yang tidak berharga, yaitu sebuah gumpalan darah. Di sisi lainnya membahas perkembangan kejiwaan manusia melalui pelatihan dan pendidikan, khususnya melalui pena. Pada hari ketika ayat ini diturunkan, banyak sekali orang tidak menghargai pena pada zamannya. Oleh karenanya landasan dari segala kebudayaan dan peradaban, berbagai jenis pengetahuan dan kemajuan manusia di bidang-bidang yang berbeda-beda ternyata bergantung pada eksistensi “pena” (Imani, 2006c:185).

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini membahas mengenai dualitas sifat-sifat pada latis, di antaranya dengan memberikan pembuktian dari beberapa teorema yang terkait dengan dualitas sifat-sifat pada latis.

3.1 Dualitas Sifat-sifat pada Latis

Sebelum membahas mengenai dualitas sifat-sifat pada latis, akan ditunjukkan contoh himpunan faktor positif dari bilangan 32 yang memenuhi delapan postulat latis.

Contoh

Diberikan suatu latis L adalah himpunan faktor positif dari bilangan 32, yaitu $L = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$. Didefinisikan operasi biner yang dinotasikan dengan $*$ dan $\#$, untuk $*$ diartikan sebagai FPB dan $\#$ diartikan sebagai KPK. Dapat dituliskan juga untuk $a * b = (a, b)$ dan $a \# b = [a, b]$. Akan ditunjukkan bahwa $(L, *, \#)$ adalah latis.

Diketahui faktor positif dari $32 = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$. Akan dibuktikan faktor positif bilangan 32 adalah latis yang memenuhi delapan postulat.

1. Akan ditunjukkan untuk postulat IA

Ambil $a, b \in 32$ dengan $a = b$, sehingga

$$(a, b) = (a, a) = a$$

Jadi, $(L, *)$ memenuhi postulat IA yaitu bersifat idempoten.

2. Akan ditunjukkan untuk postulat IB

Ambil $a, b \in 32$ dengan $a = b$, sehingga

$$[a, b] = [a, a] = a$$

Jadi, $(L, \#)$ memenuhi postulat IB yaitu bersifat idempoten.

3. Akan ditunjukkan untuk postulat IIA

Tabel 3. 1 Tabel FPB dari Faktor Positif 32 untuk Postulat IIA

$(1, 2) = (2, 1) = 1$	$(2, 4) = (4, 2) = 2$	$(4, 16) = (16, 4) = 4$
$(1, 4) = (4, 1) = 1$	$(2, 8) = (8, 2) = 2$	$(4, 32) = (32, 4) = 4$
$(1, 8) = (8, 1) = 1$	$(2, 16) = (4, 2) = 2$	$(8, 16) = (16, 4) = 8$
$(1, 16) = (16, 1) = 1$	$(2, 32) = (4, 2) = 2$	$(8, 32) = (16, 4) = 8$
$(1, 32) = (32, 1) = 1$	$(4, 8) = (8, 4) = 4$	$(16, 32) = (32, 16) = 16$

Berdasarkan Tabel 3.1 dapat disimpulkan bahwa untuk setiap $a, b \in 32$, maka

$$(a, b) = (b, a)$$

Sehingga terbukti bahwa $(L, *)$ memenuhi postulat IIA yaitu bersifat komutatif.

4. Akan ditunjukkan untuk postulat IIB

Tabel 3. 2 Tabel KPK dari Faktor Positif 32 untuk Postulat IIB

$[1, 2] = [2, 1] = 2$	$[2, 4] = [4, 2] = 4$	$[4, 16] = [16, 4] = 16$
$[1, 4] = [4, 1] = 4$	$[2, 8] = [8, 2] = 8$	$[4, 32] = [32, 4] = 32$
$[1, 8] = [8, 1] = 8$	$[2, 16] = [16, 2] = 16$	$[8, 16] = [16, 8] = 16$
$[1, 16] = [16, 1] = 16$	$[2, 32] = [32, 2] = 32$	$[8, 32] = [32, 8] = 32$
$[1, 32] = [32, 1] = 32$	$[4, 8] = [8, 4] = 8$	$[16, 32] = [32, 16] = 32$

Berdasarkan Tabel 3.2 dapat disimpulkan bahwa untuk setiap $a, b \in 32$, maka,

$$[a, b] = [b, a]$$

Sehingga terbukti bahwa $(L, \#)$ memenuhi postulat IIB yaitu bersifat komutatif.

5. Akan ditunjukkan untuk postulat IIIA

Tabel 3. 3 Tabel FPB dari Faktor Positif 32 untuk Postulat IIIA

$(1, (1, 1)) = ((1, 1), 1) = 1$	$(2, (4, 16)) = ((2, 4), 16) = 2$
$(1, (1, 2)) = ((1, 1), 2) = 1$	$(2, (4, 32)) = ((2, 4), 32) = 2$
$(1, (1, 4)) = ((1, 1), 4) = 1$	$(2, (8, 8)) = ((2, 8), 8) = 2$
$(1, (1, 8)) = ((1, 1), 8) = 1$	$(2, (8, 16)) = ((2, 8), 16) = 2$
$(1, (1, 16)) = ((1, 1), 16) = 1$	$(2, (8, 32)) = ((2, 8), 32) = 2$
$(1, (1, 32)) = ((1, 1), 32) = 1$	$(2, (16, 16)) = ((2, 16), 16) = 2$
$(1, (2, 2)) = ((1, 2), 2) = 1$	$(2, (16, 32)) = ((2, 16), 32) = 2$
$(1, (2, 4)) = ((1, 2), 4) = 1$	$(2, (32, 32)) = ((2, 32), 32) = 2$
$(1, (2, 8)) = ((1, 2), 8) = 1$	$(4, (4, 4)) = ((4, 4), 4) = 4$
$(1, (2, 16)) = ((1, 2), 16) = 1$	$(4, (4, 8)) = ((4, 4), 8) = 4$
$(1, (2, 32)) = ((1, 2), 32) = 1$	$(4, (4, 16)) = ((4, 4), 16) = 4$
$(1, (4, 4)) = ((1, 4), 4) = 1$	$(4, (4, 32)) = ((4, 4), 32) = 4$
$(1, (4, 8)) = ((1, 4), 8) = 1$	$(4, (8, 8)) = ((4, 8), 8) = 4$
$(1, (4, 16)) = ((1, 4), 16) = 1$	$(4, (8, 16)) = ((4, 8), 16) = 4$
$(1, (4, 32)) = ((1, 4), 32) = 1$	$(4, (8, 32)) = ((4, 8), 32) = 4$
$(1, (8, 8)) = ((1, 8), 8) = 1$	$(4, (16, 16)) = ((4, 16), 16) = 4$
$(1, (8, 16)) = ((1, 8), 16) = 1$	$(4, (16, 32)) = ((4, 16), 32) = 4$
$(1, (8, 32)) = ((1, 8), 32) = 1$	$(4, (32, 32)) = ((4, 32), 32) = 4$

