SPEKTRUM *LAPLACE* DARI KOMPLEMEN GRAF INVERS DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

OLEH
MIRATUL HUSNA
NIM. 12610077

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018

SPEKTRUM *LAPLACE* DARI KOMPLEMEN GRAF INVERS DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Miratul Husna
NIM. 12610077

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018

SPEKTRUM *LAPLACE* DARI KOMPLEMEN GRAF INVERS DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Oleh
Miratul Husna
NIM. 12610077

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 24 Januari 2018

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Dr. Abdussakir, M.Pd	Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001	NIP. 19630502 198703 1 005

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

SPEKTRUM *LAPLACE* DARI KOMPLEMEN GRAF INVERS DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Oleh
Miratul Husna
NIM. 12610077

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 21 Februari 2018

Penguji Utama	: Evawati Alisah, M.Pd	....
Ketua Penguji	: Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si	....
Sekretaris Penguji	: Dr. Abdussakir, M.Pd	....
Anggota Penguji	: Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	Miratul Husna
NIM	:	12610077
Jurusan	:	Matematika
Fakultas	:	Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	:	Spektrum *Laplace* dari Komplemen Graf Invers dari Grup Dihedral

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 24 Januari 2018
Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL
7EB00ADF458162816
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Miratul Husna
NIM. 12610077

MOTO

إِذَا أَمْسَيْتَ فَلاَ تَنْتَظِرِ الصَّبَاحَ وَإِذَا أَصْبَحْتَ فَلاَ تَنْتَظِرِ الْمَسَاءَ وَخُذْ مِنْ صِحَّتِكَ لِمَرَضِكَ وَمِنْ حَيَاتِكَ لِمَوْتِكَ

"Apabila kamu berada di sore hari janganlah kamu menunggu (melakukan sesuatu) hingga pagi hari (datang). Apabila kamu berada di pagi hari janganlah menunggu (melakukan sesuatu) hingga sore (datang). Gunakan waktu sehatmu untuk menghadapi sakitmu, dan waktu hidupmu untuk menghadapi matimu".

(HR.Bukhari).

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda M. Fatchur Rozi dan Ibunda tercinta Charirotul Barokati yang senantiasa dengan ikhlas mendoakan, memberi dukungan, motivasi, selalu memberi semangat yang tiada henti hingga selesainya skripsi ini, tak lupa restunya kepada penulis dalam menuntut ilmu serta selalu memberikan teladan yang baik bagi penulis.

Untuk kakak tersayang Navilatul Ula dan adik tercinta M. Alwan Masyfuqi yang selalu memberikan doa dan dukungan kepada penulis.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Puji syukur ke hadirat Allah Swt yang telah memberikan rahmat, taufik, hidayah, dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi yang berjudul *"Spektrum Laplace dari Komplemen Graf Invers dari Grup Dihedral"*. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada nabi besar Muhammad Saw yang telah membimbing ummatnya dari jalan kegelapan menuju jalan yang terang benderang yakni agama Islam.

Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Selama proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat saran, bimbingan, arahan, doa, dan bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. Abdul Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku dosen pembimbing yang senantiasa memberikan doa, arahan, nasihat, motivasi, dan berbagai pengalaman yang berharga kepada penulis.

5. Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd, selaku dosen pembimbing agama yang telah memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.
6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.
7. Ayah dan Ibu tercinta yang selalu memberikan doa, bimbingan, nasihat, semangat dan motivasi hingga selesainya skripsi ini.
8. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2012, yang berjuang bersama-sama untuk meraih mimpi dan terima kasih untuk kenang-kenangan indah yang diraih bersama dalam menggapai impian.
9. Semua pihak yang ikut memberikan bantuan dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materiil.

Akhirnya penulis berharap semoga bantuan yang telah diberikan dicatat sebagai amal baik oleh Allah Swt dan dapat memberikan manfaat dan wawasan yang lebih luas bagi penulis dan pembaca.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 24 Januari 2018

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Husna, Miratul. 2018. **Spektrum *Laplace* dari Komplemen Graf Invers dari Grup Dihedral**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Abdussakir, M.Pd. (II) Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd.

Kata Kunci: spektrum *Laplace*, matriks *Laplace*, nilai eigen, *algebraic multiplicity*, komplemen graf invers, grup dihedral.

Misal (G,∗) adalah grup berhingga dan S himpunan bagian dari G yang memuat semua anggota G yang tidak invers ke dirinya sendiri. Graf invers $\Gamma_S(G)$ yang dibangun dari G adalah graf yang himpunan titiknya adalah semua anggota di G sedemikian sehingga setiap dua titik yang berbeda u dan v adalah terhubung langsung jika dan hanya jika $u * v \in S$ atau $v * u \in S$. Misal G adalah graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Graf G dapat dipresentasikan dalam bentuk diagram, salah satunya yaitu dalam bentuk matriks. Matriks *Laplace* dinotasikan dengan $\boldsymbol{L}(G)$ didapatkan dari operasi pengurangan matriks derajat titik yang dinotasikan dengan $\boldsymbol{D}(G)$ dan matriks *adjacency* dinotasikan dengan $\boldsymbol{A}(G)$ yang ditunjukkan oleh $\boldsymbol{L}(G) = \boldsymbol{D}(G) - \boldsymbol{A}(G)$. Ketika graf sudah dinyatakan dalam bentuk matriks, maka dapat dicari nilai eigen dan *algebraic multiplicity*-nya. Matriks baru yang memuat nilai eigen pada baris pertama dan nilai *algebraic multiplicity* pada baris kedua disebut spektrum. Spektrum yang diperoleh dari matriks $\boldsymbol{L}(G)$ disebut spektrum *Laplace*.

Tujuan penelitian ini adalah mencari pola umum spektrum *Laplace* dari komplemen graf invers yang dibangun dari grup dihedral dan dirumuskan menjadi suatu teorema. Hasil penelitian ini adalah:

1. Spektrum *Laplace* pada komplemen graf invers dari grup dihedral D_{2n} untuk n ganjil dan $n \geq 3$ adalah

$$\boldsymbol{spec_L}(\Gamma_s(D_{2n})) = \begin{bmatrix} 2n & n+2 & n & 0 \\ 1 & \frac{n-1}{2} & \frac{3n-3}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

2. Spektrum *Laplace* pada komplemen graf invers dari grup dihedral D_{2n} untuk n genap dan $n = 4k + 2, \forall k \in \mathbb{N}$ adalah

$$\boldsymbol{spec_L}(\Gamma_s(D_{2n})) = \begin{bmatrix} 2n & n+4 & n+2 & n & 0 \\ 1 & \frac{n-2}{4} & n & \frac{3n-6}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

3. Spektrum *Laplace* pada komplemen graf invers dari grup dihedral D_{2n} untuk n genap dan $n = 4(k + 1), \forall k \in \mathbb{N}$ adalah

$$\boldsymbol{spec_L}(\Gamma_s(D_{2n})) = \begin{bmatrix} 2n & n+4 & n+2 & n & 0 \\ 1 & \frac{n-4}{4} & n & \frac{3n-4}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

Bagi penelitian selanjutnya, diharapkan dapat menemukan bermacam-macam teorema tentang spektrum *Laplace* dari graf lainnya yang dibangun dari grup dihedral.

ABSTRACT

Husna, Miratul. 2018. **Laplacian Spectrum of Complement of Inverse Graph of Dihedral Group**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Dr. Abdussakir, M.Pd. (II) Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd.

Keyword: Laplacian spectrum, Laplacian matrix, eigen value, algebraic multiplicity, complement of inverse graph, dihedral group.

Let (G,$*$) be a finite group and S a possibly empty subset of G containing its non-invertible elements. The inverse graph $\Gamma_S(G)$ associated with G is the graph whose set of vertices coincides with G such that two distinct vertices u and v are adjacent if and only if either $u * v \in S$ or $v * u \in S$. Let G be a graph with a set of vertices $V(G)$ and a set of edges $E(G)$. Graph can be represented in the matrix form, for example Laplacian matrix denoted by $\boldsymbol{L}(G)$ derived from a degree matrix reduction operation denoted by $\boldsymbol{D}\,(G)$ and the adjacency matrix denoted by $\boldsymbol{A}(G)$ indicated by $\boldsymbol{L}(G) = \boldsymbol{D}(G) - \boldsymbol{A}(G)$. When the graph has been represented in matrix form, then the eigen values and algebraic multiplicity can be determined. The new matrix which containing all of eigen values in the first row and the algebraic multiplicity in the second row is called the spectrum. The spectrum obtained from the matrix $\boldsymbol{L}(G)$ is called the Laplacian spectrum.

The purpose of this research is to find Laplacian spectrum pattern of complement of inverse graph obtained from dihedral group and formulated into theorems. The results of this research are:

1. The Laplacian spectrum of complement of inverse graph of dihedral group D_{2n} for odd n and $n \geq 3$ is

$$\boldsymbol{spec_L}(\Gamma_s(D_{2n})) = \begin{bmatrix} 2n & n+2 & n & 0 \\ 1 & \dfrac{n-1}{2} & \dfrac{3n-3}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

2. The Laplacian spectrum of complement of inverse graph of dihedral group D_{2n} for even n and dan $n = 4k + 2, \forall k \in \mathbb{N}$ is

$$\boldsymbol{spec_L}(\Gamma_s(D_{2n})) = \begin{bmatrix} 2n & n+4 & n+2 & n & 0 \\ 1 & \dfrac{n-2}{4} & n & \dfrac{3n-6}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

3. The Laplacian spectrum of complement of inverse graph of dihedral group D_{2n} for odd n and $n = 4(k+1), \forall k \in \mathbb{N}$ is

$$\boldsymbol{spec_L}(\Gamma_s(D_{2n})) = \begin{bmatrix} 2n & n+4 & n+2 & n & 0 \\ 1 & \dfrac{n-4}{4} & n & \dfrac{3n-4}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

For further research, it is desirable to find various theorems about the Laplacian spectrum from other graphs of dihedral group.

ملخص

الحسنى، مرأة. 2018. **Laplacian spectrum من مكلملات المخطط المعكوس من زمرة زوجية.** البحث الجامعي. شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرف: (1) الدكتور عبد الشاكر، الماجستيرة التربوية (2) الدكتور امام سوجروو، الماجستيرة التربوية.

الكلمات الرئيسية: Laplacian spectrum، Laplacian مصفوفة، القيم الذاتية ، تعدد جبري، مكلملات المخطط المعكوس، زمرة زوجية.

المثال $(G,*)$ هي مجموعة محدودة ومجموعة فرعية من G تحتوي على جميع الأعضاء غير العكسيين لأنفسهم. المعكوس $\Gamma_S(G)$ تم إنشاؤه من G هو مخطط التى كانت مجموعة رؤوسها هي جميع الأعضاء في G بحيث يتم توصيل كل أسين u و v كانتا متجاورين إذا $u * v$ أو $v * u$ في S. المثال Gعبارة عن مخطط يحتوي على مجموعة من رؤوس $V(G)$ ومجموعة أضلاء $E(G)$. يمكن التعبير عنها في شكل مصفوفة، سبيل المثال مصفوفة Laplacian بواسطة $\boldsymbol{L}(G)$ تم الحصول عليها من مصفوفة درجة رؤوس عملية تخفيض بواسطة $\boldsymbol{D}\,(G)$ ومصفوفة الجوار التي كتبها $\boldsymbol{A}(G)$، والذي دل عليه $\boldsymbol{L}(G) = \boldsymbol{D}(G) - \boldsymbol{A}(G)$.عندما يتم التعبير عن مخطط في شكل مصفوفة، يمكن البحث عن التعدد الجبري .وتسمى مصفوفة جديدة تحتوي على القيم الذاتية في الصف الأول وتعدد جبري من أعلى رتبة في الصف الثاني spectrum. ويسمى spectrum المتحصل عليه من المصفوفة$\boldsymbol{L}(G)$ Laplacian spectrum.

والغرض من هذا البحث هو العثور على نمط Laplacian spectrum من مكلملات المخطط المعكوس من زمرة زوجية وصياغته في نظرية. وكانت نتيجة هذا البحث هي:

1. Laplacian spectrum من مكلملات المخطط المعكوس من زمرة زوجية D_{2n} ل n فردي و $n \geq 3$ هو

$$\boldsymbol{spec_L}(\Gamma_s(D_{2n})) = \begin{bmatrix} 2n & n+2 & n & 0 \\ 1 & \frac{n-1}{2} & \frac{3n-3}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

2. Laplacian spectrum من مكلملات المخطط المعكوس من زمرة زوجية D_{2n} ل n حتى و $\forall k \in \mathbb{N} n = 4k+2,$ هو

$$\boldsymbol{spec_L}(\Gamma_s(D_{2n})) = \begin{bmatrix} 2n & n+4 & n+2 & n & 0 \\ 1 & \frac{n-2}{4} & n & \frac{3n-6}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

3. Laplacian spectrum من مكلملات المخطط المعكوس من زمرة زوجية D_{2n} ل n حتى و $\forall k \in \mathbb{N} n = 4(k+1),$ هو

$$\boldsymbol{spec_L}(\Gamma_s(D_{2n})) = \begin{bmatrix} 2n & n+4 & n+2 & n & 0 \\ 1 & \frac{n-4}{4} & n & \frac{3n-4}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

لمزيد من البحث، فمن المستحسن أن تجد مختلف النظريات حول Laplacian spectrum من مخطط الأخرى من زمرة زوجية.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Al-Quran merupakan kitab suci bagi umat Islam. Selain sebagai kitab suci, al-Quran juga merupakan sumber hukum utama dalam ajaran agama Islam. Al-Quran merupakan sumber dari berbagai macam ilmu pengetahuan. Ilmu pengetahuan memberikan penjelasan untuk mendorong manusia mengembangkan dan memperluas wawasan sesuai dengan perkembangan zaman. Salah satunya yaitu ilmu matematika. Sebagaimana firman Allah Swt dalam surat al-Mujadilah ayat 11, yaitu:

يَـٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوٓا۟ إِذَا قِيلَ لَكُمْ تَفَسَّحُوا۟ فِى ٱلْمَجَـٰلِسِ فَٱفْسَحُوا۟ يَفْسَحِ ٱللَّهُ لَكُمْ ۖ وَإِذَا قِيلَ ٱنشُزُوا۟ فَٱنشُزُوا۟ يَرْفَعِ ٱللَّهُ ٱلَّذِينَ ءَامَنُوا۟ مِنكُمْ وَٱلَّذِينَ أُوتُوا۟ ٱلْعِلْمَ دَرَجَـٰتٍ ۚ وَٱللَّهُ بِمَا تَعْمَلُونَ خَبِيرٌ ﴿١١﴾

Artinya: *"Hai orang-orang beriman apabila dikatakan kepadamu: "Berlapang-lapanglah dalam majlis", maka lapangkanlah niscaya Allah akan memberi kelapangan untukmu. Dan apabila dikatakan: "Berdirilah kamu", maka berdirilah, niscaya Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat. Dan Allah Maha Mengetahui apa yang kamu kerjakan"(QS. al-Mujadilah:11).*

Menurut tafsir Jalalain (Hai orang-orang yang beriman, apabila dikatakan kepada kalian, "Berlapang-lapanglah) berluas-luaslah (dalam majelis") yaitu majelis tempat Nabi Saw berada, dan majelis dzikir sehingga orang-orang yang datang kepada kalian dapat tempat duduk. Menurut suatu qiraat *lafal al-majaalis* dibaca *al-majlis* dalam bentuk mufrad (maka lapangkanlah, niscaya Allah akan memberi kelapangan untuk kalian) di surga nanti. (Dan apabila dikatakan, "Berdirilah kalian") untuk melakukan salat dan hal-hal lainnya yang termasuk amal-amal kebaikan (maka berdirilah) menurut qiraat lainnya kedua-duanya dibaca *fansyuzuu* dengan memakai harakat damah pada huruf Syinnya (niscaya Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antara kalian) karena ketaatannya dalam hal tersebut (dan) Allah meninggikan pula (orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat) di surga nanti. (Dan Allah Maha Mengetahui apa yang kalian kerjakan).

Ayat tersebut menjelaskan tentang seorang yang akan diangkat derajatnya oleh Allah, yaitu orang-orang yang beriman dan orang-orang yang berilmu pengetahuan, dengan beberapa derajat. Orang yang beriman dan berilmu pengetahuan akan menunjukkan sikap yang arif dan bijaksana. Iman dan ilmu tersebut akan membuat orang mantap dan agung. Tentu saja yang dimaksud dengan yang berilmu itu artinya yang diberi pengetahuan. Ini berarti pada ayat tersebut membagi kaum beriman kepada dua kelompok besar, yang pertama sekedar beriman dan beramal saleh, dan yang kedua beriman dan beramal saleh serta memiliki pengetahuan. Derajat kelompok kedua ini menjadi lebih tinggi, bukan saja karena nilai ilmu yang disandangnya, tetapi juga amal dan pengajarannya kepada pihak lain baik secara lisan, tulisan maupun dengan keteladanan (Shihab, 2004). Salah satu cabang ilmu yang mendasari berbagai macam ilmu lainnya yaitu matematika, khususnya teori graf.

Graf G adalah pasangan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik, dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut sisi. Banyaknya unsur di $V(G)$ disebut order dari G dan dilambangkan dengan $n(G)$, dan banyaknya unsur di $E(G)$ disebut ukuran dari G dan dilambangkan dengan $m(G)$.

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v, ditulis $e = uv$. Jika $e = uv$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung *(adjacent)*, v dan e serta u dan e disebut terkait langsung *(incident)*, dan titik u dan v disebut ujung dari e (Chartrand, dkk, 2016).

Teori graf juga membahas tentang suatu graf yang dibangun dari grup, misalnya graf invers dan komplemen graf invers. Misalkan $(G,*)$ adalah grup berhingga dan $S = \{u \in G | u \neq u^{-1}\}$. Didefinisikan graf invers yang terkait dengan G, yaitu $\Gamma_S(G)$ adalah graf yang himpunan titiknya anggota dengan G sedemikian sehingga dua titik yang berbeda u dan v adalah terhubung langsung jika dan hanya jika $u * v \in S$ atau $v * u \in S$ (Alfuraida dan Zakariya, 2017). Sedangkan komplemen G (ditulis $\bar{G}$) dari graf G adalah graf dengan himpunan titik $V(G)$ sedemikian sehingga dua titik terhubung langsung di $\bar{G}$ jika dan hanya jika titik tersebut tidak terhubung langsung di G (Chartrand, dkk, 2016). Graf invers dapat dibangun dari grup dihedral. Grup dihedral adalah grup dari himpunan simetri-simetri dari segi-n beraturan, dinotasikan D_{2n}, untuk setiap n bilangan bulat positif dan $n \geq 3$ (Dummit dan Foote, 2004).

Graf tidak hanya disajikan dalam bentuk gambar, tetapi juga dapat disajikan dalam bentuk matriks. Misalkan G suatu graf dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Matriks keterhubungan titik *(vertex adjacency matrix)* graf G adalah matriks bujur sangkar, dinotasikan dengan $\boldsymbol{A}(G) = (a_{ij})$ adalah matriks berordo $n \times n$ dengan $a_{ij} = 1$ jika titik v_i terhubung langsung dengan titik v_j dan $a_{ij} = 0$ untuk lainnya. Dengan demikian, maka matriks keterhubungan titik graf G adalah matriks simetri dengan entri 0 dan 1 dan bernilai 0 untuk semua entri pada diagonal utamanya (Abdussakir, dkk, 2016).

Matriks derajat dari graf G, dinotasikan dengan $\boldsymbol{D}(G)$ adalah matriks diagonal yang elemen baris ke-i dan kolom ke-j adalah derajat dari v_i, $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Matriks $\boldsymbol{L}(G) = \boldsymbol{D}(G) - \boldsymbol{A}(G)$ disebut matriks *Laplace* dari graf G (Brouwer dan Haemers, 2010).

Seiring berkembangnya teknologi, teori graf juga semakin berkembang. Banyak orang melakukan berbagai penelitian salah satunya adalah spektrum pada suatu graf. Penelitian mengenai spektrum suatu graf merupakan hal yang relatif baru dan banyak dilakukan. Spektrum suatu graf G, dinotasikan dengan $spec(G)$ dihasilkan dari matriks keterhubungan suatu graf yang dapat dikaitkan dengan konsep nilai eigen dan vektor eigen pada topik aljabar linier. Spektrum yang diperoleh dari matriks $\boldsymbol{A}(G)$ disebut spektrum keterhubungan sedangkan matriks $\boldsymbol{L}(G)$ disebut spektrum *Laplace* (Abdussakir, dkk, 2009).

Beberapa penelitian mengenai spektrum suatu graf yang sudah pernah dilakukan antara lain Shuhua Yin (2008) meneliti spektrum *Adjacency* dan spektrum *Laplace* pada graf G_l yang diperoleh dari graf komplit K_l dengan menambahkan pohon isomorfik berakar untuk masing-masing titik di K_l. Abdussakir, dkk (2012) meneliti spektrum *Adjacency*, *Laplace*, *Singless Laplace*, dan *Detour* graf multipartisi komplit $K(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$. Abdussakir, dkk (2013) meneliti spektrum *Adjacency*, *Laplace*, *Singless Laplace*, dan *Detour* graf *commuting* dari grup dihedral.

Berdasarkan uraian di atas, maka belum ada penelitian tentang spektrum komplemen graf invers dari grup dihedral. Dengan demikian maka penulis tertarik untuk melakukan penelitian dengan judul "Spektrum *Laplace* dari Komplemen Graf Invers dari Grup Dihedral".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana pola umum spektrum *Laplace* dari komplemen graf invers dari grup dihedral?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui pola umum spektrum *Laplace* dari komplemen graf invers dari grup dihedral.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian ini adalah dapat memberikan informasi mengenai spektrum suatu komplemen graf invers yang diperoleh dari suatu grup dan menambah pemahaman tentang konsep dalam matematika khususnya pada bidang strukur aljabar yakni teori graf.

1.5 Batasan Masalah

Untuk lebih memfokuskan penelitian, maka grup dihedral yang dibahas untuk pencarian pola umum dibatasi pada D_6 hingga D_{32}.

1.6 Metode Penelitian

Dalam penelitian ini metode yang digunakan penulis adalah studi literatur dengan mempelajari dan menelaah beberapa buku, jurnal, dan referensi lain yang mendukung penelitian ini.

Adapun langkah-langkah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menghitung spektrum *Laplace* komplemen graf invers dari grup dihedral $D_{2n}, n = 3, 4, \dots, 10, 12, 14, 16$.
   a. Mengidentifikasi semua anggota dari grup dihedral D_{2n}.
   b. Membuat tabel *Cayley* dengan operasi komposisi " $\circ$ " pada grup dihedral D_{2n}.
   c. Mencari invers dari setiap anggota pada grup dihedral D_{2n}.
   d. Membentuk himpunan bagian S dari grup dihedral D_{2n} yang inversnya bukan dirinya sendiri.
   e. Menggambar graf invers dari grup dihedral D_{2n}.
   f. Menggambar komplemen graf invers dari grup dihedral D_{2n}.
   g. Menentukan matriks keterhubungan titik *(adjacency matrix)* dan matriks derajat dari komplemen graf invers dari grup dihedral D_{2n}.
   h. Menghitung matriks *Laplace* dari matriks keterhubungan titik *(adjacency matrix)* dan matriks derajat.
   i. Menghitung polinomial karakteristik dari matriks *Laplace* komplemen graf invers dari grup dihedral D_{2n}.
   j. Menghitung nilai eigen dan *algebraic multiplicity* dari matriks *Laplace* komplemen graf invers dari grup dihedral D_{2n}.
2. Menghitung pola spektrum *Laplace* dari komplemen graf invers dari grup dihedral D_{2n} dan dirumuskan menjadi suatu teorema serta dibuktikan kebenarannya secara umum.

1.7 Sistematika Penulisan

Untuk mempermudah dalam menelaah dan memahami skripsi ini, maka penulis menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab. Masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa sub bab dengan rumusannya sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Bab ini meliputi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Pada bab ini, diberikan kajian-kajian yang menjadi landasan masalah yang dibahas, antara lain himpunan, pengertian grup, grup dihedral, definisi graf, graf terhubung, graf invers, komplemen graf invers, definisi matriks, matriks keterhubungan titik *(vertex adjacency matrix)*, derajat titik, matriks *Laplace*, nilai eigen dan *algebraic multiplicity*, eliminasi gauss, spektrum *Laplace*.

Bab III Pembahasan

Pada bab ini akan dibahas mengenai pola umum dari spektrum *Laplace* pada komplemen graf invers yang dibangun dari grup dihedral D_{2n}.

