SIFAT-SIFAT GABUNGAN IDEAL SUB-IMPLIKATIF HALUS DALAM ALJABAR BCI

SKRIPSI

OLEH
YUSRINA
NIM. 13610016

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

SIFAT-SIFAT GABUNGAN IDEAL SUB-IMPLIKATIF HALUS DALAM ALJABAR BCI

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Yusrina
NIM. 13610016

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

SIFAT-SIFAT GABUNGAN IDEAL SUB-IMPLIKATIF HALUS DALAM ALJABAR BCI

SKRIPSI

Oleh
Yusrina
NIM. 13610016

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 22 Februari 2018

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Dr. Abdussakir, M.Pd	Dr. Ahmad Barizi, M.A
NIP. 19751006 200312 1 001	NIP. 19731212 199803 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

SIFAT-SIFAT GABUNGAN IDEAL SUB-IMPLIKATIF HALUS DALAM ALJABAR BCI

SKRIPSI

Oleh
Yusrina
NIM. 13610016

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 28 Maret 2018

Penguji Utama	: H. Wahyu H. Irawan, M.Pd	....
Ketua Penguji	: Evawati Alisah, M.Pd	....
Sekretaris Penguji	: Dr. Abdussakir, M.Pd	....
Anggota Penguji	: Dr. Ahmad Barizi, M.A	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Yusrina
NIM	: 13610016
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Sifat-sifat Gabungan Ideal Sub-implikatif Halus dalam Aljabar BCI

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 09 Februari 2018
Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL
TGL. 20
8D3AEAFF124853756
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Yusrina
NIM. 13610016

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

MOTO

وَقَالَ رَبُّكُمُ ٱدْعُونِىٓ أَسْتَجِبْ لَكُمْ ۚ إِنَّ ٱلَّذِينَ يَسْتَكْبِرُونَ عَنْ عِبَادَتِى
سَيَدْخُلُونَ جَهَنَّمَ دَاخِرِينَ ﴿٦٠﴾

"Dan Tuhanmu berfirman: Berdo'alah kepada Ku, niscaya akan Aku perkenankan bagimu. Sesungguhnya orang-orang yang menyombongkan diri dari menyembah Ku, akan masuk neraka Jahannam dalam keadaan hina dina

(QS. al-Mu'min: 60). "

"Banyak kegagalan hidup terjadi karena orang-orang tidak menyadari betapa dekatnya kesuksesan ketika mereka menyerah"

(Thomas Alva Edison)

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda Muhammad Salehoddin, dukungan dan arahan darinya menjadi semangat bagi penulis. Ibunda tercinta Helliyah, do'a darinya menghadirkan keselamatan, keterlindungan dan kelancaran bagi penulis. Adik tersayang Amiqatin Fikriyah dan seluruh keluarga yang telah memberi dukungan kepada penulis.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Ucapan syukur *alhamdulillahirabbil'alamin* penulis panjatkan kepada Allah Swt, karena berkat limpahan rahmat dan karunia-Nya, skripsi ini dapat diselesaikan dengan baik. Shalawat dan salam semoga tetap tercurahlimpahkan kepada Nabi Muhammad Saw, yang telah membimbing manusia ke jalan yang benar yaitu agama Islam.

Skripsi ini penulis susun untuk memenuhi salah satu syarat menyelesaikan pendidikan program studi strata satu (S1) di Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Dalam penulisan skripsi ini, tidak terlepas dari bantuan berbagai pihak, baik berupa bimbingan, arahan maupun saran. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terimakasih kepada:

1. Prof. Dr. Abdul Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku dosen pembimbing I yang selalu memberikan arahan, nasihat dan motivasi kepada penulis.
5. Dr. Ahmad Barizi, M.A, selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan saran dan bantuan dalam penulisan skripsi ini.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, terutama seluruh dosen, terimakasih atas bimbingan dan pengajarannya selama masa perkuliahan.
7. Bapak dan Ibu penulis yang selalu mendo'akan dan memberikan dukungan, kasih sayang, serta motivasi kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
8. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2013, yang telah memberikan dukungan, berjuang bersama-sama, dan mengukir kenangan indah yang tidak akan terlupakan.
9. Semua pihak yang secara langsung atau tidak langsung telah ikut memberikan bantuan dalam menyelesaikan skripsi ini.

Terakhir penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat dan menambah wawasan bagi pembaca dan khususnya bagi penulis juga.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, Februari 2018

Penulis

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR ISI

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB IV PENUTUP

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR TABEL

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ABSTRAK

Yusrina. 2018. **Sifat-sifat Gabungan Ideal Sub-implikatif Halus dalam Aljabar BCI.** Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Abdussakir, M.Pd. (II) Dr. Ahmad Barizi, M.A.

Kata kunci: aljabar BCI, gabungan ideal-p halus, gabungan ideal sub-implikatif halus.

Struktur aljabar adalah suatu himpunan tak kosong yang memiliki satu atau lebih operasi biner dan memenuhi beberapa aksioma. Seiring berkembangnya zaman struktur aljabar juga berkembang, hal tersebut dikarenakan setiap pengembangan sifat-sifat dari struktur aljabar, sangat bermanfaat untuk menyelesaikan masalah-masalah abstrak. Pada perkembangan struktur aljabar, ditemukan aljabar-aljabar baru salah satunya adalah aljabar BCI. Pada tahun 2017 terdapat temuan baru tentang gabungan ideal-p halus dan gabungan ideal sub-implikatif halus dalam aljabar BCI beserta sifat-sifat dari keduanya.

Tujuan penelitian ini adalah untuk memperjelas sifat-sifat gabungan ideal sub-implikatif halus dalam aljabar BCI, yang berupa teorema, lemma, bukti dan contoh. Adapun hasil penelitian ini adalah:

a. Setiap gabungan ideal sub-implikatif halus adalah gabungan ideal halus.
b. Setiap aljabar BCI *p-semisimple* adalah gabungan ideal halus dan gabungan ideal sub-implikatif halus.
c. Setiap gabungan ideal-p halus adalah gabungan ideal sub-implikatif halus.
d. Jika himpunan halus F_A adalah gabungan ideal sub-implikatif halus, maka himpuna halus F_A^* juga gabungan ideal sub-impikatif halus.
e. Setiap ideal sub-implikatif dapat dinyatakan sebagai ideal sub-implikatif *exclusive* dari beberapa gabungan ideal sub-implikatif halus.

Bagi penelitian selanjutnya diharapkan dapat melakukan penelitian yang serupa, yang menjelaskan sifat-sifat gabungan ideal halus tetapi pada struktur aljabar yang lainnya.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ABSTRACT

Yusrina. 2018. **Properties of Union Soft Sub-Implicative Ideal in BCI Algebra.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Islamic State University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Dr. Abdussakir, M.Pd. (II) Dr. Ahmad Barizi, M.A.

Keywords: BCI-algebra, union soft p-ideal, union soft sub-implicative ideal.

The algebraic structures is a non-empty set that has one or more binary operations and satisfies several axioms. As the age of algebraic structures develops, it is due to the development of the properties of algebraic structures that are useful for solving abstract problems. In the development of algebraic structure, new algebra-algebra is found, one of which is algebra BCI. In 2017 there is a new finding of union soft p-ideals and union soft sub-implicative ideal in BCI algebra and the properties of both.

The purpose of this study was to clarify properties of union soft sub-implicative ideal in BCI algebra with theorem, lemma, evidence and examples. The results of this study are:

a. Every union soft sub-implicative ideal is a union soft ideal.
b. Every BCI algebra p-semisimple is a union soft ideal and union soft sub-implicative ideal.
c. Every union soft p-ideal is a union soft sub-implicative ideal.
d. If soft set F_A is a Union soft sub-implicative ideal, then soft set F_A^* also union soft sub-implicative ideal.
e. Every sub-implicative ideal can be expressed as an exclusive sub-implicative ideal of some union soft sub-implicative ideal.

For further research is expected to organize similar reseach, decribing the characteritics of union soft ideal but on a different group or different sub-group in BCI algebra.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ملخص

يوصرينا.٢٠١٨. **خصائص Gabungan Ideal Sub-implikatif Halus في الجبر BCI .** البحث الجامعي. . قسم الرياضيات.كلّية علوم والتكنولوجيا, جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرف: (١) الدكتور عبدالشاكر الماجستير. (٢) الدكتور احمد بارزي.

الكليمة الرئيسية: الجبر *BCI* . Gabungan ideal-p halus. Gabungan ideal sub-implikatif halus.

إن بنية الجبر عبارة عن مجموعة غير فارغة تحتوي على عملية ثنائية واحدة أو أكثر وتفي بالعديد من البديهيات. مع تطور عصر الهياكل الجبرية ، فإن ذلك يرجع إلى تطور خصائص البنى الجبرية المفيدة لحل المشكلات التجريدية. في تطوير البنية الجبرية ، تم العثور على الجبر والجبر الجديد ، واحد منها هو الجبر BCI . في عام ٢٠١٧ ، هناك اكتشاف جديد Gabungan ideal-p halus و Gabungan ideal sub-implikatif halus في الجبر BCI وخصائص كلاهما.

الأهداف من هذا البحث هو الحصول علي استنتاج أكثر تفصيلا من خلال شرح خصائص ideal halus علي أساس نظرية موجودة علي البحوث السابقة ، ولكن يقتصر علي gabungan ideal sub- implikatif halus.اما بالنسبة لنتيجة كما يلى:

A. كل gabungan ideal sub-implikatif halus هو gabungan ideal halus

B. كل الجبر *BCI p-semisimple* هو gabungan ideal halus وgabungan ideal sub-implikatif halus

C. كل gabungan p-ideal هو gabungan sub-implikatif ideal halus

D. إذا كانت F_A himpunan halus هو gabungan ideal sub-implikatif halus ، ثم F_A^* halus himpunan هو gabungan ideal sub-impikatif halus أيضا.

E. كل ideal sub-implikatif هو ideal sub-implikatif *exclusive* من بعض gabungan ideal sub-implikatif halus

لذلك البحث القادم ، يرجو ان يكون قادره علي القيام ببحوث مماثله الذي يصف خصائص gabungan ideal halus ولكن على grup أو sub-grup مختلف من الجبر*BCI*

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Perkembangan zaman menuntut perkembangan pola berpikir manusia. Manusia dituntut untuk berpikir secara kritis, logis, dan kreatif. Seiring dengan berkembangnya pola berpikir manusia, ilmu pengetahuanpun semakin berkembang. Salah satunya adalah ilmu matematika. Matematika selalu dipelajari dalam bidang-bidang ilmu pengetahuan yang lain dan sangat dibutuhkan dalam kehidupan sehari-hari. Matematika bukanlah satu pengetahuan yang berdiri sendiri, tetapi adanya matematika sangat dibutuhkan sebagai penunjang untuk membantu manusia, terutama dalam memahami dan mengatasi permasalahan ekonomi dan sosial. Hasratuddin (2013:132) menyatakan bahwa matematika adalah suatu cara untuk menemukan jawaban dari beberapa masalah yang dihadapi manusia, dan merupakan suatu cara untuk menggunakan pengetahuan tentang menghitung.

Ruseffendi (1997) dalam Fitria (2013:46) mengatakan matematika adalah ilmu deduktif, bahasa, seni, ratunya ilmu, ilmu tentang pola dan hubungan. Sedangkan Hudojo (1998) dalam Hasratuddin (2013:132) menyatakan bahwa matematika merupakan ide-ide abstrak yang diberi simbol-simbol dan tersusun secara hirarkis dan penalarannya deduktif, sehingga belajar matematika merupakan kegiatan mental yang tinggi.

Allah Swt berfirman di dalam al-Quran surat al-Furqan/25:2, yaitu:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَّرَهُۥ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

Artinya : *"Dan Dia menciptakan segala sesuatu, lalu menetapkan ukuran-ukurannya dengan tepat"* (QS.Al-Furqan/25:2).

وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ (dan Dia menciptakan segala sesuatu) maksudnya adalah Allah Swt yang menciptakan segala sesuatu baik pada alam bagian atas yaitu langit, maupun alam bagian bawah yaitu bumi, serta manusia, jin, malaikat, hewan, tumbuhan, benda mati, dan lainnya.

فَقَدَّرَهُۥ (lalu menetapkan ukuran-ukurannya) maksud dari ukuran-ukuran pada ayat tersebut adalah bahwa Allah menciptakan segala sesuatu yang ada di langit maupun di bumi bukan tanpa fungsi semata, tetapi Allah menciptakannya dengan diberi perlengkapan-perlengkapan dan persiapan-persiapan.

تَقْدِيرًا (dengan tepat) maksudnya perlengkapan dan persiapan yang Allah berikan pada setiap ciptaannya tentunya sesuai dengan naluri, sifat-sifat dan fungsi masing-masing dalam kehidupan.

Secara umum ayat tersebut menjelaskan bahwa Allah menciptakan segala sesuatu dengan fungsi dan ukuran masing-masing. Jika dikaitkan dengan ilmu matematika, ilmu matematika adalah salah satu ilmu yang bisa digunakan untuk memecahkan perhitungan segala macam ciptaan Allah. Selain itu Allah Swt berfirman di dalam al-Quran surat al-An'am/6:144 yang menunjukkan bahwa tumbuhan bisa dikelompokkan berdasarkan karakteristiknya. Konsep pengelompokan tumbuhan yang dijelaskan pada ayat tersebut hampir sama dengan konsep himpunan di dalam matematika.

Ilmu matematika sendiri memiliki beberapa fokus bidang pembelajaran.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

James dalam Hasratuddin (2013:132) menerangkan dalam kamus matematikanya bahwa matematika adalah ilmu tentang logika mengenai bentuk, susunan dan besaran yang terbagi ke dalam tiga bidang yaitu aljabar, analisis dan geometri. Semua bidang di dalam matematika terus mengalami perkembangan seiring berkembangnya ilmu pengetahuan, salah satunya di dalam bidang aljabar.

Struktur aljabar adalah suatu himpunan tak kosong dengan satu atau lebih operasi biner dan memenuhi beberapa aksioma (Kamil, 2016). Salah satu contoh struktur aljabar adalah grup dan ring. Seiring berkembangnya zaman, teori-teori tentang struktur aljabar juga berkembang. Terdapat beberapa ilmuan yang terus melakukan penelitian sehingga ditemukan struktur aljabar yang baru, salah satunya adalah aljabar BCI yang akan dibahas pada penelitian ini.

Arai, dkk (1966) melakukan sebuah penelitian yang memperkenalkan dan menjelaskan tentang karakteristik dari aljabar BCI dan aljabar BCK, serta membuktikan beberapa teorema yang berhubungan dengan keduanya. Kemudian Endah (2011) dalam Widiyatika (2016) mengatakan bahwa aljabar BCI merupakan pengembangan dari aljabar BCK, karena aljabar BCK termuat di dalam aljabar BCI. Pada tahun 2014 Kyeong Sun Yang dan Sun Shin Ahn memperkenalkan tentang *Union Soft Q-ideals in BCI-Algebra* dan memeriksa terkait sifatnya. Berdasarkan penelitian tersebut, Widiyatika (2016) menyusun skripsi yang berjudul Sifat-sifat Gabungan Ideal Halus dalam Aljabar BCI, untuk memperjelas sifat-sifat dan beberapa teorema tentang gabungan ideal halus yang dibatasi sampai gabungan ideal-q halus.

Pada tahun 2017 Sun Shin Ahn, dkk kembali melakukan penelitian yaitu memperkenalkan tentang *Union Soft P-ideals* dan *Union Soft Sub-implicative*

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Ideals di dalam aljabar BCI dan memeriksa terkait sifatnya. Pada penelitian ini diberikan beberapa persyaratan gabungan ideal halus untuk menjadi gabungan ideal-p halus dan gabungan ideal sub-implikatif halus dan membangun beberapa karakteristik dari keduanya. Pada penelitian tersebut, terdapat beberapa teorema yang pembuktiannya dirasa terlalu singkat. Sehingga penulis tertarik untuk memperjelas definisi dan teorema yang sudah ada yang dibatasi sampai gabungan ideal sub-implikatif halus. Berdasarkan uraian tersebut, peneliti mengambil judul "Sifat-sifat Gabungan Ideal Sub-implikatif Halus dalam Aljabar BCI".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana sifat-sifat gabungan ideal sub-implikatif halus dalam aljabar BCI?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang diuraikan di atas, maka tujuan penelitian ini adalah menjelaskan sifat-sifat gabungan ideal sub-implikatif halus dalam aljabar BCI.

1.4 Manfaat penelitian

Adapun manfaat yang dapat diperoleh dari penelitian ini adalah lebih memahami sifat-sifat gabungan ideal sub-implikatif halus dalam aljabar BCI.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

1.5 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode dengan studi literatur (studi kepustakaan). Jurnal utama yang digunakan adalah jurnal yang berjudul *Union Soft P-ideals and Union Soft Sub-implicative Ideals in BCI-algebras* dari Sun Shin Ahn, Jung Mi Ko dan Keum Sook So (2017). Adapun tahapan-tahapan yang dilakukan dalam penelitian ini adalah:

1. Mengkaji definisi gabungan ideal sub-implikatif halus dalam aljabar BCI.
2. Mendeskripsikan sifat-sifat gabungan ideal sub-implikatif halus dalam aljabar BCI.
3. Menjelaskan sifat-sifat gabungan ideal sub-implikatif halus dengan teorema, dalil, lemma, bukti dan contohnya.
4. Menyusun kesimpulan tentang sifat-sifat gabungan ideal sub-implikatif halus dalam aljabar BCI, berdasarkan teorema dan dalil yang telah dibuktikan.

1.6 Sistematika Penulisan

Untuk memahami intisari dari proposal skripsi ini, maka penulis membagi sistematika penulisan menjadi empat bab, dengan rincian sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Bab ini terdiri dari latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bab ini berisi tentang sumber-sumber kepustakaan yang merupakan kajian-kajian teori yang berhubungan dengan sifat-sifat gabungan ideal sub-implikatif halus pada aljabar BCI dan kajian keagamaan.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Bab III Pembahasan

Bab ini menjelaskan tentang sifat-sifat gabungan ideal sub-implikatif halus pada aljabar BCI, menggunakan beberapa definisi, teorema, dan dalil, serta menjelaskan kajian keagamaan.

Bab IV Penutup

Pada bab ini dibahas tentang kesimpulan dari pembahasan hasil penelitian pada bab sebelumnya dan disertai saran-saran yang berkaitan dengan penelitian ini.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

Pada bab ini diberikan definisi-definisi dan teorema-teorema yang berhubungan dengan pembahasan pada bab selanjutnya, diantaranya adalah definisi dan teorema dari himpunan, operasi biner, aljabar BCI, *p-semisimple* pada aljabar BCI, ideal pada aljabar BCI dan definisi-definisi lain yang berhubungan dengan pembahasan gabungan ideal sub-implikatif halus dalam aljabar BCI.

2.1 Himpunan

Himpunan merupakan salah satu istilah yang sering dijumpai dalam mempelajari aljabar abstrak, karena himpunan merupakan dasar untuk mempelajari berbagai pembahasan di dalam struktur aljabar. Terdapat bermacam-macam definisi himpunan dalam beberapa literatur, definisi himpunan yang dipakai pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

Definisi 1

Himpunan (*set*) didefinisikan sebagai kumpulan atau koleksi objek-objek yang terdefinisi dengan jelas (*well defined*). Makna "objek" dalam definisi tersebut sangat luas. Objek dapat berupa objek nyata dan dapat juga berupa objek abstrak. Objek dapat berbentuk orang, nama orang, hewan, benda, bilangan, planet, nama hari atau lainnya. Makna "terdefinisi dengan jelas" adalah ciri, sifat, atau syarat objek yang dimaksud sangat jelas dan dapat ditentukan (Abdussakir, 2009).

Berikut ini diberikan contoh penyajian himpunan dengan menuliskan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

semua elemen himpunan yang bersangkutan di antara dua buah kurung kurawal.

Contoh 1

H adalah himpunan bilangan asli yang kurang dari 10. H dapat dilambangkan

$H = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Dalam penulisan keanggotaan pada himpunan, suatu objek dapat menjadi anggota atau bukan anggota himpunan. Untuk menyatakan keanggotaan tersebut digunakan notasi $x \in A$ yang berarti x anggota himpunan A, dan $x \notin A$ yang berarti x bukan anggota himpunan A.

Suatu himpunan dapat merupakan bagian dari himpunan yang lain, artinya anggota yang terkandung di dalam himpunan tersebut juga terkandung di dalam himpunan lain.

Definisi 2

Misalkan A dan B adalah himpunan, maka A disebut subset atau himpunan bagian dari B jika dan hanya jika setiap anggota dari A adalah anggota B, dinotasikan dengan $A \subseteq B$ atau $B \supseteq A$ artinya A himpunan bagian dari B. (Gilbert dan Gilbert, 2009:2).

Dengan demikian, berdasarkan definisi 1 dan definisi 2 dapat dikatakan bahwa, simbol $\in$ digunakan untuk anggota himpunan dan simbol $\subseteq$ digunakan untuk keanggotaan himpunan di dalam himpunan. Sebagaimana contoh berikut:

Contoh 2

$A = \{2, 5, 8\}$

$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

Artinya $A \subseteq B$ karena elemen A juga elemen B.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Berdasarkan definisi himpunan bagian yang menyatakan bahwa himpunan dapat terkandung di dalam himpunan lain, terbentuk suatu himpunan yang disebut himpunan kuasa (*Power set*), yang definisinya adalah sebagai berikut:

Definisi 3

Untuk sebarang himpunan A, himpunan kuasa *(Power set)* dari A dinotasikan dengan $\mathcal{P}(A)$, adalah himpunan semua himpunan bagian A ditulis $\mathcal{P}(A) = \{X|X \subseteq A\}$ (Gilbert dan Gilbert, 2009:4).

Dari definisi tersebut, dapat dikatakan bahwa himpunan kuasa dari suatu himpunan memuat semua himpunan bagian dari himpunan yang dimaksud. Untuk lebih memahami, diberikan contoh sebagai berikut:

Contoh 3

$A = \{a, b, c\}$, himpunan kuasa dari A adalah

$\mathscr{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}$

Selanjutnya, pada pembahasan himpunan, terdapat dua operasi dasar yang mengenai dua himpunan atau lebih, sehingga dengan menggunakan operasi tersebut akan menghasilkan himpunan lain. Dua operasi tersebut didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 4

Jika A dan B adalah himpunan, gabungan A dan B adalah himpunan $A \cup B$, (dibaca "A gabungan B"). Dinotasikan dengan $A \cup B = \{x|x \in A \text{ atau } x \in B\}$ (Gilbert dan Gilbert, 2009:3).

Definisi 5

Jika A dan B adalah himpunan, irisan A dan B adalah himpunan $A \cap B$,

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

(dibaca "A irisan B"). Dinotasikan dengan $A \cap B = \{x | x \in A \text{ dan } x \in B\}$ (Gilbert dan Gilbert, 2009:3).

Gabungan dari dua himpunan, misalkan himpunan A dan B merupakan himpunan yang anggotanya adalah salah satu anggota A atau B. Sedangkan irisan dari dua himpunan A dan B merupakan himpunan yang anggotanya adalah anggota dari kedua himpunan A dan B.

Contoh 4

Misalkan $A = \{1, 2, 3, 7\}$ dan $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ dan $A \cap B = \{1, 2, 3\}$

2.2 Operasi Biner

Di dalam mempelajari matematika, khususnya pada bilangan real seringkali dijumpai istilah dari operasi penjumlahan, pengurangan dan perkalian. Operasi-operasi tersebut merupakan contoh operasi biner. Pada himpunan, operasi biner dikenakan pada setiap anggota himpunan. Berikut ini akan diberikan definisi dan contoh dari operasi biner, yaitu:

Definisi 6

Operasi biner pada himpunan tak kosong A adalah pemetaan f dari $A \times A$ ke A (Gilbert dan Gilbert, 2009:30).

Berdasarkan definisi tersebut di atas dapat disimpulkan bahwa operasi biner adalah operasi yang sifatnya tertutup.

Contoh 5

Diberikan operasi $*: Z \times Z \rightarrow Z$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$x * y = x - y + 2$ untuk $2, x, y \in Z$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Karena $2, x, y \in Z$ maka $x - y + 2 \in Z$ sehingga $x * y \in Z$. Jadi operasi $*$ tertutup di Z.

2.3 Aljabar BCI

Struktur aljabar merupakan himpunan tidak kosong dengan paling sedikit satu atau lebih operasi biner serta aksioma-aksioma yang berlaku (Kamil, 2016). Dengan demikian aljabar BCI adalah stuktur aljabar, karena aljabar BCI dibangun atas suatu himpunan tak kosong dengan satu operasi biner tertentu dan elemen identitas terhadap operasi biner tersebut. Berikut ini dijelaskan lebih rinci tentang definisi aljabar BCI.

Definisi 7

Misalkan X suatu himpunan tak kosong dengan operasi biner "$*$" dan konstanta "0". Maka struktur aljabar $(X, *, 0)$ dinamakan aljabar BCI jika memenuhi kondisi berikut:

(a1) $((x * y) * (x * z)) * (z * y) = 0$,

(a2) $(x * (x * y)) * y = 0$,

(a3) $x * x = 0$,

(a4) $x * y = 0$ dan $y * x = 0$ maka $x = y$,

$\forall\, x, y, z \in X$ (Saeid, 2010:550).