$(1, (16, 16)) = ((1, 16), 16) = 1$	$(8, (8, 8)) = ((8, 8), 8) = 8$
$(1, (16, 32)) = ((1, 16), 32) = 1$	$(8, (8, 16)) = ((8, 8), 16) = 8$
$(1, (32, 32)) = ((1, 32), 32) = 1$	$(8, (8, 32)) = ((8, 8), 32) = 8$
$(2, (2, 2)) = ((2, 2), 2) = 2$	$(8, (16, 16)) = ((8, 16), 16) = 8$
$(2, (2, 4)) = ((2, 2), 4) = 2$	$(8, (16, 32)) = ((8, 16), 32) = 8$
$(2, (2, 8)) = ((2, 2), 8) = 2$	$(8, (132, 32)) = ((8, 32), 32) = 8$
$(2, (2, 16)) = ((2, 2), 16) = 2$	$(16, (16, 16)) = ((16, 16), 16) = 16$
$(2, (2, 32)) = ((2, 2), 32) = 2$	$(16, (16, 32)) = ((16, 16), 32) = 16$
$(2, (4, 4)) = ((2, 4), 4) = 2$	$(16, (32, 32)) = ((16, 32), 32) = 16$
$(2, (4, 8)) = ((2, 4), 8) = 2$	$(32, (32, 32)) = ((16, 32), 32) = 32$

Berdasarkan Tabel 3.3 dapat disimpulkan bahwa untuk $a, b, c \in 32$, maka

$$(a, (b, c)) = ((a, b), c)$$

Sehingga terbukti $(L, *)$ memenuhi postulat IIIA yaitu bersifat asosiatif.

6. Akan ditunjukkan untuk postulat IIIB

Tabel 3. 4 Tabel KPK dari Faktor Positif 32 untuk Postulat IIIB

$[1, [1, 1]] = [[1, 1], 1] = 1$	$[2, [4, 16]] = [[2, 4], 16] = 16$
$[1, [1, 2]] = [[1, 1], 2] = 2$	$[2, [4, 32]] = [[2, 4], 32] = 32$
$[1, [1, 4]] = [[1, 1], 4] = 4$	$[2, [8, 8]] = [[2, 8], 8] = 8$
$[1, [1, 8]] = [[1, 1], 8] = 8$	$[2, [8, 16]] = [[2, 8], 16] = 16$
$[1, [1, 16]] = [[1, 1], 16] = 16$	$[2, [8, 32]] = [[2, 8], 32] = 32$
$[1, [1, 32]] = [[1, 1], 32] = 32$	$[2, [16, 16]] = [[2, 16], 16] = 16$

$[1, [2, 2]] = [[1, 2], 2] = 2$	$[2, [16, 32]] = [[2, 16], 32] = 32$
$[1, [2, 4]] = [[1, 2], 4] = 4$	$[2, [32, 32]] = [[2, 32], 32] = 32$
$[1, [2, 8]] = [[1, 2], 8] = 8$	$[4, [4, 4]] = [[4, 4], 4] = 4$
$[1, [2, 16]] = [[1, 2], 16] = 16$	$[4, [4, 8]] = [[4, 4], 8] = 8$
$[1, [2, 32]] = [[1, 2], 32] = 32$	$[4, [4, 16]] = [[4, 4], 16] = 16$
$[1, [4, 4]] = [[1, 4], 4] = 4$	$[4, [4, 32]] = [[4, 4], 32] = 32$
$[1, [4, 8]] = [[1, 4], 8] = 8$	$[4, [8, 8]] = [[4, 8], 8] = 8$
$[1, [4, 16]] = [[1, 4], 16] = 16$	$[4, [8, 16]] = [[4, 8], 16] = 16$
$[1, [4, 32]] = [[1, 4], 32] = 32$	$[4, [8, 32]] = [[4, 8], 32] = 32$
$[1, [8, 8]] = [[1, 8], 8] = 8$	$[4, [16, 16]] = [[4, 16], 16] = 16$
$[1, [8, 16]] = [[1, 8], 16] = 16$	$[4, [16, 32]] = [[4, 16], 32] = 32$
$[1, [8, 32]] = [[1, 8], 32] = 32$	$[4, [32, 32]] = [[4, 32], 32] = 32$
$[1, [16, 16]] = [[1, 16], 16] = 16$	$[8, [8, 8]] = [[8, 8], 8] = 8$
$[1, [16, 32]] = [[1, 16], 32] = 32$	$[8, [8, 16]] = [[8, 8], 16] = 16$
$[1, [32, 32]] = [[1, 32], 32] = 32$	$[8, [8, 32]] = [[8, 8], 32] = 32$
$[2, [2, 2]] = [[2, 2], 2] = 2$	$[8, [16, 16]] = [[8, 16], 16] = 16$
$[2, [2, 4]] = [[2, 2], 4] = 4$	$[8, [16, 32]] = [[8, 16], 32] = 32$
$[2, [2, 8]] = [[2, 2], 8] = 8$	$[8, [32, 32]] = [[8, 32], 32] = 32$
$[2, [2, 16]] = [[2, 2], 16] = 16$	$[16, [16, 16]] = [[16, 16], 16] = 16$
$[2, [2, 32]] = [[2, 2], 32] = 32$	$[16, [16, 32]] = [[16, 16], 32] = 32$
$[2, [4, 4]] = [[2, 4], 4] = 4$	$[16, [32, 32]] = [[16, 32], 32] = 32$

$[2, [4, 8]] = [[2, 4], 8] = 8$	$[32, [32, 32]] = [[32, 32], 32] = 32$
---------------------------------	--

Berdasarkan Tabel 3.4 dapat disimpulkan bahwa untuk setiap $a, b, c \in 32$, maka

$$[a, [b, c]] = [[a, b], c]$$

Sehingga terbukti $(L, \#)$ memenuhi postulat IIIB yaitu bersifat asosiatif.

7. Akan dibuktikan untuk postulat IVA

Tabel 3. 5 Tabel FPB dari Faktor Positif 32 untuk Postulat IVA

$(1, [1, 2]) = (1, 2) = 1$	$(8, [8, 1]) = (8, 8) = 8$
$(1, [1, 4]) = (1, 4) = 1$	$(8, [8, 2]) = (8, 8) = 8$
$(1, [1, 8]) = (1, 8) = 1$	$(8, [8, 4]) = (8, 8) = 8$
$(1, [1, 16]) = (1, 16) = 1$	$(8, [8, 16]) = (8, 16) = 8$
$(1, [1, 32]) = (1, 32) = 1$	$(8, [8, 32]) = (8, 32) = 8$
$(2, [2, 1]) = (2, 2) = 2$	$(16, [16, 1]) = (16, 16) = 16$
$(2, [2, 4]) = (2, 4) = 2$	$(16, [16, 2]) = (16, 16) = 16$
$(2, [2, 8]) = (2, 8) = 2$	$(16, [16, 4]) = (16, 16) = 16$
$(2, [2, 16]) = (2, 16) = 2$	$(16, [16, 8]) = (16, 16) = 16$
$(2, [2, 32]) = (2, 32) = 2$	$(16, [16, 32]) = (16, 16) = 16$
$(4, [4, 1]) = (4, 4) = 4$	$(32, [32, 1]) = (32, 32) = 32$
$(4, [4, 2]) = (4, 4) = 4$	$(32, [32, 2]) = (32, 32) = 32$
$(4, [4, 8]) = (4, 8) = 4$	$(32, [32, 4]) = (32, 32) = 32$
$(4, [4, 16]) = (4, 16) = 4$	$(32, [32, 8]) = (32, 32) = 32$
$(4, [4, 32]) = (4, 32) = 4$	$(32, [32, 16]) = (32, 32) = 32$

Berdasarkan Tabel 3.5 dapat disimpulkan bahwa untuk setiap $a, b \in 32$, maka

$$(a, [a, b]) = a$$

Sehingga terbukti bahwa $(L, *)$ memenuhi postulat IVA yaitu bersifat absorpsi.