Bab IV Penutup

Bab ini berisi kesimpulan dari hasil penelitian yang telah dilakukan dan saran bagi pembaca yang akan melanjutkan penelitian dalam skripsi ini.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Grup

2.1.1 Definisi Grup

Grup adalah suatu struktur aljabar yang dinyatakan sebagai $(G,*)$ dengan G tidak sama dengan himpunan kosong $(G \neq 0)$ dan $*$ adalah operasi biner pada G yang memenuhi sifat-sifat berikut:

1. $(a * b) * c = a * (b * c)$, untuk semua $a, b, c \in G$ (yaitu $*$ asosiatif).
2. Ada suatu elemen e di G sehingga $a * e = e * a = a$, untuk semua $a \in G$ (e disebut identitas di G).
3. Untuk setiap $a \in G$ ada suatu elemen a^{-1} di G sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (a^{-1} disebut invers dari a).

Sebagai tambahan, grup $(G,*)$ disebut *abelian* (grup komutatif) jika $a * b = b * a$ untuk semua $a, b \in G$ (Dummit dan Foote, 2004).

Contoh:

Misalkan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat, maka $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup karena berlaku:

i. Operasi penjumlahan $(+)$ pada $\mathbb{Z}$ merupakan operasi biner yang terdefinisi di $\mathbb{Z}$ sebab operasi biner merupakan pemetaan $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$. Untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$ maka $a + b \in \mathbb{Z}$. Sehingga $\mathbb{Z}$ tertutup terhadap operasi $+$.

ii. Untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}$ maka $a + (b + c) = (a + b) + c$. Jadi operasi $+$ bersifat asosiatif di $\mathbb{Z}$.

iii. Terdapat anggota identitas yaitu 0 terhadap operasi $*$ di $\mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $a + 0 = 0 + a = a$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$.

iv. Untuk $a \in \mathbb{Z}$ terdapat a^{-1} yaitu $(-a) \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Berdasarkan i, ii, iii, dan iv di atas $\mathbb{Z}$ memenuhi aksioma grup maka terbukti bahwa $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup.

2.1.2 Grup Dihedral

Grup dihedral adalah himpunan simetri-simetri dari segi n beraturan (poligon-n), disebut dihedral-$2n$ D_{2n}, untuk setiap $n \in Z^{+}$, dan $n \geq 3$. Dimisalkan D_{2n} adalah suatu grup yang didefinisikan dengan s dan t untuk $s, t \in D_{2n}$ yang didapatkan dari penerapan pertama t kemudian s dalam segi-n dari simetri (simetri sebagai fungsi segi$-n$, jadi st merupakan fungsi komposisi). Jika s, t merupakan akibat permutasi dari titik-titik yang berturut-turut yaitu σ, τ maka st merupakan akibat $\sigma \circ \tau$. Operasi biner di D_{2n} adalah asosiatif karena fungsi komposisi adalah asosiatif. Identitas dari D_{2n} merupakan dihedral dari simetri yang dinotasikan dengan 1, dan invers dari $s \in D_{2n}$ merupakan kebalikan semua putaran dari simetri s (jadi jika s merupakan efek permutasi pada titik-titik σ, maka s^{-1} akibat dari σ^{-1}).

Grup dihedral akan digunakan secara luas dalam seluruh teks maka perlu beberapa notasi dan hitungan yang dapat menyederhanakan perhitungan selanjutnya, serta membantu mengamati D_{2n} sebagai grup dihedral, yaitu :

1. $1, r, r^2, \dots, r^{n-1}$ adalah unsur berbeda dan $r^n = 1$, sehingga $|r| = n, n \in \mathbb{N}$
2. $|s| = 2$

3. $s \neq r^i$, untuk sebarang $i, \forall i \in Z^+$

4. $sr^i \neq sr^j$ untuk semua $0 \leq i, j \leq n-1$ dengan $i \neq j$, jadi

$$D_{2n} = \{1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \ldots, sr^{n-1}\},$$

yaitu setiap elemen dapat dituliskan secara tunggal dalam bentuk $s^k r^i$ untuk suatu $k = 0$ atau 1 dan $0 \leq i \leq n-1$

5. $rs = sr^{-1}$.

6. $r^i s = sr^{n-i}$, untuk semua $0 \leq i \leq n$. Hal ini menunjukkan cara bagaimana mengubah s dengan r (Dummit dan Foote, 2004:25).

Contoh:

Misalkan grup dihedral-6 adalah $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Jika dioperasikan dengan operasi " $\circ$ " maka didapatkan tabel *Cayley* berikut:

Tabel 2.1 Tabel Cayley Grup Dihedral-6 (D_6)

$\circ$	1	r	r^2	s	sr	sr^2
1	1	r	r^2	s	sr	sr^2
r	r	r^2	1	sr^2	s	sr
r^2	r^2	1	r	sr	sr^2	s
s	s	sr	sr^2	1	r	r^2
sr	sr	sr^2	s	r^2	1	r
sr^2	sr^2	s	sr	r	r^2	1

Dari Tabel 2.1 sr dikomposisikan dengan s akan menghasilkan r^2 dengan perhitungan sebagai berikut:

$$sr \circ s = r^{-1}s \circ s$$

$$= r^2 1$$

$$= r^2$$

2.2 Graf

2.2.1 Definisi Graf

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan $\left(V(G), E(G)\right)$ dimana $V(G)$ adalah himpunan tak kosong dari unsur-unsur yang disebut titik *(vertex)* dan $E(G)$ adalah himpunan dari pasangan tak terurut (u, v) dari titik-titik u dan v yang berbeda di $V(G)$ disebut sisi *(edge)*. Selanjutnya sisi $e = (u, v)$ pada graf G ditulis $e = uv$ (Chartrand, dkk, 2016).

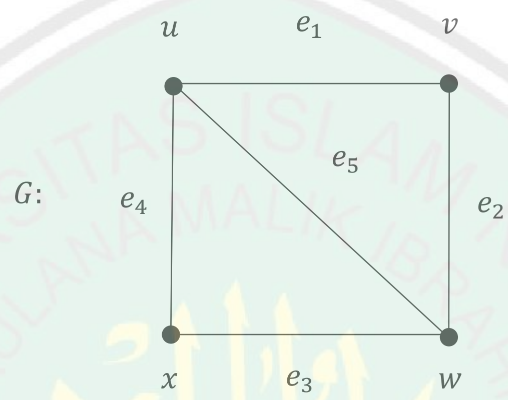
Sisi $e = uv$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = uv$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut titik-titik yang terhubung langsung *(adjacent vertices)*, sedangkan u dan e disebut terkait langsung *(incident)*, begitu juga dengan v dan e. Selanjutnya, jika e_1 dan e_2 adalah sisi-sisi berbeda di G yang terkait langsung *(incident)* dengan titik, maka e_1 dan e_2 adalah sisi-sisi yang terhubung langsung *(adjacent edges)* (Chartrand, dkk, 2016).

Suatu graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu pun, tetapi titiknya harus ada minimal satu. Graf dengan satu titik dan tidak mempunyai sisi disebut graf trivial.

Banyaknya titik di graf G disebut order dari G yang dilambangkan dengan $n(G)$, sedangkan banyaknya sisi disebut ukuran *(size)* dari G yang dilambangkan dengan $m(G)$. Graf $G(n, m)$ memiliki order n dan *size* 瑶 (Chartrand, dkk, 2016).

Graf G dapat dipresentasikan dalam bentuk diagram (gambar) yang setiap titik G digambarkan dengan suatu noktah dan setiap sisi yang menghubungkan dua titik di G digambarkan dengan kurva sederhana (ruas garis) dengan titik-titik akhir di kedua titik tersebut. Ada tiga cara untuk menggambarkan suatu graf, yaitu dalam bentuk diagram secara geometri, matriks, dan dengan menggunakan himpunan pasangan berurutan (Budayasa, 2007).

Misalnya diberikan graf G dengan $V(G) = \{u, v, w, x\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ dimana $e_1 = uv, e_2 = vw, e_3 = wx, e_4 = ux, e_5 = uw$. Maka G dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.1 Graf G

Graf G pada Gambar 2.1 mempunyai 4 titik dan 5 sisi sehingga $n(G) = 4$ dan $m(G) = 5$ (Budayasa, 2007:2).

2.2.2 Graf Terhubung

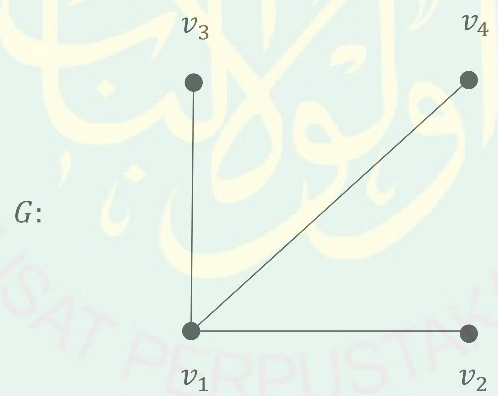
Misalkan G adalah graf. Jalan *(walk)* di G adalah suatu barisan berhingga (tak kososng) $W = (v_0, e_1, v_1, e_1, v_2, \dots, e_k, v_F)$ yang suku-sukunya bergantian titik dan sisi, sedemikian hingga v_{i-1} dan v_i adalah titik-titik akhir sisi e_i, untuk $1 \leq i \leq k$. Dikatakan W adalah suatu jalan dari titik v_0 ke titik v_k, atau jalan-(v_0, v_k). Titik v_0 dan titik v_k berturut-turut disebut titik awal dan titik akhir W. Sedangkan titik-titik $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$ disebut titik-titik internal W dan k disebut panjang jalan W. Perhatikan bahwa panjang jalan W adalah banyaknya sisi dalam

W. Suatu titik di G, mungkin saja muncul lebih dari satu kali dalam jalan W, begitu juga dengan suatu sisi di G, boleh muncul lebih dari satu kali pada jalan W. Jika semua sisi $e_1, e_2, \dots, e_k$ dalam jalan W berbeda, maka W disebut jejak *(trail)*. Jika semua titik $v_0, v_1, v_2, \dots, v_k$ dalam jalan W juga berbeda, maka W disebut lintasan *(path)*. Suatu jalan yang titik awal dan titik akhirnya berbeda adalah jalan terbuka, sebaliknya merupakan jalan tertutup.

Suatu graf G dikatakan terhubung *(connected)* jika untuk setiap dua titik di G yang berbeda terdapat lintasan yang menghubungkan kedua titik tersebut, sebaliknya graf G disebut tidak terhubung *(disconnected)* (Budayasa, 2007).

Contoh:

Misalkan graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4\}$. Maka G dapat digambarkan sebagai berikut:

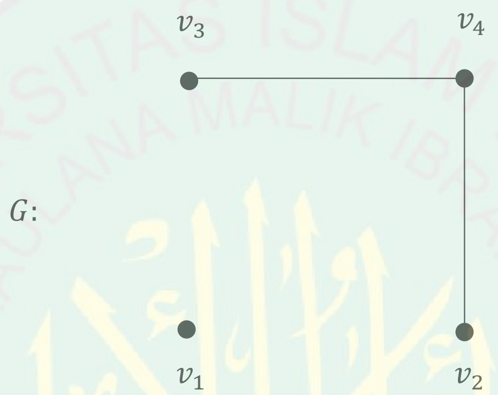


Gambar 2.2 Graf Terhubung

Graf G pada Gambar 2.2 merupakan graf terhubung karena setiap dua titik yang berbeda di G dihubungkan oleh lintasan.

2.2.3 Komplemen Graf

Komplemen G (ditulis $\bar{G}$) dari graf G adalah graf dengan himpunan titik $V(G)$ sedemikian sehingga dua titik terhubung langsung di $\bar{G}$ jika dan hanya jika titik tersebut tidak terhubung langsung di G. Jika graf G berorde n dan berukuran m, maka $\bar{G}$ berorde n memiliki ukuran $\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) - m$ (Chartrand, dkk, 2016). Contoh komplemen graf G pada Gambar 2.2 adalah



Gambar 2.3 Komplemen Graf G

Dua titik berbeda v_2 dan v_4, v_3 dan v_4 pada Gambar 2.2 tidak terhubung langsung sehingga komplemen garf G pada Gambar 2.3 terhubung langsung di $\bar{G}$.

2.2.4 Derajat Titik

Derajat titik v dari graf G merupakan banyaknya titik di G yang terhubung langsung dengan v. Derajat dari titik v pada graf G dinotasikan dengan $\deg_G v$ atau $\deg v$.

Suatu titik yang berderajat 0 disebut titik terasing dan titik yang berderajat 1 disebut titik ujung atau titik akhir. Derajat terbesar dari semua titik di G disebut derajat maksimum dari G dan dinotasikan dengan $\Delta(G)$. Derajat minimum dari dinotasikan dengan $\delta(G)$. Oleh karena itu, jika v merupakan titik dari graf G dengan orde n, maka $0 \leq \delta(G) \leq \deg v \leq \Delta(G) \leq n - 1$ (Chartrand, dkk, 2016).

Hubungan antara jumlah derajat semua titik dalam suatu graf G dengan banyak sisi, yaitu m adalah

$$\sum_{v \in G} \deg v = 2m$$

disebut sebagai "Teorema Pertama dalam Teori Graf" yang dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 1

Jika G adalah graf dengan ukuran m, maka

$$\sum_{v \in V(G)} \deg v = 2m$$

Bukti

Setiap menghitung derajat suatu titik di G, maka suatu sisi dihitung 1 kali. Karena setiap sisi menghubungkan dua titik berbeda maka ketika menghitung derajat semua titik, sisi akan terhitung dua kali. Dengan demikian diperoleh bahwa jumlah semua derajat titik di G sama dengan 2 kali jumlah sisi di G. Terbukti bahwa

$$\sum_{v \in V(G)} \deg v = 2m$$

Teorema 2

Banyaknya titik berderajat ganjil pada suatu graf adalah genap.

Bukti

Pandang sembarang graf G. Misalkan A dan B berturut-turut adalah himpunan semua titik G yang berderajat genap dan ganjil. Jelas bahwa $V(G) = A \cup B$, sehingga

$$\sum_{v \in A} \deg v + \sum_{v \in B} \deg v = \sum_{v \in V(G)} \deg v = 2m$$

Selanjutnya, karena untuk setiap $\in A$, $\deg v$ genap, maka $\sum_{v \in A} \deg v$ genap. Akibatnya, $\sum_{v \in B} \deg v$ genap. Padahal, untuk setiap titik $v \in B$, $\deg v$ ganjil. Akibatnya, banyaknya titik di B harus genap. Terbukti.

2.2.5 Graf Invers dari Grup

Misalkan $(\mathrm{G},*)$ adalah grup berhingga dan $S = \{u \in \mathrm{G} | u \neq u^{-1}\}$. Didefinisikan graf invers yang terkait dengan G, yaitu $\Gamma_S(G)$ adalah graf yang himpunan titiknya anggota dengan G sedemikian sehingga dua titik yang berbeda u dan v adalah terhubung langsung jika dan hanya jika $u * v \in S$ atau $v * u \in S$ (Alfuraidan dan Zakariya, 2017).

Catatan

1. Jelas, identitas e adalah anggota trivial yang invers terhadap dirinya sendiri dalam grup berhingga G. Maka $e \notin S$. Sehingga menyebabkan kardinalitas dari S kurang dari kardinalitas dari G. Khususnya, jika G tidak memuat anggota yang invers terhadap dirinya sendiri selain identitas maka $|S| = |\mathrm{G}| - 1$.
2. Banyaknya anggota S selalu genap, maka $|S| = |\mathrm{G}| - 1$ jika banyaknya anggota G ganjil.

3. Untuk sebarang graf invers $\deg e = |S|$ (Monther dan Yusuf, 2017).

Sebagai contoh pada grup dihedral-6 yaitu $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$ terhadap operasi fungsi komposisi. Maka invers dari masing-masing anggota D_6 adalah

$1^{-1} = 1$	$(r^2)^{-1} = r$	$sr^{-1} = sr$
$r^{-1} = r^2$	$s^{-1} = s$	$(sr^2)^{-1} = sr^2$

Berdasarkan uraian invers tersebut, didapatkan bahwa $1, s, sr, sr^2$ invers terhadap dirinya sendiri. Oleh karena itu, dapat dibangun suatu himpunan bagian S dari D_6 yang tidak memuat anggota yang invers terhadap dirinya sendiri, sehingga diperoleh $S = \{r, r^2\}$.

Maka terbentuklah graf invers sebagai berikut:

Gambar 2.4 Graf Invers Grup Dihedral-6 (D_6)

Dari Gambar 2.4 dapat diketahui bahwa

$1 \circ r = r$	$s \circ sr = r$	$sr \circ s = r^2$	$sr^2 \circ s = r$
$1 \circ r^2 = r^2$	$s \circ sr^2 = r^2$	$sr \circ sr^2 = r$	$sr^2 \circ sr = r^2$

dengan $r, r^2 \in S$ maka ada sisi sehingga titik-titik tersebut terhubung langsung.

2.3 Matriks

2.3.1 Definisi Matriks

Suatu matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan matriks dinamakan entri. Matriks terdiri dari entri-entri yang disusun menurut baris dan kolom sehingga berbentuk persegi panjang dengan panjang dan lebar menunjukkan banyak baris dan banyak kolom. Matriks yang memiliki m baris dan n kolom disebut matriks berukuran $m \times n$. Bentuk umum dari matriks adalah sebagai berikut:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ atau } [a_{ij}]_{m \times n}$$

(Anton dan Rorres, 2004).

Contoh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad [2 \quad 1 \quad 0], \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad [4]$$

Matriks pertama pada contoh di atas mempunyai 3 baris dan 2 kolom, sehingga ukurannya adalah 3×2. Angka pertama selalu menunjukkan banyaknya baris dan angka kedua menunjukkan banyaknya kolom. Jadi, matriks selebihnya dalam contoh di atas berturut-turut mempunyai ukuran $1 \times 3, 2 \times 2, 2 \times 1, 1 \times 1$ (Anton dan Rorres, 2004).

2.3.2 Operasi Matriks

a. Penjumlahan matriks

Jika $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{B}$ adalah sebarang dua matriks yang ukurannya sama, maka jumlah $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan bersama-sama entri yang bersesuaian dalam kedua matriks tersebut. Matriks-matriks yang ukurannya berbeda tidak bisa ditambahkan (Anton dan Rorres, 2004).

Contoh:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 7 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Maka

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2+(-4) & 1+3 & 0+5 \\ -1+2 & 0+2 & 2+0 \\ 4+3 & -2+2 & 7+(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 7 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

b. Pengurangan matriks

Jika $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{B}$ adalah sebarang dua matriks yang ukurannya sama, maka selisih $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan bersama-sama entri yang bersesuaian dalam kedua matriks tersebut. Matriks-matriks yang ukurannya berbeda tidak bisa dikurangikan.

Contoh:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 9 & -4 & 6 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 9 & -4 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 6 & -9 & 5 \end{bmatrix}$$

c. Perkalian matriks

Jika $\boldsymbol{A}$ adalah matriks $m \times r$ dan $\boldsymbol{B}$ adalah matriks $r \times n$, maka hasil kali $\boldsymbol{AB}$ adalah matriks $m \times n$ yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut, untuk mencari entri dalam baris i dan kolom j dari $\boldsymbol{AB}$, pilihlah baris i dari matriks $\boldsymbol{A}$ dan kolom j dari matriks $\boldsymbol{B}$**,** kalikanlah entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut bersama-sama dan kemudian tambahkanlah hasil kali yang dihasilkan. Perkalian $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{B}$ terdefinisi jika dan hanya jika banyak kolom matriks $\boldsymbol{A}$ sama dengan banyak baris matriks $\boldsymbol{B}$.

Contoh:

Matriks $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

dengan mengalikannya, maka menghasilkan

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{BA} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -7 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$$

Jadi $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$ (Anton dan Rorres, 2004).

2.3.3 Representasi Graf dalam Matriks

Misalkan G graf dengan order n $(n \geq 1)$ dan ukuran m serta himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Matriks keterhubungan langsung titik atau matriks keterhubungan langsung dari graf G, dinotasikan dengan $\boldsymbol{A}(G)$, adalah matriks berordo $n \times n$ dengan unsur pada baris ke-i dan kolom ke-j bernilai 1 jika titik v_i terhubung langsung dengan titik v_j dan 0 untuk lainnya. Dengan kata lain, matriks keterhubungan langsung dapat ditulis $\boldsymbol{A}(G) = [a_{ij}], 1 \leq i, j \leq n$, dengan

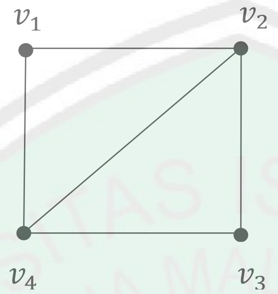
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, jika } v_i v_j \in \boldsymbol{E}(G) \\ 0 & \text{, jika } v_i v_j \notin \boldsymbol{E}(G) \end{cases}$$

Matriks keterhubungan langsung suatu graf G adalah matriks simetri dengan unsur 0 dan 1 dan memuat nilai 0 pada diagonal utamanya. Hal ini karena graf tidak memuat *loop* dan tidak memuat sisi paralel.

Contoh:

Misalkan graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4\}$. Maka diagram dan matriks keterhubungan langsung graf G sebagai berikut:

G:



$$\boldsymbol{A}(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Gambar 2.5 Graf G dan Matriks Keterhubungan Titik

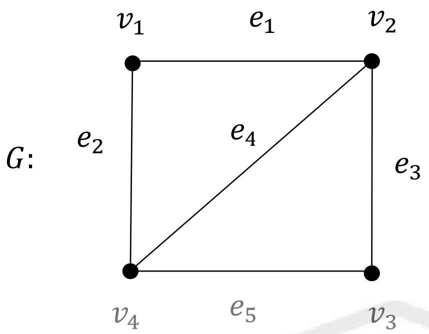
Misalkan G graf dengan order $n(n \geq 1)$ dan ukuran m serta himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Matriks keterhubungan langsung sisi dari graf G, dinotasikan dengan $\boldsymbol{B}(G)$, adalah matriks berordo $m \times m$ dengan unsur pada baris ke-i dan kolom ke-j bernilai 1 jika sisi e_i terhubung langsung dengan sisi e_j, dan 0 untuk lainnya. Dengan kata lain, matriks keterhubungan langsung sisi dapat ditulis $\boldsymbol{B}(G) = [b_{ij}], 1 \leq i, j \leq m$, dengan

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, jika } e_i \text{ dan } e_j \text{ terhubung langsung} \\ 0 & \text{, jika } e_i \text{ dan } e_j \text{ tidak terhubung langsung} \end{cases}$$

Matriks keterhubungan langsung sisi suatu graf G juga merupakan matriks simetri dengan unsur 0 dan 1 dan memuat nilai 0 pada diagonal utamanya.

Contoh:

Misalkan graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4\}$. Maka diagram dan matriks keterhubungan langsung sisi graf G sebagai berikut:



$$\boldsymbol{B}(G) = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Gambar 2.6 Graf G dan Matriks Keterhubungan Sisi

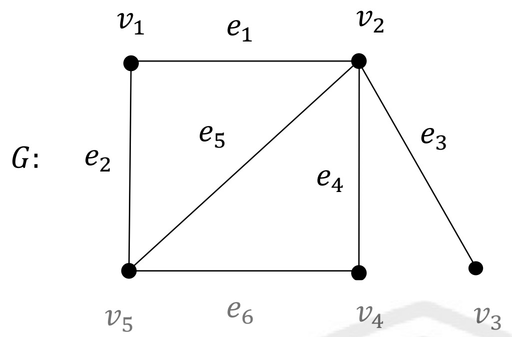
Misalkan G graf dengan order $n (n \geq 1)$ dan ukuran m serta himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Matriks keterkaitan dari graf G, dinotasikan dengan $\boldsymbol{I}(G)$, adalah matriks berordo $n \times m$ dengan unsur pada baris i dan kolom j adalah bilangan yang menyatakan berapa kali titik v_i terkait langsung dengan sisi e_j. Dengan kata lain, matriks keterkaitan dapat ditulis $\boldsymbol{I}(G) = [c_{ij}], 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$, dengan

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, jika } v_i \text{ terkait langsung dengan } e_j \\ 0 & \text{, jika } v_i \text{ tidak terkait langsung dengan } e_j \end{cases}$$

Matriks keterkaitan suatu graf G adalah matriks dengan unsur 0 dan 1 (Abdussakir, dkk, 2016).