Contoh 6

Berikut ini penulis memberikan contoh bahwa $(A, *, 0)$ adalah aljabar BCI dengan $A = (0, 1, 2)$ dan operasi $*$ didefinisikan mengikuti Tabel 2.1:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Tabel 2.1 Definisi Operasi $*$ pada $A = \{0, 1, 2\}$

$*$	0	1	2
0	0	2	1
1	1	0	2
2	2	1	0

Jawab:

i. Akan ditunjukkan $\forall\, x, y, z \in A$ berlaku $\big((x * y) * (x * z)\big) * (z * y) = 0$

Untuk $x = 0$, maka diperoleh:

$\big((0 * 0) * (0 * 0)\big) * (0 * 0) = 0$

$\big((0 * 0) * (0 * 1)\big) * (1 * 0) = 0$

$\big((0 * 0) * (0 * 2)\big) * (2 * 0) = 0$

$\big((0 * 1) * (0 * 0)\big) * (0 * 1) = 0$

$\big((0 * 1) * (0 * 1)\big) * (1 * 1) = 0$

$\big((0 * 1) * (0 * 2)\big) * (2 * 1) = 0$

$\big((0 * 2) * (0 * 0)\big) * (0 * 2) = 0$

$\big((0 * 2) * (0 * 1)\big) * (1 * 2) = 0$

$\big((0 * 2) * (0 * 2)\big) * (2 * 2) = 0$

Untuk $x = 1$, maka diperoleh:

$\big((1 * 1) * (1 * 1)\big) * (1 * 1) = 0$

$\big((1 * 0) * (1 * 0)\big) * (0 * 0) = 0$

$\big((1 * 0) * (1 * 2)\big) * (2 * 0) = 0$

$\big((1 * 1) * (1 * 0)\big) * (0 * 1) = 0$

$\big((1 * 1) * (1 * 1)\big) * (1 * 1) = 0$

$\big((1 * 1) * (1 * 2)\big) * (2 * 1) = 0$

$\big((1 * 2) * (1 * 2)\big) * (2 * 1) = 0$

$\big((1 * 2) * (1 * 0)\big) * (0 * 2) = 0$

$\big((1 * 2) * (1 * 1)\big) * (1 * 2) = 0$

Untuk $x = b$, maka diperoleh:

$\big((2 * 0) * (2 * 0)\big) * (0 * 0) = 0$

$\big((2 * 0) * (2 * 1)\big) * (1 * 0) = 0$

$\big((2 * 0) * (2 * 2)\big) * (2 * 0) = 0$

$\big((2 * 1) * (2 * 0)\big) * (0 * 1) = 0$

$\big((1 * 2) * (1 * 2)\big) * (2 * 2) = 0$

$\big((2 * 1) * (2 * 2)\big) * (2 * 1) = 0$

$\big((2 * 2) * (2 * 0)\big) * (0 * 2) = 0$

$\big((2 * 2) * (2 * 1)\big) * (1 * 2) = 0$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$\big((2*1)*(2*1)\big)*(1*1)=0$ $\big((2*2)*(2*2)\big)*(2*2)=0$

$\big((2*2)*(2*2)\big)*(2*2)=0$

Jadi terbukti bahwa $\forall x,y,z \in A$, berlaku $\big((x*y)*(x*z)\big)*(z*y)=0$

ii. Akan ditunjukkan $\forall x,y \in A$ berlaku $\big(x*(x*y)\big)*y=0$

Untuk $x=0, y=0$ maka diperoleh $\big(0*(0*0)\big)*0=0$

Untuk $x=0, y=a$ maka diperoleh $\big(0*(0*a)\big)*a=0$

Untuk $x=0, y=2$ maka diperoleh $\big(0*(0*2)\big)*2=0$

Untuk $x=1, y=0$ maka diperoleh $\big(1*(1*0)\big)*0=0$

Untuk $x=1, y=1$ maka diperoleh $\big(1*(1*1)\big)*1=0$

Untuk $x=1, y=2$ maka diperoleh $\big(1*(1*2)\big)*2=0$

Untuk $x=2, y=0$ maka diperoleh $\big(2*(2*0)\big)*0=0$

Untuk $x=2, y=1$ maka diperoleh $\big(2*(2*1)\big)*1=0$

Untuk $x=2, y=2$ maka diperoleh $\big(2*(2*2)\big)*2=0$

Jadi terbukti bahwa $\forall x,y \in A$ berlaku $\big(x*(x*y)\big)*y=0$,

iii. Dari Tabel 2.1 jelas bahwa $\forall x \in A$ berlaku $x*x=0$,

iv. Dari Tabel 2.1 jelas bahwa $\forall\, x,y \in A$ $\; x*y=0$ dan $y*x=0$ maka $x=y$.

Dengan demikian $(A,\ *,\ 0)$ adalah aljabar BCI (Widiyatika, 2016).

Definisi 8

Dalam setiap aljabar BCI X didefinisikan $x \leq y$ jika dan hanya jika $x*y=0$ (Widiyatika, 2016:10).

Berdasarkan definisi tersebut, disajikan beberapa teorema yang berkaitan dengan definisi aljabar BCI. Teorema berikut ini menunjukkan sifat-sifat dari

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

aljabar BCI.

Teorema 1

Pada aljabar BCI X berlaku sifat-sifat di bawah ini:

(b1) $(\forall\, x \in X)(x * 0 = x)$,

(b2) $(\forall\, x, y, z \in X)\big((x * y) * z = (x * z) * y\big)$,

(b3) $(\forall\, x, y \in X)\big(0 * (x * y) = (0 * x) * (0 * y)\big)$,

(b4) $(\forall\, x, y \in X)\big(x * \big(x * (x * y)\big) = x * y\big)$,

(b5) $(\forall\, x, y, z \in X)(x \leq y \rightarrow x * z \leq y * z, z * y \leq z * x)$,

(b6) $(\forall\, x, y, z \in X)\big((x * z) * (y * z) \leq x * y\big)$,

(b7) $(\forall\, x, y, z \in X)\left(0 * \left(0 * \big((x * z) * (y * z)\big)\right) = (0 * y) * (0 * x)\right)$,

(b8) $(\forall\, x, y \in X)\left(0 * \big(0 * (x * y)\big) = (0 * y) * (0 * x)\right)$

(Yang dan Ahn, 2014:2861).

Bukti:

Dengan menggunakan definisi aljabar BCI, akan ditunjukkan bahwa teorema 1 benar.

Aksioma A

$\big((x * y) * (x * z)\big) * (z * y) = 0$ (Definisi aljabar BCI)

$\big((x * y) * (x * z)\big) = (z * y)$ (Definisi 8)

Aksioma B

$\big(x * (x * y)\big) * y = 0$ (Definisi aljabar BCI)

$\big(x * (x * y)\big) = y$ (Definisi 8)

(b1) Akan dibuktikan $x * 0 = 0$

Dari aksioma B : $\big(x * (x * y)\big) = y$ misalkan $y = 0$ maka

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$\big(x * (x * 0)\big) = 0$

$\big(x * (x * 0)\big) = \big((x * 0) * (x * 0)\big)$ (Definisi aljabar BCI)

$x = (x * 0)$ (Kanselasi kanan)

$(x * 0) = x$

Terbukti bahwa $(x * 0) = x$

(b2) Akan dibuktikan bahwa $\big((x * y) * z\big) = (x * z) * y$

Dari aksioma A: $\big((a * b) * (a * c)\big) = (c * b)$

Misalkan $a = x, b = z$ dan $c = (x * y)$

$((x * z) * \big(x * (x * y)\big) = \big((x * y) * z\big)$

$\Big((x * z) * \big((x * 0) * (x * y)\big)\Big) = \big((x * y) * z\big)$ (Sifat aljabar BCI b1)

$\big((x * z) * (y * 0)\big) = \big((x * y) * z\big)$ (Berdasarkan aksioma A)

$\big((x * z) * y\big) = \big((x * y) * z\big)$ (Sifat aljabar BCI b1)

Terbukti bahwa $\big((x * y) * z\big) = (x * z) * y$

(b3) Akan dibuktikan bahwa $(0 * (x * y) = (0 * x) * (0 * y)$

$0 * (x * y) = (x * x) * (x * y)$ (Definisi aljabar BCI)

$= (y * x)$ (Berdasarkan aksioma A)

$= (0 * x) * (0 * y)$ (Berdasarkan aksioma A)

Terbukti bahwa $(0 * (x * y) = (0 * x) * (0 * y)$

(b4) Akan dibuktikan bahwa $\Big(x * \big(x * (x * y)\big)\Big) = x * y$

$x * \big(x * (x * y)\big) = (x * 0) * \big(x * (x * y)\big)$ (Sifat aljabar BCI b1)

$= \big((x * y) * 0\big)$ (Berdasarkan aksioma A)

$= (x * y)$ (Sifat aljabar BCI b1)

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Terbukti bahwa $\left(x * \left(x * (x * y)\right)\right) = x * y$

(b5) Akan dibuktikan bahwa $(x \leq y \rightarrow x * z \leq y * z\,, z * y \leq z * x)$

$x \leq y$ maka $x * y = 0$

i. $x * y = 0$

Berdasarkan aksioma A

$(0 * y) * (0 * x) = 0$

$\left((0 * z) * (0 * x)\right) * \left((0 * z) * (0 * y)\right) = 0$

$(x * z) * (y * z) = 0$

Berdasarkan definisi 8

$(x * z) \leq (y * z)$

ii. $x * y = 0$

Berdasarlan aksioma A dan definisi 8

$(z * y) * (z * x) = 0$

$(z * y) \leq (z * x)$

Berdasarkan (i) dan (ii) terbukti $(x \leq y \rightarrow x * z \leq y * z\,, z * y \leq z * x)$

(b6) Akan dibuktikan bahwa $\left((x * z) * (y * z) \leq x * y\right)$

Menggunakan aksioma A

$$
\begin{aligned}
(x * z) * (y * z) &= \left((0 * z) * (0 * x)\right) * \left((0 * z) * (0 * y)\right) \\
&= (0 * y) * (0 * x) \\
&= x * y
\end{aligned}
$$

Terbukti bahwa $\left((x * z) * (y * z) \leq x * y\right)$

(b7) Akan dibuktikan bahwa $\left(0 * \left(0 * \left((x * z) * (y * z)\right)\right) = (0 * y) * (0 * x)\right)$

Menggunakan aksioma A dan definisi aljabar BCI

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$0 * \left(0 * \left((x * z) * (y * z)\right)\right) = 0 * \left(\left((x * z) * (x * z)\right) * \left((x * z) * (y * z)\right)\right)$$

(Definisi aljabar BCI)

$= 0 * \left((y * z) * (x * z)\right)$ (Aksioma A)

$= \left((y * z) * (y * z)\right) * \left((y * z) * (x * z)\right)$

(Definisi aljabar BCI)

$= (x * z) * (y * z)$ (Aksioma A)

$= \left((0 * z) * (0 * x)\right) * \left((0 * z) * (0 * y)\right)$

(Aksioma A)

$= (0 * y) * (0 * x)$ (Aksioma A)

Terbukti bahwa $0 * \left(0 * \left((x * z) * (y * z)\right)\right) = (0 * y) * (0 * x)$

(b8) Akan dibuktikan bahwa $\left(0 * \left(0 * (x * y)\right) = (0 * y) * (0 * x)\right)$

$0 * \left(0 * (x * y)\right) = 0 * \left((x * x) * (x * y)\right)$ (Definisi aljabar BCI)

$= 0 * (y * x)$ (Aksioma A)

$= (y * y) * (y * x)$ (Definisi aljabar BCI)

$= (x * y)$ (Aksioma A)

$= (0 * y) * (0 * x)$ (Aksioma A)

Terbukti bahwa $\left(0 * \left(0 * (x * y)\right) = (0 * y) * (0 * x)\right)$

Suatu aljabar BCI dapat memuat suatu aljabar BCI, yang disebut sub-aljabar dengan definisi sebagai berikut:

Definisi 9

Suatu himpunan bagian tak kosong S dari aljabar BCI X disebut sub-aljabar dari X jika $x * y \in S$ untuk setiap $x, y \in S$ (Yang dan Ahn, 2014:2861).

Berikut ini diberikan contoh dari sub-aljabar BCI yaitu:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Contoh 7

Diberikan aljabar BCI $(A, *, 0)$ dengan $A = \{0, 1, 2\}$ dan operasi $*$ didefinisikan mengikuti Tabel 2.1 pada contoh 6

Ambil $S \subseteq A$ dengan $S = \{1, 2\}$

Misalkan $x = 1$ dan $y = 2$

$x * y \in S$

$1 * 2 \in S$

$2 \in S$ (Widiyatika, 2016).

Selanjutnya diberikan beberapa definisi terkait dengan aljabar BCI.

2.4 *P-semisimple* pada Aljabar BCI

Definisi 10

Suatu aljabar BCI X disebut *p-semisimple* jika $0 * (0 * x) = x$ untuk setiap $x \in X$, aljabar BCI X adalah *p-semisimple* jika dan hanya jika $0 * (y * x) = x * y$ (Saeid, 2010:550).

Contoh 8

Misalkan X adalah aljabar BCI, dengan $X = \{0, a, b\}$ dan operasi $*$ pada X didefinisikan mengikuti Tabel 2.2:

Tabel 2.2 Definisi Operasi $*$ pada $X = \{0, a, b\}$

$*$	0	a	b
0	0	b	a
a	a	0	b
b	b	a	0

(Pusawidjayanti, 2011)

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Akan ditunjukkan bahwa X adalah *p-semisimple*, maka untuk setiap $x \in X$

$\big(0 * (0 * x)\big) = x$

Untuk $x = 0$, $\big(0 * (0 * 0)\big) = (0 * 0) = 0$

Untuk $x = a$, $\big(0 * (0 * a)\big) = (0 * b) = a$

Untuk $x = b$, $\big(0 * (0 * b)\big) = (0 * a) = b$

Karena $\big(0 * (0 * 0)\big) = 0$, $\big(0 * (0 * a)\big) = a$, dan $\big(0 * (0 * b)\big) = b$. Maka X adalah aljabar BCI yang *p-semisimple*.

2.5 Ideal pada Aljabar BCI

Ideal pada aljabar BCI adalah suatu himpunan bagian tak kosong dari aljabar BCI, dan memenuhi beberapa aksioma yang akan dijelaskan pada definisi berikut ini.

Definisi 11

Suatu himpunan bagian tidak kosong I dari aljabar BCI X disebut ideal dari X jika untuk setiap $x, y \in X$ memenuhi:

(i) $0 \in I$, (2.1)

(ii) $y \in I$ dan $x * y \in I$ maka $x \in I$ (2.2)

(Saeid, 2010:550).

Catatan bahwa setiap ideal A dari aljabar BCI X memenuhi:

$(\forall\, x \in X)(\forall\, y \in A)(x \leq y \rightarrow x \in A)$ (Yang dan Ahn, 2014:2861).

Untuk lebih memahami definisi ideal pada aljabar BCI. Berikut ini penulis memberikan contoh yang menunjukkan ideal pada $(X, *, 0)$.

Contoh 9

Diberikan $(X, *, 0)$ adalah aljabar BCI dengan $X = \{0, 1, a, b, c\}$ dan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$I = \{0, 1\}$ Apakah I ideal pada X , jika definisi $*$ mengikuti Tabel 2.3:

Tabel 2.3 Definisi Operasi $*$ pada $X = \{0, 1, a, b, c\}$

$*$	0	1	a	b	c
0	0	0	a	a	a
1	1	0	a	a	a
a	a	a	0	0	0
b	b	a	1	0	0
c	c	a	1	1	0

(Saeid, 2010:550)

Jawab:

(i) Karena 0 adalah anggota I maka terbukti bahwa $0 \in I$

(ii) Untuk $x, y \in X$ berlaku $y \in I$ dan $x * y \in I$ maka $x \in I$

Ambil $y = 0$

$0 * 0 = 0 \in \mathrm{I}$ maka $0 \in \mathrm{I}$

$1 * 0 = 1 \in \mathrm{I}$ maka $1 \in \mathrm{I}$

Ambil $y = 1$

$0 * 1 = 0 \in \mathrm{I}$ maka $0 \in \mathrm{I}$

$1 * 1 = 0 \in \mathrm{I}$ maka $1 \in \mathrm{I}$

Karena telah memenuhi (i) dan (ii) maka terbukti bahwa $I = \{0, 1\}$ adalah ideal.

2.6 Ideal Sub-implikatif pada Aljabar BCI

Ideal sub-implikatif adalah himpunan bagian tak kosong dari aljabar BCI yang didefinisikan sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Definisi 12

Misalkan X adalah aljabar BCI, himpunan bagian tidak kosong A dari X disebut ideal sub-implikatif dari X jika memenuhi:

a. $0 \in A$ (2.3)

b. $x, y, z \in X \left((x^2 * y) * (y * x)\right) * z \in A$ dan $z \in A$ maka $y^2 * x \in A$ (2.4)

(Ahn, dkk, 2017:3).

Untuk lebih memahami definisi dari ideal sub-implikatif pada aljabar BCI, berikut ini dijelakan contoh yang menunjukkan bahwa suatu aljabar BCI X adalah ideal sub-implikatif.

Contoh 10

Misalkan $X = \{0, 1, 2\}$ adalah aljabar BCI dengan operasi $*$ didefinisikan mengikuti Tabel 2.4:

Tabel 2.4 Definisi Operasi $*$ pada $X = \{0, 1, 2\}$

$*$	0	1	2
0	0	0	2
1	1	0	2
2	2	2	0

(Liu dan Meng, 2000:443)

Akan ditunjukkan bahwa $I = \{0, 1\}$ adalah ideal sub-implikatif dari X yaitu:

a. $0 \in I$

b. Berdasarkan persamaan (2.4) akan ditunjukkan

$(\forall x, y, z \in X)((x^2 * y) * (y * x) * z \in I$ dan $z \in I$ maka $y^2 * x \in I)$

Untuk $x = 0, y = 0, z = 0$

$\left((0^2 * 0) * (0 * 0)\right) * 0 = \left(\left(0 * (0 * 0)\right) * (0 * 0)\right) * 0$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \big((0 * 0) * 0\big) * 0$$

$$= (0 * 0) * 0$$

$$= 0 * 0$$

$$= 0$$

$$0^2 * 0 = 0 * (0 * 0)$$

$$= 0 * 0$$

$$= 0$$

Diperoleh bahwa untuk

$\big((0^2 * 0) * (0 * 0)\big) * 0 = 0 \in I$ dan $z = 0 \in I$ maka $0^2 * 0 = 0 \in I$

Untuk $x = 0, y = 1, z = 0$

$$\big((0^2 * 1) * (1 * 0)\big) * 0 = \Big(\big(0 * (0 * 1)\big) * (1 * 0)\Big) * 0$$

$$= \big((0 * 0) * 1\big) * 0$$

$$= (0 * 1) * 0$$

$$= 0 * 0$$

$$= 0$$

$$1^2 * 0 = 1 * (1 * 0)$$

$$= 1 * 1$$

$$= 0$$

Diperoleh bahwa untuk

$\big((0^2 * 1) * (1 * 0)\big) * 0 = 0 \in I$ dan $z = 0 \in I$ maka $1^2 * 0 = 0 \in I$

Untuk $x = 0, y = 2, z = 0$

$$\big((0^2 * 2) * (2 * 0)\big) * 0 = \Big(\big(0 * (0 * 2)\big) * (2 * 0)\Big) * 0$$

$$= \big((0 * 2) * 2\big) * 0$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= (2 * 2) * 0$$

$$= 0 * 0$$

$$= 0$$

$$2^2 * 0 = 2 * (2 * 0)$$

$$= 2 * 2$$

$$= 0$$

Diperoleh bahwa

$\left((0^2 * 2) * (2 * 0)\right) * 0 = 0 \in I$ dan $z = 0 \in I$ maka $2^2 * 0 = 0 \in I$

Untuk $x = 0, y = 0, z = 1$

$$\left((0^2 * 0) * (0 * 0)\right) * 1 = \left(\left(0 * (0 * 0)\right) * (0 * 0)\right) * 1$$

$$= \left((0 * 0) * 0\right) * 1$$

$$= (0 * 0) * 1$$

$$= 0 * 1$$

$$= 0$$

$$0^2 * 0 = 0 * (0 * 0)$$

$$= 0 * 0$$

$$= 0$$

Diperoleh bahwa

$\left((0^2 * 0) * (0 * 0)\right) * 1 = 0 \in I$ dan $z = 1 \in I$ maka $0^2 * 0 = 0 \in I$

Untuk $x = 0, y = 1, z = 1$

$$\left((0^2 * 1) * (1 * 0)\right) * 1 = \left(\left(0 * (0 * 1)\right) * (1 * 0)\right) * 1$$

$$= \left((0 * 0) * 1\right) * 1$$

$$= (0 * 1) * 1$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= 0 * 1$$

$$= 0$$

$$1^2 * 0 = 1 * (1 * 0)$$

$$= 1 * 1$$

$$= 0$$

Diperoleh bahwa

$\big((0^2 * 1) * (1 * 0)\big) * 1 = 0 \in I$ dan $z = 1 \in I$ maka $1^2 * 0 \in I$

Untuk $x = 0, y = 2, z = 1$

$$\big((0^2 * 2) * (2 * 0)\big) * 1 = \Big(\big(0 * (0 * 2)\big) * (2 * 0)\Big) * 1$$

$$= \big((0 * 2) * 2\big) * 1$$

$$= (2 * 2) * 0$$

$$= 0 * 0$$

$$= 0$$

$$2^2 * 0 = 2 * (2 * 0)$$

$$= 2 * 2$$

$$= 0$$

Diperoleh bahwa

$\big((0^2 * 2) * (2 * 0)\big) * 1 = 0 \in I$ dan $z = 1 \in I$ maka $2^2 * 0 = 0 \in I$

Untuk $x = 1, y = 0, z = 0$

$$\big((1^2 * 0) * (0 * 1)\big) * 0 = \Big(\big(1 * (1 * 0)\big) * (0 * 1)\Big) * 0$$

$$= \big((1 * 1) * 0\big) * 0$$

$$= (0 * 0) * 0$$

$$= 0 * 0$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$= 0$

$0^2 * 1 \ = 0 * (0 * 1)$

$= 0 * 0$

$= 0$

Diperoleh bahwa

$\left((1^2 * 0) * (0 * 1)\right) * 0 = 0 \in I$ dan $z = 0 \in I$ maka $0^2 * 1 = 0$

Untuk $x = 1, y = 0, z = 1$

$\left((1^2 * 0) * (0 * 1)\right) * 1 \ = \left(\left(1 * (1 * 0)\right) * (0 * 1)\right) * 1$

$= \left((1 * 1) * 0\right) * 1$

$= (0 * 0) * 1$

$= 0 * 1$

$= 0$

$0^2 * 1 \ = 0 * (0 * 1)$

$= 0 * 0$

$= 0$

Diperoleh bahwa

$\left((1^2 * 0) * (0 * 1)\right) * 1 = 0 \in I$ dan $z = 1 \in I$ maka $0^2 * 1 \in I$

Untuk $x = 1, y = 1, z = 0$

$\left((1^2 * 1) * (1 * 1)\right) * 0 \ = \left(\left(1 * (1 * 1)\right) * (1 * 1)\right) * 0$

$= \left((1 * 0) * 0\right) * 0$

$= (1 * 0) * 0$

$= 1 * 0$

$= 1$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$1^2 * 1 = 1 * (1 * 1)$$
$$= 1 * 0$$
$$= 1$$

Diperoleh bahwa

$\big((1^2 * 1) * (1 * 1)\big) * 0 = 1 \in I$ dan $z = 0 \in I$ maka $1^2 * 1 = 1 \in I$

Untuk $x = 1, y = 1, z = 1$

$$\big((1^2 * 1) * (1 * 1)\big) * 1 = \Big(\big(1 * (1 * 1)\big) * (1 * 1)\Big) * 1$$
$$= \big((1 * 0) * 0\big) * 1$$
$$= (1 * 0) * 1$$
$$= 1 * 1$$
$$= 0$$

$$1^2 * 1 = 1 * (1 * 1)$$
$$= 1 * 0$$
$$= 1$$

Diperoleh bahwa

$\big((1^2 * 1) * (1 * 1)\big) * 1 = 0 \in I$ dan $z = 1 \in I$ maka $1^2 * 1 \in I$

Karena $0 \in I$ dan $(\forall x, y, z \in X)((x^2 * y) * (y * x) * z \in I$ dan $z \in I$ maka $y^2 * x \in I)$. Dengan demikian $I = \{0, 1\}$ adalah ideal sub-implikatif

Teorema 2

Setiap ideal sub-implikatif adalah ideal, tetapi sebaliknya belum tentu benar (Liu dan Meng, 2000:444).

Bukti:

Misalkan I adalah ideal sub-implikatif, ambil $y = x$ substitusikan ke dalam

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

persamaan (2.4) pada definisi 12, maka akan ditunjukkan:

$\big((x^2 * x) * (x * x)\big) * z \in I$ dan $z \in I$ maka $x^2 * x \in I$

$$\big((x^2 * x) * (x * x)\big) * z = \Big(\big(x * (x * x)\big) * (x * x)\Big) * z \in I$$

$$= \big((x * 0) * 0\big) * z \in I \quad \text{(Definisi aljabar BCI)}$$

$$= (x * 0) * z \in I \quad \text{(Sifat aljabar BCI b1)}$$

$$= x * z \in I \quad \text{(Sifat aljabar BCI b1)}$$

dan $z \in I$ maka $x^2 * x \in I$

$$x^2 * x = x * (x * x) \in I \quad \text{(Definisi aljabar BCI)}$$

$$= x * 0 \in I \quad \text{(Sifat aljabar BCI b1)}$$

$$= x \in I$$

diperoleh $(x * z \in I)$ dan $z \in I$ maka $x \in I$ sehingga I adalah ideal.

Berikut ini penulis memberikan contoh yang menunjukkan bahwa ideal pada aljabar BCI belum tentu ideal sub-implikatif.

Contoh 11

Misalkan $(X, *, 0)$ adalah aljabar BCI dengan $X = \{0, 1, 2, 3\}$ dan operai $*$ didefinisikan mengikuti Tabel 2.5:

Tabel 2.5 Definisi Operasi $*$ pada $X = \{0, 1, 2, 3\}$

$*$	0	1	2	3
0	0	0	0	3
1	1	0	0	3
2	2	2	0	3
3	3	3	3	0

(Liu dan Meng, 2000:444)

Akan ditunjukkan bahwa $I = \{0\}$ adalah ideal dari X

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

i. $0 \in I$

ii. Untuk $0, 0 \in X$

$0 * 0 \in I$ dan $0 \in I$ maka $0 \in I$

Berdasarkan i dan ii terbukti bahwa $I = \{0\}$ adalah ideal dari X. Tetapi $I = \{0\}$ bukan ideal sub-implikatif karena untuk $2, 1, 0 \in X$

$$\begin{aligned}\big((2^2 * 1) * (1 * 2)\big) * 0 &= \big(2 * (2 * 1) * (1 * 2)\big) * 0 \\ &= \big((2 * 2) * 0\big) * 0 \\ &= (0 * 0) * 0 \\ &= 0 * 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1^2 * 2 &= 1 * (1 * 2) \\ &= 1 * 0 \\ &= 1 \notin I\end{aligned}$$

Diperoleh $\big((2^2 * 1) * (1 * 2)\big) * 0 = 0 \in I$, $z = 0 \in I$ dan $1^2 * 2 = 1 \notin I$

Hal tersebut tidak sesuai dengan persamaan (2.4), jadi $I = \{0\}$ bukan ideal sub-implikatif.

Teorema 3

Suatu ideal I dari aljabar BCI X adalah ideal sub-implikatif jika dan hanya jika $(x^2 * y) * (y * x) \in I$ maka $y^2 * x \in I$ untuk setiap $x, y \in X$ (Liu dan Meng, 2000:444).

Bukti:

Misalkan I adalah ideal sub-implikatif

$(\forall\, x, y \in X)\ \big((x^2 * y) * (y * x)\big) \in I$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\left((x*(x*y))*(y*x)\right) \in I \qquad \text{(Definisi } x^n * y\text{)}$$

$$\left(\left((x*(x*y))*(y*x)\right)*0\right) \in I \qquad \text{(Definisi aljabar BCI b1)}$$

Dengan menggunakan definisi ideal sub-implikatif maka

$(y*(y*x)) \in I$

$(y^2 * x) \in I$

Sebaliknya, andaikan I adalah ideal yang memenuhi,

$(\forall\, x, y, z \in X)\left(\left((x^2 * y)*(y*x)\right)*z\right) \in I$ dan $z \in I$ dengan menggunakan definisi ideal kita peroleh $\left((x^2 * y)*(y*x)\right) \in I$. Maka $(y^2 * x) \in I$. Dengan demikian terbukti bahwa I adalah ideal sub-implikatif. (Liu dan Meng, 2000:444).

2.7 Himpunan Halus (*Soft set*) pada Aljabar BCI

Diberikan U adalah himpunan semesta awal dan E adalah himpunan parameter-parameter. Pasangan-pasangan dari (U, E) disebut semesta halus, sedangkan $P(U)$ adalah himpunan kuasa dari U dan $A, B, C, \ldots \subseteq E$ (Widiyatika, 2016:16).

Definisi 13

Soft set F_A pada himpunan kuasa U didefinisikan sebagai berikut:

$$F_A \coloneqq \{(x, f_A(x)) | x \in E, f_A(x) \in P(U)\},$$

Dengan $f_A: E \to P(U); f_A(x) = \emptyset$ jika $x \notin A$. Fungsi f_A dinamakan fungsi aproksimasi dari himpunan halus F_A, dan $S(U)$ adalah himpunan dari semua himpunan halus atas U (Widiyatika, 2016:16).

Contoh dari himpunan halus pada aljabar BCI, disajikan sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

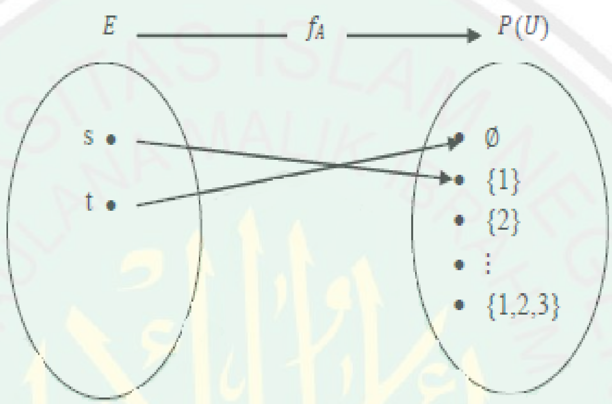
Contoh 12

Diberikan $U = \{1, 2, 3\}$ dan $E = \{s, t\}$

Maka $P(U) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

$P(E) = \{\emptyset, \{s\}, \{t\}, \{s, t\}\}$

Ambil sebarang $A = \{s\} \subseteq E$, Misalkan $f_A: E \to P(U)$



$f_A(s) = \{1\}$ dan $f_A(t) = \emptyset$

Sesuai definisi $F_A = \{(x, f_A(x)) | x \in E, f_A(x) \in P(U)\}$, maka diperoleh

$F_A = \{(s, \{1\}), (t, \emptyset)\}$.

$S(U) = \{(s, \{1\})\}$ (Widiyatika, 2016:16).

Sama seperti pada himpunan bilangan bulat. Di dalam pembahasan himpunan halus juga didefinisikan himpunan bagian dari himpunan halus atau disebut *soft subset*, yang definisinya adalah sebagai berikut:

Definisi 14

Misalkan himpunan halus F_A dan G_B mempunyai *universe* yang sama yaitu U, F_A disebut *soft subset* pada G_B dinotasikan $F_A \subseteq G_B$, didefinisikan sebagai berikut:

(i) $A \subset B$,

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

(ii) Untuk setiap $\epsilon \in A, F(\epsilon)$ dan $G(\epsilon)$ adalah sama (Widiyatika, 2016:17).

Untuk memahami definisi *soft subset* diberikan contoh sebagai berikut:

Contoh 13

Dengan menggunakan fungsi pada contoh 12,

Diberikan $U = \{1, 2, 3\}$ dan $E = \{s, t\}$

Maka $P(U) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

$P(E) = \{\emptyset, \{s\}, \{t\}, \{s, t\}\}$

Misalkan $A = \{s\} \subseteq E$ dan $B = \{s, t\} \subset E$

Didefinikan $F_A = \{(s, \{1\})\}$ dan $G_B = \{(s, \{1\}), (t, \{1, 2, 3\})\}$

Ambil $\epsilon \in A$, $\epsilon = \{s\}$ maka $F(\epsilon) = G(\epsilon) = \{1\}$

Jadi $F_A \subseteq G_B$ (Widiyatika, 2016:17).

Definisi 15

Diberikan $F_A \in S(U)$ dan $\tau \subseteq U$. Maka himpunan τ-*exclusive* dari F_A didefinisikan sebagai berikut:

$e(F_A; \tau) \coloneqq \{x \in A | f_A(x) \subseteq \tau\}$ (Widiyatika, 2016:18).

Berikut ini diberikan contoh himpunan τ-*exclusive* pada himpunan halus F_A:

Contoh 14

Dengan menggunakan contoh 12,

diberikan $U = \{1, 2, 3\}$ dan $E = \{s, t\}$,

Ambil $\tau = \{1, 3\}$, $A = \{s\}$

Maka $e(F_A; \tau) = \{s\}$ (Widiyatika, 2016:18)

Kemudian dari definisi 13 diperoleh sifat-sifat sebagai berikut:

1. $e(F_A; U) = A$,
2. $f_A(x) = \cap \{\tau \subseteq U | x \in e(F_A; \tau)\}$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

3. $(\forall \tau_1, \tau_2 \subseteq U)\big(\tau_1 \subseteq \tau_2 \rightarrow e(F_A;\tau_1) \subseteq e(F_A;\tau_2)\big)$

(Ahn, dkk, 2017:155).

Selanjutnya akan ditunjukkan pembuktian dari sifat-sifat sebelumnya, sebagai berikut:

Sifat 1

$e(F_A;U) = A$

Bukti:

Untuk membuktikan $e(F_A;U) = A$ akan dibuktikan terlebih dahulu $e(f_A;U) \subseteq A$ dan $A \subseteq e(f_A;U)$.

Ambil $x \in e(F_A;\tau)$, sesuai dengan definisi $e(F_A;\tau)$ maka $x \in A$.

Karena $x \in e(F_A;\tau)$ dan $x \in A$ maka terbukti bahwa $e(f_A;U) \subseteq A$.

Ambil $x \in A$

Karena $x \in A$ maka $f_A(x) \neq \emptyset$.

Berdasarkan definisi $e(F_A;\tau) \coloneqq \{x \in A | f_A(x) \subseteq \tau\}$ maka diperoleh $e(F_A;U) \coloneqq \{x \in A | f_A(x) \subseteq U\}$ sehingga $f_A(x) \subseteq U$ dan $x \in e(F_A;U)$.

Terbukti bahwa $A \subseteq e(f_A;U)$.

Karena $e(F_A;U) \subseteq A$ dan $A \subseteq e(F_A;U)$ maka terbukti bahwa $e(F_A;U) = A$ (Widiyatika, 2016:18).

Sifat 2

$f_A(x) = \cap \{\tau \subseteq U | x \in e(F_A;\tau)\}$

Bukti:

Seperti halnya pada pembuktian sifat 1, untuk membuktikan sifat 2 akan ditunjukkan bahwa $f_A(x) \subseteq \cap \{\tau \subseteq U | x \in e(F_A;\tau)\}$ dan

$\cap \{\tau \subseteq U | x \in e(F_A;\tau)\} \subseteq f_A(x)$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Ambil $x \in f_A(x)$

Berdasarkan definisi τ-*exclusive* $f_A(x) \subseteq \tau$ sehingga $x \in e(F_A; \tau)$ dan $\tau \subseteq U$.

Maka diperoleh $x \in \cap \{\tau \subseteq U | x \in e(F_A; \tau)\}$.

Terbukti bahwa $f_A(x) \subseteq \cap \{\tau \subseteq U | x \in e(F_A; \tau)\}$

Ambil $x \cap \{\tau \subseteq U | x \in e(F_A; \tau)\}$

Berdasarkan definisi $x \in e(F_A; \tau)$, artinya $x \in A$, dan $x \in f_A(x)$, maka

$x \cap \{\tau \subseteq U | x \in e(F_A; \tau)\} \subseteq f_A(x)$

Karena $f_A(x) \subseteq \cap \{\tau \subseteq U | x \in e(F_A; \tau)\}$ dan $\cap \{\tau \subseteq U | x \in e(F_A; \tau)\} \subseteq \boldsymbol{f_A(x)}$

maka terbukti $f_A(x) = \cap \{\tau \subseteq U | x \in e(F_A; \tau)\}$ (Widiyatika, 2016:20).

Sifat 3

$(\forall \tau_1, \tau_2 \subseteq U)\big(\tau_1 \subseteq \tau_2 \rightarrow e(F_A; \tau_1) \subseteq e(F_A; \tau_2)\big)$

Bukti:

Akan dibuktikan $e(F_A; \tau_1) \subseteq e(F_A; \tau_2)$

Ambil $x \in e(F_A; \tau_1)$, maka $x \in A$ dan $f_A(x) \in \tau_1$

Karena $\tau_1 \subseteq \tau_2$

$x \in A$ dan $f_A(x) \subseteq \tau_1 \subseteq \tau_2$, sehingga $f_A(x) \subseteq \tau_2$

Jadi $x \in e(F_A; \tau_2)$ sehingga $e(F_A; \tau_1) \subseteq e(F_A; \tau_2)$

Maka terbukti $(\forall \tau_1, \tau_2 \subseteq U)(\tau_1 \subseteq \tau_2 \rightarrow e(F_A; \tau_1) \subseteq e(F_A; \tau_2)$

(Widiyatika, 2016:21).

2.8 Gabungan Ideal Halus pada Aljabar BCI

Pada himpunan bilangan bulat terdapat dua operasi dasar yang mengenai himpunan tersebut, yaitu gabungan dan irisan. Demikian pula pada himpunan aljabar BCI. Terdapat operasi yang mengenainya, salah satunya adalah operasi

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

gabungan yang didefinisikan sebagai berikut ini:

Definisi 16

Misalkan $(U,E)=(U,X)$ dengan X adalah aljabar BCI. Diberikan sub-aljabar A dari E, dengan $F_A \in S(U)$. Maka F_A dinamakan *union soft algebra* (disingkat, *U-soft algebra*) atas U jika fungsi aproksimasi f_A dari F_A memenuhi:

$$(\forall x,y \in A)(f_A(x*y) \subseteq f_A(x) \cup f_A(y)) \tag{2.5}$$

F_A disebut gabungan ideal halus atau *union soft ideal* (disingkat *U-soft ideal*) jika fungsi aproksimasi f_A dari F_A memenuhi:

$$(\forall x \in A)\big(f_A(0) \subseteq f_A(x)\big) \tag{2.6}$$

$$(\forall x,y \in A)\big(f_A(x) \subseteq f_A(x*y) \cup f_A(y)\big) \tag{2.7}$$

(Widiyatika, 2016:22).

Berikut ini penulis memberikan contoh yang menunjukkan bahwa aljabar BCI $(X,\ *,\ 0)$ adalah *U-soft ideal*.

Contoh 15

Diberikan $(U,E)=(U,X)$ dengan aljabar BCI $X=\{0,a,b\}$ dan operasi $*$ didefinisikan mengikuti Tabel 2.6:

Tabel 2.6 Definisi Operasi $*$ pada $X=\{0,a,b\}$

$*$	0	a	b
0	0	0	b
a	a	0	b
b	b	b	0

(Widiyatika, 2016)

Misalkan τ_1, τ_2, τ_3 adalah subset dari U sehingga $\tau_1 \subseteq \tau_2 \subseteq \tau_3$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Didefinisikan himpunan halus F_E atas U sebagai berikut:

$F_E = \{(0, \tau_1), (a, \tau_2), (b, \tau_3)\}$

$X = \{0, a, b\} = E$

Berdasarkan persamaan $(\forall\, x, y \in A)\big(f_A(x) \subseteq (x * y) \cup f_A(y)\big)$, diperoleh:

Untuk $x = 0, y = a$

$f_E(0) = \tau_1$

$f_E(0 * a) \cup f_E(a) = f_E(0) \cup f_E(a)$

$= \tau_1 \cup \tau_2$

$= \tau_2$

Karena $f_E(0) = \tau_1$, $f_E(0 * a) \cup f_E(a) = \tau_2$ dan $\tau_1 \subseteq \tau_2$ maka

$f_A(x) \subseteq (x * y) \cup f_A(y)$.

Untuk $x = 0, y = b$

$f_E(0) = \tau_1$

$f_E(0 * b) \cup f_E(b) = f_E(0) \cup f_E(b)$

$= \tau_1 \cup \tau_3$

$= \tau_3$

Karena $f_E(0) = \tau_1$, $f_E(0 * b) \cup f_E(b) = \tau_3$ dan $\tau_1 \subseteq \tau_3$ maka

$f_A(x) \subseteq (x * y) \cup f_A(y)$.

Untuk $x = a, y = b$

$f_E(a) = \tau_1$

$f_E(a * b) \cup f_E(b) = f_E(b) \cup f_E(b)$

$= \tau_3 \cup \tau_3$

$= \tau_3$

Karena $f_E(0) = \tau_1$, $f_E(a * b) \cup f_E(b) = \tau_3$ dan $\tau_1 \subseteq \tau_3$ maka

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$f_A(x) \subseteq (x * y) \cup f_A(y)$.

Dengan demikian F_E adalah *U-soft ideal* pada U (Widiyatika, 2016).

2.9 Gabungan Ideal-q halus pada Aljabar BCI

Definisi 17

Misal $(U, E) = (U, X)$ dengan X adalah aljabar BCI. Diberikan sub-aljabar A dari E, dengan $F_A \in (U)$ maka F_A dinamakan gabungan ideal-q atau *union soft* q*-ideal* (disingkat, *U-soft* q*-ideal*) atas U jika fungsi aproksimasi f_A dari F_A memenuhi:

i. $(\forall x \in A)\big(f_A(0) \subseteq f_A(x)\big)$ (2.8)

ii. $(\forall x, y, z \in A)\Big(f_A(x * z) \subseteq f_A\big(x * (y * z)\big) \cup f_A(y)\Big)$ (2.9)

(Widiyatika, 2016:23).

Berikut ini penulis akan memberikan contoh yang menunjukkan bahwa aljabar BCI $(X, *, 0)$ adalah *U-soft* q*-ideal*.

Contoh 16

Misal $(U, E) = (U, X)$ dengan $X = \{0, a, b, c\}$ adalah aljabar BCI dengan operasi $*$ mengikuti Tabel 2.7:

Tabel 2.7 Definisi Operasi $*$ pada $X = \{0, a, b, c\}$

$*$	0	a	b	c
0	0	c	b	a
a	a	0	c	b
b	b	a	0	c
c	c	b	a	0

(Widiyatika, 2016)

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Misal τ_1, τ_2, τ_3 dan τ_4 adalah subset dari U sehingga $\tau_1 \subseteq \tau_2 \subseteq \tau_3 \subseteq \tau_4$. Didefinisikan himpunan F_E atas U sebagai berikut:

$F_E = \{(0, \tau_1), (a, \tau_2), (b, \tau_3), (c, \tau_4)\}$

$X = \{0, a, b, c\} = E$

Berdasarkan persamaan (2.9) didapat:

Ambil $0, a, b \in E$

$f_E(0 * b) \subseteq f_E(0 * (a * b)) \cup f_E(b)$

$f_E(b) \subseteq f_E(0 * c) \cup f_E(b)$

$\tau_3 \subseteq f_E(a) \cup \tau_3$

$\tau_3 \subseteq \tau_2 \cup \tau_3$

$\tau_3 \subseteq \tau_3$

Ambil $0, b, c \in E$

$f_E(0 * c) \subseteq f_E(0 * (b * c)) \cup f_E(b)$

$f_E(a) \subseteq f_E(0 * c) \cup f_E(b)$

$\tau_2 \subseteq f_E(a) \cup \tau_3$

$\tau_2 \subseteq \tau_2 \cup \tau_3$

$\tau_2 \subseteq \tau_3$.

Ambil $a, b, c \in E$

$f_E(a * c) \subseteq f_E(a * (b * c)) \cup f_E(b)$

$f_E(b) \subseteq f_E(a * c) \cup f_E(b)$

$\tau_3 \subseteq f_E(b) \cup \tau_3$

$\tau_3 \subseteq \tau_3 \cup \tau_3$

$\tau_3 \subseteq \tau_3$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Karena persamaan (2.8) dan (2.9) terpenuhi maka F_E adalah *U-soft q-ideal* pada U (Widiyatika, 2016:23).

Selanjutnya akan dijelaskan beberapa lemma dan teorema tentang gabungan ideal-q halus pada aljabar BCI.

Lemma 1

Misal $(U,E) = (U,X)$ dengan X adalah aljabar BCI. Diberikan sub-aljabar A dari E, jika $F_A \in S(U)$ maka F_A adalah *U-soft ideal* atas U jika memenuhi kondisi berikut:

$$(\forall\, x,y \in A)\big(x \leq y \rightarrow f_A(x) \subseteq f_A(y)\big) \tag{2.10}$$

(Widiyatika, 2016:28).

Bukti:

Misal $z = 0$ pada persamaan (2.9) yaitu $f_A(x * z) \subseteq f_A\big(x * (y * z)\big) \cup f_A(y)$

maka $f_A(x * 0) \subseteq f_A\big(x * (y * 0)\big) \cup f_A(y)$ (Definisi aljabar BCI b1)

$$f_A(x) \subseteq f_A(x * y) \cup f_A(y)$$

Karena $x \leq y$ maka $x * y = 0$

$f_A(x) \subseteq f_A(x * y) \cup f_A(y)$

$\subseteq f_A(0) \cup f_A(y)$

$\subseteq f_A(y)$

Maka terbukti $(\forall\, x,y \in A)\big(x \leq y \rightarrow f_A(x) \subseteq f_A(y)\big)$ (Widiyatika, 2016:28).

2.10 Gabungan Ideal-*p* Halus pada Aljabar BCI

Definisi 18

Misalkan $(U,E) = (U,X)$ dengan X adalah aljabar BCI. Diberikan sub-aljabar A dari E, misalkan $F_A \in S(U)$. Maka F_A disebut gabungan ideal-p

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

halus atau *union soft p-ideal* atas U (ditulis *U-soft p-ideal*) jika fungsi aproksimasi f_A dari F_A memenuhi:

i. $(\forall\, x \in A)\big(f_A(0)\backslash\subseteq f_A(x)\big)$ (2.11)

ii. $(\forall\, x\,, y\,, z \in A)\Big(f_A\big((x * z) * (y * z)\big) \cup f_A(y)\Big)$ (2.12)

(Ahn, dkk, 2017:155).

Berikut ini adalah contoh gabungan ideal-p halus dalam aljabar BCI:

Contoh 17

Misalkan $(U, E) = (U, X)$ dengan $X = \{0, a, b\}$ adalah aljabar BCI dan operasi $*$ didefinisikan mengikuti Tabel 2.8:

Tabel 2.8 Definisi Operasi $*$ pada $X = \{0, a, b\}$

$*$	0	a	b
0	0	0	b
a	a	0	b
b	b	b	0

(Widiyatika, 2016)

Misalkan τ_1 dan τ_2 sabset dari U dengan $\tau_1 \subseteq \tau_2$ didefinisikan himpunan halus atas U adalah $F_E = \{(0, \tau_1), (a, \tau_1), (b, \tau_2)\}$.

Akan ditunjukkan bahwa $(\forall\, x \in E)(f_E(0) \subseteq f_E(x)$

Diketahui bahwa $f_E(0) = \tau_1$

Untuk $x = 0$

$f_E(x) = f_E(0) = \tau_1$, karena $\tau_1 \subseteq \tau_1$ maka $f_E(0) \subseteq f_E(0)$

Untuk $x = a$

$f_E(x) = f_E(a) = \tau_1$, karena $f_E(0) = \tau_1$ dan $\tau_1 \subseteq \tau_1$ maka $f_E(0) \subseteq f_E(a)$

Untuk $x = a$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$f_E(x) = f_E(b) = \tau_2$, karena $f_E(0) = \tau_1$ dan $\tau_1 \subseteq \tau_2$ maka $f_E(0) \subseteq f_E(b)$

Kemudian akan ditunjukkan bahwa

$(\forall\, x, y, z \in A)(f_A(x) \subseteq f_A\big((x * z) * (y * z)\big) \cup f_A(y)$

Untuk $x = 0, y = 0, z = 0$

$f_E(0) = \tau_1$

$$\begin{aligned} f_E\big((0 * 0) * (0 * 0)\big) \cup f_E(0) &= f_E(0 * 0) \cup f_E(0) \\ &= f_E(0) \cup f_E(0) \\ &= \tau_1 \cup \tau_1 \\ &= \tau_1 \end{aligned}$$

Karena $f_E(0) = \tau_1$, $f_E\big((0 * 0) * (0 * 0)\big) \cup f_E(0) = \tau_1$ dan $\tau_1 \subseteq \tau_1$ maka $(f_E(0) \subseteq f_E\big((0 * 0) * (0 * 0)\big) \cup f_E(0)$

Untuk $x = 0, y = 0, z = a$

$f_E(0) = \tau_1$

$$\begin{aligned} f_E\big((0 * a) * (0 * a)\big) \cup f_E(0) &= f_E(0 * 0) \cup f_E(0) \\ &= f_E(0) \cup f_E(0) \\ &= \tau_1 \cup \tau_1 \\ &= \tau_1 \end{aligned}$$

Karena $f_E(0) = \tau_1$, $f_E\big((0 * a) * (0 * a)\big) \cup f_E(0) = \tau_1$ dan $\tau_1 \subseteq \tau_1$ maka $(f_E(0) \subseteq f_E\big((0 * a) * (0 * a)\big) \cup f_E(0)$

Untuk $x = 0, y = 0, z = b$

$f_E(0) = \tau_1$

$$\begin{aligned} f_E\big((0 * b) * (0 * b)\big) \cup f_E(0) &= f_E(b * b) \cup f_E(0) \\ &= f_E(0) \cup f_E(0) \end{aligned}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$= \tau_1 \cup \tau_1$

$= \tau_1$

Karena $f_E(0) = \tau_1$, $f_E\big((0 * b) * (0 * b)\big) \cup f_E(0) = \tau_1$ dan $\tau_1 \subseteq \tau_1$ maka $(f_E(0) \subseteq f_E\big((0 * b) * (0 * b)\big) \cup f_E(0)$

Untuk $x = 0, y = 1, z = 0$

$f_E(0) = \tau_1$

$f_E\big((0 * 0) * (a * 0)\big) \cup f_E(a) = f_E(0 * a) \cup f_E(a)$

$= f_E(0) \cup f_E(a)$

$= \tau_1 \cup \tau_1$

$= \tau_1$

Karena $f_E(0) = \tau_1$, $f_E\big((0 * 0) * (a * 0)\big) \cup f_E(a) = \tau_1$ dan $\tau_1 \subseteq \tau_1$ maka $f_E(0) \subseteq f_E\big((0 * 0) * (a * 0)\big) \cup f_E(a)$

Untuk $x = 0, y = b, z = 0$

$f_E(0) = \tau_1$

$f_E\big((0 * 0) * (b * 0)\big) \cup f_E(b) = f_E(0 * b) \cup f_E(b)$

$= f_E(b) \cup f_E(b)$

$= \tau_2 \cup \tau_2$

$= \tau_2$

Karena $f_E(0) = \tau_1$, $f_E\big((0 * 0) * (b * 0)\big) \cup f_E(b) = \tau_1$ dan $\tau_1 \subseteq \tau_2$ maka $(f_E(0) \subseteq f_E\big((0 * 0) * (b * 0)\big) \cup f_E(b)$

Untuk $x = 0, y = a, z = a$

$f_E(0) = \tau_1$

$f_E\big((0 * a) * (a * a)\big) \cup f_E(a) = f_E(0 * 0) \cup f_E(a)$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$= f_E(0) \cup f_E(a)$

$= \tau_1 \cup \tau_1$

$= \tau_1$

Karena $f_E(0) = \tau_1$, $f_E\big((0 * a) * (a * a)\big) \cup f_E(a) = \tau_1$ dan $\tau_1 \subseteq \tau_1$ maka $(f_E(0) \subseteq f_E\big((0 * a) * (a * a)\big) \cup f_E(a)$

Untuk $x = 0, y = b, z = b$

$f_E(0) = \tau_1$

$f_E\big((0 * b) * (b * b)\big) \cup f_E(b) = f_E(b * 0) \cup f_E(b)$

$= f_E(b) \cup f_E(b)$

$= \tau_2 \cup \tau_2$

$= \tau_2$

Karena $f_E(0) = \tau_1$, $f_E\big((0 * b) * (b * b)\big) \cup f_E(b) = \tau_2$ dan $\tau_2 \subseteq \tau_2$ maka $(f_E(0) \subseteq f_E\big((0 * b) * (b * b)\big) \cup f_E(b)$

Untuk $x = a, y = 0, z = 0$

$f_E(a) = \tau_1$

$f_E\big((a * 0) * (0 * 0)\big) \cup f_E(0) = f_E(a * 0) \cup f_E(0)$

$= f_E(a) \cup f_E(0)$

$= \tau_1 \cup \tau_1$

$= \tau_1$

Karena $f_E(a) = \tau_1$, $f_E\big((a * 0) * (0 * 0)\big) \cup f_E(0) = \tau_1$ dan $\tau_1 \subseteq \tau_1$ maka $(f_E(a) \subseteq f_E\big((a * 0) * (0 * 0)\big) \cup f_E(0)$

Untuk $x = a, y = a, z = 0$

$f_E(a) = \tau_1$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$f_E\big((a*0)*(a*0)\big) \cup f_E(a) = f_E(a*a) \cup f_E(a)$$
$$= f_E(0) \cup f_E(a)$$
$$= \tau_1 \cup \tau_1$$
$$= \tau_1$$

Karena $f_E(a) = \tau_1$, $f_E\big((a*0)*(a*0)\big) \cup f_E(a) = \tau_1$ dan $\tau_1 \subseteq \tau_1$ maka $(f_E(a) \subseteq f_E\big((a*0)*(a*0)\big) \cup f_E(a))$

Untuk $x = a, y = b, z = 0$

$f_E(a) = \tau_1$

$$f_E\big((a*0)*(b*0)\big) \cup f_E(b) = f_E(a*b) \cup f_E(b)$$
$$= f_E(b) \cup f_E(b)$$
$$= \tau_2 \cup \tau_2$$
$$= \tau_2$$

Karena $f_E(a) = \tau_1$, $f_E\big((a*0)*(b*0)\big) \cup f_E(b) = \tau_2$ dan $\tau_1 \subseteq \tau_2$ maka $(f_E(a) \subseteq f_E\big((a*0)*(b*0)\big) \cup f_E(b)$

Untuk $x = a, y = 0, z = a$

$f_E(a) = \tau_1$

$$f_E\big((a*a)*(0*a)\big) \cup f_E(0) = f_E(0*a) \cup f_E(0)$$
$$= f_E(0) \cup f_E(0)$$
$$= \tau_1 \cup \tau_1$$
$$= \tau_1$$

Karena $f_E(a) = \tau_1$, $f_E\big((a*a)*(0*a)\big) \cup f_E(0) = \tau_1$ dan $\tau_1 \subseteq \tau_1$ maka $(f_E(a) \subseteq f_E\big((a*a)*(0*a)\big) \cup f_E(0)$

Untuk $x = a, y = 0, z = b$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$f_E(a) = \tau_1$

$$f_E\big((a*b)*(0*b)\big) \cup f_E(0) = f_E(b*b) \cup f_E(0)$$

$$= f_E(0) \cup f_E(0)$$

$$= \tau_1 \cup \tau_1$$

$$= \tau_1$$

Karena $f_E(a) = \tau_1$, $f_E\big((a*b)*(0*b)\big) \cup f_E(0) = \tau_1$ dan $\tau_1 \subseteq \tau_1$ maka $(f_E(a) \subseteq f_E\big((a*b)*(0*b)\big) \cup f_E(0)$

Untuk $x = a, y = a, z = a$

$f_E(a) = \tau_1$

$$f_E\big((a*a)*(a*a)\big) \cup f_E(a) = f_E(0*0) \cup f_E(a)$$

$$= f_E(0) \cup f_E(a)$$

$$= \tau_1 \cup \tau_1$$

$$= \tau_1$$

Karena $f_E(a) = \tau_1$, $f_E\big((a*a)*(a*a)\big) \cup f_E(a) = \tau_1$ dan $\tau_1 \subseteq \tau_1$ maka $(f_E(a) \subseteq f_E\big((a*a)*(a*a)\big) \cup f_E(a)$

Untuk $x = a, y = b, z = b$

$f_E(a) = \tau_1$

$$f_E\big((a*b)*(b*b)\big) \cup f_E(b) = f_E(b*0) \cup f_E(b)$$

$$= f_E(b) \cup f_E(b)$$

$$= \tau_2 \cup \tau_2$$

$$= \tau_2$$

Karena $f_E(a) = \tau_1$, $f_E\big((a*b)*(b*b)\big) \cup f_E(b) = \tau_2$ dan $\tau_1 \subseteq \tau_2$ maka $(f_E(a) \subseteq f_E\big((a*b)*(b*b)\big) \cup f_E(b)$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Untuk $x = b, y = 0, z = 0$

$f_E(b) = \tau_2$

$f_E\big((b * 0) * (0 * 0)\big) \cup f_E(0) \;= f_E(b * 0) \cup f_E(0)$

$= f_E(b) \cup f_E(0)$

$= \tau_2 \cup \tau_1$

$= \tau_2$

Karena $f_E(b) = \tau_2$, $f_E\big((b * 0) * (0 * 0)\big) \cup f_E(0) = \tau_2$ dan $\tau_2 \subseteq \tau_2$ maka $(f_E(b) \subseteq f_E\big((b * 0) * (0 * 0)\big) \cup f_E(0)$

Untuk $x = b, y = a, z = 0$

$f_E(b) = \tau_2$

$f_E\big((b * 0) * (a * 0)\big) \cup f_E(a) \;= f_E(b * a) \cup f_E(a)$

$= f_E(b) \cup f_E(a)$

$= \tau_2 \cup \tau_1$

$= \tau_2$

Karena $f_E(b) = \tau_2$, $f_E\big((b * 0) * (a * 0)\big) \cup f_E(a) = \tau_2$ dan $\tau_2 \subseteq \tau_2$ maka $(f_E(b) \subseteq f_E\big((b * 0) * (a * 0)\big) \cup f_E(a)$

Untuk $x = b, y = b, z = 0$

$f_E(b) = \tau_2$

$f_E\big((b * 0) * (b * 0)\big) \cup f_E(b) \;= f_E(b * b) \cup f_E(b)$

$= f_E(0) \cup f_E(b)$

$= \tau_1 \cup \tau_2$

$= \tau_2$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Karena $f_E(b) = \tau_2$, $f_E\big((b*0)*(b*0)\big) \cup f_E(b) = \tau_2$ dan $\tau_2 \subseteq \tau_2$ maka $(f_E(b) \subseteq f_E\big((b*0)*(b*0)\big) \cup f_E(b)$

Untuk $x = b, y = 0, z = a$

$f_E(b) = \tau_2$

$$\begin{aligned} f_E\big((b*a)*(0*a)\big) \cup f_E(0) &= f_E(b*0) \cup f_E(0) \\ &= f_E(b) \cup f_E(0) \\ &= \tau_2 \cup \tau_1 \\ &= \tau_2 \end{aligned}$$

Karena $f_E(b) = \tau_2$, $f_E\big((b*a)*(0*a)\big) \cup f_E(0) = \tau_2$ dan $\tau_2 \subseteq \tau_2$ maka $(f_E(b) \subseteq f_E\big((b*a)*(0*a)\big) \cup f_E(0)$

Untuk $x = b, y = 0, z = b$

$f_E(b) = \tau_2$

$$\begin{aligned} f_E\big((b*b)*(0*b)\big) \cup f_E(0) &= f_E(0*b) \cup f_E(0) \\ &= f_E(b) \cup f_E(1) \\ &= \tau_2 \cup \tau_1 \\ &= \tau_2 \end{aligned}$$

Karena $f_E(b) = \tau_2$, $f_E\big((b*b)*(0*b)\big) \cup f_E(0) = \tau_2$ dan $\tau_2 \subseteq \tau_2$ maka $(f_E(b) \subseteq f_E\big((b*b)*(0*b)\big) \cup f_E(0)$

Untuk $x = b, y = a, z = a$

$f_E(b) = \tau_2$

$$\begin{aligned} f_E\big((b*a)*(a*a)\big) \cup f_E(a) &= f_E(b*0) \cup f_E(a) \\ &= f_E(b) \cup f_E(a) \\ &= \tau_2 \cup \tau_1 \end{aligned}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \tau_2$$

Karena $f_E(b) = \tau_2$, $f_E\big((b * a) * (a * a)\big) \cup f_E(a) = \tau_2$ dan $\tau_2 \subseteq \tau_2$ maka $(f_E(b) \subseteq f_E\big((b * a) * (a * a)\big) \cup f_E(a)$

Untuk $x = b, y = b, z = b$

$f_E(b) = \tau_2$

$$\begin{aligned} f_E\big((b * b) * (b * b)\big) \cup f_E(b) &= f_E(0 * 0) \cup f_E(b) \\ &= f_E(0) \cup f_E(b) \\ &= \tau_1 \cup \tau_2 \\ &= \tau_2 \end{aligned}$$

Karena $f_E(b) = \tau_2$, $f_E\big((b * b) * (b * b)\big) \cup f_E(b) = \tau_2$ dan $\tau_2 \subseteq \tau_2$ maka $(f_E(b) \subseteq f_E\big((b * b) * (b * b)\big) \cup f_E(b)$

Teorema 4

Misalkan $(U, E) = (U, X)$ dengan X adalah aljabar BCI. Maka setiap *U-soft p-ideal* adalah *U-soft ideal* (Ahn, dkk, 2017:155).

Bukti:

Misalkan F_A adalah *U-soft p-ideal* atas U dengan A adalah sub-aljabar dari E. Misalkan $z = 0$, maka $\forall x, y, z \in A$

$$\begin{aligned} f_A(x) &\subseteq f_A\big((x * z) * (y * z)\big) \cup f_A(y) \\ &\subseteq f_A\big((x * 0) * (y * 0)\big) \cup f_A(y) && \text{(Definisi aljabar BCI b1)} \\ &\subseteq f_A(x * y) \cup f_A(y) \end{aligned}$$

Diperoleh $\big(f_A(x) \subseteq f_A(x * y) \cup f_A(y)\big)$ $\forall x, y \in A$, maka berdasarkan definisi 16 F_A adalah *U-soft ideal* atas U.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Berikut ini penulis memberikan contoh bahwa *U-soft ideal* belum tentu *U-soft p-ideal.*

Contoh 18

Diberikan semesta halus $(U, E) = (U, X)$ dengan $X = \{0, 1, a\}$ adalah aljabar BCI dan operasi $*$ didefinisikan mengikuti Tabel 2.9:

Tabel 2.9 Definisi Operasi $*$ pada $X = \{0, a, b\}$

$*$	0	1	a
0	0	a	a
1	1	0	a
a	a	a	0

(Ahn, dkk, 2017:156)

Misalkan τ_1, τ_2, τ_3 adalah subset dari U sehingga $\tau_1 \subseteq \tau_2 \subseteq \tau_3$. Didefinisikan himpunan halus F_E atas U sebagai berikut:

$F_E = \{(0, \tau_1), (a, \tau_2), (\tau_3)\}$

Akan ditunjukkan bahwa F_E adalah *U-soft ideal*, maka harus memenuhi:

i. $(\forall\, x \in E)\big(f_E(0) \subseteq f_E(x)\big)$

Untuk $x = 0$,

$f_E(x) = f_E(0) = \tau_1$ karena $\tau_1 \subseteq \tau_1$ maka $f_E(0) \subseteq f_E(0)$

Untuk $x = 1$,

$f_E(x) = f_E(1) = \tau_2$ karena $f_E(0) = \tau_1$ dan $\tau_1 \subseteq \tau_2$ maka $f_E(0) \subseteq f_E(1)$

Untuk $x = a$,

$f_E(x) = f_E(a) = \tau_3$ karena $f_E(0) = \tau_1$ dan $\tau_1 \subseteq \tau_3$ maka $f_E(0) \subseteq f_E(a)$

ii. $(\forall\, x, y \in E)(f_E(x) \subseteq f_E(x * y) \cup f_E(y)$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Untuk $x = 0, y = 0$

$f_E(0) = \tau_1$

$f_E(0 * 0) \cup f_E(0) = f_E(0) \cup f_E(0)$

$= \tau_1 \cup \tau_1$

$= \tau_1$

Karena $f_E(0) = \tau_1$, $f_E(0 * 0) \cup f_E(0) = \tau_1$ dan $\tau_1 \subseteq \tau_1$ maka

$f_E(0) \subseteq f_E(0 * 0) \cup f_E(0)$

Untuk $x = 0, y = 1$

$f_E(0) = \tau_1$

$f_E(0 * 1) \cup f_E(1) = f_E(1) \cup f_E(1)$

$= \tau_2 \cup \tau_2$

$= \tau_2$

Karena $f_E(0) = \tau_1$, $f_E(0 * 1) \cup f_E(1) = \tau_1$ dan $\tau_1 \subseteq \tau_2$ maka

$f_E(0) \subseteq f_E(0 * 1) \cup f_E(1)$

Untuk $x = 0, y = a$

$f_E(0) = \tau_1$

$f_E(0 * a) \cup f_E(a) = f_E(a) \cup f_E(a)$

$= \tau_3 \cup \tau_3$

$= \tau_3$

Karena $f_E(0) = \tau_1$, $f_E(0 * a) \cup f_E(a) = \tau_3$ dan $\tau_1 \subseteq \tau_3$ maka

$f_E(0) \subseteq f_E(0 * a) \cup f_E(a)$

Untuk $x = 1, y = 0$

$f_E(1) = \tau_2$

$f_E(1 * 0) \cup f_E(0) = f_E(1) \cup f_E(0)$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$= \tau_2 \cup \tau_1$

$= \tau_2$

Karena $f_E(1) = \tau_2$, $f_E(1 * 0) \cup f_E(0) = \tau_2$ dan $\tau_2 \subseteq \tau_2$ maka

$f_E(1) \subseteq f_E(1 * 0) \cup f_E(0)$

Untuk $x = 1, y = 1$

$f_E(1) = \tau_1$

$f_E(1 * 1) \cup f_E(1) \ = f_E(0) \cup f_E(1)$

$= \tau_1 \cup \tau_2$

$= \tau_2$

Karena $f_E(1) = \tau_2$, $f_E(1 * 1) \cup f_E(1) = \tau_2$ dan $\tau_2 \subseteq \tau_2$ maka

$f_E(1) \subseteq f_E(1 * 1) \cup f_E(1)$

Untuk $x = 1, y = a$

$f_E(1) = \tau_2$

$f_E(1 * a) \cup f_E(a) \ = f_E(a) \cup f_E(a)$

$= \tau_3 \cup \tau_3$

$= \tau_3$

Karena $f_E(1) = \tau_2$, $f_E(1) \subseteq f_E(1 * a) \cup f_E(a) = \tau_3$ dan $\tau_2 \subseteq \tau_3$ maka

$f_E(1) \subseteq f_E(1 * a) \cup f_E(a)$

Untuk $x = a, y = 0$

$f_E(a) = \tau_3$

$f_E(a * 0) \cup f_E(0) \ = f_E(a) \cup f_E(0)$

$= \tau_3 \cup \tau_1$

$= \tau_3$

Karena $f_E(a) = \tau_3$, $f_E(a * 0) \cup f_E(0) = \tau_3$ dan $\tau_3 \subseteq \tau_3$ maka

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$f_E(a) \subseteq f_E(a * 0) \cup f_E(0)$

Untuk $x = a, y = 1$

$f_E(a) = \tau_3$

$f_E(a * 1) \cup f_E(1) = f_E(a) \cup f_E(1)$

$= \tau_3 \cup \tau_2$

$= \tau_3$

Karena $f_E(a) = \tau_3$, $f_E(a * 1) \cup f_E(1) = \tau_3$ dan $\tau_3 \subseteq \tau_3$ maka

$f_E(a) \subseteq f_E(a * 1) \cup f_E(1)$

Untuk $x = a, y = a$

$f_E(a) = \tau_3$

$f_E(a * a) \cup f_E(a) = f_E(0) \cup f_E(a)$

$= \tau_1 \cup \tau_3$

$= \tau_3$

Karena $f_E(a) = \tau_3$, $f_E(a * a) \cup f_E(a) = \tau_3$ dan $\tau_3 \subseteq \tau_3$ maka

$f_E(a) \subseteq f_E(a * a) \cup f_E(a)$

Karena i dan ii terpenuhi untuk himpunan halus F_E maka F_E adalah *U-soft ideal*. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa F_E adalah *U-soft p-ideal*, maka F_E harus memenuhi:

(i) $(\forall\, x \in E)(f_E(0) \subseteq f_E(x)$

Aksioma tersebut sudah terpenuhi seperti pada penjabaran sebelumnya

(ii) $(\forall\, x, y, z \in E)\Big(f_E(x) \subseteq f_E\big((x * z) * (y * z)\big) \cup f_E(y)\Big)$

Untuk $x = a, y = a, z = 1$

$f_E(a) = \tau_3$

$f_E\big((a * 1) * (a * 1)\big) \cup f_E(1) = f_E(a * a) \cup f_E(1)$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= f_E(0) \cup f_E(1)$$

$$= \tau_1 \cup \tau_2$$

$$= \tau_2$$

Karena $f_E(a) = \tau_3$, $f_E\big((a * 1) * (a * 1)\big) \cup f_E(1) = \tau_2$ dan $\tau_3 \nsubseteq \tau_2$ maka $f_E(a) \nsubseteq f_E\big((a * 1) * (a * 1)\big) \cup f_E(1)$

Karena (ii) tidak terpenuhi maka F_E bukan *U-soft p-ideal*.

Teorema 5

Misalkan $(U, E) = (U, X)$ dengan X adalah aljabar BCI. Untuk sub-aljabar A dari E, misalkan $F_A \in S(U)$. Maka berikut ini adalah ekuivalen:

i. F_A adalah *U-soft p-ideal* atas U

ii. F_A adalah *U-soft ideal* atas U dan fungsi aproksimasi f_A memenuhi

$$(\forall\, x, y, z \in E)\Big(f_A(x * y) \subseteq f_A\big((x * z) * (y * z)\big)\Big) \qquad (2.13)$$

(Ahn, dkk, 2017:156).

Bukti:

Asumsikan F_A adalah *U-soft p-ideal* atas U. Menggunakan definisi aljabar BCI (a1) dan sifat aljabar BCI (b2) diperoleh

$$0 = \big((x * z) * (x * y)\big) * (y * z) = \big((x * z) * (y * z)\big) * (x * y) \qquad \text{(c1)}$$

Berdasarkan persamaan (2.12)

$$f_A(x * y) \subseteq f_A\Big(\big((x * y) * (x * y)\big) * \big[\big((x * z) * (y * z)\big) * (x * y)\big]\Big)$$

$$\cup\, f_A\big((x * z) * (y * z)\big)$$

$$= f_A\big(0 * \big[\big((x * z) * (y * z)\big) * (x * y)\big]\big) \cup f_A\big((x * z) * (y * z)\big)$$

(Sifat aljabar BCI b1)

$$= f_A(0 * 0) \cup f_A\big((x * z) * (y * z)\big) \qquad \text{(Berdasarkan c1)}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= f_A(0) \cup f_A\big((x * z) * (y * z)\big) \quad \text{(Sifat aljabar BCI b1)}$$

$$= f_A\big((x * z) * (y * z)\big) \quad \text{(Berdasarkan 2.11)}$$

Dengan demikian persamaan (2.13) terbukti. Sebaliknya, misalkan F_A adalah *U-soft ideal* yang memenuhi persamaan (2.13), dengan persamaan (2.7) :

$$(\forall x, y, z \in A)\ f_A(x) \subseteq f_A(x * y) \cup f_A(y)$$

$$\subseteq f_A\big((x * z) * (y * z)\big) \cup f_A(y)$$

Dengan demikian F_A adalah *U-soft p-ideal* atas U

Lemma 2

Misalkan $(U, E) = (U, X)$ dengan X adalah aljabar BCI. Untuk sub-aljabar A dari E, misalkan $F_A \in S(U)$ jika F_A adalah *U-soft ideal* atas U, maka fungsi aproksimasi f_A dari F_A memenuhi kondisi:

$$(\forall\, x \in A)\left(f_A\big(0 * (0 * x)\big) \subseteq f_A(x)\right) \quad (2.14)$$

(Ahn, dkk, 2017:157).

Bukti:

Menggunakan sifat aljabar BCI (b1) dan definisi aljabar BCI (a3)

$$\big((x * 0) * (x * 0)\big) = (x * x) = 0$$

Kemudian dengan menggunakan definisi aljabar BCI (a2)

$$\Big(\big(0 * (0 * x)\big) * x\Big) = \big((0 * 0) * x\big)$$

$$= (0 * x)$$

$$= 0$$

Asumsikan bahwa F_A adalah *U-soft ideal* atas U.

Misalkan diberikan $f_A\big(0 * (0 * x)\big)$ menggunakan (2.6) dan (2.7) diperoleh:

$$f_A\big(0 * (0 * x)\big) \subseteq f_A\Big(\big(0 * (0 * x)\big) * x\Big) \cup f_A(x)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$= f_A(0) \cup f_A(x)$

$= f_A(x)$

Dengan demikian terbukti bahwa $f_A\big(0 * (0 * x)\big) \subseteq f_A(x)$.

Teorema 6

Misalkan $(U, E) = (U, X)$ dengan X adalah aljabar BCI. Untuk sub-aljabar A dari E, misalkan $F_A \in S(U)$. Maka berikut ini adalah ekuivalen:

i. F_A adalah *U-soft p-ideal* atas U

ii. F_A adalah *U-soft ideal* atas U dan fungsi aproksimasi f_A memenuhi

$$(\forall\, x \in A)(f_A(x) \subseteq f_A\big(0 * (0 * x)\big) \tag{2.15}$$

(Ahn, dkk, 2017:157).

Bukti:

Asumsikan bahwa F_A adalah *U-soft p-ideal* atas U. Maka F_A juga merupakan *U-soft ideal* atas U. Berdasarkan (2.11) dan (2.12) $\forall\, x \in A$ diperoleh:

$f_A(x) \subseteq f_A\big((x * x) * (0 * x)\big) \cup f_A(0)$

$= f_A\big(0 * (0 * x)\big) \cup f_A(0)$ (Sifat aljabar BCI b1)

$= f_A\big(0 * (0 * x)\big)$ (Berdasarkan 2.6)

Dengan demikian (2.15) terbukti. Sebaliknya, misalkan F_A adalah *U-soft ideal* atas U yang memenuhi (2.15). Dengan menggunakan lemma 2 diperoleh:

$$f_A\Big(0 * \Big(0 * \big((x * z) * (y * z)\big)\Big)\Big) \subseteq f_A\big((x * z) * (y * z)\big)$$

Menggunakan sifat aljabar BCI (b7) dan (b8) diperoleh

$$\Big(0 * \big(0 * (x * y)\big)\Big) = (0 * y) * (0 * x)$$

$$\Big(0 * \Big(0 * \big((x * z) * (y * z)\big)\Big)\Big) = (0 * y) * (0 * x)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Jadi $\left(0 * \left(0 * (x * y)\right)\right) = \left(0 * \left(0 * \left((x * z) * (y * z)\right)\right)\right)$

Menggunakan (2.15) dan (2.13) diperoleh

$$\begin{aligned} f_A(x * y) &\subseteq f_A\left(0 * \left(0 * (x * y)\right)\right) \\ &= f_A\left(0 * \left(0 * (x * z) * (y * z)\right)\right) \\ &\subseteq f_A\left((x * z) * (y * z)\right) \end{aligned}$$

Berdasarkan teorema 5, F_A adalah *U-soft p-ideal* atas U.

Lemma 3

Misalkan $(U, E) = (U, X)$ dengan X adalah aljabar BCI. Diberikan sub-aljabar A dari E, misalkan $F_A \in S(U)$. Maka berikut ini equivalen:

(i) F_A adalah *U-soft ideal* atas U

(ii) Himpunan tak kosong τ-*exclusive* dari F_A adalah ideal dari A untuk setiap $\tau \subseteq U$.

(Widiyatika, 2016: 29).

Bukti:

Dari (i) ke (ii)

Asumsikan F_A adalah *U-soft ideal* atas U. Misalkan $\tau \subseteq U$ dan $e(f_A; \tau) \neq \emptyset$. Maka $(\forall x \in A)\ f_A(x) \subseteq \tau$ mengikuti persamaan (2.6) $f_A(0) \subseteq f_A(x) \subseteq \tau$, dengan demikian $0 \in e(F_A; \tau)$. Misalkan $x, y \in A$ sedemikian sehingga $x * y \in e(F_A; \tau)$ dan $y \in e(F_A; \tau)$ maka $f_A(x * y) \subseteq \tau$ dan $y \subseteq \tau$ berdasarkan persamaan (2.7) $f_A(x) \subseteq f_A(x * y) \cup f_A(y) \subseteq \tau$, sehingga $x \in e(F_A; \tau)$. Dengan demikian diperoleh:

a. $0 \in e(F_A; \tau)$

b. $x * y \in e(F_A; \tau)$ dan $y \in e(F_A; \tau)$ maka $x \in e(F_A; \tau)$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Maka berdasarkan definisi 11 $e(F_A;\tau)$ adalah ideal

Dari (ii) ke (i)

Asumsikan bahwa $e(F_A;\tau)$ adalah ideal dari A untuk setiap $\tau \subseteq U$. Maka $0 \in e(F_A;\tau)$. Jika ada $a \in A$ dan $f_A(0) \nsubseteq f_A(a)$, maka $f_A(0) \nsubseteq \tau$ untuk $\tau = f_A(a) \backslash f_A(0)$, hal tersebut kontradiksi. Dengan demikian $f_A(0) \subseteq f_A(x)$ untuk setiap $x \in A$.

Misalkan diambil $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ sehingga $f_A(x * y) = \tau_1$ dan $f_A(y) = \tau_2$. $(x * y) \in e(F_A;\tau)$ dan $y \in e(F_A;\tau)$ maka $x \in e(F_A;\tau)$, oleh karena itu $f_A(x) \subseteq \tau = \tau_1 \cup \tau_2$ maka $f_A(x) \subseteq f_A(x * y) \cup f_A(y)$. Dengan demikian F_A adalah *U-soft ideal* atas U (Jun, 2013:1948).

2.11 Gabungan Ideal Sub-implikatif Halus

Operasi gabungan selain dapat digunakan pada ideal dalam aljabar BCI, juga dapat digunakan pada ideal sub-implikatif halus dalam aljabar BCI, namun dengan aksioma yang berbeda, sebagaimana definisi berikut.

Definisi 19

Misalkan $(U, E) = (U, X)$ dengan X adalah aljabar BCI. Diberikan sub-aljabar A dari E, misalkan $F_A \in S(U)$ maka F_A disebut gabungan ideal sub-implikatif halus atau *union soft sub-implicative ideal* atas U (disingkat *U-soft sub-implicative ideal*) jika fungsi aproksimasi f_A memenuhi:

i. $(\forall\, x \in A)\big(f_A(0) \subseteq f_A(x)\big)$ (2.16)

ii. $(\forall\, x, y, z \in A)$

$$\left(f_A(y^2 * x) \subseteq f_A\Big(\big((x^2 * y) * (y * x)\big) * z\Big) \cup f_A(z)\right) \quad (2.17)$$

(Ahn, dkk, 2017:9).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Berikut ini penulis memberikan contoh dari *U-soft sub-implicative ideal* pada aljabar BCI.

Contoh 19

Misalkan $(U, E) = (U, X)$ dengan $X = \{0, 1, 2\}$ adalah aljabar BCI dengan operasi $*$ didefinisikan mengikuti Tabel 2.10:

Tabel 2.10 Definisi Operasi $*$ pada $X = \{0, 1, 2\}$

$*$	0	1	2
0	0	0	2
1	1	0	2
2	2	2	0

(Ahn, dkk, 2017: 9)

Misalkan τ_1 dan τ_2 adalah subset dari U sedemikian sehingga $\tau_1 \subseteq \tau_2$. Didefinisikan himpunan halus F_E atas U sebagai berikut:

$F_E = \{(0, \tau_1), (1, \tau_2), (2, \tau_2)\}$.

Berdasarkan (2.12) akan ditunjukkan bahwa $(\forall x \in E)\big(f_E(0) \subseteq f_E(x)\big)$:

Perlu diingat bahwa $f_E(0) = \tau_1$

Untuk $x = 0$

$f_E(x) = f_E(0) = \tau_1$, karena $\tau_1 \subseteq \tau_1$ maka $f_E(0) \subseteq f_E(0)$.

Untuk $x = 1$

$f_E(x) = f_E(1) = \tau_2$, karena $f_E(0) = \tau_1$ dan $\tau_1 \subseteq \tau_2$ maka $f_E(0) \subseteq f_E(1)$.

Untuk $x = 2$

$f_E(x) = f_E(2) = \tau_2$, karena $f_E(0) = \tau_1$ dan $\tau_1 \subseteq \tau_2$ maka $f_E(0) \subseteq f_E(2)$.

Berdasarkan (2.13) akan ditunjukkan $(\forall x, y, z \in E)$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$\left(f_E(y^2 * x) \subseteq f_E\left(\left((x^2 * y) * (y * x)\right) * z\right) \cup f_E(z)\right)$:

Untuk $x = 0, y = 0, z = 0$

$f_E(0^2 * 0) = f_E\big(0 * (0 * 0)\big)$

$= f_E(0 * 0)$

$= f_E(0)$

$= \tau_1$

$f_E\left(\left((0^2 * 0) * (0 * 0)\right) * 0\right) \cup f_E(0)$

$= f_E\left(\left((0 * 0) * 0\right) * 0\right) \cup f_E(0)$

$= f_E\big((0 * 0) * 0\big) \cup f_E(0)$

$= f_E(0 * 0) \cup f_E(0)$

$= f_E(0) \cup f_E(0)$

$= \tau_1 \cup \tau_1$

$= \tau_1$

Karena $f_E(0^2 * 0) = \tau_1$, $f_E\left(\left((0^2 * 0) * (0 * 0)\right) * 0\right) \cup f_E(0) = \tau_1$ dan $\tau_1 \subseteq \tau_1$ maka $\left(f_E(0^2 * 0) \subseteq f_E\left(\left((0^2 * 0) * (0 * 0)\right) * 0\right) \cup f_E(0)\right)$

Untuk $x = 0, y = 0, z = 1$

$\left(f_E(0^2 * 0) \subseteq f_E\left(\left((0^2 * 0) * (0 * 0)\right) * 1\right) \cup f_E(1)\right)$

$f_E(0^2 * 0) = f_E\big(0 * (0 * 0)\big)$

$= f_E(0 * 0)$

$= f_E(0)$

$= \tau_1$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$f_E\left(\left((0^2 * 0) * (0 * 0)\right) * 1\right) \cup f_E(1)$

$= f_E\left(\left(\left(0 * (0 * 0)\right) * (0 * 0)\right) * 1\right) \cup f_E(1)$

$= f_E\left(\left((0 * 0) * 0\right) * 1\right) \cup f_E(1)$

$= f_E\left((0 * 0) * 1\right) \cup f_E(1)$

$= f_E(0 * 1) \cup f_E(1)$

$= f_E(0) \cup f_E(1)$

$= \tau_1 \cup \tau_1$

$= \tau_1$

Karena $f_E(0^2 * 0) = \tau_1$, $f_E\left(\left((0^2 * 0) * (0 * 0)\right) * 1\right) \cup f_E(1) = \tau_1$ dan $\tau_1 \subseteq \tau_1$ maka $\left(f_E(0^2 * 0) \subseteq f_E\left(\left((0^2 * 0) * (0 * 0)\right) * 1\right) \cup f_E(1)\right)$

Untuk $x = 0, y = 0, z = 2$

$f_E(0^2 * 0) = f_E\left(0 * (0 * 0)\right)$

$= f_E(0 * 0)$

$= f_E(0)$

$= \tau_1$

$f_E\left(\left((0^2 * 0) * (0 * 0)\right) * 2\right) \cup f_E(2)$

$= f_E\left(\left(\left(0 * (0 * 0)\right) * (0 * 0)\right) * 2\right) \cup f_E(2)$

$= f_E\left(\left((0 * 0) * 0\right) * 2\right) \cup f_E(2)$

$= f_E\left((0 * 0) * 2\right) \cup f_E(2)$

$= f_E(0 * 2) \cup f_E(2)$

$= f_E(2) \cup f_E(2)$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$= \tau_2 \cup \tau_2$

$= \tau_2$

Karena $f_E(0^2 * 0) = \tau_1$ dan $f_E\left(\left((0^2 * 0) * (0 * 0)\right) * 2\right) \cup f_E(2) = \tau_2$ dan

$\tau_1 \subseteq \tau_2$, maka $\left(f_E(0^2 * 0) \subseteq f_E\left(\left((0^2 * 0) * (0 * 0)\right) * 2\right) \cup f_E(2)\right)$

Untuk $x = 0, y = 1, z = 0$

$f_E(1^2 * 0) = f_E\left(1 * (1 * 0)\right)$

$= f_E(1 * 1)$

$= f_E(0)$

$= \tau_1$

$f_E\left(\left((0^2 * 1) * (1 * 0)\right) * 0\right) \cup f_E(0)$

$= f_E\left(\left(\left(0 * (0 * 1)\right) * (1 * 0)\right) * 0\right) \cup f_E(0)$

$= f_E\left(\left((0 * 0) * 1\right) * 0\right) \cup f_E(0)$

$= f_E\left((0 * 1) * 0\right) \cup f_E(0)$

$= f_E(0 * 0) \cup f_E(0)$

$= f_E(0) \cup f_E(0)$

$= \tau_1 \cup \tau_1$

$= \tau_1$

Karena $f_E(1^2 * 0) = \tau_1$ dan $f_E\left(\left((0^2 * 1) * (1 * 0)\right) * 0\right) \cup f_E(0) = \tau_1$ dan

$\tau_1 \subseteq \tau_1$, maka $\left(f_E(1^2 * 0) \subseteq f_E\left(\left((0^2 * 1) * (1 * 0)\right) * 0\right) \cup f_E(0)\right)$

Untuk $x = 0, y = 1, z = 1$

$f_E(1^2 * 0) = f_E\left(1 * (1 * 0)\right)$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$= f_E(1 * 1)$

$= f_E(0)$

$= \tau_1$

$f_E\left(\left((0^2 * 1) * (1 * 0)\right) * 1\right) \cup f_E(1)$

$= f_E\left(\left(\left(0 * (0 * 1)\right) * (1 * 0)\right) * 1\right) \cup f_E(1)$

$= f_E\left(\left((0 * 0) * 1\right) * 1\right) \cup f_E(1)$

$= f_E\left((0 * 1) * 1\right) \cup f_E(1)$

$= f_E(0 * 1) \cup f_E(1)$

$= f_E(0) \cup f_E(1)$

$= \tau_1 \cup \tau_1$

$= \tau_1$

Karena $f_E(1^2 * 0) = \tau_1$, $f_E\left(\left((0^2 * 1) * (1 * 0)\right) * 1\right) \cup f_E(1) = \tau_1$ dan $\tau_1 \subseteq \tau_1$, maka $\left(f_E(1^2 * 0) \subseteq f_E\left(\left((0^2 * 1) * (1 * 0)\right) * 1\right) \cup f_E(1)\right)$

Untuk $x = 0, y = 1, z = 2$

$f_E(1^2 * 0) = f_E\left(1 * (1 * 0)\right)$

$= f_E(1 * 1)$

$= f_E(0)$

$= \tau_1$

$f_E\left(\left((0^2 * 1) * (1 * 0)\right) * 2\right) \cup f_E(2)$

$= f_E\left(\left(\left(0 * (0 * 1)\right) * (1 * 0)\right) * 2\right) \cup f_E(2)$

$= f_E\left(\left((0 * 0) * 1\right) * 2\right) \cup f_E(2)$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$= f_E\big((0 * 1) * 2\big) \cup f_E(2)$

$= f_E(0 * 2) \cup f_E(2)$

$= f_E(2) \cup f_E(2)$

$= \tau_2 \cup \tau_2$

$= \tau_2$

Karena $f_E(1^2 * 0) = \tau_1$, $f_E\Big(\big((0^2 * 1) * (1 * 0)\big) * 2\Big) \cup f_E(2) = \tau_2$ dan $\tau_1 \subseteq \tau_2$, maka $\Big(f_E(1^2 * 0) \subseteq f_E\Big(\big((0^2 * 1) * (1 * 0)\big) * 2\Big) \cup f_E(2)\Big)$

Untuk $x = 0, y = 2, z = 0$

$f_E(2^2 * 0) = f_E\big(2 * (2 * 0)\big)$

$= f_E(2 * 2)$

$= f_E(0)$

$= \tau_1$

$f_E\Big(\big((0^2 * 2) * (2 * 0)\big) * 0\Big) \cup f_E(0)$

$= f_E\Big(\Big(\big(0 * (0 * 2)\big) * (2 * 0)\Big) * 0\Big) \cup f_E(0)$

$= f_E\Big(\big((0 * 2) * 2\big) * 0\Big) \cup f_E(0)$

$= f_E\big((2 * 2) * 0\big) \cup f_E(0)$

$= f_E(0 * 0) \cup f_E(0)$

$= f_E(0) \cup f_E(0)$

$= \tau_1 \cup \tau_1$

$= \tau_1$

Karena $f_E(2^2 * 0) = \tau_1$, $f_E\Big(\big((0^2 * 2) * (2 * 0)\big) * 0\Big) \cup f_E(0) = \tau_2$ dan $\tau_1 \subseteq \tau_2$, maka $\Big(f_E(2^2 * 0) \subseteq f_E\Big(\big((0^2 * 2) * (2 * 0)\big) * 0\Big) \cup f_E(0)\Big)$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Untuk $x = 0, y = 2, z = 1$

$f_E(2^2 * 0) = f_E\big(2 * (2 * 0)\big)$

$= f_E(2 * 2)$

$= f_E(0)$

$= \tau_1$

$f_E\left(\big((0^2 * 2) * (2 * 0)\big) * 1\right) \cup f_E(1)$

$= f_E\left(\Big(\big(0 * (0 * 2)\big) * (2 * 0)\Big) * 1\right) \cup f_E(1)$

$= f_E\left(\big((0 * 2) * 2\big) * 1\right) \cup f_E(1)$

$= f_E\big((2 * 2) * 1\big) \cup f_E(1)$

$= f_E(0 * 1) \cup f_E(1)$

$= f_E(0) \cup f_E(1)$

$= \tau_1 \cup \tau_1$

$= \tau_1$

Karena $f_E(2^2 * 0) = \tau_1$, $f_E\left(\big((0^2 * 2) * (2 * 0)\big) * 1\right) \cup f_E(1) = \tau_1$ dan $\tau_1 \subseteq \tau_1$, maka $\left(f_E(2^2 * 0) \subseteq f_E\left(\big((0^2 * 2) * (2 * 0)\big) * 1\right) \cup f_E(1)\right)$

Untuk $x = 0, y = 2, z = 2$

$f_E(2^2 * 0) = f_E\big(2 * (2 * 0)\big)$

$= f_E(2 * 2)$

$= f_E(0)$

$= \tau_1$

$f_E\left(\big((0^2 * 2) * (2 * 0)\big) * 2\right) \cup f_E(2)$

$= f_E\left(\Big(\big(0 * (0 * 2)\big) * (2 * 0)\Big) * 2\right) \cup f_E(2)$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$= f_E\left(\left((0 * 2) * 2\right) * 2\right) \cup f_E(2)$

$= f_E\left((2 * 2) * 2\right) \cup f_E(2)$

$= f_E(0 * 2) \cup f_E(2)$

$= f_E(2) \cup f_E(2)$

$= \tau_2 \cup \tau_2$

$= \tau_2$

Karena $f_E(2^2 * 0) = \tau_1$, $f_E\left(\left((0^2 * 2) * (2 * 0)\right) * 1\right) \cup f_E(1) = \tau_2$ dan $\tau_1 \subseteq \tau_2$, maka $\left(f_E(2^2 * 0) \subseteq f_E\left(\left((0^2 * 2) * (2 * 0)\right) * 1\right) \cup f_E(1)\right)$

Untuk $x = 1, y = 0, z = 0$

$f_E(0^2 * 1) = f_E\left(0 * (0 * 1)\right)$

$= f_E(0 * 0)$

$= f_E(0)$

$= \tau_1$

$f_E\left(\left((1^2 * 0) * (0 * 1)\right) * 0\right) \cup f_E(0)$

$= f_E\left(\left(\left(1 * (1 * 0)\right) * (0 * 1)\right) * 0\right) \cup f_E(0)$

$= f_E\left(\left((1 * 1) * 0\right) * 0\right) \cup f_E(0)$

$= f_E\left((0 * 0) * 0\right) \cup f_E(0)$

$= f_E(0 * 0) \cup f_E(0)$

$= f_E(0) \cup f_E(0)$

$= \tau_1 \cup \tau_1$

$= \tau_1$

Karena $f_E(0^2 * 1) = \tau_1$, $f_E\left(\left((1^2 * 0) * (0 * 1)\right) * 0\right) \cup f_E(0) = \tau_1$ dan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$\tau_1 \subseteq \tau_1$, maka $\left(f_E(0^2 * 1) \subseteq f_E\left(\left((1^2 * 0) * (0 * 1)\right) * 0\right) \cup f_E(0)\right)$

Untuk $x = 1, y = 0, z = 1$

$f_E(0^2 * 1) = f_E\big(0 * (0 * 1)\big)$

$= f_E(0 * 0)$

$= f_E(0)$

$= \tau_1$

$f_E\left(\left((1^2 * 0) * (0 * 1)\right) * 1\right) \cup f_E(1)$

$= f_E\left(\left(\left(1 * (1 * 0)\right) * (0 * 1)\right) * 1\right) \cup f_E(1)$

$= f_E\left(\left((1 * 1) * 0\right) * 1\right) \cup f_E(1)$

$= f_E\big((0 * 0) * 1\big) \cup f_E(1)$

$= f_E(0 * 1) \cup f_E(1)$

$= f_E(0) \cup f_E(1)$

$= \tau_1 \cup \tau_1$

$= \tau_1$

Karena $f_E(0^2 * 1) = \tau_1$, $f_E\left(\left((1^2 * 0) * (0 * 1)\right) * 1\right) \cup f_E(1) = \tau_1$ dan $\tau_1 \subseteq \tau_1$, maka $\left(f_E(0^2 * 1) \subseteq f_E\left(\left((1^2 * 0) * (0 * 1)\right) * 1\right) \cup f_E(1)\right)$

Untuk $x = 1, y = 0, z = 2$

$f_E(0^2 * 1) = f_E\big(0 * (0 * 1)\big)$

$= f_E(0 * 0)$

$= f_E(0)$

$= \tau_1$

$f_E\left(\left((1^2 * 0) * (0 * 1)\right) * 2\right) \cup f_E(2)$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$= f_E\left(\left(\left(1 * (1 * 0)\right) * (0 * 1)\right) * 2\right) \cup f_E(2)$

$= f_E\left(\left((1 * 1) * 0\right) * 2\right) \cup f_E(2)$

$= f_E\left((0 * 0) * 2\right) \cup f_E(2)$

$= f_E(0 * 2) \cup f_E(2)$

$= f_E(2) \cup f_E(2)$

$= \tau_2 \cup \tau_2$

$= \tau_2$

Karena $f_E(0^2 * 1) = \tau_1$, $f_E\left(\left((1^2 * 0) * (0 * 1)\right) * 2\right) \cup f_E(2) = \tau_2$ dan $\tau_1 \subseteq \tau_2$, maka $\left(f_E(0^2 * 1) \subseteq f_E\left(\left((1^2 * 0) * (0 * 1)\right) * 2\right) \cup f_E(2)\right)$

Untuk $x = 1, y = 1, z = 0$

$f_E(1^2 * 1) = f_E\left(1 * (1 * 1)\right)$

$= f_E(1 * 0)$

$= f_E(1)$

$= \tau_1$

$f_E\left(\left((1^2 * 1) * (1 * 1)\right) * 0\right) \cup f_E(0)$

$= f_E\left(\left(\left(1 * (1 * 1)\right) * (1 * 1)\right) * 0\right) \cup f_E(0)$

$= f_E\left(\left((1 * 0) * 0\right) * 0\right) \cup f_E(0)$

$= f_E\left((1 * 0) * 0\right) \cup f_E(0)$

$= f_E(1 * 0) \cup f_E(0)$

$= f_E(1) \cup f_E(0)$

$= \tau_1 \cup \tau_1$

$= \tau_1$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Karena $f_E(1^2 * 1) = \tau_1$, $f_E\left(\left((1^2 * 1) * (1 * 1)\right) * 0\right) \cup f_E(0) = \tau_1$ dan $\tau_1 \subseteq \tau_1$, maka $\left(f_E(1^2 * 1) \subseteq f_E\left(\left((1^2 * 1) * (1 * 1)\right) * 0\right) \cup f_E(0)\right)$

Untuk $x = 1, y = 1, z = 1$

$f_E(1^2 * 1) = f_E\big(1 * (1 * 1)\big)$

$= f_E(1 * 0)$

$= f_E(1)$

$= \tau_1$

$f_E\left(\left((1^2 * 1) * (1 * 1)\right) * 1\right) \cup f_E(1)$

$= f_E\left(\left(\left(1 * (1 * 1)\right) * (1 * 1)\right) * 1\right) \cup f_E(1)$

$= f_E\left(\left((1 * 0) * 0\right) * 1\right) \cup f_E(1)$

$= f_E\big((1 * 0) * 1\big) \cup f_E(1)$

$= f_E(1 * 1) \cup f_E(1)$

$= f_E(0) \cup f_E(1)$

$= \tau_1 \cup \tau_1$

$= \tau_1$

Karena $f_E(1^2 * 1) = \tau_1$, $f_E\left(\left((1^2 * 1) * (1 * 1)\right) * 1\right) \cup f_E(1) = \tau_1$ dan $\tau_1 \subseteq \tau_1$, maka $\left(f_E(1^2 * 1) \subseteq f_E\left(\left((1^2 * 1) * (1 * 1)\right) * 1\right) \cup f_E(1)\right)$

Untuk $x = 1, y = 1, z = 2$

$f_E(1^2 * 1) = f_E\big(1 * (1 * 1)\big)$

$= f_E(1 * 0)$

$= f_E(1)$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$= \tau_1$

$f_E\left(\left((1^2 * 1) * (1 * 1)\right) * 2\right) \cup f_E(2)$

$= f_E\left(\left(\left(1 * (1 * 1)\right) * (1 * 1)\right) * 2\right) \cup f_E(2)$

$= f_E\left(\left((1 * 0) * 0\right) * 2\right) \cup f_E(2)$

$= f_E\left((1 * 0) * 2\right) \cup f_E(2)$

$= f_E(1 * 2) \cup f_E(2)$

$= f_E(2) \cup f_E(2)$

$= \tau_2 \cup \tau_2$

$= \tau_2$

Karena $f_E(1^2 * 1) = \tau_1$, $f_E\left(\left((1^2 * 1) * (1 * 1)\right) * 2\right) \cup f_E(2) = \tau_2$ dan $\tau_1 \subseteq \tau_2$, maka $\left(f_E(1^2 * 1) \subseteq f_E\left(\left((1^2 * 1) * (1 * 1)\right) * 2\right) \cup f_E(2)\right)$

Untuk $x = 1, y = 2, z = 0$

$f_E(2^2 * 1) = f_E\left(2 * (2 * 1)\right)$

$= f_E(2 * 2)$

$= f_E(0)$

$= \tau_1$

$f_E\left(\left((1^2 * 2) * (2 * 1)\right) * 0\right) \cup f_E(0)$

$= f_E\left(\left(\left(1 * (1 * 2)\right) * (2 * 1)\right) * 0\right) \cup f_E(0)$

$= f_E\left(\left((1 * 2) * 2\right) * 0\right) \cup f_E(0)$

$= f_E\left((2 * 2) * 0\right) \cup f_E(0)$

$= f_E(0 * 0) \cup f_E(0)$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$= f_E(0) \cup f_E(0)$

$= \tau_1 \cup \tau_1$

$= \tau_1$

Karena $f_E(2^2 * 1) = \tau_1$, $f_E\left(\left((1^2 * 2) * (2 * 1)\right) * 0\right) \cup f_E(0) = \tau_1$ dan $\tau_1 \subseteq \tau_1$, maka $\left(f_E(2^2 * 1) \subseteq f_E\left(\left((1^2 * 2) * (2 * 1)\right) * 0\right) \cup f_E(0)\right)$

Untuk $x = 1, y = 2, z = 1$

$f_E(2^2 * 1) = f_E\big(2 * (2 * 1)\big)$

$= f_E(2 * 2)$

$= f_E(0)$

$= \tau_1$

$f_E\left(\left((1^2 * 2) * (2 * 1)\right) * 1\right) \cup f_E(1)$

$= f_E\left(\left(\left(1 * (1 * 2)\right) * (2 * 1)\right) * 1\right) \cup f_E(1)$

$= f_E\left(\left((1 * 2) * 2\right) * 1\right) \cup f_E(1)$

$= f_E\big((2 * 2) * 1\big) \cup f_E(1)$

$= f_E(0 * 1) \cup f_E(1)$

$= f_E(0) \cup f_E(1)$

$= \tau_1 \cup \tau_1$

$= \tau_1$

Karena $f_E(2^2 * 1) = \tau_1$, $f_E\left(\left((1^2 * 2) * (2 * 1)\right) * 1\right) \cup f_E(1) = \tau_1$ dan $\tau_1 \subseteq \tau_1$, maka $\left(f_E(2^2 * 1) \subseteq f_E\left(\left((1^2 * 2) * (2 * 1)\right) * 1\right) \cup f_E(1)\right)$

Untuk $x = 1, y = 2, z = 2$

$f_E(2^2 * 1) = f_E\big(2 * (2 * 1)\big)$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$= f_E(2 * 2)$

$= f_E(0)$

$= \tau_1$

$f_E\left(\left((1^2 * 2) * (2 * 1)\right) * 2\right) \cup f_E(2)$

$= f_E\left(\left(\left(1 * (1 * 2)\right) * (2 * 1)\right) * 2\right) \cup f_E(2)$

$= f_E\left(\left((1 * 2) * 2\right) * 2\right) \cup f_E(2)$

$= f_E\left((2 * 2) * 2\right) \cup f_E(2)$

$= f_E(0 * 2) \cup f_E(2)$

$= f_E(2) \cup f_E(2)$

$= \tau_2 \cup \tau_2$

$= \tau_2$

Karena $f_E(2^2 * 1) = \tau_1$, $f_E\left(\left((1^2 * 2) * (2 * 1)\right) * 2\right) \cup f_E(2) = \tau_2$ dan $\tau_1 \subseteq \tau_2$, maka $\left(f_E(2^2 * 1) \subseteq f_E\left(\left((1^2 * 2) * (2 * 1)\right) * 2\right) \cup f_E(2)\right)$

Untuk $x = 2, y = 0, z = 0$

$f_E(0^2 * 2) = f_E\left(0 * (0 * 2)\right)$

$= f_E(0 * 2)$

$= f_E(2)$

$= \tau_2$

$f_E\left(\left((2^2 * 0) * (0 * 2)\right) * 0\right) \cup f_E(0)$

$= f_E\left(\left(\left(2 * (2 * 0)\right) * (0 * 2)\right) * 0\right) \cup f_E(0)$

$= f_E\left(\left((2 * 2) * 2\right) * 0\right) \cup f_E(0)$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$= f_E\big((0 * 2) * 0\big) \cup f_E(0)$

$= f_E(2 * 0) \cup f_E(0)$

$= f_E(2) \cup f_E(0)$

$= \tau_2 \cup \tau_1$

$= \tau_2$

Karena $f_E(0^2 * 2) = \tau_2$, $f_E\left(\big((2^2 * 0) * (0 * 2)\big) * 0\right) \cup f_E(0) = \tau_2$ dan $\tau_2 \subseteq \tau_2$, maka $\left(f_E(0^2 * 2) \subseteq f_E\left(\big((2^2 * 0) * (0 * 2)\big) * 0\right) \cup f_E(0)\right)$

Untuk $x = 2, y = 0, z = 1$

$f_E(0^2 * 2) = f_E\big(0 * (0 * 2)\big)$

$= f_E(0 * 2)$

$= f_E(2)$

$= \tau_2$

$f_E\left(\big((2^2 * 0) * (0 * 2)\big) * 1\right) \cup f_E(1)$

$= f_E\left(\Big(\big(2 * (2 * 0)\big) * (0 * 2)\Big) * 1\right) \cup f_E(1)$

$= f_E\left(\big((2 * 2) * 2\big) * 1\right) \cup f_E(1)$

$= f_E\big((0 * 2) * 1\big) \cup f_E(1)$

$= f_E(2 * 1) \cup f_E(1)$

$= f_E(2) \cup f_E(1)$

$= \tau_2 \cup \tau_1$

$= \tau_2$

Karena $f_E(0^2 * 2) = \tau_2$, $f_E\left(\big((2^2 * 0) * (0 * 2)\big) * 1\right) \cup f_E(1) = \tau_2$ dan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$\tau_2 \subseteq \tau_2$, maka $\left(f_E(0^2 * 2) \subseteq f_E\left(\left((2^2 * 0) * (0 * 2)\right) * 1\right) \cup f_E(1)\right)$

Untuk $x = 2, y = 0, z = 2$

$f_E(0^2 * 2) = f_E\left(0 * (0 * 2)\right)$

$= f_E(0 * 2)$

$= f_E(2)$

$= \tau_2$

$f_E\left(\left((2^2 * 0) * (0 * 2)\right) * 2\right) \cup f_E(2)$

$= f_E\left(\left(\left(2 * (2 * 0)\right) * (0 * 2)\right) * 2\right) \cup f_E(2)$

$= f_E\left(\left((2 * 2) * 2\right) * 2\right) \cup f_E(2)$

$= f_E\left((0 * 2) * 2\right) \cup f_E(2)$

$= f_E(2 * 2) \cup f_E(2)$

$= f_E(0) \cup f_E(2)$

$= \tau_1 \cup \tau_2$

$= \tau_2$

Karena $f_E(0^2 * 2) = \tau_2$, $f_E\left(\left((2^2 * 0) * (0 * 2)\right) * 2\right) \cup f_E(2) = \tau_2$ dan

$\tau_2 \subseteq \tau_2$, maka $\left(f_E(0^2 * 2) \subseteq f_E\left(\left((2^2 * 0) * (0 * 2)\right) * 2\right) \cup f_E(2)\right)$

Untuk $x = 2, y = 1, z = 0$

$f_E(1^2 * 2) = f_E\left(1 * (1 * 2)\right)$

$= f_E(1 * 2)$

$= f_E(2)$

$= \tau_2$

$f_E\left(\left((2^2 * 1) * (1 * 2)\right) * 0\right) \cup f_E(0)$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$= f_E\left(\left(\left(2 * (2 * 1)\right) * (1 * 2)\right) * 0\right) \cup f_E(0)$

$= f_E\left(\left((2 * 2) * 2\right) * 0\right) \cup f_E(0)$

$= f_E\left((0 * 2) * 0\right) \cup f_E(0)$

$= f_E(2 * 0) \cup f_E(0)$

$= f_E(2) \cup f_E(0)$

$= \tau_2 \cup \tau_1$

$= \tau_2$

Karena $f_E(1^2 * 2) = \tau_2$, $f_E\left(\left((2^2 * 1) * (1 * 2)\right) * 0\right) \cup f_E(0) = \tau_2$ dan $\tau_2 \subseteq \tau_2$, maka $\left(f_E(1^2 * 2) \subseteq f_E\left(\left((2^2 * 1) * (1 * 2)\right) * 0\right) \cup f_E(0)\right)$

Untuk $x = 2, y = 1, z = 1$

$f_E(1^2 * 2) = f_E\left(1 * (1 * 2)\right)$

$= f_E(1 * 2)$

$= f_E(2)$

$= \tau_2$

$f_E\left(\left((2^2 * 1) * (1 * 2)\right) * 1\right) \cup f_E(1)$

$= f_E\left(\left(\left(2 * (2 * 1)\right) * (1 * 2)\right) * 1\right) \cup f_E(1)$

$= f_E\left(\left((2 * 2) * 2\right) * 1\right) \cup f_E(1)$

$= f_E\left((0 * 2) * 1\right) \cup f_E(1)$

$= f_E(2 * 1) \cup f_E(1)$

$= f_E(2) \cup f_E(1)$

$= \tau_2 \cup \tau_1$

$= \tau_2$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Karena $f_E(1^2 * 2) = \tau_2$, $f_E\left(\left((2^2 * 1) * (1 * 2)\right) * 1\right) \cup f_E(1) = \tau_2$ dan $\tau_2 \subseteq \tau_2$, maka $\left(f_E(1^2 * 2) \subseteq f_E\left(\left((2^2 * 1) * (1 * 2)\right) * 1\right) \cup f_E(1)\right)$

Untuk $x = 2, y = 1, z = 2$

$$f_E(1^2 * 2) = f_E\big(1 * (1 * 2)\big)$$
$$= f_E(1 * 2)$$
$$= f_E(2)$$
$$= \tau_2$$

$$f_E\left(\left((2^2 * 1) * (1 * 2)\right) * 2\right) \cup f_E(2)$$
$$= f_E\left(\left(\left(2 * (2 * 1)\right) * (1 * 2)\right) * 2\right) \cup f_E(2)$$
$$= f_E\left(\left((2 * 2) * 2\right) * 2\right) \cup f_E(2)$$
$$= f_E\big((0 * 2) * 2\big) \cup f_E(2)$$
$$= f_E(2 * 2) \cup f_E(2)$$
$$= f_E(0) \cup f_E(2)$$
$$= \tau_1 \cup \tau_2$$
$$= \tau_2$$

Karena $f_E(1^2 * 2) = \tau_2$, $f_E\left(\left((2^2 * 1) * (1 * 2)\right) * 2\right) \cup f_E(2) = \tau_2$ dan $\tau_2 \subseteq \tau_2$, maka $\left(f_E(1^2 * 2) \subseteq f_E\left(\left((2^2 * 1) * (1 * 2)\right) * 2\right) \cup f_E(2)\right)$

Untuk $x = 2, y = 2, z = 0$

$$f_E(2^2 * 2) = f_E\big(2 * (2 * 2)\big)$$
$$= f_E(2 * 0)$$
$$= f_E(2)$$
$$= \tau_2$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$f_E\left(\left((2^2 * 2) * (2 * 2)\right) * 0\right) \cup f_E(0)$

$= f_E\left(\left(\left(2 * (2 * 2)\right) * (2 * 2)\right) * 0\right) \cup f_E(0)$

$= f_E\left(\left((2 * 0) * 0\right) * 0\right) \cup f_E(0)$

$= f_E\left((2 * 0) * 0\right) \cup f_E(0)$

$= f_E(2 * 0) \cup f_E(0)$

$= f_E(2) \cup f_E(0)$

$= \tau_2 \cup \tau_1$

$= \tau_2$

Karena $f_E(2^2 * 2) = \tau_2$, $f_E\left(\left((2^2 * 2) * (2 * 2)\right) * 0\right) \cup f_E(0) = \tau_2$ dan $\tau_2 \subseteq \tau_2$, maka $\left(f_E(2^2 * 2) \subseteq f_E\left(\left((2^2 * 2) * (2 * 2)\right) * 0\right) \cup f_E(0)\right)$

Untuk $x = 2, y = 2, z = 1$

$f_E(2^2 * 2) = f_E\left(2 * (2 * 2)\right)$

$= f_E(2 * 0)$

$= f_E(2)$

$= \tau_2$

$f_E\left(\left((2^2 * 2) * (2 * 2)\right) * 1\right) \cup f_E(1)$

$= f_E\left(\left(\left(2 * (2 * 2)\right) * (2 * 2)\right) * 1\right) \cup f_E(1)$

$= f_E\left(\left((2 * 0) * 0\right) * 1\right) \cup f_E(1)$

$= f_E\left((2 * 0) * 1\right) \cup f_E(1)$

$= f_E(2 * 1) \cup f_E(1)$

$= f_E(2) \cup f_E(1)$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$= \tau_2 \cup \tau_1$

$= \tau_2$

Karena $f_E(2^2 * 2) = \tau_2$, $f_E\left(\left((2^2 * 2) * (2 * 2)\right) * 1\right) \cup f_E(1) = \tau_2$ dan

$\tau_2 \subseteq \tau_2$, maka $\left(f_E(2^2 * 2) \subseteq f_E\left(\left((2^2 * 2) * (2 * 2)\right) * 1\right) \cup f_E(1)\right)$

Untuk $x = 2, y = 2, z = 2$

$f_E(2^2 * 2) = f_E\left(2 * (2 * 2)\right)$

$= f_E(2 * 0)$

$= f_E(2)$

$= \tau_2$

$f_E\left(\left((2^2 * 2) * (2 * 2)\right) * 2\right) \cup f_E(2)$

$= f_E\left(\left(\left(2 * (2 * 2)\right) * (2 * 2)\right) * 2\right) \cup f_E(2)$

$= f_E\left(\left((2 * 0) * 0\right) * 2\right) \cup f_E(2)$

$= f_E\left((2 * 0) * 2\right) \cup f_E(2)$

$= f_E(2 * 2) \cup f_E(2)$

$= f_E(0) \cup f_E(2)$

$= \tau_1 \cup \tau_2$

$= \tau_2$

Karena $f_E(2^2 * 2) = \tau_2$, $f_E\left(\left((2^2 * 2) * (2 * 2)\right) * 2\right) \cup f_E(2) = \tau_2$ dan

$\tau_2 \subseteq \tau_2$, maka $\left(f_E(2^2 * 2) \subseteq f_E\left(\left((2^2 * 2) * (2 * 2)\right) * 2\right) \cup f_E(2)\right)$

Karena persamaan (2.16) dan (2.17) terpenuhi untuk F_E, maka F_E adalah *U-soft sub-implicative ideal* atas U.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.12 Konsep Himpunan dalam Al-Quran

Himpunan adalah salah satu istilah dasar yang dipelajari dalam matematika, terutama pada bidang aljabar. Abdussakir (2009) menyebutkan bahwa Himpunan (*set*) didefinisikan sebagai kumpulan atau koleksi objek-objek yang terdefinisi dengan jelas (*well defined*). Benda atau objek yang termasuk di dalam himpunan disebut anggota himpunan.

Konsep himpunan juga dijelaskan dalam al-Quran surat al-An’am ayat 141, yaitu:

وَهُوَ ٱلَّذِىٓ أَنشَأَ جَنَّـٰتٍ مَّعْرُوشَـٰتٍ وَغَيْرَ مَعْرُوشَـٰتٍ وَٱلنَّخْلَ وَٱلزَّرْعَ مُخْتَلِفًا أُكُلُهُۥ
وَٱلزَّيْتُونَ وَٱلرُّمَّانَ مُتَشَـٰبِهًا وَغَيْرَ مُتَشَـٰبِهٍ ۚ كُلُوا۟ مِن ثَمَرِهِۦٓ إِذَآ أَثْمَرَ وَءَاتُوا۟ حَقَّهُۥ
يَوْمَ حَصَادِهِۦ ۖ وَلَا تُسْرِفُوٓا۟ ۚ إِنَّهُۥ لَا يُحِبُّ ٱلْمُسْرِفِينَ ﴿١٤١﴾

Artinya: *“Dan Dialah yang menciptakan kebun-kebun yang berjunjung dan yang tidak berjunjung, pohon kurma, tanam-tanaman yang bermacam-macam buahnya, zaitun dan delima yang serupa dan tidak serupa. Makanlah dari buahnya ketika ia berbuah, dan tunaikanlah haknya pada hari panennya. Dan janganlah kamu berlebih-lebihan, karena sesungguhnya Allah tidak menyukai orang-orang yang berlebih-lebihan”* (QS. Al-An’am (6):141).

Menurut Tafsir Jalalayn makna dari ayat tersebut adalah:

(Dan Dialah yang menumbuhkan) menciptakan (surga-surga) maksudnya kebun-kebun (yang berjunjung) maksudnya yang membentang di atas tanah, seperti semangka (dan yang tidak berjunjung) maksudnya batangnya menjulang ke atas, seperti kurma (dan) menciptakan (pohon kurma dan tanaman-tanaman yang bermacam-macam makanannya) maksudnya bermacam-macam buah dan bijinya dalam hal bentuk dan rasanya (zaitun dan delima yang serupa) daunnya, sehingga *haal* (dan tidak serupa) rasanya (makanlah dari buahnya ketika ia

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

berbuah) sebelum matang, (dan tunaikanlah haknya) yakni zakatnya (pada hari panennya). Dibaca dengan *fathah* dan *kasrah*, yaitu sebesar 10% atau 5% (dan janganlah kamu berlebih-lebihan) dengan memberikan seluruhnya sehingga tidak ada yang tersisa untuk keluargamu, (karena sesungguhnya Allah tidak menyukai orang-orang yang berlebih-lebihan) melampaui batas yang telah ditentukan bagi mereka.

Berdasarkan tafsir tersebut dapat disimpulkan bahwa tumbuhan di bumi dapat diklasifikasikan menjadi beberapa kelompok, berdasarkan dengan ciri-ciri tertentu, yaitu:

1. Kelompok tumbuhan yang batangnya menjalar di tanah,
2. Kelompok tumbuhan yang batangnya berdiri tegak di atas tanah,
3. Kelompok tumbuhan yang berbuah,
4. Kelompok tumbuhan yang tidak berbuah.

Indonesia sebagai negara terbesar di dunia dikenal memiliki potensi kekayaan alam yang luar biasa, dengan adanya pengelompokan tumbuhan maka manusia dapat memanfaatkan potensi yang dimiliki tumbuhan tersebut. Manusia bisa membandingkan atau memisahkan tumbuhan yang bermanfaat dan tidak bermanfaat. Dalam manfaatnya tumbuhan dapat dijadikan bahan bangunan, pangan, sandang dan obat-obatan. Oleh karena itu penting untuk mengenal pengelompokan tumbuhan. Dalam kehidupan sosial tentu saja tumbuhan sangat bermanfaat bagi manusia terutama yang mata pencahariannya berdagang, karena bagian-bagian tumbuhan dapat diperjualbelikan.

Jika di dalam al-Quran terdapat pengelompokan objek-objek dengan ciri-ciri tertentu maka di dalam matematika juga demikian, terdapat himpunan yang

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

dapat dinyatakan berdasarkan ciri-ciri anggota himpunan tersebut, salah satunya adalah himpunan aljabar BCI.

Aljabar BCI adalah salah satu himpunan yang anggota himpunannya harus memenuhi suatu kondisi atau ciri. Definisi Aljabar BCI adalah suatu himpunan tak kosong X dengan $*$ sebagai operasi biner dan konstanta 0 sebagai elemen identitas terhadap operasi $*$, secara matematis ditulis $(X, *, 0)$ yang memenuhi kondisi berikut:

a. $\big((x * y) * (x * z)\big) * (z * y) = 0,$

b. $\big(x * (x * y)\big) * y = 0,$

c. $x * x = 0,$

d. $x * y = 0$ dan $y * x = 0$ maka $x = y,$

untuk setiap $x, y, z \in X.$

Dengan demikian dapat dikatakan bahwa di dalam al-Quran juga terdapat konsep yang menyerupai konsep himpunan di dalam matematika dan aljabar BCI merupakan salah satu dari himpunan tersebut.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab II telah dijelaskan bahwa, struktur aljabar merupakan himpunan yang tidak kosong dengan paling sedikit satu atau lebih operasi biner dan aksioma-aksioma yang berlaku (Kamil, 2016). Untuk mempelajari struktur aljabar, paling dasar yang harus dipahami adalah himpunan. Salah satu yang termasuk himpunan adalah aljabar BCI.

Pada pembahasan aljabar BCI, terdapat beberapa istilah yang harus dipelajari, seperti sub-aljabar, ideal pada aljabar BCI dan himpunan halus pada aljabar BCI. Misalkan U adalah himpunan semesta awal dan E adalah himpunan parameter. Jika x adalah elemen dari E maka pasangan dari $\left(x\,, f_A(x)\right)$ disebut himpunan halus atas U jika f_A adalah pemetaan dari E ke koleksi semua sub-himpunan dari U.

Pemahaman mengenai himpunan halus adalah awal untuk memahami tentang ideal halus pada aljabar BCI dan ideal sub-implikatif halus pada aljabar BCI. Di bawah ini penulis menjelaskan tentang teorema, dalil dan contoh dari gabungan ideal sub-implikatif halus pada aljabar BCI yang merupakan inti dari penelitian ini.

3.1 Sifat-sifat Gabungan Ideal Sub-implikatif Halus

Berdasarkan definisi gabungan ideal sub-implikatif halus yang telah dibahas pada bab II, kemudian dibuktikan beberapa teorema yang merupakan sifat-sifat dari gabungan ideal sub-implikatif halus. Teorema-teorema tersebut

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

adalah sebagai berikut:

Teorema 1

Misalkan $(U, E) = (U, X)$ dengan X adalah aljabar BCI, maka setiap *U-soft sub-implicative ideal* adalah *U-soft ideal* (Ahn, dkk, 2017:160).

Bukti:

Misalkan F_A adalah *U-soft sub-implicative ideal* atas U. Berdasarkan persamaan (2.17) $\forall\, x, y, z \in E$ dan $y = x$ maka berlaku

$f_A(x^2 * x) \subseteq f_A\Big(\big((x^2 * x) * (x * x)\big) * z\Big) \cup f_A(z)$

$f_A(x) = f_A(x * 0)$

$= f_A\big(x * (x * x)\big)$ (Definisi aljabar BCI)

$= f_A(x^2 * x)$ (Definisi $x^n * y$)

$f_A\Big(\big((x^2 * x) * (x * x)\big) * z\Big) \cup f_A(z)$

$= f_A\Big(\Big(\big(x * (x * x)\big) * (x * x)\Big) * z\Big) \cup f_A(z)$ (Definisi $x^n * y$)

$= f_A\Big(\big((x * 0) * 0\big) * z\Big) \cup f_A(z)$ (Definisi aljabar BCI)

$= f_A\big((x * 0) * z\big) \cup f_A(z)$ (Sifat aljabar BCI b1)

$= f_A(x * z) \cup f_A(z)$ (Sifat aljabar BCI b1)

Karena $f_A(x) = f_A(x^2 * x)$ dan

$f_A\Big(\big((x^2 * x) * (x * x)\big) * z\Big) \cup f_A(z) = f_A(x * z) \cup f_A(z)$ maka

$f_A(x^2 * x) \subseteq f_A\Big(\big((x^2 * x) * (x * x)\big) * z\Big) \cup f_A(z) =$

$f_A(x) \subseteq f_A(x * z) \cup f_A(z)$

Artinya untuk semua $x, z \in A$ maka $f_A(x) \subseteq f_A(x * z) \cup f_A(z)$ sehingga dapat dikatakan bahwa f_A adalah *U-soft ideal* atas U.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Di bawah ini penulis memberikan contoh bahwa kebalikan teorema belum tentu benar. Artinya *U-soft ideal* belum tentu *U-soft sub-implicative ideal*.

Contoh 1

Misalkan $(U,E)=(U,X)$ dengan $X=\{0,a,b,c\}$ adalah aljabar BCI dan operasi $*$ didefinisikan mengikuti Tabel 3.1:

Tabel 3.1 Definisi Operasi $*$ pada $X=\{0,a,b,c\}$

$*$	0	a	b	c
0	0	0	0	c
a	a	0	0	c
b	b	b	0	c
c	c	c	c	0

(Ahn, dkk, 2017:160)

Misalkan τ_1 dan τ_2 adalah subset dari U sedemikian sehingga $\tau_1 \subseteq \tau_2$. Didefinisikan suatu himpunan halus F_E atas U sebagai berikut:

$F_E=\{(0,\tau_1),(a,\tau_2),(b,\tau_2),(c,\tau_2)\}$

Berdasarkan (2.6) akan ditunjukkan $(\forall x \in E)(f_E(0) \subseteq f_E(x)$, perlu diingat $f_E(0)=\tau_1$

Untuk $x=0$,

$f_E(x)=f_E(0)=\tau_1$, karena $f_E(0)=\tau_1$ dan $\tau_1 \subseteq \tau_1$, maka $f_E(0) \subseteq f_E(x)$

Untuk $x=a$,

$f_E(x)=f_E(a)=\tau_2$, karena $f_E(0)=\tau_1$ dan $\tau_1 \subseteq \tau_2$, maka $f_E(0) \subseteq f_E(x)$

Untuk $x=b$,

$f_E(x)=f_E(b)=\tau_2$, karena $f_E(0)=\tau_1$ dan $\tau_1 \subseteq \tau_2$ maka $f_E(0) \subseteq f_E(x)$

Untuk $x=c$,

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$f_E(x) = f_E(c) = \tau_2$, karena $f_E(0) = \tau_1$ dan $\tau_1 \subseteq \tau_2$ maka $f_E(0) \subseteq f_E(x)$.

Berdasarkan (2.7) akan ditunjukkan $(\forall x, y \in E)\big(f_A(x) \subseteq f_A(x * y) \cup f_A(y)\big)$ maka:

Untuk $x = 0\,, y = 0$

$f_E(0) = \tau_1$

$$
\begin{aligned}
f_E(0 * 0) \cup f_E(0) &= f_E(0) \cup f_E(0) \\
&= \tau_1 \cup \tau_1 \\
&= \tau_1
\end{aligned}
$$

Karena $f_E(0) = \tau_{1,}$ $f_E(0 * 0) \cup f_E(0) = \tau_1$ dan $\tau_1 \subseteq \tau_2$ maka $f_A(0) \subseteq f_A(0 * a) \cup f_A(a)$.

Untuk $x = 0\,, y = a$

$f_E(0) = \tau_1$

$$
\begin{aligned}
f_E(0 * a) \cup f_E(a) &= f_E(0) \cup f_E(a) \\
&= \tau_1 \cup \tau_2 \\
&= \tau_2
\end{aligned}
$$

Karena $f_E(0) = \tau_1$, $f_E(0 * a) \cup f_E(a)$ dan $\tau_1 \subseteq \tau_2$ maka $f_A(0) \subseteq f_A(0 * a) \cup f_A(a)$.

Untuk $x = 0\,, y = b$

$f_E(0) = \tau_1$

$$
\begin{aligned}
f_E(0 * b) \cup f_E(b) &= f_E(0) \cup f_E(b) \\
&= \tau_1 \cup \tau_2 \\
&= \tau_2
\end{aligned}
$$

Karena $f_E(0) = \tau_1$ $f_E(0 * b) \cup f_E(b) = \tau_2$ dan $\tau_1 \subseteq \tau_2$ maka $f_A(0) \subseteq f_A(0 * b) \cup f_A(b)$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Untuk $x = 0 , y = c$

$f_A(0) = \tau_1$

$f_E(0 * c) \cup f_E(c) = f_E(0) \cup f_E(c)$

$= \tau_1 \cup \tau_2$

$= \tau_2$

Karena $f_E(0) = \tau_1$ $f_E(0 * c) \cup f_E(c) = \tau_2$ dan $\tau_1 \subseteq \tau_2$ maka

$f_A(0) \subseteq f_A(0 * c) \cup f_A(c)$

Untuk $x = a , y = 0$

$f_E(a) = \tau_2$

$f_E(a * 0) \cup f_E(0) = f_E(a) \cup f_E(0)$

$= \tau_2 \cup \tau_1$

$= \tau_2$

Karena $f_E(a) = \tau_2$ $f_E(a * 0) \cup f_E(0) = \tau_2$ dan $\tau_2 \subseteq \tau_2$ maka

$f_A(a) \subseteq f_A(a * 0) \cup f_A(0)$

Untuk $x = a , y = b$

$f_E(a) = \tau_2$

$f_E(a * b) \cup f_E(b) = f_E(0) \cup f_E(b)$

$= \tau_1 \cup \tau_2$

$= \tau_2$

Karena $f_E(a) = \tau_2$ $f_E(a * b) \cup f_E(b) = \tau_2$ dan $\tau_2 \subseteq \tau_2$ maka

$f_A(a) \subseteq f_A(a * b) \cup f_A(b)$

Untuk $x = a , y = c$

$f_E(a) = \tau_2$

$f_E(a * c) \cup f_E(c) = f_E(c) \cup f_E(c)$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$= \tau_2 \cup \tau_2$

$= \tau_2$

Karena $f_E(a) = \tau_2$ $f_E(a * c) \cup f_E(c) = \tau_2$ dan $\tau_2 \subseteq \tau_2$ maka

$f_A(a) \subseteq f_A(a * c) \cup f_A(c)$

Untuk $x = b , y = 0$

$f_E(b) = \tau_2$

$f_E(b * 0) \cup f_E(0) = f_E(b) \cup f_E(0)$

$= \tau_2 \cup \tau_1$

$= \tau_2$

Karena $f_E(b) = \tau_2$ $f_E(b * 0) \cup f_E(0) = \tau_2$ dan $\tau_2 \subseteq \tau_2$ maka

$f_A(b) \subseteq f_A(b * 0) \cup f_A(0)$

Untuk $x = b , y = a$

$f_E(b) = \tau_2$

$f_E(b * a) \cup f_E(a) = f_E(b) \cup f_E(a)$

$= \tau_2 \cup \tau_2$

$= \tau_2$

Karena $f_E(b) = \tau_2$ $f_E(b * a) \cup f_E(a) = \tau_2$ dan $\tau_2 \subseteq \tau_2$ maka

$f_A(b) \subseteq f_A(b * a) \cup f_A(a)$

Untuk $x = b , y = c$

$f_E(b) = \tau_2$

$f_E(b * c) \cup f_E(c) = f_E(c) \cup f_E(c)$

$= \tau_2 \cup \tau_2$

$= \tau_2$

Karena $f_E(b) = \tau_2$, $f_E(b * c) \cup f_E(c) = \tau_2$, dan $\tau_2 \subseteq \tau_2$ maka

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$f_A(b) \subseteq f_A(b * c) \cup f_A(c)$

Untuk $x = c\,, y = 0$

$f_E(c) = \tau_2$

$f_E(c * 0) \cup f_E(0) \; = f_E(c) \cup f_E(0)$

$= \tau_2 \cup \tau_1$

$= \tau_2$

Karena $f_E(c) = \tau_2$, $f_E(c * 0) \cup f_E(0) = \tau_2$ dan $\tau_2 \subseteq \tau_2$ maka $f_A(c) \subseteq f_A(c * 0) \cup f_A(0)$.

Untuk $x = c\,, y = a$

$f_E(c) = \tau_2$

$f_E(c * a) \cup f_E(a) \; = f_E(c) \cup f_E(a)$

$= \tau_2 \cup \tau_2$

$= \tau_2$

Karena $f_E(c) = \tau_2$, $f_E(c * a) \cup f_E(a) = \tau_2$ dan $\tau_2 \subseteq \tau_2$ maka $f_A(c) \subseteq f_A(c * a) \cup f_A(a)$.

Untuk $x = c\,, y = b$

$f_E(c) = \tau_2$

$f_E(c * b) \cup f_E(b) \; = f_E(c) \cup f_E(b)$

$= \tau_2 \cup \tau_2$

$= \tau_2$

Karena $f_E(c) = \tau_2$, $f_E(c * b) \cup f_E(b) = \tau_2$ dan $\tau_2 \subseteq \tau_2$ maka $f_A(c) \subseteq f_A(c * b) \cup f_A(b)$.

Untuk $x = c\,, y = c$

$f_E(c) = \tau_2$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$f_E(c * c) \cup f_E(c) = f_E(0) \cup f_E(b)$

$= \tau_1 \cup \tau_2$

$= \tau_2$

Karena $f_E(c) = \tau_2$, $f_E(c * c) \cup f_E(c) = \tau_2$ dan $\tau_2 \subseteq \tau_2$ maka $f_A(c) \subseteq f_E(c * c) \cup f_E(c)$.

Dengan demikian persamaan (2.16) dan (2.17) terpenuhi untuk F_E, maka terbukti bahwa F_E adalah *U-soft ideal* atas U. Tetapi F_E bukan *U-soft sub-implicative ideal* atas U karena berdasarkan (2.17) untuk $x = b, y = a, z = 0$ diperoleh:

$f_E(a^2 * b) \nsubseteq f\left(\left((b^2 * a) * (a * b)\right) * 0\right) \cup f_E(0)$

$f_E(a^2 * b) = f_E\left(a * (a * b)\right)$

$= f_E(a * 0)$

$= f_E(a)$

$= \tau_2$

$f_E\left(\left((b^2 * a) * (a * b)\right) * 0\right) \cup f_E(0)$

$= f_E\left(\left(\left(b * (b * a)\right) * (a * b)\right) * 0\right) \cup f_E(0)$

$= f_E\left(\left((b * b) * 0\right) * 0\right) \cup f_E(0)$

$= f_E\left((0 * 0) * 0\right) \cup f_E(0)$

$= f_E(0 * 0) \cup f_E(0)$

$= f_E(0) \cup f_E(0)$

$= \tau_1 \cup \tau_1$

$= \tau_1$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Karena $f_E(a^2 * b) = \tau_2$, $f_E\left(\left((b^2 * a) * (a * b)\right) * 0\right) \cup f_E(0) = \tau_1$

dan $\tau_2 \nsubseteq \tau_1$ maka $f_E(a^2 * b) \nsubseteq f_E\left(\left(\left((b^2 * a) * (a * b)\right) * 0\right) \cup f_E(0)\right)$

tidak sesuai dengan persamaan (2.17) yaitu $(\forall x, y, z \in E)$

$\left(f_E(y^2 * x) \subseteq f_E\left(\left((x^2 * y) * (y * x)\right) * z\right) \cup f_E(z)\right)$, Jadi F_E bukan *U-soft sub-implicative ideal* atas U.

Dalil 1

Misalkan $(U, E) = (U, X)$ dengan X adalah aljabar BCI. A adalah sub-aljabar dari E. Misalkan $F_A \in S(U)$ jika F_A adalah *U-soft sub-implicative ideal* atas U, maka fungsi aproksimasi f_A dari F_A memenuhi kondisi berikut:

$$(\forall x , y \in A)\left(f_A(y^2 * x) \subseteq f_A\left((x^2 * y) * (y * x)\right)\right) \tag{3.1}$$

(Ahn, dkk, 2017:161)

Bukti:

Misalkan F_A adalah *U-soft sub-implicative ideal* atas U. Berdasarkan (2.17) berlaku: $(\forall x, y, z \in A)\left(f_A(y^2 * x) \subseteq \left(\left((x^2 * y) * (y * x)\right) * z\right) \cup f_A(z)\right)$.

Misalkan $z = 0$ maka $(\forall x, y, 0 \in A)$ berlaku:

$f_A(y^2 * x) \subseteq f_A\left(\left((x^2 * y) * (y * x)\right) * 0\right) \cup f_A(0)$

$\subseteq f_A\left(\left((x^2 * y) * (y * x)\right) \cup f_A(0)\right)$ (Sifat Aljabar BCI b1)

$f_A(y^2 * x) \subseteq f_A\left(\left((x^2 * y) * (y * x)\right) \cup f_A(0)\right)$ (Berdasarkan 2.16)

$= f_A\left((x^2 * y) * (y * x)\right)$

sehingga $\forall x, y \in A$ berlaku $f_A(y^2 * x) \subseteq f_A\left((x^2 * y) * (y * x)\right)$.

Berikut ini penulis akan memberikan contoh *U-soft sub-implicative ideal*

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

yang memenuhi dalil 1 yang telah disebutkan sebelumnya.

Contoh 2

Misal $(U, E) = (U, X)$ dengan $X = \{0, 1, 2\}$ adalah aljabar BCI dan operasi $*$ didefinisikan mengikuti Tabel 3.2:

Tabel 3.2 Definisi Operasi $*$ pada $X = \{0, 1, 2\}$

$*$	0	1	2
0	0	0	2
1	1	0	2
2	2	2	0

(Ahn, dkk, 2017: 9)

Didefinisikan himpunan halus $F_E = \{(0, \tau_1), (1, \tau_2), (2, \tau_2)\}$ adalah *U-soft sub-implicative ideals* atas U, dengan $\tau_1 \subseteq \tau_2$.

Akan ditunjukkan bahwa f_E memenuhi kondisi

$(\forall x , y \in E)\left(f_E(y^2 * x) \subseteq f_E\big((x^2 * y) * (y * x)\big)\right)$

Jawab:

Untuk $x = 0 , y = 0$

$$\begin{aligned} f_E(0^2 * 0) &= f_E\big(0 * (0 * 0)\big) \\ &= f_E(0 * 0) \\ &= f_E(0) \\ &= \tau_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_E\big((0^2 * 0) * (0 * 0)\big) &= f_E\left(\big(0 * (0 * 0)\big) * 0\right) \\ &= f_E\big((0 * 0) * 0\big) \\ &= f_E(0 * 0) \end{aligned}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$= f_E(0)$

$= \tau_1$

Karena $f_E(0^2 * 0) = \tau_1$, $f_E\big((0^2 * 0) * (0 * 0)\big) = \tau_1$ dan $\tau_1 \subseteq \tau_1$ maka $f_E(0^2 * 0) \subseteq f_E\big((0^2 * 0) * (0 * 0)\big)$

Untuk $x = 0, y = 1$

$f_E(1^2 * 0) = f_E\big(1 * (1 * 0)\big)$

$= f_E(1 * 1)$

$= f_E(0)$

$= \tau_1$

$f_E\big((0^2 * 1) * (1 * 0)\big) = f_E\Big(\big(0 * (0 * 1)\big) * 1\Big)$

$= f_E\big((0 * 0) * 1\big)$

$= f_E(0 * 1)$

$= f_E(0)$

$= \tau_1$

Karena $f_E(1^2 * 0) = \tau_1$, $f_E\big((0^2 * 1) * (1 * 0)\big) = \tau_1$ dan $\tau_1 \subseteq \tau_1$ maka $f_E(1^2 * 0) \subseteq f_E\big((0^2 * 1) * (1 * 0)\big)$

Untuk $x = 0, y = 2$

$f_E(2^2 * 0) = f_E\big(2 * (2 * 0)\big)$

$= f_E(2 * 2)$

$= f_E(0)$

$= \tau_1$

$f_E\big((0^2 * 2) * (2 * 0)\big) = f_E\Big(\big(0 * (0 * 2)\big) * 2\Big)$

$= f_E\big((0 * 2) * 2\big)$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$= f_E(2 * 2)$

$= f_E(0)$

$= \tau_1$

Karena $f_E(2^2 * 0) = \tau_1$, $f_E\big((0^2 * 2) * (2 * 0)\big) = \tau_1$ dan $\tau_1 \subseteq \tau_1$ maka $f_E(2^2 * 0) \subseteq f_E\big((0^2 * 2) * (2 * 0)\big)$

Untuk $x = 1, y = 0$

$f_E(0^2 * 1) = f_E\big(0 * (0 * 1)\big)$

$= f_E(0 * 0)$

$= f_E(0)$

$= \tau_1$

$f_E\big((1^2 * 0) * (0 * 1)\big) = f_E\left(\big(1 * (1 * 0)\big) * 0\right)$

$= f_E\big((1 * 1) * 0\big)$

$= f_E(0 * 0)$

$= f_E(0)$

$= \tau_1$

Karena $f_E(0^2 * 1) = \tau_1$, $f_E\big((1^2 * 0) * (0 * 1)\big) = \tau_1$ dan $\tau_1 \subseteq \tau_1$ maka $f_E(0^2 * 1) \subseteq f_E\big((1^2 * 0) * (0 * 1)\big)$

Untuk $x = 1, y = 1$

$f_E(1^2 * 1) = f_E\big(1 * (1 * 1)\big)$

$= f_E(1 * 0)$

$= f_E(1)$

$= \tau_2$

$f_E\big((1^2 * 1) * (1 * 1)\big) = f_E\left(\big(1 * (1 * 1)\big) * 0\right)$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$= f_E\big((1 * 0) * 0\big)$

$= f_E(1 * 0)$

$= f_E(1)$

$= \tau_2$

Karena $f_E(1^2 * 1) = \tau_2,$ $f_E\big((1^2 * 1) * (1 * 1)\big) = \tau_2$ dan $\tau_2 \subseteq \tau_2$ maka $f_E(1^2 * 1) \subseteq f_E\big((1^2 * 1) * (1 * 1)\big)$

Untuk $x = 1 , y = 2$

$f_E(2^2 * 1) = f_E\big(2 * (2 * 1)\big)$

$= f_E(2 * 2)$

$= f_E(0)$

$= \tau_1$

$f_E\big((1^2 * 2) * (2 * 1)\big) = f_E\Big(\big(1 * (1 * 2)\big) * 2\Big)$

$= f_E\big((1 * 2) * 2\big)$

$= f_E(2 * 2)$

$= f_E(0)$

$= \tau_1$

Karena $f_E(2^2 * 1) = \tau_{1,}$ $f_E\big((1^2 * 2) * (2 * 1)\big) = \tau_1$ dan $\tau_1 \subseteq \tau_1$ maka $f_E(2^2 * 1) \subseteq f_E\big((1^2 * 2) * (2 * 1)\big)$

Untuk $x = 2 , y = 0$

$f_E(0^2 * 2) = f_E\big(0 * (0 * 2)\big)$

$= f_E(0 * 2)$

$= f_E(2)$

$= \tau_2$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$f_E\left((2^2 * 0) * (0 * 2)\right) = f_E\left(\left(2 * (2 * 0)\right) * 2\right)$$

$$= f_E\left((2 * 2) * 2\right)$$

$$= f_E(0 * 2)$$

$$= f_E(2)$$

$$= \tau_2$$

Karena $f_E(0^2 * 2) = \tau_2$, $f_E\left((2^2 * 0) * (0 * 2)\right) = \tau_2$ dan $\tau_2 \subseteq \tau_2$ maka $f_E(0^2 * 2) \subseteq f_E\left((2^2 * 0) * (0 * 2)\right)$

Untuk $x = 2, y = 1$

$$f_E(1^2 * 2) = f_E\left(1 * (1 * 2)\right)$$

$$= f_E(1 * 2)$$

$$= f_E(2)$$

$$= \tau_2$$

$$f_E\left((2^2 * 1) * (1 * 2)\right) = f_E\left(\left(2 * (2 * 1)\right) * 2\right)$$

$$= f_E\left((2 * 2) * 2\right)$$

$$= f_E(0 * 2)$$

$$= f_E(2)$$

$$= \tau_2$$

Karena $f_E(1^2 * 2) = \tau_2$, $f_E\left((2^2 * 1) * (1 * 2)\right) = \tau_2$ dan $\tau_2 \subseteq \tau_2$ maka $f_E(1^2 * 2) \subseteq f_E\left((2^2 * 1) * (1 * 2)\right)$

Untuk $x = 2, y = 2$

$$f_E(2^2 * 2) = f_E\left(2 * (2 * 2)\right)$$

$$= f_E(2 * 0)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= f_E(2)$$

$$= \tau_2$$

$$f_E\big((2^2 * 2) * (2 * 2)\big) = f_E\Big(\big(2 * (2 * 2)\big) * 0\Big)$$

$$= f_E\big((2 * 0) * 0\big)$$

$$= f_E(2 * 0)$$

$$= f_E(2)$$

$$= \tau_2$$

Karena $f_E(2^2 * 2) = \tau_2$, $f_E\big((2^2 * 2) * (2 * 2)\big) = \tau_2$ dan $\tau_2 \subseteq \tau_2$ maka $f_E(2^2 * 2) \subseteq f_E\big((2^2 * 2) * (2 * 2)\big)$

Dengan demikian F_E adalah *U-soft sub-implicative ideal* atas U, dan fungsi aproksimasi f_E memenuhi kondisi $f_E(y^2 * x) \subseteq f_E\big((x^2 * y) * (y * x)\big)$ untuk setiap $x, y \in E$.

Teorema 2

Misalkan $(U, E) = (U, X)$ dengan X adalah aljabar BCI. A adalah sub-aljabar dari E, misalkan $F_A \in S(U)$. Jika F_A adalah *U-soft ideal* atas U memenuhi kondisi (3.1), maka F_A adalah *U-soft sub-implicative ideal* atas U (Ahn, dkk, 2017:161).

Bukti:

Misalkan F_A adalah *U-soft ideal* yang memenuhi (3.1) maka $\forall x, y \in A$ fungsi aproksimasi f_A dari F_A memenuhi kondisi berikut:

$$f_A(y^2 * x) \subseteq f_A\big((x^2 * y) * (y * x)\big)$$

$$\subseteq f_A\Big(\big((x^2 * y) * (y * x)\big) * 0\Big) \qquad \text{(Sifat aljabar BCI b1)}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Berdasarkan (2.6) $f_A(0) \subseteq f(x)$ maka $f_A(0) \subseteq f_A\left(\left((x^2 * y) * (y * x)\right) * 0\right)$

sehingga

$f_A(y^2 * x) \subseteq f_A\left(\left((x^2 * y) * (y * x)\right) * 0\right)$

$$= f_A\left(\left((x^2 * y) * (y * x)\right) * 0\right) \cup f_A(0)$$

Misalkan $z = 0$ maka berlaku

$f_A(y^2 * x) \subseteq f_A\left(\left((x^2 * y) * (y * x)\right) * z\right) \cup f_A(z)$ dengan $x, y, z \in A$.

Berikut ini penulis memberikan contoh kebalikan dari teorema 2 yang telah dibuktikan sebelumnya, bahwa *U-soft ideal* yang tidak memenuhi kondisi (3.1) bukan *U-soft sub-implicative ideal*.

Contoh 3

Misalkan $(U, E) = (U, X)$ dengan $X = \{0, a, b, c\}$ adalah aljabar BCI dan operasi $*$ didefinisikan mengikui Tabel 3.3:

Tabel 3.3 Definisi Operasi $*$ pada $X = \{0, a, b, c\}$

$*$	0	a	b	c
0	0	0	0	c
a	a	0	0	c
b	b	b	0	c
c	c	c	c	0

(Ahn, dkk, 2017: 160)

Didefinisikan himpunan halus $F_E = \{(0, \tau_1), (a, \tau_2), (b, \tau_2), (c, \tau_2)\}$.

Berdasarkan contoh 1, F_E adalah *U-soft ideal*.

Pertama, akan ditunjukkan bahwa fungsi aproksimasi f_E memenuhi kondisi $f_E(y^2 * x) \subseteq f_E\left((x^2 * y) * (y * x)\right)$ untuk setiap $x, y \in E$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Untuk $x = b\,, y = a$

$f_E(a^2 * b) \ = f_E\big(a * (a * b)\big)$

$= f_E(a * 0)$

$= f_E(a)$

$= \tau_2$

$f_E\big((b^2 * a) * (a * b)\big) \ = f_E\left(\big(b * (b * a)\big) * 0\right)$

$= f_E\big((b * b) * 0\big)$

$= f_E(0 * 0)$

$= f_E(0)$

$= \tau_1$

Karena $f_E(a^2 * b) = \tau_2$ dan $f_E\big((b^2 * a) * (a * b)\big) = \tau_1$ maka $f_E(a^2 * b) \nsubseteq f_E\big((b^2 * a) * (a * b)\big)$ dengan demikian fungsi aproksimasi f_E tidak memenuhi kondisi $f_E(y^2 * x) \subseteq f_E\big((x^2 * y) * (y * x)\big)$ untuk $x = b$ dan $y = a$.

Kedua, akan ditunjukkan bahwa F_E adalah *U-soft sub-implicative ideal*. Maka fungsi aproksimasi f_E harus memenuhi

$f_E(y^2 * x) \subseteq f_E\left(\big((x^2 * y) * (y * x)\big) * z\right) \cup f_A(z)$ dengan $x, y, z \in E$.

Untuk $x = b, y = a, z = 0$

$f_E(a^2 * b) = f_E\big(a * (a * b)\big)$

$= f_E(a * 0)$

$= f_E(a)$

$= \tau_2$

$f_E\left(\big((b^2 * a) * (a * b)\big) * 0\right) \cup f_E(0)$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$= f_E\left(\left(\left(b * (b * a)\right) * (a * b)\right) * 0\right) \cup f_E(0)$

$= f_E\left(\left((b * b) * 0\right) * 0\right) \cup f_E(0)$

$= f_E\left((0 * 0) * 0\right) \cup f_E(0)$

$= f_E(0 * 0) \cup f_E(0)$

$= f_E(0) \cup f_E(0)$

$= \tau_1 \cup \tau_1$

$= \tau_1$

Karena $f_E(a^2 * b) = \tau_2$ dan $f_E\left(\left((b^2 * a) * (a * b)\right) * 0\right) \cup f_E(0) = \tau_1$ maka $f_E(a^2 * b) \nsubseteq f_E\left(\left(\left((b^2 * a) * (a * b)\right) * 0\right) \cup f_E(0)\right)$, dengan demikian F_E bukan *U-soft sub-implicative ideal*, karena fungsi aproksimasi f_E tidak memenuhi kondisi $f_E(y^2 * x) \subseteq f_E\left(\left((x^2 * y) * (y * x)\right) * z\right) \cup f_A(z)$ untuk $x = b, y = a$ dan $z = 0$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa *U-soft ideal* yang tidak memenuhi kondisi (3.1) bukan *U-soft sub-implicative ideal*.

Teorema 3

Misalkan $(U, E) = (U, X)$ dengan X adalah *p-semisimple* pada aljabar BCI untuk A sub-aljabar dari E. Misalkan $F_A \in S(U)$ maka *U-soft ideal* atas U sama dengan *U-soft sub-implicative ideal* atas U (Ahn, dkk, 2017:161).

Bukti:

Diketahui X adalah *p-semisimple* maka berlaku $0 * (0 * x) = x$ untuk setiap $x \in X$. Sehingga untuk setiap

$$(x, y \in X)\ (x^2 * y) = y \tag{3.2}$$

Menggunakan sifat aljabar BCI:

$\left((x * y) * (x * z)\right) * (z * y) = 0$

$(x * y) * (x * z) = (z * y)$ (3.3)

$x^2 * y = x * (x * y)$ (Definisi $x^n * y$)

$x * (x * y) = (x * 0) * (x * y)$ (Sifat aljabar BCI b1)

$= y * 0$ (Persamaan 3.3)

$= y$ (Sifat aljabar BCI b1)

Asumsikan bahwa F_A adalah *U-soft ideal* atas U maka untuk setiap $x, y, z \in A$ berlaku

$f_A(y^2 * x) = f_A(x)$ (Persamaan 3.2)

$\subseteq f_A(x * z) \cup f_A(z)$ (Definisi *U-soft ideal*)

$= f_A\left((y^2 * x) * z\right) \cup f_A(z)$ (Persamaan 3.2)

$= f_A\left(\left(y * (y * x)\right) * z\right) \cup f_A(z)$ (Definisi $x^n * y$)

$= f_A\left(\left((x^2 * y) * (y * x)\right) * z\right) \cup f_A(z)$ (Persamaan 3.2)

Dengan demikian F_A adalah *U-soft sub-implicative ideal* atas U.

Teorema 4

Misalkan $(U, E) = (U, X)$ dengan X adalah aljabar BCI. Maka setiap *U-soft p-ideal* adalah *U-soft sub-implicative ideal* (Ahn, dkk, 2017: 162).

Bukti:

Misalkan F_A adalah *U-soft p -ideal* atas U, dengan A adalah sub-aljabar dari E. Maka F_A adalah *U-soft ideal* atas U. Fungsi approksimasi f_A memenuhi:

$f_A(y^2 * x) \subseteq f_A\left((y^2 * x) * \left((x^2 * y) * (y * x)\right)\right) \cup f_A\left((x^2 * y) * (y * x)\right)$

$= f_A\left(0 * \left(0 * \left((y^2 * x) * \left((x^2 * y) * (y * x)\right)\right)\right)\right) \cup f_A((x^2 * y)$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$\ast (y \ast x))$ (Persamaan 2.15)

$= f_A\left(\left(0 \ast \left((x^2 \ast y) \ast (y \ast x)\right)\right) \ast \left(0 \ast (y^2 \ast x)\right)\right) \cup f_A((x^2 \ast y)$

$\ast (y \ast x))$ (Sifat-sifat aljabar BCI b8)

$= f_A\left(\left[\left(0 \ast (x^2 \ast y)\right) \ast \left(0 \ast (y \ast x)\right)\right] \ast \left(0 \ast (y^2 \ast x)\right)\right)$

$\cup f_A\left((x^2 \ast y) \ast (y \ast x)\right)$ (Sifat-sifat aljabar BCI b3)

$= f_A\left(\left[\left(0 \ast \left(x \ast (x \ast y)\right)\right) \ast \left(0 \ast (y \ast x)\right)\right] \ast \left(0 \ast \left(y \ast (y \ast x)\right)\right)\right)$

$\cup f_A\left((x^2 \ast y) \ast (y \ast x)\right)$ (Definisi $x^n \ast y$)

$= f_A\left[\left((0 \ast x) \ast \left(0 \ast (x \ast y)\right)\right) \ast \left(0 \ast (y \ast x)\right)\right] \ast (0 \ast (y \ast (y \ast$

$x)) \cup f_A\left((x^2 \ast y) \ast (y \ast x)\right)$ (Sifat-sifat aljabar BCI b3)

$= f_A\left(\left[\left((0 \ast x) \ast \left(0 \ast (x \ast y)\right)\right) \ast \left(0 \ast (y \ast x)\right)\right] \ast \left[(0 \ast y) \ast\right.\right.$

$\left.\left.\left(0 \ast (y \ast x)\right)\right]\right) \cup f_A\left((x^2 \ast y) \ast (y \ast x)\right)$

(Sifat-sifat aljabar BCI b3)

$\leq f_A\left(\left[(0 \ast x) \ast \left(0 \ast (x \ast y)\right)\right] \ast (0 \ast y)\right) \cup f_A((x^2 \ast y) \ast (y \ast x))$

(Sifat-sifat aljabar BCI b6)

$= f_A\left[\left((0 \ast x) \ast (0 \ast y)\right) \ast \left(0 \ast (x \ast y)\right)\right] \cup f_A\left((x^2 \ast y) \ast (y \ast x)\right)$

(Sifat-sifat aljabar BCI b2)

$= f_A\left(\left(0 \ast (x \ast y)\right) \ast \left(0 \ast (x \ast y)\right)\right) \cup f_A\left((x^2 \ast y) \ast (y \ast x)\right)$

(Sifat-sifat aljabar BCI b3)

$= f_A(0) \cup f_A\left((x^2 \ast y) \ast (y \ast x)\right)$ (Sifat-sifat aljabar BCI a3)

$= f_A\left((x^2 \ast y) \ast (y \ast x)\right)$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dengan demikian, berdasarkan persamaan (3.1) F_A adalah *U-soft sub-implicative ideal* atas U.

Berikut ini penulis memberikan contoh bahwa kebalikan dari teorema 4 yang telah dibuktikan sebelumnya belum tentu benar.

Contoh 4

Misalkan $(U,E) = (U,X)$ dengan $X = \{0,1,2\}$ adalah aljabar BCI dan operasi $*$ didefinisikan mengikuti Tabel 3.4:

Tabel 3.4 Definisi Operasi $*$ pada $X = \{0,1,2\}$

$*$	0	1	2
0	0	0	2
1	1	0	2
2	2	2	0

(Ahn, dkk, 2017: 9)

Misalkan τ_1 dan τ_2 adalah himpunan bagian dari U sedemikian sehingga $\tau_1 \subseteq \tau_2$. Didefinisikan himpunan halus F_E atas U sebagai berikut:

$F_E = \{(0,\tau_1),(1,\tau_2),(a,\tau_2)\}$

Berdasarkan penjelasan pada contoh 19, F_E adalah *U-soft sub-implicative ideal*. Maka akan ditunjukkan bahwa F_E adalah *U-soft p-ideal*, sehingga fungsi aproksimasi f_E harus memenuhi

$f_E(x) \subseteq f_E\big((x*z)*(y*z)\big) \cup f_E(y)$ untuk $x, y, z \in E$

Untuk $x = 2, y = 0, z = 2$

$f_E(2) = \tau_2$

$$\begin{aligned} f_E\big((2*0)*(0*2)\big) \cup f_E(0) &= f_E(2*2) \cup f_E(0) \\ &= f_E(0) \cup f_E(2) \end{aligned}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \tau_1 \cup \tau_1$$

$$= \tau_1$$

Karena $f_E(2) = \tau_2$ dan $f_E\big((2 * 0) * (0 * 2)\big) \cup f_E(0) = \tau_1$ maka $f_E(2) \nsubseteq f_E\big((2 * 0) * (0 * 2)\big) \cup f_E(0)$, dengan demikian F_E bukan *U-soft p-ideal* karena fungsi aproksimasi f_E tidak memenuhi $f_E(x) \subseteq f_E\big((x * z) * (y * z)\big) \cup f_E(y)$ untuk $x = 2, y = 0$ dan $z = 2$.

Teorema 5

Misalkan $(U, E) = (U, X)$ dengan X adalah aljabar BCI, diberikan sub-aljabar A dari E. Misalkan $F_A \in S(U)$ maka berikut ini adalah ekuivalen:

i. F_A adalah *U-soft sub-implicative ideal* atas U

ii. Himpunan τ-*exclusive* dari F_A adalah ideal sub-implikatif atas A untuk setiap $\tau \subseteq U$.

(Ahn, dkk, 2017:162).

Bukti:

Dari (i) ke (ii)

Andaikan F_A adalah *U-soft sub-implicative ideal* atas U maka F_A adalah *U-soft ideal* atas U. Menggunakan lemma 3 maka $e(F_A; \tau)$ adalah ideal dari A untuk setiap $\tau \subseteq U$.

Misalkan $\forall\, x, y, z \in A\ \big((x^2 * y) * (y * x)\big) * z \in e(F_A; \tau)$ dan $z \in e(F_A; \tau)$.

Berdasarkan definisi τ-*exclusive* maka

$f_A\Big(\big((x^2 * y) * (y * x)\big) * z\Big) \subseteq \tau$ dan $f_A(z) \subseteq \tau$

$f_A\Big(\big((x^2 * y) * (y * x)\big) * z\Big) \cup f_A(z) \subseteq \tau$

Berdasarkan definisi *U-soft sub-implicative ideal* atas U diperoleh

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$f_A(y^2 * x) \subseteq f_A\left(\left((x^2 * y) * (y * x)\right) * z\right) \cup f_A(z) \subseteq \tau$

$(y^2 * x) \subseteq \left(\left((x^2 * y) * (y * x)\right) * z\right) \cup (z) \in e(F_A; \tau)$

$(y^2 * x) \in e(F_A; \tau)$

Maka $e(F_A; \tau)$ adalah ideal sub-implikatif dari A.

Dari (ii) ke (i)

Andaikan himpunan tak kosong τ-*exclusive* $e(F_A; \tau)$ dari F_A adalah ideal sub-implikatif dari A untuk setiap $\tau \subseteq U$. Karena $e(F_A; \tau)$ adalah ideal sub-implikatif dari A maka $e(F_A; \tau)$ adalah ideal dari A. Dengan lemma 3 maka F_A adalah *U-soft ideal* dari A.

Misalkan $\forall\, x, y \in A$, $f_A\left((x^2 * y) * (y * x)\right) \subseteq \tau$ maka $\left((x^2 * y) * (y * x)\right) \in e(F_A; \tau)$. Berdasarkan teorema 3 pada bab 2 $(y^2 * x) \in e(F_A; \tau)$ Dengan menggunakan teorema 2 $f_A(y^2 * x) \subseteq f_A\left((x^2 * y) * (y * x)\right) \in e(F_A; \tau)$. Dengan demikian F_A adalah *U-soft sub-implicative ideal* atas U.

Ideal sub-implikatif dari $e(F_A; \tau)$ di dalam teorema tersebut disebut ideal sub-implikatif *exclusive* atas F_A.

Teorema 6

Misalkan $(U, E) = (U, X)$ dan $F_A \in S(U)$ dengan X adalah aljabar BCI dan A adalah sub-aljabar dari E. Untuk τ subset U, didefinisikan himpunan halus F_A^* atas U sebagai berikut:

$$f_A^*: E \to P(U), x \;\longmapsto \begin{cases} f_A(x) & \text{jika } x \in e(F_A; \tau) \\ U & \text{untuk lainnya} \end{cases}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Jika F_A adalah *U-soft sub-implicative ideal* atas U maka F_A^* juga *U-soft sub-implicative ideal* atas U. (Ahn, dkk, 2017:163).

Bukti:

Misalkan F_A adalah *U-soft sub-implicative ideal* atas U. Maka $e(F_A;\tau)$ adalah ideal sub-implikatif sehingga ada $0 \in e(F_A;\tau)$ berarti $\forall\, x \in A$

$f_A^*(0) = f_A(0) \subseteq f_A(x) \subseteq f_A^*(x)$ jadi $f_A^*(0) \subseteq f_A^*(x)$.

Untuk setiap $x, y, z \in A$ jika

$\Big(\big((x^2 * y) * (y * x)\big) * z\Big) \in e(F_A;\tau)$ dan $z \in e(F_A;\tau)$ maka

$(y^2 * x) \in e(F_A;\tau)$.

$(y^2 * x) \in e(F_A;\tau)$ berarti

$$\begin{aligned} f_A^*(y^2 * x) &= f_A(y^2 * x) \\ &\subseteq f_A\Big(\big((x^2 * y) * (y * x)\big) * z\Big) \cup f_A(z) \\ &= f_A^*\Big(\big((x^2 * y) * (y * x)\big) * z\Big) \cup f_A^*(z) \end{aligned}$$

Jadi $f_A^*(y^2 * x) \subseteq f_A^*\Big(\big((x^2 * y) * (y * x)\big) * z\Big) \cup f_A^*(z)$

Misalkan $\big((x^2 * y) * (y * x)\big) * z \notin e(F_A;\tau)$ atau $z \notin e(F_A;\tau)$. Maka

$f_A^*\Big(\big((x^2 * y) * (y * x)\big) * z\Big) = U$ atau $f_A^*(z) = U$

$f_A^*\Big(\big((x^2 * y) * (y * x)\big) * z\Big) \cup f_A^*(z) = U$

Karena $f_A^*(x) \subseteq U$ maka

$f_A^*(x) \subseteq U = f_A^*\Big(\big((x^2 * y) * (y * x)\big) * z\Big) \cup f_A^*(z)$

$f_A^*(x) \subseteq f_A^*\Big(\big((x^2 * y) * (y * x)\big) * z\Big) \cup f_A^*(z)$

Dengan demikian F_A^* juga merupakan *U-soft sub-implicative ideal* atas U.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Teorema 7

Misalkan $(U, E) = (U, X)$ dengan X adalah aljabar BCI. Maka setiap ideal sub-implikatif dari E dapat dinyatakan sebagai ideal sub-implikatif *exclusive* dari beberapa *U-soft sub-implicative ideal* atas U.

Bukti:

Misalkan A adalah ideal sub-implikatif dari E. Untuk setiap $\tau \subseteq$ U, misalkan F_A adalah himpunan halus dari U yang didefinisikan dengan

$$f_A: E \to P(U), x \to \begin{cases} \tau & \text{jika } x \in A \\ U & \text{jika } x \notin A \end{cases}$$

Misalkan $0 \in A$ maka $f_A(0) = \tau$

$f_A(0) \subseteq f_A(x) \subseteq \tau$ jadi $f_A(0) \subseteq f_A(x)$ untuk setiap $x \in E$

Untuk setiap $x, y, z \in E$ jika

$((x^2 * y) * (y * x)) * z \in A$ dan $z \in A$ maka $y^2 * x \in A$ dengan demikian

$f_A\left(((x^2 * y) * (y * x)) * z\right) = \tau$ dan $f_A(z) = \tau$ maka

$f_A\left(((x^2 * y) * (y * x)) * z\right) \cup f_A(z) = \tau$ karena $f_A(y^2 * x) = \tau$ maka

$f_A(y^2 * x) \subseteq f_A\left(((x^2 * y) * (y * x)) * z\right) \cup f_A(z)$

Jika $((x^2 * y) * (y * x)) * z \notin A$ atau $z \notin A$ maka

$f_A\left(((x^2 * y) * (y * x)) * z\right) = U$ atau $f_A(z) = U$ maka berdasarkan (2.17) diperoleh $f_A(y^2 * x) \subseteq U$

$$= f_A\left(((x^2 * y) * (y * x)) * z\right) \cup f_A(z)$$

Terbukti bahwa F_A adalah *U-soft sub-implicative ideal* dan $e(F_A; \tau) = A$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

3.2 Kajian Agama Islam tentang Operasi Gabungan

Keluarga adalah susunan orang-orang yang disatukan oleh ikatan-ikatan perkawinan, darah atau adopsi (Mufidah, 2013:34). Di dalam al-Quran terdapat beberapa kata yang mengarah kepada keluarga yaitu *ahlul bait* disebut keluarga rumah tangga Rasulullah Saw.

Dalam keluarga itu ada *mawaddah* dan *rahmah*, yang dijelaskan dalam QS. Ar-rum ayat 21:

وَمِنۡ ءَايَٰتِهِۦٓ أَنۡ خَلَقَ لَكُم مِّنۡ أَنفُسِكُمۡ أَزۡوَٰجٗا لِّتَسۡكُنُوٓاْ إِلَيۡهَا وَجَعَلَ بَيۡنَكُم مَّوَدَّةٗ

وَرَحۡمَةًۚ إِنَّ فِي ذَٰلِكَ لَأٓيَٰتٖ لِّقَوۡمٖ يَتَفَكَّرُونَ ٢١

Artinya: *"Dan diantara tanda-tanda kekuasaan-Nya ialah Dia menciptakan untukmu isteri-isteri dari jenismu sendiri, supaya kamu cenderung dan merasa tentram kepadanya, dan dijadikannya diantaramu rasa kasih dan sayang. Sesungguhnya pada yang demikian itu benar-benar terdapat tanda-tanda bagi kaum yang berpikir* (QS. Ar-Rum/30:21).

Dalam masyarakat tersusun dari beberapa keluarga, Islam sangat menganjurkan untuk menjalankan hubungan baik dengan sesama keluarga atau bisa dikatakan sebagai hubungan beretangga. Di dalam al-Quran anjuran untuk berhubungan baik dalam bertetangga dijelaskan dalam QS. an-Nisa' ayat 36, yaitu:

۞ وَٱعۡبُدُواْ ٱللَّهَ وَلَا تُشۡرِكُواْ بِهِۦ شَيۡـٔٗاۖ وَبِٱلۡوَٰلِدَيۡنِ إِحۡسَٰنٗا وَبِذِي ٱلۡقُرۡبَىٰ وَٱلۡيَتَٰمَىٰ

وَٱلۡمَسَٰكِينِ وَٱلۡجَارِ ذِي ٱلۡقُرۡبَىٰ وَٱلۡجَارِ ٱلۡجُنُبِ وَٱلصَّاحِبِ بِٱلۡجَنۢبِ وَٱبۡنِ ٱلسَّبِيلِ وَمَا

مَلَكَتۡ أَيۡمَٰنُكُمۡۗ إِنَّ ٱللَّهَ لَا يُحِبُّ مَن كَانَ مُخۡتَالٗا فَخُورًا ٣٦

Artinya: *"Mengabdilah kepada Allah dan jangan mempersekutukan sesuatu dengan Dia, dan berbuat baiklah kepada ibu bapak, kerabat, anak-anak yatim, orang-orang miskin, tetangga-tetangga dekat, tetangga-tetangga orang yang asing, teman yang di sampingmu, dan orang dalam perjalanan, dan yang menjadi milik tangan kananmu. Allah tidak menyukai orang yang congkak, membanggakan diri* (QS. An-Nisa'/30:36).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dikaitkan dengan ayat-ayat yang telah disebutkan sebelumnya, istilah gabungan dalam matematika merujuk pada suatu operasi dasar yang mengenai dua himpunan atau lebih, sehingga dengan menggunakan operasi tersebut akan menghasilkan suatu himpunan yang lain. Jika keluarga dianggap sebagai suatu himpunan dan hubungan antar keluarga dianggap sebagai gabungan, maka hubungan atau gabungan dari keluarga adalah suatu institusi terkecil dalam masyarakat yang berfungsi sebagai wahana untuk mewujudkan kehidupan yang tentram, aman dan damai. Dengan demikian, dapat disimpulkan hubungan antar keluarga yang membentuk masyarakat, mirip dengan teori gabungan dalam matematika yaitu, jika dua atau lebih himpunan dikenai operasi gabungan akan menghasilkan himpunan yang lain.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dijelaskan, diperoleh suatu kesimpulan bahwa sifat-sifat gabungan ideal sub-implikatif halus dalam aljabar BCI adalah sebagai berikut:

a. Setiap gabungan ideal sub-implikatif halus adalah gabungan ideal halus.

b. Jika F_A adalah gabungan ideal sub-implikatif halus atas U, fungsi aproksimasi f_A memenuhi:

$(\forall x, y \in A)(f_A(y^2 * x) \subseteq f_A\big((x^2 * y) * (y * x)\big)$.

c. Jika F_A adalah gabungan ideal halus yang memenuhi $f_A(y^2 * x) \subseteq f_A\big((x^2 * y) * (y * x)\big)$ untuk setiap $x, y \in A$ maka F_A adalah gabungan ideal sub-implikatif halus atas U.

d. Jika X adalah aljabar BCI yang *p-semisimple*, maka gabungan ideal halus atas U sama dengan gabungan ideal sub-implikatif halus atas U.

e. Setiap gabungan ideal-p halus adalah gabungan ideal sub-implikatif halus.

f. Untuk $(U, E) = (U, X)$ dan A sub-aljabar dari E, maka berikut ini ekuivalen:

(i) F_A adalah gabungan ideal sub-implikatif halus atas U

(ii) Himpunan τ-*exclusive* dari F_A adalah ideal sub-implikatif atas A untuk setiap $\tau \subseteq U$.

g. Jika $(U, E) = (U, X)$, setiap A sub-aljabar dari E dan jika F_A adalah gabungan ideal sub-implikatif halus atas U maka F_A^* juga gabungan ideal sub-implikatif halus.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

h. Setiap ideal sub-implikatif bisa direalisir sebagai ideal sub-implikatif *exclusive* dari beberapa gabungan ideal sub-implikatif halus.

4.2 Saran

Berdasarkan penelitian ini, maka bagi peneliti selanjutnya diharapkan dapat melakukan penelitian yang serupa, yaitu menjelaskan sifat-sifat ideal halus pada grup atau semi grup yang berbeda dalam aljabar BCI, misalkan pada ideal sub-komutatif.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR RUJUKAN

Abdussakir. 2009. *Matematika 1 Kajian Integratif Matematika dan Al-Quran*. Malang: UIN Maliki Press.

Ahn, S.S., Ko, J.M., dan So, K.S. 2017. Union Soft P-ideals and Union Soft Sub-implicative Ideals in BCI-algebras. *Journal Computational Analysis and Applications*, 23(1): 152-165.

Arai, Y. Iseki, K. & Tanaka, S. 1966. Caharacterizations of BCI, BCK-Algebras. *Proceedings of The Japan Academy*, 42(2): 105-107.

Fitria, A. 2013. Mengenalkan dan Membelajarkan Matematika pada Anak Usia Dini. *Mu'adalah*, 1(2): 45-55.

Gilbert, L dan Gilbert, J. 2009. *Elements of Modern Algebra*. Belmont: Brooks / Cole.

Hao, J dan Li, C.X. 2004. On Ideal of An Ideal in BCI-Algebra. *Scientiae Mathematicae Japonicae*, (10): 493-500.

Hasratuddin. 2013. Membangun Karakter Melalui Pembelajaran Matematika. *Paradikma*, 6(2): 130-141.

Jun, Y.B. 2013. Union soft sets with Applications in BCK/BCI Algebras. *Korean Math*, (50): 1937-1956.

Kamil, M.I. 2016. *Kajian terhadap K Aljabar*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Liu, Y.L., dan Meng, J. 2000. Sub-implicative Ideals and Sub-commutative Ideals of BCI-Algebras. *Soochow Journal of Mathematics*, 26(4): 441-453.

Mufidah. 2013. *Psikologi Keluarga Islam Berwawasan Gender*. Malang: UIN Maliki Press.

Muhammad, A.J & Abdirrahman, A.J. 2010. *Tafsir Jalalain*. Surabaya: Pustaka eLBA.

Pusawidjayanti, K. 2011. *Pengembangan Aljabar P-semisimple dengan Sifat Assosiatif*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Saeid, A.B. 2010. Fantastic Ideals in BCI-Algebras. *World Applied Sciences Journal*, 8(5): 550-554.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Widiyatika, A.F. 2016. *Sifat-Sifat Gabungan Ideal Halus dalam Aljabar BCI*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Yang, K.S dan Ahn, S.S. 2014. Union Soft Q-ideal in BCI-algebras. *Applied Mathematical Sciences*. 8(58): 2859-2869.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

RIWAYAT HIDUP

Yusrina dilahirkan di Pamekasan pada tanggal 17 Januari 1995, biasa dipanggil Rina, tinggal di Jl. Sunan Kalijaga Dalam No.17 Kec. Lowokwaru Kota Malang. Anak pertama dari dua bersaudara, dari pasangan bapak Muhammad Salehoddin dan ibu Helliyah serta kakak dari Amiqatin Fikriyah.

Pendidikan dasarnya ditempuh di SDN Montok II dan lulus pada tahun 2007, setelah itu melanjutkan ke SMP Negeri II Larangan dan lulus pada tahun 2010. Kemudian dia melanjutkan pendidikan ke SMA Ibrahimy Sukorejo Situbondo dan lulus pada tahun 2013. Selanjutnya, pada tahun 2013 menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil Jurusan Matematika, Fakultas sains dan Teknologi.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345 Fax. (0341) 572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Yusrina
NIM : 13610016
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Sifat-sifat Gabungan Ideal Sub-implikatif Halus dalam Aljabar BCI.
Pembimbing I : Dr. Abdussakir, M.Pd
Pembimbing II : Dr. Ahmad Barizi, M.A

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1	6 Maret 2017	Konsultasi Bab I dan Bab II	1.
2	4 April 2017	Konsultasi Kajian Keagamaan Bab I dan Bab II	2.
3	5 April 2017	Revisi Kajian Keagamaan Bab I dan Bab II	3.
4	11 April 2017	Konsultasi Bab I, Bab II dan Bab III	4.
5	9 Agustus 2017	Konsultasi Bab I, Bab II dan Bab III	5.
6	5 Oktober 2017	Konsultasi Bab III	6.
7	11 Oktober 2017	Konsultasi Kajian Keagamaan Bab III	7.
8	12 Oktober 2017	Konsultasi Kajian Keagamaan Bab I, Bab II dan Bab III	8.
9	24 November 2017	Konsultasi Bab III	9.
10	6 Februari 2018	Konsultasi Bab I, Bab II, Bab III dan Bab IV	10.
11	13 Februari 2018	Konsultasi Bab I, Bab II, Bab III, Bab IV dan abstrak	11.
12	22 Februari 2018	ACC Keseluruhan	12.

Malang, 22 Februari 2018
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M. Si
NIP. 19650414 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG