KONGRUENSI LATIS

SKRIPSI

OLEH
AMINATUL MARDIYAH
NIM. 13610120

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018

KONGRUENSI LATIS

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Aminatul Mardiyah
NIM. 13610120

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018

KONGRUENSI LATIS

SKRIPSI

Oleh
Aminatul Mardiyah
NIM. 13610120

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 16 November 2017

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Evawati Alisah, M.Pd	Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si
NIP. 19720604 199903 2 001	NIP. 19770521 200501 2 004

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

KONGRUENSI LATIS

SKRIPSI

Oleh
Aminatul Mardiyah
NIM. 13610120

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 23 November 2017

Penguji Utama	: Dr. Abdussakir, M.Pd	....
Ketua Penguji	: Hairur Rahman, M.Si	....
Sekretaris Penguji	: Evawati Alisah, M.Pd	....
Anggota Penguji	: Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Aminatul Mardiyah

NIM : 13610120

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Kongruensi Latis

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pemikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pemikiran saya sendiri, kecuali dengan mencamtumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 26 September 2018
Yang membuat pernyataan

METERAI TEMPEL
E70A7AFF485543033
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Aminatul Mardiyah
NIM. 13610120

MOTO

خَيْرُ النَّاسِ أَنْفَعُهُمْ لِلنَّاسِ

"Sebaik-baik manusia adalah manusia yang bermanfaat bagi manusia yang lain"

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda Muhammad Zainuri dan ibunda Luluk Halimah, kakak Muhammad Shofi Fuadi dan Najla Muflihin, adik tersayang Muhammad Masruril Hamid dan Nafi Atul Ummah, serta teman hidup Muhammad Nuris Fakhrurrozi yang selalu memberikan dukungan, doa, dan motivasi bagi penulis.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Puji syukur ke hadirat Allah Swt yang telah menganugerahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan kegiatan dan menyusun penelitian dengan baik dan lancar. Shalawat dan salam senantiasa dihaturkan kepada nabi Muhammad Saw yang telah memberikan inspirasi kepada seluruh umat manusia tidak terkecuali penulis, untuk berkarya dengan penuh semangat berlandaskan keagungan moral dan spiritual. Ucapan terima kasihpun tidak luput dihaturkan kepada semua pihak yang telah mendukung lancarnya penyusunan penelitian ini. Dengan hormat penulis ucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. Abdul Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Evawati Alisah, M.Pd, selaku dosen pembimbing 1 yang senantiasa mengarahkan penulis dalam melakukan penelitian.
5. Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si, selaku dosen pembimbing 2 yang senantiasa mengarahkan penulis dalam melakukan penelitian.
6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang

terutama seluruh dosen yang telah memberikan bimbingan dalam perkuliahan.

7. Kedua orang tua dan seluruh keluarga yang memberikan dukungan berupa motivasi dan doa sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik.
8. Seluruh teman-teman “*subset*” angkatan 2013 dan keluarga besar “PPTQ Nurul-Furqon” yang selalu ada di kala senang dan sedih dalam rangka proses penyelesaikan penelitian ini.
9. Seluruh pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang turut membantu dalam penyelesaian penelitian ini.

Akhirnya penulis berharap, di balik penelitian ini dapat ditemukan sesuatu yang dapat memberikan manfaat dan wawasan yang lebih luas atau bahkan hikmah bagi penulis dan pembaca.

Wassalamu’alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, September 2018

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

ABSTRAK

Mardiyah, Aminatul. 2017. **Kongruensi Latis**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Evawati Alisah, M.Pd. (II) Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si.

Kata Kunci: Kongruensi, Relasi Ekuivalen, Latis, Kongruensi Latis.

Kongruensi Latis adalah apabila terdapat suatu relasi ekuivalen α pada suatu Latis L disebut kongruen jika dan hanya jika $x \equiv y \ (\mathrm{mod}\ \alpha)$ yang berarti bahwa, $\forall z;\ z + x \equiv z + y \ (\mathrm{mod}\ \alpha)$ dan $\forall z;\ z \times x \equiv z \times y \ (\mathrm{mod}\ \alpha)$. Misalkan unsur-unsur dari bilangan asli A yang didefinisikan sebagai $A = \{1, 3, 6\}$ adalah suatu latis. Selanjutnya dibuktikan bahwa latis tersebut memenuhi sifat-sifat pada relasi ekuivalen dan mengikuti sifat kongruensi pada definisi kongruensi latis.

Dalam tulisan ini akan dibahas mengenai bagaimanakah sifat dari kongruensi latis beserta buktinya. Metode yang digunakan adalah dengan menarik kesimpulan dari dua contoh definisi kongruensi latis, kemudian di analisis kesamaan dan perbedaan dari contoh tersebut. Selanjutnya akan dibuktikan sifat-sifat dari kongruensi latis yang telah ada.

Kesimpulan dari tulisan ini adalah, bahwasanya terdapat kongruensi latis yang memiliki sifat reflektif yaitu $a \equiv a \left(\mathrm{mod}\ (a, a)\right)$ dan sifat simetris yaitu $a \equiv b \left(\mathrm{mod}\ (a, b)\right)$ jika dan hanya jika $b \equiv a \left(\mathrm{mod}\ (b, a)\right)$. Bagi peneliti selanjutnya, dapat dikembangkan lebih lanjut kajian tentang kongruensi latis sehingga dapat menemukan sifat-sifat kongruensi latis yang baru.

ABSTRACT

Mardiyah, Aminatul. 2017. **Lattice Congruence**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Evawati Alisah, M.Pd. (II) Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si.

Keywords: Congruence, Equivalence Relation, Lattice, Lattice Congruence.

Lattice Congruence is an equivalence relation α on a lattice L is a congruence iff $x \equiv y \,(\mathrm{mod}\, \alpha)$ implies that, $\forall z;\ z + x \equiv y + z \,(\mathrm{mod}\, \alpha)$ and $\forall z;\ z \times x \equiv y \times z \,(\mathrm{mod}\, \alpha)$. Suppose the elements of natural numbers A defined as $A = \{1, 3, 6\}$ is a lattice. Furthermore, it is proven that the lattice satisfies the properties of the equivalence relation and follows the congruence character of the lattice congruence definition.

This paper discussed about how the nature of lattice congruence and the proof. The method used is to draw conclusions from two examples of the definition of lattice congruence, then the similarities and differences of the example will be analyzed. Furthermore, the properties of the existing lattice congruence will be proven.

The conclusion of this paper is that there exists a lattice congruence having the reflective property of $a \equiv a \left(\mathrm{mod}\, (a, a)\right)$ and the symmetrical property of $a \equiv b \left(\mathrm{mod}\, (a, b)\right)$ iff $b \equiv a \left(\mathrm{mod}\, (b, a)\right)$. For further research, further studies on lattice congruence can produce new properties of lattice congruence.

ملخص

المرضية، أمينة. ٢٠١٧. ***Lattice Congruence***. بحث جامعي. شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشريف: (١) ايفاواتي أليساح الماجستير (٢) أرى كسماستتى الماجستير.

الكلمات الرئيسية: *Congruence*، العلاقة المكافئة، *Lattice*، *Lattice Congruence*.

Lattice Congruence هو عندما هناك علاقة مكافئة إلى (α) من *L lattice* يدعى *congruence* إذا وفقط إذا $x \equiv y \pmod{\alpha}$ يعني أن $\forall z;\ z + x \equiv y + z \pmod{\alpha}$ و $\forall z;\ z \times x \equiv y \times z \pmod{\alpha}$. لنفترض أن عناصر الأرقام الطبيعية معرف بأنها $A = \{1, 3, 6\}$ هو *lattice*. وعلاوة على ذلك، فقد ثبت أن *lattice* يرضى خصائص علاقة مكافئة و يتبع الطابع *congruence* للتعريف *lattice congruence*.

في هذا البحث سوف تناقش حول كيفية طبيعة *lattice congruence* والأدلتها والطريقة المستخدمة هي استخلاص استنتاجات من مثالين لتعريف *lattice congruence*، ثم في تحليل التشابه و الاختلاف فى المثال. وعلاوة على ذلك، سيتم إثبات خصائص *lattice congruence* الموجود.

وخلاصة هذا البحث هي ان هناك *lattice congruence* له طبيعة عاكسة و هو $a \equiv a\ (\mathrm{mod}\ (a, a))$ ومتناظرة هو $a \equiv b\ (\mathrm{mod}\ (a, b))$ إذا وفقط إذا $b \equiv a\ (\mathrm{mod}\ (b, a))$. لمزيد من البحث، يمكن الاطلاع على مزيد من الدراسات حول *lattice congruence* وذلك لاكتشاف خصائص جديدة من *lattice congruence*.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Allah berfirman dalam al-Quran surat an-Nisa' ayat 176 yang berbunyi:

مَثَلُ الَّذِيْنَ اتَّخَذُوْا مِنْ دُوْنِ اللهِ أَوْلِيَاءَ كَمَثَلِ الْعَنْكَبُوْتِ اتَّخَذَتْ بَيْتًا صلى وَإِنَّ أَوْهَنَ الْبُيُوْتِ لَبَيْتُ
الْعَنْكَبُوْتِ صلى لَوْ كَانُوْا يَعْلَمُوْنَ (٤١) إِنَّ اللهَ يَعْلَمُ مَايَدْعُوْنَ مِنْ دُوْنِهِ مِنْ شَيْءٍ ج وَهُوَ الْعَزِيْزُ
الْحَكِيْمُ (٤٢) وَتِلْكَ الْأَمْثَالُ نَضْرِبُهَا لِلنَّاسِ صلى وَمَا يَعْقِلُهَا إِلَّا الْعَالِمُوْنَ (٤٣)

"Perumpamaan orang-orang yang mengambil pelindung selain Allah adalah seperti laba-laba yang membuat rumah dan sesungguhnya rumah yang paling lemah ialah rumah laba-laba, sekiranya mereka mengetahui. Sungguh, Allah mengetahui apa saja yang mereka sembah selain Allah dan Allah Mahaperkasa lagi Mahabijaksana. Perumpamaan-perumpamaan ini dibuat untuk manusia dan tidak ada yang akan memahaminya kecuali mereka yang berilmu" (QS. Al-Ankabut':41-43).

Berdasarkan tafsir ibnu katsir, ayat diatas merupakan perumpamaan yang dibuat oleh Allah bagi orang-orang musyrik yang menjadikannya Tuhan selain Allah, dimana mereka (orang-orang musyrik) mengharapkan pertolongannya, meminta rizki dan berpegang kepadanya dalam keadaan sempit. Keadaan mereka itu seperti sarang laba-laba dalam kelemahan dan kerapuhannya. Tidak ada di tangan-tangan Tuhan mereka itu kecuali seperti orang yang berpegangan dengan sarang laba-laba yang tidak dapat merubah apa-apa. Seandainya mereka mengetahui hal tersebut, niscaya mereka tidak akan mengambil selain Allah sebagai penolong. Ini tentu saja berbeda dengan orang islam yang hatinya beriman kepada Allah, dan di samping itu dia berbuat amal baik dengan mengikuti syari'at. Dia berpegang teguh kepada tali yang kuat yang tidak akan terputus karena kekuatan dan kekokohnya. Kemudian Allah Ta'ala berfirman mengancam orang yang menyembah selain Allah dan menyekutukan-Nya, Allah Mahamengetahui perbuatan-perbuatan yang mereka lakukan serta mengetahui tandingan-tandingan yang mereka persekutukan serta akan membalas mereka. Sesungguhnya Allah Mahabijaksana lagi Mahamengetahui. Kemudian Allah Ta'ala berfirman di dalam surat al-Ankabut ayat 43 yaitu, tidak ada yang dapat memahami dan merenungkannya kecuali orang-orang yang kokoh dalam ilmunya serta menguasainya (Ghoffar, 2004).

Ayat di atas menjelaskan tentang pentingnya menuntut ilmu sedalam-dalamnya agar dapat memahami dan menguasai ilmu yang dipelajari. Menuntut ilmu itu tidak hanya dalam bidang keagamaan saja, melainkan dalam bidang-bidang yang lain seperti; ilmu matematika, ilmu fisika, ilmu kimia dan lain-lain. Dalam ilmu matematika terdapat berbagai macam pembahasan, salah satunya adalah bilangan.

Bilangan yang digunakan dalam pencacahan dan pengukuran adalah bilangan asli. Bilangan asli memiliki sifat tertutup, komutatif, asosiatif, distributif, dan terdapat unsur identitas perkalian. Sifat-sifat tersebut berlaku pada bilangan asli, terkait ketika dikenai operasi penjumlahan dan perkalian. Sedangkan sistem yang terdapat pada bilangan asli terdiri dari himpunan, relasi, operasi $+$ dan $\times$, serta sifat-sifat yang telah disebutkan pada kalimat sebelumnya (Abdussakir, 2009).

Selanjutnya, operasi yang melibatkan operator $+$ dan $\times$ ini melibatkan masukan (*input*) bilangan bulat dan menghasilkan bilangan bulat sebagai keluaran (*output*). Operasi yang sering digunakan dalam bilangan adalah operasi biner. Operasi biner adalah apabila setiap dua elemen $a, b \in S$ maka $a * b \in S$. Atau dapat dikatakan pula bahwa operasi $*$ merupakan pemetaan dari $S \times S$ ke S.

Operasi $*$ pada S merupakan operasi biner dan dapat dikatakan bahwa operasi $*$ pada S bersifat tertutup (Sukirman, 2005:35).

Latis melibatkan dua operasi biner dengan operasi tertentu. Suatu Latis dapat dilihat dari sudut pandang yang berbeda, yaitu dari sudut pandang aljabar atau dari sudut pandang teori bilangan. Suatu Latis L adalah suatu aljabar yang dikenai dua operasi biner yang dilambangkan dengan $+$ dan $\times$ dan memenuhi sifat-sifat idempotent, asosiatif, dan komutatif terhadap kedua operasi, serta kedua operasi tersebut saling absorbsi (Gratzer, 2011:12).

Selanjutnya, kongruensi dapat dipandang dari berbagai sudut yang berbeda pula, baik dari sudut pandang geometri maupun sudut pandang struktur aljabar. Dalam struktur aljabar, kongruensi didefinisikan sebagai dua bilangan bulat x dan y yang mempunyai hasil sisa yang sama jika dibagi dengan bilangan bulat positif n, maka x dan y dapat disebut juga kongruen pada modulo n yang dilambangkan sebagai $x \equiv y \pmod{n}$ (Khusnah, 2016:16).

Keterkaitan antara latis dengan kongruensi akan membentuk suatu definisi baru, yaitu kongruensi latis. Suatu relasi ekuivalen α pada latis L disebut kongruensi latis jika dan hanya jika $x \equiv y \pmod{\alpha}$ yang berarti bahwa, $\forall z;\ z + x \equiv z + y \pmod{\alpha}$ dan $\forall z;\ z \times x \equiv z \times y \pmod{\alpha}$ (Garg, 2007:63).

Kajian tentang kongruensi latis menjadi penelitian yang dikembangkan oleh beberapa peneliti, salah satunya adalah Mayasari (2005). Dalam penelitiannya, himpunan dengan operasi biner $\vee$ dan $\wedge$ adalah dasar dalam mengerjakan kongruensi latis. Masalah yang dibahas adalah mengenai karakteristik dari operasi biner $\vee$ dan $\wedge$, sehingga menghasilkan suatu latis serta membentuk sifat-sifat kongruensi latis pada semigrup.

Berdasarkan penelitian di atas, dasar dalam mengerjakan kongruensi latis adalah menggunakan himpunan dengan operasi biner $\vee$ dan $\wedge$, sehingga bilangan bulat positif dengan operasi biner $+$ dan $\times$ sebagai dasar dalam mengerjakan kongruensi latis yang belum pernah diteliti sebelumnya. Oleh karena itu, penulis ingin mengembangkannya dengan menggunakan bilangan bulat positif dengan operasi biner $+$ dan $\times$ yang didefinisikan sebagai $a + b = \text{KPK}\ (a, b)$ dan $a \times b = \text{FPB}\ (a, b)$ sebagai dasar dalam mengerjakan kongruensi latis. Sehingga penulis mengangkat penelitian dengan judul "Kongruensi Latis".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang permasalahan di atas, maka rumusan masalah dalam skripsi ini adalah bagaimanakah sifat dari kongruensi latis beserta buktinya?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan perumusan permasalahan di atas, maka tujuan penelitian ini adalah mengetahui bagaimana sifat dari kongruensi latis beserta buktinya.

1.4 Batasan Masalah

Adapun yang dibahas dalam tugas akhir ini hanya dibatasi sampai teorema dan bukti dari kongruensi latis pada bilangan asli dengan operasi biner $+$ dan $\times$ yang didefinisikan sebagai $a + b = \text{KPK}\ (a, b)$ dan $a \times b = \text{FPB}\ (a, b)$.

1.5 Manfaat Penelitian

Berdasarkan tujuan dari penelitian di atas, maka manfaatnya adalah dapat memahami sifat kongruensi latis beserta buktinya sehingga dapat menambah penguasaan dalam mengkaji konsep dari kongruensi latis, serta dapat digunakan sebagai bahan referensi bagi peneliti selanjutnya.

1.6 Metode Penelitian

Dalam penelitian ini, metode yang digunakan adalah metode penelitian kepustakaan (*library research*) atau kajian pustaka. Adapun langkah-langkah yang digunakan dalam membahas penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Membuat contoh dari dua definisi kongruensi latis.
2. Analisis kesamaan dan perbedaan dari definisi kongruensi latis.
3. Menarik kesimpulan dari contoh kongruensi latis.
4. Mendapatkan teorema dari kesimpulan contoh kongruensi latis.
5. Membutikan teorema yang telah didapat.

1.7 Sistematika Penulisan

Secara garis besar, sistematika penulisan pada tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pada bab ini membahas latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Pada bab ini menyajikan konsep-konsep yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain membahas tentang sistem bilangan asli, operasi biner, kongruensi, latis, definisi kongruensi latis dan pembagian dalam kajian Islam.

Bab III Pembahasan

Pada bab ini membahas tentang definisi kongruensi latis berdasarkan Garg dan Gratzer, analisis kesamaan dan perbedaan dari definisi kongruensi latis, sifat-sifat kongruensi latis dan kajian Islam.

Bab IV Penutup

Bab ini berisi kesimpulan dan saran yang berkaitan dengan hasil penelitian.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Sistem Bilangan Asli

Secara sederhana, sistem bilangan asli terdiri dari himpunan $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$, relasi $=$ dan $>$, operasi $+$ dan $\times$, serta delapan sifat yang akan dijelaskan pada sub bab di bawah ini.

Definisi

Bilangan asli adalah himpunan dari bilangan bulat positif yang tidak memuat nol. Himpunan bilangan asli disimbolkan dengan huruf $\mathbb{N}$, sehingga $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$. Apabila bilangan asli diberikan operasi biner berupa penjumlahan, maka hasilnya adalah bilangan asli juga. Misal $1 + 1 = 2$, $2 + 1 = 3$, $3 + 1 = 4$, dan seterusnya. Secara umum, apabila terdapat tulisan $a \in \mathbb{N}$, maka tulisan tersebut mempunyai arti bahwa a adalah himpunan dari bilangan asli (Abdussakir, 2009:86-87).

Pernyataan $2 + 2$ merupakan suatu operasi pada himpunan bilangan asli. Sedangkan pernyataan $2 + 3 = 5$ dan $2 + 3 > 4$ merupakan relasi, pernyataan ini merupakan relasi antara hasil suatu operasi dengan bilangan 5 dan 4, dan pernyataan ini akan selalu bernilai benar (Abdussakir, 2009:87).

Beberapa sifat yang berlaku pada himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ terhadap operasi $+$ dan $\times$ adalah sebagai berikut:

1. Sifat tertutup terhadap operasi $+$

   Untuk semua unsur $a, b \in \mathbb{N}$, maka $a + b \in \mathbb{N}$.

2. Sifat tertutup terhadap operasi $\times$

Untuk semua unsur $a, b \in \mathbb{N}$, maka $a \times b \in \mathbb{N}$.

3. Sifat komutatif terhadap operasi $+$

   Untuk semua unsur $a, b \in \mathbb{N}$, maka $a + b = b + a$.

4. Sifat komutatif terhadap $\times$

   Untuk semua unsur $a, b \in \mathbb{N}$, maka $a \times b = b \times a$.

5. Sifat asosiatif terhadap $+$

   Untuk semua unsur $a, b, c \in \mathbb{N}$, maka $a + (b + c) = (a + b) + c$.

6. Sifat asosiatif terhadap $\times$

   Untuk semua unsur $a, b, c \in \mathbb{N}$, maka $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$.

7. Sifat distributif $\times$ atas $+$

   Untuk semua unsur $a, b, c \in \mathbb{N}$, maka $(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$.

8. Terdapat unsur identitas $\times$

   Untuk semua unsur $a \in \mathbb{N}$, ada $1 \in \mathbb{N}$ sehingga $a \times 1 = 1 \times a = a$.

   1 disebut unsur satuan (identitas) dari $\times$.

(Abdussakir, 2009:87-88).

2.2 Operasi Biner

Definisi

Misalkan S merupakan suatu himpunan yang tidak kosong. Kemudian operasi $*$ pada elemen-elemen S disebut operasi biner, apabila setiap dua elemen $a, b \in S$ maka $a * b \in S$. Atau dapat dikatakan pula bahwa operasi $*$ merupakan pemetaan dari $S \times S$ ke S dan operasi tersebut bersifat tertutup (Sukirman, 2005:35).

Contoh

Misalkan S adalah himpunan semua bilangan bulat positif. Kemudian, didefinisikan $+$ sebagai operasi pada S yang merupakan operasi biner, karena operasi $+$ merupakan pemetaan dari $S \times S \to S$, yaitu untuk setiap unsur $(a, b) \in S \times S$ maka $a + b \in S$. Ingat bahwa hasil dari operasi penjumlahan dua bilangan bulat positif adalah suatu bilangan bulat positif juga. Akan tetapi, berbeda dengan operasi pembagian, karena operasi $\div$ pada S bukan merupakan operasi biner pada S. Hal ini terjadi karena ada $(a, b) \in S \times S$ sedemikian sehingga $a \div b \notin S$. Misal $(3, 4) \in S \times S$, akan tetapi $3 \div 4 \notin S$.

2.3 Kongruensi

Sebelum membahas tentang kongruensi, terlebih dahulu akan dibahas mengenai definisi keterbagian beserta teoremanya.

2.3.1 Keterbagian

Definisi

Misalkan $a, b \in \mathbb{Z}$, dengan $a \neq 0$. a dikatakan membagi b (ditulis "$a \mid b$") jika $b = a \times x$, untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$ (Abdussakir, 2009:114).

Berdasarkan definisi keterbagian, $b = a \times x$ adalah jika terdapat suatu bilangan bulat x dimana bilangan bulat a dengan $a \neq 0$ membagi bilangan bulat b. Notasi $a \mid b$ dapat dibaca dengan "a habis membagi b", "b habis dibagi a", "a pembagi b", "a faktor dari b", atau "b kelipatan dari a". Tetapi jika a tidak membagi b, maka ditulis $a \nmid b$ (Abdussakir, 2009:114).

Contoh

1. $5 \mid 30$, karena ada $5 \in \mathbb{Z}$ sehingga $30 = 5 \times 6$.
2. $3 \mid 21$, karena ada $3 \in \mathbb{Z}$ sehingga $21 = 3 \times 7$.
3. $4 \nmid 30$, karena tidak ada $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $30 = 4 \times x$.
4. $2 \nmid 21$, karena tidak ada $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $21 = 2 \times x$.

Teorema Keterbagian

Untuk bilangan bulat a, b, dan c berlaku:

1. $a \mid b$, maka $a \mid (b \times x); \forall x \in \mathbb{Z}$
2. $a \mid b$ dan $b \mid c$, maka $a \mid c$
3. $a \mid b$ dan $a \mid c$, maka $a \mid \big((b \times x) + (c \times y)\big); \forall x, y \in \mathbb{Z}$
4. $a \mid b$ dan $b \mid a$, maka $a = \pm b$
5. $a \mid b$, dengan $a > 0$ dan $b > 0$, maka $a \leq b$
6. $\forall m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$, maka $a \mid b$ jika dan hanya jika $(m \times a) \mid (m \times b)$ (Abdussakir, 2009:115).

Bukti:

1. Jika $a \mid b$, maka $a \mid (b \times x); \forall x \in \mathbb{Z}$

   Jika $a \mid b$ maka $b = a \times y$ (definisi keterbagian)

   $b \times x = (a \times y) \times x$ (ditambahkan x pada ruas kanan dan kiri)

   $b \times x = a \times (y \times x)$ (sifat asosiatif perkalian)

   $a \mid (b \times x)$ (definisi keterbagian)

   Jadi terbukti bahwa jika $a \mid b$, maka $a \mid (b \times x)$.

2. Jika $a \mid b$ dan $b \mid c$, maka $a \mid c$

   Jika $a \mid b$ maka $b = a \times x$

   Jika $b \mid c$ maka $c = b \times y$

   Jika $c = b \times y$ maka $c = (a \times x) \times y$ (subtitusikan b)

   $c = a \times (x \times y)$ (sifat asosiatif perkalian)

   $a \mid c$ (definisi keterbagian)

   Jadi terbukti bahwa jika $a \mid b$ dan $b \mid c$, maka $a \mid c$.

3. Jika $a \mid b$ dan $a \mid c$, maka $a \mid \left((b \times x) + (c \times y)\right); \forall x, y \in \mathbb{Z}$

   Jika $a \mid b$ maka $b = a \times k_1; k_1 \in \mathbb{Z}$ (definisi keterbagian)

   $b \times x = (a \times k_1) \times x$ (ditambahkan x pada ruas kanan dan kiri)

   Jika $a \mid c$ maka $c = a \times k_2; k_2 \in \mathbb{Z}$ (definisi keterbagian)

   $c \times y = (a \times k_2) \times y$ (ditambahkan y pada ruas kanan dan kiri)

   $(b \times x) + (c \times y) = (a \times k_1 \times x) + (a \times k_2 \times y)$

   $(b \times x) + (c \times y) = a \times \left((k_1 \times x) + (k_2 \times y)\right)$ (sifat distributif perkalian)

   $a \mid \left((b \times x) + (c \times y)\right)$ (definisi keterbagian)

   Jadi terbukti bahwa $a \mid b$ dan $a \mid c$, maka $a \mid \left((b \times x) + (c \times y)\right); \forall x, y \in \mathbb{Z}$.

4. $a \mid b$ dan $b \mid a$, maka $a = \pm b$

   Jika $a \mid b$ maka $b = a \times x$ (definisi keterbagian)

   Jika $b \mid a$ maka $a = b \times y$ (definisi keterbagian)

   Jika $b = a \times x$ maka $b = (b \times y) \times x$ (subtitusi a)

   $b = b \times (y \times x)$ (sifat asosiatif perkalian)

   $b - \left(b \times (y \times x)\right) = 0$

   $b \times \left(1 - (y \times x)\right) = 0$

   Karena $b \neq 0$, maka $1 - (y \times x) = 0$, sehingga $1 = y \times x$.

   Persamaan terakhir dipenuhi untuk $x = y = 1$ atau $x = y = -1$, sehingga didapatkan $a = \pm b$.

   Jadi terbukti bahwa jik $a \mid b$ dan $b \mid a$, maka $a = \pm b$.

5. $a \mid b$, dengan $a > 0$ dan $b > 0$, maka $a \leq b$

   Jika $a \mid b$ maka $b = a \times x$ (definisi keterbagian)

   Karena $a > 0, b > 0$ dan $b = a \times x$, maka $x > 0$.

   Untuk $x = 1$, maka terbukti jika $a = b$. Sedangkan untuk $x > 1$, maka $b > a$. Jadi terbukti bahwa jika $a \mid b$, dengan $a > 0$ dan $b > 0$, maka $a \leq b$.

6. $\forall m \neq 0 \in \mathbb{Z}$, maka $a \mid b$ jika dan hanya jika $(m \times a) \mid (m \times b)$

   Jika $a \mid b$ maka $b = a \times x$ untuk suatu $x \in \mathbb{Z}$.

   Akibatnya untuk $m \in \mathbb{Z}$ dan $m \neq 0$, maka berlaku $m \times b = m \times (a \times x) = (m \times a) \times x$. Berdasarkan definisi keterbagian, maka $(m \times a) \mid (m \times b)$.

   Jika $(m \times a) \mid (m \times b)$ dan $m \neq 0$, maka $m \times b = (m \times a) \times x$ untuk suatu $x \in \mathbb{Z}$.

   $m \times b = (m \times a) \times x$ maka
   $$(m \times b) - \big((m \times a) \times x\big) = 0$$
   $$(m \times b) - \big(m \times (a \times x)\big) = 0$$
   $$m \times \big(b - (a \times x)\big) = 0$$

   Karena $m \neq 0$, maka $b - (a \times x) = 0$, sehingga $b = a \times x$. Berdasarkan definisi keterbagian maka $a \mid b$. Jadi terbukti bahwa $\forall m \neq 0 \in \mathbb{Z}$, maka $a \mid b$ jika dan hanya jika $(m \times a) \mid (m \times b)$.

Berdasarkan penjelasan dari enam teorema tersebut dan terbukti, maka teorema keterbagian berlaku untuk bilangan bulat a, b, dan c.

Definisi

Misal n adalah bilangan bulat positif dengan $n > 1$ kemudian x dan y adalah bilangan bulat, maka x dan y adalah kongruen pada modulo n jika n habis membagi $x - y$, dan dapat ditulis sebagai berikut:

$$x \equiv y \pmod{n}$$

(Gilbert dan Gilbert, 2009:95).

Dikatakan pula bahwa $x \equiv y \pmod{n}$ jika n habis membagi $x - y$. Dalam hal ini, n habis membagi $x - y$ ekuivalen dengan $x - y = n \times q$ atau $x = y + (n \times q)$ (Gilbert dan Gilbert, 2009:96).

Contoh

1. $22 \equiv 2 \pmod{5}$, karena 5 habis membagi $22 - 2$ atau $5 \mid 20$. Dapat juga ditulis dengan $22 - 2 = 5 \times q$ atau $22 = 2 + (5 \times q)$.
2. $20 \equiv 2 \pmod{3}$, karena 3 habis membagi $20 - 2$ atau $3 \mid 18$. Dapat juga ditulis dengan $20 - 2 = 3 \times q$ atau $20 = 2 + (3 \times q)$.

2.4 Latis

Suatu latis dapat dilihat dari berbagai sudut pandang yang berbeda, yaitu dari sudut pandang aljabar dan dari sudut pandang teori bilangan. Berikut adalah definisi latis dilihat dari sudut pandang aljabar.

Definisi

Suatu Latis L adalah suatu aljabar dengan dua operasi biner yang dilambangkan dengan perkalian dan penjumlahan yang memenuhi sifat-sifat berikut: untuk semua $a, b, c \in L$

1. $a \times a = a$ operasi $\times$ bersifat idempotent
2. $a + a = a$ operasi $+$ bersifat idempotent
3. $a \times b = b \times a$ operasi $\times$ bersifat komutatif
4. $a + b = b + a$ operasi $+$ bersifat komutatif
5. $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ operasi $\times$ bersifat asosiatif

6. $a + (b + c) = (a + b) + c$ operasi $+$ bersifat asosiatif
7. $a \times (a + b) = a$ absorpsi terhadap operasi $+$
8. $a + (a \times b) = a$ absorpsi terhadap operasi $\times$

(Gratzer, 2011:12).

Contoh

Misalkan unsur-unsur dari latis L adalah himpunan dari bilangan asli A yang didefinisikan sebagai $A = \{1, 3, 6\}$. Himpunan ini memuat FPB tunggal dan KPK tunggal dari setiap dua anggota dari himpunan tersebut. Dengan demikian dapat didefinisikan bahwa $a \times b =$ FPB (a, b) dan $a + b =$ KPK (a, b).

Agar lebih mudah dalam menyelesaikannya, maka akan dibentuk beberapa tabel *Cayley* sebagai berikut:

Tabel 2. 1 Tabel *Cayley* untuk $a \times b$

$\times$	1	3	6
1	1	1	1
3	1	3	3
6	1	3	6

Tabel 2. 2 Tabel *Cayley* untuk $a + b$

$+$	1	3	6
1	1	3	6
3	3	3	6
6	6	6	6

Berdasarkan tabel *Cayley* di atas terlihat bahwa sifat idempotent dan komutatif terhadap kedua operasi pada latis telah terselesaikan. Selanjutnya, untuk sifat asosiatif dan absorbsi terhadap kedua operasi akan ditunjukkan pada tabel *Cayley* di bawah ini

Tabel 2. 3 Tabel *Cayley* Sifat Asosiatif untuk Operasi $\times$

$\times$	1	3	6	(1×1)	(1×3)	(1×6)	(3×3)	(3×6)	(6×6)
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	3	3	1	1	1	3	3	3
6	1	3	6	1	1	1	3	3	6
(1×1)	1	1	1						
(1×3)	1	1	1						
(1×6)	1	1	1						
(3×3)	1	3	3						
(3×6)	1	3	3						
(6×6)	1	3	6						

Tabel 2. 4 Tabel *Cayley* Sifat Asosiatif untuk Operasi $+$

$+$	1	3	6	$(1+1)$	(1×3)	$(1+6)$	$(3+3)$	$(3+6)$	$(6+6)$
1	1	3	6	1	3	6	3	6	6
3	3	3	6	3	3	6	3	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
$(1+1)$	1	3	6						
$(1+3)$	3	3	6						
$(1+6)$	6	6	6						
$(3+3)$	3	3	6						
$(3+6)$	6	6	6						
(6×6)	6	6	6						

Tabel 2. 5 Tabel *Cayley* Sifat Absorbsi untuk Operasi $\times$

$\times$	$(1+1)$	$(1+3)$	$(1+6)$	$(3+1)$	$(3+3)$	$(3+6)$	$(6+1)$	$(6+3)$	$(6+6)$
1	1	1	1						
2				3	3	3			
4							6	6	6

Tabel 2. 6 Tabel *Cayley* Sifat Absorbsi untuk Operasi $+$

$+$	(1×1)	(1×3)	(1×6)	(3×1)	(3×3)	(3×6)	(6×1)	(6×3)	(6×6)
1	1	1	1						
2				3	3	3			
4							6	6	6

Karena dari delapan sifat latis terpenuhi, maka himpunan dari bilangan asli A yang didefinisikan sebagai $A = \{1, 3, 6\}$ adalah latis.

Teorema 2.1

Misal L adalah suatu latis dan $a, b \in L$. Jika $a \times b = a$, maka $a + b = b$ (Sukardjono, 2002:40).

Bukti:

$a + b = (a \times b) + b$ (diketahui)

$a + b = b + (a \times b)$ (sifat asosiatif $+$)

$a + b = b + (b \times a)$ (sifat komutatif $\times$)

$a + b = b$ (sifat absorbsi $\times$)

Jadi, terbukti bahwa $a + b = b$ jika $a \times b = a$.

Teorema 2.2

Misal L adalah suatu latis dan $a, b \in L$. Jika $a + b = b$, maka $a \times b = a$ (Sukardjono, 2002:40).

Bukti:

$a \times b = a \times (a + b)$ (diketahui)

$a \times b = a$ (sifat absorbsi $+$)

Jadi, terbukti bahwa $a \times b = a$ jika $a + b = b$.

Teorema 2.3

Misal L suatu latis dan $a \in L$, maka berlaku $a \propto a$ (Sukardjono, 2002:40).

Bukti:

$a \times a = a$ (sifat idempotent latis)

$a \propto a$ (definisi 2.2)

maka terbukti bahwa $a \propto a$; $\forall a \in L$.

Teorema 2.4

Misal L suatu latis dan $a, b \in L$, maka berlaku jika $a \propto b$ dan $b \propto a$, maka $a = b$ (Sukardjono, 2002:40).

Bukti:

$a = a \times b$ (definisi 2.2)

$= b \times a$ (sifat komutatif $\times$)

$= b$ (definisi 2.2)

Teorema 2.5

Misal L suatu latis dan $a, b \in L$, maka berlaku jika $a \propto b$ dan $b \propto c$, maka $a \propto c$ (Sukardjono, 2002:40).

Bukti:

$a \times c = (a \times b) \times c$ (definisi 2.2)

$= a \times (b \times c)$ (sifat asosiatif $\times$)

$= a \times b$ (definisi 2.2)

$= a$ (definisi 2.2)

Jadi terbukti bahwa jika $a \propto b$ dan $b \propto c$, maka $a \propto c$.

Relasi $\propto$ pada teorema 2.3-2.5 merupakan relasi terurut parsial karena bersifat reflektif, antisimetris, dan transitif. Relasi terurut parsial juga bisa dituliskan sebagai $a \leq b$ untuk $a \propto b$ (Sukardjono, 2002:41).

Teorema 2.6

Suatu latis adalah poset dengan sifat $a \leq b$ yang berarti $a \times b = a$ dan $a + b = b$ (Sukardjono, 2002:41).

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa jika $a \leq b$ maka berlaku $a \times b = a$ dan $a + b = b$.

Karena $a \leq b$ maka $\forall a, b \in L$ berlaku sifat refleksif, antisimetris dan transitif. Pertama akan dibuktikan bahwa jika $a \leq b$ maka $a \times b = a$ yaitu:

$a \times b = a \times a$ (karena berlaku sifat antisimetris)

$= a$ (karena berlaku sifat refleksif)

Selanjutnya berdasarkan teorema 2.1 jika $a \times b = a \in L$ maka $a + b = b \in L$, sehingga terbukti jika $a \leq b$ maka berlaku $a \times b = a$ dan $a + b = b$

2.5 Kongruensi Latis

Definisi (1)

Suatu relasi ekuivalen α pada latis L adalah kongruen jika $x \equiv y \ (\text{mod}\ \alpha)$ yang berakibat bahwa

1. $\forall z : z \sqcup x \equiv z \sqcup y \ (\text{mod}\ \alpha)$
2. $\forall z : z \sqcap x \equiv z \sqcap y \ (\text{mod}\ \alpha)$

(Garg, 2007:63).

Definisi (2)

Suatu relasi ekuivalen α pada latis L disebut relasi kongruen jika mengikuti dua sifat sebagai berikut:

a. $a_0 \equiv b_0 \ (\text{mod}\ \alpha)$ dan $a_1 \equiv b_1 (\text{mod}\ \alpha)$

   berakibat bahwa $a_0 \times a_1 \equiv b_0 \times b_1 \ (\text{mod}\ \alpha)$

b. $a_0 \equiv b_0 \ (\text{mod}\ \alpha)$ dan $a_1 \equiv b_1 (\text{mod}\ \alpha)$

   berakibat bahwa $a_0 + a_1 \equiv b_0 + b_1 (\text{mod}\ \alpha)$

(Gratzer, 2011:36).

Berdasarkan dua definisi tersebut, terdapat lemma pada Garg (2007) yang belum dibuktikan, maka penulis akan mengambil definisi tersebut untuk dikaji lebih lanjut pada pembahasan bab 3.4.

2.6 Menuntut Ilmu dalam Islam

Berdasarkan pembahasan pada bab ini, maka terdapat firman Allah yang berbunyi:

يَرْفَعِ اللهُ الَّذِيْنَ آمَنُوْا مِنْكُمْ وَ الَّذِيْنَ أُوْتُوْا الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ (المجادلة:١١)

"Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman diantaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat (al-Mujadalah:11)".

Meninggikan beberapa derajat adalah menunjukkan akan besarnya keutamaan dan ia mencakup ketinggian ma'nawi di dunia dengan tingginya kedudukan dan nama baik serta ketinggian secara kongkrit di kehidupan akhirat kelak dengan kedudukan sangat mulia di surga (Nabil, 2009:3).

Ayat yang menunjukkan keutamaan ilmu dan kewajiban menambah ilmu adalah firman Allah yang ditujukan kepada Rasul-Nya:

وَقُلْ رَبِّ زِدْنِيْ عِلْمًا (طه:١١٤)

"Dan katakanlah: 'Ya Tuhanku, tambahkanlah kepadaku ilmu pengetahuan' (Thaha: 114)".

Allah tidak menyuruh Nabi-Nya tidak menambah sesuatu kecuali menambah ilmu. Makna menambah ilmu di sisi Allah adalah ilmu syari'at yang bisa menambah pengetahuan seorang hamba tentang Allah dan cara-cara beribadah serta bermuamalah yang benar menurut agama (Nabil, 2009:3-4).

Adapun kemuliaan ilmu itu didapatkan oleh semua orang, karena ilmu merupakan pemberian Allah yang khusus diberikan kepada manusia. Dengan ilmu, Allah memberi kemuliaan kepada nabi Adam mengungguli para malaikat, sehingga Allah memerintahkan semua malaikat agar bersujud kepada nabi Adam (Shiddiq, 2000:4).

Sesungguhnya ilmu itu menjadi mulia, lantaran sebagai sarana untuk menuju takwa kepada Allah. Sebagaimana syair yang dilantunkan syeikh Muhammad bin Hasan bin Abdillah (Shiddiq, 2000:4-5):

تَعَلَّمْ فَإِنَّ الْعِلْمَ زَيْنٌ لِأَهْلِهِ * وَفَضْلٌ وَعُنْوَانٌ لِكُلِّ الْمَحَامِدِ

"Belajarlah ilmu pengetahuan, karena sesungguhnya ilmu pengetahuan itu merupakan hiasan bagi yang memilikinya. Ilmu itu juga menjadi kelebihan dan tanda bagi setiap sesuatu yang terpuji".

وَكُنْ مُسْتَفِيْدًا كُلَّ يَوْمٍ زِيَادَةً * مِنَ الْعِلْمِ وَاسْبَحْ فِي بُحُوْرِ الْفَوَائِدِ

"Carilah ilmu setiap hari, agar ilmu itu semakin bertambah dan carilah faidah-faidahnya meskipun harus berenang di lautan faidah".

Maka berdasarkan penjelasan di atas, penulis akan menambah ilmu pengetahuan dengan cara mencari sifat-sifat yang terdapat pada kongruensi latis serta membuktikan lemma pada kongruensi latis agar lebih mudah untuk dipahami. Seperti dalam hadits Rasulullah yang berbunyi:

يَسِّرُوْا وَلاَتُعَسِّرُوْا وَسَكِّنُوْا وَلاَتُنَفِّرُوْا

"Mudahkanlah setiap urusan dan janganlah kalian mempersulitnya, buatlah mereka tenang dan jangan membuat mereka lari (HR. Bukhari)".

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan dibahas mengenai analisis kesamaan dan perbedaan dari definisi kongruensi latis serta membuktikan sifat-sifat pada kongruensi latis.

3.1 Definisi Kongruensi Latis (*Garg*)

Suatu relasi ekuivalen α pada latis L adalah kongruen jika $x \equiv y \pmod{\alpha}$ yang berakibat bahwa

1. $\forall z : z \sqcup x \equiv z \sqcup y \pmod{\alpha}$
2. $\forall z : z \sqcap x \equiv z \sqcap y \pmod{\alpha}$

(Garg, 2007:63).

Misalkan $\sqcup$ adalah operasi $+$ dan $\sqcap$ adalah operasi $\times$. Maka, akibat dari definisi tersebut dapat dijabarkan menjadi:

1. $\forall z : z + x \equiv z + y \pmod{\alpha}$
2. $\forall z : z \times x \equiv z \times y \pmod{\alpha}$

Contoh:

Misal himpunan dari bilangan asli yang didefinisikan sebagai $A = \{1, 3, 6\}$ adalah latis. Kemudian himpunan tersebut dikatakan relasi ekuivalen jika memenuhi sifat refleksif, simetrik, dan transitif:

Refleksif $= \{(1, 1), (3, 3), (6, 6)\}$

Simetrik $= \{(1, 3), (3, 1), (1, 6), (6, 1), (3, 6), (6, 3)\}$

Transitif $= \{(1, 3), (1, 6), (3, 1), (3, 6), (6, 1), (6, 6)\}$

Maka akan menghasilkan relasi ekuivalen sebagai berikut:

$$\alpha: \{(1,1), (1,3), (1, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 6), (6, 1), (6, 3), (6, 6)\}.$$

Selanjutnya, jika α adalah suatu relasi ekuivalen dan jika relasi $(a, b) \in \alpha$, maka dapat dinotasikan sebagai $a \equiv b \ (\text{mod } \alpha)$ (Gratzer, 2011:2-3) dan diperoleh:

1. $1 \equiv 1 \ (\text{mod } (1,1))$
2. $1 \equiv 3 \ (\text{mod } (1,3))$
3. $1 \equiv 6 \ (\text{mod } (1,6))$
4. $3 \equiv 1 \ (\text{mod } (3,1))$
5. $3 \equiv 3 \ (\text{mod } (3,3))$
6. $3 \equiv 6 \ (\text{mod } (3,6))$
7. $6 \equiv 1 \ (\text{mod } (6,1))$
8. $6 \equiv 3 \ (\text{mod } (6,3))$
9. $6 \equiv 6 \ (\text{mod } (6,6))$

Berdasarkan penjelasan di atas, maka suatu relasi ekuivalen α pada latis L sudah terbukti. Langkah selanjutnya adalah, bagaimana relasi ekuivalen pada latis tersebut bisa disebut kongruensi. Merujuk pada definisi kongruensi latis menurut Garg dan $\forall z \in \mathbb{N}$, misal $z = 2$ serta didefinisikan bahwa $a \times b = \text{FPB } (a, b)$ dan $a + b = \text{KPK } (a, b)$, maka diperoleh

1. $2 \times 1 \equiv 2 \times 1 \ (\text{mod } (1,1))$ $\quad$ $2 + 1 \equiv 2 + 1 \ (\text{mod } (1,1))$

   $1 \equiv 1 \ (\text{mod } (1,1))$ $\quad$ $2 \equiv 2 \ (\text{mod } (1,1))$

2. $2 \times 1 \equiv 2 \times 3 \ (\text{mod } (1,3))$ $\quad$ $2 + 1 \equiv 2 + 3 \ (\text{mod } (1,3))$

   $1 \equiv 2 \ (\text{mod } (1,3))$ $\quad$ $2 \equiv 3 \ (\text{mod } (1,3))$

3. $2 \times 1 \equiv 2 \times 6 \ (\text{mod } (1,6))$ $\quad$ $2 + 1 \equiv 2 + 6 \ (\text{mod } (1,6))$

   $1 \equiv 2 \ (\text{mod } (1,6))$ $\quad$ $2 \equiv 6 \ (\text{mod } (1,6))$

4. $2 \times 3 \equiv 2 \times 1 \left(\mathrm{mod}\ (3,1)\right)$ $\quad$ $2 + 3 \equiv 2 + 1 \left(\mathrm{mod}\ (3,1)\right)$

$2 \equiv 1 \left(\mathrm{mod}\ (3,1)\right)$ $\quad$ $3 \equiv 2 \left(\mathrm{mod}\ (3,1)\right)$

5. $2 \times 3 \equiv 2 \times 3 \left(\mathrm{mod}\ (3,3)\right)$ $\quad$ $2 + 3 \equiv 2 + 3 \left(\mathrm{mod}\ (3,3)\right)$

$2 \equiv 2 \left(\mathrm{mod}\ (3,3)\right)$ $\quad$ $3 \equiv 3 \left(\mathrm{mod}\ (3,3)\right)$

6. $2 \times 3 \equiv 2 \times 6 \left(\mathrm{mod}\ (3,6)\right)$ $\quad$ $2 + 3 \equiv 2 + 6 \left(\mathrm{mod}\ (3,6)\right)$

$2 \equiv 2 \left(\mathrm{mod}\ (3,6)\right)$ $\quad$ $3 \equiv 6 \left(\mathrm{mod}\ (3,6)\right)$

7. $2 \times 6 \equiv 2 \times 1 \left(\mathrm{mod}\ (6,1)\right)$ $\quad$ $2 + 6 \equiv 2 + 1 \left(\mathrm{mod}\ (6,1)\right)$

$2 \equiv 1 \left(\mathrm{mod}\ (6,1)\right)$ $\quad$ $6 \equiv 2 \left(\mathrm{mod}\ (6,1)\right)$

8. $2 \times 6 \equiv 2 \times 3 \left(\mathrm{mod}\ (6,3)\right)$ $\quad$ $2 + 6 \equiv 2 + 3 \left(\mathrm{mod}\ (6,3)\right)$

$2 \equiv 2 \left(\mathrm{mod}\ (6,3)\right)$ $\quad$ $6 \equiv 3 \left(\mathrm{mod}\ (6,3)\right)$

9. $2 \times 6 \equiv 2 \times 6 \left(\mathrm{mod}\ (6,6)\right)$ $\quad$ $2 + 6 \equiv 2 + 6 \left(\mathrm{mod}\ (6,6)\right)$

$2 \equiv 2 \left(\mathrm{mod}\ (6,6)\right)$ $\quad$ $6 \equiv 6 \left(\mathrm{mod}\ (6,6)\right)$

Karena sembilan kondisi tersebut memenuhi sifat yang terdapat pada definisi kongruensi latis, maka $A = \{1, 3, 6\}$ adalah kongruensi latis.

3.2 Definisi Kongruensi Latis (*Gratzer*)

Suatu relasi ekuivalen α pada latis L disebut relasi kongruen jika mengikuti dua sifat sebagai berikut:

a. $a_0 \equiv b_0$ (mod α) dan $a_1 \equiv b_1$(mod α)

berakibat bahwa $a_0 \times a_1 \equiv b_0 \times b_1$ (mod α)

b. $a_0 \equiv b_0$ (mod α) dan $a_1 \equiv b_1$(mod α)

berakibat bahwa $a_0 + a_1 \equiv b_0 + b_1$(mod α)

(Gratzer, 2011:36).

Contoh:

Misal himpunan dari bilangan asli yang didefinisikan sebagai $A = \{1, 3, 6\}$ adalah latis. Kemudian akan ditunjukkan relasi ekuivalen pada latis tersebut. Dengan cara yang sama pada contoh kongruensi latis (Garg), maka diperoleh

1. $1 \equiv 1 \left(\text{mod } (1, 1)\right)$
2. $1 \equiv 3 \left(\text{mod } (1, 3)\right)$
3. $1 \equiv 6 \left(\text{mod } (1, 6)\right)$
4. $3 \equiv 1 \left(\text{mod } (3, 1)\right)$
5. $3 \equiv 3 \left(\text{mod } (3, 3)\right)$
6. $3 \equiv 6 \left(\text{mod } (3, 6)\right)$
7. $6 \equiv 1 \left(\text{mod } (6, 1)\right)$
8. $6 \equiv 3 \left(\text{mod } (6, 3)\right)$
9. $6 \equiv 6 \left(\text{mod } (6, 6)\right)$

Berdasarkan penjelasan di atas, maka suatu relasi ekuivalen α pada latis L sudah terbukti. Langkah selanjutnya adalah, bagaimana relasi ekuivalen pada latis tersebut bisa disebut kongruensi. Merujuk pada definisi kongruensi latis menurut Gratzer serta didefinisikan bahwa $a \times b = \text{FPB } (a, b)$ dan $a + b = \text{KPK } (a, b)$, maka diperoleh

1. $1 \equiv 1 \ (\text{mod } \alpha)$ dan $1 \equiv 3 \ (\text{mod } \alpha)$
   a. $1 \equiv 1 \ (\text{mod } \alpha)$ dan $1 \equiv 3 \ (\text{mod } \alpha)$

      berakibat bahwa $1 \times 1 \equiv 1 \times 3 \ (\text{mod } \alpha)$

      $$1 \equiv 1 \ (\text{mod } \alpha)$$

b. $1 \equiv 1 \pmod{\alpha}$ dan $1 \equiv 3 \pmod{\alpha}$

berakibat bahwa $1 + 1 \equiv 1 + 3 \pmod{\alpha}$

$$1 \equiv 3 \pmod{\alpha}$$

Karena diperoleh hasil yang sama, maka persamaan $1 \equiv 1 \pmod{\alpha}$ dan $1 \equiv 3 \pmod{\alpha}$ bisa disebut reflektif.

2. $1 \equiv 1 \pmod{\alpha}$ dan $3 \equiv 3 \pmod{\alpha}$

a. $1 \equiv 1 \pmod{\alpha}$ dan $3 \equiv 3 \pmod{\alpha}$

berakibat bahwa $1 \times 3 \equiv 1 \times 3 \pmod{\alpha}$

$$1 \equiv 1 \pmod{\alpha}$$

b. $1 \equiv 1 \pmod{\alpha}$ dan $3 \equiv 3 \pmod{\alpha}$

berakibat bahwa $1 + 3 \equiv 1 + 3 \pmod{\alpha}$

$$3 \equiv 3 \pmod{\alpha}$$

Karena diperoleh hasil yang sama, maka persamaan $1 \equiv 1 \pmod{\alpha}$ dan $3 \equiv 3 \pmod{\alpha}$ bisa disebut reflektif.

Berdasarkan kedua contoh tersebut, dapat disimpulkan bahwa untuk setiap $a \equiv a \pmod{\alpha}$ jika dipasangkan dengan kongruensi berbentuk apapun hasilnya akan kembali ke dirinya sendiri (reflektif).

3. $1 \equiv 3 \pmod{\alpha}$ dan $3 \equiv 1 \pmod{\alpha}$

a. $1 \equiv 3 \pmod{\alpha}$ dan $3 \equiv 1 \pmod{\alpha}$

berakibat bahwa $1 \times 3 \equiv 3 \times 1 \pmod{\alpha}$

$$1 \equiv 1 \pmod{\alpha}$$

b. $1 \equiv 3 \pmod{\alpha}$ dan $3 \equiv 1 \pmod{\alpha}$

berakibat bahwa $1 + 3 \equiv 3 + 1 \pmod{\alpha}$

$$3 \equiv 3 \pmod{\alpha}$$

4. $1 \equiv 3 \pmod{\alpha}$ dan $6 \equiv 1 \pmod{\alpha}$

   a. $1 \equiv 3 \pmod{\alpha}$ dan $6 \equiv 1 \pmod{\alpha}$

      berakibat bahwa $1 \times 6 \equiv 3 \times 1 \pmod{\alpha}$

      $1 \equiv 1 \pmod{\alpha}$

   b. $1 \equiv 3 \pmod{\alpha}$ dan $6 \equiv 1 \pmod{\alpha}$

      berakibat bahwa $1 + 6 \equiv 3 + 1 \pmod{\alpha}$

      $6 \equiv 3 \pmod{\alpha}$

3.3 Analisis Kesamaan dan Perbedaan dari Definisi Kongruensi Latis

Pada definisi kongruensi latis berdasarkan Gratzer terdapat dua sifat sebagai berikut:

a. $a_0 \equiv b_0 \pmod{\alpha}$ dan $a_1 \equiv b_1 \pmod{\alpha}$

   berakibat bahwa $a_0 \times a_1 \equiv b_0 \times b_1 \pmod{\alpha}$

b. $a_0 \equiv b_0 \pmod{\alpha}$ dan $a_1 \equiv b_1 \pmod{\alpha}$

   berakibat bahwa $a_0 + a_1 \equiv b_0 + b_1 \pmod{\alpha}$.

Kemudian, definisi tersebut akan dijabarkan menjadi

Misal $a_0 = b_0 = z; a_1 = x; b_1 = y$, maka dua sifat tersebut akan menjadi

a. $a_0 \equiv b_0 \pmod{\alpha}$ dan $a_1 \equiv b_1 \pmod{\alpha}$

   $z \equiv z \pmod{\alpha}$ dan $x \equiv y \pmod{\alpha}$ yang berakibat

   $z \times x \equiv z \times y \pmod{\alpha}$

b. $a_0 \equiv b_0 \pmod{\alpha}$ dan $a_1 \equiv b_1 \pmod{\alpha}$

   $z \equiv z \pmod{\alpha}$ dan $x \equiv y \pmod{\alpha}$ yang berakibat

   $z + x \equiv z + y \pmod{\alpha}$.

Maka, terbukti bahwa dari definisi Gratzer bisa menjadi definisi Garg dengan cara memisalkan a_0 dan b_0 dengan z, a_1 dengan x, dan b_1 dengan y.

3.4 Sifat-sifat Kongruensi Latis

Lemma

Misal α adalah kongruensi pada latis L; maka

1. Jika $a \equiv b \pmod{\alpha} \wedge (a \leq c \leq b)$ maka $a \equiv c \pmod{\alpha}$
2. $a \equiv b \pmod{\alpha}$ jika dan hanya jika $a \times b \equiv a + b \pmod{\alpha}$

(Garg, 2007:63).

Bukti:

1. Jika $a \equiv b \pmod{\alpha} \wedge (a \leq c \leq b)$ maka $a \equiv c \pmod{\alpha}$

Sebelum membuktikannya, terlebih dahulu penulis akan mengupas satu persatu modal yang ada pada lemma nomor 1 tersebut. Modal pertama adalah $a \equiv b \pmod{a}$ yang berarti $a = b + (\alpha \times q)$ berdasarkan definisi dari kongruensi pada pembahasan sebelumnya. Modal kedua adalah $(a \leq c \leq b)$ yang berarti bahwa:

- Untuk $a \leq c$ berlaku $a \times c = a \ldots (*)$ dan $a + c = c \ldots (**)$
- Untuk $c \leq b$ berlaku $c \times b = c \ldots (\#)$ dan $c + b = b \ldots (\#\#)$
- Untuk $a \leq b$ berlaku $a \times b = a \ldots (\circ)$ dan $a + b = b \ldots (\circ\circ)$

Selanjutnya, akan dibuktikan jika $a \equiv b \pmod{\alpha}$ dan $(a \leq c \leq b)$ maka $a \equiv c \pmod{\alpha}$. Adapun langkah-langkah untuk membuktikannya adalah sebagai berikut:

$a = b + (\alpha \times q)$ (modal pertama)

$a = (c + b) + (\alpha \times q)$ (modal kedua (##))

$a = (a + c) + (c + b) + (\alpha \times q)$ (modal kedua $(**)$ dan $(\#\#)$)

$a = a + c + c + b + (\alpha \times q)$

$a = a + b + c + c + (\alpha \times q)$

$a = b + c + c + (\alpha \times q)$ (modal kedua $(\circ\circ)$)

$a = b + c + (\alpha \times q)$ (sifat idempotent $+$)

$a = c + (\alpha \times q)$ (mengikuti teorema 2.1)

$a \equiv c \pmod{\alpha}$ (definisi kongruensi)

Maka, terbukti bahwa jika $a \equiv b \pmod{\alpha}$ dan $(a \leq c \leq b)$ maka $a \equiv c \pmod{\alpha}$.

Karena lemma nomor 1 sudah terbukti, maka lemma tersebut dapat digunakan dalam membuktikan lemma setelah ini.

2. $a \equiv b \pmod{\alpha}$ jika dan hanya jika $a \times b \equiv a + b \pmod{\alpha}$

Pada pembuktian ini, penulis menggunakan modal yang ada pada lemma nomor 1, maka akan dibuktikan bahwa:

i) Jika $a \equiv b \pmod{\alpha}$ maka $a \times b \equiv a + b \pmod{\alpha}$

$a \equiv b \pmod{\alpha}$ (modal utama)

$a = b + (\alpha \times q)$ (definisi kongruensi)

$a \times c = b + (\alpha \times q)$ (modal kedua $(*)$)

$(a \times c) \times (c \times b) = b + (\alpha \times q)$ (modal kedua $(*)$ dan $(\#)$)

$a \times b = b + (\alpha \times q)$ (sifat transitif)

$a \times b = (c + b) + (\alpha \times q)$ (modal kedua $(\#\#)$)

$a \times b = (a + c) + (c + b) + (\alpha \times q)$ (modal kedua $(**)$ dan $(\#\#)$)

$a \times b = a + b + (\alpha \times q)$ (sifat transitif)

$a + b \equiv a + b \pmod{\alpha}$ (definisi kongruensi)

ii) Jika $a+b \equiv a+b \pmod{\alpha}$ maka $a \equiv b \pmod{\alpha}$

$a+b \equiv a+b \pmod{\alpha}$ (modal utama)

$a+b = a+b+(\alpha \times q)$ (definisi kongruensi)

$a \times (c+b) = a+b+(\alpha \times q)$ (modal kedua (##))

$a \times \big((a+c)+(c+b)\big) = a+b+(\alpha \times q)$ (modal kedua (∗∗) dan (##))

$a \times (a+b) = a+b+(\alpha \times q)$ (sifat transitif)

$a = a+b+(\alpha \times q)$ (sifat absorbsi +)

$a = (a \times c)+b+(\alpha \times q)$ (modal kedua (∗))

$a = b+(a \times c)+(\alpha \times q)$ (sifat komutatif +)

$a = \Big(b+\big((a \times c) \times (c \times b)\big)\Big)+(\alpha \times q)$ (modal kedua (∗) dan (#))

$a = \big(b+(a \times b)\big)+(\alpha \times q)$ (sifat transitif)

$a = \big(b+(b \times a)\big)+(\alpha \times q)$ (sifat komutatif ×)

$a = b+(\alpha \times q)$ (sifat absorbsi ×)

$a \equiv b \pmod{\alpha}$ (definisi kongruensi)

Karena (i) dan (ii) sudah terbukti, maka benar bahwa $a \equiv b \pmod{\alpha}$ jika dan hanya jika $a+b \equiv a+b \pmod{\alpha}$.

Berdasarkan pembuktian nomor 1 dan 2, maka lemma pada pembahasan ini terbukti benar.

Teorema 1

α adalah relasi ekuivalen. Misal $a \in L$ dan $(a,a) \in \alpha$, maka $a \equiv a \big(\bmod (a,a)\big)$ adalah kongruensi latis yang bersifat reflektif jika $q = 0$.

Bukti:

$a \equiv a \big(\bmod (a,a)\big)$ (modal utama)

$a \equiv a \pmod{\alpha}$ (diketahui)

i) $\forall z;\ z + a \equiv z + a \pmod{\alpha}$

$z + a = z + a + (\alpha \times q);\ q = 0$ (definisi kongruensi latis)

$z + a = z + a$

ii) $\forall z;\ z + a \equiv z + a \pmod{\alpha}$

$z + a = z + a + (\alpha \times q);\ q = 0$ (definisi kongruensi latis)

$z + a = z + a$

Maka terbukti bahwa $a \equiv a \left(\mathrm{mod}\ (a, a)\right)$ adalah kongruensi latis yang bersifat reflektif jika $q = 0$.

Teorema 2

α adalah relasi ekuivalen. Misal $a, b \in L$ dan $(a, b), (b, a) \in \alpha$, maka $a \equiv b \left(\mathrm{mod}\ (a, b)\right)$ jika dan hanya jika $b \equiv a \left(\mathrm{mod}\ (b, a)\right)$ adalah kongruensi latis yang bersifat simetris jika $q = 0$.

Bukti:

Untuk membuktikan $a \equiv b \left(\mathrm{mod}\ (a, b)\right)$ jika dan hanya jika $b \equiv a \left(\mathrm{mod}\ (b, a)\right)$, maka dibutuhkan pembuktian melalui dua arah, yaitu jika $a \equiv b \left(\mathrm{mod}\ (a, b)\right)$ maka $b \equiv a \left(\mathrm{mod}\ (b, a)\right)$ dan jika $b \equiv a \left(\mathrm{mod}\ (b, a)\right)$ maka $a \equiv b \left(\mathrm{mod}\ (a, b)\right)$. Dengan cara yang sama pada pembuktian Teorema 1, maka

i) Jika $a \equiv b \left(\mathrm{mod}\ (a, b)\right)$ maka $b \equiv a \left(\mathrm{mod}\ (b, a)\right)$

$\forall z;\ z + a \equiv z + b \pmod{\alpha}$

$z \times a \equiv z \times b \pmod{\alpha}$

maka untuk $z + a \equiv z + b \pmod{\alpha}$ berlaku,

$z + a = z + b + (\alpha \times q);\ q = 0$ (definisi kongruensi)

$z + a = z + b$

dan untuk $z + a \equiv z + b \pmod{\alpha}$ berlaku,

$z + a = z + b + (\alpha \times q);\ q = 0$ (definisi kongruensi)

$z + a = z + b$

ii) Jika $b \equiv a \left(\bmod (b, a)\right)$ maka $a \equiv b \left(\bmod (a, b)\right)$

$\forall z;\ z + b \equiv z + a \pmod{\alpha}$

$z \times b \equiv z \times a \pmod{\alpha}$

maka untuk $z \times b \equiv z \times a \pmod{\alpha}$ berlaku,

$z \times b = z \times a + (\alpha \times q);\ q = 0$ (definisi kongruensi)

$z \times b = z \times a$

dan untuk $z \times b \equiv z \times a \pmod{\alpha}$ berlaku,

$z \times b = z \times a + (\alpha \times q);\ q = 0$ (definisi kongruensi)

$z \times b = z \times a$

Maka terbukti bahwa $a \equiv b \left(\bmod (a, b)\right)$ jika dan hanya jika $b \equiv a \left(\bmod (b, a)\right)$ adalah kongruensi latis yang bersifat simetris jika $q = 0$.

3.5 Keutamaan Orang-orang yang Menuntut Ilmu dalam Islam

Berdasarkan pada pembahasan sebelumnya, telah dijelaskan bahwa pada bab ini akan membahas tentang menambah ilmu pengetahuan berupa sifat-sifat yang terdapat pada kongruensi latis serta memudahkan urusan orang lain dengan cara membuktikan lemma yang belum terbukti. Maka, terdapat hadits yang menunjang firman Allah pada pembahasan sebelumnya yang berbunyi:

قَالَ رَسُوْلُ اللهِ صَلَّى اللهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ: أُطْلُبُوْا الْعِلْمَ وَلَوْ بِالصِّيْنَ فَإِنَّ طَلَبَ الْعِلْمِ فَرِيْضَةٌ عَلَى كُلِّ مُسْلِمٍ إِنَّ الْمَلاَئِكَةَ تَضَعُ أَجْنِحَتَهَا لِطَالِبِ الْعِلْمِ رِضًا بِمَا يَطْلُبُ

"Tuntutlah ilmu walaupun di negeri Cina, karena sesungguhnya menuntut ilmu itu wajib bagi setiap muslim. Sesungguhnya para malaikat meletakkan sayap-sayap mereka kepada para penuntut ilmu karena senang dengan yang ia tuntut (HR. Ibnu Abdil Bar)".

Hadits tersebut menunjukkan bahwa menuntut ilmu itu wajib dan para malaikat turut berbahagia. Agama islam sangat memperhatikan pendidikan untuk mencari ilmu pengetahuan karena dengan ilmu pengetahuan manusia bisa berkarya dan berprestasi serta dapat menjadikan ibadah seseorang menjadi sempurna. Begitu pentingnya ilmu, Rasulullah mewajibkan umatnya agar menuntut ilmu, baik laki-laki maupun perempuan.

Untuk memperoleh ilmu pengetahuan, perlu adanya usaha. Oleh karena itu, Rasulullah pernah meminta umat Islam agar menuntut ilmu walaupun ke negeri Cina. Dianjurkannya memilih negeri Cina pada saat itu, karena kemungkinan peradaban Cina sudah maju.

Di lain hadits, Rasulullah juga menegaskan bahwa menuntut ilmu itu tidak mengenal batas usia. Hal ini dijelaskan dalam hadits yang berbunyi:

أُطْلُبُوا الْعِلْمَ مِنَ الْمَهْدِ إِلَى اللَّحْدِ

"Tuntutlah ilmu mulai dari buaian sampai liang lahat".

Selanjutnya dijelaskan pula bahwa mempermudah urusan orang lain, khususnya yang sedang mendapatkan kesulitan itu termasuk perbuatan baik. Hal ini telah dijelaskan dalam firman Allah yang berbunyi:

إِنْ أَحْسَنْتُمْ أَحْسَنْتُمْ لِأَنْفُسِكُمْ وَإِنْ أَسَأْتُمْ فَلَهَا...

"Jika kamu berbuat baik berarti kamu berbuat baik bagi dirimu sendiri dan jika kamu berbuat jahat maka kejahatan itu bagi dirimu sendiri... (QS. al-Isra':7)".

Adapun manfaat memudahkan orang lain yang sedang kesulitan adalah orang tersebut akan dimudahkan segala urusannya oleh Allah, baik urusan dunia maupun akhirat. Hal ini telah dijelaskan dalam hadits Rasulullah yang berbunyi:

...وَمَنْ يَسَّرَ عَلَى مُعْسِرٍ يَسَّرَ اللهُ عَلَيْهِ فِي الدُّنْيَا وَالْآخِرَةِ ...

"...dan barangsiapa memudahkan orang yang tengah dilanda kesulitan, maka Allah akan memudahkannya di dunia dan di akhirat..".

Alangkah beruntungnya seseorang yang kesehariannya senantiasa berusaha untuk memudahkan urusan orang-orang yang sedang kesulitan. Karena manfaat yang akan diperolehnya adalah mendapatkan kemudahan dari Allah, baik di dunia maupun di akhirat.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada bab sebelumnya, diperoleh beberapa kesimpulan yaitu sebagai berikut:

1. Terdapat kongruensi latis yang bersifat reflektif yaitu $a \equiv a \left(\mathrm{mod}\ (a,a)\right)$.
2. Terdapat kongruensi latis yang bersifat simetris yaitu $a \equiv b \left(\mathrm{mod}\ (a,b)\right)$ jika dan hanya jika $b \equiv a \left(\mathrm{mod}\ (b,a)\right)$.

4.2 Saran

Dalam penelitian ini, penulis hanya membahas dua definisi kongruensi latis beserta contoh yang berkaitan dengan kongruensi latis, kemudian definisi dari kongruensi latis tersebut dianalisis kesamaan dan perbedaannya sehingga membentuk sifat-sifat kongruensi latis, yaitu reflektif dan simetris. Kemudian sifat-sifat tersebut dibuktikan kebenarannya. Bagi peneliti selanjutnya dapat dikembangkan kajian tentang kongruensi latis dengan memberikan lebih banyak contoh, sehingga membentuk sifat baru yang berkaitan dengan kongruensi latis.

DAFTAR RUJUKAN

Abdussakir. 2009. *Matematika 1: Kajian Integratif Matematika dan Al-Qur'an.* Malang: UIN Malang Press.

Al-Albani, M.N. 2005. *Ringkasan Shahih Muslim*. Jakarta: Gema Insani Press.

Khusnah, A.A. 2016. *Penentuan Selesaian Kongruensi Polinomial*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Garg, V.K. 2007. *Lattice Theory with Applications*. Austin: University of Texas.

Ghoffar, M.A. 2004. *Lubaabut Tafsir min Ibnu Katsiir*. Bogor: Pustaka Imam Asy-Syafi'i.

Gilbert, L dan Gilbert, J. 2009. *Elements of Modern Algebra Seventh Edition*. USA: Cengage Learning.

Gratzer, G. 2011. *Lattice Theory Foundation*. Canada: Springer Basel.

Mayasari, Z.M. 2005. Pembentukan dan Sifat-sifat Latis Kongruen pada Semigrup. *Jurnal Gradien*, 1 (2): 87-89.

Nabil, A. 2009. *Keutamaan Menuntut Ilmu Menurut Syari'at*. Jakarta: Restu Agung.

Shiddiq, A.N. 2000. *Pedoman Belajar Pelajar dan Santri*. Surabaya: Al-Hidayah.

Sukardjono. 2002. *Teori Latis*. Yogyakarta: ANDI.

Sukirman. 2005. *Pengantar Aljabar Abstrak*. Malang: UM PRESS.

RIWAYAT HIDUP

Aminatul Mardiyah lahir di Malang pada tanggal 19 November 1993. Biasa dipanggil Dyah. Ia tinggal di Tempur-Kemiri, Kecamatan Kepanjen, Kabupaten Malang. Ia merupakan anak kedua dari pasangan Muhammad Zainuri dan Luluk Halimah. Pendidikan dasarnya ditempuh di SDN Kemiri 02 lulus 2003, melanjutkan ke MTS An-Nur Bululawang lulus pada tahun 2009 dan melanjutkan ke MA An-Nur Bululawang lulus pada tahun 2012. Selanjutnya menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang pada tahun 2013.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang
Telp./Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Aminatul Mardiyah
Nim : 13610120
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Kongruensi Latis
Pembimbing I : Evawati Alisah, M.Pd
Pembimbing II : Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan
1.	02 Mei 2017	Konsultasi Bab I, Bab II	1.
2.	03 Mei 2017	Konsultasi Bab I	2.
3.	09 Mei 2017	Konsultasi Kajian Keagamaan Bab I dan Bab II	3.
4.	09 Mei 2017	Konsultasi Bab II	4.
5.	10 Mei 2017	Konsultasi Bab III	5.
6.	10 Mei 2017	ACC Seminar Proposal	6.
7.	22 Agustus 2017	Konsultasi Kajian Keagamaan Bab II dan Bab III	7.
8.	24 Agustus 2017	Konsutasi Bab III	8.
9.	29 Agustus 2017	Konsutasi Bab III	9.
10.	5 September 2017	Konsutasi Bab III	10.
11.	15 September 2017	Konsutasi Bab III	11.
12.	26 September 2017	Konsutasi Bab III	12.
13.	2 Oktober 2017	Konsutasi Bab III	13.
14.	3 Oktober 2017	ACC Sidang Skripsi	14.
15.	3 Oktober 2017	ACC Sidang Skripsi	15.

Malang, 3 Oktober 2017
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001