Contoh:

Misalkan graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{v_1v_2, v_1v_5, v_2v_3, v_2v_4, v_2v_5, v_4v_5\}$. Maka diagram dan matriks keterkaitan dari graf G sebagai berikut:



$$I(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Gambar 2.7 Graf G dan Matriks Keterkaitannya

2.3.4 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Kata “vektor eigen” adalah ramuan bahasa Jerman dan Inggris. Dalam bahasa Jerman “eigen” dapat diterjemahkan sebagai “sebenarnya” atau “karakteristik”. Oleh Karena itu, nilai eigen dapat juga dinamakan nilai sebenarnya atau nilai karakteristik. Dalam literatur lama kadang-kadang dinamakan akar-akar *latent*.

Jika $\boldsymbol{A}$ adalah matriks $n \times n$, maka vektor tak nol $\boldsymbol{x}$ di dalam R^n dinamakan vektor eigen *(eigenvector)* dari $\boldsymbol{A}$ jika $\boldsymbol{Ax}$ adalah kelipatan skalar dari $\boldsymbol{x}$; yakni, $\boldsymbol{Ax} = \lambda \boldsymbol{x}$ untuk suatu skalar λ. Skalar λ dinamakan nilai eigen *(eigenvalue)* dari $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{x}$ dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ (Anton dan Rorres, 2004).

Teorema

Misalkan $\boldsymbol{A}$ matriks $n \times n$. Bilangan λ adalah nilai eigen jika dan hanya jika $\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$, dimana $\boldsymbol{I}$ notasi dari matriks $n \times n$ (Jain dan Gunawardena, 2004).

Nilai eigen dan vektor eigen mempunyai tafsiran geometrik yang bermanfaat dalam R^2 dan R^3. Jika λ adalah nilai eigen dari $\boldsymbol{A}$ yang bersesuaian dengan $\boldsymbol{x}$, maka $\boldsymbol{Ax} = \lambda\boldsymbol{x}$, sehingga perkalian oleh $\boldsymbol{A}$ akan memperbesar $\boldsymbol{x}$, atau membalik arah $\boldsymbol{x}$, yang bergantung pada nilai λ. Untuk mencari nilai eigen matriks $\boldsymbol{A}$ yang berukuran $n \times n$ maka dituliskan kembali $\boldsymbol{Ax} = \lambda\boldsymbol{x}$ sebagai $\boldsymbol{Ax} = \lambda\boldsymbol{Ix}$ atau secara ekivalen $(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = 0$.

Supaya λ menjadi nilai eigen, maka harus ada pemecahan tak nol dari persamaan ini. Akan tetapi persamaan ini akan mempunyai pemecahan tak nol jika dan hanya jika $det(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0$ ini dinamakan persamaan karakteristik $\boldsymbol{A}$, skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai eigen dari $\boldsymbol{A}$. Bila diperluas, maka determinan $det(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$ adalah polinom λ yang dinamakan polinom karakteristik dari $\boldsymbol{A}$ (Anton dan Rorres, 2004).

Jika $\boldsymbol{A}$ adalah matriks $n \times n$, maka polinom karakteristik $\boldsymbol{A}$ harus terpenuhi sebanyak n dan koefisien λ^n adalah 1. Jadi, polinom karakteristik dari matriks $n \times n$ mempunyai bentuk $det(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n$.

Jika $\boldsymbol{A}$ matriks $n \times n$, maka pernyataan-pernyataan berikut ekivalen satu sama lain:

1. λ adalah nilai eigen dari $\boldsymbol{A}$.
2. Sistem persamaan $(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = 0$ mempunyai pemecahan yang taktrivial.
3. Ada vektor tak nol $\boldsymbol{x}$ di dalam R^n sehingga $\boldsymbol{Ax} = \lambda\boldsymbol{x}$.
4. λ adalah pemecahan riil dari persamaan karakteristik $det(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0$.

Vektor eigen $\boldsymbol{A}$ yang bersesuaian dengan nilai eigen λ adalah vektor tak nol $\boldsymbol{x}$ yang memenuhi $\boldsymbol{Ax} = \lambda\boldsymbol{x}$. Secara ekivalen, vektor eigen yang bersesuaian dengan λ adalah vektor tak nol dalam ruang pemecahan dari $(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = 0$. Ruang pemecahan ini dinamakan sebagai ruang eigen *(eigenspace)* dari $\boldsymbol{A}$ yang bersesuaian dengan λ.

2.3.5 Eliminasi Gauss

Dalam Anton dan Rorres (2004), suatu matriks dikatakan dalam bentuk eselon baris tereduksi *(reduced row-echelon form)* jika mempunyai sifat-sifat berikut:

1. Jika baris tidak terdiri seluruhnya dari nol, maka bilangan tak nol pertama dalam baris tersebut adalah 1 (dinamakan 1 utama).
2. Jika terdapat baris yang seluruhnya terdiri dari nol, maka semua baris seperti itu dikelompokkan bersama-sama di bawah matriks.
3. Dalam sebarang dua baris yang berurutan yang seluruhnya tidak terdiri dari nol, maka 1 utama dalam baris yang lebih rendah terdapat lebih jauh ke kanan dari 1 utama dalam baris yang lebih tinggi.
4. Masing-masing kolom yang memuat 1 utama mempunyai nol di tempat lain.

Contoh:

Tentukan nilai $x, y,$ dan z dari tiga sistem persamaan linear berikut ini!

$$x + y + 2z = 8$$

$$-x - 2y + 3z = 1$$

$$3x + 7y + 4z = 10$$

Penyelesaian:

1. Ubah SPL tersebut menjadi matriks augmentasi

$$\boldsymbol{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 4 & 10 \end{array}\right]$$

2. Pilihlah elemen yang lebih mudah dihitung dengan mengubah baris ketiga kolom pertama menjadi 0 dengan perhitungan $R3 + 3R2$

$$\boldsymbol{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 13 & 13 \end{array}\right]$$

3. Ubah baris kedua kolom pertama menjadi 0 dengan perhitungan $R2 + R1$

$$\boldsymbol{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 13 & 13 \end{array}\right]$$

4. Ubah baris ketiga kolom kedua menjadi 0 dengan perhitungan $R3 + R2$

$$\boldsymbol{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 18 & 22 \end{array}\right]$$

5. Ubah baris kedua kolom kedua dan baris ketiga kolom ketiga menjadi 1 dengan perhitungan $R2: -1$ dan $R3: 18$ sehingga memuat nilai 1 pada diagonal utamanya

$$\boldsymbol{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{22}{18} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{9} \end{array}\right]$$

sehingga $z = \frac{11}{9}$

6. Subtitusikan nilai z ke persamaan 2 (baris kedua)

$$y - 5z = -9$$

$$y - 5\left(\frac{11}{9}\right) = -9$$

$$y - \frac{55}{9} = -9$$

$$y = -9 + \frac{55}{9} = \frac{-81 + 55}{9} = -\frac{26}{9}$$

7. Subtitusikan nilai y dan z ke persamaan 1 (baris pertama)

$$x + y + 2z = 8$$

$$x + \left(-\frac{26}{9}\right) + 2\left(\frac{11}{9}\right) = 8$$

$$\sim\sim -\frac{26}{9} + \frac{22}{9} = 8$$

$$x = 8 + \frac{26}{9} - \frac{22}{9} = \frac{72 + 26 - 22}{9} = \frac{76}{9}$$

Jadi $x = \frac{76}{9}, y = -\frac{26}{9}, z = \frac{11}{9}$

2.4 Matriks *Laplace*

Misalkan $G(V, E)$ adalah graf dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E, dengan $|V| = n$ dan $|E| = m$. Jadi G adalah graf dengan n titik dan m sisi.

Matriks *Laplace* dari G adalah matriks $\boldsymbol{L}(G) = \boldsymbol{D}(G) - \boldsymbol{A}(G)$, dengan $\boldsymbol{D}(G)$ adalah diagonal matriks dimana entrinya adalah derajat titik dari G dan $\boldsymbol{A}(G)$ adalah matriks *Adjacency* graf G (Biyikoglu, dkk, 2009).

Matriks derajat dari graf G, dinotasikan dengan $\boldsymbol{D}(G)$ adalah matriks diagonal yang elemen baris ke-i dan kolom ke-j derajat dari $v_i, i = 1,2,3, \dots, n$. Jadi, matriks derajat dari graf G dapat ditulis $\boldsymbol{D}(G) = [d_{ij}], 1 \leq i, j \leq n$, dengan

$$d_{ij} = \begin{cases} \deg(v_i) & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$$

(Abdussakir, dkk, 2016).

2.5 Spektrum *Laplace*

Spektrum *Laplace* dari graf berhingga G didefinisikan dengan spektrum dari matriks *Laplace* yang merupakan himpunan dari nilai eigen bersamaan dengan multiplisitas dari nilai eigen tersebut.

Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ adalah nilai eigen berbeda dari L, dengan $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n$, dan misalkan $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_n)$ adalah banyaknya basis untuk ruang vektor eigen masing-masing λ_i, maka matriks berordo $(2 \times n)$ yang memuat $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ pada baris pertama dan $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_n)$ pada baris kedua disebut spektrum graf G. Spektrum yang diperoleh dari matriks $\boldsymbol{L}(G)$ disebut spektrum *Laplace* dan dinotasikan dengan $spec_L(G)$. Jadi, spektrum *Laplace* dari graf G dapat ditulis dengan

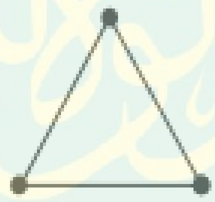
$$\boldsymbol{spec_L}(G) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ m(\lambda_1) & m(\lambda_2) & \cdots & m(\lambda_n) \end{bmatrix}$$

(Abdussakir, dkk, 2009).

Contoh:

Untuk menentukan spektrum *Laplace* suatu graf, perhatikan graf komplit K_3 beserta matriks keterhubungan titik dan matriks derajatnya berikut ini:

K_3:



$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Pertama menghitung matriks *Laplace* dengan rumus

$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{A}$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Kemudian menentukan nilai eigen dari matriks *Laplace* menggunakan persamaan $\det(\boldsymbol{L} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$. Diperoleh

$$\det\left(\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}\right) = 0$$

$$-\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0$$

$$(\lambda^3 - 2)(\lambda + 1)^2 = 0$$

Jadi, diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = -1$.

Berdasarkan persamaan karakteristik tersebut maka didapatkan nilai *algebraic multiplicity*, $m(\lambda_1) = 1$ dan $m(\lambda_2) = 2$.

Dengan demikian, spektrum *Laplace* graf K_3 adalah

$$\boldsymbol{spec}_L(K_3) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2.6 Kajian Agama Terkait dengan Silaturrahim

Agama Islam adalah agama rahmat, sebagaimana al-Quran menyatakan bahwa Nabi Saw diutus sebagai *rahmatan lil 'alamin.* Untuk mewujudkannya diperlukan kerjasama antara umat manusia tidak terbatas antar *intern* umat Islam saja, tetapi dengan non muslim juga perlu dijalin. Untuk mewujudkan persaudaraan antar sesama manusia ini, al-Quran telah memperkenalkan sebuah konsep yaitu *ta'aruf* yang telah disebutkan dalam al-Quran surat al-Hujurat ayat 13, yaitu:

يَٰٓأَيُّهَا ٱلنَّاسُ إِنَّا خَلَقۡنَٰكُم مِّن ذَكَرٖ وَأُنثَىٰ وَجَعَلۡنَٰكُمۡ شُعُوبٗا وَقَبَآئِلَ لِتَعَارَفُوٓاْۚ إِنَّ أَكۡرَمَكُمۡ عِندَ ٱللَّهِ أَتۡقَىٰكُمۡۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلِيمٌ خَبِيرٞ ١٣

Artinya: *"Hai manusia, Sesungguhnya Kami menciptakan kamu dari seorang laki-laki dan seorang perempuan dan menjadikan kamu berbangsa-bangsa dan bersuku-suku supaya kamu saling kenal-mengenal. Sesungguhnya orang yang paling mulia di antara kamu di sisi Allah ialah orang yang paling takwa diantara kamu. Sesungguhnya Allah Maha mengetahui lagi Maha Mengenal" (QS. al-Hujurat:13).*

M. Quraih Shihab menyatakan bahwa ayat tersebut memberikan uraian tentang prinsip dasar hubungan manusia, karena pada ayat ini seruan tidak lagi ditujukan secara khusus kepada orang-orang beriman, akan tetapi kepada seluruh jenis manusia yaitu "Wahai sekalian manusia" (Shihab, 2004). Sebagaimana telah dijelaskan dalam hadits yang berbunyi:

قَالَ أَبُو عِيسَى التِّرْمِذِيُّ: حَدَّثَنَا أَحْمَدُ بْنُ مُحَمَّدٍ، حَدَّثَنَا عَبْدُ اللَّهِ بْنُ الْمُبَارَكِ، عَنْ عَبْدِ الْمَلِكِ بْنِ عِيسَى الثَّقَفِيِّ، عَنْ يَزِيدَ مَوْلَى الْمُنْبَعِثِ عَنْ أَبِي هُرَيْرَةَ، عَنِ النَّبِيِّ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ قَالَ: "تَعَلَّمُوا مِنْ أَنْسَابِكُمْ مَا تَصِلُونَ بِهِ أَرْحَامَكُمْ؛ فَإِنَّ صِلَةَ الرَّحِمِ مَحَبَّةٌ فِي الْأَهْلِ، مَثْرَاةٌ فِي الْمَالِ، مَنْسَأَةٌ فِي الْأَثَرِ

Artinya: *"Abu Isa At-Turmuzi mengatakan, telah menceritakan kepada kami Ahmad ibnu Muhammad, telah menceritakan kepada kami Abdullah ibnul Mubarak, dari Abdul Malik ibnu Isa As-Saqafi, dari Yazid Mula Al-Munba'is, dari Abu Hurairah r.a., dari Nabi Saw. yang telah bersabda: Pelajarilah nasab-nasab kalian untuk mempererat silaturrahim (hubungan keluarga) kalian, karena sesungguhnya silaturrahim itu menanamkan rasa cinta kepada kekeluargaan, memperbanyak harta, dan memperpanjang usia".*

Agama Islam di samping mengatur hubungan antar manusia (*hablum min an Nâs*), juga menitikberatkan kepada hubungan antar manusia dengan Allah (*hablum min Allah*). Sebagaimana Allah Swt. berfirman surat ali Imran ayat 112:

ضُرِبَتۡ عَلَيۡهِمُ ٱلذِّلَّةُ أَيۡنَ مَا ثُقِفُوٓاْ إِلَّا بِحَبۡلٖ مِّنَ ٱللَّهِ وَحَبۡلٖ مِّنَ ٱلنَّاسِ وَبَآءُو بِغَضَبٖ
مِّنَ ٱللَّهِ وَضُرِبَتۡ عَلَيۡهِمُ ٱلۡمَسۡكَنَةُۚ ذَٰلِكَ بِأَنَّهُمۡ كَانُواْ يَكۡفُرُونَ بِـَٔايَٰتِ ٱللَّهِ وَيَقۡتُلُونَ
ٱلۡأَنۢبِيَآءَ بِغَيۡرِ حَقّٖۚ ذَٰلِكَ بِمَا عَصَواْ وَّكَانُواْ يَعۡتَدُونَ ١١٢

Artinya: *"Mereka diliputi kehinaan di mana saja mereka berada, kecuali jika mereka berpegang kepada tali (agama) Allah dan tali (perjanjian) dengan manusia, dan mereka kembali mendapat kemurkaan dari Allah dan mereka diliputi kerendahan. yang demikian itu karena mereka kafir kepada ayat-ayat Allah dan membunuh para nabi tanpa alasan yang benar. Demikian itu disebabkan mereka durhaka dan melampaui batas"(QS. ali Imran:112).*

BAB III

PEMBAHASAN

Pada pembahasan ini, spektrum *Laplace* komplemen graf invers dari grup dihedral (D_{2n}) dibahas secara terpisah antara *n* ganjil dengan *n* genap.

3.1 Spektrum *Laplace* Komplemen Graf Invers dari Grup Dihedral (D_{2n}) untuk *n* Ganjil

Langkah-langkah menentukan spektrum *Laplace* komplemen graf invers dari grup dihedral D_{2n} untuk n ganjil adalah sebagai berikut:

3.1.1 Spektrum *Laplace* Komplemen Graf Invers dari Grup Dihedral (D_6)

Himpunan anggota dari grup dihedral-6 adalah $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Dengan operasi komposisi " $\circ$ " pada setiap anggota D_6 diperoleh tabel *Cayley* sebagai berikut:

Tabel 3.1 Tabel Cayley Grup Dihedral-6 (D_6)

$\circ$	1	r	r^2	s	sr	sr^2
1	1	r	r^2	s	sr	sr^2
r	r	r^2	1	sr^2	s	sr
r^2	r^2	1	r	sr	sr^2	s
s	s	sr	sr^2	1	r	r^2
sr	sr	sr^2	s	r^2	1	r
sr^2	sr^2	s	sr	r	r^2	1

Berdasarkan Tabel 3.1 dapat diketahui invers dari setiap anggota D_6 sebagai berikut:

$1 \circ 1 = 1$ maka $1^{-1} = 1$

$r \circ r^2 = r^2 \circ r = 1$ maka $r^{-1} = r^2$

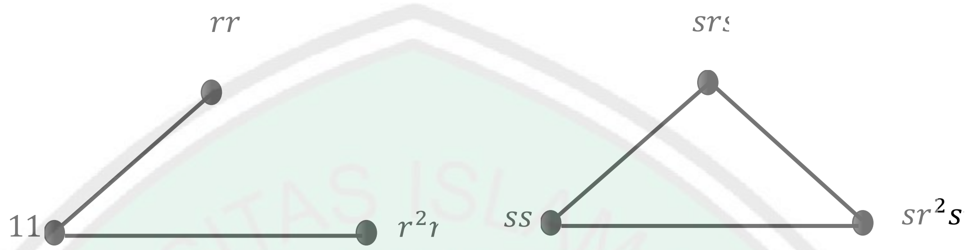
$r^2 \circ r = r \circ r^2 = 1$ maka $(r^2)^{-1} = r$

$s \circ s = 1$ maka $s^{-1} = s$

$sr \circ sr = 1$ maka $sr^{-1} = sr$

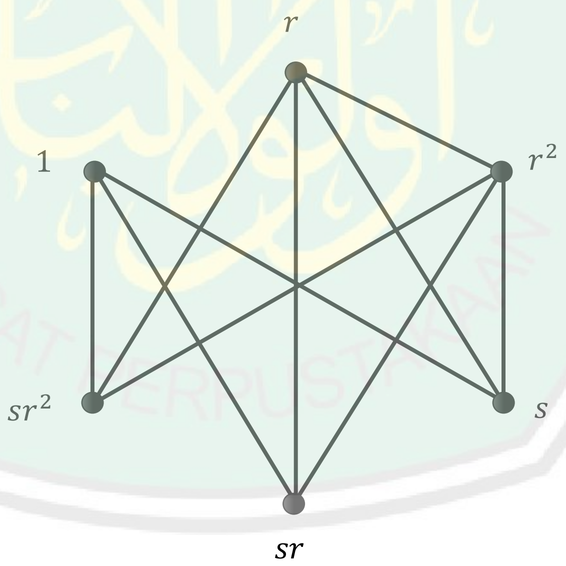
$sr^2 \circ sr^2 = 1$ maka $(sr^2)^{-1} = sr^2$

Berdasarkan uraian invers tersebut, didapatkan bahwa $1, s, sr, sr^2$ invers terhadap dirinya sendiri. Oleh karena itu, dapat dibangun suatu himpunan bagian S dari D_6 yang tidak invers dengan dirinya sendiri, sehingga diperoleh $S = \{r, r^2\}$. Dengan demikian dapat dibentuk suatu graf invers $\left(\Gamma_s(D_6)\right)$ sebagai berikut:



Gambar 3.1 Graf Invers Grup Dihedral-6 $\left(\Gamma_s(D_6)\right)$

Kemudian dapat digambarkan ke dalam bentuk komplemen graf invers $(\overline{\Gamma_s(D_6)})$ sebagai berikut:



Gambar 3.2 Komplemen Graf Invers Grup Dihedral-6 $\left(\overline{\Gamma_s(D_6)}\right)$

Pada Gambar 3.2 menghasilkan matriks keterhubungan titik *(adjacency matrix)* sebagai berikut:

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} 1 \\ r \\ r^2 \\ s \\ sr \\ sr^2 \end{array} \overset{\begin{array}{cccccc} 1 & r & r^2 & s & sr & sr^2 \end{array}}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

Kemudian dapat ditentukan matriks derajat komplemen graf inversnya

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh matriks *Laplace* sebagai berikut:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{A}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks *Laplace* maka akan dicari nilai eigen sebagai berikut:

$$\det(\boldsymbol{L} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$$

$$\det\left(\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 4-\lambda & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 3-\lambda & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}\right) = 0$$

Dengan mereduksi matriks tersebut menggunakan metode *Gaussian Elimination* yang terdapat pada *software* Maple, maka akan diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -\dfrac{\lambda^2-8\lambda+15}{-4+\lambda} & -\dfrac{-5+\lambda}{-4+\lambda} & -\dfrac{-5+\lambda}{-4+\lambda} & -\dfrac{-5+\lambda}{-4+\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{\lambda^2-6\lambda+6}{-3+\lambda} & \dfrac{3}{-3+\lambda} & \dfrac{3}{-3+\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{\lambda^3-9\lambda^2+21\lambda-9}{\lambda^2-6\lambda+6} & \dfrac{3(-3+\lambda)}{\lambda^2-6\lambda+6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{(\lambda^2-9\lambda+18)\lambda}{\lambda^2-6\lambda+3} \end{vmatrix} = 0$$

Karena $\det(\boldsymbol{L}-\lambda\boldsymbol{I})$ adalah hasil perkalian diagonal matriks segitiga, maka diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$P(\lambda) = (3-\lambda)(4-\lambda)\left(-\frac{\lambda^2-8\lambda+15}{-4+\lambda}\right)\left(-\frac{\lambda^2-6\lambda+6}{-3+\lambda}\right)\left(-\frac{\lambda^3-9\lambda^2+21\lambda-9}{\lambda^2-6\lambda+6}\right)\left(-\frac{(\lambda^2-9\lambda+18)\lambda}{\lambda^2-6\lambda+3}\right) = 0$$

$$= \lambda^6 - 20\lambda^5 + 156\lambda^4 - 594\lambda^3 + 1107\lambda^2 - 810\lambda = 0$$

$$= \lambda(\lambda-5)(\lambda-6)(\lambda-3)^3 = 0$$

Sehingga diperoleh nilai eigennya, yaitu:

$$\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = 3, \lambda_4 = 0$$

Berdasarkan persamaan karakteristik tersebut maka didapatkan nilai *algebraic multiplicity* sebagai berikut:

$$m(\lambda_1) = 1, m(\lambda_2) = 1, m(\lambda_3) = 3, m(\lambda_4) = 1$$

Dengan demikian diperoleh spektrum *Laplace* dari komplemen graf invers dari grup dihedral-6 sebagai berikut:

$$\boldsymbol{spec_L}\left(\overline{\Gamma_s(D_6)}\right) = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

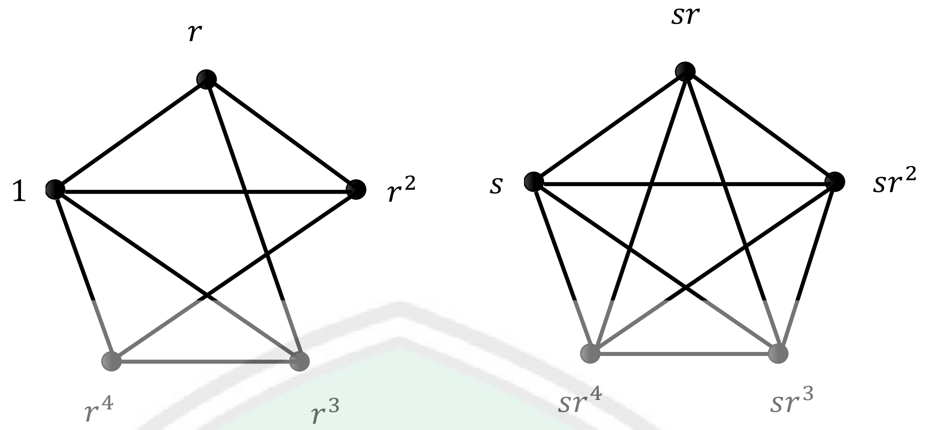
3.1.2 Spektrum *Laplace* Komplemen Graf Invers dari Grup Dihedral (D_{10})