8. Akan ditunjukkan untuk postulat IVB

Tabel 3. 6 Tabel KPK dari Faktor Positif 32 untuk Postulat IVB

$[1, (1, 2)] = [1, 1] = 1$	$[8, (8, 1)] = [8, 1] = 8$
$[1, (1, 4)] = [1, 1] = 1$	$[8, (8, 2)] = [8, 2] = 8$
$[1, (1, 8)] = [1, 1] = 1$	$[8, (8, 4)] = [8, 4] = 8$
$[1, (1, 16)] = [1, 1] = 1$	$[8, (8, 16)] = [8, 8] = 8$
$[1, (1, 32)] = [1, 1] = 1$	$[8, (8, 32)] = [8, 8] = 8$
$[2, (2, 1)] = [2, 1] = 2$	$[16, (16, 1)] = [16, 1] = 16$
$[2, (2, 4)] = [2, 2] = 2$	$[16, (16, 2)] = [16, 2] = 16$
$[2, (2, 8)] = [2, 2] = 2$	$[16, (16, 4)] = [16, 4] = 16$
$[2, (2, 16)] = [2, 2] = 2$	$[16, (16, 8)] = [16, 8] = 16$
$[2, (2, 32)] = [2, 2] = 2$	$[16, (16, 32)] = [16, 16] = 16$
$[4, (4, 1)] = [4, 1] = 4$	$[32, (32, 1)] = [32, 1] = 32$
$[4, (4, 2)] = [4, 2] = 4$	$[32, (32, 2)] = [32, 2] = 32$
$[4, (4, 8)] = [4, 4] = 4$	$[32, (32, 4)] = [32, 4] = 32$
$[4, (4, 16)] = [4, 4] = 4$	$[32, (32, 8)] = [32, 8] = 32$
$[4, (4, 32)] = [4, 4] = 4$	$[32, (32, 16)] = [32, 16] = 32$

Berdasarkan Tabel 3.6 dapat disimpulkan bahwa untuk setiap $a, b \in 32$, maka

$$[a, (a, b)] = a$$

Sehingga terbukti bahwa $(L, \#)$ memenuhi postulat IVB yaitu bersifat absorpsi.

Dengan demikian FPB dari faktor positif bilangan 32 dapat didefinisikan sebagai,

$$(a, b) = \begin{cases} a, a \leq b \\ b, a \geq b \end{cases}$$

dan untuk KPK dari faktor positif bilangan 32 dapat didefinisikan sebagai,

$$[a, b] = \begin{cases} a, a \geq b \\ b, a \leq b \end{cases}$$

Berdasarkan nomor 1 sampai dengan nomor 8 terbukti bahwa $(L, *, \#)$ himpunan faktor positif dari bilangan 32 adalah latris yang memenuhi delapan postulat.

Dalam Definisi 2.24 telah dijelaskan tentang himpunan S yang terurut parsial oleh R' disebut dual dari S yang terurut parsial oleh R dan dinotasikan dengan S' . Pada definisi 2.22 yaitu mendefinisikan urutan parsial dari latris sebagai berikut, untuk setiap $a, b \in L$:

- i) $a \leq b$ jika dan hanya jika $a * b = a$
- ii) $a \leq b$ jika dan hanya jika $a \# b = b$

Pernyataan di atas telah dibuktikan dalam subbab 2.5. Jika operasi dalam pernyataan di atas diganti perkalian ($*$) dengan penjumlahan ($\#$), penjumlahan dengan perkalian. Sehingga diperoleh $a * b = b$ dan $a \# b = a$, akibatnya Definisi 2.22 menjadi $a \geq b$. Dengan demikian Definisi 2.22 yang menyatakan $a \geq b$ merupakan dualitas dari $a \leq b$ begitu juga pernyataan urutan parsialnya. Jadi, latris L yang terurutkan parsial oleh relasi \geq merupakan dualitas L yang terurutkan parsial oleh relasi \leq .

Jika dalam semua postulat latris dari IA-IVB dalam subbab 2.5 semua operasi perkalian ditukar dengan penjumlahan, dan membalik semua tanda ketaksamaan, maka akan diperoleh teorema yang valid yaitu:

Untuk semua a, b, c di L ,

IA $a \# a = a$ operasi $\#$ bersifat idempoten

IB $a * a = a$ operasi $*$ bersifat idempoten

IIA $a \# b = b \# a$ operasi $\#$ komutatif

IIB $a * b = b * a$ operasi $*$ komutatif

IIIA $a \# (b \# c) = (a \# b) \# c$ operasi $\#$ asosiatif

IIIB $a * (b * c) = (a * b) * c$ operasi $*$ asosiatif

IVA $a \# (a * b) = a$ absorpsi terhadap operasi $\#$

IVB $a * (a \# b) = a$ absorpsi terhadap operasi $*$

(Sukardjono, 2002:66).

Dengan demikian akan lebih mudah untuk membuktikan teorema-teorema selanjutnya. Misalnya akan dibuktikan bahwa dalam suatu latris berlaku,

$$a * (b \# c) \geq (a * b) \# (a * c)$$

maka akan sekaligus diketahui bahwa

$$a \# (b * c) \leq (a \# b) * (a \# c)$$

Melihat dari definisi-definisi, seperti halnya teorema, seringkali terjadi dualitas, jadi dalam Definisi 2.25 setiap (a) adalah dualitas dari (b) (Sukardjono, 2002:66).

Teorema 3. 1

Jika dalam suatu latris $a \leq b$ dan $c \leq d$, maka $a * c \leq b * d$ (Sukardjono, 2002:67).

Bukti:

Karena $a \leq b$ dan $c \leq d$ maka menurut Definisi 2.22 $a * b = a$, $a \# b = b$,

$c * d = c$ dan $c \# d = d$. Sehingga

$$\begin{aligned}
 (a * c) * (b * d) &= ((a * c) * b) && \text{menurut postulat IIIA} \\
 &= (a * (c * b)) * d && \text{menurut postulat IIIA} \\
 &= (a * (b * c)) * d && \text{menurut postulat IIA} \\
 &= ((a * b) * c) * d && \text{menurut postulat IIIA} \\
 &= (a * b) * (c * d) && \text{menurut postulat IIIA} \\
 &= a * c && \text{Definisi 2.22}
 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
 (a * c) \# (b * d) &= (a \# (b * d)) * (c \# (b * d)) && \text{Definisi 2.11 (d)} \\
 &= ((a \# b) * (a \# d)) * ((c \# b) * (c \# d)) && \text{Definisi 2.11 (d)} \\
 &= (a \# b) * ((a \# d) * (c \# b)) * (c \# d) && \text{postulat IIIA} \\
 &= (a \# b) * ((c \# b) * (a \# d)) * (c \# d) && \text{Postulat IIA} \\
 &= ((a \# b) * (c \# b)) * ((a \# d) * (c \# d)) && \text{postulat IIIA} \\
 &= (b * (c \# b)) * ((a \# d) * d) && \text{Definisi 2.22} \\
 &= (b * d) && \text{postulat IVA}
 \end{aligned}$$

Karena $(a * c) * (b * d) = a * c$ dan $(a * c) \# (b * d) = b \# d$, maka $a * c \leq b * d$. Jadi terbukti jika $a \leq b$ dan $c \leq d$, maka $a * c \leq b * d$.

Contoh:

Diketahui himpunan faktor positif bilangan 32, yaitu $L = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$.

Ambil 1, 2, 4, 8 anggota L , dengan $1 \leq 4$ yang berarti $(1, 4) = 1$, dan $[1, 4] = 4$,

dan dengan $2 \leq 8$ yang berarti $(2, 8) = 2$ dan $[2, 8] = 8$. Karena 1, 2, 4, 8 anggota

latis L maka berlaku sifat komutatif dan asosiatif, sehingga

$$\begin{aligned}
((1,2),(4,8)) &= (1,(2,4),8) \\
&= (1,(4,2),8) \\
&= ((1,4),(2,8)) \\
&= (1,2)
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
[(1,2),(4,8)] &= ([1,(4,8)],[2,(4,8)]) \\
&= (([1,4],[1,8]),([2,4],[2,8])) \\
&= (([1,4],[2,4]),([1,8],[2,8])) \\
&= ((4,[2,4]),([1,8],8)) \\
&= (4,8)
\end{aligned}$$

Jadi, $(1,2) \leq (4,8)$ untuk $1, 2, 4, 8 \in L$ dengan $1 \leq 4$ dan $2 \leq 8$.

Teorema 3.2 (Dualitas Teorema 3.1)

Jika dalam suatu latris $a \geq b$ dan $c \geq d$, maka $a \# c \geq b \# d$ (Sukardjono, 2002:67).

Bukti:

Karena $a \geq b$ dan $c \geq d$, maka menurut dualitas Definisi 2.22 $a * b = b$, $a \# b = a$, $c * d = d$, dan $c \# d = c$. Sehingga

$$\begin{aligned}
(a \# c) * (b \# d) &= (a * (b \# d)) \# (c * (b \# d)) && \text{Definisi 2.11 (d)} \\
&= ((a * b) \# (a * d)) \# ((c * b) \# (c * d)) && \text{Definisi 2.11 (d)} \\
&= (a * b) \# ((a * d) \# (c * b)) \# (c * d) && \text{postulat IIIB} \\
&= (a * b) \# ((c * b) \# (a * d)) \# (c * d) && \text{postulat IIB} \\
&= ((a * b) \# (c * b)) \# ((a * d) \# (c * d)) && \text{postulat IIIB} \\
&= (b \# (c * b)) \# ((a * d) \# d) && \text{Definisi 2.22}
\end{aligned}$$

$$= (b \# d) \quad \text{postulat IVB}$$

dan

$$\begin{aligned} (a \# c) \# (b \# d) &= ((a \# c) \# b) \# d && \text{menurut postulat IIIB} \\ &= (a \# (c \# b)) \# d && \text{menurut postulat IIIB} \\ &= (a \# (b \# c)) \# d && \text{menurut postulat IIB} \\ &= ((a \# b) \# c) \# d && \text{menurut postulat IIIB} \\ &= (a \# b) \# (c \# d) && \text{menurut postulat IIIB} \\ &= a \# c && \text{dualitas Definisi 2.22} \end{aligned}$$

Karena $(a \# c) * (b \# d) = b * d$ dan $(a \# c) \# (b \# d) = a \# c$, maka $a \# c \geq b \# d$. Jadi, terbukti jika $a \geq b$ dan $c \geq d$, maka $a \# c \geq b \# d$.

Contoh:

Diketahui himpunan faktor positif bilangan 32, yaitu $L = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$.

Ambil 1, 2, 4, 8 anggota dari L , dengan $2 \geq 1$ yang berarti $(2, 1) = 1$ dan $[2, 1] = 2$, dan dengan $8 \geq 4$ yang berarti $(8, 4) = 4$ dan $[8, 4] = 8$. Karena 1, 2, 4, 8 anggota latis L maka berlaku sifat komutatif dan asosiatif, sehingga

$$\begin{aligned} ([2, 8], [1, 4]) &= [(2, [1, 4]), (8, [1, 4])] \\ &= [[(2, 1), (8, 1)], [(2, 4), (8, 4)]] \\ &= [[1, (8, 1)], [(2, 4), 4]] \\ &= [1, 4] \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} [[2, 8], [1, 4]] &= [2, [8, 1], 4] \\ &= [2, [1, 8], 4] \\ &= [[2, 1], [8, 4]] \end{aligned}$$

$$= [2, 8]$$

Jadi, $[2, 8] \geq [1, 4]$ untuk $1, 2, 4, 8 \in L$ dengan $2 \geq 1$ dan $8 \geq 4$.

Teorema 3.3 (Sifat Distributif Ketaksamaan)

Untuk a, b, c dalam sebarang lattice $a * (b \# c) \geq (a * b) \# (a * c)$

(Sukardjono, 2002:71).

Bukti:

Pertama akan dibuktikan untuk $a * (b \# c) \geq (a * b)$.

Pada Teorema 2.7 untuk sebarang $a, b \in L$ berlaku,

$$a \geq a * b$$

dan pada Teorema 2.8 dan Teorema 2.9 untuk sebarang $a, b, c \in L$ berlaku masing-masing,

$$b \# c \geq b$$

$$b \geq a * b$$

maka,

$$(b \# c) \geq b \geq a * b$$

Karena $a \geq a * b$ dan $b \# c \geq a * b$, menurut Teorema 3.1 maka,

$$a * (b \# c) \geq (a * b) * (a * b)$$

dan karena berlaku sifat idempoten pada L , sehingga $(a * b) * (a * b) = a * b$

maka,

$$a * (b \# c) \geq a * b$$

Selanjutnya akan dibuktikan untuk $a * (b \# c) \geq (a * c)$.

Pada Teorema 2.7 untuk sebarang $a, c \in L$ berlaku,

$$a \geq a * c$$

dan pada Teorema 2.10 dan Teorema 2.11 untuk sebarang $a, b, c \in L$ berlaku

masing-masing,

$$b \# c \geq c$$

$$c \geq a * c$$

maka,

$$b \# c \geq c \geq a * c$$

Karena $a \geq a * c$ dan $b \# c \geq a * c$ menurut Teorema 3.1 maka,

$$a * (b \# c) \geq (a * c) * (a * c)$$

dan karena berlaku sifat idempoten pada L , sehingga $(a * c) * (a * c) = a * c$ maka,

$$a * (b \# c) \geq a * c$$

Dengan demikian didapatkan

$$a * (b \# c) \geq a * b$$

$$a * (b \# c) \geq a * c$$

maka menurut Teorema 3.2

$$(a * (b \# c)) \# (a * (b \# c)) \geq (a * b) \# (a * c)$$

Karena berlaku sifat idempoten pada L , sehingga

$$(a * (b \# c)) \# (a * (b \# c)) = a * (b \# c)$$

maka,

$$a * (b \# c) \geq (a * b) \# (a * c)$$

Jadi, terbukti bahwa $a * (b \# c) \geq (a * b) \# (a * c)$.

Contoh

Diketahui himpunan faktor positif bilangan 32, yaitu $L = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$.

Didefinisikan operasi $*$ adalah FPB dan $\#$ adalah KPK atau dapat dituliskan

$a * b = (a, b)$ dan $a \# b = [a, b]$. Ambil sebarang anggota L , misalkan ambil 4, 8,

dan 16, sehingga

$$(4, [8, 16]) = (4, 16) = 4$$

dan

$$[(4, 8), (4, 16)] = [4, 4] = 4$$

Jadi, untuk 4, 8, dan 16 anggota L maka

$$(4, [8, 16]) \geq [(4, 8), (4, 16)]$$

$$4 \geq 4$$

Teorema 3.4 (Dual Distributif Ketaksamaan)

Untuk a, b, c dalam sebarang latris $a \# (b * c) \leq (a \# b) * (a \# c)$

(Sukardjono, 2002:71).

Bukti:

Pertama akan dibuktikan untuk $a \# (b * c) \leq (a \# b)$.

Pada Teorema 2.8 untuk setiap $a, b \in L$ berlaku

$$a \leq a \# b$$

dan pada Teorema 2.7 dan Teorema 2.10 untuk semua $a, b, c \in L$ berlaku masing-masing,

$$b * c \leq b$$

$$b \leq a \# b$$

maka,

$$b * c \leq a \# b$$

Karena $a \leq a \# b$ dan $b * c \leq a \# b$ menurut Teorema 3.2 maka,

$$a \# (b * c) \leq (a \# b) \# (a \# b)$$

dan karena berlaku sifat idempoten pada L sehingga $(a \# b) \# (a \# b) = a \# b$

maka,

$$a \# (b * c) \leq a \# b$$

Selanjutnya akan dibuktikan untuk $a \# (b * c) \leq (a \# c)$.

Pada Teorema 2.8 untuk setiap $a, c \in L$ berlaku,

$$a \leq a \# c$$

dan pada Teorema 2.9 dan Teorema 2.10 untuk setiap $a, b, c \in L$ berlaku,

$$(b * c) \leq c$$

$$c \leq a \# c$$

maka,

$$(b * c) \leq a \# c$$

Karena $a \leq a \# c$ dan $b * c \leq a \# c$ menurut Teorema 3.2 maka,

$$a \# (b * c) \leq (a \# c) \# (a \# c)$$

dan karena berlaku sifat idempoten pada L sehingga $(a \# c) \# (a \# c) = a \# c$

maka,

$$a \# (b * c) \leq a \# c$$

Dengan demikian didapatkan

$$a \# (b * c) \leq a \# b$$

$$a \# (b * c) \leq a \# c$$

Menurut Teorema 3.1 maka

$$(a \# (b * c)) * (a \# (b * c)) \leq (a \# b)(a \# c)$$

Karena berlaku sifat idempoten pada L sehingga $(a \# (b * c)) * (a \# (b * c)) =$

$a \# (b * c)$ maka,

$$a \# (b * c) \leq (a \# b) * (a \# c)$$

Jadi, terbukti bahwa $a \# (b * c) \leq (a \# b) * (a \# c)$ dan merupakan dualitas dari

Teorema 3.13 sifat distributif ketaksamaan.

Contoh

Diketahui himpunan faktor positif bilangan 32, yaitu $L = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$. Didefinisikan operasi $*$ adalah FPB dan $\#$ adalah KPK atau dapat dituliskan $a * b = (a, b)$ dan $a \# b = [a, b]$. Ambil sebarang anggota L , misalkan ambil 4, 8, dan 16, sehingga

$$[4, (8, 16)] = [4, 8] = 8$$

dan

$$([4, 8], [4, 16]) = (8, 16) = 8$$

Jadi, untuk 4, 8, dan 16 anggota L maka

$$[4, (8, 16)] \leq ([4, 8], [4, 16])$$

$$8 \leq 8$$

Teorema 3.5

Untuk sebarang a, b, c dalam sebarang lattice $(a \# b) * (b \# c) * (a \# c) \geq (a * b) \# (b * c) \# (a * c)$ (Sukardjono, 2002:71).

Bukti:

Menurut Teorema 2.8 untuk setiap $a, b, c \in L$ berlaku

$$a \# b \geq a \tag{i}$$

$$b \# c \geq b \tag{ii}$$

$$c \# a \geq c \tag{iii}$$

Menurut Teorema 2.10 untuk setiap $a, b, c \in L$ berlaku

$$a \# b \geq b \tag{i}$$

$$b \# c \geq c \tag{ii}$$

$$c \# a \geq a \tag{iii}$$

1. Akan dibuktikan untuk $(a \# b) * (b \# c) * (c \# a) \geq a * b$

Menurut Teorema 2.8 (i), (ii), dan Teorema 3.1 berlaku

$$(a \# b) * (b \# c) \geq a * b$$

dan menurut Teorema 2.8 (ii), Teorema 2.10 (iii), dan Teorema 3.1 berlaku

$$(b \# c) * (c \# a) \geq b * a$$

Dengan demikian didapatkan

$$(a \# b) * (b \# c) \geq a * b$$

$$(b \# c) * (c \# a) \geq b * a$$

Sehingga menurut Teorema 3.1 berlaku

$$(a \# b) * (b \# c) * (b \# c) * (c \# a) \geq (a * b) * (b * a)$$

Karena berlaku sifat idempoten pada L sehingga $(b \# c) * (b \# c) = b \# c$ dan

$(a * b) * (a * b) = a * b$ maka,

$$(a \# b) * (b \# c) * (c \# a) \geq a * b$$

Jadi, terbukti untuk $(a \# b) * (b \# c) * (b \# c) * (c \# a) \geq a * b$.

2. Akan dibuktikan untuk $(a \# b) * (b \# c) * (c \# a) \geq b * c$

Menurut Teorema 2.10 (i), (ii), dan Teorema 3.1 berlaku

$$(a \# b) * (b \# c) \geq b * c$$

dan menurut Teorema 2.8 (ii), (iii) dan Teorema 3.1 berlaku

$$(b \# c) * (c \# a) \geq b * c$$

Dengan demikian didapatkan

$$(a \# b) * (b \# c) \geq b * c$$

$$(b \# c) * (c \# a) \geq b * c$$

Sehingga menurut Teorema 3.1 berlaku

$$(a \# b) * (b \# c) * (b \# c) * (c \# a) \geq (b * c) * (b * c)$$

Karena berlaku sifat idempoten pada L , sehingga $(b \# c) * (b \# c) = b \# c$ dan $(b * c) * (b * c) = b * c$ maka,

$$(a \# b) * (b \# c) * (c \# a) \geq b * c$$

Jadi, terbukti untuk $(a \# b) * (b \# c) * (c \# a) \geq b * c$.

3. Akan dibuktikan untuk $(a \# b) * (b \# c) * (c \# a) \geq c * a$

Menurut Teorema 2.8 (i), Teorema 2.10 (ii), dan Teorema 3.1 berlaku

$$(a \# b) * (b \# c) \geq a * c$$

dan menurut Teorema 2.10 (ii), (iii), dan Teorema 3.1 berlaku

$$(b \# c) * (a \# c) \geq c * a$$

Dengan demikian didapatkan

$$(a \# b) * (b \# c) \geq a * c$$

$$(b \# c) * (a \# c) \geq c * a$$

Sehingga menurut Teorema 3.1 berlaku

$$(a \# b) * (b \# c) * (b \# c) * (a \# c) \geq (a * c) * (c * a)$$

Karena berlaku sifat idempoten pada L sehingga $(b \# c) * (b \# c) = b \# c$ dan $(a * c) * (a * c) = a * c$ maka,

$$(a \# b) * (b \# c) * (a \# c) \geq c * a$$

Jadi, terbukti untuk $(a \# b) * (b \# c) * (a \# c) \geq c * a$

Dengan demikian berdasarkan nomor 1, 2, dan 3 didapatkan

$$(a \# b) * (b \# c) * (a \# c) \geq a * b$$

$$(a \# b) * (b \# c) * (a \# c) \geq b * c$$

$$(a \# b) * (b \# c) * (a \# c) \geq c * a$$

Sehingga menurut Teorema 3.2 berlaku

$$\begin{aligned} & ((a \# b) * (b \# c) * (a \# c)) * ((a \# b) * (b \# c) * (a \# c)) \\ & * ((a \# b) * (b \# c) * (a \# c)) \geq (a * b) * (b * c) * (c * a) \end{aligned}$$

Karena berlaku sifat idempoten pada L sehingga

$$\begin{aligned} & ((a \# b) * (b \# c) * (a \# c)) * ((a \# b) * (b \# c) * (a \# c)) \\ & * ((a \# b) * (b \# c) * (a \# c)) = (a \# b) * (b \# c) * (a \# c) \end{aligned}$$

Maka,

$$(a \# b) * (b \# c) * (a \# c) \geq (a * b) * (b * c) * (c * a)$$

Jadi terbukti untuk setiap $a, b, c \in L$, $(a \# b) * (b \# c) * (a \# c) \geq (a * b) * (b * c) * (c * a)$.

Teorema 3.6

Untuk sebarang a, b, c dalam sebarang latris $(a * b) \# (b * c) \# (a * c) \leq (a \# b) * (b \# c) * (c \# a)$ (Sukardjono:2002:72).

Bukti:

Menurut Teorema 2.7 untuk setiap $a, b, c \in L$ berlaku,

$$a * b \leq a \tag{i}$$

$$b * c \leq b \tag{ii}$$

$$c * a \leq c \tag{iii}$$

Menurut Teorema 2.9 untuk setiap $a, b, c \in L$ berlaku,

$$a * b \leq b \tag{i}$$

$$b * c \leq c \tag{ii}$$

$$c * a \leq a \tag{iii}$$

1. Akan dibuktikan untuk $(a * b) \# (b * c) \# (c * a) \leq (a * b)$

Menurut Teorema 2.7 (i), (ii), dan Teorema 3.2 berlaku

$$(a * b) \# (b * c) \leq a \# b$$

dan menurut Teorema 2.7 (ii), Teorema 2.9 (iii), dan Teorema 3.2 berlaku

$$(b * c) \# (c * a) \leq b \# a$$

Dengan demikian didapat

$$(a * b) \# (b * c) \leq a \# b$$

$$(b * c) \# (c * a) \leq b \# a$$

Sehingga menurut Teorema 3.2 berlaku

$$(a * b) \# (b * c) \# (b * c) \# (c * a) \leq (a \# b) \# (b \# a)$$

Karena berlaku sifat idempoten pada L sehingga $(b * c) \# (b * c) = b * c$ dan

$(a \# b) \# (b \# a) = a \# b$ maka,

$$(a * b) \# (b * c) \# (c * a) \leq a \# b$$

Jadi, terbukti untuk $(a * b) \# (b * c) \# (c * a) \leq a \# b$.

2. Akan dibuktikan untuk $(a * b) \# (b * c) \# (c * a) \leq b \# c$

Menurut Teorema 2.9 (i), (ii), dan Teorema 3.2 berlaku

$$(a * b) \# (b * c) \leq b \# c$$

dan menurut Teorema 2.7 (ii), (iii), dan Teorema 3.2 berlaku

$$(b * c) \# (c * a) \leq b \# c$$

Dengan demikian didapatkan

$$(a * b) \# (b * c) \leq b \# c$$

$$(b * c) \# (c * a) \leq b \# c$$

Sehingga menurut Teorema 3.2 berlaku

$$(a * b) \# (b * c) \# (b * c) \# (c * a) \leq (b \# c) \# (b \# c)$$

Karena berlaku sifat idempoten pada L sehingga $(b * c) \# (b * c) = (b * c)$ dan $(b \# c) \# (b \# c) = b \# c$ maka,

$$(a * b) \# (b * c) \# (c * a) \leq b \# c$$

Jadi, terbukti untuk $(a * b) \# (b * c) \# (c * a) \leq b \# c$.

3. Akan dibuktikan untuk $(a * b) \# (b * c) \# (c * a) \leq c \# a$

Menurut Teorema 2.7 (i), Teorema 2.9 (ii) dan Teorema 3.2 berlaku

$$(a * b) \# (b * c) \leq a \# c$$

dan menurut Teorema 2.9 (ii), (iii), dan Teorema 3.2 berlaku

$$(b * c) \# (c * a) \leq c \# a$$

Dengan demikian didapatkan

$$(a * b) \# (b * c) \leq a \# c$$

$$(b * c) \# (c * a) \leq c \# a$$

Sehingga menurut Teorema 3.2 berlaku

$$(a * b) \# (b * c) \# (b * c) \# (c * a) \leq (a \# c) \# (c \# a)$$

Karena berlaku sifat idempoten pada L , sehingga $(b * c) \# (b * c) = b * c$ dan $a \# c \# c \# a = c \# a$ maka,

$$(a * b) \# (b * c) \# (c * a) \leq c \# a$$

Jadi, terbukti bahwa $(a * b) \# (b * c) \# (c * a) \leq c \# a$.

Dengan demikian berdasarkan 1, 2, dan 3 didapatkan

$$(a * b) \# (b * c) \# (c * a) \leq a \# b$$

$$(a * b) \# (b * c) \# (c * a) \leq b \# c$$

$$(a * b) \# (b * c) \# (c * a) \leq c \# a$$

Sehingga menurut Teorema 3.1 berlaku

$$\begin{aligned} & ((a * b) \# (b * c) \# (c * a)) * ((a * b) \# (b * c) \# (c * a)) \\ & * ((a * b) \# (b * c) \# (c * a)) \leq (a \# b) * (b \# c) * (c \# a) \end{aligned}$$

Karena berlaku sifat idempoten pada L sehingga

$$\begin{aligned} & ((a * b) \# (b * c) \# (c * a)) * ((a * b) \# (b * c) \# (c * a)) \\ & * ((a * b) \# (b * c) \# (c * a)) = (a * b) \# (b * c) \# (c * a) \end{aligned}$$

Maka,

$$(a * b) \# (b * c) \# (c * a) \leq (a \# b) * (b \# c) * (c \# a)$$

Jadi, terbukti untuk $(a * b) \# (b * c) \# (c * a) \leq (a \# b) * (b \# c) * (c \# a)$.

Contoh:

Diketahui himpunan faktor positif bilangan 32, yaitu $L = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$.

Didefinisikan operasi $*$ adalah FPB dan $\#$ adalah KPK atau dapat dituliskan

$a * b = (a, b)$ dan $a \# b = [a, b]$. Ambil sebarang anggota L , misalkan ambil 4, 8,

dan 16, sehingga

$$[(4, 8), (8, 16), (4, 16)] = [4, 8, 4] = 8$$

dan

$$([4, 8], [8, 16], [4, 16]) = (8, 16, 16) = 8$$

Jadi, untuk 4, 8, dan 16 anggota L maka

$$[(4, 8), (8, 16), (4, 16)] \leq ([4, 8], [8, 16], [4, 16])$$

$$8 \leq 8$$

Teorema 3.7 (Ketaksamaan Modular)

Untuk a, b, c dalam sebarang lattice, dengan $a \geq b$ dan c sebarang, berlaku

$$a * (b \# c) \geq b \# (a * c) \text{ (Sukardjono, 2001:72).}$$

Bukti:

Diketahui dari Teorema 3.3 yaitu

$$a * (b \# c) \geq (a * b) \# (a * c)$$

Jika $a \geq b$, maka berlaku $a * b = b$, sehingga terbukti bahwa

$$a * (b \# c) \geq b \# (a * c)$$

Contoh:

Diketahui himpunan faktor positif bilangan 32, yaitu $L = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$.

Ambil sebarang anggota L dengan $a \geq b$ dan c sebarang, misalkan ambil $32 \geq 8$

berarti $(32, 8) = 8$ dan $[32, 8] = 32$, dan $c = 4$. Sehingga

$$\begin{aligned} (32, [8, 4]) &= [(32, 8), (32, 4)] \\ &= [8, 4] \\ &= 8 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} [8, (32, 4)] &= ([8, 32], [8, 4]) \\ &= (32, 8) \\ &= 8 \end{aligned}$$

Jadi, untuk $32 \geq 8$ dan $c = 4$ anggota L maka $(32, [8, 4]) \geq [8, (32, 4)]$.

Teorema 3. 8 (Dual Ketaksamaan Modular)

Untuk a, b, c dalam sebarang latris, dengan $a \leq b$ dan c sebarang, berlaku

$$a \# (b * c) \leq b * (a \# c) \text{ (Sukardjono, 2002:72).}$$

Bukti:

Diketahui dari Teorema 3.4 yaitu

$$a \# (b * c) \leq (a \# b) * (a \# c)$$

Jika $a \leq b$, maka berlaku $a \# b = b$, sehingga terbukti bahwa

$$a \# (b * c) \leq b * (a \# c)$$

Contoh:

Diketahui himpunan faktor positif bilangan 32, yaitu $L = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$.

Ambil sebarang anggota L dengan $a \leq b$ dan c sebarang, misalkan ambil $2 \leq 8$ yang berarti $(2, 8) = 2$ dan $[2, 8] = 8$, dan $c = 16$. Sehingga

$$\begin{aligned} [2, (8, 16)] &= ([2, 8], [2, 16]) \\ &= (8, 16) \\ &= 8 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} (8, [2, 16]) &= [(8, 2), (8, 16)] \\ &= [2, 8] \\ &= 8 \end{aligned}$$

Jadi, untuk $2 \leq 8$ dan $c = 16$ anggota L maka $[2, (8, 16)] \leq (8, [2, 16])$.

3.2 Kajian Dualitas dalam Al-Quran

Dualitas merupakan hukum alam yang tampak wujudnya pada setiap sisi alam yang ada di sekitar. Di antaranya ada yang dapat dipahami dan ada yang belum dapat dipahami. Dualitas tidak hanya terbatas pada apa yang ada sekarang tetapi juga mencakup peristiwa baru yang diperkirakan akan terjadi (Allam, dkk., 2005:1). Contoh-contoh dualitas telah diterangkan dalam al-Quran seperti dalam surat al-Insyirah ayat 6 di bawah ini

Allah Swt. berfirman dalam surat al-Insyirah ayat 6 berikut:

إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا

“Sesungguhnya, sesudah kesulitan itu ada kemudahan.”

“Wahai Nabiullah. janganlah engkau bersedih karena banyak kesulitan dan rintangan. Karena semua kesulitan dan rintangan itu akan berubah menjadi kemudahan dan kelapangan”. Sebenarnya ayat ini tidak hanya ditujukan kepada Nabiullah. saja, ayat ini juga berlaku bagi semua generasi manusia. Allah Swt. pasti akan memberikan kunci pembebasan pada suatu jalan yang menghantarkan mereka pada kemudahan dan kebahagiaan. Jadi, solusi atau penyingkapan masalah tidak semata-mata datang setelah kesulitan, tetapi kemudahan memang disertai dengannya, atau dengan kata lain, dalam setiap kesulitan yang dihadapi selalu disertakan kemudahan di dalamnya (Imani, 2006c).

Kesulitan selalu dialami setiap manusia dalam belajar, bekerja, dan banyak hal yang lainnya. Kesulitan banyak macam bentuknya seperti kesulitan dalam belajar, di antaranya dapat berbentuk diganggu teman, dan susah menghafal. Kesulitan dalam bekerja juga banyak macam bentuknya, seperti teman yang iri dengan kesuksesan karir, kerja yang berpenghasilan kurang cukup, dan lain sebagainya. Namun, seperti dalam firman Allah Swt. surat al-Insyirah ayat 6, setiap kesulitan pasti ada kemudahan. Di sisi kesulitan dalam belajar juga terdapat kemudahan yang menyertai, seperti jika mendapat kesulitan karena susah menghafal, selanjutnya akan belajar menghafal sampai dapat menghafal dengan baik, sehingga akhirnya diberi kemudahan dalam menghafal. Jika mendapat kesulitan dalam bekerja seperti penghasilan yang kurang cukup, dari hal ini dapat dipelajari menabung dan menggunakan uang dengan baik, sehingga akhirnya uang yang terkumpul dapat mempermudah hal-hal yang lain. Begitulah kemudahan yang mengiring kesulitan.

Selain surat al-Insyirah ayat 6 yang menjelaskan tentang dualitas kesulitan dan kemudahan, terdapat ayat lain yang juga menerangkan tentang dualitas yaitu surat al-Baqarah ayat 258.

Allah Swt berfirman dalam surah al-Baqarah ayat 28 berikut:

كَيْفَ نَكْفُرُونَ بِاللَّهِ وَكُنْتُمْ أَمْوَاتًا فَأَحْيَاكُمْ ثُمَّ يُمِيتُكُمْ ثُمَّ يُحْيِيكُمْ ثُمَّ إِلَيْهِ تُرْجَعُونَ

“Ya Rabb kami, engkau telah mematikan kami dua kali dan telah menghidupkan kami dua kali” (QS. al-Mu'min:11).

Dalam surat al-Mu'min ayat 11 Allah Swt. berfirman untuk menunjukkan keberadaan dan kekuasaan-Nya serta menegaskan bahwa Dialah Tuhan pencipta dan pengatur hamba-hamba-Nya. Diterangkan juga mengenai Allah Swt. yang menghidupkan dan mematikan. Ibnu ‘Abbas ad-Dhahak mengatakan: “Dulu, sebelum Dia menciptakan kamu, kamu adalah tanah, dan inilah kematian. Kemudian Dia menghidupkan kamu sehingga terciptalah kamu, dan inilah kehidupan. Setelah itu Dia mematikan kamu kembali, sehingga kamu kembali ke alam kubur, dan itulah kematian yang kedua. Selanjutnya Dia akan membangkitkan kamu pada hari kiamat kelak, dan inilah kehidupan yang kedua.” (Imani, 2006b).

Dengan demikian didapatkan dualitas kesulitan dan kemudahan dan dualitas kehidupan dan kematian. Sebagai contoh lain juga yang terdapat dalam al-Quran yaitu dualitas kebaikan dan kejelekan, dualitas roh dan jasad, dan masih banyak lagi yang lainnya. Jadi konsep dualitas sudah banyak dijelaskan dalam al-Quran.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan, diperoleh hasil sebagai berikut:

1. Misalkan $\forall a, b, c \in L$ berlaku dualitas sifat-sifat pada latris L sebagai berikut:

a. Jika dalam suatu latris $a \leq b$ dan $c \leq d$, maka $a * c \leq b * d$.

b. Jika dalam suatu latris $a \geq b$ dan $c \geq d$, maka $a \# c \geq b \# d$.

c. Untuk setiap $a, b, c \in L$, $a * (b \# c) \geq (a * b) \# (a * c)$.

d. Untuk setiap $a, b, c \in L$, $a \# (b * c) \leq (a \# b) * (a \# c)$.

e. Untuk setiap $a, b, c \in L$,

$$(a \# b) * (b \# c) * (a \# c) \geq (a * b) \# (b * c) \# (a * c)$$

f. Untuk setiap $a, b, c \in L$,

$$(a * b) \# (b * c) \# (a * c) \leq (a \# b) * (b \# c) * (c \# a)$$

g. $a * (b \# c) \geq b \# (a * c)$ dengan $a \geq b$ dan c sebarang.

h. $a \# (b * c) \leq b * (a \# c)$ dengan $a \leq b$ dan c sebarang.

4.2 Saran

Dalam penelitian ini, penulis hanya membahas dualitas pada latris dengan cara memberikan definisi beserta contoh-contoh yang berkaitan dengan dualitas pada latris, serta membuktikan sifat-sifat yang berkaitan dengan dualitas pada latris. Bagi penelitian selanjutnya dapat dikembangkan kajian dualitas pada latris dengan memberikan lebih banyak contoh-contoh, sehingga membentuk suatu teorema atau sifat-sifat baru yang berkaitan dengan dualitas pada latris.

DAFTAR RUJUKAN

- Abdussakir. 2014. *Matematika dalam Al-Qur'an*. Malang: UIN-Malang Press.
- Allam, A.K, Mukti, A.R., dan Abdullah. E. 2005. *Al-Quran dalam Keseimbangan Alam dan Kehidupan*. Jakarta: Gema Insani.
- Ar-Rifa'i, M.N. 1999. *Ringkasan Tafsir Ibnu Katsir Jilid I*. Jakarta: Gema Ismani.
- Desriyati, W., Mashadi, Gemawati, S. 2015. Cara Lain Menentukan FPB dan KPK. *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, 1 (1): 52-55.
- Fitriyah, L. 2015. *Ideal Pada Latis*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Gratzer, G. 2011. *Lattice Theory Foundation*. Canada: Springer Basel.
- Imani, A.K.F. 2006a. *Tafsir Nurul Quran, Jilid 3*. Penerbit Al-Huda Jakarta.
- Imani, A.K.F. 2006b. *Tafsir Nurul Quran, Jilid 19*. Penerbit Al-Huda Jakarta.
- Imani, A.K.F. 2006c. *Tafsir Nurul Quran, Jilid 20*. Penerbit Al-Huda Jakarta.
- Limbong A. & Prijono A. 2006. *Matematika Diskrit*. Bandung: Penerbit CV. Utomo Bandung.
- Lipschutz, S. 1995. *Teori Himpunan*. Bandung: ITB Bandung.
- Lipschutz, S. 1988. *Matematika Hingga*. Jakarta: Erlangga.
- Mas, oed, F. 2013. *Struktur Aljabar*. Jakarta: Akademia Permata.
- Muhsetyo, G., Subari, dan Suhadiyono. 1985. *Pengantar Ilmu Bilangan*. Surabaya: Sinar Wijaya
- Sukardjono. 2002. *Teori Latis*. Yogyakarta: ANDI.
- Sukirman. 2005. *Pengantar Struktur Aljabar Abstrak*. Malang: Universitas Negeri Malang.
- Wahidah, F. 2017. *Homomorfisma Pada Latis*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Yuhatriati, 2012 Pendekatan Realistik dalam Pembelajaran Matematika. *Jurnal Peluang*, 1 (1): 81-87.



**KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933**

RIWAYAT HIDUP

Siti Mariam Oktia Marlina dilahirkan di Jember pada tanggal 02 Oktober 1996, anak pertama dari pasangan Supriyadi dan Purwati. Pendidikan pertama diselesaikan di SD Muhammadiyah 4 Denpasar Bali yang ditamatkan pada tahun 2008. Pada tahun yang sama, ia melanjutkan pendidikannya di Pondok Pesantren Salafiyah Syafi'iyah Sukorejo Situbondo dan sekaligus menempuh sekolah menengah pertama di SMP Ibrahimy 1 Sukorejo Situbondo dan diselesaikan pada tahun 2011. Kemudian ia melanjutkan pendidikan menengah atas di SMA Ibrahimy 1 Sukorejo Situbondo dan menamatkan pendidikan tersebut pada tahun 2014. Jenjang pendidikan berikutnya ditempuh di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, melalui jalur SNMPTN dengan mengambil Jurusan Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi.



BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Siti Mariam Oktia Marlina
NIM : 14610011
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Dualitas Sifat-sifat Pada Latis
Pembimbing I : Evawati Alisah, M.Pd
Pembimbing II : Dr. Abdussakir, M.Pd

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan	
1	22 Mei 2018	Konsultasi Bab I	1.	
2	25 Juli 2018	Konsultasi Bab II dan III		2.
3	31 Juli 2018	Konsultasi Agama Bab I dan II	3.	
4	9 Agustus 2018	Konsultasi Agama Bab III		4.
5	18 Oktober 2018	Konsultasi Bab III	5.	
6	1 November 2018	Konsultasi Bab III dan IV		6.
7	2 November 2018	Konsultasi Bab III	7.	
8	5 November 2018	Konsultasi Bab IV		8.
9	8 November 2018	Konsultasi Keseluruhan	9.	
10	9 November 2018	Konsultasi Agama Keseluruhan		10.
11	12 November 2018	Acc Agama Keseluruhan	11	

Malang, 12 November 2018
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 2003 12 1 001

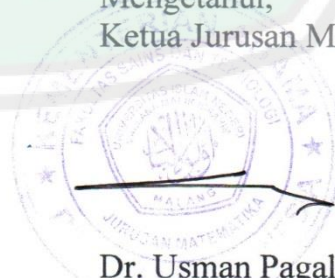


BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Siti Mariam Oktia Marlina
NIM : 14610011
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Dualitas Sifat-sifat Pada Latis
Pembimbing I : Evawati Alisah, M.Pd
Pembimbing II : Dr. Abdussakir, M.Pd

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1	22 Mei 2018	Konsultasi Bab I	1.
2	25 Juli 2018	Konsultasi Bab II dan III	2.
3	31 Juli 2018	Konsultasi Agama Bab I dan II	3.
4	9 Agustus 2018	Konsultasi Agama Bab III	4.
5	18 Oktober 2018	Konsultasi Bab III	5.
6	1 November 2018	Konsultasi Bab III dan IV	6.
7	2 November 2018	Konsultasi Bab III	7.
8	5 November 2018	Konsultasi Bab IV	8.
9	8 November 2018	Konsultasi Keseluruhan	9.
10	9 November 2018	Konsultasi Agama Keseluruhan	10.
11	12 November 2018	Acc Agama Keseluruhan	11.

Malang, 12 November 2018
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 2003 12 1 001