

**ENERGI LAPLACE PADA KOMPLEMEN GRAF INVERS DARI GRUP
DIHEDRAL**

SKRIPSI

**OLEH
DWIKI MARLINDA AGUSTINA
NIM. 13610071**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018**

**ENERGI LAPLACE PADA KOMPLEMEN GRAF INVERS DARI GRUP
DIHEDRAL**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
Dwiki Marlinda Agustina
NIM. 13610071**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018**

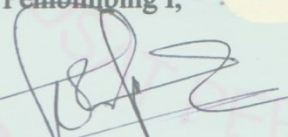
**ENERGI LAPLACE PADA KOMPLEMEN GRAF INVERS DARI GRUP
DIHEDRAL**

SKRIPSI


Oleh
Dwiki Marlinda Agustina
NIM. 13610071

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 4 Mei 2018

Pembimbing I,


Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

Pembimbing II,


Mohammad Jamhuri, M.Si
NIP. 19810502 200501 1 004

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

**ENERGI LAPLACE PADA KOMPLEMEN GRAF INVERS DARI GRUP
DIHEDRAL.**

**ENERGI LAPLACE PADA KOMPLEMEN GRAF INVERS DARI GRUP
DIHEDRAL**

SKRIPSI

Oleh
Dwiki Marlinda Agustina
NIM. 13610071

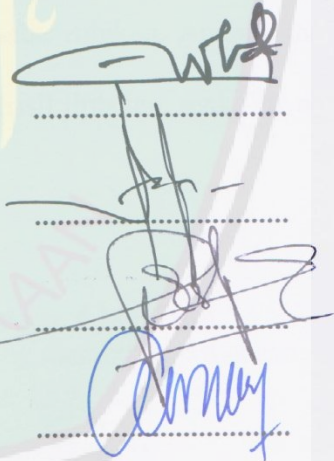
Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 30 Mei 2018

Penguji Utama : H. Wahyu H. Irawan, M.Pd

Ketua Penguji : Hairur Rahman, M.Si

Sekretaris Penguji : Dr. Abdussakir, M.Pd

Anggota Penguji : Mohammad Jamhuri, M.Si



Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Dwiki Marlinda Agustina

NIM : 13610071

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

JudulSkripsi : Energi *Laplace* pada Komplemen Graf Invers dari Grup
Dihedral

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 4 Mei 2018
Yang membuat pernyataan,

Dwiki Marlinda Agustina
NIM. 13610071

MOTO

Demi malam apabila telah sunyi...

Tuhanmu tidak meninggalkanmu,

Tidak pula benci kepadamu...

(QS. Adh-Dhuhaa: 2-3)



PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ibunda Sumarsih dan ayahanda Podo Susilo yang senantiasa mendoakan, memberi semangat, hingga sebagai tanda bakti, hormat, dan rasa terima kasih yang tiada terhingga atas kasih sayang dan segala dukungan yang tiada mungkin penulis balas hanya dengan selembar kertas yang bertuliskan kata cinta dan persembahan.

Semoga ini menjadi langkah awal untuk membuat Ibu dan Ayah bahagia.

Untuk kakak penulis Ika Susiloningsih dan adik-adik tersayang Moh. Fajar Eky PratamadanLuthfia Ayu Ningdyah yang selalu mendoakan.



KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya sehingga penulis mampu menyelesaikan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat serta salam kepada Nabi Muhammad Saw yang telah membimbing umat manusia menuju jalan yang terang.

Proses penyusunan skripsi ini, penulis mendapat banyak bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu penulis memberikan ucapan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan bimbingan, arahan, nasihat, motivasi, dan berbagai ilmunya kepada penulis.
5. Mohammad Jamhuri, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, arahan, dan berbagai ilmunya kepada penulis.

6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas ilmu dan bimbingannya.
7. Segenap keluarga terutama Ayah dan Ibu yang selalu memberikan doa, semangat, serta motivasi kepada penulis sampai saat ini.
8. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2013 yang telah banyak memberikan semangat, motivasi, dan arahan untuk mengerjakan skripsi secara baik.
9. Seluruh pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materil.

Penulis berharap agar skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembacamaupun bagi penulis.

Wassalamu 'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, Mei 2018

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR TABEL	xiii
DAFTAR GAMBAR	xiv
ABSTRAK	xv
ABSTRACT	xvi
ملخص	xvii
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Tujuan Penelitian	4
1.4 Manfaat Penelitian	4
1.5 Metode Penelitian	5
1.6 Sistematika Penulisan	6
BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Grup	7
2.1.1 Definisi Operasi Biner	7
2.1.2 Definisi Grup	8
2.2 Grup Dihedral	9
2.3 Graf	10
2.3.1 Definisi Graf	10
2.3.2 Derajat dan Matriks Derajat	11
2.3.3 Matriks Keterhubungan Titik	12
2.3.4 Matriks <i>Laplace</i>	12
2.3.5 Graf Komplemen	12
2.4 Energi <i>Laplace</i>	13
2.5 Graf Invers dan Komplemen Graf Invers	14

2.6 Kajian Al-Quran tentang Energi	15
--	----

BAB III PEMBAHASAN

3.1 Energi <i>Laplace</i> pada Komplemen Graf Invers dari Grup Dihedral-6 ..	17
3.1.1 Invers dari Masing-masing Anggota D_6	17
3.1.2 Graf Invers Grup Dihedral-6	18
3.1.3 Graf Komplemen dari $G_S(D_6)$	19
3.1.4 Matriks <i>Laplace</i> pada $\overline{G_S(D_6)}$	20
3.1.5 Energi <i>Laplace</i> pada $\overline{G_S(D_6)}$	21
3.2 Energi <i>Laplace</i> pada Komplemen Graf Invers dari Grup Dihedral-8 .	22
3.2.1 Invers dari Masing-masing Anggota D_8	22
3.2.2 Graf Invers Grup Dihedral-8	23
3.2.3 Graf Komplemen dari $G_S(D_8)$	24
3.2.4 Matriks <i>Laplace</i> pada $\overline{G_S(D_8)}$	25
3.2.5 Energi <i>Laplace</i> pada $\overline{G_S(D_8)}$	27
3.3 Energi <i>Laplace</i> pada Komplemen Graf Invers dari Grup Dihedral-10	28
3.3.1 Invers dari Masing-masing Anggota D_{10}	29
3.3.2 Graf Invers Grup Dihedral-10 (D_{10})	29
3.3.3 Graf Komplemen dari $G_S(D_{10})$	30
3.3.4 Matriks <i>Laplace</i> pada $\overline{G_S(D_{10})}$	30
3.3.5 Energi <i>Laplace</i> pada $\overline{G_S(D_{10})}$	33
3.4 Energi <i>Laplace</i> pada Komplemen Graf Invers dari Grup Dihedral-12	33
3.4.1 Invers dari Masing-masing Anggota D_{12}	34
3.4.2 Graf Invers Grup Dihedral-12 (D_{12})	35
3.4.3 Graf Komplemen dari $G_S(D_{12})$	36
3.4.4 Matriks <i>Laplace</i> pada $\overline{G_S(D_{12})}$	37
3.4.5 Energi <i>Laplace</i> pada $\overline{G_S(D_{12})}$	40
3.5 Energi <i>Laplace</i> pada Komplemen Graf Invers dari Grup Dihedral-14	40
3.5.1 Invers dari Masing-masing Anggota D_{14}	41
3.5.2 Graf Invers Grup Dihedral-14 (D_{14})	42
3.5.3 Graf Komplemen dari $G_S(D_{14})$	43
3.5.4 Matriks <i>Laplace</i> pada $\overline{G_S(D_{14})}$	44
3.5.5 Energi <i>Laplace</i> pada $\overline{G_S(D_{14})}$	47
3.6 Energi <i>Laplace</i> pada Komplemen Graf Invers dari Grup Dihedral-16	48
3.6.1 Invers dari Masing-masing Anggota D_{16}	49
3.6.2 Graf Invers Grup Dihedral-16 (D_{16})	49
3.6.3 Graf Komplemen dari $G_S(D_{16})$	50
3.6.4 Matriks <i>Laplace</i> pada $\overline{G_S(D_{16})}$	51
3.6.5 Energi <i>Laplace</i> pada $\overline{G_S(D_{16})}$	55
3.7 Konsep Energi dalam Al-Quran	66

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan	68
4.2 Saran	68

DAFTAR RUJUKAN 69
LAMPIRAN-LAMPIRAN
RIWAYAT HIDUP



DAFTAR TABEL

Tabel 3.1. Tabel <i>Cayley</i> Grup Dihedral-6 (D_6)	17
Tabel 3.2. Tabel <i>Cayley</i> Grup Dihedral-8 (D_8)	22
Tabel 3.3. Tabel <i>Cayley</i> Grup Dihedral-10 (D_{10})	28
Tabel 3.4. Tabel <i>Cayley</i> Grup Dihedral-12 (D_{12})	34
Tabel 3.5. Tabel <i>Cayley</i> Grup Dihedral-14 (D_{14})	41
Tabel 3.6. Tabel <i>Cayley</i> Grup Dihedral-16 (D_{16})	48
Tabel 3.7. Polinomial Karakteristik, Nilai Eigen, dan Energi <i>Laplace</i> dari $\overline{G_S(D_{2n})}$	55

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1. Suatu Graf dan Komplementennya	13
Gambar 2.2. Graf Invers Grup Modulo Bilangan Bulat	15
Gambar 2.3. Komplemen Graf Invers Grup Modulo Bilangan Bulat	16
Gambar 3.1. Graf Invers Grup Dihedral-6 $G_S(D_6)$	19
Gambar 3.2. Komplemen Graf Invers Grup Dihedral-6 $\overline{G_S(D_6)}$	20
Gambar 3.3. Graf Invers Grup Dihedral-8 $G_S(D_8)$	25
Gambar 3.4. Komplemen Graf Invers Grup Dihedral-8 $\overline{G_S(D_8)}$	26
Gambar 3.5. Graf Invers Grup Dihedral-10 $G_S(D_{10})$	30
Gambar 3.6. Komplemen Graf Invers Grup Dihedral-10 $\overline{G_S(D_{10})}$	31
Gambar 3.7. Graf Invers Grup Dihedral-12 $G_S(D_{12})$	36
Gambar 3.8. Komplemen Graf Invers Grup Dihedral-12 $\overline{G_S(D_{12})}$	37
Gambar 3.9. Graf Invers Grup Dihedral-14 $G_S(D_{14})$	42
Gambar 3.10. Komplemen Graf Invers Grup Dihedral-14 $\overline{G_S(D_{14})}$	43
Gambar 3.11. Graf Invers Grup Dihedral-16 $G_S(D_{16})$	49
Gambar 3.12. Komplemen Graf Invers Grup Dihedral-16 $\overline{G_S(D_{16})}$	50
Gambar 3.13. Graf Invers Grup Dihedral- $2n$ $G_S(D_{2n})$	58
Gambar 3.14. Komplemen Graf Invers Grup Dihedral- $2n$ $\overline{(G_S(D_{2n}))}$	58

ABSTRAK

Agustina, Dwiki Marlinda. 2018. **Energi Laplace pada Komplemen Graf Invers dari Grup Dihedral**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Abdussakir, M.Pd. (II) Mohammad Jamhuri, M.Si.

Kata kunci: Energi Laplace, Matriks Keterhubungan Titik, Matriks Derajat, Matriks Laplace, Nilai Eigen, Graf Invers, Grup Dihedral

Perkembangan terbaru dari teori graf yang banyak dikaji adalah meneliti graf yang dibangun dari grup. Pada penulisan skripsi ini dibahas mengenai energi Laplace pada komplemen graf invers dari grup dihedral. Metode yang digunakan dalam penulisan skripsi ini adalah kajian pustaka, dengan menggunakan rujukan beberapa buku dan jurnal.

Graf dapat dinyatakan dalam bentuk matriks, misalnya matriks keterhubungan titik, matriks derajat, dan matriks Laplace. Matriks-matriks tersebut dapat digunakan untuk mencari nilai Eigennya. Jumlah nilai mutlak dari nilai Eigen pada suatu graf G disebut energi $E(G)$.

Penelitian ini bertujuan untuk mencari pola energi Laplace pada komplemen graf invers dari grup dihedral yang kemudian dijadikan teorema. Hasil dari penelitian ini adalah:

Energi Laplace pada komplemen graf invers dari grup dihedral D_{2n}

a. untuk n ganjil dan $n \geq 3$ adalah

$$LE(\overline{G_S(D_{2n})}) \geq \left| \frac{2n^3 + n^2 - 2qn - n + 2q}{n} \right|$$

b. untuk n genap dan $n = 4(k + 1)$, $k \in \mathbb{N}$ adalah

$$LE(\overline{G_S(D_{2n})}) \geq \left| \frac{2n^3 + n^2 - 2qn + 4n + 2q}{n} \right|$$

c. untuk n genap dan $n = 4k + 2$, $k \in \mathbb{N}$ adalah

$$LE(\overline{G_S(D_{2n})}) \geq \left| \frac{2n^3 + 3n^2 - 4n - 2qn + 2q}{n} \right|$$

dengan q adalah ukuran komplemen graf invers dari grup dihedral.

Bagi penelitian selanjutnya, disarankan untuk melanjutkan penelitian tentang energi Laplace yang dapat diperoleh dari grup lainnya.

ABSTRACT

Agustina, Dwiki Marlinda. 2018. **Laplacian Energy of Complement Graph of Inverse Graph of Dihedral Group**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University Malang. Advisor: (I) Dr. Abdussakir, M.Pd. (II) Mohammad Jamhuri, M.Si.

Keyword: Laplacian energy, adjacency vertex matrix, degree matrix, Laplacian matrix, eigen value, invers graph, dihedral group

The recent development of the graph theory is researching graph which formed from group. This thesis will examine the Laplacian energy of complement of invers graph of dihedral group. The method used in this thesis is library research using some references such as books and journals.

Graph can be shown in matrix form, for example adjacency vertex matrix, degree matrix, and Laplacian matrix. These matrix can be used to find Eigen values. The sum of the absolute values of the Eigen values of a graph G are called energy of G and denoted by $E(G)$.

The purpose of this research is to find a formula of Laplacian energy of complement of invers graph of dihedral group which will be used as a theorem. The result from this research are:

Laplacian energy of complement of invers graph of dihedral group D_{2n}

a. for n is odd and $n \geq 3$ is:

$$LE(\overline{G_S(D_{2n})}) \geq \left| \frac{2n^3 + n^2 - 2qn - n + 2q}{n} \right|$$

b. for n is even and $n = 4(k + 1)$, $k \in \mathbb{N}$ is:

$$LE(\overline{G_S(D_{2n})}) \geq \left| \frac{2n^3 + n^2 - 2qn + 4n + 2q}{n} \right|$$

c. for n is even and $n = 4k + 2$, $k \in \mathbb{N}$ is:

$$LE(\overline{G_S(D_{2n})}) \geq \left| \frac{2n^3 + 3n^2 - 4n - 2qn + 2q}{n} \right|$$

with q is the edge of complement of invers graph of dihedral group.

For further research, it is suggested to continue the research about Laplacian energy from another groups.

ملخص

أغستينا، دويكي مارليندا. ٢٠١٨. الطاقة لافلاس على مخطط معاكس مكاملة من زمرة زوجية. بحث جامعي. شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المستشار: (١)د. عبد الشاكر، الماجستير. (٢) محمد جمهوري، الماجستير. الكلمات الرئيسية: الطاقة لافلاس، المصفوفة المجاورة، مصفوفة الدرجة، مصفوفة لابلاس، القيم الذاتية، مخطط معاكس، زمرة زوجية.

التطور الأحداث لنظرية مخطط هو بحث مخطط المبنية الزمرة. على هذه البحث يبحث حول الطاقة لافلاس على ملحق مخطط معكوس من زمرة زوجية. الطريقة المستخدمة في هذا البحث هي مراجعة الأدب، وباستخدام مراجع للعديد من الكتب والمجلات.

يمكن مخطط التعبير عن مخطط في شكل المصفوفة، مثل المصفوفة المجاورة، ومصفوفة الدرجة، ومصفوفة لافلاس. يمكن استخدام المصفوفات للعثور على القيم الذاتية. العدد النتيجة المطلقة عليها الطاقة E (G).

تهدف هذه الدراسة إلى العثور على ملحق مخطط العكسي لزمرة زوجية والذي يستخدم بعد ذلك كمسألة النظرية. نتائج هذا البحث هي الطاقة لافلاس على مكمل مخطط العكسي لزمرة

$$D_{2n}$$

(أ). ان كان $n \geq 3$ فرديا فكان

$$LE(G_S(D_{2n})) \geq \left| \frac{2n^3+n^2-2qn-n+2q}{n} \right|$$

(ب). ان كان $n = 4(k+1)$, $k \in \mathbb{N}$ زوجيا فكان

$$LE(G_S(D_{2n})) \geq \left| \frac{2n^3+n^2-2qn+4n+2q}{n} \right|$$

(ج). ان كان $n = 4k+2$, $k \in \mathbb{N}$ زوجيا فكان

$$LE(G_S(D_{2n})) \geq \left| \frac{2n^3+3n^2-4n-2qn+2q}{n} \right|$$

مع q أضلاع ملحق مخطط العكسي لزمرة زوجية.

التالي، مواصلة بما البحث عن طاقة لابلاس التي يمكن الحصول من زمرة أخرى.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Alam semesta memuat bentuk-bentuk serta konsep matematika. Allah menciptakan alam semesta dan seluruh isinya dengan ukuran-ukuran yang akurat dan seksama, dengan perhitungan-perhitungan yang definit, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdussakir, 2007).

Dalam al-Quran surat an-Naba'/78:29 disebutkan,

وَكُلُّ شَيْءٍ أَحْصَيْنَاهُ كِتَابًا

Artinya: "Dan segala sesuatu telah Kami catat dalam suatu kitab" (QS. an-Naba'/78:29).

ayat di atas menjelaskan bahwa segala yang ada di alam semesta ini telah dicatat atau dihitung. Para ilmuwan matematika atau fisika yang menemukan suatu rumus atau persamaan kemudian mereka meneliti dan mengembangkannya. Karena manusia dianugerahi akal oleh Allah supaya mereka berpikir tentang kebesarannya. Akal sebagai pembeda antara manusia dengan makhluk lain. Hal ini menjadi bukti kompleks sempurnanya manusia. Maka akal adalah alat utama manusia dalam menjawab segala urusan dan masalah yang dimilikinya.

Merujuk pada ayat Allah di atas, maka matematika merupakan ilmu yang diturunkan Allah sebagai alat untuk manusia dalam memikirkan kesempurnaan Allah. Salah satu cabang penting dalam matematika adalah teori graf yang banyak diterapkan dalam konsep-konsep sains dan teknologi yang pada akhirnya bermuara pada pengakuan manusia atas kebesaran Allah. Secara teori, graf G

adalah pasangan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tak kosong dan berhingga dari objek-objek yang dinamakan titik, dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang dinamakan *sisi*. *Order* adalah banyaknya unsur di $V(G)$ dari G dan disimbolkan dengan $p(G)$, sedangkan *ukuran* adalah banyaknya unsur di $E(G)$ dari G dan disimbolkan dengan $q(G)$. Komplemen dari graf G , ditulis \bar{G} , adalah graf dengan himpunan titik $V(G)$ sedemikian sehingga dua titik akan terhubung langsung jika dan hanya jika dua titik tersebut tidak terhubung langsung di G (Abdussakir, dkk, 2009).

Matriks keterhubungan titik (atau matriks keterhubungan) dari graf G dilambangkan dengan $A(G)$, yaitu matriks $(p \times p)$ dengan unsur pada baris ke- i dan kolom ke- j bernilai 1 jika titik v_i terhubung langsung dengan titik v_j serta bernilai 0 jika v_i tidak terhubung langsung dengan titik v_j . Sehingga, matriks keterhubungan titik dapat ditulis $A(G) = [a_{ij}]$, $1 \leq i, j \leq p$, dengan

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika } v_i v_j \in (G) \\ 0, & \text{jika } v_i v_j \notin (G) \end{cases}$$

Matriks keterhubungan titik suatu graf G adalah matriks simetri dengan unsur 0 dan 1 dan memuat nilai 0 pada diagonal utamanya. Hal ini karena graf tidak memuat lup dan tidak memuat sisi paralel (Abdussakir, dkk, 2009).

Matriks derajat dari graf G dilambangkan dengan $D(G)$, merupakan matriks diagonal dengan elemen baris ke- i dan kolom ke- j merupakan derajat dari v_i , $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Jadi, matriks derajat dari graf G dapat ditulis $D(G) = [d_{ij}]$, $1 \leq i, j \leq n$. Matriks $L(G) = D(G) - A(G)$ dikatakan matriks *Laplace*

(Biyikoglu, dkk, 2009). Matriks *Laplace* $L = L(G)$ pada graf- (p, q) dapat juga didefinisikan dengan elemen matriks sebagai berikut:

$$I_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{jika } i \neq j, v_i \text{ dan } v_j \text{ terhubung langsung} \\ 0 & \text{jika } i \neq j, v_i \text{ dan } v_j \text{ tidak terhubung langsung} \\ d_i & \text{jika } i = j \end{cases}$$

dengan d_i adalah derajat vertex ke- i pada G . Untuk mencari nilai Eigen, dapat diselesaikan untuk $\lambda, \det(\lambda I - L(G)) = 0$. Nilai Eigen λ diberikan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$. Energi *Laplace* dapat dilambangkan $LE = LE(G) = \sum_{i=1}^n \left| \lambda_i - \frac{2q}{p} \right|$ (Meenakshi & Lavanya, 2014).

Perkembangan terbaru dari teori graf yang banyak dikaji oleh matematikawan adalah meneliti graf yang dibangun dari grup. Misal $(\Gamma, *)$ adalah grup berhingga dan S subset dari G dan S suatu himpunan dari semua anggota Γ yang tidak invers ke dirinya sendiri. Graf invers $G_S(\Gamma)$ yang dibangun dari Γ adalah graf yang himpunan titiknya adalah semua anggota di Γ sedemikian sehingga setiap titik yang berbeda u dan v adalah bertetangga di $G_S(\Gamma)$ jika dan hanya jika $u * v$ atau $v * u$ ada di S (Alfuraidan & Zakariya, 2017).

Das dan Mojalal (2016) menuliskan hubungan antara energi dan energi *Laplace* pada graf. Meenakshi dan Lavanya (2014) meneliti beberapa energi pada beberapa jenis graf. Alfuraidan dan Zakariya (2017) menuliskan definisi, contoh beserta sifat-sifat dari graf invers. Sifat-sifat yang ditulis berupa sifat derajat titik dari graf invers, diameter dari graf invers, serta sifat Hamiltonian dari beberapa graf invers.

Mengacu pada ketiga penelitian tersebut, peneliti tertarik untuk mengembangkan dan menggabungkan graf invers dengan energi *Laplace* sehingga diperoleh kajian tentang energi *Laplace* dari graf invers yang dibangun

dari grup berhingga. Grup dihedral merupakan salah satu grup berhingga yang sering diminati dan diteliti oleh matematikawan sehingga dapat dibentuk suatu graf invers dari grup dihedral. Agar graf yang dibangun terhubung, maka graf yang digunakan adalah komplemen dari graf invers grup dihedral.

Berdasarkan uraian di atas, maka judul dari penelitian ini adalah “Energi *Laplace* pada Komplemen Graf Invers dari Grup Dihedral”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini yaitu bagaimana pola dari energi *Laplace* pada komplemen graf invers dari grup dihedral?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, maka tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini yaitu untuk mengetahui pola dari energi *Laplace* pada komplemen graf invers dari grup dihedral.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat yaitu informasi mengenai energi *Laplace* pada komplemen graf invers dari grup dihedral.

1.5 Metode Penelitian

Penelitian yang dilakukan yaitu dengan pendekatan penelitian kualitatif. Jenis penelitian yang digunakan berupa studi kepustakaan (*library research*).

Langkah-langkah dalam penelitian ini antara lain:

- a. Menganalisis data dengan langkah-langkah sebagai berikut:
 1. Menuliskan anggota dan membentuk Tabel *Cayley* dari grup dihedral $D_6, D_8, D_{10}, D_{12}, D_{14}$, dan D_{16} .
 2. Mencari invers dari masing-masing anggota pada $D_6, D_8, D_{10}, D_{12}, D_{14}$, dan D_{16} .
 3. Membentuk himpunan bagian S dari $D_6, D_8, D_{10}, D_{12}, D_{14}$, dan D_{16} yang anggotanya merupakan semua anggota dari masing-masing grup dihedral yang inversnya bukan dirinya sendiri.
 4. Membangun dan menggambarkan graf invers dari grup dihedral $D_6, D_8, D_{10}, D_{12}, D_{14}$, dan D_{16} .
 5. Menggambar komplement graf invers yang dibangun dari grup dihedral $D_6, D_8, D_{10}, D_{12}, D_{14}$, dan D_{16} .
 6. Menentukan matriks *Laplace* dari grup dihedral $D_6, D_8, D_{10}, D_{12}, D_{14}$, dan D_{16} .
 7. Menentukan polinomial karakteristik dari matriks *Laplace* pada grup dihedral $D_6, D_8, D_{10}, D_{12}, D_{14}$, dan D_{16} .
 8. Mencari nilai Eigen dari matriks *Laplace* pada grup dihedral $D_6, D_8, D_{10}, D_{12}, D_{14}$, dan D_{16} .
 9. Mencari nilai energi *Laplace* pada komplement graf invers yang dibangun dari grup dihedral $D_6, D_8, D_{10}, D_{12}, D_{14}$, dan D_{16} .

10. Merumuskan pola dari energi *Laplace* pada komplemen graf invers yang dibangun dari grup dihedral.

1.6 Sistematika Penulisan

Dalam penelitian ini, sistematika penulisan yang digunakan penulis terdiri atas empat bab, dan masing-masing bab terbagi dalam subbab dengan sistematika penulisan sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Berisi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Berisi pustaka atau literatur pendukung objek permasalahan antara lain tentang operasi biner, grup, grup dihedral, graf, matriks derajat, matriks *Adjacency* (keterhubungan titik), matriks *Laplace*, graf komplemen, energi *Laplace*, graf invers, dan kajian al-Quran tentang energi.

Bab III Pembahasan

Berisi tentang pembahasan mengenai pola dari energi *Laplace* pada komplemen graf invers yang dibangun dari grup dihedral dan konsep energi dalam al-Quran.

Bab IV Penutup

Berisi kesimpulan dan saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Grup

2.1.1 Definisi Operasi biner

Definisi 2.1

Misal G adalah himpunan tak kosong. Suatu pemetaan dari $G \times G$ ke G , untuk setiap pasangan terurut (a, b) dari anggota G , sebuah elemen unik dinotasikan dengan $a * b$ dari G disebut sebagai operasi biner atau komposisi biner pada G (Raisinghanian & Aggarwal, 1980).

Contoh 2.1

Diberikan \mathbb{N} adalah himpunan semua bilangan asli dan $*$ merupakan operasi pada \mathbb{N} dengan ketentuan $a, b \in \mathbb{N}, a * b = a + b$. Karena $a \in \mathbb{N}$ dan $b \in \mathbb{N}$, maka penjumlahan dari kedua bilangan asli akan menghasilkan bilangan asli, ditulis $a + b \in \mathbb{N}$. Jadi operasi $*$ adalah operasi biner pada \mathbb{N} .

Definisi 2.2

Misal G adalah himpunan tak kosong. Suatu pemetaan dari $G \times G$ ke G , untuk setiap pasangan terurut (a, b) dari anggota G , sebuah elemen unik dinotasikan dengan $a * b$ dari G disebut sebagai operasi biner atau komposisi biner pada G (Raisinghanian & Aggarwal, 1980).

Contoh 2.2

Diberikan \mathbb{N} adalah himpunan semua bilangan asli dan $*$ merupakan operasi pada \mathbb{N} dengan ketentuan $a, b \in \mathbb{N}, a * b = a + b$. Karena $a \in \mathbb{N}$ dan

$b \in \mathbb{N}$, sehingga penjumlahan dari kedua bilangan asli akan menghasilkan bilangan asli, ditulis $a + b \in \mathbb{N}$. Jadi operasi $+$ merupakan operasi biner pada \mathbb{N} .

2.1.2 Definisi Grup

Definisi 2.3

Misalkan operasi biner $*$ terdefinisi pada unsur di himpunan G . Maka G merupakan suatu grup dengan operasi $*$ jika memenuhi aksioma sebagai berikut:

1. G tertutup pada operasi $*$. Yaitu jika $x \in G$ dan $y \in G$ maka $x * y \in G$,
2. Operasi $*$ bersifat asosiatif di G . Untuk setiap $x, y, z \in G$, maka $x * (y * z) = (x * y) * z$,
3. G mempunyai elemen identitas e terhadap operasi $*$. Terdapat suatu e di G sedemikian sehingga $x * e = e * x = x$ untuk setiap $x \in G$,
4. G memuat invers terhadap operasi $*$. Untuk setiap $a \in G$, terdapat $b \in G$ sedemikian sehingga $a * b = b * a = e$ (Gilbert & Gilbert, 2009).

Contoh 2.3

Misalkan \mathbb{Z} adalah himpunan bilangan bulat, maka $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup oleh sebab itu berlaku:

- a. Operasi penjumlahan $(+)$ pada \mathbb{Z} adalah operasi biner yang terdefinisi di \mathbb{Z} karena operasi biner adalah pemetaan $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$. Untuk setiap $k, l \in \mathbb{Z}$ maka $k + l \in \mathbb{Z}$. Sehingga \mathbb{Z} tertutup terhadap operasi $+$.
- b. Untuk setiap $k, l, m \in \mathbb{Z}$ maka $k + (l + m) = (k + l) + m$. Sehingga operasi $+$ bersifat asosiatif di \mathbb{Z} .
- c. Terdapat anggota identitas yaitu $0 \in \mathbb{Z}$ terhadap operasi $+$ di \mathbb{Z} sedemikian sehingga $k + 0 = 0 + k = k$, untuk setiap $k \in \mathbb{Z}$.

- d. Untuk $k \in \mathbb{Z}$ terdapat $(-k) \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $k + (-k) = (-k) + k = 0$.

Berdasarkan a, b, c, dan d maka terbukti bahwa $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup.

Definisi 2.4

Misalkan G adalah grup dengan operasi $*$. Maka G dikatakan grup komutatif atau grup abelian jika operasi $*$ bersifat komutatif di G . Yaitu $x * y = y * x$ untuk setiap $x, y \in G$ (Gilbert & Gilbert, 2009).

2.2 Grup Dihedral

Grup dihedral merupakan grup dari himpunan simetri-simetri dari segi- n beraturan dengan simbol D_{2n} , untuk setiap n bilangan bulat positif dan $n \geq 3$. Ada juga yang menuliskan dengan D_n (Dummit & Foote, 1991).

Misalkan D_{2n} suatu grup yang didefinisikan oleh st untuk $s, t \in D_{2n}$ yang didapat dari simetri (simetri sebagai fungsi pada segi- n , maka st adalah fungsi komposisi). Jika s, t akibat permutasi titik berturut-turut σ, τ , maka st akibat dari $\sigma \circ \tau$. Operasi biner pada D_{2n} dikatakan asosiatif karena fungsi komposisinya asosiatif. Identitas dari D_{2n} merupakan identitas dari simetri (yang meninggalkan semua titik tetap), disimbolkan dengan 1 , dan invers dari $s \in D_{2n}$ merupakan kebalikan semua putaran dari simetri s (jadi jika s adalah akibat permutasi pada titik σ, s^{-1} akibat dari σ^{-1}) (Dummit & Foote, 1991).

Beberapa catatan dan hitungan untuk menyederhanakan perhitungan dan membantu meneliti D_{2n} selanjutnya, antara lain:

1. $1, r, r^2, \dots, r^{n-1}$ adalah unsur yang berbeda dan $|r| = n$,
2. $|s| = 2$,

$$3. s \neq r^i, \forall i,$$

$$4. sr^i \neq sr^j, \forall 0 \leq i, j \leq n - 1 \text{ dengan } i \neq j. \text{ Jadi}$$

$D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$, yaitu setiap anggota dapat dituliskan dengan $s^k r^i$ untuk $k = 0$ atau 1 dan $0 \leq i \leq n - 1$,

$$5. sr = r^{-1}s,$$

$$6. sr^i = r^{-i}s \text{ untuk semua } 0 \leq i \leq n \text{ (Dummit \& Foote, 1991)}.$$

Sebagai contoh D_6 merupakan grup dihedral yang memuat semua simetri (rotasi dan refleksi) pada bangun segitiga sehingga $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$.

2.3 Graf

2.3.1 Definisi Graf

Graf G adalah pasangan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tak kosong dan berhingga dari objek-objek yang dinamakan titik, dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang dinamakan sisi. *Order* adalah jumlah unsur di $V(G)$ dari G dan disimbolkan dengan $p(G)$, sedangkan *ukuran* adalah jumlah unsur di $E(G)$ dari G dan disimbolkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibahas hanya graf G , maka *order* dan *ukuran* dari G masing-masing dapat ditulis p dan q . Graf dengan *order* p dan *ukuran* q dinamakan graf- (p, q) (Abdussakir, dkk, 2009).

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v . Jika $e = (u, v)$ merupakan sisi di graf G , maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*), v dan e serta u dan e disebut terkait langsung (*incident*), dan titik u dan v disebut ujung dari e . Jika dua sisi berbeda e_1 dan e_2 terkait langsung pada titik yang sama maka disebut terhubung langsung (*adjacent*) (Abdussakir, dkk, 2009).

2.3.2 Derajat dan Matriks Derajat

Derajat titik v dari graf G merupakan jumlah titik di G yang terhubung langsung dengan v . Oleh karena itu, derajat titik v merupakan banyaknya titik pada lingkungan $N(v)$. Derajat dari titik v pada graf G ditulis dengan $\deg_G v$ atau $\deg v$. Suatu titik dengan derajat 0 dinamakan titik terasing dan titik dengan derajat 1 dinamakan titik ujung atau daun. Derajat terbesar dari semua titik di G disebut derajat maksimum dari G dan ditulis $\Delta(G)$. Derajat minimum dari G ditulis $\delta(G)$. Oleh karena itu, jika v merupakan titik dari graf G dengan orde n , maka $0 \leq \delta(G) \leq \deg v \leq \Delta(G) \leq n - 1$ (Chartrand, dkk, 2016).

Teorema 2.1

Jika G adalah graf dengan ukuran m , maka

$$\sum_{v \in V(G)} \deg v = 2m.$$

Bukti:

Ketika menjumlahkan derajat titik pada graf G , setiap sisi dari G dihitung dua kali, sekali untuk setiap dua titik yang *incident*.

Matriks derajat pada matriks G dilambangkan dengan $D(G)$, merupakan matriks diagonal dengan elemen baris ke- i dan kolom ke- j merupakan derajat dari $v_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$. Sehingga, matriks derajat dari graf G dapat ditulis $D(G) = [d_{ij}], 1 \leq i, j \leq n$ (Biyikoglu, dkk, 2009).

2.3.3 Matriks Keterhubungan Titik

Matriks keterhubungan titik (atau matriks keterhubungan) dari graf G dilambangkan dengan $A(G)$, yaitu matriks $(p \times p)$ dengan unsur pada baris ke- i dan kolom ke- j bernilai 1 jika titik v_i terhubung langsung dengan titik v_j serta bernilai 0 jika v_i tidak terhubung langsung dengan titik v_j . Sehingga, matriks keterhubungan titik dapat ditulis $A(G) = [a_{ij}]$, $1 \leq i, j \leq p$, dengan

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika } v_i v_j \in E(G) \\ 0, & \text{jika } v_i v_j \notin E(G) \end{cases}$$

Matriks keterhubungan titik suatu graf G adalah matriks simetri yang unsurnya 0 dan 1 dan memuat nilai 0 pada diagonal utamanya (Abdussakir, dkk, 2009).

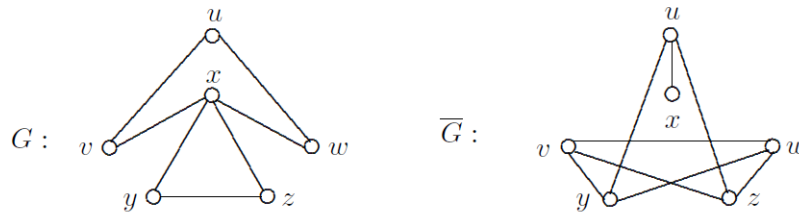
2.3.4 Matriks Laplace

Misalkan $G(V, E)$ adalah graf dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E , dikonversi menjadi $|V| = p$ dan $|E| = q$. Maka G merupakan graf dengan p titik dan q sisi. Matriks Laplace dari G adalah matriks $L(G) = D(G) - A(G)$. $D(G)$ merupakan diagonal matriks dengan entrinya adalah derajat titik dari G dan $A(G)$ merupakan matriks keterhubungan titik pada graf G (Biyikoglu, dkk, 2009).

2.3.5 Graf Komplemen

Komplemen \bar{G} dari graf G merupakan graf dengan himpunan titik $V(G)$ sedemikian sehingga dua titik adalah terhubung langsung di \bar{G} jika dan hanya jika titik tersebut tidak terhubung langsung di G . Jika graf G berorde n dan berukuran m , maka \bar{G} berorde n memiliki ukuran $(n(n-1)/2) - m$ (Chartrand, dkk, 2016).

Suatu graf G dan komplemennya ditunjukkan pada Gambar 2.1 berikut:



Gambar 2.1 Suatu Graf dan Komplemennya

2.4 Energi Laplace

Energi $E(G)$ pada graf G adalah jumlah nilai mutlak dari nilai Eigen. Misal G adalah graf dengan p titik dan q sisi. Nilai Eigen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ pada matriks keterhubungan titik graf G disebut nilai Eigen pada G . Maka energi pada graf G didefinisikan sebagai $E(G) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i(G)|$ (Zhou & Gutman, 2007).

Matriks Laplace $L = L(G)$ pada graf- (p, q) dapat juga didefinisikan dengan elemen matriks sebagai berikut:

$$I_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{jika } i \neq j, v_i \text{ dan } v_j \text{ terhubung langsung} \\ 0 & \text{jika } i \neq j, v_i \text{ dan } v_j \text{ tidak terhubung langsung} \\ d_i & \text{jika } i = j \end{cases}$$

dengan d_i adalah derajat vertex ke- i pada G .

Untuk mencari nilai Eigen, dapat diselesaikan untuk $\lambda, \det(\lambda I - L(G)) = 0$. Nilai Eigen λ diberikan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$. Energi Laplace dapat dilambangkan $LE = LE(G) = \sum_{i=1}^n \left| \lambda_i - \frac{2q}{p} \right|$. Batas-batas matriks Laplace:

1. Untuk graf dengan bilangan pada graf komponen $p \leq 2M \left(\frac{2q}{p} \right)^{-2}$.

Batas atas bertambah dengan mengurangi p . Oleh sebab itu untuk graf

$$\text{semacamnya } LE(G) \leq \frac{2q}{p} + \sqrt{(p-1)2q - \frac{2q^2}{p}}.$$

2. Misal G adalah graf terhubung dengan p titik dan q sisi dan derajat maksimumnya Δ . Maka $LE(G) \geq 2(\Delta + 1 - \frac{2q}{p})$ (Meenakshi & Lavanya, 2014).

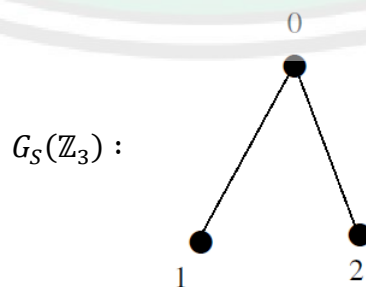
2.5 Graf Invers dan Komplemen Graf Invers

Misalkan $(\Gamma, *)$ adalah grup berhingga dan $S = \{u \in \Gamma \mid u \neq u^{-1}\}$. Didefinisikan graf invers yang terasosiasi dengan $\Gamma G_S(\Gamma)$ adalah graf yang himpunan titiknya serupa dengan Γ sedemikian sehingga dua titik yang berbeda u dan v adalah terhubung langsung jika dan hanya jika $u * v \in S$ atau $v * u \in S$. Identitas e adalah anggota trivial yang invers terhadap dirinya sendiri dalam grup berhingga Γ . Maka $e \notin S$. Sehingga menyebabkan kardinalitas dari S kurang dari kardinalitas dari Γ . Khususnya, jika Γ tidak memuat anggota yang invers terhadap dirinya sendiri selain identitas maka $|S| = |\Gamma| - 1$. Banyaknya anggota S selalu genap, maka $|S| = |\Gamma| - 1$ jika banyaknya anggota Γ ganjil. Untuk sebarang graf invers $\deg e = |S|$ (Alfuraidan & Zakariya, 2017).

Contoh 2.4

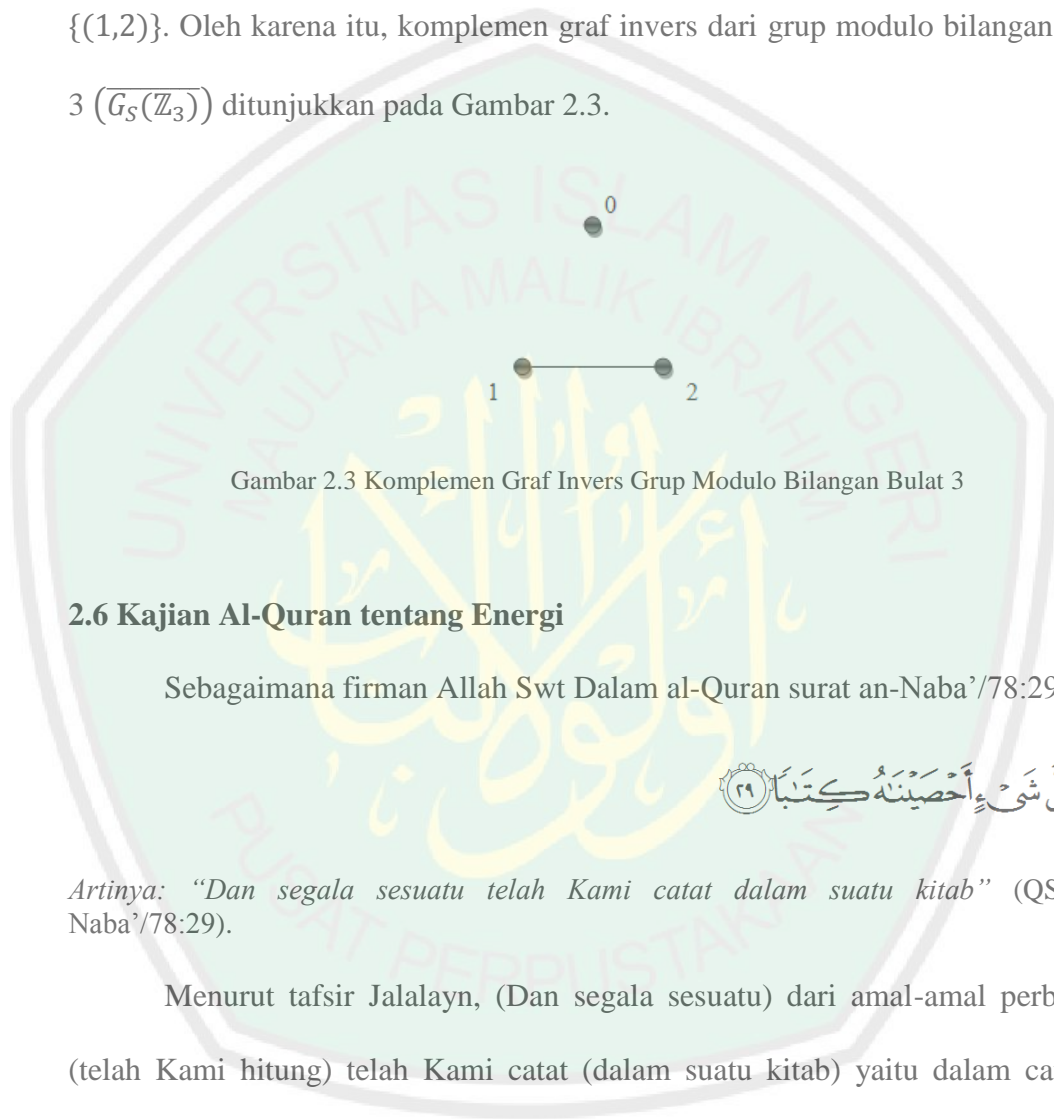
Diketahui grup $(\mathbb{Z}_3, +)$ dengan $\mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\}$.

$0^{-1} = 0, 1^{-1} = 2$, dan $2^{-1} = 1$. Maka $S = \{1,2\}$. Sehingga dapat dibentuk suatu graf invers dari \mathbb{Z}_3 yakni $G_S(\mathbb{Z}_3)$ pada Gambar 2.2 berikut:



Gambar 2.2 Graf Invers Grup Modulo Bilangan Bulat 3

Graf komplemen dari graf $G_S(\mathbb{Z}_3)$ disimbolkan dengan $\overline{G_S(\mathbb{Z}_3)}$ merupakan graf yang memuat himpunan titik $V(G_S(\mathbb{Z}_3))$ sedemikian sehingga dua titik adalah terhubung langsung di $\overline{G_S(\mathbb{Z}_3)}$ jika dan hanya jika kedua titik tersebut tidak terhubung langsung di $G_S(\mathbb{Z}_3)$. Sehingga $V(\overline{G_S(\mathbb{Z}_3)}) = \{0,1,2\}$ dan $E(\overline{G_S(\mathbb{Z}_3)}) = \{(1,2)\}$. Oleh karena itu, komplemen graf invers dari grup modulo bilangan bulat 3 ($\overline{G_S(\mathbb{Z}_3)}$) ditunjukkan pada Gambar 2.3.



Gambar 2.3 Komplemen Graf Invers Grup Modulo Bilangan Bulat 3

2.6 Kajian Al-Quran tentang Energi

Sebagaimana firman Allah Swt Dalam al-Quran surat an-Naba'/78:29

وَكُلُّ شَيْءٍ أَحْصَيْنَاهُ كِتَابًا ﴿٢٩﴾

Artinya: "Dan segala sesuatu telah Kami catat dalam suatu kitab" (QS. an-Naba'/78:29).

Menurut tafsir Jalalayn, (Dan segala sesuatu) dari amal-amal perbuatan (telah Kami hitung) telah Kami catat (dalam suatu kitab) yaitu dalam catatan-catatan di Lohmahfuz supaya Kami memberikan balasan kepadanya, antara lain karena kedustaan mereka terhadap al-Quran.

Menurut tafsir Ibnu Katsir, sesungguhnya Kami mengetahui amal perbuatan semua hamba dan Kami telah mencatatnya atas mereka, maka Kami

akan membalas terhadap mereka; jika baik, maka balasannya baik dan jika buruk, maka balasannya buruk. Firman Allah Swt:

فَذُوقُوا فَلَنْ نَزِيدَكُمْ إِلَّا عَذَابًا ﴿٣٠﴾

Artinya: “Karena itu, rasakanlah. Dan Kami sekali-kali tidak akan menambah kepada kalian selain dari azab” (QS. an-Naba’/78:30).

Yakni dikatakan kepada penduduk neraka, “Rasakanlah akibat dari perbuatanmu, maka Kami tidak akan menambahkan kepada kalian selain azab yang beraneka ragam”. Qatadah telah meriwayatkan dari Abu Ayyub Al-Azdi, dari Abdullah ibnu Amr ibnul As yang mengatakan bahwa tiada suatu ayatpun yang lebih keras bagi ahli neraka selain dari firman-Nya: Karena itu, rasakanlah.

BAB III
PEMBAHASAN

3.1 Energi Laplace pada Komplemen Graf Invers dari Grup Dihedral-6

Himpunan anggota dari grup dihedral-6 adalah $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$.
Jika setiap anggota pada grup dihedral-6 dioperasikan dengan operasi “ \circ ”, maka dihasilkan Tabel *Cayley* pada Tabel 3.1 sebagai berikut:

Tabel 3.1. Tabel *Cayley* Grup Dihedral-6 (D_6)

\circ	1	r	r^2	s	sr	sr^2
1	1	r	r^2	s	sr	sr^2
r	r	r^2	1	sr^2	s	sr
r^2	r^2	1	r	sr	sr^2	s
s	s	sr	sr^2	1	r	r^2
sr	sr	sr^2	s	r^2	1	r
sr^2	sr^2	s	sr	r	r^2	1

3.1.1 Invers dari Masing-masing Anggota D_6

Berdasarkan Tabel 3.1 dapat dicari invers dari masing-masing anggota D_6 yaitu sebagai berikut:

$$1 \circ 1 = 1 \text{ sehingga } 1^{-1} = 1$$

$$r \circ r^2 = r^2 \circ r = 1 \text{ sehingga } r^{-1} = r^2$$

$$r^2 \circ r = r \circ r^2 = 1 \text{ sehingga } (r^2)^{-1} = r$$

$$s \circ s = 1 \text{ sehingga } s^{-1} = s$$

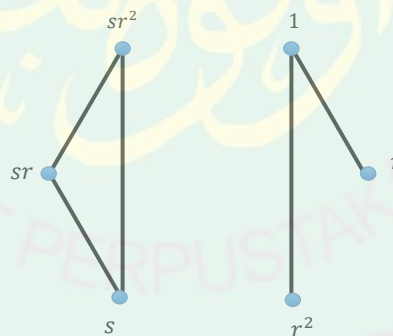
$$sr \circ sr = 1 \text{ sehingga } sr^{-1} = sr$$

$$sr^2 \circ sr^2 = 1 \text{ sehingga } (sr^2)^{-1} = sr^2$$

Berdasarkan uraian invers dari masing-masing anggota D_6 , didapatkan bahwa $1, s, sr$, dan sr^2 invers terhadap dirinya sendiri. Oleh karena itu, dapat dibangun suatu himpunan bagian S dari D_6 yang memuat anggota-anggota dari D_6 yang tidak invers terhadap dirinya sendiri. Sehingga diperoleh $S = \{r, r^2\}$.

3.1.2 Graf Invers Grup Dihedral-6

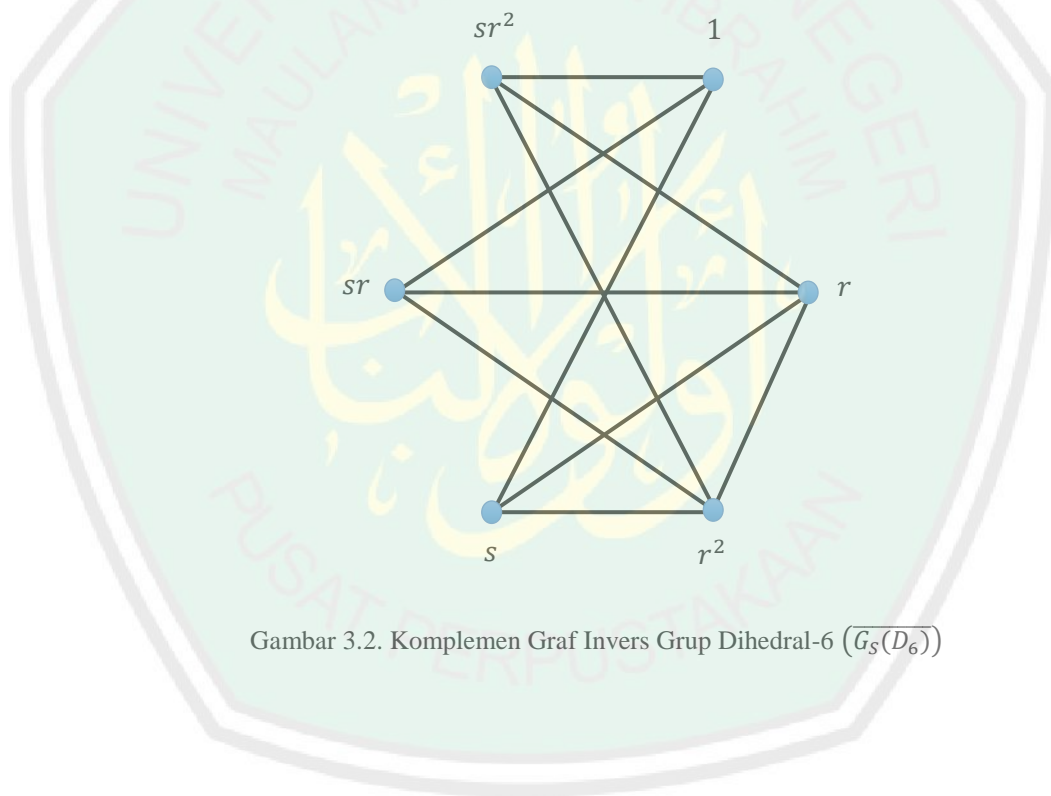
Himpunan titik pada graf invers $G_S(D_6)$ adalah $V(G_S(D_6)) = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Dua titik yang berbeda u dan v pada $V(G_S(D_6))$ akan terhubung langsung jika dan hanya jika $u \circ v \in S$ atau $v \circ u \in S$. Sehingga diperoleh $E(G_S(D_6)) = \{(1, r), (1, r^2), (s, sr), (s, sr^2), (sr, sr^2)\}$. Oleh karena itu, graf invers grup dihedral-6 $G_S(D_6)$ ditunjukkan pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1. Graf Invers Grup Dihedral-6 ($G_S(D_6)$)

3.1.3 Graf Komplemen dari $G_S(D_6)$

Graf komplemen dari graf $G_S(D_6)$ disimbolkan dengan $\overline{G_S(D_6)}$ merupakan graf yang memuat himpunan titik $V(G_S(D_6))$ dan dua titik adalah terhubung langsung di $\overline{G_S(D_6)}$ jika dan hanya jika kedua titik tersebut tidak terhubung langsung di $G_S(D_6)$. Sehingga $V(\overline{G_S(D_6)}) = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$ dan $E(\overline{G_S(D_6)}) = \{(1, s), (1, sr), (1, sr^2), (r, r^2), (r, s), (r, sr), (r, sr^2), (r^2, s), (r^2, sr), (r^2, sr^2)\}$. Oleh karena itu, komplemen graf invers dari grup dihedral-6 ($\overline{G_S(D_6)}$) ditunjukkan pada Gambar 3.2.



Gambar 3.2. Komplemen Graf Invers Grup Dihedral-6 ($\overline{G_S(D_6)}$)

3.1.4 Matriks *Laplace* pada $\overline{G_S(D_6)}$

Berdasarkan Gambar 3.2, dapat dicari matriks-matriks pada $\overline{G_S(D_6)}$ sebagai berikut:

Matriks keterhubungan titik pada $\overline{G_S(D_6)}$

$$A(\overline{G_S(D_6)}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks derajat pada $\overline{G_S(D_6)}$

$$D(\overline{G_S(D_6)}) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriks *Laplace* pada $\overline{G_S(D_6)}$

$$L(\overline{G_S(D_6)}) = D(\overline{G_S(D_6)}) - A(\overline{G_S(D_6)})$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks *Laplace* di atas, maka dapat dicari polinomial karakteristik dan nilai Eigennya sebagai berikut:

$$\det(L - \lambda I) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 4-\lambda & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 3-\lambda & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

Melalui eliminasi Gauss pada $L - \lambda I$, diperoleh polinomial karakteristik dalam λ yaitu:

$$\det(L - \lambda I) = \lambda^6 - 20\lambda^5 + 156\lambda^4 - 594\lambda^3 + 1107\lambda^2 - 810\lambda$$

atau

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda - 3)^3(\lambda - 5)(\lambda - 6)$$

dan nilai Eigennya adalah:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 5, \lambda_4 = 6$$

dengan multiplisitas $m(\lambda_1) = 1, m(\lambda_2) = 3, m(\lambda_3) = 1, m(\lambda_4) = 1$

3.1.5 Energi Laplace pada $\overline{G_S(D_6)}$

Setelah diketahui nilai Eigen dari matriks Laplace pada $\overline{G_S(D_6)}$, dapat dihitung energi Laplace dari $\overline{G_S(D_6)}$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} LE(\overline{G_S(D_6)}) &= \sum \left| \lambda_i - \frac{2q}{p} \right| \\ &= m(\lambda_1) \left| \lambda_1 - \frac{2q}{p} \right| + m(\lambda_2) \left| \lambda_2 - \frac{2q}{p} \right| + m(\lambda_3) \left| \lambda_3 - \frac{2q}{p} \right| + m(\lambda_4) \left| \lambda_4 - \frac{2q}{p} \right| \\ &= \left| 0 - \frac{20}{6} \right| + 3 \left| 3 - \frac{20}{6} \right| + \left| 5 - \frac{20}{6} \right| + \left| 6 - \frac{20}{6} \right| \\ &= |-3,3| + 3|-0,3| + |1,7| + |2,7| \end{aligned}$$

$$= 8,6$$

Jadi, dapat diketahui bahwa energi *Laplace* pada komplemen graf invers dari grup dihedral-6 ($\overline{G_S(D_6)}$) adalah 8,6

3.2 Energi *Laplace* pada Komplemen Graf Invers dari Grup Dihedral-8

Himpunan anggota dari grup dihedral-8 adalah $D_8 = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$. Jika setiap anggota pada grup dihedral-8 dioperasikan dengan operasi “ \circ ”, maka dihasilkan Tabel *Cayley* pada Tabel 3.2 sebagai berikut:

Tabel 3.2. Tabel *Cayley* Grup Dihedral-8 (D_8)

\circ	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
1	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
r	r	r^2	r^3	1	sr^3	s	sr	sr^2
r^2	r^2	r^3	1	r	sr^2	sr^3	s	sr
r^3	r^3	1	r	r^2	sr	sr^2	sr^2	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	1	r	r^2	r^3
sr	sr	sr^2	sr^3	s	r^3	1	r	r^2
sr^2	sr^2	sr^3	s	sr	r^2	r^3	1	r
sr^3	sr^3	s	sr	sr^2	r	r^2	r^3	1

3.2.1 Invers dari Masing-masing Anggota D_8

Berdasarkan Tabel 3.2 dapat dicari invers dari masing-masing anggota D_8 yaitu sebagai berikut:

$$1 \circ 1 = 1 \text{ sehingga } 1^{-1} = 1$$

$$r \circ r^3 = r^3 \circ r = 1 \text{ sehingga } r^{-1} = r^3$$

$$r^2 \circ r^2 = 1 \text{ sehingga } (r^2)^{-1} = r^2$$

$$r^3 \circ r = r \circ r^3 = 1 \text{ sehingga } (r^3)^{-1} = r$$

$$s \circ s = 1 \text{ sehingga } s^{-1} = s$$

$$sr \circ sr = 1 \text{ sehingga } sr^{-1} = sr$$

$$sr^2 \circ sr^2 = 1 \text{ sehingga } (sr^2)^{-1} = sr^2$$

$$sr^3 \circ sr^3 = 1 \text{ sehingga } (sr^3)^{-1} = sr^3$$

Berdasarkan uraian invers dari masing-masing anggota D_8 , didapatkan bahwa $1, r^2, s, sr, sr^2$, dan sr^3 invers terhadap dirinya sendiri. Oleh karena itu, dapat dibangun suatu himpunan bagian S dari D_8 yang memuat anggota-anggota dari D_8 yang tidak invers terhadap dirinya sendiri. Sehingga didapatkan $S = \{r, r^3\}$.

3.2.2 Graf Invers Grup Dihedral-8

Himpunan titik pada graf invers $G_S(D_8)$ adalah himpunan semua anggota pada D_8 , sehingga $V(G_S(D_8)) = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$. Dua titik yang berbeda u dan v pada $V(G_S(D_8))$ akan terhubung langsung jika dan hanya jika $u \circ v \in S$ atau $v \circ u \in S$. Sehingga berdasarkan Tabel 3.2 diperoleh,

$$1 \circ r = r \in S, \quad r \circ 1 = r \in S \quad \text{maka } 1 \text{ terhubung langsung dengan } r$$

$$1 \circ r^3 = r^3 \in S, \quad r^3 \circ 1 = r^3 \in S \quad \text{maka } 1 \text{ terhubung langsung dengan } r^3$$

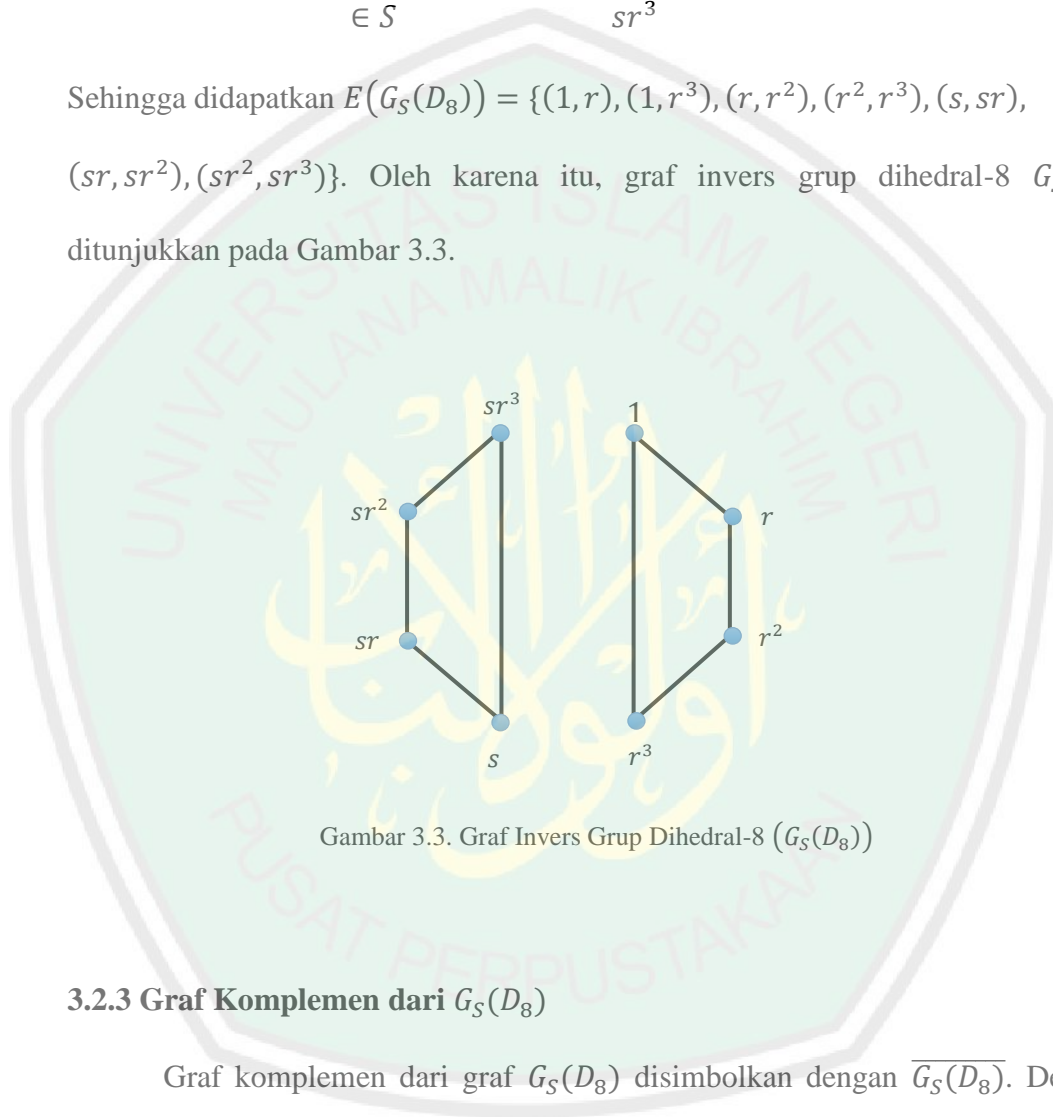
$$r \circ r^2 = r^3 \in S, \quad r^2 \circ r = r^3 \in S \quad \text{maka } r \text{ terhubung langsung dengan } r^2$$

$$r^2 \circ r^3 = r \in S, \quad r^3 \circ r^2 = r \in S \quad \text{maka } r^2 \text{ terhubung langsung dengan } r^3$$

$$s \circ sr = r \in S, \quad sr \circ s = r^3 \in S \quad \text{maka } s \text{ terhubung langsung dengan } sr$$

$s \circ sr^3 = r^3 \in S$, $sr^3 \circ s = r \in S$ maka s terhubung langsung dengan sr^3
 $sr \circ sr^2 = r \in S$, $sr^2 \circ sr = r^3$ maka sr terhubung langsung dengan
 $\in S$ sr^2
 $sr^2 \circ sr^3 = r \in S$, $sr^3 \circ sr^2 = r^3$ maka sr^2 terhubung langsung dengan
 $\in S$ sr^3

Sehingga didapatkan $E(G_S(D_8)) = \{(1, r), (1, r^3), (r, r^2), (r^2, r^3), (s, sr),$
 $(sr, sr^2), (sr^2, sr^3)\}$. Oleh karena itu, graf invers grup dihedral-8 $G_S(D_8)$
 ditunjukkan pada Gambar 3.3.

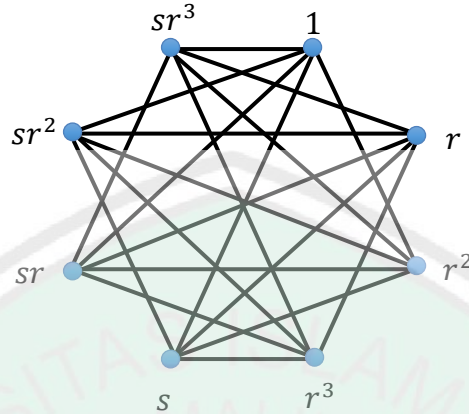


Gambar 3.3. Graf Invers Grup Dihedral-8 ($G_S(D_8)$)

3.2.3 Graf Komplemen dari $G_S(D_8)$

Graf komplemen dari graf $G_S(D_8)$ disimbolkan dengan $\overline{G_S(D_8)}$. Dengan
 cara yang sama dengan komplemen graf invers dari grup dihedral-6 maka
 didapatkan $V(\overline{G_S(D_8)}) = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$ dan $E(\overline{G_S(D_8)}) = \{(1, r^2),$
 $(1, s), (1, sr), (1, sr^2), (1, sr^3), (r, r^3), (r, s), (r, sr), (r, sr^2), (r, sr^3), (r^2, s),$
 $(r^2, sr), (r^2, sr^2), (r^2, sr^3), (r^3, s), (r^3, sr), (r^3, sr^2), (r^3, sr^3), (s, sr^2),$

(sr, sr^3) . Oleh karena itu, komplemen graf invers dari grup dihedral-8 ($\overline{G_S(D_8)}$) ditunjukkan pada Gambar 3.4.



Gambar 3.4. Komplemen Graf Invers Grup Dihedral-8 ($\overline{G_S(D_8)}$)

3.2.4 Matriks Laplace pada $\overline{G_S(D_8)}$

Berdasarkan Gambar 3.4, dapat dicari matriks-matriks pada $\overline{G_S(D_8)}$ sebagai berikut:

Matriks keterhubungan titik pada $\overline{G_S(D_8)}$

$$A(\overline{G_S(D_8)}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks derajat pada $\overline{G_S(D_8)}$

$$D(\overline{G_S(D_8)}) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Matriks *Laplace* pada $\overline{G_S(D_8)}$

$$L(\overline{G_S(D_8)}) = D(\overline{G_S(D_8)}) - A(\overline{G_S(D_8)})$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 5 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 5 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks *Laplace* di atas, maka dapat dicari polinomial karakteristik dan nilai Eigen sebagai berikut:

$$\det(L - \lambda I) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 5 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 5 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 5-\lambda & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 5-\lambda & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 5-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 5-\lambda & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 5-\lambda & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 5-\lambda & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 5-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Melalui eliminasi Gauss pada $L - \lambda I$, diperoleh polinomial karakteristik dalam λ yaitu:

$$\begin{aligned} \det(L - \lambda I) &= \lambda^8 - 40\lambda^7 + 680\lambda^6 - 636\lambda^5 + 35472\lambda^4 - 117504\lambda^3 \\ &\quad + 214272\lambda^2 - 165888\lambda \end{aligned}$$

atau

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda - 4)^2(\lambda - 6)^4(\lambda - 8)$$

dan nilai Eigennya adalah:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 6, \lambda_4 = 8$$

dengan multiplisitas $m(\lambda_1) = 1, m(\lambda_2) = 1, m(\lambda_3) = 2, m(\lambda_4) = 4$

3.2.5 Energi Laplace pada $\overline{G_S(D_8)}$

Setelah diketahui nilai Eigen dari matriks Laplace pada $\overline{G_S(D_8)}$, dapat dihitung energi Laplace dari $\overline{G_S(D_8)}$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} LE(\overline{G_S(D_8)}) &= \sum \left| \lambda_i - \frac{2q}{p} \right| \\ &= m(\lambda_1) \left| \lambda_1 - \frac{2q}{p} \right| + m(\lambda_2) \left| \lambda_2 - \frac{2q}{p} \right| + m(\lambda_3) \left| \lambda_3 - \frac{2q}{p} \right| + m(\lambda_4) \left| \lambda_4 - \frac{2q}{p} \right| \\ &= \left| 0 - \frac{40}{8} \right| + 2 \left| 4 - \frac{40}{8} \right| + 4 \left| 6 - \frac{40}{8} \right| + \left| 8 - \frac{40}{8} \right| \\ &= |-5| + 2|-1| + 4|1| + |3| \\ &= 14 \end{aligned}$$

Jadi, dapat diketahui bahwa energi *Laplace* pada komplemen graf invers dari grup dihedral-8 ($\overline{G_S(D_8)}$) adalah 14.

3.3 Energi *Laplace* pada Komplemen Graf Invers dari Grup Dihedral-10

Himpunan anggota dari grup dihedral-10 adalah $D_{10} = \{1, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$. Jika setiap anggota pada grup dihedral-10 dioperasikan dengan operasi “ \circ ”, maka dihasilkan Tabel *Cayley* pada Tabel 3.3.

Tabel 3.3. Tabel *Cayley* Grup Dihedral-10 (D_{10})

\circ	1	r	r^2	r^3	r^4	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
1	1	r	r^2	r^3	r^4	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r	r	r^2	r^3	r^4	1	sr^4	s	sr	sr^2	sr^3
r^2	r^2	r^3	r^4	1	r	sr^3	sr^4	s	sr	sr^2
r^3	r^3	r^4	1	r	r^2	sr^2	sr^3	sr^4	s	sr
r^4	r^4	1	r	r^2	r^3	sr	sr^2	sr^3	sr^4	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	1	r	r^2	r^3	r^4
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	s	r^4	1	r	r^2	r^3
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	s	sr	r^3	r^4	1	r	r^2
sr^3	sr^3	sr^4	s	sr	sr^2	r^2	r^3	r^4	1	r
sr^4	sr^4	s	sr	sr^2	sr^3	r	r^2	r^3	r^4	1

3.3.1 Invers dari Masing-masing anggota D_{10}

Berdasarkan Tabel 3.3 dapat dicari invers dari masing-masing anggota D_{10} yaitu sebagai berikut:

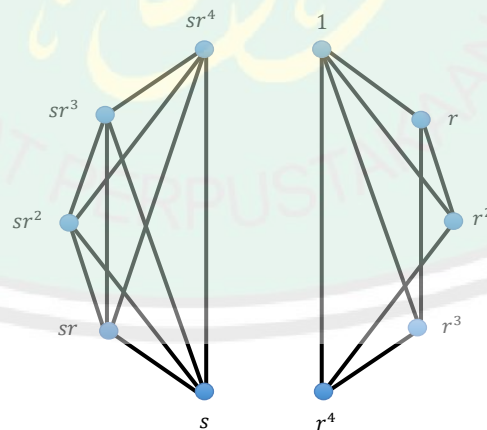
$$1^{-1} = 1, \quad r^{-1} = r^4, \quad (r^2)^{-1} = r^3, \quad (r^3)^{-1} = r^2, \quad (r^4)^{-1} = r,$$

$$s^{-1} = s, \quad sr^{-1} = sr, \quad (sr^2)^{-1} = sr^2, \quad (sr^3)^{-1} = sr^3, \quad (sr^4)^{-1} = sr^4.$$

Berdasarkan uraian invers dari masing-masing anggota D_{10} , didapatkan bahwa $1, s, sr, sr^2, sr^3,$ dan sr^4 invers terhadap dirinya sendiri. Oleh karena itu, dapat dibangun suatu himpunan bagian S dari D_{10} yang memuat anggota-anggota dari D_{10} yang tidak invers terhadap dirinya sendiri. Sehingga didapatkan $S = \{r, r^2, r^3, r^4\}$.

3.3.2 Graf Invers Grup Dihedral-10

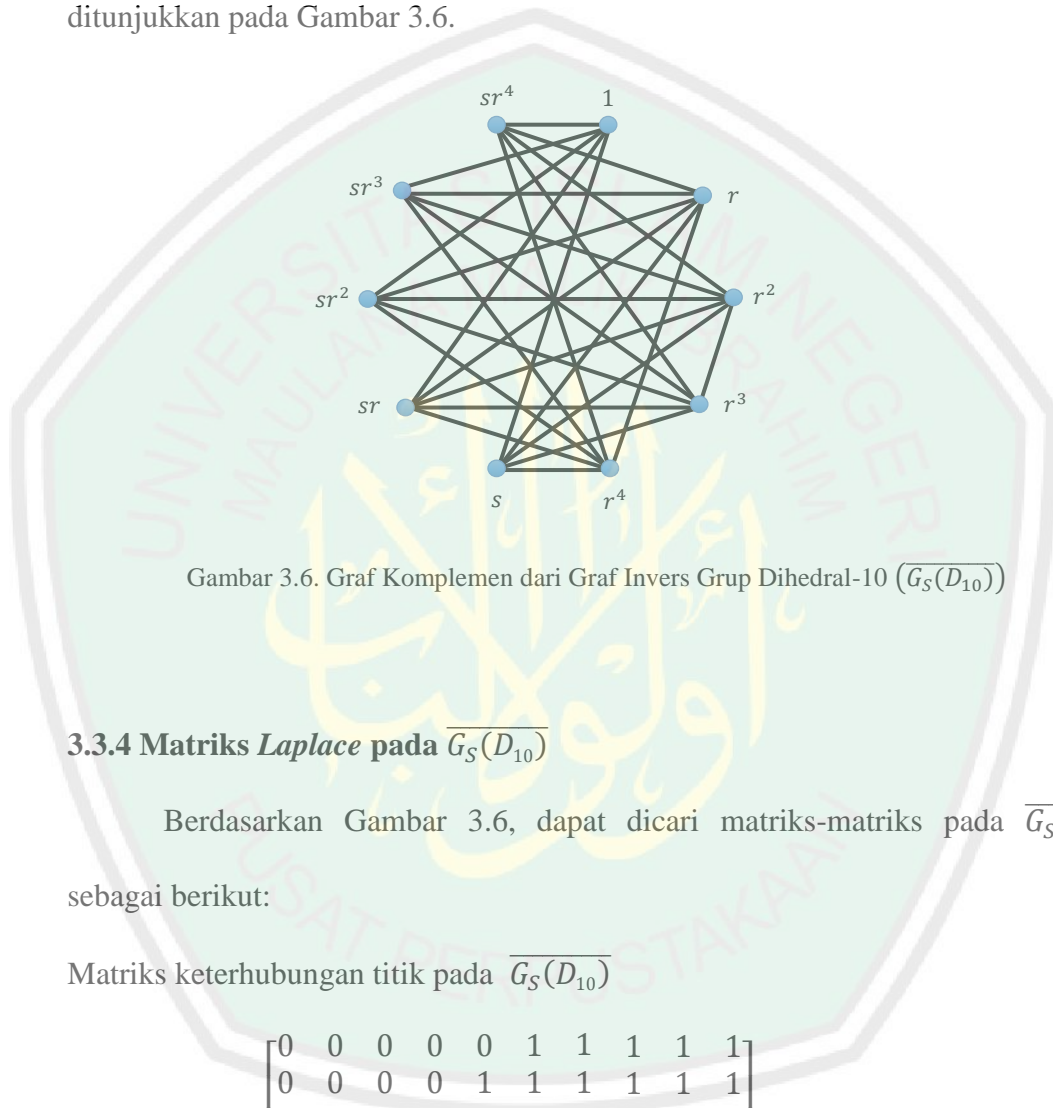
Himpunan titik pada graf invers $G_S(D_{10})$ adalah $V(G_S(D_{10})) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$. Dengan menggunakan cara yang sama dengan 3.1.2 maka graf invers grup dihedral-10 $G_S(D_{10})$ ditunjukkan pada Gambar 3.5.



Gambar 3.5. Graf Invers Grup Dihedral-10 ($G_S(D_{10})$)

3.3.3 Graf Komplemen dari $G_S(D_{10})$

Graf komplemen dari graf $G_S(D_{10})$ disimbolkan dengan $\overline{G_S(D_{10})}$. Dengan cara yang sama dengan komplemen graf invers dari grup dihedral-6 pada 3.1.3 maka diperoleh komplemen graf invers dari grup dihedral-10 ($\overline{G_S(D_{10})}$) ditunjukkan pada Gambar 3.6.



Gambar 3.6. Graf Komplemen dari Graf Invers Grup Dihedral-10 ($\overline{G_S(D_{10})}$)

3.3.4 Matriks Laplace pada $\overline{G_S(D_{10})}$

Berdasarkan Gambar 3.6, dapat dicari matriks-matriks pada $\overline{G_S(D_{10})}$ sebagai berikut:

Matriks keterhubungan titik pada $\overline{G_S(D_{10})}$

$$A(\overline{G_S(D_{10})}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks derajat pada $\overline{G_S(D_{10})}$

$$D(\overline{G_S(D_{10})}) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Matriks *Laplace* pada $\overline{G_S(D_{10})}$

$$L(\overline{G_S(D_{10})}) = D(\overline{G_S(D_{10})}) - A(\overline{G_S(D_{10})})$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks *Laplace* di atas, maka dapat dicari polinomial karakteristik

dan nilai Eigennya sebagai berikut:

$$\det(L - \lambda I) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 6-\lambda & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 6-\lambda & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 6-\lambda & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 6-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 5-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 5-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 5-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 5-\lambda & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Melalui eliminasi Gauss pada $L - \lambda I$, diperoleh polinomial karakteristik dalam λ yaitu:

$$\det(L - \lambda I) = \lambda^{10} - 54\lambda^9 + 1284\lambda^8 - 17660\lambda^7 + 154950\lambda^6 - 900000\lambda^5 \\ + 3462500\lambda^4 - 8512500\lambda^3 + 12140625\lambda^2 - 7656250\lambda$$

atau

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda - 7)^2(\lambda - 5)^6(\lambda - 10)$$

dan nilai Eigennya adalah:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = 7, \lambda_4 = 10$$

dengan multiplisitas $m(\lambda_1) = 1, m(\lambda_2) = 2, m(\lambda_3) = 6, m(\lambda_4) = 1$

3.3.5 Energi *Laplace* pada $\overline{G_S(D_{10})}$

Setelah diketahui nilai Eigen dari matriks *Laplace* pada $\overline{G_S(D_{10})}$, dapat dihitung energi *Laplace* dari $\overline{G_S(D_{10})}$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 LE(\overline{G_S(D_{10})}) &= \sum \left| \lambda_i - \frac{2q}{p} \right| \\
 &= m(\lambda_1) \left| \lambda_1 - \frac{2q}{p} \right| + m(\lambda_2) \left| \lambda_2 - \frac{2q}{p} \right| + m(\lambda_3) \left| \lambda_3 - \frac{2q}{p} \right| + m(\lambda_4) \left| \lambda_4 - \frac{2q}{p} \right| \\
 &= \left| 0 - \frac{54}{10} \right| + 6 \left| 5 - \frac{54}{10} \right| + 2 \left| 7 - \frac{54}{10} \right| + \left| 10 - \frac{54}{10} \right| \\
 &= |-5,4| + 6|-0,4| + 2|1,6| + |4,6| \\
 &= 5,4 + 2,4 + 3,2 + 4,6 \\
 &= 15,6
 \end{aligned}$$

Jadi, dapat diketahui bahwa energi *Laplace* pada komplemen graf invers dari grup dihedral-10 ($\overline{G_S(D_{10})}$) adalah 15,6.

3.4 Energi *Laplace* pada Komplemen Graf Invers dari Grup Dihedral-12

Himpunan anggota dari grup dihedral-12 adalah $D_{12} = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$. Jika setiap anggota pada grup dihedral-12 dioperasikan dengan operasi “o”, maka dihasilkan Tabel *Cayley* pada Tabel 3.4.

Tabel 3.4. Tabel Cayley Grup Dihedral-12 (D_{12})

\circ	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3
r^3	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2
r^4	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr
r^5	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2
sr^4	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r
sr^5	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1

3.4.1 Invers dari Masing-masing Anggota D_{12}

Berdasarkan Tabel 3.4 dapat dicari invers dari masing-masing anggota D_{12} yaitu sebagai berikut:

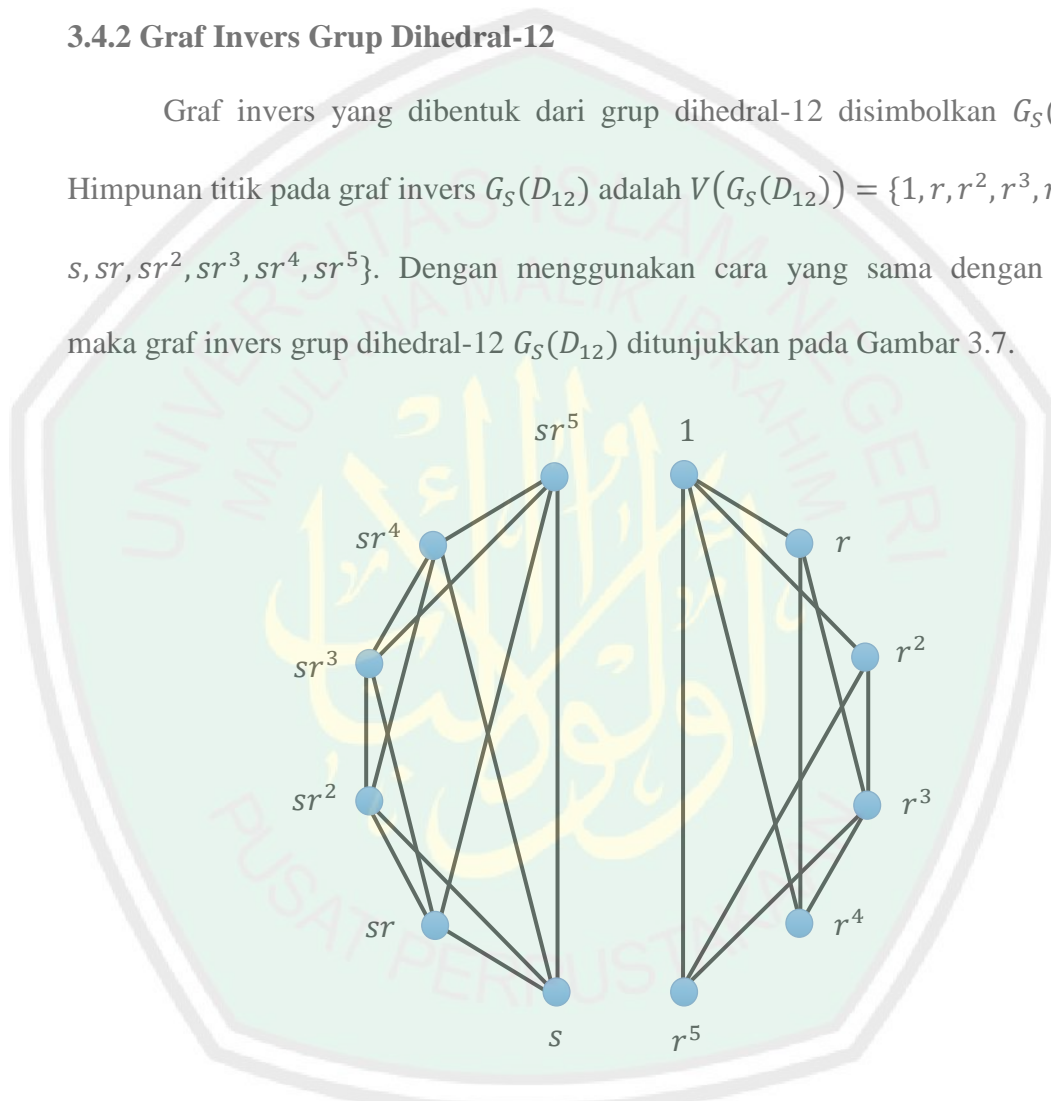
$$\begin{aligned}
 1^{-1} &= 1, & r^{-1} &= r^5, & (r^2)^{-1} &= r^4, & (r^3)^{-1} &= r^3, & (r^4)^{-1} &= r^2, \\
 (r^5)^{-1} &= r, & s^{-1} &= s, & sr^{-1} &= sr, & (sr^2)^{-1} &= sr^2, & (sr^3)^{-1} &= sr^3, \\
 (sr^4)^{-1} &= sr^4, & (sr^5)^{-1} &= sr^5.
 \end{aligned}$$

Berdasarkan uraian invers dari masing-masing anggota D_{12} , didapatkan bahwa $1, r^3, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4$, dan sr^5 invers terhadap dirinya sendiri. Oleh

karena itu, dapat dibangun suatu himpunan bagian S dari D_{12} yang memuat anggota-anggota dari D_{12} yang tidak invers terhadap dirinya sendiri. Sehingga didapatkan $S = \{r, r^2, r^4, r^5\}$.

3.4.2 Graf Invers Grup Dihedral-12

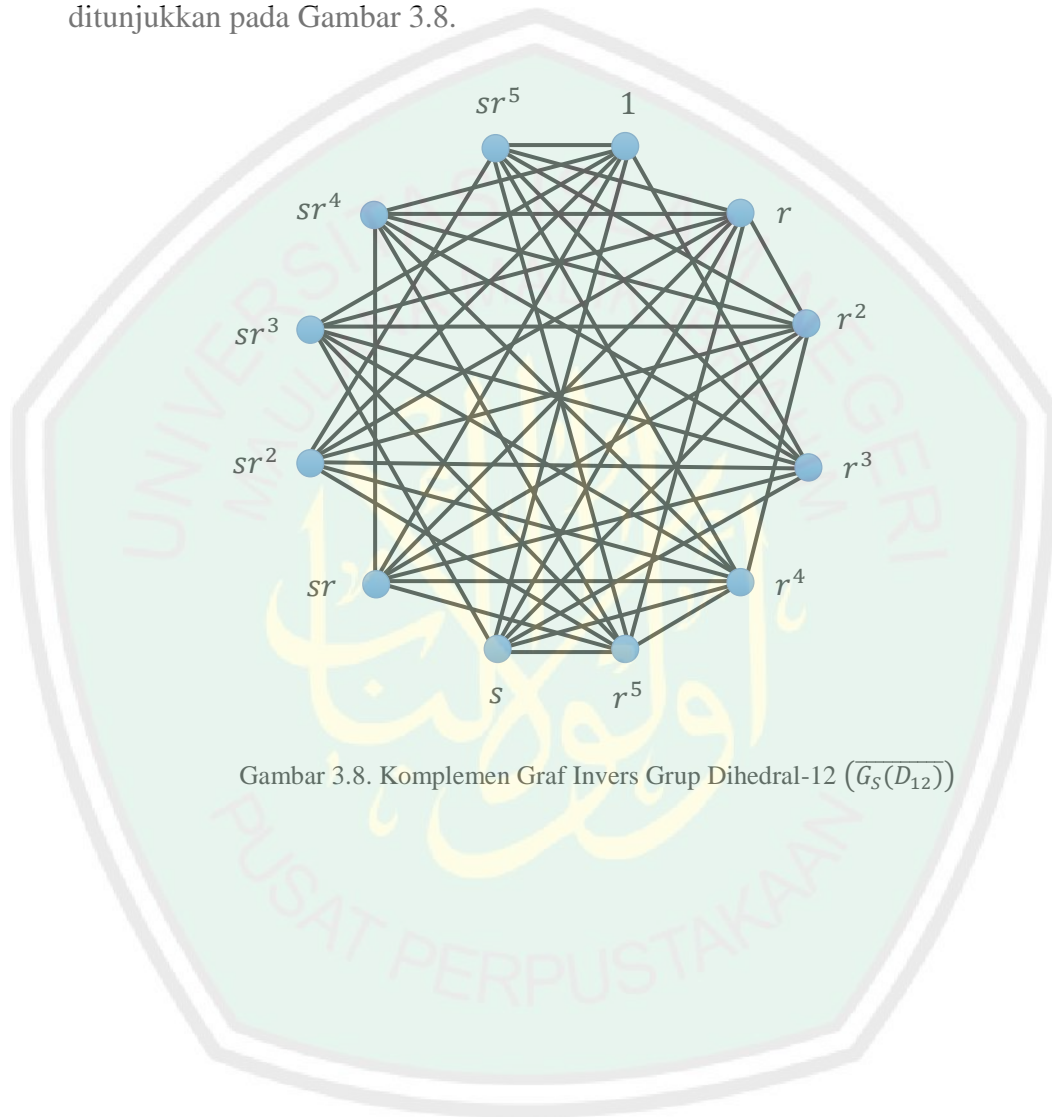
Graf invers yang dibentuk dari grup dihedral-12 disimbolkan $G_S(D_{12})$. Himpunan titik pada graf invers $G_S(D_{12})$ adalah $V(G_S(D_{12})) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$. Dengan menggunakan cara yang sama dengan 3.1.2 maka graf invers grup dihedral-12 $G_S(D_{12})$ ditunjukkan pada Gambar 3.7.



Gambar 3.7. Graf Invers Grup Dihedral-12 ($G_S(D_{12})$)

3.4.3 Graf Komplemen dari $G_S(D_{12})$

Graf komplemen dari graf $G_S(D_{12})$ disimbolkan dengan $\overline{G_S(D_{12})}$. Dengan cara yang sama dengan komplemen graf invers dari grup dihedral-6 pada 3.1.3 maka diperoleh komplemen graf invers dari grup dihedral-12 ($\overline{G_S(D_{12})}$) ditunjukkan pada Gambar 3.8.



Gambar 3.8. Komplemen Graf Invers Grup Dihedral-12 ($\overline{G_S(D_{12})}$)

3.4.4 Matriks Laplace pada $\overline{G_S(D_{12})}$

Berdasarkan Gambar 3.8, dapat dicari matriks-matriks pada $\overline{G_S(D_{12})}$ sebagai berikut:

Matriks keterhubungan titik pada $\overline{G_S(D_{12})}$

$$A(\overline{G_S(D_{12})}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks derajat pada $\overline{G_S(D_{12})}$

$$D(\overline{G_S(D_{12})}) = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Matriks *Laplace* pada $\overline{G_S(D_{12})}$

$$L(\overline{G_S(D_{12})}) = D(\overline{G_S(D_{12})}) - A(\overline{G_S(D_{12})})$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 8 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 8 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 8 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 8 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 7 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 7 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks *Laplace* di atas, maka dapat dicari polinomial karakteristik

dan nilai Eigennya sebagai berikut:

$$\det(L - \lambda I) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 8 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 8 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 8 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 8 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 7 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 7 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 7-\lambda & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 8-\lambda & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 8-\lambda & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 7-\lambda & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 8-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 8-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 7-\lambda & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 7-\lambda & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 7-\lambda & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 7-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 7-\lambda & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 7-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Melalui eliminasi Gauss pada $L - \lambda I$, diperoleh polinomial karakteristik dalam λ

yaitu:

$$\begin{aligned} \det(L - \lambda I) &= \lambda^{12} - 88\lambda^{11} + 3504\lambda^{10} - 83344\lambda^9 + 1315888\lambda^8 \\ &\quad - 14481984\lambda^7 + 113373184\lambda^6 - 631386112\lambda^5 \\ &\quad + 2451505152\lambda^4 - 6320553984\lambda^3 + 9739173888\lambda^2 \\ &\quad - 6794772480\lambda \end{aligned}$$

atau

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda - 6)^3(\lambda - 8)^6(\lambda - 10)(\lambda - 12)$$

dan nilai Eigennya adalah:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 8, \lambda_4 = 10, \lambda_5 = 12$$

dengan multiplisitas $m(\lambda_1) = 1, m(\lambda_2) = 3, m(\lambda_3) = 6, m(\lambda_4) = 1, m(\lambda_5) = 1$

3.4.5 Energi Laplace pada $\overline{G_S(D_{12})}$

Setelah diketahui nilai eigen dari matriks Laplace pada $\overline{G_S(D_{12})}$, dapat dihitung energi Laplace dari $\overline{G_S(D_{12})}$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} LE(\overline{G_S(D_{12})}) &= \sum \left| \lambda_i - \frac{2q}{p} \right| \\ &= m(\lambda_1) \left| \lambda_1 - \frac{2q}{p} \right| + m(\lambda_2) \left| \lambda_2 - \frac{2q}{p} \right| + m(\lambda_3) \left| \lambda_3 - \frac{2q}{p} \right| + m(\lambda_4) \left| \lambda_4 - \frac{2q}{p} \right| + \\ & m(\lambda_5) \left| \lambda_5 - \frac{2q}{p} \right| \\ &= \left| 0 - \frac{88}{12} \right| + 3 \left| 6 - \frac{88}{12} \right| + 6 \left| 8 - \frac{88}{12} \right| + \left| 10 - \frac{88}{12} \right| + \left| 12 - \frac{88}{12} \right| \\ &= |-7,3| + 3|-1,3| + 6|0,7| + |2,7| + |4,7| \\ &= 22,8 \end{aligned}$$

Jadi, dapat diketahui bahwa energi Laplace pada komplemen graf invers dari grup dihedral-12 ($\overline{G_S(D_{12})}$) adalah 22,8

3.5 Energi Laplace pada Komplemen Graf Invers dari Grup Dihedral-14

Himpunan anggota dari grup dihedral-14 adalah $D_{14} = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}$. Jika setiap anggota pada grup dihedral-14 dioperasikan dengan operasi “ \circ ”, maka dihasilkan Tabel Cayley pada Tabel 3.5.

Tabel 3.5. Tabel Cayley Grup Dihedral-14 (D_{14})

\circ	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^3	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3
r^4	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2
r^5	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr
r^6	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3
sr^4	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2
sr^5	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r
sr^6	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1

3.5.1 Invers dari Masing-masing Anggota D_{14}

Berdasarkan Tabel 3.5 dapat dicari invers dari masing-masing anggota D_{14} yaitu sebagai berikut:

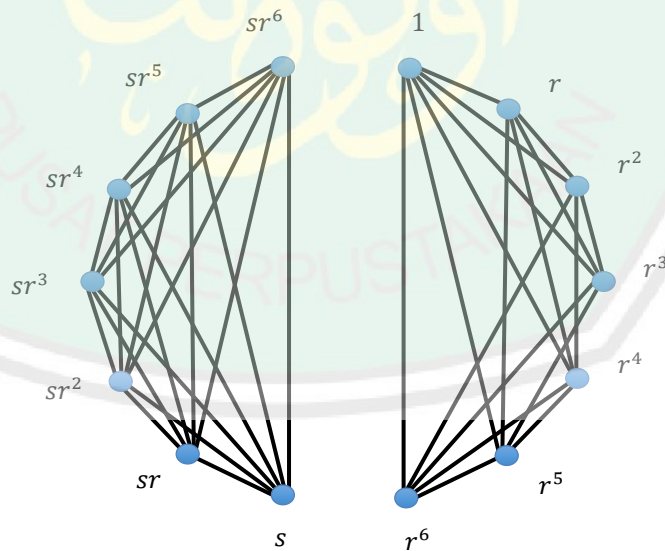
$$\begin{aligned}
 1^{-1} &= 1, & r^{-1} &= r^6, & (r^2)^{-1} &= r^5, & (r^3)^{-1} &= r^4, \\
 (r^4)^{-1} &= r^3, & (r^5)^{-1} &= r^2, & (r^6)^{-1} &= r, & s^{-1} &= s, \\
 sr^{-1} &= sr, & (sr^2)^{-1} &= sr^2, & (sr^3)^{-1} &= sr^3, & (sr^4)^{-1} &= sr^4,
 \end{aligned}$$

$$(sr^5)^{-1} = sr^5, \quad (sr^6)^{-1} = sr^6.$$

Berdasarkan uraian invers dari masing-masing anggota D_{14} , didapatkan bahwa $1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5$, dan sr^6 invers terhadap dirinya sendiri. Oleh karena itu, dapat dibangun suatu himpunan bagian S dari D_{14} yang memuat anggota-anggota dari D_{14} yang tidak invers terhadap dirinya sendiri. Sehingga didapatkan $S = \{r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\}$.

3.5.2 Graf Invers Grup Dihedral-14

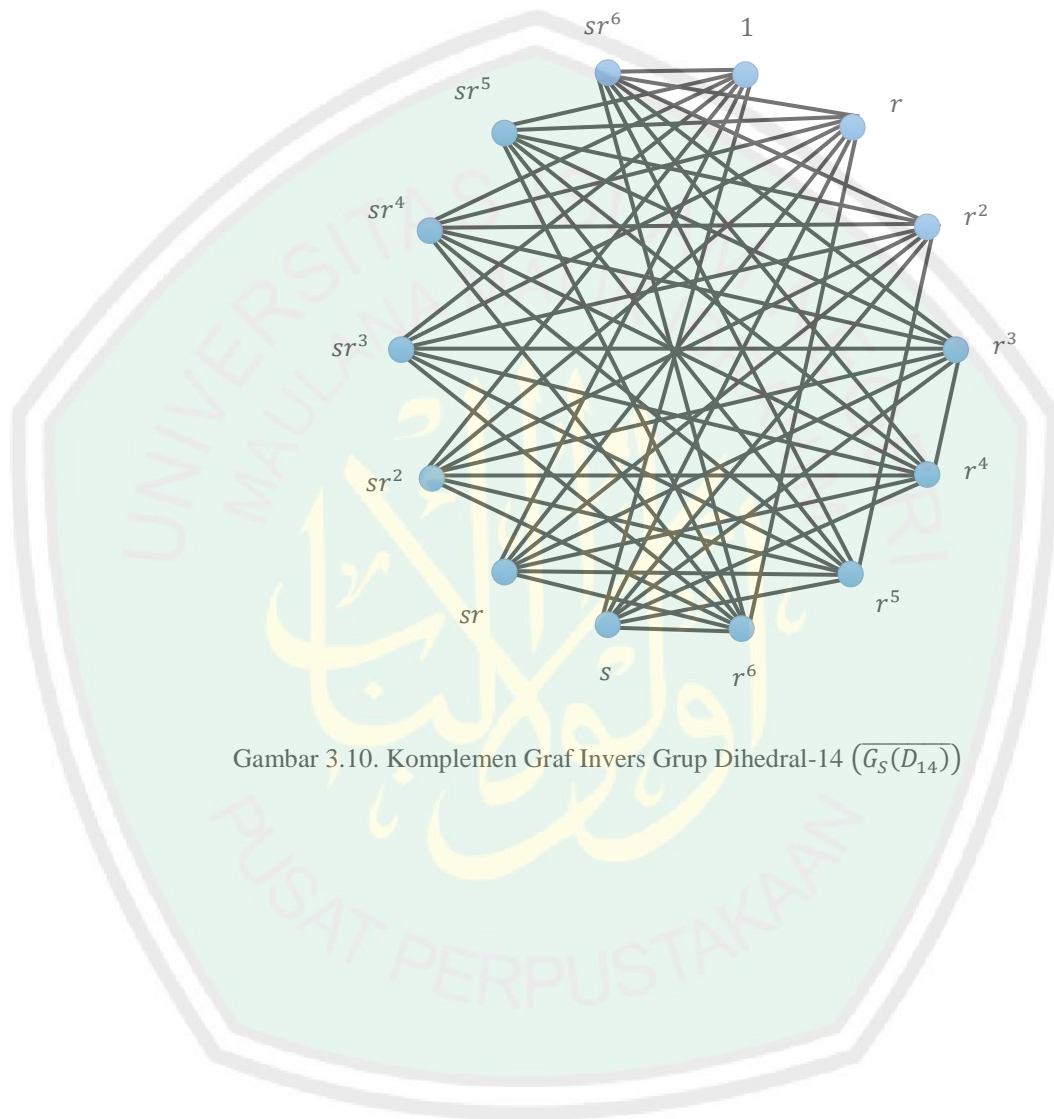
Graf invers yang dibentuk dari grup dihedral-14 disimbolkan $G_S(D_{14})$. Himpunan titik pada graf invers $G_S(D_{14})$ adalah $V(G_S(D_{14})) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}$. Dengan menggunakan cara yang sama dengan 3.1.2 maka graf invers grup dihedral-14 $G_S(D_{14})$ ditunjukkan pada Gambar 3.9.



Gambar 3.9. Graf Invers Grup Dihedral-14 ($G_S(D_{14})$)

3.5.3 Graf Komplemen dari $G_S(D_{14})$

Graf komplemen dari graf $G_S(D_{14})$ disimbolkan dengan $\overline{G_S(D_{14})}$. Dengan cara yang sama dengan komplemen graf invers dari grup dihedral-6 pada 3.1.3 maka $(\overline{G_S(D_{14})})$ ditunjukkan pada Gambar 3.10.



Gambar 3.10. Komplemen Graf Invers Grup Dihedral-14 ($\overline{G_S(D_{14})}$)

3.5.4 Matriks Laplace pada $\overline{G_S(D_{14})}$

Berdasarkan Gambar 3.10, dapat dicari matriks-matriks pada $\overline{G_S(D_{14})}$ sebagai berikut:

Matriks keterhubungan titik pada $\overline{G_S(D_{14})}$

$$A(\overline{G_S(D_{14})}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks derajat pada $\overline{G_S(D_{14})}$

$$D(\overline{G_S(D_{14})}) = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Melalui eliminasi Gauss pada $L - \lambda I$, diperoleh polinomial karakteristik dalam λ yaitu:

$$\begin{aligned} \det(L - \lambda I) &= \lambda^{14} - 104\lambda^{13} + 4968\lambda^{12} - 144390\lambda^{11} + 2849721\lambda^{10} \\ &\quad - 40343562\lambda^9 + 421601880\lambda^8 - 3293701404\lambda^7 \\ &\quad + 19240199811\lambda^6 - 83016428572\lambda^5 + 257208949760\lambda^4 \\ &\quad - 541972001214\lambda^3 + 696220781571\lambda^2 - 411848913042\lambda \end{aligned}$$

atau

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda - 7)^9(\lambda - 9)^3(\lambda - 14)$$

dan nilai Eigennya adalah:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 7, \lambda_3 = 9, \lambda_4 = 14$$

dengan multiplisitas $m(\lambda_1) = 1, m(\lambda_2) = 9, m(\lambda_3) = 3, m(\lambda_4) = 1$

3.5.5 Energi Laplace pada $\overline{G_S(D_{14})}$

Setelah diketahui nilai Eigen dari matriks Laplace pada $\overline{G_S(D_{14})}$, dapat dihitung energi Laplace dari $\overline{G_S(D_{14})}$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} LE(\overline{G_S(D_{14})}) &= \sum \left| \lambda_i - \frac{2q}{p} \right| \\ &= m(\lambda_1) \left| \lambda_1 - \frac{2q}{p} \right| + m(\lambda_2) \left| \lambda_2 - \frac{2q}{p} \right| + m(\lambda_3) \left| \lambda_3 - \frac{2q}{p} \right| + m(\lambda_4) \left| \lambda_4 - \frac{2q}{p} \right| \\ &= \left| 0 - \frac{104}{14} \right| + 9 \left| 7 - \frac{104}{14} \right| + 3 \left| 9 - \frac{104}{14} \right| + \left| 14 - \frac{104}{14} \right| \\ &= |-7,4| + |-3,6| + |4,8| + |6,6| \\ &= 22,4 \end{aligned}$$

Jadi, dapat diketahui bahwa energi Laplace pada komplemen graf invers dari grup dihedral-14 ($\overline{G_S(D_{14})}$) adalah 22,4

3.6 Energi Laplace pada Komplemen Graf Invers dari Grup Dihedral-16

Himpunan anggota dari grup dihedral-16 adalah $D_{16} = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}$. Jika setiap anggota pada grup dihedral-16 dioperasikan dengan operasi “ \circ ”, maka dihasilkan Tabel Cayley pada Tabel 3.6.

Tabel 3.6. Tabel Cayley Grup Dihedral-16 (D_{16})

\circ	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r^3	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^4	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3
r^5	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2
r^6	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr
r^7	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^4	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3
sr^5	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2
sr^6	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r
sr^7	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1

3.6.1 Invers dari Masing-masing Anggota D_{16}

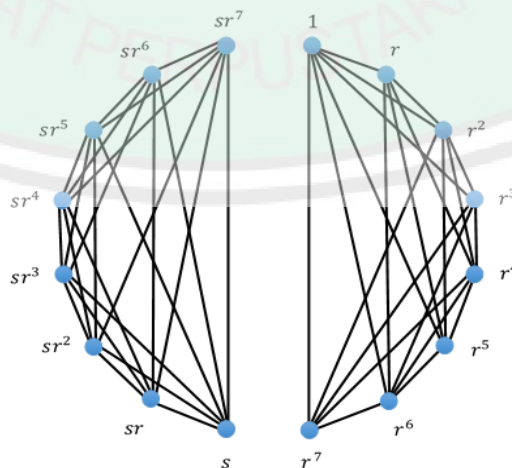
Berdasarkan Tabel 3.6, invers dari masing-masing anggota D_{16} yaitu sebagai berikut:

$$\begin{array}{llll}
 1^{-1} = 1, & r^{-1} = r^7, & (r^2)^{-1} = r^6, & (r^3)^{-1} = r^5, \\
 (r^4)^{-1} = r^4, & (r^5)^{-1} = r^3, & (r^6)^{-1} = r^2, & (r^7)^{-1} = r, \\
 s^{-1} = s, & sr^{-1} = sr, & (sr^2)^{-1} = sr^2, & (sr^3)^{-1} = sr^3, \\
 (sr^4)^{-1} = sr^4, & (sr^5)^{-1} = sr^5, & (sr^6)^{-1} = sr^6, & (sr^7)^{-1} = sr^7.
 \end{array}$$

Sehingga didapatkan bahwa $1, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6$, dan sr^7 invers terhadap dirinya sendiri. Oleh karena itu, dapat dibangun suatu himpunan bagian S dari D_{16} yang memuat anggota-anggota dari D_{16} yang tidak invers terhadap dirinya sendiri. Sehingga didapatkan $S = \{r, r^2, r^3, r^5, r^6, r^7\}$.

3.6.2 Graf Invers Grup Dihedral-16

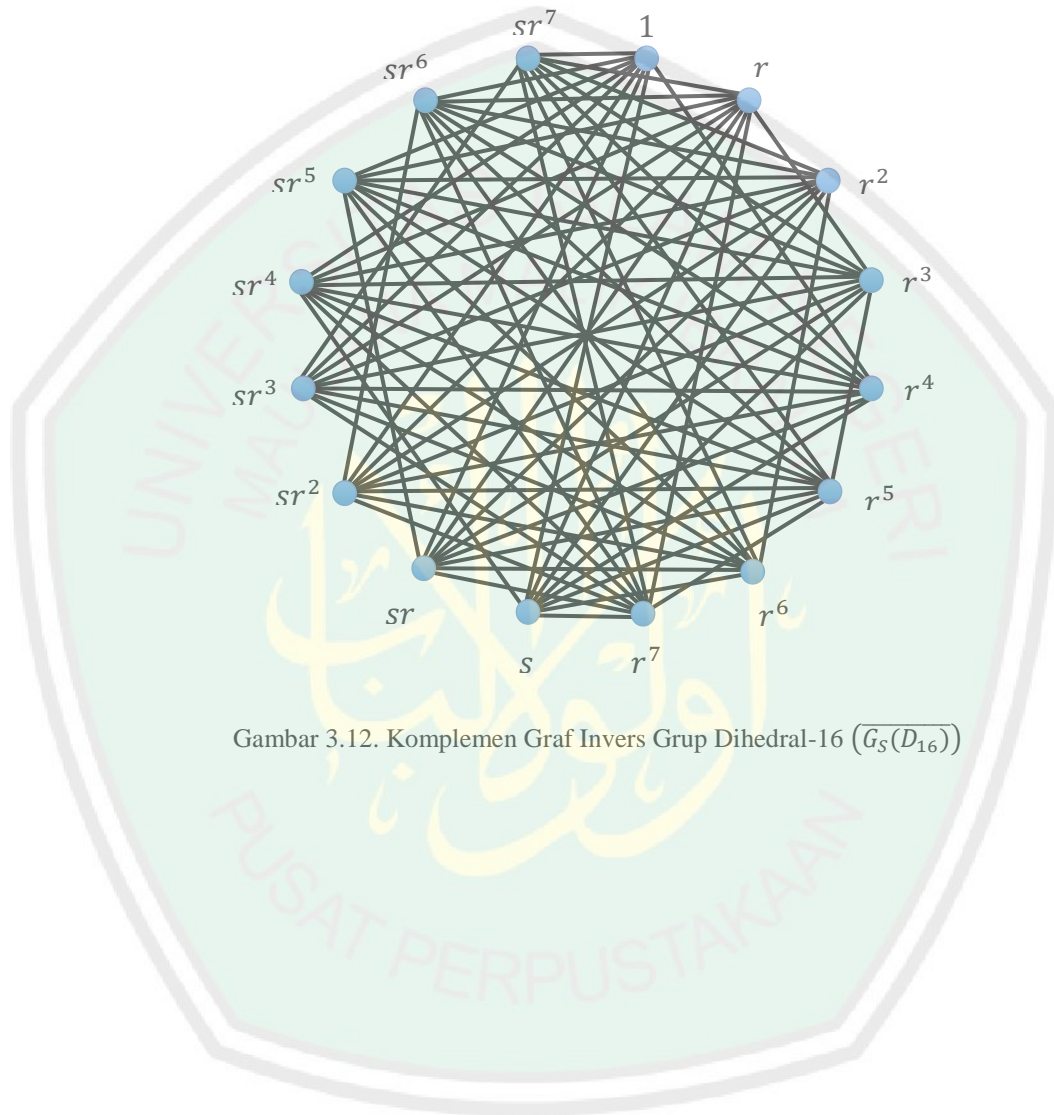
Graf invers yang dibentuk dari grup dihedral-16 disimbolkan $G_S(D_{16})$. Dengan menggunakan cara yang sama dengan 3.1.2 maka graf invers grup dihedral-16 $G_S(D_{16})$ ditunjukkan pada Gambar 3.11.



Gambar 3.11. Graf Invers Grup Dihedral-16 ($G_S(D_{16})$)

3.6.3 Graf Komplemen dari $G_S(D_{16})$

Graf komplemen dari graf $G_S(D_{16})$ disimbolkan dengan $\overline{G_S(D_{16})}$. Dengan cara yang sama dengan komplemen graf invers dari grup dihedral-6 pada 3.1.3 maka $(\overline{G_S(D_{16})})$ ditunjukkan pada Gambar 3.12.



Gambar 3.12. Komplemen Graf Invers Grup Dihedral-16 ($\overline{G_S(D_{16})}$)

3.6.4 Matriks Laplace pada $\overline{G_S(D_{16})}$

Berdasarkan Gambar 3.12, dapat dicari matriks-matriks pada $\overline{G_S(D_{16})}$ sebagai berikut:

Matriks keterhubungan titik pada $(\overline{G_S(D_{16})})$

$$A(\overline{G_S(D_{16})}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks derajat pada $(\overline{G_S(D_{16})})$

$$D(\overline{G_S(D_{16})}) = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 9-\lambda & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 10-\lambda & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 9-\lambda & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 10-\lambda & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 9-\lambda & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 10-\lambda & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 9-\lambda & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 10-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 9-\lambda & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 9-\lambda & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 9-\lambda & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 9-\lambda & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 9-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 9-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 9-\lambda & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 9-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Melalui eliminasi Gauss pada $L - \lambda I$, diperoleh polinomial karakteristik dalam λ

yaitu:

$$\begin{aligned} \det(L - \lambda I) &= \lambda^{16} - 148\lambda^{15} + 10192\lambda^{14} - 433280\lambda^{13} + 12717920\lambda^{12} \\ &\quad - 273054848\lambda^{11} + 4430325504\lambda^{10} - 55319678976\lambda^9 \\ &\quad + 536012263680\lambda^8 - 4030422860800\lambda^7 \\ &\quad + 23327835136000\lambda^6 - 102070681600000\lambda^5 \\ &\quad + 326834585600000\lambda^4 - 723058688000000\lambda^3 \\ &\quad + 988282880000000\lambda^2 - 629145600000000\lambda \end{aligned}$$

atau

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda - 8)^5(\lambda - 10)^8(\lambda - 12)(\lambda - 16)$$

dan nilai Eigennya adalah:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 8, \lambda_3 = 10, \lambda_4 = 12, \lambda_5 = 16$$

dengan multiplisitas $m(\lambda_1) = 1, m(\lambda_2) = 5, m(\lambda_3) = 8, m(\lambda_4) = 1, m(\lambda_5) = 1$

3.6.5 Energi Laplace pada $\overline{G_S(D_{16})}$

Setelah diketahui nilai eigen dari matriks Laplace pada $\overline{G_S(D_{16})}$, dapat dihitung energi Laplace dari $\overline{G_S(D_{16})}$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 LE(\overline{G_S(D_{16})}) &= \sum \left| \lambda_i - \frac{2q}{p} \right| \\
 &= m(\lambda_1) \left| \lambda_1 - \frac{2q}{p} \right| + m(\lambda_2) \left| \lambda_2 - \frac{2q}{p} \right| + m(\lambda_3) \left| \lambda_3 - \frac{2q}{p} \right| + m(\lambda_4) \left| \lambda_4 - \frac{2q}{p} \right| + \\
 & m(\lambda_5) \left| \lambda_5 - \frac{2q}{p} \right| \\
 &= \left| 0 - \frac{148}{16} \right| + \left| 12 - \frac{148}{16} \right| + \left| 16 - \frac{148}{16} \right| + 5 \left| 8 - \frac{148}{16} \right| + 8 \left| 10 - \frac{148}{16} \right| \\
 &= |-9,25| + |2,75| + |6,75| + |6,25| + |6| \\
 &= 31
 \end{aligned}$$

Jadi, dapat diketahui bahwa energi Laplace pada komplemen graf invers dari grup dihedral-16 ($\overline{G_S(D_{16})}$) adalah 31.

Berdasarkan pengamatan dari beberapa komplemen graf invers dari grup dihedral $D_6, D_8, D_{10}, D_{12}, D_{14}$, dan D_{16} , maka diperoleh:

Tabel 3.7. Polinomial Karakteristik, Nilai Eigen, dan Energi Laplace dari $\overline{G_S(D_{2n})}$

D_{2n}	Polinomial karakteristik	Nilai Eigen dan multiplisitasnya	Energi Laplace
D_6	$\lambda(\lambda - 3)^3(\lambda - 5)(\lambda - 6)$	$\lambda_1 = 0, m(\lambda_1) = 1$ $\lambda_2 = 3, m(\lambda_2) = 3$ $\lambda_3 = 5, m(\lambda_3) = 1$ $\lambda_4 = 6, m(\lambda_4) = 1$	$LE(\overline{G_S(D_6)}) = 8,6$
D_8	$\lambda(\lambda - 4)^2(\lambda - 6)^4(\lambda - 8)$	$\lambda_1 = 0, m(\lambda_1) = 1$ $\lambda_2 = 4, m(\lambda_2) = 2$ $\lambda_3 = 6, m(\lambda_3) = 4$ $\lambda_4 = 8, m(\lambda_4) = 1$	$LE(\overline{G_S(D_8)}) = 14$

D_{10}	$\lambda(\lambda - 5)^6(\lambda - 7)^2(\lambda - 10)$	$\lambda_1 = 0, m(\lambda_1) = 1$ $\lambda_2 = 5, m(\lambda_2) = 6$ $\lambda_3 = 7, m(\lambda_3) = 2$ $\lambda_4 = 10, m(\lambda_4) = 1$	$LE(\overline{G_S(D_{10})}) = 15,6$
D_{12}	$\lambda(\lambda - 6)^3(\lambda - 8)^6(\lambda - 10)(\lambda - 12)$	$\lambda_1 = 0, m(\lambda_1) = 1$ $\lambda_2 = 6, m(\lambda_2) = 3$ $\lambda_3 = 8, m(\lambda_3) = 6$ $\lambda_4 = 10, m(\lambda_4) = 1$ $\lambda_5 = 12, m(\lambda_5) = 1$	$LE(\overline{G_S(D_{12})}) = 22,8$
D_{14}	$\lambda(\lambda - 7)^9(\lambda - 9)^3(\lambda - 14)$	$\lambda_1 = 0, m(\lambda_1) = 1$ $\lambda_2 = 7, m(\lambda_2) = 9$ $\lambda_3 = 9, m(\lambda_3) = 3$ $\lambda_4 = 14, m(\lambda_4) = 1$	$LE(\overline{G_S(D_{14})}) = 22,4$
D_{16}	$\lambda(\lambda - 8)^5(\lambda - 10)^8(\lambda - 12)(\lambda - 16)$	$\lambda_1 = 0, m(\lambda_1) = 1$ $\lambda_2 = 8, m(\lambda_2) = 5$ $\lambda_3 = 10, m(\lambda_3) = 8$ $\lambda_4 = 12, m(\lambda_4) = 1$ $\lambda_5 = 16, m(\lambda_5) = 1$	$LE(\overline{G_S(D_{16})}) = 31$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
D_{2n}	n ganjil, $n \geq 3$ $\lambda(\lambda - n)^{\frac{3n-3}{2}}(\lambda - (n+2))^{\frac{n-1}{2}}(\lambda - 2n)$	$\lambda_1 = 0, m(\lambda_1) = 1$ $\lambda_2 = n, m(\lambda_2) = \frac{3n-3}{2}$ $\lambda_3 = n+2,$ $m(\lambda_3) = \frac{n-1}{2}$ $\lambda_4 = 2n, m(\lambda_4) = 1$	$LE(\overline{G_S(D_{2n})})$ $\geq \left \frac{2n^3 + n^2 - 2qn - n + 2q}{n} \right $

	n genap, $n = 4(k + 1)$ $\lambda(\lambda - n)^{\frac{3n-4}{4}}(\lambda - (n + 2))^n(\lambda - (n + 4))^{\frac{n-4}{4}}(\lambda - 2n)$	$\lambda_1 = 0,$ $m(\lambda_1) = 1$ $\lambda_2 = n,$ $m(\lambda_2) = \frac{3n-4}{4}$ $\lambda_3 = n + 2,$ $m(\lambda_3) = n$ $\lambda_4 = n + 4,$ $m(\lambda_4) = \frac{n-4}{4}$ $\lambda_5 = 2n,$ $m(\lambda_5) = 1$	$LE(\overline{G_S(D_{2n})})$ $\geq \left \frac{2n^3 + n^2 - 2qn + 4n + 2q}{n} \right $
	n genap, $n = 4k + 2$ $\lambda(\lambda - n)^{\frac{3n-6}{4}}(\lambda - (n + 2))^n(\lambda - (n + 4))^{\frac{n-2}{4}}(\lambda - 2n)$	$\lambda_1 = 0,$ $m(\lambda_1) = 1$ $\lambda_2 = n,$ $m(\lambda_2) = \frac{3n-6}{4}$ $\lambda_3 = n + 2,$ $m(\lambda_3) = n$ $\lambda_4 = n + 4,$ $m(\lambda_4) = \frac{n-2}{4}$ $\lambda_5 = 2n,$ $m(\lambda_5) = 1$	$LE(\overline{G_S(D_{2n})})$ $\geq \left \frac{2n^3 + 3n^2 - 4n - 2qn + 2q}{n} \right $

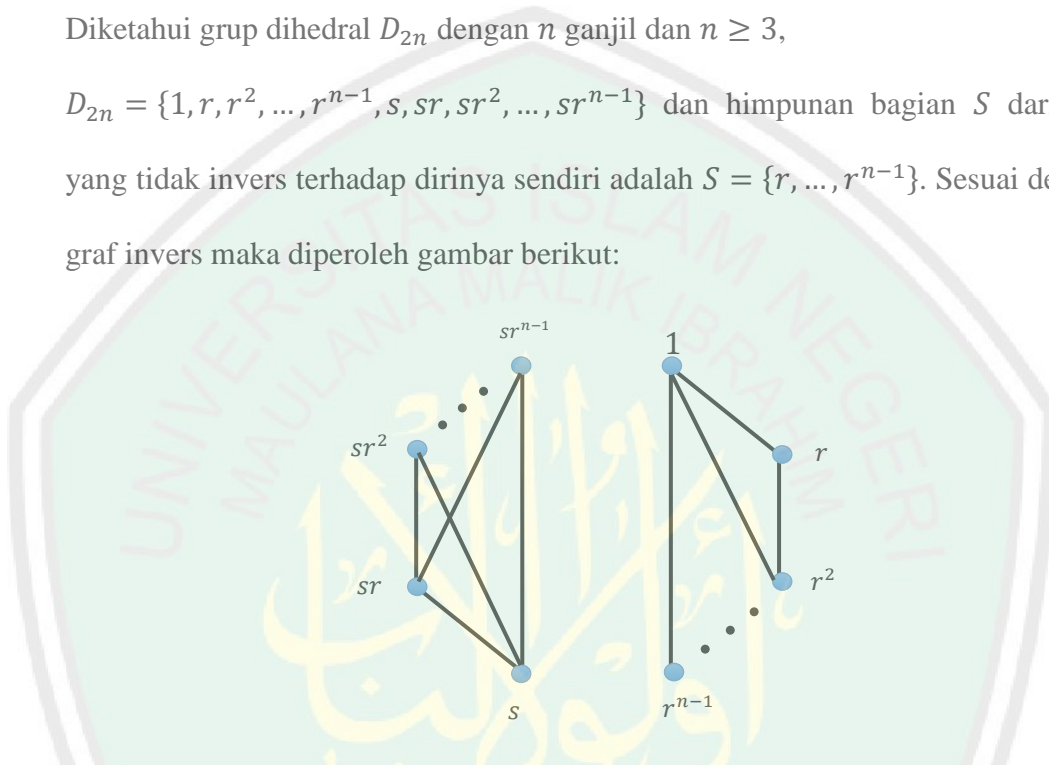
Teorema 1

Energi *Laplace* pada komplemen graf invers dari grup dihedral D_{2n} dengan n ganjil dan $n \geq 3$ adalah $LE(\overline{G_S(D_{2n})}) \geq \left\lfloor \frac{2n^3+n^2-2qn-n+2q}{n} \right\rfloor$.

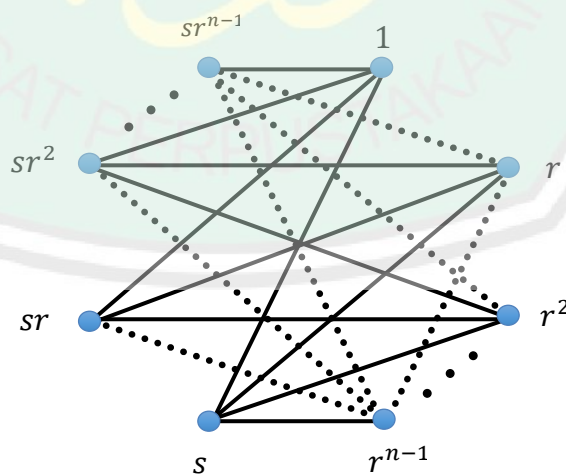
Bukti

Diketahui grup dihedral D_{2n} dengan n ganjil dan $n \geq 3$,

$D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$ dan himpunan bagian S dari D_{2n} yang tidak invers terhadap dirinya sendiri adalah $S = \{r, \dots, r^{n-1}\}$. Sesuai definisi graf invers maka diperoleh gambar berikut:



Gambar 3.13. Graf Invers Grup Dihedral- $2n$ $G_S(D_{2n})$



Gambar 3.14. Komplemen Graf Invers Grup Dihedral- $2n$ $(\overline{G_S(D_{2n})})$

Dari graf komplement tersebut, diperoleh matriks keterhubungan titik dan matriks derajat sebagai berikut:

$$A(\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{matrix} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$D(\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{matrix} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{matrix} \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n+1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & n+1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n+1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{bmatrix}$$

Sehingga

$$L = D - A =$$

$$\begin{matrix} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{matrix} \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & n+1 & -1 & \cdots & 0 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & -1 & n+1 & \cdots & 0 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & n+1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & n & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks *Laplace* tersebut maka dapat dicari nilai Eigennya dengan cara:

$$\det(L - \lambda I) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & n-\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ r & 0 & (n+1)-\lambda & -1 & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ r^2 & 0 & -1 & (n+1)-\lambda & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ r^{n-1} & 0 & -1 & 0 & \dots & (n+1)-\lambda & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ s & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & n-\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ sr & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & n-\lambda & 0 & \dots & 0 \\ sr^2 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 & n-\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ sr^{n-1} & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Melalui eliminasi Gauss pada $L - \lambda I$, diperoleh polinomial karakteristik dalam λ yaitu:

$$p(\lambda) = (\lambda)(\lambda - n)^{\frac{3n-3}{2}}(\lambda - (n+2))^{\frac{n-1}{2}}(\lambda - 2n)$$

diperoleh nilai Eigen

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = n, \quad \lambda_3 = n+2, \quad \lambda_4 = 2n$$

$$\text{dan multiplisitas } m(\lambda_1) = 1, m(\lambda_2) = \frac{3n-3}{2}, m(\lambda_3) = \frac{n-1}{2}, m(\lambda_4) = 1.$$

Sehingga diperoleh energi Laplace

$$\begin{aligned} LE(\overline{G_S(D_6)}) &= \sum \left| \lambda_i - \frac{2q}{p} \right|, p = 2n \\ &= m(\lambda_1) \left| \lambda_1 - \frac{2q}{p} \right| + m(\lambda_2) \left| \lambda_2 - \frac{2q}{p} \right| + m(\lambda_3) \left| \lambda_3 - \frac{2q}{p} \right| + m(\lambda_4) \left| \lambda_4 - \frac{2q}{p} \right| \\ &= \left| 0 - \frac{2q}{2n} \right| + \frac{3n-3}{2} \left| n - \frac{2q}{2n} \right| + \frac{n-1}{2} \left| n+2 - \frac{2q}{2n} \right| + \left| 2n - \frac{2q}{2n} \right| \\ &= \left| \frac{q}{n} \right| + \frac{3n-3}{2} \left| n - \frac{q}{n} \right| + \frac{n-1}{2} \left| n+2 - \frac{q}{n} \right| + \left| 2n - \frac{q}{n} \right| \\ &\geq \left| \frac{2q}{p} + \frac{3n-3}{2} \left(\frac{n^2-q}{n} \right) + \frac{n-1}{2} \left(\frac{n^2+2n-q}{n} \right) + 2 \left(\frac{2n^2-q}{2n} \right) \right| \\ &\geq \left| \frac{2q+(3n-3)(n^2-q)+(n-1)(n^2+2n-q)+(4n^2-2q)}{2n} \right| \\ &\geq \left| \frac{(3n-3)(n^2-q)+(n-1)(n^2+2n-q)+4n^2}{2n} \right| \\ &\geq \left| \frac{3n^3-3qn-3n^2+3q+n^3+2n^2-qn-n^2-2n+q+4n^2}{2n} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq \left| \frac{4n^3 + 2n^2 - 4qn - 2n + 4q}{2n} \right| \\ &\geq \left| \frac{2n^3 + n^2 - 2qn - n + 2q}{n} \right| \end{aligned}$$

Teorema 2

Energi *Laplace* pada komplemen graf invers dari grup dihedral D_{2n} dengan n genap dan $n = 4(k + 1), k \in \mathbb{N}$ adalah

$$LE(\overline{G_S(D_{2n})}) \geq \left| \frac{2n^3 + n^2 - 2qn + 4n + 2q}{n} \right|$$

Bukti

Diketahui grup dihedral D_{2n} dengan n genap dan $n = 4(k + 1), D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$ dan himpunan bagian S dari D_{2n} yang tidak invers terhadap dirinya sendiri adalah $S = \{r^i | i \neq \frac{n}{2}, i = 1, 2, 3, \dots, n - 1\}$. Sesuai definisi graf invers maka diperoleh gambar seperti Gambar 3.13 dan Gambar 3.14. Sehingga dari graf komplemen tersebut, diperoleh matriks keterhubungan titik dan matriks derajat sebagai berikut:

$$A(\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$D(\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{matrix} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{matrix} \begin{bmatrix} n+1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n+2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & n+1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n+2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n+1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & n+1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & n+1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n+1 \end{bmatrix}$$

Sehingga

$$L = D - A =$$

$$\begin{matrix} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{matrix} \begin{bmatrix} n+1 & 0 & -1 & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & n+2 & 0 & \dots & -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & 0 & n+1 & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & -1 & 0 & \dots & n+2 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & n+1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & n+1 & 0 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & 0 & n+1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & -1 & 0 & \dots & n+1 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks *Laplace* tersebut maka dapat dicari nilai Eigennya dengan cara:

$$\det(L - \lambda I) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} (n+1) - \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & (n+2) - \lambda & -1 & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & -1 & (n+1) - \lambda & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & -1 & 0 & \dots & (n+2) - \lambda & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & (n+1) - \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & (n+1) - \lambda & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 & (n+1) - \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & (n+1) - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Melalui eliminasi Gauss pada $L - \lambda I$, diperoleh polinomial karakteristik dalam λ

yaitu:

$$p(\lambda) = (\lambda)(\lambda - n)^{\frac{3n-4}{4}} (\lambda - (n+2))^n (\lambda - (n+4))^{\frac{n-4}{4}} (\lambda - 2n)$$

diperoleh nilai Eigen

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = n, \quad \lambda_3 = n + 2, \quad \lambda_4 = n + 4, \quad \lambda_5 = 2n$$

$$\text{dan multiplisitas } m(\lambda_1) = 1, m(\lambda_2) = \frac{3n-4}{4}, m(\lambda_3) = n, m(\lambda_4) = \frac{n-4}{4},$$

$$m(\lambda_5) = 1.$$

Sehingga diperoleh energi *Laplace*

$$\begin{aligned} LE(\overline{G_S(D_{2n})}) &= \sum \left| \lambda_i - \frac{2q}{p} \right| \\ &= m(\lambda_1) \left| \lambda_1 - \frac{2q}{p} \right| + m(\lambda_2) \left| \lambda_2 - \frac{2q}{p} \right| + m(\lambda_3) \left| \lambda_3 - \frac{2q}{p} \right| + m(\lambda_4) \left| \lambda_4 - \frac{2q}{p} \right| + \\ &\quad m(\lambda_5) \left| \lambda_5 - \frac{2q}{p} \right| \\ &= \left| 0 - \frac{2q}{2n} \right| + \frac{3n-4}{4} \left| n - \frac{2q}{2n} \right| + n \left| n + 2 - \frac{2q}{2n} \right| + \frac{n-4}{4} \left| n + 4 - \frac{2q}{2n} \right| + \left| 2n - \frac{2q}{2n} \right| \\ &= \left| \frac{q}{n} + \frac{3n-4}{4} \left| n - \frac{q}{n} \right| + n \left| n + 2 - \frac{q}{n} \right| + \frac{n-4}{4} \left| n + 4 - \frac{q}{n} \right| + \left| 2n - \frac{q}{n} \right| \right| \\ &\geq \left| \frac{4q}{4n} + \frac{3n-4}{4} \left(\frac{n^2-q}{n} \right) + n \left(\frac{4n^2+8n-4q}{4n} \right) + \frac{n-4}{4} \left(\frac{n^2+4n-q}{n} \right) + 4 \left(\frac{2n^2-q}{4n} \right) \right| \\ &\geq \left| \frac{4q+(3n-4)(n^2-q)+n(4n^2+8n-4q)+(n-4)(n^2+4n-q)+4(2n^2-q)}{4n} \right| \\ &\geq \left| \frac{(3n-4)(n^2-q)+n(4n^2+8n-4q)+(n-4)(n^2+4n-q)+8n^2}{4n} \right| \\ &\geq \left| \frac{3n^3-3qn-4n^2+4q+4n^3+8n^2-4qn+n^3+4n^2-qn-4n^2-16n+4q+8n^2}{4n} \right| \\ &\geq \left| \frac{8n^3+12n^2-16n-8qn-2n+8q}{4n} \right| \\ &\geq \left| \frac{2n^3+3n^2-4n-2qn+2q}{n} \right| \end{aligned}$$

Teorema 3

Energi *Laplace* pada komplemen graf invers dari grup dihedral D_{2n} dengan n genap dan $n = 4k + 2, k \in \mathbb{N}$ adalah

$$LE(\overline{G_S(D_{2n})}) \geq \left\lfloor \frac{2n^3 + 3n^2 - 4n - 2qn + 2q}{n} \right\rfloor$$

Bukti

Diketahui grup dihedral D_{2n} dengan n genap dan $n = 4k + 2$, $D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$ dan himpunan bagian S dari D_{2n} yang tidak invers terhadap dirinya sendiri adalah $S = \{r^i | i \neq \frac{n}{2}, i = 1, 2, 3, \dots, n-1\}$. Sesuai definisi graf invers maka diperoleh gambar seperti Gambar 3.13 dan Gambar 3.14. Sehingga dari graf komplemen tersebut, diperoleh matriks keterhubungan titik dan matriks derajat sebagai berikut:

$$A(\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{matrix} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$D(\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{matrix} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{matrix} \begin{bmatrix} n+1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n+2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & n+2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n+2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n+1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & n+1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & n+1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n+1 \end{bmatrix}$$

Sehingga

$$L = D - A =$$

$$\begin{matrix} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{matrix} \begin{bmatrix} n+1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & n+2 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & -1 & n+2 & \cdots & 0 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & n+2 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & n+1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & n+1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & n+1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & -1 & \cdots & n+1 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks *Laplace* tersebut maka dapat dicari nilai Eigennya dengan cara:

$$\det(L - \lambda I) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & (n+1) - \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ r & 0 & (n+2) - \lambda & -1 & \cdots & 0 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ r^2 & 0 & -1 & (n+2) - \lambda & \cdots & 0 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ r^{n-1} & 0 & -1 & 0 & \cdots & (n+2) - \lambda & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ s & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & (n+1) - \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ sr & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & (n+1) - \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ sr^2 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & (n+1) - \lambda & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ sr^{n-1} & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & -1 & \cdots & (n+1) - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

Melalui eliminasi Gauss pada $L - \lambda I$, diperoleh polinomial karakteristik dalam λ yaitu:

$$p(\lambda) = (\lambda)(\lambda - n)^{\frac{3n-6}{4}} (\lambda - (n+2))^n (\lambda - (n+4))^{\frac{n-2}{4}} (\lambda - 2n)$$

diperoleh nilai Eigen

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = n, \quad \lambda_3 = n+2, \quad \lambda_4 = n+4, \quad \lambda_5 = 2n$$

$$\text{dan multiplisitas } m(\lambda_1) = 1, m(\lambda_2) = \frac{3n-6}{4}, m(\lambda_3) = n, m(\lambda_4) = \frac{n-2}{4},$$

$$m(\lambda_5) = 1.$$

Sehingga diperoleh energi *Laplace*

$$\begin{aligned}
 LE(\overline{G_S(D_6)}) &= \Sigma \left| \lambda_i - \frac{2q}{p} \right|, p = 2n \\
 &= m(\lambda_1) \left| \lambda_1 - \frac{2q}{p} \right| + m(\lambda_2) \left| \lambda_2 - \frac{2q}{p} \right| + m(\lambda_3) \left| \lambda_3 - \frac{2q}{p} \right| + m(\lambda_4) \left| \lambda_4 - \frac{2q}{p} \right| + \\
 & m(\lambda_5) \left| \lambda_5 - \frac{2q}{p} \right| \\
 &= \left| 0 - \frac{2q}{2n} + \frac{3n-6}{4} \right| \left| n - \frac{2q}{2n} \right| + n \left| n + 2 - \frac{2q}{2n} \right| + \frac{n-2}{4} \left| n + 4 - \frac{2q}{2n} \right| + \left| 2n - \frac{2q}{2n} \right| \\
 &= \left| \frac{q}{n} + \frac{3n-6}{4} \right| \left| n - \frac{q}{n} \right| + n \left| n + 2 - \frac{q}{n} \right| + \frac{n-2}{4} \left| n + 4 - \frac{q}{n} \right| + \left| 2n - \frac{q}{n} \right| \\
 &\geq \left| \frac{4q}{4n} + \frac{3n-6}{4} \left(\frac{n^2-q}{n} \right) + n \left(\frac{4n^2+8n-4q}{4n} \right) + \frac{n-2}{4} \left(\frac{n^2+4n-q}{n} \right) + 4 \left(\frac{2n^2-q}{4n} \right) \right| \\
 &\geq \left| \frac{4q+(3n-6)(n^2-q)+n(4n^2+8n-4q)+(n-2)(n^2+4n-q)+(8n^2-4q)}{4n} \right| \\
 &\geq \left| \frac{(3n-6)(n^2-q)+n(4n^2+8n-4q)+(n-2)(n^2+4n-q)+8n^2}{4n} \right| \\
 &\geq \left| \frac{3n^3-3qn-6n^2+6q+4n^3+8n^2-4qn+n^3+4n^2-qn-2n^2-8n+2q+8n^2}{4n} \right| \\
 &\geq \left| \frac{8n^3+12n^2-8qn-16n+8q}{4n} \right| \\
 &\geq \left| \frac{2n^3+3n^2-2qn-4n+2q}{n} \right|
 \end{aligned}$$

3.7 Konsep Energi dalam Al-Quran

Al-Quran merupakan sumber dari segala ilmu pengetahuan yang ada di dunia ini, termasuk ilmu matematika. Energi pada graf pada dasarnya merupakan penjumlahan nilai mutlak dari semua nilai Eigen. Konsep perhitungan energi pada graf terdapat pada al-Quran surat an-Naba'/78:29, yang berbunyi

وَكُلَّ شَيْءٍ أَحْصَيْنَاهُ كِتَابًا ﴿٢٩﴾

Artinya: “Dan segala sesuatu telah Kami catat dalam suatu kitab” (QS. an-Naba'/78:29).

Ayat tersebut menjelaskan bahwa segala sesuatu yang ada di alam semesta telah dicatat atau dihitung. Manusia dianugerahi Allah sebuah akal sebagai bukti bahwa manusia adalah makhluk sempurna. Akal sebagai pembeda antara manusia dengan makhluk lainnya agar manusia dapat berpikir tentang kebesaran Allah, dapat membedakan antara kebaikan dan kejelekan. Maka segala sesuatu yang dikerjakan manusia dicatat atau dihitung dalam suatu kitab. Seperti firman Allah dalam al-Quran surat al-Jatsiyah/45:29

هَذَا كِتَابُنَا يُنطِقُ عَلَيْكُمْ بِالْحَقِّ إِنَّا كُنَّا نَسْتَنسِخُ مَا كُنْتُمْ تَعْمَلُونَ ﴿٢٩﴾

Artinya: (Allah berfirman): “Inilah kitab (catatan) Kami yang menuturkan terhadapmu dengan benar. Sesungguhnya Kami telah menyuruh mencatat apa yang telah kamu kerjakan” (QS. al-Jatsiyah/45:29).

Menurut tafsir Quraish Shihab, dan dikatakan kepada mereka, “Inilah Kami yang berisi catatan semua amal perbuatanmu dan yang telah kalian ambil dengan tangan kalian, akan menuturkan kepada kalian dengan benar apa yang telah kalian lakukan. Sesungguhnya Kami telah menyuruh malaikat mencatat, supaya Kami dapat membuat perhitungan terhadap apa yang kalian lakukan”.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan, maka dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

Energi *Laplace* pada komplemen graf invers dari grup dihedral D_{2n}

a. untuk n ganjil dan $n \geq 3$ adalah

$$LE(\overline{G_S(D_{2n})}) \geq \left| \frac{2n^3 + n^2 - 2qn - n + 2q}{n} \right|$$

b. untuk n genap dan $n = 4(k + 1)$, $k \in \mathbb{N}$ adalah

$$LE(\overline{G_S(D_{2n})}) \geq \left| \frac{2n^3 + n^2 - 2qn + 4n + 2q}{n} \right|$$

c. untuk n genap dan $n = 4k + 2$, $k \in \mathbb{N}$ adalah

$$LE(\overline{G_S(D_{2n})}) \geq \left| \frac{2n^3 + 3n^2 - 4n - 2qn + 2q}{n} \right|$$

4.2 Saran

Bagi penelitian selanjutnya, disarankan untuk melanjutkan penelitian mengenai energi *Laplace* yang dapat diperoleh dari grup lainnya.

DAFTAR RUJUKAN

- Abdussakir, Azizah, N.N. dan Nofandika, F.F.. 2009. *Teori Graf*. Malang: UIN Malang Press.
- Abdussakir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.
- Alfuraidan, M.R. & Zakariya, Y.F.. 2017. Invers Graphs Associated with Finite Groups. *Electronic Journal of Graph Theory and Applications*, 5(1): 142-154.
- Biyikoglu, T., Leytold, J., Standler, P.F.. 2007. *Laplacian Eigenvectors of Graphs*. Berlin: Springer.
- Chartrand, G., Lesniak, L., dan Zhang, P. 2016. *Graphs and Digraphs Sixth Edition*. California: CRC Press.
- Das, K.C. & Mojalal, S.A.. 2016. On Energy and Laplacian Energy of Graphs. *Electronic Journal of Linier Algebra*, 31:167-186.
- Dummit, D.S. & Foote, R.M. 1991. *Abstract Algebra*. New Jersey: Prentice Hall, Inc.
- Gilbert, L. & Gilbert, J.. 2009. *Elements of Modern Algebra Seventh Edition*. Canada: Brooks/Cole.
- Meenakshi, S. & Lavanya, S.. 2014. A Survey on Energy of Graphs. *Annals of Pure and Applied Mathematics*, 8 (2): 183-191.
- Raisinghania, M. & Aggarwal, R.. 1980. *Modern Algebra*. New Delhi: S. Chand & Company Ltd.
- Zhou, B. & Gutman, I. 2007. On Laplacian Energy of Graphs. *Match Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 57: 211-220.

LAMPIRAN- LAMPIRAN

1. Perhitungan nilai eigen pada matriks *Laplace* dari komplemen graf invers dari grup dihedral-6

> restart;

> with(linalg) :

>

$A := \text{matrix}(6, 6, [3 - \text{lambda}, 0, 0, -1, -1, -1, 0, 4 - \text{lambda}, -1, -1, -1, -1, 0, -1, 4 - \text{lambda}, -1, -1, -1, -1, -1, 3 - \text{lambda}, 0, 0, -1, -1, -1, 0, 3 - \text{lambda}, 0, -1, -1, -1, 0, 0, 3 - \text{lambda}]);$

$$A := \begin{bmatrix} 3 - \lambda & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 - \lambda & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 - \lambda & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 - \lambda & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 3 - \lambda & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 3 - \lambda \end{bmatrix}$$

> $L := \det(A);$

$$L := \lambda^6 - 20\lambda^5 + 156\lambda^4 - 594\lambda^3 + 1107\lambda^2 - 810\lambda$$

> factor(L);

$$\lambda(\lambda - 5)(\lambda - 6)(\lambda - 3)^3$$

2. Perhitungan nilai eigen pada matriks *Laplace* dari komplemen graf invers dari grup dihedral-8

> restart;

> with(linalg) :

>

$A := \text{matrix}(8, 8, [5 - \text{lambda}, 0, -1, 0, -1, -1, -1, -1, 0, 5 - \text{lambda}, 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 5 - \text{lambda}, 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 5 - \text{lambda}, 0, -1, 0, -1, -1, -1, -1, 0, 5 - \text{lambda}, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 5 - \text{lambda}, 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 5 - \text{lambda}, 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 5 - \text{lambda}]);$

$$A := \begin{bmatrix} 5 - \lambda & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 - \lambda & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 5 - \lambda & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 5 - \lambda & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 5 - \lambda & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 5 - \lambda & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 5 - \lambda & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 5 - \lambda \end{bmatrix}$$

- > $L := \det(A);$
 $L := \lambda^8 - 40\lambda^7 + 680\lambda^6 - 6368\lambda^5 + 35472\lambda^4 - 117504\lambda^3 + 214272\lambda^2 - 165888\lambda$
- > $\text{factor}(L);$
 $\lambda(\lambda - 8)(\lambda - 4)^2(\lambda - 6)^4$

3. Perhitungan nilai eigen pada matriks *Laplace* dari komplemen graf invers dari grup dihedral-10

- > *restart;*
 > *with(linalg) :*
 >

$A := \text{matrix}(10, 10, [5 - \text{lambd}\alpha, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 6 - \text{lambd}\alpha, 0, 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 6 - \text{lambd}\alpha, -1, 0, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 0, -1, 6 - \text{lambd}\alpha, 0, -1, -1, -1, -1, -1, 0, -1, 0, 0, 6 - \text{lambd}\alpha, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 5 - \text{lambd}\alpha, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 5 - \text{lambd}\alpha, 0, 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 5 - \text{lambd}\alpha, 0, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 5 - \text{lambd}\alpha, 0, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 5 - \text{lambd}\alpha]);$

$$A := \begin{bmatrix} 5 - \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 6 - \lambda & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 - \lambda & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 6 - \lambda & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 6 - \lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 5 - \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 5 - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 5 - \lambda & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 5 - \lambda & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 - \lambda \end{bmatrix}$$

- > $L := \det(A);$
 $L := \lambda^{10} - 54\lambda^9 + 1284\lambda^8 - 17660\lambda^7 + 154950\lambda^6 - 900000\lambda^5 + 3462500\lambda^4 - 8512500\lambda^3 + 12140625\lambda^2 - 7656250\lambda$
- > $\text{factor}(L);$
 $\lambda(\lambda - 10)(\lambda - 7)^2(\lambda - 5)^6$

4. Perhitungan nilai eigen pada matriks *Laplace* dari komplemen graf invers dari grup dihedral-12

> restart;

> with(linalg) :

>

```
A := matrix(12, 12, [7 - lambda, 0, 0, -1, 0, 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 8 - lambda, -1, 0, 0, -1,
-1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, -1, 8 - lambda, 0, -1, 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 7 - lambda, 0,
0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 0, -1, 0, 8 - lambda, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, -1, 0, 0, -1, 8
- lambda, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 7 - lambda, 0, 0, -1, 0, 0, -1, -1, -1, -1,
-1, -1, 0, 7 - lambda, 0, 0, -1, 0, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 7 - lambda, 0, 0, -1, -1, -1, -1, -1,
-1, -1, -1, 0, 0, 7 - lambda, 0, 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, -1, 0, 0, 7 - lambda, 0, -1, -1, -1, -1,
-1, -1, 0, 0, 7 - lambda]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 7-\lambda & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 8-\lambda & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 8-\lambda & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 7-\lambda & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 8-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 8-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 7-\lambda & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 7-\lambda & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 7-\lambda & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 7-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 7-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 7-\lambda & 0 \end{bmatrix}$$

> L := det(A);

$$L := \lambda^{12} - 88\lambda^{11} + 3504\lambda^{10} - 83344\lambda^9 + 1315888\lambda^8 - 14481984\lambda^7 + 113373184\lambda^6 - 631386112\lambda^5 + 2451505152\lambda^4 - 6320553984\lambda^3 + 9739173888\lambda^2 - 6794772480\lambda$$

> factor(L);

$$\lambda(\lambda - 10)(\lambda - 12)(\lambda - 6)^3(\lambda - 8)^6$$

5. Perhitungan nilai eigen pada matriks *Laplace* dari komplemen graf invers dari grup dihedral-14

> *restart*;

> *with(linalg)* :

>

```
A := matrix(14, 14, [7 - lambda, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 8 - lambda, 0, 0, 0,
0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 8 - lambda, 0, 0, -1, 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 8
- lambda, -1, 0, 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 0, -1, 8 - lambda, 0, 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1,
-1, 0, 0, -1, 0, 0, 8 - lambda, 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, -1, 0, 0, 0, 8 - lambda, -1, -1,
-1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 7 - lambda, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1,
0, 7 - lambda, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 7 - lambda, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -1,
-1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 7 - lambda, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 7 - lambda, 0, 0, -1,
-1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 7 - lambda, 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 7 - lambda, 0, 0, 0, 7
- lambda]);
```

```
A := [[7 - λ, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1],
[0, 8 - λ, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1],
[0, 0, 8 - λ, 0, 0, -1, 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1],
[0, 0, 0, 8 - λ, -1, 0, 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1],
[0, 0, 0, -1, 8 - λ, 0, 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1],
[0, 0, -1, 0, 0, 8 - λ, 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1],
[0, -1, 0, 0, 0, 0, 8 - λ, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1],
[-1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 7 - λ, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
[-1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 7 - λ, 0, 0, 0, 0, 0],
[-1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 7 - λ, 0, 0, 0, 0],
[-1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 7 - λ, 0, 0, 0],
[-1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 7 - λ, 0, 0],
[-1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 7 - λ, 0],
[-1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 7 - λ]]
```

> *L := det(A)*;

$$L := \lambda^{14} - 104\lambda^{13} + 4968\lambda^{12} - 144390\lambda^{11} + 2849721\lambda^{10} - 40343562\lambda^9 + 421601880\lambda^8 \\ - 3293701404\lambda^7 + 19240199811\lambda^6 - 83016428572\lambda^5 + 257208949760\lambda^4 \\ - 541972001214\lambda^3 + 696220781571\lambda^2 - 411848913042\lambda$$

> *factor(L)*;

$$\lambda(\lambda - 14)(\lambda - 9)^3(\lambda - 7)^9$$

6. Perhitungan nilai eigen pada matriks *Laplace* dari komplemen graf invers dari grup dihedral-16

- > restart;
- > with(linalg) :
- >

```
A := matrix(16, 16, [9 - lambda, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 10 - lambda,
0, -1, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 9 - lambda, 0, 0, 0, -1, 0, -1, -1, -1, -1, -1,
-1, -1, -1, 0, -1, 0, 10 - lambda, 0, -1, 0, 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 9
- lambda, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, -1, 0, 10 - lambda, 0, -1, -1, -1, -1, -1,
-1, -1, -1, -1, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 9 - lambda, 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, -1, 0, 0, 0, -1, 0,
10 - lambda, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 9 - lambda, 0, 0, 0, -1,
0, 0, 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 9 - lambda, 0, 0, 0, -1, 0, 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1,
0, 0, 9 - lambda, 0, 0, 0, -1, 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 9 - lambda, 0, 0, 0, -1, -1,
-1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 9 - lambda, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, -1, 0, 0,
0, 9 - lambda, 0, 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 9 - lambda, 0, -1, -1, -1, -1,
-1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 9 - lambda, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 9 - lambda, 0, -1, -1, -1,
-1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 9 - lambda]);
```

```
A := [[9 - λ, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 10 - λ],
[0, 10 - λ, 0, -1, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0],
[0, 0, 9 - λ, 0, 0, 0, -1, 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0],
[0, -1, 0, 10 - λ, 0, -1, 0, 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0],
[-1, 0, 0, 0, 9 - λ, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0],
[0, 0, 0, -1, 0, 10 - λ, 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0],
[0, 0, -1, 0, 0, 0, 9 - λ, 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0],
[0, -1, 0, 0, 0, -1, 0, 10 - λ, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0],
[-1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 9 - λ, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0],
[-1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 9 - λ, 0, 0, 0, -1, 0, 0],
[-1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 9 - λ, 0, 0, 0, -1, 0],
[-1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 9 - λ, 0, 0, 0, -1],
[-1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 9 - λ, 0, 0, 0],
[-1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, -1, 0, 0, 0, 9 - λ, 0, 0],
[-1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 9 - λ, 0],
[-1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 9 - λ]]
```

- > L := det(A);

$$\begin{aligned}
L := & \lambda^{16} - 148\lambda^{15} + 10192\lambda^{14} - 433280\lambda^{13} + 12717920\lambda^{12} - 273054848\lambda^{11} \\
& + 4430325504\lambda^{10} - 55319678976\lambda^9 + 536012263680\lambda^8 - 4030422860800\lambda^7 \\
& + 23327835136000\lambda^6 - 102070681600000\lambda^5 + 326834585600000\lambda^4 \\
& - 723058688000000\lambda^3 + 988282880000000\lambda^2 - 629145600000000\lambda
\end{aligned}$$

> *factor(L)*;

$$\lambda (\lambda - 12) (\lambda - 16) (\lambda - 8)^5 (\lambda - 10)^8$$



RIWAYAT HIDUP



Dwiki Marlinda Agustina, lahir di Nganjuk pada tanggal 20 Agustus 1995, biasa dipanggil Dwiki, tinggal di Jalan A.Yani Gg. Apel No.9 Dusun Bogo Desa Nglawak Kecamatan Kertosono Kabupaten Nganjuk, puteri kedua dari bapak Podo Susilo dan ibu Sumarsih. Pendidikan dasarnya ditempuh di SDN Ngalawak II, lulus pada tahun 2007. Setelah itu melanjutkan ke SMPN 1 Kertosono dan lulus pada tahun 2010. Kemudian penulis melanjutkan pendidikan ke MAN Tambakberas Jombang dan lulus pada tahun 2013. Selanjutnya, pada tahun 2013 penulis menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil Jurusan Matematika.

Selama menjadi mahasiswa, aktif di organisasi ekstra kampus, aktif di Komunitas Kemanusiaan, dan sedang belajar di Kelompok Belajar Menulis “Merajut Sastra”.



**KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933**

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Dwiki Marlinda Agustina
NIM : 13610071
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Energi Laplace pada Komplemen Graf Invers dari Grup Dihedral
Pembimbing I : Dr. Abdussakir, M.Pd
Pembimbing II : Mohammad Jamhuri, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	4 Desember 2017	Konsultasi BAB I dan II	1.
2.	28 Desember 2017	Konsultasi BAB I, II, dan III	2.
3.	30 Januari 2017	Konsultasi BAB III	3.
4.	4 Januari 2018	Konsultasi Agama	4.
5.	2 Maret 2018	ACC untuk Seminar Proposal	5.
6.	5 Maret 2018	ACC untuk Seminar Proposal	6.
7.	23 April 2018	Konsultasi BAB III	7.
8.	27 April 2018	Revisi BAB III	8.
9.	30 April 2018	Konsultasi Agama	9.
10.	2 Mei 2018	ACC Keseluruhan	10.
11.	2 Mei 2018	ACC Agama Keseluruhan	11.

Malang, 4 Mei 2018
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001