Himpunan anggota dari grup dihedral-10 adalah $D_{10} = \{1, r, r^2, r^3, r^4, s, sr^2, sr^3, sr^4\}$. Dengan operasi komposisi " $\circ$ " pada setiap anggota D_{10} diperoleh tabel *Cayley* sebagai berikut:

Tabel 3.2 Tabel Cayley Grup Dihedral-10 (D_{10})

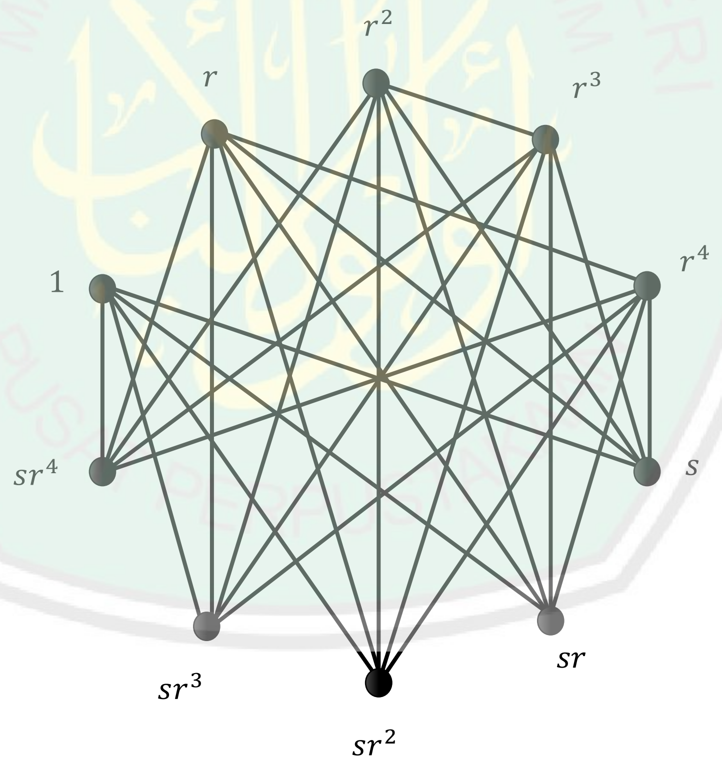
$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
1	1	r	r^2	r^3	r^4	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r	r	r^2	r^3	r^4	1	sr^4	s	sr	sr^2	sr^3
r^2	r^2	r^3	r^4	1	r	sr^3	sr^4	s	sr	sr^2
r^3	r^3	r^4	1	r	r^2	sr^2	sr^3	sr^4	s	sr
r^4	r^4	1	r	r^2	r^3	sr	sr^2	sr^3	sr^4	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	1	r	r^2	r^3	r^4
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	s	r^4	1	r	r^2	r^3
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	s	sr	r^3	r^4	1	r	r^2
sr^3	sr^3	sr^4	S	sr	sr^2	r^2	r^3	r^4	1	r
sr^4	sr^4	s	sr	sr^2	sr^3	r	r^2	r^3	r^4	1

Berdasarkan Tabel 3.2 didapatkan bahwa $1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4$ adalah invers terhadap dirinya sendiri. Oleh karena itu, dapat dibangun suatu himpunan bagian S dari D_{10} yang tidak invers dengan dirinya sendiri, sehingga diperoleh $S = \{r, r^2, r^3, r^4\}$. Dengan demikian dapat dibentuk suatu graf invers $\left(\Gamma_s(D_{10})\right)$ sebagai berikut:



Gambar 3.3 Graf Invers Grup Dihedral-10 $(\Gamma_s(D_{10}))$

Kemudian dapat digambarkan ke dalam bentuk komplemen graf invers $(\overline{\Gamma_s(D_{10})})$ sebagai berikut:



Gambar 3.4 Komplemen Graf Invers Grup Dihedral-10 $(\overline{\Gamma_s(D_{10})})$

Pada Gambar 3.4 menghasilkan matriks keterhubungan titik *(adjacency matrix)* sebagai berikut:

$$
\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ r^3 \\ r^4 \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ sr^3 \\ sr^4 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} 1 & r & r^2 & r^3 & r^4 & s & sr & sr^2 & sr^3 & sr^4 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Kemudian dapat ditentukan matriks derajat komplemen graf invers

$$
\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix}
5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5
\end{bmatrix}
$$

Dengan demikian diperoleh matriks *Laplace* sebagai berikut:

$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{A}$

$$
= \begin{bmatrix}
5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5
\end{bmatrix}
-
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix}
5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 6 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 6 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & -1 & 6 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5
\end{bmatrix}
$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks *Laplace* maka akan dicari nilai eigen dengan cara yang sama yaitu:

$$\det(\boldsymbol{L} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$$

sehingga diperoleh matriks tereduksi menggunakan metode *Gaussian Elimination* yang terdapat pada *software* Maple sebagai berikut:

$$
\begin{vmatrix}
5-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 6-\lambda & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 6-\lambda & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-12\lambda+35}{-6+\lambda} & 0 & -\frac{-7+\lambda}{-6+\lambda} & -\frac{-7+\lambda}{-6+\lambda} & -\frac{-7+\lambda}{-6+\lambda} & -\frac{-7+\lambda}{-6+\lambda} & -\frac{-7+\lambda}{-6+\lambda} \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-12\lambda+35}{-6+\lambda} & -\frac{-7+\lambda}{-6+\lambda} & -\frac{-7+\lambda}{-6+\lambda} & -\frac{-7+\lambda}{-6+\lambda} & -\frac{-7+\lambda}{-6+\lambda} & -\frac{-7+\lambda}{-6+\lambda} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-10\lambda+20}{-5+\lambda} & \frac{5}{-5+\lambda} & \frac{5}{-5+\lambda} & \frac{5}{-5+\lambda} & \frac{5}{-5+\lambda} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^3-15\lambda^2+65\lambda-75}{\lambda^2-10\lambda+20} & \frac{5(-5+\lambda)}{\lambda^2-10\lambda+20} & \frac{5(-5+\lambda)}{\lambda^2-10\lambda+20} & \frac{5(-5+\lambda)}{\lambda^2-10\lambda+20} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^3-15\lambda^2+60\lambda-50}{\lambda^2-10\lambda+15} & \frac{5(-5+\lambda)}{\lambda^2-10\lambda+15} & \frac{5(-5+\lambda)}{\lambda^2-10\lambda+15} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^3-15\lambda^2+55\lambda-25}{\lambda^2-10\lambda+10} & \frac{5(-5+\lambda)}{\lambda^2-10\lambda+10} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(\lambda^2-15\lambda+50)\lambda}{\lambda^2-10\lambda+5}
\end{vmatrix} = 0
$$

maka akan diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
P(\lambda) &= (5-\lambda)(6-\lambda)^2\left(-\frac{\lambda^2-12\lambda+35}{-6+\lambda}\right)^2\left(-\frac{\lambda^2-10\lambda+20}{-5+\lambda}\right)\left(-\frac{\lambda^3-15\lambda^2+65\lambda-75}{\lambda^2-10\lambda+20}\right) \\
&\quad \left(-\frac{\lambda^3-15\lambda^2+60\lambda-50}{\lambda^2-10\lambda+15}\right)\left(-\frac{\lambda^3-15\lambda^2+55\lambda-25}{\lambda^2-10\lambda+10}\right)\left(-\frac{(\lambda^2-15\lambda+50)\lambda}{\lambda^2-10\lambda+5}\right) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda^{10} - 54\lambda^9 + 1284\lambda^8 - 17660\lambda^7 + 154950\lambda^6 - 900000\lambda^5 \\
&\quad + 3462500\lambda^4 - 8512500\lambda^3 + 12140625\lambda^2 - 7656250\lambda = 0
\end{aligned}
$$

$$= \lambda(\lambda-10)(\lambda-7)^2(\lambda-5)^6 = 0$$

Maka diperoleh nilai eigennya, yaitu:

$$\lambda_1 = 10, \lambda_2 = 7, \lambda_3 = 5, \lambda_4 = 0$$

Berdasarkan persamaan karakteristik tersebut maka didapatkan nilai *algebraic multiplicity* sebagai berikut:

$$m(\lambda_1) = 1, m(\lambda_2) = 2, m(\lambda_3) = 6, m(\lambda_4) = 1$$

Dengan demikian diperoleh spektrum *Laplace* dari komplemen graf invers dari grup dihedral-10 sebagai berikut:

$$\boldsymbol{spec_L}\left(\overline{\Gamma_s(\mathrm{D}_{10})}\right) = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

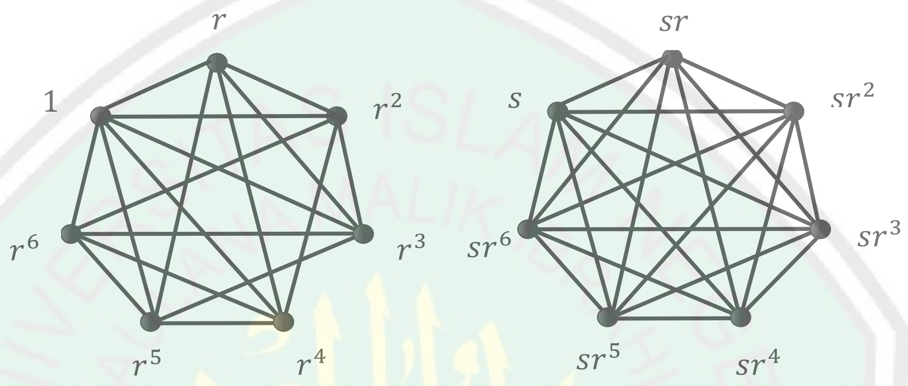
3.1.3 Spektrum *Laplace* Komplemen Graf Invers dari Grup Dihedral (D_{14})

Himpunan anggota dari grup dihedral-14 adalah $D_{14} = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}$. Dengan operasi komposisi " ∘ " pada setiap anggota D_{14} diperoleh tabel *Cayley* sebagai berikut:

Tabel 3.3 Tabel Cayley Grup Dihedral-14 (D_{14})

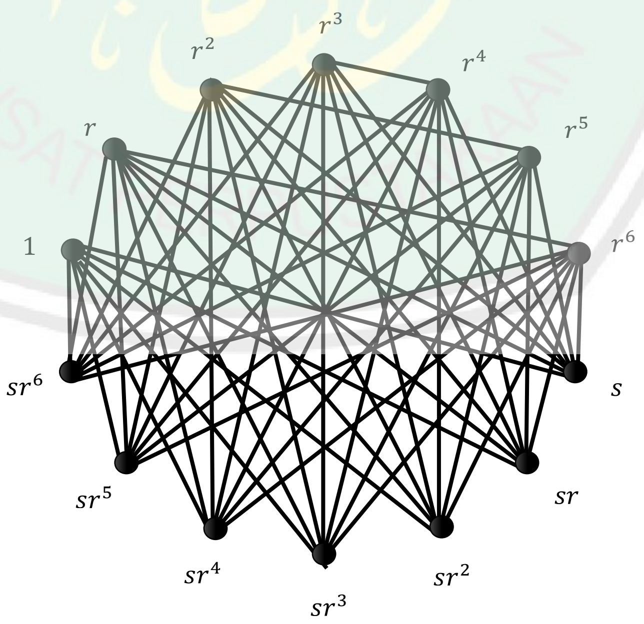
$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^3	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3
r^4	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2
r^5	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr
r^6	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3
sr^4	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2
sr^5	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r
sr^6	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1

Berdasarkan Tabel 3.3 didapatkan bahwa $1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6$ invers terhadap dirinya sendiri. Oleh karena itu, dapat dibangun suatu himpunan bagian S dari D_{14} yang tidak invers dengan dirinya sendiri, sehingga diperoleh $S = \{r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\}$. Dengan demikian dapat dibentuk suatu graf invers $\left(\Gamma_s(D_{14})\right)$ sebagai berikut:



Gambar 3.5 Graf Invers Grup Dihedral-14 $\left(\Gamma_s(D_{14})\right)$

Kemudian dapat digambarkan ke dalam bentuk komplemen graf invers $\left(\overline{\Gamma_s(D_{14})}\right)$ sebagai berikut:



Gambar 3.6 Komplemen Graf Invers Grup Dihedral-14 $\left(\overline{\Gamma_s(D_{14})}\right)$

Pada Gambar 3.6 menghasilkan matriks keterhubungan titik *(adjacency matrix)* sebagai berikut:

$$
\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ r^3 \\ r^4 \\ r^5 \\ r^6 \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ sr^3 \\ sr^4 \\ sr^5 \\ sr^6 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccccc} 1 & r & r^2 & r^3 & r^4 & r^5 & r^6 & s & sr & sr^2 & sr^3 & sr^4 & sr^5 & sr^6 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Kemudian dapat ditentukan matriks derajat komplemen graf invers

$$
\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix}
7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7
\end{bmatrix}
$$

Dengan demikian diperoleh matriks *Laplace* sebagai berikut:

$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{A}$

$$
= \begin{bmatrix}
7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7
\end{bmatrix}
-
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 8 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 8 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks *Laplace* maka akan dicari nilai eigen dengan cara yang sama yaitu:

$$\det(\boldsymbol{L} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$$

maka akan diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$\begin{aligned} P(\lambda) = \lambda^{14} - 104\lambda^{13} + 4968\lambda^{12} - 144390\lambda^{11} + 2849721\lambda^{10} - 40343562\lambda^{9} \\ + 421601880\lambda^{8} - 3293701404\lambda^{7} + 19240199811\lambda^{6} \\ - 83016428572\lambda^{5} + 257208949760\lambda^{4} - 541972001214\lambda^{3} \\ + 696220781571\lambda^{2} - 411848913042\lambda = 0 \\ = \lambda(\lambda - 14)(\lambda - 9)^{3}(\lambda - 7)^{9} = 0 \end{aligned}$$

Maka diperoleh nilai eigennya, yaitu:

$$\lambda_1 = 14, \lambda_2 = 9, \lambda_3 = 7, \lambda_4 = 0$$

Berdasarkan persamaan karakteristik tersebut maka didapatkan nilai *algebraic multiplicity* sebagai berikut:

$$m(\lambda_1) = 1, m(\lambda_2) = 3, m(\lambda_3) = 9, m(\lambda_4) = 1$$

Dengan demikian diperoleh spektrum *Laplace* dari komplemen graf invers dari grup dihedral-14 sebagai berikut:

$$\boldsymbol{spec_L}\left(\overline{\Gamma_s(\mathrm{D}_{14})}\right) = \begin{bmatrix} 14 & 9 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

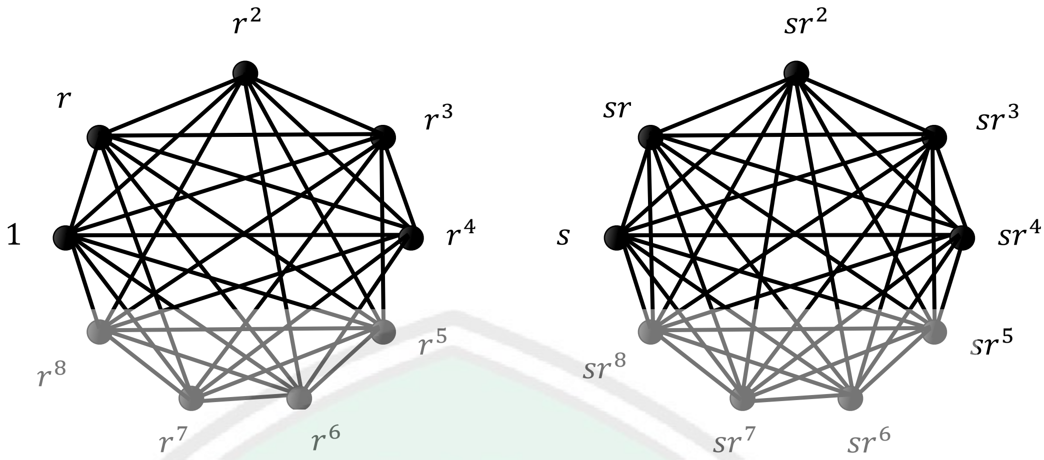
3.1.4 Spektrum *Laplace* Komplemen graf invers dari Grup Dihedral (D_{18})

Himpunan anggota dari grup dihedral-18 adalah $D_{18} = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7, sr^8\}$. Dengan operasi komposisi "$\circ$" pada setiap anggota D_{18} diperoleh tabel *Cayley* sebagai berikut:

Tabel 3.4 Tabel Cayley Grup Dihedral-18 (D_{18})

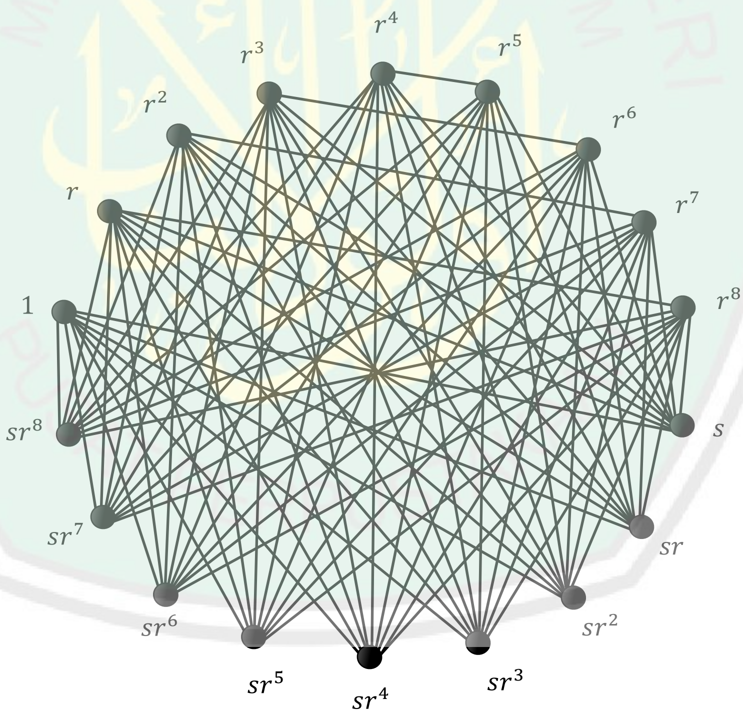
$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	1	sr^8	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	1	r	sr^7	sr^8	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
r^3	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	1	r	r^2	sr^6	sr^7	sr^8	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r^4	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	1	r	r^2	r^3	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^5	r^5	r^6	r^7	r^8	1	r	r^2	r^3	r^4	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	s	sr	sr^2	sr^3
r^6	r^6	r^7	r^8	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	s	sr	sr^2
r^7	r^7	r^8	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	s	sr
r^8	r^8	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	s	r^8	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	s	sr	r^7	r^8	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	s	sr	sr^2	r^6	r^7	r^8	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr^4	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	s	sr	sr^2	sr^3	r^5	r^6	r^7	r^8	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^5	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	1	r	r^2	r^3
sr^6	sr^6	sr^7	sr^8	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	1	r	r^2
sr^7	sr^7	sr^8	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	1	r
sr^8	sr^8	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	1

Berdasarkan Tabel 3.4 didapatkan bahwa $1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7, sr^8$ invers terhadap dirinya sendiri. Oleh karena itu, dapat dibangun suatu himpunan bagian S dari D_{18} yang tidak invers dengan dirinya sendiri, sehingga diperoleh $S = \{r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8\}$. Dengan demikian dapat dibentuk suatu graf invers $(\Gamma_s(D_{18}))$ sebagai berikut:



Gambar 3.7 Graf Invers Grup Dihedral-18 $(\Gamma_s(D_{18}))$

Kemudian dapat digambarkan ke dalam bentuk komplemen graf invers $(\overline{\Gamma_s(D_{18})})$ sebagai berikut:



Gambar 3.8 Komplemen Graf Invers Grup Dihedral-18 $(\overline{\Gamma_s(D_{18})})$

Pada Gambar 3.8 menghasilkan matriks keterhubungan titik *(adjacency matrix)* sebagai berikut:

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ r^3 \\ r^4 \\ r^5 \\ r^6 \\ r^7 \\ r^8 \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ sr^3 \\ sr^4 \\ sr^5 \\ sr^6 \\ sr^7 \\ sr^8 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccccccc} 1 & r & r^2 & r^3 & r^4 & r^5 & r^6 & r^7 & r^8 & s & sr & sr^2 & sr^3 & sr^4 & sr^5 & sr^6 & sr^7 & sr^8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Kemudian dapat ditentukan matriks derajat komplemen graf invers

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh matriks *Laplace* sebagai berikut:

$\boldsymbol{L = D - A}$

$$
= \begin{bmatrix}
9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 10 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 10 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9
\end{bmatrix}
$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks *Laplace* maka akan dicari nilai eigen dengan cara yang sama yaitu:

$$\det(\boldsymbol{L} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$$

maka akan diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$P(\lambda) = \lambda(\lambda - 18)(\lambda - 11)^4(\lambda - 9)^{12} = 0$$

Maka diperoleh nilai eigennya, yaitu:

$$\lambda_1 = 18, \lambda_2 = 11, \lambda_3 = 9, \lambda_4 = 0$$

Berdasarkan persamaan karakteristik tersebut maka didapatkan nilai *algebraic multiplicity* sebagai berikut:

$$m(\lambda_1) = 1, m(\lambda_2) = 4, m(\lambda_3) = 12, m(\lambda_4) = 1$$

Dengan demikian diperoleh spektrum *Laplace* dari komplemen graf invers dari grup dihedral-18 sebagai berikut:

$$\boldsymbol{spec_L}\left(\overline{\Gamma_s(\mathrm{D}_{18})}\right) = \begin{bmatrix} 18 & 11 & 9 & 0 \\ 1 & 4 & 12 & 1 \end{bmatrix}$$

3.1.5 Pola Spektrum *Laplace* Komplemen Graf Invers dari D_{2n}

Berdasarkan pembahasan di atas diperoleh bentuk polinomial karakteristik dan spektrum *Laplace* pada komplemen graf invers dari grup dihedral-2n $\left(\overline{\Gamma_s(D_{2n})}\right)$ yang ditunjukkan pada Tabel 3.5 sebagai berikut:

Tabel 3.5 Pola Polinomial Karakteristik dan Spektrum *Laplace* Komplemen Graf Invers dari Grup Dihedral

D_{2n}	Polinomial Karakteriktik $P(\lambda)$	Spektrum
D_6	$\lambda(\lambda-5)(\lambda-6)(\lambda-3)^3$	$\boldsymbol{spec_L}\left(\overline{\Gamma_s(D_6)}\right)=\begin{bmatrix}6 & 5 & 3 & 0\\ 1 & 1 & 3 & 1\end{bmatrix}$
D_{10}	$\lambda(\lambda-10)(\lambda-7)^2(\lambda-5)^6$	$\boldsymbol{spec_L}\left(\overline{\Gamma_s(D_{10})}\right)=\begin{bmatrix}10 & 7 & 5 & 0\\ 1 & 2 & 6 & 1\end{bmatrix}$
D_{14}	$\lambda(\lambda-14)(\lambda-9)^3(\lambda-7)^9$	$\boldsymbol{spec_L}\left(\overline{\Gamma_s(D_{14})}\right)=\begin{bmatrix}14 & 9 & 7 & 0\\ 1 & 3 & 9 & 1\end{bmatrix}$
D_{18}	$\lambda(\lambda-18)(\lambda-11)^4(\lambda-9)^{12}$	$\boldsymbol{spec_L}\left(\overline{\Gamma_s(D_{18})}\right)=\begin{bmatrix}18 & 11 & 9 & 0\\ 1 & 4 & 12 & 1\end{bmatrix}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
D_{2n}	$\lambda(\lambda-2n)\big(\lambda-(n+2)\big)^{\frac{n-1}{2}}(\lambda-n)^{\frac{3n-3}{2}}$	$\boldsymbol{spec_L}\left(\overline{\Gamma_s(D_{2n})}\right)=\begin{bmatrix}2n & n+2 & n & 0\\ 1 & \frac{n-1}{2} & \frac{3n-3}{2} & 1\end{bmatrix}$

Dari tabel di atas dapat dirumuskan teorema sebagai berikut:

Teorema 1

Spektrum *Laplace* pada komplemen graf invers dari grup dihedral D_{2n} untuk n ganjil dan $n \geq 3$ adalah

$$\boldsymbol{spec_L}\left(\overline{\Gamma_s(D_{2n})}\right)=\begin{bmatrix}2n & n+2 & n & 0\\ 1 & \dfrac{n-1}{2} & \dfrac{3n-3}{2} & 1\end{bmatrix}$$

Bukti

Misalkan grup dihedral $D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$ dengan n ganjil. Jika dioperasikan dengan operasi komposisi " $\circ$ " di D_{2n}, maka diperoleh bahwa invers dari setiap anggota adalah

$(1)^{-1} = 1$

$\left(r^i\right)^{-1} = r^{n-i} \quad , \forall i = 1,2,3, \dots, n-1$

$(s)^{-1} = s$

$\left(sr^i\right)^{-1} = sr^i \quad , \forall i = 1,2,3, \dots, n-1$

Maka diperoleh unsur-unsur $S = \left\{r^i \middle| i = 1,2,3, \dots, n-1\right\}$ yang tidak memuat anggota yang invers terhadap dirinya sendiri sehingga $|S| = n - 1$.

Maka diperoleh matriks keterhubungan titik *(adjacency matrix)*

$$\boldsymbol{A}(D_{2n}) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccc} 1 & r & r^2 & \dots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \dots & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

dan matriks derajat

$$\boldsymbol{D}(D_{2n}) = \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n+1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & n+1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n+1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{bmatrix}$$

Maka diperoleh matriks *Laplace* sebagai berikut:

$$\boldsymbol{L}(D_{2n}) = \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & n+1 & 0 & \dots & -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & n+1 & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -1 & 0 & \dots & n+1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & n & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 & n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks *Laplace* maka akan dicari nilai eigen dan *algebraic multiplicity* dari matriks tersebut. Dengan mereduksi matriks $(\boldsymbol{L}(D_{2n}) - \lambda\boldsymbol{I})$ menggunakan metode *Gaussian Elimination*, maka diperoleh

$$\begin{vmatrix} n-\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & (n+1)-\lambda & 0 & \dots & -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & (n+1)-\lambda & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{(\lambda-(n+2))(\lambda-n)}{\lambda-(n+1)} & -\frac{\lambda-(n+2)}{\lambda-(n+1)} & -\frac{\lambda-(n+2)}{\lambda-(n+1)} & -\frac{\lambda-(n+2)}{\lambda-(n+1)} & \dots & -\frac{\lambda-(n+2)}{\lambda-(n+1)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{\lambda^2-2n\lambda+(n^2-n)}{\lambda-n} & \frac{n}{\lambda-n} & \frac{n}{\lambda-n} & \dots & \frac{n}{\lambda-n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\frac{(\lambda-n)(\lambda^2-2n\lambda+3n)}{\lambda^2-2n\lambda+(n^2-n)} & \frac{n(\lambda-n)}{\lambda^2-2n\lambda+(n^2-n)} & \dots & \frac{n(\lambda-n)}{\lambda^2-2n\lambda+(n^2-n)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -\frac{(\lambda-n)(\lambda^2-2n\lambda+2n)}{\lambda^2-2n\lambda+3n} & \dots & \frac{n(\lambda-n)}{\lambda^2-2n\lambda+3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{\lambda(\lambda-n)(\lambda-2n)}{\lambda^2-2n\lambda+n} \end{vmatrix}$$

Karena $\det(\boldsymbol{L} - \lambda\boldsymbol{I})$ adalah hasil perkalian unsur diagonal utama matriks segitiga atas, maka diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut

$$P(\lambda) = \lambda(\lambda - 2n)\big(\lambda - (n+2)\big)^{\frac{n-1}{2}}(\lambda - n)^{\frac{3n-3}{2}}$$

Jika $P(\lambda) = 0$ maka diperoleh nilai eigen

$$\lambda_1 = 2n, \lambda_2 = n+2, \lambda_3 = n, \lambda_4 = 0$$

dan diperoleh nilai *algebraic multiplicity* dari perpangkatan polinomial karakteristik untuk masing-masing nilai eigen tersebut yaitu

$$m(\lambda_1) = 1, m(\lambda_2) = \frac{n-1}{2}, m(\lambda_3) = \frac{3n-3}{2}, m(\lambda_4) = 1$$

Dengan demikian, maka diperoleh

$$\boldsymbol{spec_L}\big(\Gamma_s(D_{2n})\big) = \begin{bmatrix} 2n & n+2 & n & 0 \\ 1 & \frac{n-1}{2} & \frac{3n-3}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

3.2 Spektrum *Laplace* Komplemen Graf Invers dari Grup Dihedral (D_{2n}) untuk *n* Genap

Langkah-langkah menentukan spektrum *Laplace* komplemen graf invers dari grup dihedral D_{2n} untuk n genap adalah sebagai berikut:

3.2.1 Spektrum *Laplace* Komplemen Graf Invers dari Grup Dihedral (D_8)

Himpunan anggota dari grup dihedral-8 adalah $D_8 = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$. Dengan operasi komposisi " $\circ$ " pada setiap anggota D_8 diperoleh tabel *Cayley* sebagai berikut:

Tabel 3.6 Tabel Cayley Grup Dihedral-8 (D_8)

$\circ$	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
1	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
r	r	r^2	r^3	1	sr^3	s	sr	sr^2
r^2	r^2	r^3	1	r	sr^2	sr^3	s	sr
r^3	r^3	1	r	r^2	sr	sr^2	sr^3	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	1	r	r^2	r^3
sr	sr	sr^2	sr^3	s	r^3	1	r	r^2
sr^2	sr^2	sr^3	s	sr	r^2	r^3	1	r
sr^3	sr^3	s	sr	sr^2	r	r^2	r^3	1

Berdasarkan Tabel 3.6 dapat diketahui invers dari setiap anggota D_8 sebagai berikut:

$1 \circ 1 = 1$ maka $1^{-1} = 1$

$r \circ r^3 = r^3 \circ r = 1$ maka $r^{-1} = r^3$

$r^2 \circ r^2 = 1$ maka $(r^2)^{-1} = r^2$

$r^3 \circ r = r \circ r^3 = 1$ maka $r^{-3} = r^1$

$s \circ s = 1$ maka $s^{-1} = s$

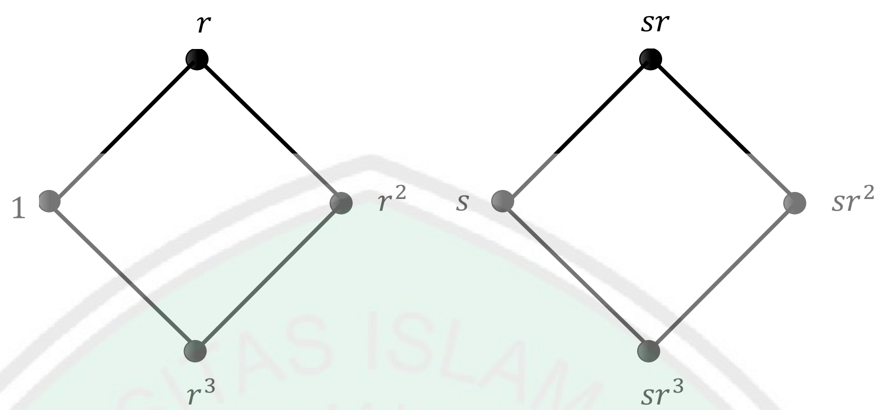
$sr \circ sr = 1$ maka $sr^{-1} = sr$

$sr^2 \circ sr^2 = 1$ maka $(sr^2)^{-1} = sr^2$

$sr^3 \circ sr^3 = 1$ maka $(sr^3)^{-1} = sr^3$

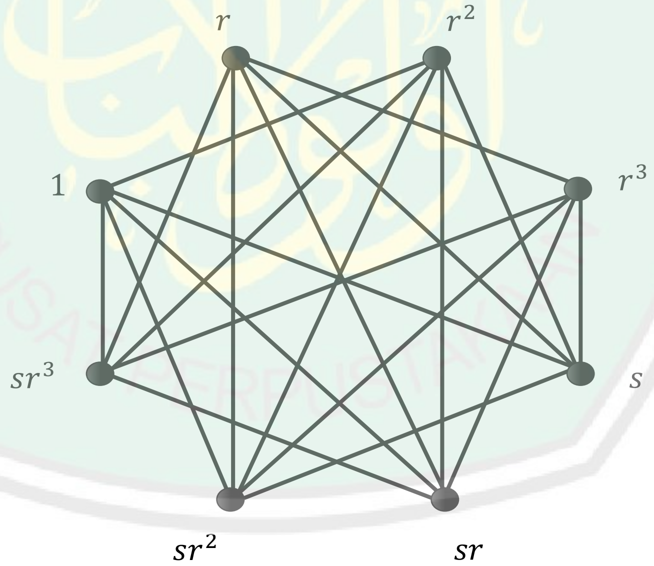
Berdasarkan uraian invers tersebut, didapatkan bahwa $1, r^2, s, sr, sr^2, sr^3$ invers terhadap dirinya sendiri. Oleh karena itu, dapat dibangun suatu himpunan bagian S dari D_8 yang tidak invers dengan dirinya sendiri, sehingga diperoleh

$S = \{r, r^3\}$. Dengan demikian dapat dibentuk suatu graf invers $\left(\Gamma_s(D_8)\right)$ sebagai berikut:



Gambar 3.9 Graf Invers Grup Dihedral-8 $\left(\Gamma_s(D_8)\right)$

Kemudian dapat digambarkan ke dalam bentuk komplemen graf invers $\left(\overline{\Gamma_s(D_8)}\right)$ sebagai berikut:



Gambar 3.10 Komplemen Graf Invers Grup Dihedral-8 $\left(\overline{\Gamma_s(D_8)}\right)$

Pada Gambar 3.10 menghasilkan matriks keterhubungan titik *(adjacency matrix)* sebagai berikut:

$$
\boldsymbol{A}=\begin{array}{c} \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ r^3 \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ sr^3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}
$$

Kemudian dapat ditentukan matriks derajat komplemen graf invers

$$
\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}
$$

Dengan demikian diperoleh matriks *Laplace* sebagai berikut:

$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A}$

$$
=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 5 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 5 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}
$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks *Laplace* maka akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tersebut

$$
\det(\boldsymbol{L}-\lambda\boldsymbol{I})=0
$$

$$\det\left(\begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 5 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 5 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 5 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 5 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 5-\lambda & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 5-\lambda & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 5-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 5-\lambda & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 5-\lambda & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 5-\lambda & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix}\right) = 0$$

Dengan mereduksi matriks tersebut menggunakan metode *Gaussian Elimination* yang terdapat pada *software* Maple, maka akan diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 5-\lambda & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-10\lambda+24}{-5+\lambda} & 0 & -\frac{-6+\lambda}{-5+\lambda} & -\frac{-6+\lambda}{-5+\lambda} & -\frac{-6+\lambda}{-5+\lambda} & -\frac{-6+\lambda}{-5+\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-10\lambda+24}{-5+\lambda} & -\frac{-6+\lambda}{-5+\lambda} & -\frac{-6+\lambda}{-5+\lambda} & -\frac{-6+\lambda}{-5+\lambda} & -\frac{-6+\lambda}{-5+\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-9\lambda+16}{\lambda-4} & \frac{4}{\lambda-4} & -\frac{\lambda-8}{\lambda-4} & \frac{4}{\lambda-4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^3-14\lambda^2+57\lambda-60}{\lambda^2-9\lambda+16} & \frac{4(-6+\lambda)}{\lambda^2-9\lambda+16} & -\frac{\lambda^2-13\lambda+36}{\lambda^2-9\lambda+16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^4-19\lambda^3+122\lambda^2-288\lambda+144}{\lambda^3-14\lambda^2+57\lambda-60} & \frac{4(-6+\ddot{e})^2}{\lambda^3-14\lambda^2+57\lambda-60} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(\lambda^3-18\lambda^2+104\lambda-192)\lambda}{\lambda^3-13\ddot{e}^2+44\lambda-24} \end{vmatrix} = 0$$

Karena $\det(\boldsymbol{L}-\lambda\boldsymbol{I})$ adalah hasil perkalian diagonal matriks segitiga, maka diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$\text{P}(\lambda) = (5-\lambda)^2\left(-\frac{\lambda^2-10\lambda+24}{-5+\lambda}\right)^2\left(-\frac{\lambda^2-9\lambda+16}{\lambda-4}\right)\left(-\frac{\lambda^3-14\lambda^2+57\lambda-60}{\lambda^2-9\lambda+16}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^4-19\lambda^3+122\lambda^2-288\lambda+144}{\lambda^3-14\lambda^2+57\lambda-60}\right)\left(-\frac{(\lambda^3-18\lambda^2+104\lambda-192)\lambda}{\lambda^3-13\lambda^2+44\lambda-24}\right) = 0$$

$$= \lambda^8 - 40\lambda^7 + 680\lambda^6 - 6368\lambda^5 + 35472\lambda^4 - 117504\lambda^3 + 214272\lambda^2$$
$$- 165888\lambda = 0$$
$$= \lambda(\lambda - 8)(\lambda - 4)^2(\lambda - 6)^4 = 0$$

Sehingga diperoleh nilai eigennya, yaitu:

$$\lambda_1 = 8, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 4, \lambda_4 = 0$$

Berdasarkan persamaan karakteristik tersebut maka didapatkan nilai *algebraic multiplicity* sebagai berikut:

$$m(\lambda_1) = 1, m(\lambda_2) = 4, m(\lambda_3) = 2, m(\lambda_4) = 1$$

Dengan demikian diperoleh spektrum *Laplace* dari komplemen graf invers dari grup dihedral-8 sebagai berikut:

$$\boldsymbol{spec_L}\left(\overline{\Gamma_s(D_8)}\right) = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

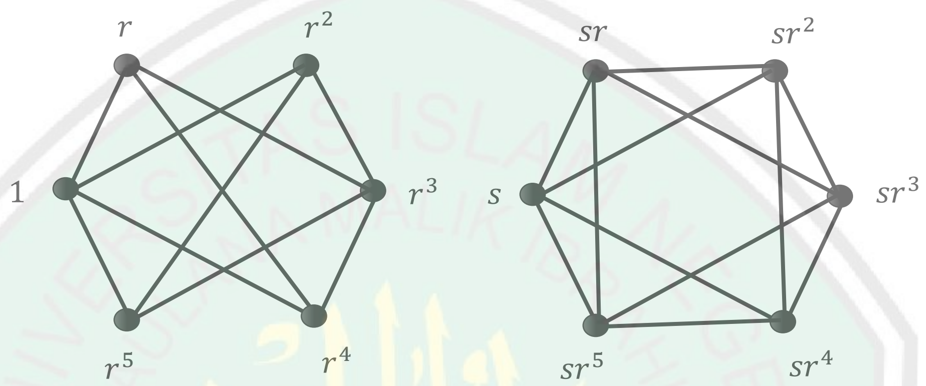
3.2.2 Spektrum *Laplace* Komplemen Graf Invers dari Grup Dihedral (D_{12})

Himpunan anggota dari grup dihedral-12 adalah $D_{12} = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$. Dengan operasi komposisi " $\circ$ " pada setiap anggota D_{12} diperoleh tabel *Cayley* sebagai berikut:

Tabel 3.7 Tabel Cayley Grup Dihedral-12 (D_{12})

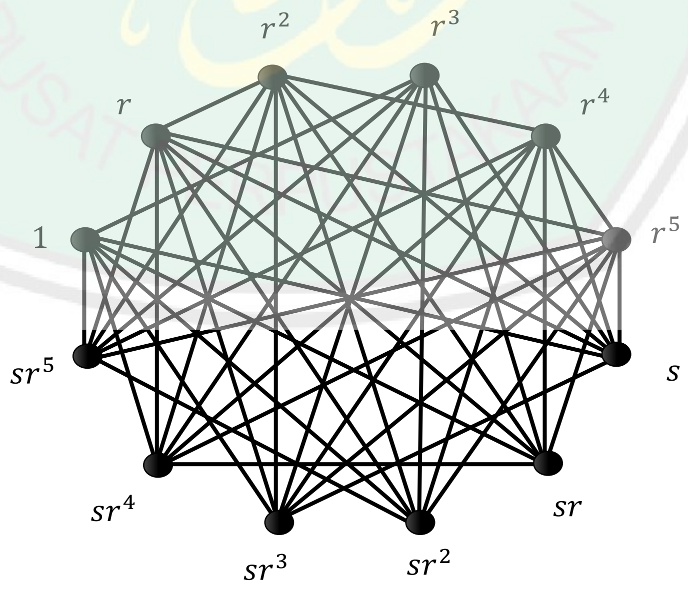
$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3
r^3	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2
r^4	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr
r^5	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2
sr^4	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r
sr^5	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1

Berdasarkan Tabel 3.7 didapatkan bahwa $1, r^3, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5$ invers terhadap dirinya sendiri. Oleh karena itu, dapat dibangun suatu himpunan bagian S dari D_{12} yang tidak invers dengan dirinya sendiri, sehingga diperoleh $S = \{r, r^2, r^4, r^5\}$. Dengan demikian dapat dibentuk suatu graf invers $\left(\Gamma_s(D_{12})\right)$ sebagai berikut:



Gambar 3.11 Graf Invers Grup Dihedral-12 $\left(\Gamma_s(D_{12})\right)$

Kemudian dapat digambarkan ke dalam bentuk komplemen graf invers $\left(\overline{\Gamma_s(D_{12})}\right)$ sebagai berikut:



Gambar 3.12 Komplemen Graf Invers Grup Dihedral-12 $\left(\overline{\Gamma_s(D_{12})}\right)$

Pada Gambar 3.12 menghasilkan matriks keterhubungan titik *(adjacency matrix)* sebagai berikut:

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ r^3 \\ r^4 \\ r^5 \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ sr^3 \\ sr^4 \\ sr^5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} 1 & r & r^2 & r^3 & r^4 & r^5 & s & sr & sr^2 & sr^3 & sr^4 & sr^5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Kemudian dapat ditentukan matriks derajat komplemen graf invers

$$D = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh matriks *Laplace* sebagai berikut:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{A}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix}
7 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 8 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & -1 & 8 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 8 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 8 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 7 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 7 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 7 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 7
\end{bmatrix}
$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks *Laplace* maka akan dicari nilai eigen dengan cara yang sama yaitu:

$$\det(\boldsymbol{L} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$$

maka akan diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
P(\lambda) = \lambda^{12} - 88\lambda^{11} + 3504\lambda^{10} - 83344\lambda^{9} + 1315888\lambda^{8} - 14481984\lambda^{7} \\
+ 113373184\lambda^{6} - 631386112\lambda^{5} + 2451505152\lambda^{4} \\
- 6320553984\lambda^{3} + 9739173888\lambda^{2} - 6794772480\lambda = 0
\end{aligned}
$$

$$= \lambda(\lambda - 10)(\lambda - 12)(\lambda - 6)^{3}(\lambda - 8)^{6} = 0$$

Maka diperoleh nilai eigennya, yaitu:

$$\lambda_1 = 12, \lambda_2 = 10, \lambda_3 = 8, \lambda_4 = 6, \lambda_5 = 0$$

Berdasarkan persamaan karakteristik tersebut maka didapatkan nilai *algebraic multiplicity* sebagai berikut:

$$m(\lambda_1) = 1, m(\lambda_2) = 1, m(\lambda_3) = 6, m(\lambda_4) = 3, m(\lambda_5) = 1$$

Dengan demikian diperoleh spektrum *Laplace* dari komplemen graf invers dari grup dihedral-12 sebagai berikut:

$$\boldsymbol{spec_L}\left(\overline{\Gamma_S(\mathrm{D}_{12})}\right) = \begin{bmatrix} 12 & 10 & 8 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

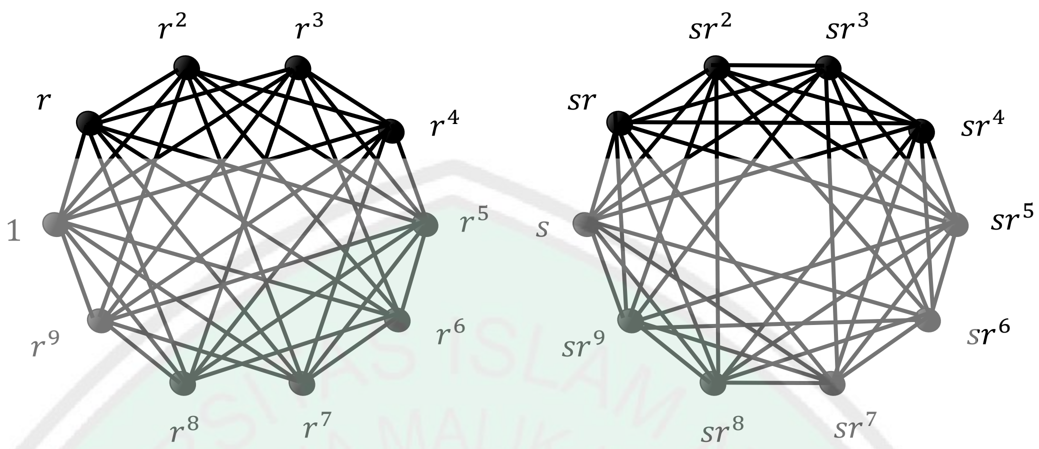
3.2.3 Spektrum *Laplace* Komplemen Graf Invers dari Grup Dihedral (D_{20})

Himpunan anggota dari grup dihedral-20 adalah $D_{20} = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8, r^9, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7, sr^8, sr^9\}$. Dengan operasi komposisi " $\circ$ " pada setiap anggota D_{20} diperoleh tabel *Cayley* sebagai berikut:

Tabel 3.8 Tabel Cayley Grup Dihedral-20 (D_{20})

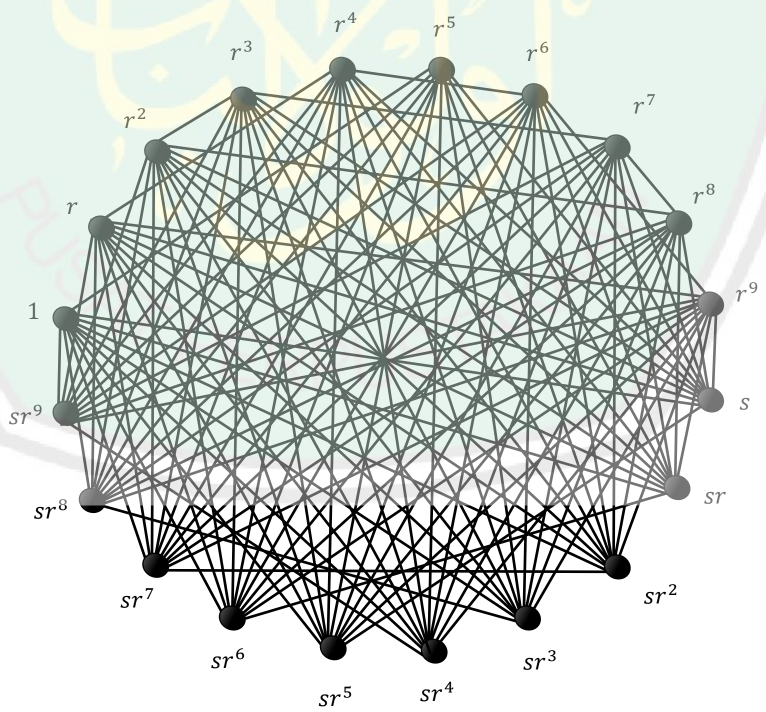
$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	1	sr^9	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	1	r	sr^8	sr^9	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7
r^3	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	1	r	r^2	sr^7	sr^8	sr^9	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
r^4	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	1	r	r^2	r^3	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r^5	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	1	r	r^2	r^3	r^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^6	r^6	r^7	r^8	r^9	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	s	sr	sr^2	sr^3
r^7	r^7	r^8	r^9	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	s	sr	sr^2
r^8	r^8	r^9	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	s	sr
r^9	r^9	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^9	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	s	r^9	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	s	sr	r^8	r^9	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	s	sr	sr^2	r^7	r^8	r^9	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
sr^4	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	s	sr	sr^2	sr^3	r^6	r^7	r^8	r^9	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr^5	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^6	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	1	r	r^2	r^3
sr^7	sr^7	sr^8	sr^9	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	1	r	r^2
sr^8	sr^8	sr^9	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	1	r
sr^9	sr^9	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	1

Berdasarkan Tabel 3.8 didapatkan bahwa $1, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7, sr^8, sr^9$ invers terhadap dirinya sendiri. Oleh karena itu, dapat dibangun suatu himpunan bagian S dari D_{20} yang tidak invers dengan dirinya sendiri, sehingga diperoleh $S = \{r, r^2, r^3, r^4, r^6, r^7, r^8, r^9\}$. Dengan demikian dapat dibentuk suatu graf invers $\left(\Gamma_s(D_{20})\right)$ sebagai berikut:



Gambar 3.13 Graf Invers Grup Dihedral-20 $\left(\Gamma_s(D_{20})\right)$

Kemudian dapat digambarkan ke dalam bentuk komplemen graf invers $\left(\overline{\Gamma_s(D_{20})}\right)$ sebagai berikut:



Gambar 3.14 Komplemen Graf Invers Grup Dihedral-20 $\left(\overline{\Gamma_s(D_{20})}\right)$

Pada Gambar 3.14 menghasilkan matriks keterhubungan titik *(adjacency matrix)* sebagai berikut:

$$
A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ r^3 \\ r^4 \\ r^5 \\ r^6 \\ r^7 \\ r^8 \\ r^9 \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ sr^3 \\ sr^4 \\ sr^5 \\ sr^6 \\ sr^7 \\ sr^8 \\ sr^9 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccccccccccc} 1 & r & r^2 & r^3 & r^4 & r^5 & r^6 & r^7 & r^8 & r^9 & s & sr & sr^2 & sr^3 & sr^4 & sr^5 & sr^6 & sr^7 & sr^8 & sr^9 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Kemudian dapat ditentukan matriks derajat komplemen graf invers

$$
D = \begin{bmatrix}
11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11
\end{bmatrix}
$$

Dengan demikian diperoleh matriks *Laplace* sebagai berikut:

$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{A}$

$$
= \begin{bmatrix}
11 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 12 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 12 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & -1 & 12 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 12 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 12 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 12 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 12 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 12 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11
\end{bmatrix}
$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks *Laplace* maka akan dicari nilai eigen dengan cara yang sama yaitu:

$$\det(\boldsymbol{L} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$$

maka akan diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$P(\lambda) = \lambda(\lambda - 20)(\lambda - 14)^2(\lambda - 10)^6(\lambda - 12)^{10} = 0$$

Maka diperoleh nilai eigennya, yaitu:

$$\lambda_1 = 20, \lambda_2 = 14, \lambda_3 = 12, \lambda_4 = 10, \lambda_5 = 0$$

Berdasarkan persamaan karakteristik tersebut maka didapatkan nilai *algebraic multiplicity* sebagai berikut:

$$m(\lambda_1) = 1, m(\lambda_2) = 2, m(\lambda_3) = 10, m(\lambda_4) = 6, m(\lambda_5) = 1$$

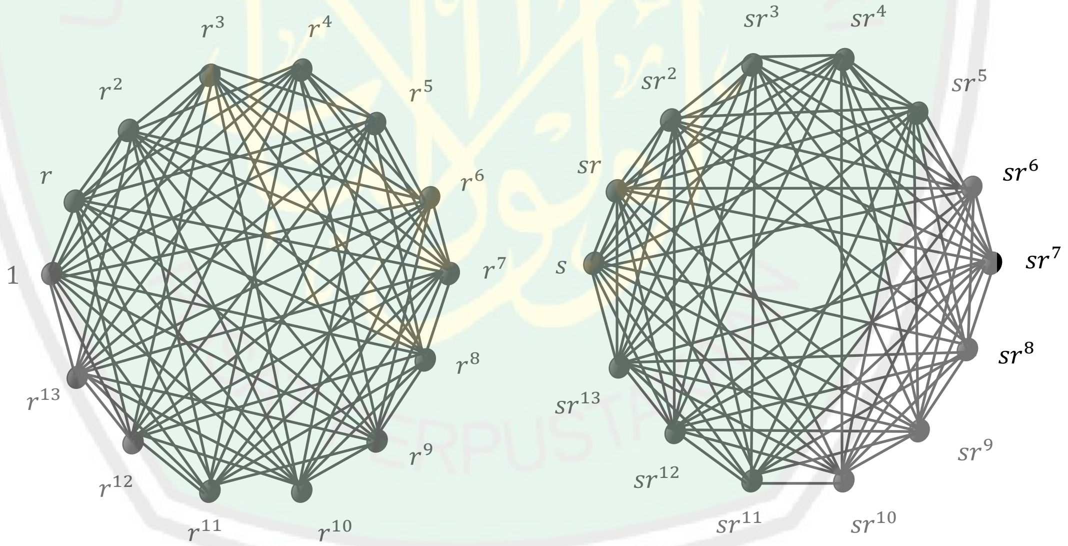
Dengan demikian diperoleh spektrum *Laplace* dari komplemen graf invers dari grup dihedral-20 sebagai berikut:

$$\boldsymbol{spec_L}\left(\overline{\Gamma_s(\mathrm{D}_{20})}\right) = \begin{bmatrix} 20 & 14 & 12 & 10 & 0 \\ 1 & 2 & 10 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

3.2.4 Spektrum *Laplace* Komplemen Graf Invers dari Grup Dihedral (D_{28})

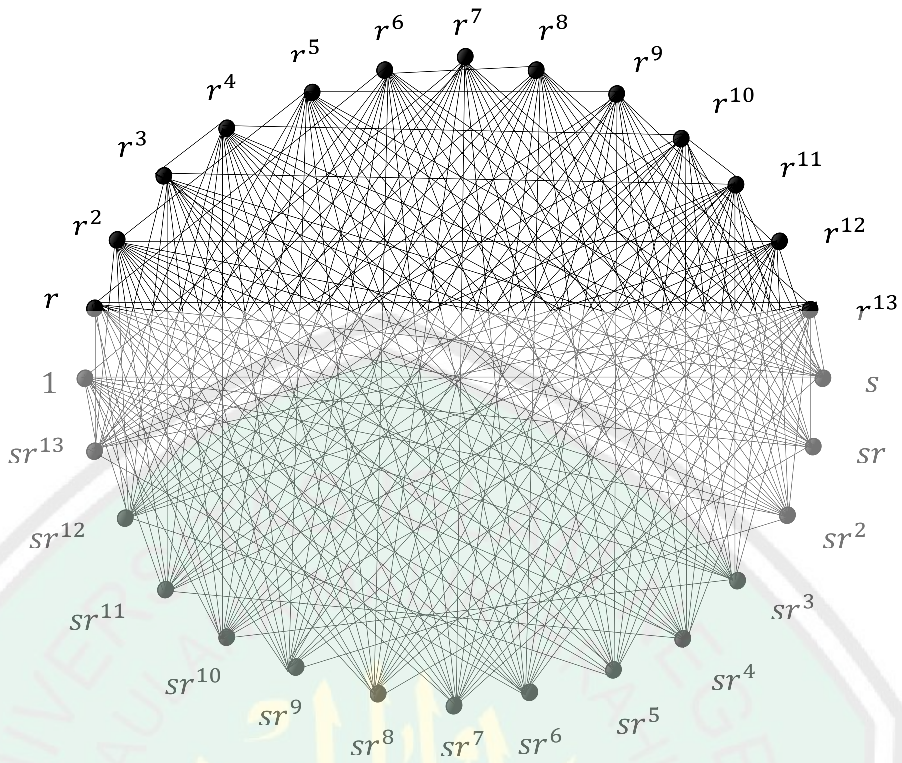
Himpunan anggota dari grup dihedral-28 adalah $D_{28} = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8, r^9, r^{10}, r^{11}, r^{12}, r^{13}, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7, sr^8, sr^9, sr^{10}, sr^{11}, sr^{12}, sr^{13}\}$. Dengan operasi komposisi " $\circ$ " pada setiap anggota D_{28} diperoleh tabel *Cayley* pada Tabel 3.9 dapat dilihat pada Lampiran.

Berdasarkan Tabel 3.9 didapatkan bahwa $1, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7, sr^8, sr^9, sr^{10}, sr^{11}, sr^{12}, sr^{13}$ invers terhadap dirinya sendiri. Oleh karena itu, dapat dibangun suatu himpunan bagian S dari D_{28} yang tidak invers dengan dirinya sendiri, sehingga diperoleh $S = \{r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^8, r^9, r^{10}, r^{11}, r^{12}, r^{13}\}$. Dengan demikian dapat dibentuk suatu graf invers $\left(\Gamma_s(D_{28})\right)$ sebagai berikut:



Gambar 3.15 Graf Invers Grup Dihedral-28 $\left(\Gamma_s(D_{28})\right)$

Kemudian dapat digambarkan ke dalam bentuk komplemen graf invers $\left(\overline{\Gamma_s(D_{28})}\right)$ sebagai berikut:



Gambar 3.16 Komplemen Graf Invers Grup Dihedral-28 $\left(\overline{\Gamma_s(D_{28})}\right)$

Pada Gambar 3.16 menghasilkan matriks keterhubungan titik *(adjacency matrix)* sebagai berikut:

$$
\boldsymbol{A} = \begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} 1 & r & r^2 & r^3 & r^4 & r^5 & r^6 & r^7 & r^8 & r^9 & r^{10} & r^{11} & r^{12} & r^{13} & s & sr & sr^2 & sr^3 & sr^4 & sr^5 & sr^6 & sr^7 & sr^8 & sr^9 & sr^{10} & sr^{11} & sr^{12} & sr^{13} \end{matrix} \\
\begin{matrix} 1 \\ r \\ r^2 \\ r^3 \\ r^4 \\ r^5 \\ r^6 \\ r^7 \\ r^8 \\ r^9 \\ r^{10} \\ r^{11} \\ r^{12} \\ r^{13} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ sr^3 \\ sr^4 \\ sr^5 \\ sr^6 \\ sr^7 \\ sr^8 \\ sr^9 \\ sr^{10} \\ sr^{11} \\ sr^{12} \\ sr^{13} \end{matrix} &
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Kemudian dapat ditentukan matriks derajat komplemen graf invers

$$
\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix}
15&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&16&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&16&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&16&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&16&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&16&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&16&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&15&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&16&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&16&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&16&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&16&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&16&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&16&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&15&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&15&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&15&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&15&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&15&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&15&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&15&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&15&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&15&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&15&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&15&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&15&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&15&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&15
\end{bmatrix}
$$

Dengan demikian diperoleh matriks *Laplace* sebagai berikut:

$\boldsymbol{L = D - A}$

$$
= \begin{bmatrix}
15&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\
0&16&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\
0&0&16&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&-1&0&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\
0&0&0&16&-1&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\
0&0&0&-1&16&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\
0&0&-1&0&0&16&0&0&0&-1&0&0&0&0&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\
0&-1&0&0&0&0&16&0&-1&0&0&0&0&0&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\
-1&0&0&0&0&0&0&16&0&0&0&0&0&0&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\
0&0&0&0&0&0&-1&0&16&0&0&0&0&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\
0&0&0&0&0&-1&0&0&0&16&0&0&-1&0&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\
0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&16&-1&0&0&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\
0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&-1&16&0&0&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\
0&0&-1&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&16&0&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\
0&-1&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&16&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\
-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&15&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0\\
-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&0&15&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0\\
-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&0&0&15&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0\\
-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&0&0&0&15&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0\\
-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&0&0&0&0&15&0&0&0&0&0&0&-1&0&0\\
-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&0&0&0&0&0&15&0&0&0&0&0&0&-1&0\\
-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&0&0&0&0&0&0&15&0&0&0&0&0&0&-1\\
-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&0&0&0&0&0&0&15&0&0&0&0&0&0\\
-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&0&-1&0&0&0&0&0&0&15&0&0&0&0&0\\
-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&15&0&0&0&0\\
-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&15&0&0&0\\
-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&15&0&0\\
-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&15&0\\
-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&15
\end{bmatrix}
$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks *Laplace* maka akan dicari nilai eigen dengan cara yang sama yaitu:

$$\det(\boldsymbol{L} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$$

maka akan diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$P(\lambda) = \lambda(\lambda - 28)(\lambda - 18)^3(\lambda - 14)^9(\lambda - 16)^{14} = 0$$

Maka diperoleh nilai eigennya, yaitu:

$$\lambda_1 = 28, \lambda_2 = 18\ \lambda_3 = 16, \lambda_4 = 14, \lambda_5 = 0$$

Berdasarkan persamaan karakteristik tersebut maka didapatkan nilai *algebraic multiplicity* sebagai berikut:

$$m(\lambda_1) = 1, m(\lambda_2) = 3, m(\lambda_3) = 14, m(\lambda_4) = 9, m(\lambda_5) = 1$$

Dengan demikian diperoleh spektrum *Laplace* dari komplemen graf invers dari grup dihedral-28 sebagai berikut:

$$\boldsymbol{spec_L}\left(\overline{\Gamma_s(D_{28})}\right) = \begin{bmatrix} 28 & 18 & 16 & 14 & 0 \\ 1 & 3 & 14 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

3.2.5 Pola Spektrum *Laplace* Komplemen Graf Invers dari D_{2n}

Berdasarkan pembahasan di atas diperoleh bentuk polinomial karakteristik dan spektrum *Laplace* pada komplemen graf invers dari grup dihedral-2n $\left(\overline{\Gamma_s(D_{2n})}\right)$ yang ditunjukkan pada Tabel 3.10 sebagai berikut:

Tabel 3.10 Pola Polinomial Karakteristik dan Spektrum *Laplace* Komplemen Graf Invers dari Grup Dihedral

D_{2n}	Polinomial Karakteriktik $P(\lambda)$	Spektrum
D_{12}	$\lambda(\lambda - 10)(\lambda - 12)(\lambda - 6)^3(\lambda - 8)^6$	$\boldsymbol{spec_L}\left(\overline{\Gamma_s(D_{12})}\right) = \begin{bmatrix} 12 & 10 & 8 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & 3 & 1 \end{bmatrix}$
D_{20}	$\lambda(\lambda - 20)(\lambda - 14)^2(\lambda - 10)^6(\lambda - 12)^{10}$	$\boldsymbol{spec_L}\left(\overline{\Gamma_s(D_{20})}\right) = \begin{bmatrix} 20 & 14 & 12 & 10 & 0 \\ 1 & 2 & 10 & 6 & 1 \end{bmatrix}$
D_{28}	$\lambda(\lambda - 28)(\lambda - 18)^3(\lambda - 14)^9(\lambda - 16)^{14}$	$\boldsymbol{spec_L}\left(\overline{\Gamma_s(D_{28})}\right) = \begin{bmatrix} 28 & 18 & 16 & 14 & 0 \\ 1 & 3 & 14 & 9 & 1 \end{bmatrix}$

⋮	⋮	⋮
D_{2n}	$\lambda(\lambda-2n)(\lambda-(n+4))^{\frac{n-2}{4}}$ $(\lambda-n)^{\frac{3n-6}{4}}(\lambda-(n+2))^{n}$	$\boldsymbol{spec_L}(\Gamma_s(D_{2n}))$ $=\begin{bmatrix} 2n & n+4 & n+2 & n & 0 \\ 1 & \frac{n-2}{4} & n & \frac{3n-6}{4} & 1 \end{bmatrix}$

Dari tabel di atas dapat dirumuskan teorema sebagai berikut:

Teorema 2

Spektrum *Laplace* pada komplemen graf invers dari grup dihedral D_{2n} untuk n genap dan $n=4k+2, \forall k \in \mathbb{N}$ adalah

$$\boldsymbol{spec_L}(\Gamma_s(D_{2n})) = \begin{bmatrix} 2n & n+4 & n+2 & n & 0 \\ 1 & \frac{n-2}{4} & n & \frac{3n-6}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

Bukti

Misalkan grup dihedral $D_{2n}=\{1,r,r^2,\dots,r^{n-1},s,sr,sr^2,\dots,sr^{n-1}\}$ dengan n genap dan $n=4k+2, \forall k \in \mathbb{N}$. Jika dioperasikan dengan operasi komposisi " $\circ$ " di D_{2n}, maka diperoleh bahwa invers dari setiap anggota adalah

$(1)^{-1}=1$

$(r^i)^{-1}=r^{n-i} \quad , \forall i=1,2,3,\dots,n-1$ dan $i \neq \frac{n}{2}$

$(s)^{-1}=s$

$(sr^i)^{-1}=sr^i \quad , \forall i=1,2,3,\dots,n-1$

Maka diperoleh unsur-unsur $S=\left\{r^i \mid i \neq \frac{n}{2}, i=1,2,3,\dots,n-1\right\}$ yang tidak memuat anggota yang invers terhadap dirinya sendiri sehingga $|S|=n-2$.

Maka diperoleh matriks keterhubungan titik *(adjacency matrix)*

$$
\boldsymbol{A}(D_{2n}) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ r^3 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ sr^3 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} 1 & r & r^2 & r^3 & \dots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & sr^3 & \dots & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \end{array}
$$

dan matriks derajat

$$
\boldsymbol{D}(D_{2n}) = \begin{bmatrix} n+1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n+2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & n+2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n+1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n+2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n+1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & n+1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & n+1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & n+1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n+1 \end{bmatrix}
$$

Maka diperoleh matriks *Laplace* sebagai berikut:

$$
\boldsymbol{L}(D_{2n}) = \begin{bmatrix} n+1 & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & n+2 & -1 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & -1 & n+2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ -1 & 0 & 0 & n+1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n+2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & n+1 & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & n+1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 & n+1 & 0 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & 0 & 0 & n+1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & n+1 \end{bmatrix}
$$

Setelah mendapatkan matriks *Laplace* maka akan dicari nilai eigen dan *algebraic multiplicity* dari matriks tersebut. Dengan mereduksi matriks $(\boldsymbol{L}(D_{2n}) - \lambda\boldsymbol{I})$ menggunakan metode *Gaussian Elimination*, maka diperoleh

$$\begin{vmatrix} (n+1)-\lambda & 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & (n+1)-\lambda & \cdots & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{(\lambda-n)(\lambda-(n+2))}{\lambda-(n+1)} & -\frac{\lambda-(n+2)}{\lambda-(n+1)} & -\frac{\lambda-(n+2)}{\lambda-(n+1)} & -\frac{\lambda-(n+2)}{\lambda-(n+1)} & -\frac{\lambda-(n+2)}{\lambda-(n+1)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{\lambda^2-(2n+1)\lambda+n^2}{\lambda-n} & \frac{n}{\lambda-n} & -\frac{\lambda-2n}{\lambda-n} & \frac{n}{\lambda-n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{(\lambda-(n+1))(\lambda^2-(2n+1)\lambda+(n^2-n))}{\lambda^2-(2n+1)\lambda+n^2} & \frac{n(\lambda-(n+2))}{\lambda^2-(2n+1)\lambda+n^2} & -\frac{(\lambda-n)(\lambda-(2n+1))}{\lambda^2-(2n+1)\lambda+n^2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{\lambda((\lambda-n)(\lambda-(n+2))(\lambda-2n))}{\lambda^3-(3n+1)\lambda^2+n(n^2-n-1)\lambda-6n} \end{vmatrix}$$

Karena $\det(\boldsymbol{L} - \lambda\boldsymbol{I})$ adalah hasil perkalian unsur diagonal utama matriks segitiga atas, maka diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut

$$P(\lambda) = \lambda(\lambda - 2n)\big(\lambda - (n+4)\big)^{\frac{n-2}{4}}(\lambda - n)^{\frac{3n-6}{4}}\big(\lambda - (n+2)\big)^{n}$$

Jika $P(\lambda) = 0$ maka diperoleh nilai eigen

$$\lambda_1 = 2n, \lambda_2 = n+4, \lambda_3 = n+2, \lambda_4 = n, \lambda_5 = 0$$

dan diperoleh nilai *algebraic multiplicity* dari perpangkatan polinomial karakteristik untuk masing-masing nilai eigen tersebut yaitu

$$m(\lambda_1) = 1, m(\lambda_2) = \frac{n-1}{4}, m(\lambda_3) = n, m(\lambda_4) = \frac{3n-6}{4}, m(\lambda_5) = 1$$

Dengan demikian, maka diperoleh

$$\boldsymbol{spec}_L\big(\Gamma_s(D_{2n})\big) = \begin{bmatrix} 2n & n+4 & n+2 & n & 0 \\ 1 & \frac{n-2}{4} & n & \frac{3n-6}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

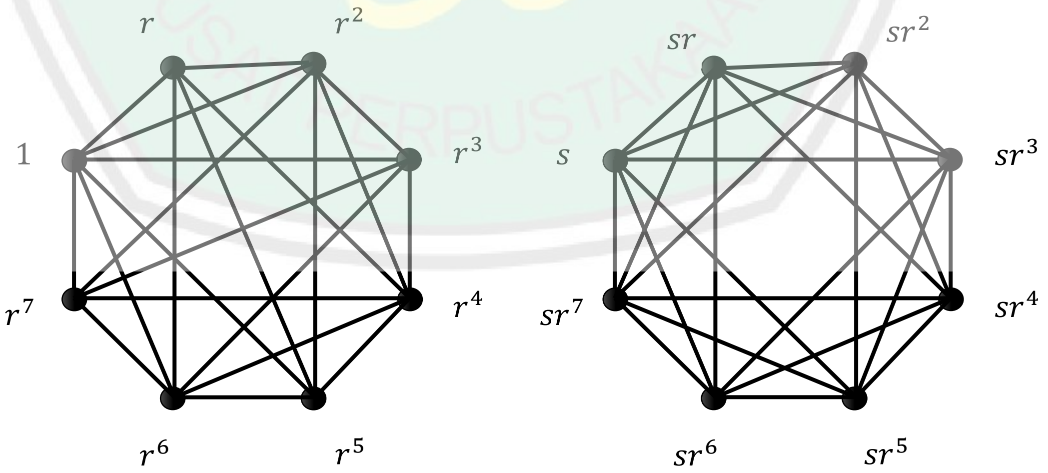
3.2.6 Spektrum *Laplace* Komplemen Graf Invers dari Grup Dihedral (D_{16})

Himpunan anggota dari grup dihedral-16 adalah $D_{16} = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}$. Dengan operasi komposisi " $\circ$ " pada setiap anggota D_{16} diperoleh tabel *Cayley* sebagai berikut:

Tabel 3.11 Tabel Cayley Grup Dihedral-16 (D_{16})

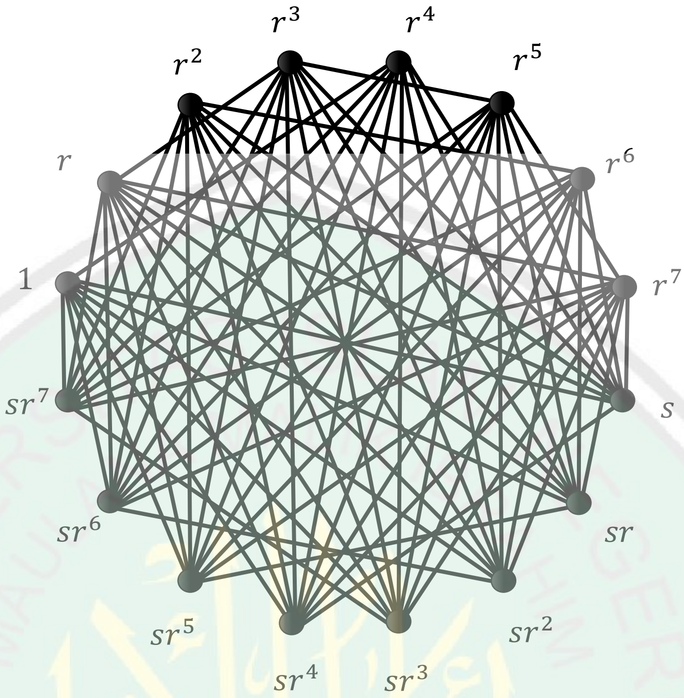
$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r^3	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^4	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3
r^5	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2
r^6	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr
r^7	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^4	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3
sr^5	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2
sr^6	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r
sr^7	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1

Berdasarkan Tabel 3.11 didapatkan bahwa $1, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7$ invers terhadap dirinya sendiri. Oleh karena itu, dapat dibangun suatu himpunan bagian S dari D_{16} yang tidak invers dengan dirinya sendiri, sehingga diperoleh $S = \{r, r^2, r^3, r^5, r^6, r^7\}$. Dengan demikian dapat dibentuk suatu graf invers $(\Gamma_s(D_{16}))$ sebagai berikut:



Gambar 3.17 Graf Invers Grup Dihedral-16 $(\Gamma_s(D_{16}))$

Kemudian dapat digambarkan ke dalam bentuk komplemen graf invers $\left(\overline{\Gamma_s(D_{16})}\right)$ sebagai berikut:



Gambar 3.18 Komplemen Graf Invers Grup Dihedral-16 $\left(\overline{\Gamma_s(D_{16})}\right)$

Pada Gambar 3.18 menghasilkan matriks keterhubungan titik *(adjacency matrix)* sebagai berikut:

$$
\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ r^3 \\ r^4 \\ r^5 \\ r^6 \\ r^7 \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ sr^3 \\ sr^4 \\ sr^5 \\ sr^6 \\ sr^7 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & r & r^2 & r^3 & r^4 & r^5 & r^6 & r^7 & s & sr & sr^2 & sr^3 & sr^4 & sr^5 & sr^6 & sr^7 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Kemudian dapat ditentukan matriks derajat komplemen graf invers

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}
9&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&10&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&9&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&10&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&9&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&10&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&9&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&10&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&9&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&9&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&9&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&9&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&9&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&9&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&9&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&9
\end{bmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh matriks *Laplace* sebagai berikut:

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A}$$

$$=\begin{bmatrix}
9&0&0&0&-1&0&0&0&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\
0&10&0&-1&0&0&0&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\
0&0&9&0&0&0&-1&0&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\
0&-1&0&10&0&-1&0&0&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\
-1&0&0&0&9&0&0&0&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\
0&0&0&-1&0&10&0&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\
0&0&-1&0&0&0&9&0&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\
0&-1&0&0&0&-1&0&10&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\
-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&9&0&0&0&-1&0&0&0\\
-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&0&9&0&0&0&-1&0&0\\
-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&0&0&9&0&0&0&-1&0\\
-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&0&0&0&9&0&0&0&-1\\
-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&0&0&0&9&0&0&0\\
-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&0&-1&0&0&0&9&0&0\\
-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&0&0&-1&0&0&0&9&0\\
-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&0&0&0&-1&0&0&0&9
\end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks *Laplace* maka akan dicari nilai eigen dengan cara yang sama yaitu:

$$\det(\boldsymbol{L}-\lambda\boldsymbol{I})=0$$

maka akan diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$P(\lambda)=\lambda(\lambda-12)(\lambda-16)(\lambda-8)^5(\lambda-10)^8=0$$

Maka diperoleh nilai eigennya, yaitu:

$$\lambda_1=16,\lambda_2=12\ \lambda_3=10,\lambda_4=8,\lambda_5=0$$

Berdasarkan persamaan karakteristik tersebut maka didapatkan nilai *algebraic multiplicity* sebagai berikut:

$$m(\lambda_1) = 1, m(\lambda_2) = 1, m(\lambda_3) = 8, m(\lambda_4) = 5, m(\lambda_5) = 1$$

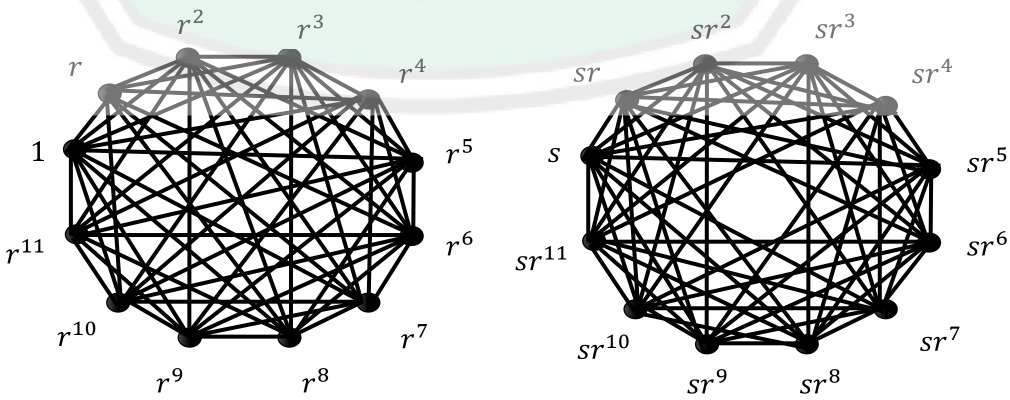
Dengan demikian diperoleh spektrum *Laplace* dari komplemen graf invers dari grup dihedral-16 sebagai berikut:

$$\boldsymbol{spec_L}\left(\overline{\Gamma_s(\mathrm{D}_{16})}\right) = \begin{bmatrix} 16 & 12 & 10 & 8 & 0 \\ 1 & 1 & 8 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

3.2.7 Spektrum *Laplace* Komplemen Graf Invers dari Grup Dihedral (D_{24})

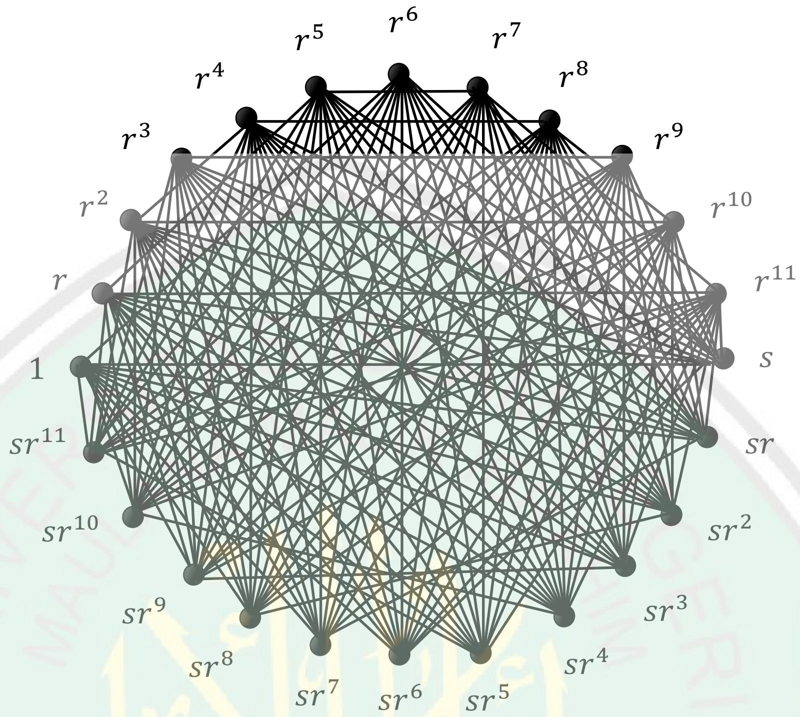
Himpunan anggota dari grup dihedral-24 adalah $D_{24} = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8, r^9, r^{10}, r^{11}, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7, sr^8, sr^9, sr^{10}, sr^{11}\}$. Dengan operasi komposisi "$\circ$" pada setiap anggota D_{24} diperoleh tabel *Cayley* pada Tabel 3.12 dapat dilihat pada Lampiran.

Berdasarkan Tabel 3.12 didapatkan bahwa $1, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7, sr^8, sr^9, sr^{10}, sr^{11}$ invers terhadap dirinya sendiri. Oleh karena itu, dapat dibangun suatu himpunan bagian S dari D_{24} yang tidak invers dengan dirinya sendiri, sehingga diperoleh $S = \{r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^7, r^8, r^9, r^{10}, r^{11}\}$. Dengan demikian dapat dibentuk suatu graf invers $(\Gamma_s(D_{24}))$ sebagai berikut:



Gambar 3.19 Graf Invers Grup Dihedral-24 $(\Gamma_s(D_{24}))$

Kemudian dapat digambarkan ke dalam bentuk komplemen graf invers $\left(\overline{\Gamma_s(D_{24})}\right)$ sebagai berikut:



Gambar 3.20 Komplemen Graf Invers Grup Dihedral-24 $\left(\overline{\Gamma_s(D_{24})}\right)$

Pada Gambar 3.20 menghasilkan matriks keterhubungan titik *(adjacency matrix)* sebagai berikut:

$$
\boldsymbol{A} = \begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccccccccccccccccccccc} 1 & r & r^2 & r^3 & r^4 & r^5 & r^6 & r^7 & r^8 & r^9 & r^{10} & r^{11} & s & sr & sr^2 & sr^3 & sr^4 & sr^5 & sr^6 & sr^7 & sr^8 & sr^9 & sr^{10} & sr^{11} \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ r \\ r^2 \\ r^3 \\ r^4 \\ r^5 \\ r^6 \\ r^7 \\ r^8 \\ r^9 \\ r^{10} \\ r^{11} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ sr^3 \\ sr^4 \\ sr^5 \\ sr^6 \\ sr^7 \\ sr^8 \\ sr^9 \\ sr^{10} \\ sr^{11} \end{array} &
\begin{bmatrix}
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\
0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\
0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\
0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\
0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Kemudian dapat ditentukan matriks derajat komplemen graf invers

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}
13&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&14&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&14&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&13&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&14&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&14&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&13&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&14&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&14&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&13&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&14&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&14&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&13&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&13&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&13&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&13&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&13&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&13&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&13&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&13&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&13&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&13&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&13&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&13
\end{bmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh matriks *Laplace* sebagai berikut:

$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A}$

$$=\begin{bmatrix}
13&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\
0&14&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\
0&0&14&0&-1&0&0&0&0&0&-1&0&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\
0&0&0&13&0&0&0&0&0&-1&0&0&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\
0&0&-1&0&14&0&0&0&-1&0&0&0&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\
0&-1&0&0&0&14&0&-1&0&0&0&0&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\
-1&0&0&0&0&0&13&0&0&0&0&0&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\
0&0&0&0&0&-1&0&14&0&0&0&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\
0&0&0&0&-1&0&0&0&14&0&-1&0&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\
0&0&0&-1&0&0&0&0&0&13&0&0&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\
0&0&-1&0&0&0&0&0&-1&0&14&0&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\
0&-1&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&14&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\
-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&13&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0\\
-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&0&13&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0\\
-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&0&0&13&0&0&0&0&0&-1&0&0&0\\
-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&0&0&0&13&0&0&0&0&0&-1&0&0\\
-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&0&0&0&0&13&0&0&0&0&0&-1&0\\
-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&0&0&0&0&0&13&0&0&0&0&0&-1\\
-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&0&0&0&0&0&13&0&0&0&0&0\\
-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&0&-1&0&0&0&0&0&13&0&0&0&0\\
-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&0&0&-1&0&0&0&0&0&13&0&0&0\\
-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&13&0&0\\
-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&13&0\\
-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&13
\end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks *Laplace* maka akan dicari nilai eigen dengan cara yang sama yaitu:

$$\det(\boldsymbol{L}-\lambda\boldsymbol{I})=0$$

maka akan diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$P(\lambda) = \lambda(\lambda - 24)(\lambda - 16)^2(\lambda - 12)^8(\lambda - 14)^{12} = 0$$

Maka diperoleh nilai eigennya, yaitu:

$$\lambda_1 = 24, \lambda_2 = 16\ \lambda_3 = 14, \lambda_4 = 12, \lambda_5 = 0$$

Berdasarkan persamaan karakteristik tersebut maka didapatkan nilai *algebraic multiplicity* sebagai berikut:

$$m(\lambda_1) = 1, m(\lambda_2) = 2, m(\lambda_3) = 12, m(\lambda_4) = 8, m(\lambda_5) = 1$$

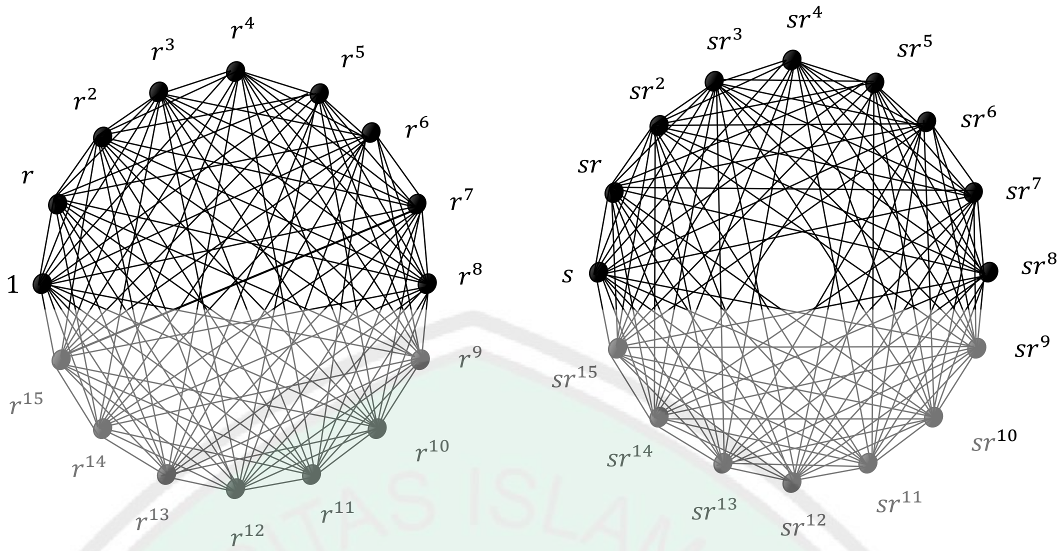
Dengan demikian diperoleh spektrum *Laplace* dari komplemen graf invers dari grup dihedral-24 sebagai berikut:

$$\boldsymbol{spec_L}\left(\overline{\Gamma_s(\mathrm{D}_{24})}\right) = \begin{bmatrix} 24 & 16 & 14 & 12 & 0 \\ 1 & 2 & 12 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

3.2.8 Spektrum *Laplace* Komplemen Graf Invers dari Grup Dihedral (D_{32})

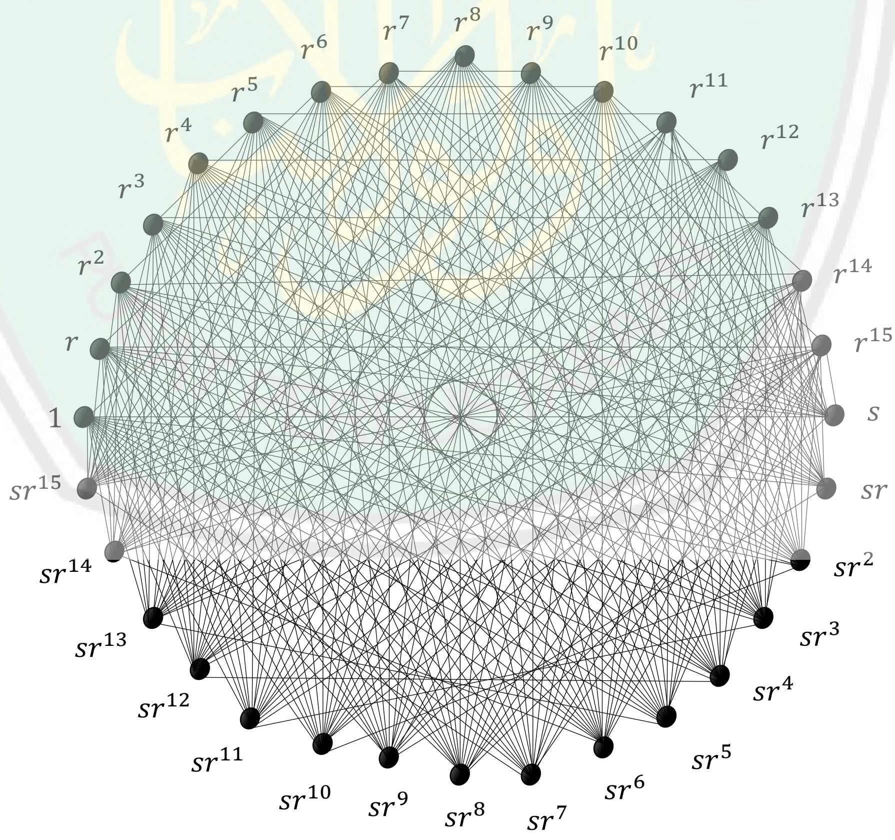
Himpunan anggota dari grup dihedral-32 adalah $D_{32} = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8, r^9, r^{10}, r^{11}, r^{12}, r^{13}, r^{14}, r^{15}, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7, sr^8, sr^9, sr^{10}, sr^{11}, sr^{12}, sr^{13}, sr^{14}, sr^{15}\}$. Dengan operasi komposisi " $\circ$ " pada setiap anggota D_{32} diperoleh tabel *Cayley* pada Tabel 3.13 dapat dilihat pada Lampiran.

Berdasarkan Tabel 3.13 didapatkan bahwa $1, r^8, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7, sr^8, sr^9, sr^{10}, sr^{11}, sr^{12}, sr^{13}, sr^{14}, sr^{15}$ invers terhadap dirinya sendiri. Oleh karena itu, dapat dibangun suatu himpunan bagian S dari D_{32} yang tidak invers dengan dirinya sendiri, sehingga diperoleh $S = \{r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^9, r^{10}, r^{11}, r^{12}, r^{13}, r^{14}, r^{15}\}$. Dengan demikian dapat dibentuk suatu graf invers $\left(\Gamma_s(D_{32})\right)$ sebagai berikut:



Gambar 3.21 Graf Invers Grup Dihedral-32 $(\Gamma_s(D_{32}))$

Kemudian dapat digambarkan ke dalam bentuk komplemen graf invers $(\overline{\Gamma_s(D_{32})})$ sebagai berikut:



Gambar 3.22 Komplemen Graf Invers Grup Dihedral-32 $(\overline{\Gamma_s(D_{32})})$

Pada Gambar 3.22 menghasilkan matriks keterhubungan titik *(adjacency matrix)* sebagai berikut:

$$A = \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccc} 1 & r & r^2 & r^3 & r^4 & r^5 & r^6 & r^7 & r^8 & r^9 & r^{10} & r^{11} & r^{12} & r^{13} & r^{14} & r^{15} & s & sr & sr^2 & sr^3 & sr^4 & sr^5 & sr^6 & sr^7 & sr^8 & sr^9 & sr^{10} & sr^{11} & sr^{12} & sr^{13} & sr^{14} & sr^{15} \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ r \\ r^2 \\ r^3 \\ r^4 \\ r^5 \\ r^6 \\ r^7 \\ r^8 \\ r^9 \\ r^{10} \\ r^{11} \\ r^{12} \\ r^{13} \\ r^{14} \\ r^{15} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ sr^3 \\ sr^4 \\ sr^5 \\ sr^6 \\ sr^7 \\ sr^8 \\ sr^9 \\ sr^{10} \\ sr^{11} \\ sr^{12} \\ sr^{13} \\ sr^{14} \\ sr^{15} \end{array} &
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}$$

Kemudian dapat ditentukan matriks derajat komplemen graf invers

$$D = \begin{bmatrix}
17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17
\end{bmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh matriks *Laplace* sebagai berikut:

$\boldsymbol{L = D - A}$

$$
= \begin{bmatrix}
17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 18 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 18 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17
\end{bmatrix}
$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks *Laplace* maka akan dicari nilai eigen dengan cara yang sama yaitu:

$$\det(\boldsymbol{L} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$$

maka akan diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$P(\lambda) = \lambda(\lambda - 32)(\lambda - 20)^3(\lambda - 16)^{11}(\lambda - 18)^{16} = 0$$

Maka diperoleh nilai eigennya, yaitu:

$$\lambda_1 = 32, \lambda_2 = 20, \lambda_3 = 18, \lambda_4 = 16, \lambda_5 = 0$$

Berdasarkan persamaan karakteristik tersebut maka didapatkan nilai *algebraic multiplicity* sebagai berikut:

$$m(\lambda_1) = 1, m(\lambda_2) = 3, m(\lambda_3) = 16, m(\lambda_4) = 11, m(\lambda_5) = 1$$

Dengan demikian diperoleh spektrum *Laplace* dari komplemen graf invers dari grup dihedral-32 sebagai berikut:

$$\boldsymbol{spec_L}\left(\overline{\Gamma_s(D_{32})}\right) = \begin{bmatrix} 32 & 20 & 18 & 16 & 0 \\ 1 & 3 & 16 & 11 & 1 \end{bmatrix}$$

3.2.9 Pola Spektrum *Laplace* Komplemen Graf Invers dari D_{2n}

Berdasarkan pembahasan di atas diperoleh bentuk polinomial karakteristik dan spektrum *Laplace* pada komplemen graf invers dari grup dihedral-2n $\left(\overline{\Gamma_s(D_{2n})}\right)$ yang ditunjukkan pada Tabel 3.14 sebagai berikut:

Tabel 3.14 Pola Polinomial Karakteristik dan Spektrum *Laplace* Komplemen Graf Invers dari Grup Dihedral

D_{2n}	Polinomial Karakteriktik $P(\lambda)$	Spektrum
D_{16}	$\lambda(\lambda-12)(\lambda-16)(\lambda-8)^5(\lambda-10)^8$	$\boldsymbol{spec_L}\left(\overline{\Gamma_s(D_{16})}\right) = \begin{bmatrix} 16 & 12 & 10 & 8 & 0 \\ 1 & 1 & 8 & 5 & 1 \end{bmatrix}$
D_{24}	$\lambda(\lambda-24)(\lambda-16)^2(\lambda-12)^8(\lambda-14)^{12}$	$\boldsymbol{spec_L}\left(\overline{\Gamma_s(D_{24})}\right) = \begin{bmatrix} 24 & 16 & 14 & 12 & 0 \\ 1 & 2 & 12 & 8 & 1 \end{bmatrix}$
D_{32}	$\lambda(\lambda-32)(\lambda-20)^3(\lambda-16)^{11}(\lambda-18)^{16}$	$\boldsymbol{spec_L}\left(\overline{\Gamma_s(D_{32})}\right) = \begin{bmatrix} 32 & 20 & 18 & 16 & 0 \\ 1 & 3 & 16 & 11 & 1 \end{bmatrix}$
⋮	⋮	⋮
D_{2n}	$\lambda(\lambda-2n)\big(\lambda-(n+4)\big)^{\frac{n-4}{4}}$ $(\lambda-n)^{\frac{3n-4}{4}}\big(\lambda-(n+2)\big)^n$	$\boldsymbol{spec_L}\big(\Gamma_s(D_{2n})\big)$ $= \begin{bmatrix} 2n & n+4 & n+2 & n & 0 \\ 1 & \frac{n-4}{4} & n & \frac{3n-4}{4} & 1 \end{bmatrix}$

Dari tabel di atas dapat dirumuskan teorema sebagai berikut:

Teorema 5

Spektrum *Laplace* pada komplemen graf invers dari grup dihedral D_{2n} untuk n genap dan $n = 4(k+1), \forall k \in \mathbb{N}$ adalah

$$\boldsymbol{spec_L}\big(\Gamma_s(D_{2n})\big) = \begin{bmatrix} 2n & n+4 & n+2 & n & 0 \\ 1 & \dfrac{n-4}{4} & n & \dfrac{3n-4}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

Bukti

Misalkan grup dihedral $D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$ dengan n genap dan $n = 4(k+1), \forall k \in \mathbb{N}$. Jika dioperasikan dengan operasi komposisi " $\circ$ " di D_{2n}, maka diperoleh bahwa invers dari setiap anggota adalah

$(1)^{-1} = 1$

$\left(r^i\right)^{-1} = r^{n-i} \quad , \forall i = 1,2,3, \dots, n-1$ dan $i \neq \frac{n}{2}$

$(s)^{-1} = s$

$\left(sr^i\right)^{-1} = sr^i \quad , \forall i = 1,2,3, \dots, n-1$

Maka diperoleh unsur-unsur $S = \left\{r^i | i \neq \frac{n}{2}, i = 1,2,3, \dots, n-1\right\}$ yang tidak memuat anggota yang invers terhadap dirinya sendiri sehingga $|S| = n-2$.

Maka diperoleh matriks keterhubungan titik *(adjacency matrix)*

$$
\boldsymbol{A}(D_{2n}) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ r^3 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ sr^3 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccc} 1 & r & r^2 & r^3 & \dots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & sr^3 & \dots & sr^{n-1} \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

dan matriks derajat

$$
\boldsymbol{D}(D_{2n}) = \begin{bmatrix}
n+1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & n+2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & n+2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & n+1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n+2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n+1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & n+1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & n+1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & n+1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n+1
\end{bmatrix}
$$

Maka diperoleh matriks *Laplace* sebagai berikut:

$$\boldsymbol{L}(D_{2n}) = \begin{bmatrix} n+1 & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & n+2 & -1 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & -1 & n+2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ -1 & 0 & 0 & n+1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n+2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & n+1 & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & n+1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 & n+1 & 0 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & 0 & 0 & n+1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & n+1 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks *Laplace* maka akan dicari nilai eigen dan *algebraic multiplicity* dari matriks tersebut. Dengan mereduksi matriks $(\boldsymbol{L}(D_{2n}) - \lambda\boldsymbol{I})$ menggunakan metode *Gaussian Elimination*, maka diperoleh

$$\begin{vmatrix} (n+1)-\lambda & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & (n+1)-\lambda & \dots & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{(\lambda-n)(\lambda-(n+2))}{\lambda-(n+1)} & -\frac{\lambda-(n+2)}{\lambda-(n+1)} & -\frac{\lambda-(n+2)}{\lambda-(n+1)} & -\frac{\lambda-(n+2)}{\lambda-(n+1)} & -\frac{\lambda-(n+2)}{\lambda-(n+1)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{\lambda^2-(2n+1)\lambda+n^2}{\lambda-n} & \frac{n}{\lambda-n} & -\frac{\lambda-2n}{\lambda-n} & \frac{n}{\lambda-n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\frac{(\lambda-(n+1))(\lambda^2-(2n+1)\lambda+(n^2-n))}{\lambda^2-(2n+1)\lambda+n^2} & \frac{n(\lambda-(n+2))}{\lambda^2-(2n+1)\lambda+n^2} & -\frac{(\lambda-n)(\lambda-(2n+1))}{\lambda^2-(2n+1)\lambda+n^2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{\lambda\left((\lambda-n)(\lambda-(n+2))(\lambda-2n)\right)}{\lambda^3-(3n+1)\lambda^2+n(n^2-n-1)\lambda-6n} \end{vmatrix}$$

Karena $\det(\boldsymbol{L} - \lambda\boldsymbol{I})$ adalah hasil perkalian unsur diagonal utama matriks segitiga atas, maka diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut

$$P(\lambda) = \lambda(\lambda-2n)\big(\lambda-(n+4)\big)^{\frac{n-4}{4}}(\lambda-n)^{\frac{3n-4}{4}}\big(\lambda-(n+2)\big)^{n}$$

Jika $P(\lambda) = 0$ maka diperoleh nilai eigen

$$\lambda_1 = 2n, \lambda_2 = n+4, \lambda_3 = n+2, \lambda_4 = n, \lambda_5 = 0$$

dan diperoleh nilai *algebraic multiplicity* dari perpangkatan polinomial karakteristik untuk masing-masing nilai eigen tersebut yaitu

$$m(\lambda_1) = 1, m(\lambda_2) = \frac{n-4}{4}, m(\lambda_3) = n, m(\lambda_4) = \frac{3n-4}{4}, m(\lambda_5) = 1$$

Dengan demikian, maka diperoleh

$$\boldsymbol{spec_L}\left(\Gamma_s(D_{2n})\right) = \begin{bmatrix} 2n & n+4 & n+2 & n & 0 \\ 1 & \dfrac{n-4}{4} & n & \dfrac{3n-4}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

3.3 Konsep Graf dalam Kajian Silaturrahim

Graf dalam bahasa adalah himpunan dari objek-objek yang dinamakan titik, simpul, atau sudut yang dihubungkan oleh garis atau sisi sehingga titik-titik tersebut terhubung langsung. Sama halnya dengan *ta'aruf* yang telah diperkenalkan dalam al-Quran. Secara bahasa istilah *ta'aruf* berasal dari bahasa Arab yang artinya saling mengenal atau berkenalan. *Ta'aruf* sangat dianjurkan dalam agama Islam agar saling mengenal antara satu sama lain. Salah satu cara agar saling mengenal sesama manusia yaitu dengan bersilaturrahim yang disebutkan dalam surat al-Hujurat ayat 13 yang berbunyi:

يَـٰٓأَيُّهَا ٱلنَّاسُ إِنَّا خَلَقْنَـٰكُم مِّن ذَكَرٍ وَأُنثَىٰ وَجَعَلْنَـٰكُمْ شُعُوبًا وَقَبَآئِلَ لِتَعَارَفُوٓا۟ ۚ إِنَّ
أَكْرَمَكُمْ عِندَ ٱللَّهِ أَتْقَىٰكُمْ ۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلِيمٌ خَبِيرٌ ١٣

Artinya: *"Hai manusia, Sesungguhnya Kami menciptakan kamu dari seorang laki-laki dan seorang perempuan dan menjadikan kamu berbangsa - bangsa dan bersuku-suku supaya kamu saling kenal-mengenal. Sesungguhnya orang yang paling mulia diantara kamu disisi Allah ialah orang yang paling taqwa diantara kamu. Sesungguhnya Allah Maha mengetahui lagi Maha Mengenal" (QS. al-Hujurat:13).*

Ayat tersebut menjelaskan bahwa terjalinnya hubungan satu sama lain di antara sesama manusia merupakan suatu ketetapan dari Allah, dan hubungan ini berawal dari berbeda-bedanya penciptaan manusia (Zulheldi, 2009). Hubungan antar manusia adalah kemampuan mengenali sifat, tingkah laku, pribadi seseorang. Ruang lingkup hubungan antar manusia dalam arti luas adalah interaksi antar seseorang dengan orang lain dalam suatu kehidupan untuk memperoleh kepuasan hati. Sedangkan menurut Hugo Cabot dan Joseph A Kahl (1967), hubungan antar manusia adalah suatu sosiologi konkret karena meneliti situasi kehidupan, khususnya masalah “interaksi” dengan pengaruh psikologisnya.

Di samping menjalin hubungan antar sesama manusia (*hablum min an-Nâs*), juga menitik beratkan kepada hubungan antar manusia dengan Allah (*hablum min Allah*). Sebagaimana Allah Swt. berfirman surat ali Imran ayat 112:

ضُرِبَتْ عَلَيْهِمُ ٱلذِّلَّةُ أَيْنَ مَا ثُقِفُوٓا۟ إِلَّا بِحَبْلٍ مِّنَ ٱللَّهِ وَحَبْلٍ مِّنَ ٱلنَّاسِ وَبَآءُو بِغَضَبٍ
مِّنَ ٱللَّهِ وَضُرِبَتْ عَلَيْهِمُ ٱلْمَسْكَنَةُ ۚ ذَٰلِكَ بِأَنَّهُمْ كَانُوا۟ يَكْفُرُونَ بِـَٔايَٰتِ ٱللَّهِ وَيَقْتُلُونَ
ٱلْأَنۢبِيَآءَ بِغَيْرِ حَقٍّ ۚ ذَٰلِكَ بِمَا عَصَوا۟ وَّكَانُوا۟ يَعْتَدُونَ ﴿١١٢﴾

Artinya: *“Mereka diliputi kehinaan di mana saja mereka berada, kecuali jika mereka berpegang kepada tali (agama) Allah dan tali (perjanjian) dengan manusia, dan mereka kembali mendapat kemurkaan dari Allah dan mereka diliputi kerendahan. yang demikian itu karena mereka kafir kepada ayat-ayat Allah dan membunuh Para Nabi tanpa alasan yang benar. yang demikian itu disebabkan mereka durhaka dan melampaui batas”(QS. ali Imran:112).*

Adapun yang dimaksud dengan hubungan antar manusia di dalam al-Quran adalah adanya ciptaan Allah yang berbeda-beda dalam kehidupan manusia seperti laki-laki dan perempuan, suku-suku yang banyak, berbangsa-bangsa, bahasa yang berbeda-beda, serta warna kulit yang tidak sama dan berbagai keanekaragaman lainnya agar manusia tersebut saling mengenal satu sama lainnya dan bukan untuk menjelekkan perbedaan tersebut. Namun, bagaimana mereka bisa bersatu dengan segala perbedaan tersebut untuk menciptakan sebuah kehidupan yang harmonis yang penuh dengan kedamaian, karena manusia adalah makhluk sosial yang saling membutuhkan satu sama lainnya dan mereka tidak akan bisa hidup dengan individu mereka sendiri. Hal ini untuk saling mengisi sehingga terbentuk manusia terbaik.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang sudah diperoleh, maka dapat diambil kesimpulan bahwa pola umum spektrum *Laplace* dari komplemen graf invers dari grup dihedral dapat diklasifikasikan sebagai berikut:

a. Spektrum *Laplace* dari komplemen graf invers dari grup dihedral D_{2n} untuk n ganjil dan $n \geq 3$ adalah

$$\boldsymbol{spec}_L\left(\Gamma_s(D_{2n})\right) = \begin{bmatrix} 2n & n+2 & n & 0 \\ 1 & \frac{n-1}{2} & \frac{3n-3}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

b. Spektrum *Laplace* dari komplemen graf invers dari grup dihedral D_{2n} untuk n genap dan $n = 4k + 2, \forall k \in \mathbb{N}$ adalah

$$\boldsymbol{spec}_L\left(\Gamma_s(D_{2n})\right) = \begin{bmatrix} 2n & n+4 & n+2 & n & 0 \\ 1 & \frac{n-2}{4} & n & \frac{3n-6}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

c. Spektrum *Laplace* dari komplemen graf invers dari grup dihedral D_{2n} untuk n genap dan $n = 4(k + 1), \forall k \in \mathbb{N}$ adalah

$$\boldsymbol{spec}_L\left(\Gamma_s(D_{2n})\right) = \begin{bmatrix} 2n & n+4 & n+2 & n & 0 \\ 1 & \frac{n-4}{4} & n & \frac{3n-4}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

4.2 Saran

Bagi peneliti selanjutnya, disarankan untuk mengkaji spektrum *Adjacency*, spektrum *signless Laplace* dan spektrum detour dari komplemen graf invers atau berbagai macam graf lainnya dari grup dihedral D_{2n}.

DAFTAR RUJUKAN

Abdussakir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika.* Malang: UIN Malang Press.

Abdussakir, Azizah, N. N. dan Nofandika, F. F. 2009. *Teori Graf*. Malang: UIN Malang Press.

Abdussakir, Fachruddin, I, Rahmawati, N. D., dan Muzayyana, I. 2009. *Menentukan Spectrum Suatu Graf Berbantuan Matlab*. Penelitian Bersama. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Abdussakir, Muzakir, M. dan Khasanah, R. 2016. *Spektrum Graf Konjugasi dan Graf Komplemen Graf Konjugasi dari Grup Dihedral.* Penelitian P3S. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Alfuraidan, M. R. dan Zakariya, Y. F. 2017. Invers Graphs Associated with Finite Groups. *Electronic Journal of Graph Theory and Aplications*, 5(1): 142-154.

Anton, H. dan Rorres, C. 2004. *Aljabar Linier Elemeneter Versi Aplikasi Edisi Kedelapan Jilid I.* Jakarta: Erlangga.

Biyikoglu, T., Leydold, J., dan Stadler, P. F. 2007. *Laplacian Eigenvectors of Graphs.* Berlin: Springer.

Brouwer, A. E. dan Haemers, W. H. 2010. *Spectra of Graphs Theory and Application*. New York: London Academic Press.

Budayasa, I. K. 2007. *Teori Graph dan Aplikasinya.* Surabaya: Unesa University Press.

Chartrand, G., Lesniak, L., dan Zhang, P. 2016. *Graphs and Digraphs Sixth Edition*. New York: CRC Press.

Diestel, R. 2005. *Graduate Texts in Mathematics Graph Theory 3th Edition.* Heidelberg: Springer-Verlag.

Dummit, D. S. dan Foote, R. M. 2004. *Abstract Algebra*. New Jersey: a Division of Simon & Schuster, Inc.

Gilbert, L. dan Gilbert, J. 2009. *Elements of Modern Algebra Seventh Edition*. Belmont: Brooks/Cole.

Hale, W. K. 1980. Frequency Assignment: Theory and Applications. *Proceedings of the IEEE*, 68, 1479-1514.

Hamka. 2001. *Lembaga Hidup.* Jakarta: Pustaka Panjimas.

Jain, S. K. & Gunawardena, A. D. 2004. *Linear Algebra an Interactive Approach.* Belmont: Thomson-Brooks/Cole.

Katsir, I. 2001. *Tafsir Ibnu Katsir, Jilid 2*. Terjemahan M. Ghoffar. Bogor: Pustaka Imam asy-Syafi'i.

Kuttler. 2009. *Elementary Linear Algebra.* Berlin: Spinger.

Shihab, Q. 2004. *Tafsir al Mishbah Pesan, Kesan, dan Keserasian al-Quran.* Jakarta: Lentera Hati.

Zulheldi. 2009. *Tafsir II Buku Ajar Mata Kuliah Tafsir II.* Padang: Hayfa Pres.

LAMPIRAN

Tabel 3.9 Tabel Cayley Grup Dihedral-28 (D_{28})

$\circ$	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	r^{12}	r^{13}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	sr^{12}	sr^{13}
1	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	r^{12}	r^{13}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	sr^{12}	sr^{13}
r	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	r^{12}	r^{13}	1	sr^{13}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	sr^{12}
r^{2}	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	r^{12}	r^{13}	1	r	sr^{12}	sr^{13}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}
r^{3}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	r^{12}	r^{13}	1	r	r^{2}	sr^{11}	sr^{12}	sr^{13}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}
r^{4}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	r^{12}	r^{13}	1	r	r^{2}	r^{3}	sr^{10}	sr^{11}	sr^{12}	sr^{13}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}
r^{5}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	r^{12}	r^{13}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	sr^{12}	sr^{13}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}
r^{6}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	r^{12}	r^{13}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	sr^{12}	sr^{13}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}
r^{7}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	r^{12}	r^{13}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	sr^{12}	sr^{13}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}
r^{8}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	r^{12}	r^{13}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	sr^{12}	sr^{13}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}
r^{9}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	r^{12}	r^{13}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	sr^{12}	sr^{13}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}
r^{10}	r^{10}	r^{11}	r^{12}	r^{13}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	sr^{12}	sr^{13}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}
r^{11}	r^{11}	r^{12}	r^{13}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	sr^{12}	sr^{13}	s	sr	sr^{2}
r^{12}	r^{12}	r^{13}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	sr^{12}	sr^{13}	s	sr
r^{13}	r^{13}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	r^{12}	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	sr^{12}	sr^{13}	s
s	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	sr^{12}	sr^{13}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	r^{12}	r^{13}
sr	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	sr^{12}	sr^{13}	s	r^{13}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	r^{12}
sr^{2}	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	sr^{12}	sr^{13}	s	sr	r^{12}	r^{13}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}
sr^{3}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	sr^{12}	sr^{13}	s	sr	sr^{2}	r^{11}	r^{12}	r^{13}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}
sr^{4}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	sr^{12}	sr^{13}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	r^{10}	r^{11}	r^{12}	r^{13}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}
sr^{5}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	sr^{12}	sr^{13}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	r^{12}	r^{13}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}
sr^{6}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	sr^{12}	sr^{13}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	r^{12}	r^{13}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}
sr^{7}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	sr^{12}	sr^{13}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	r^{12}	r^{13}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}
sr^{8}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	sr^{12}	sr^{13}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	r^{12}	r^{13}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}
sr^{9}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	sr^{12}	sr^{13}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	r^{12}	r^{13}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}
sr^{10}	sr^{10}	sr^{11}	sr^{12}	sr^{13}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	r^{12}	r^{13}	1	r	r^{2}	r^{3}
sr^{11}	sr^{11}	sr^{12}	sr^{13}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	r^{12}	r^{13}	1	r	r^{2}
sr^{12}	sr^{12}	sr^{13}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	r^{12}	r^{13}	1	r
sr^{13}	sr^{13}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	sr^{12}	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	r^{12}	r^{13}	1

Tabel 3.12 Tabel Cayley Grup Dihedral-24 (D_{24})

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	r^{10}	r^{11}	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	sr^{10}	sr^{11}
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	r^{10}	r^{11}	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	sr^{10}	sr^{11}
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	r^{10}	r^{11}	1	sr^{11}	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	sr^{10}
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	r^{10}	r^{11}	1	r	sr^{10}	sr^{11}	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9
r^3	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	r^{10}	r^{11}	1	r	r^2	sr^9	sr^{10}	sr^{11}	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8
r^4	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	r^{10}	r^{11}	1	r	r^2	r^3	sr^8	sr^9	sr^{10}	sr^{11}	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7
r^5	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	r^{10}	r^{11}	1	r	r^2	r^3	r^4	sr^7	sr^8	sr^9	sr^{10}	sr^{11}	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
r^6	r^6	r^7	r^8	r^9	r^{10}	r^{11}	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	sr^{10}	sr^{11}	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r^7	r^7	r^8	r^9	r^{10}	r^{11}	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	sr^{10}	sr^{11}	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^8	r^8	r^9	r^{10}	r^{11}	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	sr^{10}	sr^{11}	s	sr	sr^2	sr^3
r^9	r^9	r^{10}	r^{11}	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	sr^{10}	sr^{11}	s	sr	sr^2
r^{10}	r^{10}	r^{11}	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	sr^{10}	sr^{11}	s	sr
r^{11}	r^{11}	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	r^{10}	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	sr^{10}	sr^{11}	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	sr^{10}	sr^{11}	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	r^{10}	r^{11}
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	sr^{10}	sr^{11}	s	r^{11}	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	r^{10}
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	sr^{10}	sr^{11}	s	sr	r^{10}	r^{11}	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	sr^{10}	sr^{11}	s	sr	sr^2	r^9	r^{10}	r^{11}	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8
sr^4	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	sr^{10}	sr^{11}	s	sr	sr^2	sr^3	r^8	r^9	r^{10}	r^{11}	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7
sr^5	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	sr^{10}	sr^{11}	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r^7	r^8	r^9	r^{10}	r^{11}	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
sr^6	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	sr^{10}	sr^{11}	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	r^6	r^7	r^8	r^9	r^{10}	r^{11}	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr^7	sr^7	sr^8	sr^9	sr^{10}	sr^{11}	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	r^{10}	r^{11}	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^8	sr^8	sr^9	sr^{10}	sr^{11}	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	r^{10}	r^{11}	1	r	r^2	r^3
sr^9	sr^9	sr^{10}	sr^{11}	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	r^{10}	r^{11}	1	r	r^2
sr^{10}	sr^{10}	sr^{11}	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	r^{10}	r^{11}	1	r
sr^{11}	sr^{11}	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	sr^{10}	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	r^{10}	r^{11}	1

Tabel 3.13 Tabel Cayley Grup Dihedral-32 (D_{32})

$\circ$	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	r^{12}	r^{13}	r^{14}	r^{15}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	sr^{12}	sr^{13}	sr^{14}	sr^{15}
1	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	r^{12}	r^{13}	r^{14}	r^{15}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	sr^{12}	sr^{13}	sr^{14}	sr^{15}
r	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	r^{12}	r^{13}	r^{14}	r^{15}	1	sr^{15}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	sr^{12}	sr^{13}	sr^{14}
r^{2}	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	r^{12}	r^{13}	r^{14}	r^{15}	1	r	sr^{14}	sr^{15}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	sr^{12}	sr^{13}
r^{3}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	r^{12}	r^{13}	r^{14}	r^{15}	1	r	r^{2}	sr^{13}	sr^{14}	sr^{15}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	sr^{12}
r^{4}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	r^{12}	r^{13}	r^{14}	r^{15}	1	r	r^{2}	r^{3}	sr^{12}	sr^{13}	sr^{14}	sr^{15}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}
r^{5}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	r^{12}	r^{13}	r^{14}	r^{15}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	sr^{11}	sr^{12}	sr^{13}	sr^{14}	sr^{15}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}
r^{6}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	r^{12}	r^{13}	r^{14}	r^{15}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	sr^{10}	sr^{11}	sr^{12}	sr^{13}	sr^{14}	sr^{15}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}
r^{7}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	r^{12}	r^{13}	r^{14}	r^{15}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	sr^{12}	sr^{13}	sr^{14}	sr^{15}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}
r^{8}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	r^{12}	r^{13}	r^{14}	r^{15}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	sr^{12}	sr^{13}	sr^{14}	sr^{15}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}
r^{9}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	r^{12}	r^{13}	r^{14}	r^{15}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	sr^{12}	sr^{13}	sr^{14}	sr^{15}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}
r^{10}	r^{10}	r^{11}	r^{12}	r^{13}	r^{14}	r^{15}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	sr^{12}	sr^{13}	sr^{14}	sr^{15}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}
r^{11}	r^{11}	r^{12}	r^{13}	r^{14}	r^{15}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	sr^{12}	sr^{13}	sr^{14}	sr^{15}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}
r^{12}	r^{12}	r^{13}	r^{14}	r^{15}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	sr^{12}	sr^{13}	sr^{14}	sr^{15}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}
r^{13}	r^{13}	r^{14}	r^{15}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	r^{12}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	sr^{12}	sr^{13}	sr^{14}	sr^{15}	s	sr	sr^{2}
r^{14}	r^{14}	r^{15}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	r^{12}	r^{13}	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	sr^{12}	sr^{13}	sr^{14}	sr^{15}	s	sr
r^{15}	r^{15}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	r^{12}	r^{13}	r^{14}	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	sr^{12}	sr^{13}	sr^{14}	sr^{15}	s
s	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	sr^{12}	sr^{13}	sr^{14}	sr^{15}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	r^{12}	r^{13}	r^{14}	r^{15}
sr	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	sr^{12}	sr^{13}	sr^{14}	sr^{15}	s	r^{15}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	r^{12}	r^{13}	r^{14}
sr^{2}	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	sr^{12}	sr^{13}	sr^{14}	sr^{15}	s	sr	r^{14}	r^{15}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	r^{12}	r^{13}
sr^{3}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	sr^{12}	sr^{13}	sr^{14}	sr^{15}	s	sr	sr^{2}	r^{13}	r^{14}	r^{15}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	r^{12}
sr^{4}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	sr^{12}	sr^{13}	sr^{14}	sr^{15}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	r^{12}	r^{13}	r^{14}	r^{15}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}
sr^{5}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	sr^{12}	sr^{13}	sr^{14}	sr^{15}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	r^{11}	r^{12}	r^{13}	r^{14}	r^{15}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}
sr^{6}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	sr^{12}	sr^{13}	sr^{14}	sr^{15}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	r^{10}	r^{11}	r^{12}	r^{13}	r^{14}	r^{15}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}
sr^{7}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	sr^{12}	sr^{13}	sr^{14}	sr^{15}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	r^{12}	r^{13}	r^{14}	r^{15}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}
sr^{8}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	sr^{12}	sr^{13}	sr^{14}	sr^{15}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	r^{12}	r^{13}	r^{14}	r^{15}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}
sr^{9}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	sr^{12}	sr^{13}	sr^{14}	sr^{15}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	r^{12}	r^{13}	r^{14}	r^{15}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}
sr^{10}	sr^{10}	sr^{11}	sr^{12}	sr^{13}	sr^{14}	sr^{15}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	r^{12}	r^{13}	r^{14}	r^{15}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}
sr^{11}	sr^{11}	sr^{12}	sr^{13}	sr^{14}	sr^{15}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	r^{12}	r^{13}	r^{14}	r^{15}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}
sr^{12}	sr^{12}	sr^{13}	sr^{14}	sr^{15}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	r^{12}	r^{13}	r^{14}	r^{15}	1	r	r^{2}	r^{3}
sr^{13}	sr^{13}	sr^{14}	sr^{15}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	sr^{12}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	r^{12}	r^{13}	r^{14}	r^{15}	1	r	r^{2}
sr^{14}	sr^{14}	sr^{15}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	sr^{12}	sr^{13}	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	r^{12}	r^{13}	r^{14}	r^{15}	1	r
sr^{15}	sr^{15}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	sr^{12}	sr^{13}	sr^{14}	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	r^{12}	r^{13}	r^{14}	r^{15}	1

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Miratul Husna
Nim : 12610077
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Spektrum *Laplace* dari Komplemen Graf Invers dari Grup Dihedral
Pembimbing I : Dr. Abdussakir, M.Pd
Pembimbing II : Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	08 November 2017	Konsultasi Bab I dan Bab II	1.
2.	08 November 2017	Konsultasi Agama Bab I dan Bab II	2.
3.	21 November 2017	Revisi Agama Bab I dan Bab II	3.
4.	28 November 2017	Revisi Bab III	4.
5.	19 Januari 2018	Konsultasi Bab III dan Bab IV	5.
6.	24 Januari 2018	Revisi Bab III dan Bab IV	6.
7.	25 Januari 2018	Revisi Bab I dan Bab III	7.
8.	26 Januari 2018	Konsultasi Agama Bab III	8.
9.	29 Januari 2018	Revisi Agama Bab III	9.
10.	30 Januari 2018	Revisi Keseluruhan	10.
11.	31 Januari 2018	ACC Agama Keseluruhan	11.
12.	02 Februari 2018	ACC Keseluruhan	12.

Malang, 02 Februari 2018
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

RIWAYAT HIDUP

Miratul Husna dilahirkan di Pasuruan pada tanggal 24 Mei 1996, anak kedua dari empat bersaudara, pasangan Bapak M. Fatchur Rozi dan Ibu Charirotul Barokati. Pendidikan dasar ditempuh di kota kelahirannya di SD Maarif Jogosari Pandaan Pasuruan yang ditamatkan pada tahun 2008. Pada tahun yang sama penulis melanjutkan pendidikan menengah pertama di MTs. Amanatul Ummah Pacet Mojokerto pada program akselerasi. Pada tahun 2010 dia menamatkan pendidikan menengah pertamanya, kemudian melanjutkan pendidikan menengah atas di MA Amanatul Ummah Pacet Mojokerto di tempat yang sama dan menamatkan pendidikan tersebut pada tahun 2012. Pendidikan berikutnya penulis tempuh di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang melalui jalur tulis (SBMPTN) dengan mengambil Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi.