POLA BANYAKNYA GRAF YANG TIDAK SALING ISOMORFIK MENGGUNAKAN TEOREMA POLYA

SKRIPSI

OLEH
IFFAH NUR HAMIDAH
NIM. 12610016

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

POLA BANYAKNYA GRAF YANG TIDAK SALING ISOMORFIK MENGGUNAKAN TEOREMA POLYA

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Iffah Nur Hamidah
NIM. 12610016

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

POLA BANYAKNYA GRAF YANG TIDAK SALING ISOMORFIK MENGGUNAKAN TEOREMA POLYA

SKRIPSI

Oleh
Iffah Nur Hamidah
NIM. 12610016

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 7 September 2018

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Dr. Abdussakir, M.Pd	Abdul Aziz, M.Si
NIP.19751006 200312 1 001	NIP.19760318 200604 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP.19650414 200312 1 001

POLA BANYAKNYA GRAF YANG TIDAK SALING ISOMORFIK MENGGUNAKAN TEOREMA POLYA

SKRIPSI

Oleh
Iffah Nur Hamidah
NIM. 12610016

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 3 Oktober 2018

Penguji Utama	: Evawati Alisah, M.Pd	....
Ketua Penguji	: H. Wahyu H. Irawan, M.Pd	....
Sekretaris Penguji	: Dr. Abdussakir, M.Pd	....
Anggota Penguji	: Abdul Aziz, M.Si	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Iffah Nur Hamidah

NIM : 12610016

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul : Pola Banyaknya Graf yang Tidak Saling Isomorfik Menggunakan Teorema Polya

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 7 September 2018
Yang membuat pernyataan,

Iffah Nur Hamidah
NIM. 12610016

MOTO

وَٱسۡتَعِينُواْ بِٱلصَّبۡرِ وَٱلصَّلَوٰةِۚ وَإِنَّهَا لَكَبِيرَةٌ إِلَّا عَلَى ٱلۡخَٰشِعِينَ ﴿٤٥﴾

"Jadikanlah sabar dan shalat sebagai penolongmu. Dan sesungguhnya yang demikian itu sungguh berat, kecuali bagi orang-orang yang khusyu'."

(QS.al-Baqarah/2:45)

PERSEMBAHAN

Dengan penuh cinta penulis persembahkan karya tulis ini kepada:

Kedua orang tua tercinta bapak H. Syamsul Hadi dan ibu Hj. Musyrifah, kakak-kakak tersayang Anis Nur Laili, S.Pd, Ahmad Yani, dan Muhammad Mansur, S.Kom dan adik tersayang Qonik Zuliatin yang senantiasa mendoakan dengan tulus ikhlas, serta memberi semangat dan motivasi demi keberhasilan penulis. Semoga kalian selalu mendapatkan kasih sayang dari Allah Swt.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku dosen pembimbing I yang telah sabar meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan, nasihat, motivasi, dan arahan yang terbaik kepada penulis selama penyelesaian skripsi ini.
5. Abdul Aziz, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan, bimbingan, dan berbagi ilmunya kepada penulis selama penyelesaian skripsi ini.

6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segenap ilmu dan bimbingannya.
7. Bapak H. Syamsul Hadi dan ibu Hj. Musyrifah yang tidak pernah lelah memberikan doa, kasih sayang, serta semangat dan motivasi kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
8. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika 2012 khususnya kelas Matematika A, yang selalu memotivasi penulis, terima kasih atas semua pengalaman berharga dan kenangan-kenangan terindah saat menuntut ilmu bersama dalam menggapai cita-cita.
9. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu-persatu, terima kasih atas doa dan dukungan dalam kelancaran skripsi ini.

Akhirnya penulis hanya dapat berharap, di balik skripsi ini dapat ditemukan sesuatu yang dapat memberikan manfaat dan wawasan yang lebih luas atau bahkan hikmah bagi penulis, pembaca dan bagi seluruh mahasiswa.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, Januari 2019

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL
HALAMAN PENGAJUAN
HALAMAN PERSETUJUAN
HALAMAN PENGESAHAN
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN
HALAMAN MOTO
HALAMAN PERSEMBAHAN
KATA PENGANTAR viii
DAFTAR ISI x
DAFTAR TABEL xii
DAFTAR GAMBAR xiii
ABSTRAK xiv
ABSTRACT xv
ملخص xvi

BAB I PENDAHULUAN
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 4
1.3 Tujuan Penelitian 4
1.4 Batasan Masalah 4
1.5 Manfaat Penelitian 4
1.6 Metode Penelitian 5
1.7 Sistematika Penulisan 6

BAB II KAJIAN PUSTAKA
2.1 Graf 8
2.1.1 Definisi Graf 8
2.1.2 *Adjacent* dan *Incident* 9
2.1.3 Derajat Titik 10
2.1.4 Graf-graf Khusus 12
2.1.5 Graf Isomorfik 13
2.2 Grup 15
2.2.1 Definisi Grup 15
2.2.2 Grup Simetri 17

2.3 *Cycle* 19
2.3.1 Definisi *Cycle* 19
2.3.2 Definisi *Cycle Type* (tipe untai) dan Bobot 21
2.3.3 Definisi *Cycle Index* (Indeks Siklik) 21
2.4 Teorema Polya 22
2.4.1 Teorema Polya I 22
2.4.2 Teorema Polya II 23
2.5 Kajian Graf dalam Al-Quran 26

BAB III PEMBAHASAN
3.1 Penerapan Teorema Polya pada Graf 31
3.1.1 Penerapan Teorema Polya pada Graf dengan 2 Titik 31
3.1.2 Penerapan Teorema Polya pada Graf dengan 3 Titik 34
3.1.3 Penerapan Teorema Polya pada Graf dengan 4 Titik 38
3.1.4 Penerapan Teorema Polya pada Graf dengan 5 Titik 43
3.1.5 Penerapan Teorema Polya pada Graf dengan 6 Titik 49
3.1.6 Penerapan Teorema Polya pada Graf dengan 7 Titik 56
3.1.7 Penerapan Teorema Polya pada Graf dengan 8 Titik 61
3.2 Teorema-teorema dari Pola Banyaknya Graf yang Tidak Saling Isomorfik 62
3.3 Graf yang Tidak Saling Isomorfik pada Al-Quran 69

BAB IV PENUTUP
4.1 Kesimpulan 75
4.2 Saran 75

DAFTAR RUJUKAN 76
LAMPIRAN
RIWAYAT HIDUP

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Komposisi Grup Simetri S_3 18

Tabel 3.1 Graf yang Tidak Saling Isomorfik dengan $n = 2$ 34

Tabel 3.2 Graf yang Tidak Saling Isomorfik dengan $n = 3$ 37

Tabel 3.3 Graf yang Tidak Saling Isomorfik dengan $n = 4$ 42

Tabel 3.4 Graf yang Tidak Saling Isomorfik dengan $n = 5$ 48

Tabel 3.5 Banyaknya Graf yang Tidak Saling Isomorfik dengan $n = 2, 3, \dots, 8$ 62

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Graf $G(4,4)$ 8

Gambar 2.2 Graf $G(5,7)$ 9

Gambar 2.3 Graf $G(4,5)$ 10

Gambar 2.4 Graf $G(4,5)$ 12

Gambar 2.5 Graf $G(5,6)$ 12

Gambar 2.6 Graf Komplit K_1, K_2, K_3, dan K_4 13

Gambar 2.7 Contoh Graf yang Isomorfik 14

Gambar 2.8 Contoh Graf yang Tidak Isomorfik 14

Gambar 2.9 Hubungan antara Allah dengan Hamba-Nya serta Sesama Hamba 27

Gambar 2.10 Graf Shalat Lima Waktu 29

Gambar 3.1 Graf Tanpa Sisi 63

Gambar 3.2 Graf dengan Satu Sisi 64

Gambar 3.3 Dua Graf yang Tidak Saling Isomorfik dengan Dua Sisi 65

Gambar 3.4 Lima Graf yang Tidak Saling Isomorfik dengan Tiga Sisi 68

Gambar 3.5 Sebelas Graf yang Tidak Saling Isomorfik dengan Empat Sisi 68

Gambar 3.6 Graf G_1 Hubungan antara Allah dengan Malaikat-Nya serta Sesama Malaikat 73

Gambar 3.7 Graf G_2 Hubungan antara Allah dengan Hamba-Nya serta Sesama Hamba 73

Gambar 3.8 Graf G_3 Hubungan antara Allah dengan Jin-Nya serta Sesama Jin 73

ABSTRAK

Hamidah, Iffah Nur. 2019. **Pola Banyaknya Graf yang Tidak Saling Isomorfik Menggunakan Teorema Polya**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Abdussakir, M.Pd, (II) Abdul Aziz, M.Si.

Kata kunci: graf, graf isomorfik, indeks sikel, teorema Polya.

Salah satu kajian teori graf yang menarik untuk diteliti adalah kajian tentang graf yang tidak saling isomorfik. Tujuan penelitian ini adalah mencari pola banyaknya graf yang tidak saling isomorfik menggunakan teorema Polya.

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi kepustakaan dengan tahapan analisis yang diawali dengan mengidentifikasi banyaknya titik pada graf dengan order $n = 2, 3, \ldots, 8$. Langkah selanjutnya menentukan banyaknya anggota grup simetri pada titik yang akan dihitung, menentukan semua bentuk tipe untai dan banyak anggota dari bentuk tipe untai tersebut, lalu menentukan bentuk indeks sikelnya dan menentukan keseluruhan perubahan indeks sikel dengan cara mencari pembangkit dari grup S_n (permutasi titik pada graf) yaitu grup R_n (permutasi sisi pada graf). Akan didapatkan indeks sikelgrupnya, yaitu:

$$Z(g: x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n) \equiv \frac{1}{m} \sum_{g \in G} Z(g: x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n).$$

Setelah didapatkan indeks sikel grupnya akan diaplikasikan ke dalam teorema Polya I dan teorema Polya II. Hasil penelitian ini adalah:

a. Terdapat 1 jenis graf yang dapat dibuat dari titik sebanyak n tanpa sisi, $n \in N$.
b. Terdapat 1 jenis graf yang dapat dibuat dari titik sebanyak $n \geq 2$ dengan sisi sebanyak 1, $n \in N$.
c. Terdapat 2 jenis graf yang tidak saling isomorfik yang dapat dibuat dari titik sebanyak $n \geq 4$ dengan sisi sebanyak 2, $n \in N$.
d. Terdapat 5 jenis graf yang tidak saling isomorfik yang dapat dibuat dari titik sebanyak $n \geq 6$ dengan sisi sebanyak 3, $n \in N$.
e. Terdapat 11 jenis graf yang tidak saling isomorfik yang dapat dibuat dari titik sebanyak $n \geq 8$ dengan sisi sebanyak 4, $n \in N$.

Bagi penelitian selanjutnya dapat dilakukan pada jenis graf-graf yang lainnya.

ABSTRACT

Hamidah, Iffah Nur. 2019. **The Pattern of the Number of Graphs that are not Mutually Isomorphic Using the Polya's Theorem**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisor: (I) Dr. Abdussakir, M.Pd, (II) Abdul Aziz, M.Si.

Keywords: graph, isomorphic graph, cycle index, Polya's theorem.

One of an interesting study of graph theory is the study of non-mutually isomorphic graphs. The purpose of this research is to determine the pattern of the number of graphs that are not mutually isomorphic using the Polya's theorem.

The research method used in this research is the study of literature in which the step is begun with identifying the number of vertices on the graph of order $n = 2, 3, \dots, 8$. The next step is determining the number of members of symmetry group at the vertex to be calculated, determining all forms of cycle type and the number of members of the cycle type form, then determining the cycle index form and determining the overall cycle index change by finding the generating of group S_n (the vertex permutation of the graph) namely the group R_n (the edge permutations of the graph). Getting cycle index group that is obtained, namely: $Z(g: x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n) \equiv \frac{1}{m} \sum_{g \in G} Z(g: x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n)$. After the new cycle index group obtained, then it is applied into the Polya I and Polya II theorem. The results of this study:

a. There is one graph kind that can be made from n vertices without edges, $n \in N$.
b. There is one graph kind that can be made from $n \geq 2$ vertices with one edge, $n \in N$.
c. There are two graph kinds that are not mutually isomorphic that can be made from $n \geq 4$ vertices with two edges, $n \in N$.
d. There are five graph kinds that are not mutually isomorphic that can be made from $n \geq 6$ vertices with three edges, $n \in N$.
e. There are eleven graph kinds that are not mutually isomorphic that can be made from $n \geq 8$ vertices with four edges, $n \in N$.

The next research can be done on the other type of graphs.

ملخص

حميدة، عفه نور. ٢٠١٩. **نمط العديد من المخططة التي ليست متباينة إسومورفيك باستخدام نظرية بوليا**.بحث جامعى. الشعبة الرياضيات. كلية العلوم و التكنولوجيا، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف : (١) الدكتور عبد الشاكر، الماجستر. (٢) عبد العزيز، الماجستير.

الكلمات الرئيسية: المخطط، المخطط إسومورفيك، مؤشر دورة، نظرية بوليا

ومن أحد نظريات مخطط الجذابة للبحوث عنها هي نظرية المخططة غير إسومورفيك. والغرض من هذا البحث هو لتحديد نمط العديد من ا المخططة التي ليست إسومورفيك باستخدام نظرية بوليا.

منهج البحث المستخدم في هذا البحث هو دراسة مكتبية بمراحل الملاحظة التي بدئت بتحديد العديد من القمم على المخطط بـ $n = 2, 3, \dots, 8$. الخطوة التالية هي وتحديد عدد الأعضاء في مجموعة التماثل رؤوس ليتم حسابها، تحديد جميع أشكال نوع الدورة والعديد من أعضاء نموذج نوع الدورة، ثم تحديد شكل مؤشر دورة وتحديد التغير العام للمؤشر الدورة من خلال إيجاد مجموعة S_n (تقليب الرؤوس في المخطط) وهي المجموعة R_n (تقليب الأضلاع في المخطط). الحصول على مجموعة مؤشر دورة التي يتم الحصول عليها، وهي

$$Z(g: x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n) \equiv \frac{1}{m}\sum_{g\in G} Z(g: x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n).$$

بعد مجموعة مؤشر دورة جديد التي تم الحصول عليها ثم تطبق في نظرية بوليا الأول والثاني. نتائج هذه الدراسة:

أ. هناك نوع واحد من المخطط الذي يمكن صنعه من n رؤوس بدون ضلع، $n \in N$.

ب. هناك نوع واحد من المخطط الذي يمكن صنعه من $n \geq 2$ رؤوس مع ضلع واحدة، $n \in N$.

ت. هناك نوعين من المخطط الذي ليست متبادلة إيسومورفيك الذي يمكن صنعه من $n \geq 4$ رؤوس مع ضلعين، $n \in N$.

ث. هناك خمسة أنواع من المخطط الذي ليست متبادلة إيسومورفيك الذي يمكن صنعه من $n \geq 6$ رؤوس مع ثلاثة أضلاع، $n \in N$.

ج. هناك أحد عشر أنواع من المخطط الذي ليست متبادلة إيسومورفيك الذي يمكن صنعه من $n \geq 8$ رؤوس مع أربعة أضلاع، $n \in N$.

والبحث بعده يمكن القيام به على نوع من المخطط أخرى.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Salah satu cabang ilmu yang mendasari berbagai macam ilmu yang lain untuk menghadapi berbagai macam fenomena yang semakin kompleks sehingga penting untuk dipelajari adalah matematika. Banyak permasalahan di dalam hidup yang harus diselesaikan dengan menggunakan ilmu matematika, baik disadari maupun tidak, seperti menghitung dan mengukur. Matematika adalah ilmu universal yang mendasari ilmu pengetahuan lainnya, misalnya dalam ilmu fisika, biologi, dan kimia. Peran matematika dewasa ini semakin penting, karena banyaknya informasi penting yang disampaikan orang dalam bahasa matematika seperti tabel, grafik, dan diagram.

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang banyak aplikasinya. Teori graf banyak dimanfaatkan dalam kehidupan sehari-hari, misalnya dalam pembuatan proyek perjalanan angkutan, pengaturan jadwal, dan pengaturan jaringan listrik. Dengan menggunakan rumusan atau model teori graf yang tepat, suatu permasalahan menjadi lebih jelas, sehingga mudah menganalisisnya. Permasalahan yang dirumuskan dengan teori graf dibuat sederhana, yaitu diambil aspek-aspek yang diperlukan dan dibuang aspek-aspek lainnya (Purwanto, 1998).

Graf adalah himpunan tak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik (*vertex*), dan himpunan dari pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda yang disebut sisi (*edge*). Dalam al-Quran objek-objek pada graf yaitu titik dan sisi meliputi Pencipta (Allah) dan hamba-hamba-Nya, sedangkan sisi atau garis yang menghubungkan elemen-elemen tersebut adalah bagaimana hubungan antara Allah dengan hamba-Nya dan juga hubungan sesama hamba yang terjalin, *hablun min Allah wa hablun min an-nas*.

Hal ini dikuatkan oleh firman Allah dalam al-Quran surat al-Hujurat ayat 10 yaitu:

إِنَّمَا ٱلۡمُؤۡمِنُونَ إِخۡوَةٞ فَأَصۡلِحُواْ بَيۡنَ أَخَوَيۡكُمۡۚ وَٱتَّقُواْ ٱللَّهَ لَعَلَّكُمۡ تُرۡحَمُونَ ١٠

Artinya:"Orang-orang beriman itu sesungguhnya bersaudara. Sebab itu damaikanlah (perbaikilah hubungan) antara kedua saudaramu itu dan takutlah terhadap Allah, supaya kamu mendapat rahmat" (Q.S. Al-Hujurat:10).

Teori graf sebenarnya sudah ada sejak lebih dari dua ratus tahun yang lalu. Jurnal pertama tentang masalah jembatan Konigsberg menggunakan graf (tahun 1736). Di kota Konigsberg (sebelah timur negara bagian Prussia, Jerman), sekarang bernama kota Kaliningrad, terdapat sungai Pregal yang mengalir mengitari pulau Kneiphof lalu bercabang menjadi dua anak sungai. Ada tujuh buah jembatan yang menghubungkan daratan yang dibelah oleh sungai tersebut. Masalahnya adalah "Apakah mungkin melalui ketujuh jembatan itu masing-masing tepat satu kali, dan kembali ke tempat semula? seorang matematikawan Swiss, Leonhard Euler, adalah orang pertama yang berhasil menemukan jawaban masalah itu dengan pembuktian yang sederhana. Ia memodelkan masalah ini ke dalam graf. Daratan (titik-titik yang dihubungkan oleh jembatan) dinyatakannya sebagai titik (noktah) yang disebut titik (*vertex*) dan jembatan dinyatakan sebagai garis yang disebut sisi (*edge*) (Munir, 2007).

Salah satu alasan perkembangan teori graf yang begitu pesat adalah aplikasinya yang sangat luas dalam kehidupan sehari-hari maupun dalam berbagai bidang ilmu seperti ilmu komputer, teknik, sains, bahkan bisnis dan ilmu sosial. Di dalam teori graf terdapat beberapa permasalahan pokok salah satunya masalah enumerasi. Pada umumnya, permasalahan enumerasi merupakan permasalahan yang mengandung masalah menghitung berapa banyak objek tertentu dan masalah mencacah semua daftar objek-objek. Salah satu alat bantu yang dapat digunakan untuk mempermudah menyelesaikan permasalahan enumerasi adalah dengan menggunakan teorema Polya (Polya's *theorem*).

Pada awalnya teorema Polya digunakan dalam perhitungan banyaknya pola molekul yang terbentuk dari gabungan sejumlah atom-atom penyusunnya, yang diperkenalkan oleh seorang matematikawan George Polya pada tahun 1936. Teorema Polya terdiri dari teorema Polya I dan teorema Polya II. Teorema Polya I menjelaskan tentang banyaknya pola molekul yang terbentuk sedangkan teorema Polya II menjelaskan bentuk dari pola-pola yang terbentuk tersebut. Teorema Polya merupakan suatu teknik perhitungan yang menggabungkan struktur aljabar abstrak dengan kombinatorika. Stuktur aljabar yang akan digunakan adalah konsep suatu grup G pada himpunan berhingga X (Fel, 2009).

Penelitian ini sendiri sebenarnya merupakan pengembangan dari penelitian tentang graf yang tidak saling isomorfis. Jika pada penelitian sebelumnya yang dikaji oleh Vivy Tri Rosalianti, dkk (2013) adalah penggunaan teorema Polya dalam menentukan banyaknya graf sederhana yang tidak saling isomorfis hanya dengan 5 titik, maka pada penelitian kali ini akan membahas banyaknya graf yang tidak saling isomorfik yang dapat dibentuk dengan order $n = 2, 3, \dots, 8$ titik menggunakan teorema Polya I dan mengetahui bentuk-bentuk graf dengan order $n = 2, 3, \dots, 8$ titik yang tidak saling isomorfik menggunakan teorema Polya II serta terbentuk teorema-teoremanya. Berdasarkan uraian di atas maka penulis tertarik untuk meneliti tentang "Pola Banyaknya Graf yang Tidak Saling Isomorfik Menggunakan Teorema Polya".

1.2 Rumusan Masalah

Dari latar belakang masalah di atas rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana pola banyaknya graf yang tidak saling isomorfik menggunakan teorema Polya?

1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai rumusan masalah di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan pola banyaknya graf yang tidak saling isomorfik menggunakan teorema Polya.

1.4 Batasan Masalah

Pembatasan masalah diperlukan agar bahasan dalam penelitian tidak meluas atau melebar terlalu jauh, maka pada penelitian ini masalah dibatasi pada pola banyaknya graf yang tidak saling isomorfik menggunakan teorema Polya dari $n = 2, 3, 4, \dots, 8$ titik. Graf tanpa label pada pasangan titik tak berurut (artinya $ab = ba$) dari himpunan n titik.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dalam penelitian ini yaitu dapat mengetahui pola banyaknya graf yang tidak saling isomorfik menggunakan teorema Polya.

1.6 Metode Penelitian

Untuk menjelaskan pola banyaknya graf yang tidak saling isomorfik menggunakan teorema Polya, maka digunakan langkah-langkah yang akan dilakukan dalam penelitian ini adalah:

1. Merumuskan masalah

   Sebelum penulis melakukan penelitian, terlebih dahulu penulis menyusun rencana penelitian dari suatu masalah tentang pola banyaknya graf yang tidak saling isomorfik menggunakan teorema Polya.

2. Mengumpulkan data

   Peneliti mengumpulkan data yang berupa data primer dan data sekunder. Data primer dalam penelitian ini diperoleh dari hasil pengamatan langsung yang dilakukan penulis berupa banyak titik, banyak sisi, dan gambar graf. Sedangkan data sekunder yang digunakan dalam penelitian ini berupa definisi, teorema, jenis-jenis graf, definisi grup simetri dan lain-lain, dari beberapa literatur antara lain buku-buku, jurnal-jurnal, skripsi-skripsi sebelumnya, dan lain-lain.

3. Menganalisis data

   Langkah-langkah yang diambil untuk menganalisis data dalam penulisan ini adalah:

   a. Mengidentifikasi banyaknya titik pada graf dengan order $n = 2, 3, \dots 8$ yang akan dihitung.

   b. Menentukan banyaknya anggota grup simetri pada titik yang akan dihitung.

c. Menentukan semua bentuk tipe untai dan banyak anggota dari bentuk tipe untai tersebut.

d. Menentukan bentuk indeks sikelnya.

e. Menentukan keseluruhan perubahan indeks sikel dengan cara mencari pembangkit dari grup S_n (permutasi titik pada graf) yaitu grup R_n (permutasi sisi pada graf).

f. Akan didapatkan indeks sikel grupnya, yaitu:

$$Z(g: x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n) \equiv \frac{1}{m} \sum_{g \in G} Z(g: x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n)$$

g. Menentukan banyaknya graf yang tidak isomorfik menggunakan teorema Polya I.

h. Menentukan banyaknya graf yang tidak isomorfik yang memuat sisi dan tidak memuat sisi menggunakan teorema Polya II.

i. Membentuk teorema-teorema dari pola banyaknya graf yang tidak saling isomorfik yang dilengkapi dengan bukti-bukti.

j. Memberikan kesimpulan akhir dari hasil penelitian.

1.7 Sistematika Penulisan

Dalam skripsi ini digunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab. Masing-masing bab dibagi kedalam beberapa sub bab dengan rumusan sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pendahuluan meliputi: latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bagian ini terdiri atas konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain membahas tentang graf, *adjacent* dan *incident*, derajat titik, graf-graf khusus, graf isomorfik, grup, grup simetri, *cycle*, *cycle type* (tipe untai) dan bobot, *cycle index* (indeks sikel), teorema Polya I, teorema Polya II, dan kajian graf dalam al-Quran.

Bab III Pembahasan

Pada pembahasan ini membahas tentang pola banyaknya graf yang tidak saling isomorfik menggunakan teorema Polya serta terbentuknya teorema-teorema dari perhitungan banyaknya graf yang tidak saling isomorfik menggunakan teorema Polya.

Bab IV Penutup

Merupakan bab terakhir di skripsi ini yang berisi kesimpulan dan saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Graf

2.1.1 Definisi Graf

Suatu graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E), ditulis dengan notasi $G = (V, E)$ dengan V adalah himpunan tak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik (*vertex*), dan E adalah himpunan dari pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di V yang disebut sisi (*edge*). Banyak unsur di $V(G)$ disebut order G dan banyak unsur di $E(G)$ disebut ukuran G. Himpunan titik di graf G ditulis $V(G)$ dan himpunan sisi di graf G dilambangkan dengan $E(G)$. (Chartrand dan Lesniak, 1996:1). Graf G dengan order p dan ukuran q ditulis $G(p, q)$.

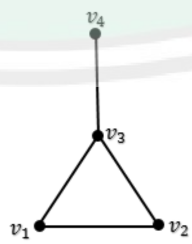
Contoh:

Misal graf $G = (V, E)$ dengan

$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

$E(G) = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_3, v_4)\}$

Jadi graf G dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.1 Graf $G(4, 4)$

Dari Gambar 2.1 dapat dilihat bahwa graf G mempunyai 4 titik sehingga order G adalah p = 4 dan graf G mempunyai 4 sisi sehingga ukuran graf G adalah q = 4

Graf G dengan himpunan titik dan sisi masing-masing $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(G) = (v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_3, v_4)\}$ dapat juga ditulis dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$.

2.1.2 *Adjacent* dan *Incident*

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*), v dan e serta u dan e disebut terkait langsung (*incident*), dan titik u dan v disebut ujung dari e. Dua sisi berbeda $e_1$dan e_2 disebut terhubung langsung, jika terkait langsung pada titik yang sama (Abdussakir, dkk, 2009:5-6).

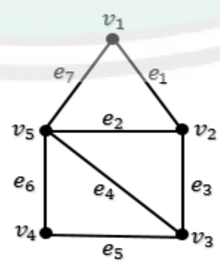
Contoh:

Graf graf $G = (V, E)$ dengan

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$$

Jadi graf G dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.2 Graf $G(5, 7)$

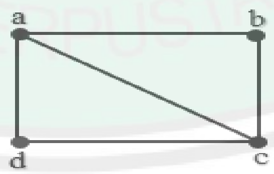
Pada Gambar 2.2 titik-titik *adjacent* (terhubung langsung) adalah v_1 dan v_2, v_2 dan v_5, v_2 dan v_3, v_3 dan v_4, v_3 dan v_5, v_4 dan v_5, v_5 dan v_1. sedangkan sisi e_1 *incident* dengan v_1 dan v_2, e_2 *incident* dengan v_2 dan v_5, e_3 *incident* dengan v_2 dan v_3, e_4 *incident* dengan v_3 dan v_5, dan e_5 *incident* dengan v_3 dan v_4, v_6 *incident* dengan v_4 dan v_5, dan e_7 *incident* dengan v_5 dan v_1.

2.1.3 Derajat Titik

Derajat suatu titik di *v* pada suatu graf G, ditulis $der_G(v)$, adalah banyaknya sisi yang terkait langsung pada *v*. Dengan kata lain, banyaknya sisi yang memuat *v* sebagai titik ujung. Titik *v* dikatakan genap atau ganjil tergantung dari jumlah *der*(*v*) genap atau ganjil.

Jika dalam konteks pembicaraan hanya terdapat satu graf G, maka tulisan $der_G(v)$ disingkat menjadi *der*(*v*). Titik yang berderajat genap sering disebut titik genap (*even vertices*) dan titik yang berderajat ganjil disebut titik ganjil (*odd vertices*). Titik yang berderajat nol disebut *isolated vertices* dan titik yang berderajat satu disebut titik ujung (*end vertices*) (Chartrand dan Lesniak, 1996:2).

Contoh:



Gambar 2.3 Graf $G(4,5)$

Berdasarkan Gambar 2.3 di atas, dapat diperoleh:

der(*a*) = 3, *der*(*b*) = 2, *der*(*c*) = 3, dan *der*(*d*) = 2

Karena tidak ada titik yang berderjat satu, maka graf G tidak mempunyai titik ujung. Titik ujung adalah titik yang berderajat satu. Hubungan antara jumlah derajat semua titik dalam suatu graf G dengan banyak sisi, yaitu q adalah:

$$\sum_{v \in V(G)} der(v) = 2q$$

Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut:

Teorema 1

Jika G graf dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ maka

$$\sum_{i=1}^{p} der(v_i) = 2q$$

dengan q adalah banyaknya sisi pada graf G.

Bukti

Setiap sisi adalah terkait langsung dengan dua titik. Jika setiap derajat titik dijumlahkan, maka setiap sisi dihitung dua kali (Chartrand dan Lesniak, 1996:3).

Akibat 1

Pada sebarang graf, banyak titik ganjil adalah genap.

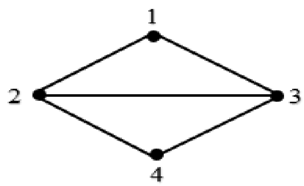
Bukti

Misalkan graf G dengan size q. dan misalkan W himpunan yang memuat titik ganjil pada G serta U himpunan yang memuat titik genap di G. Dari teorema 1 maka diperoleh:

$$\sum_{v \in V(G)} der(v) = \sum_{v \in W} der(v) + \sum_{v \in U} der(v) = 2q$$

Dengan demikian karena $\sum_{v \in U} \text{der}(v)$ genap, maka $\sum_{v \in W} \text{der}(v)$ juga genap. Sehingga $|W|$ adalah genap (Chartrand dan Lesniak, 1996:3).

Contoh:



Gambar 2.4 Graf $G(4,5)$

Menurut teorema di atas, graf $G(4{,}5)$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

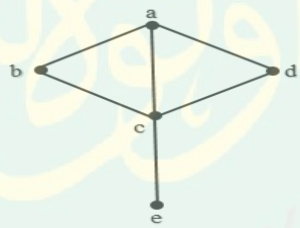
$der(1) + der(2) + der(3) + der(4)$ = 2+3+3+2 = 10 = 2 x 5

= 2 x banyak sisi

Barisan bilangan bulat tak negatif $d_1, d_2, d_3, \dots, d_p$ disebut barisan derajat dari graf G jika titik-titik di G dapat diberi label $v_1, v_2, v_3, \dots, v_p$ sedemikian sehingga $der(v_i) = d_i$, $i = 1{,}2{,}3, \dots, p$ (Chartrand dan Lesniak, 1996:11).

Contoh:

Misal graf G sebagai berikut:



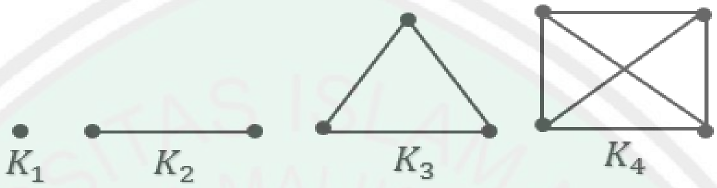
Gambar 2.5 Graf $G(5,6)$

Maka barisan derajat dari graf G adalah 1, 2, 2, 3, 4 atau 4, 3, 2, 2, 1 atau 1, 4, 2, 3, 2.

2.1.4 Graf-graf Khusus

Berdasarkan titik, sisi dan derajatnya, terdapat beberapa graf yang mempunyai sifat-sifat khusus. Graf G dikatakan komplit jika setiap dua titik yang berbeda saling terhubung langsung. Graf komplit dengan order n dinyatakan dengan K_n. Dengan demikian, maka graf K_n merupakan graf beraturan $(n-1)$ dengan banyaknya titik (*order*) $V(G) = n$ dan ukuran $E(G) = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$ (Abdussakir, dkk, 2009:21).

Berikut ini adalah gambar graf K_1, K_2, K_3, dan K_4



Gambar 2.6 Graf komplit K_1, K_2, K_3, dan K_4

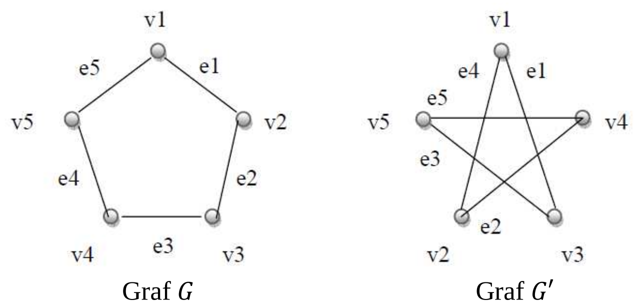
2.1.5 Graf Isomorfik (*Isomorphic Graph*)

Dalam geometri, dua gambar disebut kongruen jika keduanya mempunyai sifat-sifat geometri yang sama. Dengan cara yang sama, dua graf disebut isomorfik jika keduanya menunjukkan "bentuk" yang sama. Kedua graf hanya berbeda dalam hal pemberian label simpul dan sisinya saja. Secara metematis, isomorfik dua graf didefinisikan sebagai berikut:

Diberikan dua graf dengan $G = (V(G), E(G))$ dan $G' = (V(G'), E(G'))$. Graf G dikatakan isomorfik dengan graf G' jika dan hanya jika ada korespondensi satu-satu dari himpunan titik $V(G)$ ke $V(G')$ dan himpunan sisi $E(G)$ ke $E(G')$ sehingga derajat satu titik di G sama dengan derajat titik korespondensinya di G' (Siang, 2002).

Contoh:

Akan ditunjukkan bahwa graf G dan G' gambar di bawah ini adalah isomorfik.



Gambar 2.7 Contoh Graf yang Isomorfik

Untuk menunjukkan bahwa G isomorfik dengan G', harus berusaha menentukan korespondensi satu-satu titik dan sisi kedua graf.

Dalam G, v_1 berhubungan dengan v_5 dan v_2, sedangkan dalam G', v_1 behubungan dengan v_2 dan v_3. Maka fungsi $g : V(G) \rightarrow V(G')$ didefinisikan dengan $g(v_1) = v_1;\ g(v_2) = v_3;\ g(v_3) = v_5;\ g(v_4) = v_4;\ g(v_5) = v_2$.

Hingga saat ini belum ada teori yang dapat dipakai untuk menentukan apakah dua graf G dan G' isomorfik. Akan tetapi, jika G dan G' isomorfik, maka terdapat beberapa hal yang pasti dipenuhi:

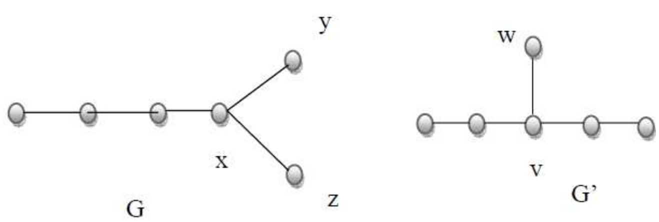
a. Jumlah titik pada graf G sama dengan jumlah titik pada graf G'.

b. Jumlah sisi pada graf G sama dengan jumlah sisi pada graf G'.

c. Jumlah sisi dengan derajat tertentu dalam graf G dan G' sama.

(Siang, 2002).

Masalahnya, implikasi tersebut tidak berlaku dua arah. Ada dua graf yang memenuhi ketiga syarat tersebut tetapi keduanya tidak isomorfik. Sebagai contoh adalah graf G dan G' di bawah



Gambar 2.8 Contoh Graf yang Tidak Isomorfik

Dalam G, satu-satunya titik yang berderajad 3 adalah titik x. Titik x dihubungkan dengan 2 titik lainnya yang berderajad 1 (titik y dan z). Sebaliknya, dalam graf G', satu-satunya titik berderajad 3 adalah v. Satu-satunya titik berderajad 1 yang dihubungkan dengan v hanyalah simpul w, sehingga G tidak mungkin isomorfik dengan G'.

Meskipun implikasi syarat isomorfik hanya berlaku satu arah, paling tidak kontraposisi dari implikasi tersebut dapat dipakai untuk menentukan bahwa dua graf tidak isomorfik. Jika salah satu dari ketiga syarat tidak terpenuhi, maka graf G dan G' tidak isomorfik.

2.2 Grup

2.2.1 Definisi Grup

Grup adalah suatu struktur aljabar yang dinyatakan sebagai $(G,*)$ dengan G tidak sama dengan himpunan kosong ($G \neq \emptyset$) dan $*$ adalah operasi biner pada G yang memenuhi aksioma-aksioma sebagai berikut:

1. $\forall a, b, c \in G$ berlaku $a * (b * c) = (a * b) * c$ (sifat asosiatif terhadap operasi $*$ pada G)
2. $\exists\, e \in G$ (e elemen identitias) sedemikian sehingga $\forall a \in G$ berlaku $a * e = e * a = a$, (ada elemen identitas e di G).
3. $\forall a \in G$, $\exists a^{-1} \in G$ sedemikian sehingga berlaku $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (setiap elemen di G mempunyai invers).

Suatu grup $(G,*)$ yang untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a * b = b * a$ disebut *grup komutatif* atau *grup abelian* (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:31 dan Dummit dan Foote, 1991:13-14).

Contoh:

Selidiki apakah $(Z, +)$ adalah grup abelian.

Jawab:

Misalkan $a, b, c \in Z$ dan $+$ adalah operasi biner, $(Z, +)$ adalah grup abelian jika memenuhi:

1. $(a + b) + c = a + (b + c)$, untuk semua $a, b, c \in Z$ (yaitu + assosiatif).
2. Untuk semua $a \in Z$ ada suatu element 0 di Z sehingga $a + 0 = 0 + a = a$ (0 disebut identitas di Z).
3. Untuk setiap $a \in Z$ ada suatu elemen $(-a)$ di Z sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$ ($(-a)$ di sebut invers dari a).
4. Untuk semua $a, b \in G$ maka $a + b = b + a$ (komutatif).

Jadi $(Z, +)$ adalah grup abelian.

Contoh:

Selidiki apakah $(Z, \square)$ grup, dengan $\square$ didefinisikan $a \square b = a - 2ab + 1$, $a, b \in Z$.

Jawab:

1. Untuk setiap $a, b \in Z$ maka a □ b = a – 2ab + 1∈ Z

2. Untuk setiap $a, b, c \in Z$ maka

Untuk $(a \square b) \square c = (a - 2ab + 1) \square c$

$$= (a - 2ab + 1) - 2(a - 2ab + 1)c + 1$$

$$= a - 2ac - 2ab + 4abc - 2c + 2$$

Untuk $a \square (b \square c) = a \square (b - 2bc + 1)$

$$= a - 2a(b - 2bc + 1) + 1$$

$$= a - 2ab + 4abc - 2a + 1$$

Karena $(a \square b) \square c \neq a \square (b \square c)$, maka $(Z, \square)$ bukan grup.

2.2.2 Grup Simetri

Misal Ω adalah sebarang himpunan tak kosong dan misal S_Ω adalah himpunan yang memuat semua fungsi-fungsi bijektif dari Ω ke Ω (atau himpunanyang memuat semua permutasi dari Ω). Himpunan S_Ω dengan operasi komposisi "$\circ$" atau $(S_\Omega, \circ)$ adalah grup. Perhatikan bahwa "$\circ$" adalah operasi biner pada S_Ω karena jika $\sigma: \Omega \to \Omega$ dan $\tau: \Omega \to \Omega$ adalah fungsi-fungsi bijektif maka $\sigma \circ \tau$ juga fungsi bijektif. Selanjutnya operasi "$\circ$" yang merupakan komposisi fungsi adalah bersifat assosiatif. Identitas dari S_Ω adalah permutasi 1 yang didefinisikan oleh $1(a) = a, \forall a \in \Omega$. Untuk setiap $\sigma: \Omega \to \Omega$ maka ada fungsi invers yaitu $\sigma^{-1}: \Omega \to \Omega$ yang memenuhi $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = 1$. Dengan demikian semua aksioma grup telah dipenuhi oleh S_Ω dengan operasi $\circ$. Grup $(S_\Omega, \circ)$ disebut sebagai *grup simetri* pada himpunan Ω (Dummit dan Foote, 1991, 28).

Jika $\Omega = \{1, 2,3, \ldots, n\}$ maka grup yang memuat semua permutasi dari Ω dinamakan grup simetri pada n unsur dan disimbolkan dengan S_n. Grup simetri S_n memuat elemen sebanyak $n!$ (Dummit dan Foote, 1991).

Perhatikan bahwa S_n mempunyai order $n!$, dengan $S_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Untuk menggambarkan suatu permutasi $\sigma: S \to S$ ada n macam-macam pilihan untuk $\sigma(1)$. Untuk menentukan bahwa σ fungsi satu-satu, ditunjukkan bahwa $\sigma(2) \neq \sigma(1)$ sehingga hanya ada $n - 1$ macam-macam pilihan untuk $\sigma(2)$. Selanjutnya dari analisis ini terlihat bahwa ada total dari $n \cdot (n-1) \cdots (2) \cdot (1) = n!$ kemungkinan permutasi yang berbeda dari S (Beachy dan Blair, 1990: 93).

Contoh:

Akan dibuktikan bahwa himpunan S_3 terhadap operasi komposisi merupakan grup simetri.

Bukti:

Unsur-unsur dalam grup simetri 3 (S_3), yaitu:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1)(2)(3)$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1)(2 \quad 3)$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (2)(1 \quad 3)$$

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1 \quad 3 \quad 2)$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1 \quad 2)(3)$$

$$\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1 \quad 2 \quad 3)$$

Jadi grup simetri $S_3 = \{\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \theta, \sigma\} = \{1, (2\ 3), (1\ 3), (1\ 2), (1\ 3\ 2), (1\ 2\ 3)\}$.

Operasi yang didefinisikan pada S_3 adalah komposisi.

Hasil operasi keenam permutasi tersebut dapat disajikan dalam tabel berikut:

Tabel 2.1 Komposisi Grup Simetri S_3

$\circ$	$(1)(2)(3)$	$(1)(2\ 3)$	$(2)(1\ 3)$	$(1\ 3\ 2)$	$(1\ 2)(3)$	$(1\ 2\ 3)$
$(1)(2)(3)$	$(1)(2)(3)$	$(1)(2\ 3)$	$(2)(1\ 3)$	$(1\ 3\ 2)$	$(1\ 2)(3)$	$(1\ 2\ 3)$
$(1)(2\ 3)$	$(1)(2\ 3)$	$(1)(2)(3)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 2)(3)$	$(1\ 3\ 2)$	$(2)(1\ 3)$
$(2)(1\ 3)$	$(2)(1\ 3)$	$(1\ 3\ 2)$	$(1)(2)(3)$	$(1)(2\ 3)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 2)(3)$
$(1\ 3\ 2)$	$(1\ 3\ 2)$	$(2)(1\ 3)$	$(1\ 2)(3)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1)(2\ 3)$	$(1)(2)(3)$
$(1\ 2)(3)$	$(1\ 2)(3)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 3\ 2)$	$(2)(1\ 3)$	$(1)(2)(3)$	$(1)(2\ 3)$
$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 2)(3)$	$(1)(2\ 3)$	$(1)(2)(3)$	$(2)(1\ 3)$	$(1\ 3\ 2)$

1. Dari Tabel 2.1 terlihat untuk sebarang $x, y \in S_3$ mengakibatkan $x \circ y \in S_3$

   Jadi sifat tertutup terpenuhi.

2. Dari Tabel 2.1 terlihat untuk sebarang $x, y, z \in S_3$ berlaku

   $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.

   Jadi sifat assosiatif terpenuhi.

3. Ambil sebarang $x \in S_3$. Jelas $\alpha \in S_3$.

   Dari Tabel 2.1 terlihat $x \circ \alpha = \alpha \circ x = x$.

   Jadi α merupakan elemen identitas di S_3.

4. Dari Tabel 2.1 jelas terlihat

   $\alpha \circ \alpha = \alpha$

   $\beta \circ \beta = \alpha$

   $\gamma \circ \gamma = \alpha$

   $\theta \circ \varepsilon = \alpha$

   $\sigma \circ \sigma = \alpha$

   $\varepsilon \circ \theta = \alpha$

Jelas $\forall x \in S_3$ terdapat $x^{-1} \in S_3$ sehingga $x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = \alpha$.

Jadi $\forall x \in S_3$ punya invers di S_3.

2.3 *Cycle*

2.3.1 Definisi *Cycle*

Permutasi $f \in S_n$ disebut *cycle* jika memiliki sebanyak-banyaknya satu orbit yang berisikan lebih dari satu elemen. Panjang *cycle* adalah banyaknya elemen pada orbit terbesar. *Cycle* dengan panjang satu, disebut *fixed point* (Ni'mah, 2013).

Berdasarkan Definisi, suatu permutasi $f \in S_n$ dinamakan *cycle* apabila :

i. f tidak mempunyai orbit yang memuat lebih dari satu elemen, atau

ii. f hanya mempunyai satu orbit yang memuat lebih dari satu elemen.

Contoh:

i. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ di S_6 mempunyai orbit $\{1,3,4\},\{5\},\{2,6\}$.

α bukan *cycle* karena terdapat dua orbit yang memuat lebih dari satu elemen yaitu $\{1,3,4\}$ dan $\{2,6\}$.

ii. $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ di S_5 mempunyai orbit $\{1,4,3\},\{2\},\{5\}$.

β merupakan *cycle* karena tepat mempunyai satu orbit yang memuat lebih dari satu elemen yaitu $\{1,4,3\}$.

iii. $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ di S_4 mempunyai orbit $\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}$.

γ merupakan *cycle* karena tidak mempunyai orbit yang memuat lebih dari satu elemen.

Suatu *cycle* disimbolkan dengan $(a_1,\ a_2,\dots,a_n)$ yang berarti $a_1 \rightarrow a_2, a_2 \rightarrow a_3, \dots, a_{n-1} \rightarrow a_n, a_n \rightarrow a_1$. Pada contoh di atas bagian (ii), *cycle* $\beta \in S_5$ disimbolkan dengan $\beta = (1,4,3)$ yang berarti $1 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1, 2 - 2, 5 \rightarrow 5$. *Cycle* $\gamma \in S_4$ pada contoh diatas bagian (iii), disimbolkan dengan $\gamma = (1)$ atau $\gamma = (2)$ atau $\gamma = (3)$ atau $= (4)$.

Cycle dalam suatu permutasi terbentuk dari orbit yang dihasilkan dari permutasi tersebut. Karena di dalam *cycle*, urutan diperhatikan sedangkan pada orbit urutan tidak diperhatikan, maka pada contoh diatas bagian (ii) orbit $\{1,4,3\} = \{1,3,4\} = \{4,1,3\}$ dan seterusnya, tetapi *cycle* yang terbentuk dari permutasi tersebut adalah $(1, 4, 3)$. *Cycle* $(1, 4, 3)$ mempunyai arti yang sama dengan $(4, 3, 1)$ dan $(3, 1, 4)$ tetapi tidak dapat disimbolkan dengan $(1, 3, 4)$.

2.3.2 Definisi *Cycle Type* (tipe untai) dan Bobot

Diberikan penyaji untai dari f (permutasi suatu himpunan dengan banyak anggotanya n) yang memuat sebanyak a_1 untai dengan panjang 1, sebanyak a_2 untai dengan panjang 2, sebanyak a_3 untai dengan panjang 3, …, sebanyak a_i untai dengan panjang i dan $i = 1, 2, 3, \dots, n$, maka tipe untai f disimbolkan dengan vektor $[a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]$ dan bobot f adalah bilangan positif $W = 1^{a_1} 2^{a_2} 3^{a_3} \dots n^{a_n}$ (Ni'mah, 2013).

Contoh :

$X = \{1, 2, 3, \dots, 8\}$

$f = (1354)(2)(687)$

Dalam hal ini $a_1 = 1, a_3 = 1, a_4 = 1$, dan lainnya nol. Jadi, tipe untai $f = [10110000]$ dan bobot $f = 1^1 3^1 4^1$.

2.3.3 Definisi *Cycle Index* (Indeks Siklik)

Diberikan G adalah grup permutasi dengan order m dari suatu himpunan yang banyak anggotanya n dan $g \in G$ bertipe untai $[a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]$. Indeks siklik g didefinisikan sebagai:

$Z(g: x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n) \equiv {x_1}^{a_1} {x_2}^{a_2} {x_3}^{a_3} \dots {x_n}^{a_n}$ dan indeks siklik grup G didefinisikan sebagai:

$Z(g: x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n) \equiv \frac{1}{m} \sum_{g \in G} Z(g: x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n)$ (Ni'mah, 2013).

Contoh:

Dimisalkan $G = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ grup permutasi dari himpunan $\Omega = \{1, 2, 3\}$.

Jelas $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. *Cycle* $\alpha = (1)(2)(3)$ dengan $a_1 = 3,\ a_2 = 0, a_3 = 0$.

Tipe untai $\alpha = [3, 0, 0]$ dan bobot $\alpha = 1^3 = 1$

$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. *Cycle* $\beta = (1, 2, 3)$ dengan $a_1 = 0,\ a_2 = 0, a_3 = 1$.

Tipe untai $\beta = [0, 0, 1]$ dan bobot $\beta = 3^1 = 3$

$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. *Cycle* $\gamma = (1)(2, 3)$ dengan $a_1 = 1,\ a_2 = 1, a_3 = 0$.

Tipe untai $\gamma = [1, 1, 0]$ dan bobot $\gamma = 1^1 2^1 = 2$

Sehingga Indeks siklik, $\alpha: Z(\alpha;\ x_1, x_2, x_3) = {x_1}^3$,

Indeks siklik, $\beta: Z(\beta;\ x_1, x_2, x_3) = {x_3}^1$, dan

Indeks siklik, $\gamma: Z(\gamma;\ x_1, x_2, x_3) = {x_1}^1 {x_2}^1$.

Jadi indeks siklik $G: Z(G;\ x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{3}({x_1}^3 + {x_3}^1 + {x_1}^1 {x_2}^1)$.

2.4 Teorema Polya

2.4.1 Teorema Polya I

Diberikan himpunan tidak kosong $C = \{f | f: x \to y\}$ dengan $|x| = n \geq 2$ dan $|y| = r$. Jika G merupakan grup permutasi yang beraksi pada X dengan indeks siklik $Z(G: x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ maka banyaknya pola di C terhadap G adalah $Z(G;\ r, r, r, \dots, r)$.

Bukti:

Jika g suatu sikel-sikel dari suatu grup permutasi, $g \in G$, maka di dalam g terdapat sikel-sikel dengan pola yang sama misalkan f di mana $f \in F_x(g)$ dengan $F_x(g)$ adalah himpunan dari sikel-sikel yang polanya tetap. Jika dan hanya jika f

tetap oleh tiap-tiap sikel dari g adalah $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Dari definisi tipe sikel dan indeks sikel, dengan beranggapan bahwa $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = r$ maka banyaknya permutasi yang tetap oleh g adalah $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n} = r^{a_1} r^{a_2} \dots r^{a_n} = r^{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ jadi didapat $|F_x(g)| = r^{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ dengan $[a_1 + a_2 + \cdots + a_n]$ adalah tipe permutasi g. Berdasarkan Teorema Burnside, banyaknya sikel yang berbeda adalah

$$n = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |F_x(g)|$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} r^{a_1+a_2+\cdots+a_n}$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} r^{a_1} r^{a_2} \dots r^{a_n}$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} z(g;\ r, r, r, \dots, r)$$

$$= Z(G;\ r, r, r, \dots, r)$$

(Santosa, 2002:5-6)

2.4.2 Teorema Polya II

Persediaan pola warna, $PP(G; w(y_1), w(y_2), w(y_3), \dots, w(y_r))$ adalah merupakan indeks siklik dari $Z(G: x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ pada $x_i = [w(y_1)]^i + [w(y_2)]^i + [w(y_3)]^i + \cdots + [w(y_r)]^i$ dengan $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Bukti:

Penurunan rumus untuk Teorema Polya II menggunakan Teorema Burnside-Frobenius juga dan hampir sama dengan Teorema Polya I. Pada intinya fungsi bobot $w(f)$ memiliki sifat konstan yang diperlukan oleh Teorema Burnside-Frobenius untuk orbit-orbit C terhadap permutasi dari *group* G'.

Jelas

$$k = \frac{1}{|G'|}\sum_{\pi' \in G'} |F(\pi')|$$

Sehingga

$$PP\big(G; w(y_1), w(y_2), w(y_3), \dots, w(y_r)\big) = \frac{1}{|G'|}\sum_{\pi' \in G'} w(\pi')$$

di mana

$$W(\pi') = \sum_{f \in F(\pi')} w(f) \qquad \dots \text{(i)}$$

Jika bentuk C dan G' dikembalikan ke bentuk X dan G, maka:

$$PP \equiv \frac{1}{|G|}\sum_{\pi \in G}\left\{\sum_{f \in C: f(\pi(x)) = f(x),\ \forall x} [w(f(x_1))][w(f(x_2))][w(f(x_3))] \dots [w(f(x_n))]\right\}$$

…... (ii)

Hasil penjumlahan pada persamaan (ii) dapat diambil atas seluruh fungsi $f(x)$ yang konstan atas tiap untai π. Misalkan π bertipe $[a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]$ dan didefinisikan multinomial $w(y_i)$ sebagai berikut:

$$\Omega = \overbrace{[w(y_1) + w(y_2) + \cdots + w(y_r)] \dots [w(y_1) + w(y_2) + \cdots + w(y_r)]}^{a_1\ faktor}$$

$$\overbrace{[w(y_1)^2 + w(y_2)^2 + \cdots + w(y_r)^2] \dots [w(y_1)^2 + w(y_2)^2 + \cdots + w(y_r)^2]}^{a_2\ faktor}$$

$$\overbrace{[w(y_1)^3 + w(y_2)^3 + \cdots + w(y_r)^3] \dots [w(y_1)^3 + w(y_2)^3 + \cdots + w(y_r)^3]}^{a_3\ faktor}$$

$$\vdots$$

$$\overbrace{[w(y_1)^n + w(y_2)^n + \cdots + w(y_r)^n] \ldots [w(y_1)^n + w(y_2)^n + \cdots + w(y_r)^n]}^{a_n \text{ faktor}}$$

$\Omega = a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$

di mana $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ berlaku

$a_i = [w(y_1)^i + w(y_2)^i + \cdots + w(y_r)^i] \ldots [w(y_1)^i + w(y_2)^i + \cdots + w(y_r)^i]$

Ekspansi Ω memuat $r^{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$ bentuk yang jumlahnya juga merupakan fungsi $f(x)$ yang konstan atas tiap untai π. Selanjutnya dapat ditunjukkan bahwa bentuk-bentuk dalam ekspansi tersebut sama dengan bobot w dari fungsi $f(x)$. Misalkan bahwa untai dalam penyajian π mempunyai korespondensi satu-satu dengan faktor-faktor dari Ω, dengan cara yang biasa: untai dengan panjang 1 berkorespondensi satu-satu dengan a_1 faktor pertama, untai dengan panjang 2 dengan a_2 faktor kedua, dan seterusnya.

Jika $f(x)$ memetakan untai dengan panjang j yang diketahui (sebut saja himpunan T) di dalam y_v, maka $w(y_v)^j = \coprod_{x \in T} w(f(x))$. Bentuk ekspansi seluruhnya diberikan dengan perkalian semua untai yang akan sama dengan $\prod U \coprod_{x \in T} w(f(x))$ di mana U adalah semua untai π. Tapi untai-untai ini mempunyai pengaruh pada partisi di X, sehingga ekspansi hanya $\coprod_{x \in T} w(f(x)) = u'(f)$. Akhirnya telah dibuktikan bahwa seluruh hasil penjumlahan pada persamaan (ii) mempunyai nilai yang sama dengan Ω, jelas terlihat bahwa:

$\Omega = Z(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$

dengan

$x_i = [w(y_1)]^i + [w(y_2)]^i + [w(y_3)]^i + \cdots + [w(y_r)]^i$ untuk $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

(Santosa, 2002:6-7).

2.5 Kajian Graf dalam Al-Quran

Secara umum beberapa konsep dari disiplin ilmu telah dijelaskan dalam al-Quran, salah satunya adalah matematika. Konsep dari disiplin ilmu matematika serta berbagai cabangnya yang ada dalam al-Quran di antaranya adalah masalah statistik, logika, pemodelan, teori graf, teori tentang grup dan lain-lain. Teori tentang graf, dimana definisi dari graf sendiri adalah himpunan yang tidak kosong yang memuat elemen-elemen yang disebut titik, dan suatu daftar pasangan tidak terurut elemen itu yang disebut sisi. Dalam al-Quran elemen-elemen yang dimaksud meliputi Pencipta (Allah) dan hamba-hambaNya, sedangkan sisi atau garis yang menghubungkan elemen-elemen tersebut adalah bagaimana hubungan antara Allah dengan hambanya dan juga hubungan sesama hamba yang terjalin, *Hablun min Allah wa Hablun min An-Nas*.

Hal ini dikuatkan oleh firman Allah dalam al-Quran surat Ali-Imran ayat 112 yaitu:

ضُرِبَتۡ عَلَيۡهِمُ ٱلذِّلَّةُ أَيۡنَ مَا ثُقِفُوٓاْ إِلَّا بِحَبۡلٍ مِّنَ ٱللَّهِ وَحَبۡلٍ مِّنَ ٱلنَّاسِ وَبَآءُو بِغَضَبٍ مِّنَ ٱللَّهِ وَضُرِبَتۡ عَلَيۡهِمُ ٱلۡمَسۡكَنَةُۚ ذَٰلِكَ بِأَنَّهُمۡ كَانُواْ يَكۡفُرُونَ بِـَٔايَٰتِ ٱللَّهِ وَيَقۡتُلُونَ ٱلۡأَنۢبِيَآءَ بِغَيۡرِ حَقٍّۚ ذَٰلِكَ بِمَا عَصَواْ وَّكَانُواْ يَعۡتَدُونَ ﴿١١٢﴾

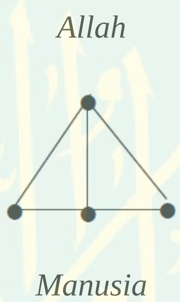
Artinya: *"Mereka diliputi kehinaan di mana saja mereka berada, kecuali jika mereka berpegang kepada tali (agama) Allah dan tali (perjanjian) dengan manusia, dan mereka kembali mendapat kemurkaan dari Allah dan mereka diliputi kerendahan. yang demikian itu Karena mereka kafir kepada ayat-ayat Allah dan membunuh para nabi tanpa alasan yang benar. yang demikian itu disebabkan mereka durhaka dan melampaui batas" (Q.S. Ali-Imran:112).*

Dalam ayat lain disebutkan bahwa umat manusia yang beriman itu bersaudara. Sehingga mereka harus menjalin hubungan yang baik, rukun antara sesama umat. Ayat tersebut yaitu:

إِنَّمَا ٱلْمُؤْمِنُونَ إِخْوَةٌ فَأَصْلِحُوا۟ بَيْنَ أَخَوَيْكُمْ ۚ وَٱتَّقُوا۟ ٱللَّهَ لَعَلَّكُمْ تُرْحَمُونَ ﴿١٠﴾

Artinya:"Orang-orang beriman itu sesungguhnya bersaudara. Sebab itu damaikanlah (perbaikilah hubungan) antara kedua saudaramu itu dan takutlah terhadap Allah, supaya kamu mendapat rahmat" (Q.S. al-Hujurat: 10).

Sehingga dengan demikian, hal ini menunjukkan adanya suatu hubungan atau keterkaitan antara titik yang satu dengan titik yang lain. Jika dikaitkan dengan kehidupan nyata, maka banyaknya titik yang terhubung dalam suatu graf dapat diasumsikan sebagai banyaknya kejadian tertentu, yang selanjutnya kejadian-kejadian tersebut memiliki keterkaitan dengan titik lainnya yang merupakan kejadian sesudahnya.



Gambar 2.9 Hubungan antara Allah dengan Hamba-Nya serta Sesama Hamba

Representasi yang lain dari suatu graf adalah shalat. Setiap orang Islam yang sudah baligh dan berakal diwajibkan untuk melaksanakan shalat lima waktu, yaitu shalat Dhuhur, Ashar, Maghrib, Isya' dan Shubuh. Shalat berada pada urutan kedua dalam rukun Islam setelah syahadat. Karena shalat mempunyai kedudukan yang penting, bahkan ibadah yang utama dalam ajaran Islam. Ungkapan hadist "shalat adalah tiang agama" memberikan isyarat bahwa shalat merupakan ukuran kualitas Islam seseorang, bahkan ciri keislaman seseorang adalah shalatnya. Kualitas Islam seseorang dapat dilihat dari sikap mereka tentang shalat. Hal yang membedakan antara orang kafir dan muslim adalah shalat. Hal yang membedakan antara orang munafik dan mukmin sejati adalah shalat juga. Oleh karena itu, Islam memposisikan shalat sebagai sesuatu yang khusus dan fundamental, yaitu shalat menjadi salah satu rukun Islam yang harus ditegakkan, sesuai dengan waktunya-waktunya, kecuali ketika dalam keadaan khusus dan tidak aman. Hal ini telah diisyaratkan dalam surat an-Nisa ayat 103 (Murtadho, 2008:173):

فَإِذَا قَضَيْتُمُ ٱلصَّلَوٰةَ فَٱذْكُرُوا۟ ٱللَّهَ قِيَـٰمًا وَقُعُودًا وَعَلَىٰ جُنُوبِكُمْ ۚ فَإِذَا
ٱطْمَأْنَنتُمْ فَأَقِيمُوا۟ ٱلصَّلَوٰةَ ۚ إِنَّ ٱلصَّلَوٰةَ كَانَتْ عَلَى ٱلْمُؤْمِنِينَ كِتَـٰبًا مَّوْقُوتًا ﴿١٠٣﴾

Artinya: "Maka apabila kamu telah menyelesaikan shalat(mu), ingatlah Allah di waktu berdiri, di waktu duduk dan di waktu berbaring. Kemudian apabila kamu telah merasa aman, maka dirikanlah shalat itu (sebagaimana biasa). Sesungguhnya shalat itu adalah fardhu yang ditentukan waktunya atas orang-orang yang beriman" (QS. an-Nisa:103).

Maksud ayat tersebut di atas adalah anjuran untuk melaksanakan shalat sesuai dengan waktunya. Dan dari sudut fiqih waktu shalat fardlu seperti dinyatakan di dalam kitab-kitab fiqih adalah sebagai berikut:

a. Waktu Shubuh: waktunya bermula dari terbit fajar shidiq sehingga terbit matahari. Fajar shidiq adalah cahaya putih yang melintang mengikuti garis lintang ufuk di sebelah timur.

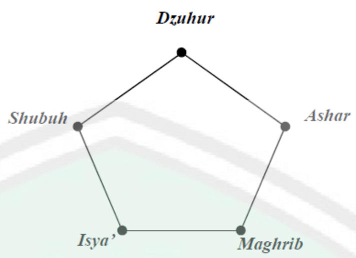
b. Waktu Dhuhur: Waktunya bermula apabila gelincir matahari, dan berakhir apabila bayang-bayang benda sesuatu itu sama panjang bendanya.

c. Waktu Ashar: waktunya bermula jika bayang-bayang sesuatu benda lebih panjang dari bendanya sampai berakhirnya waktu ashar saat beberapa saat sebelum matahari terbenam.

d. Waktu Maghrib: waktunya bermula apabila matahari terbenam sampai hilangnya cahaya merah di langit barat.

e. Waktu Isya': waktunya bermula apabila hilang cahaya merah di barat hingga terbit fajar shidiq di timur (Aziz, 2007:77-78).

Sehingga dapat digambarkan dalam bentuk graf seperti pada gambar berikut:



Gambar 2.10 Graf Shalat Lima Waktu

Demikianlah lima waktu pelaksanaan shalat fardlu yang telah diatur oleh agama. Apabila waktu-waktu shalat digambarkan dalam graf sikel, maka graf sikel C_5 dapat menggambarkan waktu-waktu dalam shalat fardlu dimana titik-titik dalam graf menggambarkan pelaksanaan shalat lima waktu sehari semalam yaitu, shalat shubuh, dhuhur, ashar, maghrib, dan isya'. Sedangkan sisi atau garis yang berbentuk lingkaran yang menghubungkan titik-titik tersebut adalah putaran matahari sehari semalam.

Selain teori graf, ilmu lain yang merupakan bagian dari matematika yaitu teori tentang grup. Di mana definisi dari grup sendiri adalah suatu struktur aljabar yang dinyatakan sebagai $(G,*)$ dengan G tidak sama dengan himpunan kosong $(G \neq \emptyset)$ dan $*$ adalah operasi biner pada G yang memenuhi sifat-sifat assosiatif, ada identitas, dan ada invers dalam grup tersebut. Himpunan tidak kosong berarti terdiri dari himpunan-himpunan. Seperti halnya teori graf himpunan-himpunan dalam grup mempunyai elemen atau anggota tersebut juga merupakan makhluk dari ciptaan-Nya, dan operasi biner merupakan interaksi antara makhluk-makhluk-Nya, dan sifat-sifat yang harus dipenuhi merupakan aturan-aturan yang telah ditetapkan oleh Allah artinya sekalipun makhluknya berinteraksi dengan sesama makhluk ia harus tetap berada dalam koridor yang telah ditetapkan Allah Swt.

Kajian mengenai grup sudah ada dalam al-Quran, misalnya, kehidupan manusia yang terdiri dari berbagai macam golongan. Golongan merupakan bagian dari himpunan karena himpunan sendiri merupakan kumpulan objek-objek yang terdefinisi. Dalam al-Quran surat al-Fatihah ayat 7 disebutkan.

صِرَٰطَ ٱلَّذِينَ أَنۡعَمۡتَ عَلَيۡهِمۡ غَيۡرِ ٱلۡمَغۡضُوبِ عَلَيۡهِمۡ وَلَا ٱلضَّآلِّينَ ٧

Artinya: "(yaitu) Jalan orang-orang yang telah Engkau beri nikmat kepada mereka; bukan (jalan) mereka yang dimurkai dan bukan (pula jalan) mereka yang sesat" (Q. S. Al-Fatihah: 7).

Yang dimaksud ayat tersebut yaitu manusia terbagi menjadi tiga kelompok, yaitu (1) kelompok yang mendapat nikmat dari Allah SWT, (2) kelompok yang dilaknat, dan (3) kelompok yang sesat (Abdussakir, 2006:47).

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Penerapan Teorema Polya pada Graf

Dalam bagian ini penulis akan membahas uraian secara rinci menentukan banyaknya graf dan jenis-jenis graf yang tidak saling isomorfik menggunakan teorema Polya serta terbentuknya teorema-teorema dari perhitungan banyaknya graf dan jenis-jenis graf yang tidak saling isomorfik dengan order $n = 2, 3, \dots, 8$ titik. Apabila n titik pada graf G dikenai permutasi, maka pasangan titik tak berurut (artinya $ab = ba$) dari graf tersebut juga mengalami permutasi. Dalam hal ini pasangan titik tak berurut pada suatu himpunan dapat dipandang sebagai sisi, yang ujung-ujungnya adalah pasangan titik tersebut. Jika himpunan permutasi pada titik-titik suatu graf membentuk suatu grup simetri yaitu S_n, maka permutasi dari pasangan titik-titik (sisi-sisi) tersebut juga membentuk suatu grup simetri yaitu R_n. Jadi akan dibentuk indeks sikel R_n (permutasi sisi pada graf) dengan membangkitkan indeks sikel pada S_n (permutasi titik pada graf).

3.1.1 Penerapan Teorema Polya pada Graf dengan 2 Titik

Diberikan graf G dengan himpunan titik $X = \{1, 2\}$ yang merupakan himpunan titik suatu graf dengan $n = 2$. Misal S_2 adalah grup simetri yang terbentuk dari himpunan X, maka banyaknya anggota dari grup S_2 adalah $n! = 2! = 2$. Seluruh bentuk hasil perkalian *cycle* yang saling asing dari grup S_2 sebagai berikut:

$$g_1 = (1)(2)$$

$$g_2 = (1 \quad 2)$$

Tipe untai dan indeks sikel dari bentuk hasil perkalian *cycle* di atas ada 2, yaitu:

1. Tipe untai $[2, 0]$ ada sebanyak 1 anggota dengan indeks sikelnya x_1^2
2. Tipe untai $[0, 1]$ ada sebanyak 1 anggota dengan indeks sikelnya x_2

Pasangan titik yang mungkin terbentuk dari himpunan X yaitu 12. Akan dibentuk indeks sikel R_2 (permutasi sisi pada graf) dengan membangkitkan indeks sikel pada S_2 yang sudah diperoleh.

Pembangkit dari setiap indeks sikelnya di R_2, yaitu:

1. $g_1 = (1)(2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow g'_1 = \binom{12}{12} = (12)$

   Bentuk x_1^2 akan membangkitkan indeks sikel x_1.

2. $g_2 = (1 \quad 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow g'_2 = \binom{12}{21} = \binom{12}{12} = (12)$

   Bentuk x_2 akan membangkitkan indeks sikel x_1.

Keseluruhan perubahan indeks sikel dari grup S_2 menjadi R_2 adalah sebagai berikut:

$x_1^2 \rightarrow x_1;$

$x_2 \rightarrow x_1;$

Sehingga indeks sikel dari R_2diperoleh:

$$Z(R_2;\ x_1) = \frac{1}{2}[x_1 + x_1] \qquad \ldots(3.1)$$

Selanjutnya, indeks sikel R_2 akan diaplikasikan pada teorema Polya I dan teorema Polya II.

Aplikasi Teorema Polya I:

Ada dua keadaan yang mungkin terjadi di antara dua himpuan titik. Keadaan tersebut adalah:

1. keadaan tidak ada sisi antara dua himpunan titik.
2. keadaan ada sisi antara dua himpunan titik.

Jika r adalah keadaan yang mungkin terjadi di antara dua himpunan titik maka, $r = 2$. Dari persamaan (3.1) diperoleh $x_1 = 2$, dan berdasarkan teorema Polya I diperoleh:

$$Z(R_2;\ x_1) = \frac{1}{2}[x_1 + x_1]$$

$$Z(R_2;\ 2) = \frac{1}{2}[2 + 2]$$

$$= \frac{1}{2}[4]$$

$$= 2$$

Jadi, untuk graf yang memuat 2 titik akan terdapat 2 graf yang tidak saling isomorfik.

Aplikasi Teorema Polya II:

Jika keadaan-keadaan diantara dua himpunan titik diberi bobot w, maka

1. $w(y_1) =$ keadaan tidak ada sisi antara dua himpunan titik.
2. $w(y_2) =$ keadaan ada sisi antara dua himpunan titik.

Misal $w(y_1) = T$ dan $w(y_2) = A$.

Berdasarkan teorema Polya II, indeks sikel dari R_2 dengan mensubstitusikan $x_1 = ([w(y_1)] + [w(y_2)]) = (T + A)$.

pada persamaan (3.1) sehingga diperoleh:

$$Z(R_2;\ x_1) = \frac{1}{2}[x_1 + x_1]$$

$$Z(R_2;\ x_1) = \frac{1}{2}[(T + A) + (T + A)]$$

dilakukan perkalian pada tiap suku di ruas kanan kemudian sederhanakan sehingga diperoleh:

$$Z(R_2;\ x_1) \quad = T + A$$

Dengan kata lain untuk graf yang terdiri atas $n = 2$ himpunan titik akan terdapat graf-graf yang tidak saling isomorfik yang memenuhi rincian sebagai berikut:

1 graf tanpa sisi, dan1 graf dengan 1 sisi.

Tabel 3.1 Graf yang Tidak Saling Isomorfik dengan $n = 2$

	Gambar
1 graf tanpa sisi	
1 graf dengan 1 sisi	

3.1.2 Penerapan Teorema Polya pada Graf dengan 3 Titik

Diberikan graf G dengan himpunan titik $X = \{1, 2, 3\}$ yang merupakan himpunan titik suatu graf dengan $n = 3$. Misal S_3 adalah grup simetri yang terbentuk dari himpunan X, maka banyaknya anggota dari grup S_3 adalah $n! = 3! = 6$. Seluruh bentuk hasil perkalian *cycle* yang saling asing dari grup S_3 sebagai berikut:

$g_1 = (1)(2)(3)$ $\qquad$ $g_2 = (1)(2\quad 3)$

$g_3 = (1\quad 3)(2)$ $\qquad$ $g_4 = (1\quad 2)(3)$

$g_5 = (1\quad 2\quad 3)$ $\qquad$ $g_6 = (1\quad 3\quad 2)$

Tipe untai dan indeks sikel dari bentuk hasil perkalian *cycle* di atas ada 3, yaitu:

1. Tipe untai $[3,0,0]$ ada sebanyak 1 anggota dengan indeks sikelnya x_1^3
2. Tipe untai $[1,1,0]$ ada sebanyak 3 anggota dengan indeks sikelnya x_1x_2
3. Tipe untai $[0,0,1]$ ada sebanyak 2 anggota dengan indeks sikelnya x_3

Pasangan titik yang mungkin terbentuk dari himpunan X yaitu $12, 13, 23$. Akan dibentuk indeks sikel R_3 (permutasi sisi pada graf) dengan membangkitkan indeks sikel pada S_3 yang sudah diperoleh.

Pembangkit dari setiap indeks sikelnya di R_3, yaitu:

1. $g_1 = (1)(2)(3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow g'_1 = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 23 \\ 12 & 13 & 23 \end{pmatrix} = (12)$

   Bentuk x_1^3 akan membangkitkan indeks sikel x_1^3.

2. $g_2 = (1)(2 \quad 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow g'_2 = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 23 \\ 13 & 12 & 23 \end{pmatrix} = (12 \quad 13)(23)$

   Bentuk x_1x_2 akan membangkitkan indeks sikel x_1x_2.

3. $g_6 = (1 \quad 2 \quad 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow g'_6 = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 23 \\ 23 & 12 & 13 \end{pmatrix} = (12 \quad 23 \quad 13)$

   Bentuk x_3 akan membangkitkan indeks sikelx_3.

Keseluruhan perubahan indeks sikel dari grup S_3 menjadi R_3 adalah sebagai berikut:

$x_1^3 \rightarrow x_1^3;$

$x_1x_2 \rightarrow x_1x_2;$

$x_3 \rightarrow x_3;$

Sehingga indeks sikel dari R_3 diperoleh:

$$Z(R_3;\ x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{6}[x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3] \qquad \text{...(3.2)}$$

Selanjutnya, indeks sikel R_3 akan diaplikasikan pada teorema Polya I dan teorema Polya II.

Aplikasi Teorema Polya I:

Ada dua keadaan yang mungkin terjadi di antara dua himpunan titik. Keadaan tersebut adalah:

a. keadaan tidak ada sisi antara dua himpunan titik.

b. keadaan ada sisi antara dua himpunan titik.

Jika r adalah keadaan yang mungkin terjadi di antara dua himpunan titik maka, $r = 2$. Dari persamaan (3.2) diperoleh $x_1 = x_2 = x_3 = 2$, dan berdasarkan teorema Polya I diperoleh:

$$Z(R_3;\ x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{6}[x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3]$$

$$Z(R_3;\ 2, 2, 2) = \frac{1}{6}[2^3 + 3 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2]$$

$$= \frac{1}{6}[8 + 12 + 4]$$

$$= \frac{1}{6}[24]$$

$$= 4$$

Jadi, untuk graf yang memuat 3 titik akan terdapat 4 graf yang tidak saling isomorfik.

Aplikasi Teorema Polya II:

Jika keadaan-keadaan di antara dua himpunan titik diberi bobot w, maka

1. $w(y_1) =$ keadaan tidak ada sisi antara dua himpunan titik.
2. $w(y_2) =$ keadaan ada sisi antara dua himpunan titik.

Misal $w(y_1) = T$ dan $w(y_2) = A$.

Berdasarkan teorema Polya II, indeks sikel dari R_3 dengan mensubstitusikan

$x_1 = ([w(y_1)] + [w(y_2)]) = (T + A)$,

$x_2 = ([w(y_1)]^2 + [w(y_2)]^2) = (T^2 + A^2)$, dan

$x_3 = ([w(y_1)]^3 + [w(y_2)]^3) = (T^3 + A^3)$;

pada persamaan (3.2) sehingga diperoleh:

$$Z(R_3;\ x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{6}[x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3]$$

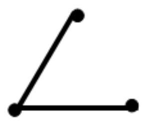
$$Z(R_3;\ x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{6}[(T + A)^3 + 3(T + A)(T^2 + A^2) + 2(T^3 + A^3)]$$

dilakukan perkalian pada tiap suku di ruas kanan kemudian sederhanakan sehingga diperoleh:

$$Z(R_3;\ x_1, x_2, x_3) \quad = T^3 + T^2A + TA^2 + A^3$$

Dengan kata lain untuk graf yang terdiri atas 3 himpunan titik akan terdapat graf-graf yang tidak saling isomorfik yang memenuhi rincian sebagai berikut: 1 graf tanpa sisi, 1 graf dengan 1 sisi, 1 graf dengan 2 sisi, dan 1 graf dengan 3 sisi.

Tabel 3.2 Graf yang Tidak Saling Isomorfik dengan $n = 3$

	Gambar
1 graf tanpa sisi	
1 graf dengan 1 sisi	
1 graf dengan 2 sisi	
1 graf dengan 3 sisi	

3.1.3 Penerapan Teorema Polya pada Graf dengan 4 Titik

Diberikan graf G dengan himpunan titik $X = \{1, 2, 3, 4\}$ yang merupakan himpunan titik suatu graf dengan $n = 4$. Misal S_4 adalah grup simetri yang terbentuk dari himpunan X, maka banyaknya anggota dari grup S_4 adalah $n! = 4! = 24$. Seluruh bentuk hasil perkalian *cycle* yang saling asing dari grup S_4 sebagai berikut:

$g_1 = (1)(2)(3)(4)$ $\quad$ $g_2 = (1\ \ 4)(2)(3)$

$g_3 = (1)(2\ \ 4)(3)$ $\quad$ $g_4 = (1)(2)(3\ \ 4)$

$g_5 = (1\ \ 2)(3)(4)$ $\quad$ $g_6 = (1\ \ 2\ \ 4)(3)$

$g_7 = (1\ \ 4\ \ 2)(3)$ $\quad$ $g_8 = (1\ \ 2)(3\ \ 4)$

$g_9 = (1\ \ 3)(2)(4)$ $\quad$ $g_{10} = (1\ \ 4\ \ 3)(2)$

$g_{11} = (1\ \ 3\ \ 4)(2)$ $\quad$ $g_{12} = (1\ \ 3)(2\ \ 4)$

$g_{13} = (1)(2\ \ 3)(4)$ $\quad$ $g_{14} = (1\ \ 4)(2\ \ 3)$

$g_{15} = (2\ \ 3\ \ 4)(1)$ $\quad$ $g_{16} = (2\ \ 4\ \ 3)(1)$

$g_{17} = (1\ \ 2\ \ 3)(4)$ $\quad$ $g_{18} = (1\ \ 2\ \ 3\ \ 4)$

$g_{19} = (1\ \ 2\ \ 4\ \ 3)$ $\quad$ $g_{20} = (1\ \ 4\ \ 2\ \ 3)$

$g_{21} = (1\ \ 3\ \ 2)(4)$ $\quad$ $g_{22} = (1\ \ 4\ \ 3\ \ 2)$

$g_{23} = (1\ \ 3\ \ 4\ \ 2)$ $\quad$ $g_{24} = (1\ \ 3\ \ 2\ \ 4)$

Tipe untai dan indeks sikel dari bentuk hasil perkalian *cycle* di atas ada 5, yaitu:

1. Tipe untai $[4, 0, 0, 0]$ ada sebanyak 1 anggota dengan indeks sikelnya x_1^4
2. Tipe untai $[2, 1, 0, 0]$ ada sebanyak 6 anggota dengan indeks sikelnya $x_1^2 x_2$
3. Tipe untai $[1, 0, 1, 0]$ ada sebanyak 8 anggota dengan indeks sikelnya $x_1 x_3$
4. Tipe untai $[0, 2, 0, 0]$ ada sebanyak 3 anggota dengan indeks sikelnya x_2^2

5. Tipe untai $[0, 0, 0, 1]$ ada sebanyak 6 anggota dengan indeks sikelnya x_4

Pasangan titik yang mungkin terbentuk dari himpunan n yaitu $12, 13, 14, 23, 24, 34$. Akan dibentuk indeks sikel R_4 (permutasi sisi pada graf) dengan membangkitkan indeks sikel pada S_4 yang sudah diperoleh.

Pembangkit dari setiap indeks sikelnya, yaitu:

1. $g_1 = (1)(2)(3)(4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$

   $g'_1 = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 23 & 24 & 34 \\ 12 & 13 & 14 & 23 & 24 & 34 \end{pmatrix}$

   $= (12)$

   Bentuk x_1^4 akan membangkitkan indeks sikel x_1^6.

2. $g_5 = (1 \quad 2)(3)(4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$

   $g'_5 = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 23 & 24 & 34 \\ 12 & 23 & 24 & 13 & 14 & 34 \end{pmatrix}$

   $= (12)(13 \quad 23)(14 \quad 24)(34)$

   Bentuk $x_1^2 x_2$ akan membangkitkan indeks sikel $x_1^2 x_2^2$.

3. $g_{17} = (1 \quad 2 \quad 3)(4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$

   $g'_{17} = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 23 & 24 & 34 \\ 23 & 12 & 24 & 13 & 34 & 14 \end{pmatrix}$

   $= (12 \quad 23 \quad 13)(14 \quad 24 \quad 34)$

   Bentuk $x_1 x_3$ akan membangkitkan indeks sikel x_3^2.

4. $g_8 = (1 \quad 2)(3 \quad 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$

   $g'_8 = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 23 & 24 & 34 \\ 12 & 24 & 23 & 14 & 13 & 34 \end{pmatrix}$

   $= (12)(13 \quad 24)(14 \quad 23)(34)$

   Bentuk x_2^2 akan membangkitkan indeks sikel$x_1^2 x_2^2$.

5. $g_{24} = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$g'_{24} = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 23 & 24 & 34 \\ 23 & 24 & 12 & 34 & 13 & 14 \end{pmatrix}$$

$$= (12 \quad 23 \quad 34 \quad 14)(13 \quad 24)$$

Bentuk x_4 akan membangkitkan indeks sikel $x_2 x_4$.

Keseluruhan perubahan indeks sikel dari grup S_4 menjadi R_4 adalah sebagai berikut:

$x_1^4 \rightarrow x_1^6;$

$x_1^2 x_2 \rightarrow x_1^2 x_2^2;$

$x_1 x_3 \rightarrow x_3^2;$

$x_2^2 \rightarrow x_1^2 x_2^2;$

$x_4 \rightarrow x_2 x_4.$

Sehingga indeks sikel dari R_4 diperoleh:

$$Z(R_4;\ x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{24}[x_1^6 + 6x_1^2 x_2^2 + 8x_3^2 + 3x_1^2 x_2^2 + 6x_2 x_4] \qquad \ldots(3.3)$$

Selanjutnya, indeks sikel R_4 akan diaplikasikan pada teorema Polya I dan teorema Polya II.

Aplikasi Teorema Polya I:

Ada dua keadaan yang mungkin terjadi di antara dua himpuan titik. Keadaan tersebut adalah:

a. keadaan tidak ada sisi antara dua himpunan titik.
b. keadaan ada sisi antara dua himpunan titik.

Jika r adalah keadaan yang mungkin terjadi di antara dua himpunan titik maka, $r = 2$. Dari persamaan (3.3) diperoleh $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 2$, dan berdasarkan teorema Polya I diperoleh:

$$Z(R_4;\ x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{24}[x_1^6 + 6x_1^2x_2^2 + 8x_3^2 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_2x_4]$$

$$Z(R_4;\ 2,2,2,2) = \frac{1}{24}[2^6 + 6\cdot 2^2\cdot 2^2 + 8\cdot 2^2 + 3\cdot 2^2\cdot 2^2 + 6\cdot 2\cdot 2]$$

$$= \frac{1}{24}[64 + +96 + 32 + 48 + 24]$$

$$= \frac{1}{24}[264]$$

$$= 11$$

Jadi, untuk graf yang memuat 4 titik akan terdapat 11 graf yang tidak saling isomorfik.

Aplikasi Teorema Polya II:

Jika keadaan-keadaan di antara dua himpunan titik diberi bobot w, maka

a. $w(y_1)$ = keadaan tidak ada sisi antara dua himpunan titik.

b. $w(y_2)$ = keadaan ada sisi antara dua himpunan titik.

Misal $w(y_1) = T$ dan $w(y_2) = A$.

Berdasarkan teorema Polya II, indeks sikel dari R_4 dengan mensubstitusikan

$x_1 = ([w(y_1)] + [w(y_2)]) = (T + A)$

$x_2 = ([w(y_1)]^2 + [w(y_2)]^2) = (T^2 + A^2)$;

$x_3 = ([w(y_1)]^3 + [w(y_2)]^3) = (T^3 + A^3)$; dan

$x_4 = ([w(y_1)]^4 + [w(y_2)]^4) = (T^4 + A^4)$.

pada persamaan (3.3) sehingga diperoleh:

$$Z(R_4;\ x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{24}[x_1^6 + 6x_1^2x_2^2 + 8x_3^2 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_2x_4]$$

$$Z(R_5;\ x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{24}\begin{bmatrix} (T+A)^6 + 6(T+A)^2(T^2+A^2)^2 \\ +8(T^3+A^3)^2 + 3(T+A)^2(T^2+A^2)^2 \\ +6(T^2+A^2)(T^4+A^4) \end{bmatrix}$$

dilakukan perkalian pada tiap suku di ruas kanan kemudian sederhanakan sehingga diperoleh:

$$Z(R_5;\ x_1, x_2, x_3, x_4) \quad = T^6 + T^5A + 2T^4A^2 + 3T^3A^3 + 2T^2A^4 + TA^5 + A^6$$

Dengan kata lain untuk graf yang terdiri atas 4 himpunan titik akan terdapat graf-graf yang tidak saling isomorfik yang memenuhi rincian sebagai berikut: 1 graftanpa sisi, 1 graf dengan 1 sisi, 2 graf dengan 2 sisi, 3 graf dengan 3 sisi, 2 graf dengan 4 sisi, 1 graf dengan 5 sisi, dan 1 graf dengan 6 sisi

Tabel 3.3 Graf yang Tidak Saling Isomorfik dengan $n = 4$

	Gambar
1 graf tanpa sisi	
1 graf dengan 1 sisi	
2 graf dengan 2 sisi	
3 graf dengan 3 sisi	
2 graf dengan 4 sisi	
1 graf dengan 5sisi	
1 graf dengan 6sisi	

3.1.4 Penerapan Teorema Polya pada Graf dengan 5 Titik

Diberikan graf G dengan himpunan titik $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ yang merupakan himpunan titik suatu graf dengan $n = 5$. Misal S_5 adalah grup simetri yang terbentuk dari himpunan X, maka banyaknya anggota dari grup S_5 adalah $n! = 5! = 120$. Dengan bantuan program *maple* diperoleh bentuk-bentuk hasil kali *cycle* yang saling asing dari grup S_5 beserta banyak anggota yang sejenis, yaitu:

1. Bentuk $(1)(2)(3)(4)(5)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 1.
2. Bentuk $(1\quad 2)(3)(4)(5)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 10.
3. Bentuk $(1\quad 2\quad 3)(4)(5)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 20.
4. Bentuk $(1\quad 2\quad 3\quad 4)(5)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 30.
5. Bentuk $(1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 24.
6. Bentuk $(1\quad 2)(3\quad 4)(5)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 15.
7. Bentuk $(1\quad 2)(3\quad 4\quad 5)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 20.

Sehingga tipe untai dan indeks sikel dari bentuk hasil perkalian *cycle* di atas ada 7, yaitu:

1. Tipe untai $[5, 0, 0, 0, 0]$ ada sebanyak 1 anggota dengan indeks sikelnya x_1^5
2. Tipe untai $[3, 1, 0, 0, 0]$ ada sebanyak 10 anggota dengan indeks sikelnya $x_1^3 x_2$
3. Tipe untai $[2, 0, 1, 0, 0]$ ada sebanyak 20 anggota dengan indeks sikelnya $x_1^2 x_3$
4. Tipe untai $[1, 0, 0, 1, 0]$ ada sebanyak 30 anggota dengan indeks sikelnya $x_1 x_4$
5. Tipe untai $[0, 0, 0, 0, 1]$ ada sebanyak 24 anggota dengan indeks sikelnya x_5
6. Tipe untai $[1, 2, 0, 0, 0]$ ada sebanyak 15 anggota dengan indeks sikelnya $x_1 x_2^2$
7. Tipe untai $[0, 1, 1, 0, 0]$ ada sebanyak 20 anggota dengan indeks sikelnya $x_2 x_3$

Pasangan titik yang mungkin terbentuk dari himpunan n yaitu $12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35, 45$. Akan dibentuk indeks sikel R_5 (permutasi sisi pada graf) dengan membangkitkan indeks sikel pada S_5 yang sudah diperoleh. Pembangkit dari setiap indeks sikelnya, yaitu:

1. $(1)(2)(3)(4)(5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow$

   $= \begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 23 & 24 & 25 & 34 & 35 & 45 \\ 12 & 13 & 14 & 15 & 23 & 24 & 25 & 34 & 35 & 45 \end{pmatrix}$

   $= (12)$

   Bentuk x_1^5 akan membangkitkan indeks sikel x_1^{10}.

2. $(1 \quad 2 \quad 3 \quad 4)(5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow$

   $= \begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 23 & 24 & 25 & 34 & 35 & 45 \\ 23 & 24 & 12 & 25 & 34 & 13 & 35 & 14 & 45 & 15 \end{pmatrix}$

   $= (12 \quad 23 \quad 34 \quad 14)(13 \quad 24)(15 \quad 25 \quad 35 \quad 45)$

   Bentuk $x_1 x_4$ akan membangkitkan indeks sikel $x_2 x_4^2$.

3. $(1 \quad 2 \quad 3)(4)(5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow$

   $= \begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 23 & 24 & 25 & 34 & 35 & 45 \\ 23 & 24 & 12 & 25 & 34 & 13 & 35 & 14 & 45 & 15 \end{pmatrix}$

   $= (12 \quad 23 \quad 34 \quad 14)(13 \quad 24)(15 \quad 25 \quad 35 \quad 45)$

   Bentuk $x_1^2 x_3$ akan membangkitkan indeks sikel $x_1 x_3^3$.

4. $(1 \quad 2)(3)(4)(5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow$

   $= \begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 23 & 24 & 25 & 34 & 35 & 45 \\ 12 & 23 & 24 & 25 & 13 & 14 & 15 & 34 & 35 & 45 \end{pmatrix}$

   $= (12)(13 \quad 23)(14 \quad 24)(15 \quad 25)(34)(35)(45)$

   Bentuk $x_1^3 x_2$ akan membangkitkan indeks sikel $x_1^4 x_2^3$.

5. $(1\quad 2\quad 3)(4\quad 5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$

$= \begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 23 & 24 & 25 & 34 & 35 & 45 \\ 23 & 12 & 25 & 24 & 13 & 35 & 34 & 15 & 14 & 45 \end{pmatrix}$

$= (12\quad 23\quad 13)(14\quad 25\quad 34\quad 15\quad 24\quad 35)(45)$

Bentuk x_2x_3 akan membangkitkan indeks sikel $x_1x_3x_6$.

6. $(1\quad 2)(3\quad 4)(5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow$

$= \begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 23 & 24 & 25 & 34 & 35 & 45 \\ 12 & 24 & 23 & 25 & 14 & 13 & 15 & 34 & 45 & 35 \end{pmatrix}$

$= (12)(13\quad 24)(14\quad 23)(15\quad 25)(34)(35\quad 45)$

Bentuk $x_1x_2^2$ akan membangkitkan indeks sikel $x_1^2x_2^4$.

7. $(1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$

$= \begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 23 & 24 & 25 & 34 & 35 & 45 \\ 23 & 24 & 25 & 12 & 34 & 35 & 13 & 45 & 14 & 15 \end{pmatrix}$

$= (12\quad 23\quad 34\quad 45\quad 15)(13\quad 24\quad 35\quad 14\quad 25)$

Bentuk x_5 akan membangkitkan indeks sikel x_5^2.

Keseluruhan perubahan indeks sikel dari grup S_5 menjadi R_5 adalah sebagai berikut:

$x_1^5 \rightarrow x_1^{10}$;

$x_1x_4 \rightarrow x_2x_4^2$;

$x_1^2x_3 \rightarrow x_1x_3^3$;

$x_1^3x_2 \rightarrow x_1^4x_2^3$;

$x_2x_3 \rightarrow x_1x_3x_6$;

$x_1x_2^2 \rightarrow x_1^2x_2^4$;

$x_5 \rightarrow x_5^2$.

Sehingga indeks sikel dari R_5 diperoleh:

$$Z(R_5;\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = \frac{1}{120}\begin{bmatrix} x_1^{10} + 30x_2x_4^2 + 20x_1x_3^3 + 10x_1^4x_2^3 + \\ 20x_1x_3x_6 +\ 15x_1^2x_2^4 + 24x_5^2 \end{bmatrix} \qquad \ldots(3.4)$$

Selanjutnya, indeks sikel R_5 akan diaplikasikan pada teorema Polya I dan teorema Polya II.

Aplikasi Teorema Polya I:

Ada dua keadaan yang mungkin terjadi di antara dua himpuan titik. Keadaan tersebut adalah:

a. keadaan tidak ada sisi antara dua himpunan titik.

b. keadaan ada sisi antara dua himpunan titik.

Jika r adalah keadaan yang mungkin terjadi di antara dua himpunan titik maka, $r = 2$. Dari persamaan (3.4) diperoleh $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 2$, dan berdasarkan teorema Polya I diperoleh:

$$Z(R_5;\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = \frac{1}{120}\begin{bmatrix} x_1^{10} + 30x_2x_4^2 + 20x_1x_3^3 + 10x_1^4x_2^3 \\ +20x_1x_3x_6 + 15x_1^2x_2^4 + 24x_5^2 \end{bmatrix}$$

$$Z(R_5;\ 2,2,2,2,2) = \frac{1}{120}\begin{bmatrix} 2^{10} + 30\cdot 2\cdot 2^2 + 20\cdot 2\cdot 2^3 + 10\cdot 2^4\cdot 2^3 \\ +20\cdot 2\cdot\ 2\cdot 2 + 15\cdot 2^2\cdot 2^4 + 24\cdot 2^2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{120}[1024 + 1280 + 320 + 240 + 960 + 160 + 96]$$

$$= \frac{1}{120}[4080]$$

$$= 34$$

Jadi, untuk graf yang memuat 5 titik akan terdapat 34 graf yang tidak saling isomorfik.

Aplikasi Teorema Polya II:

Jika keadaan-keadaan di antara dua himpunan titik diberi bobot w, maka

a. $w(y_1) =$ keadaan tidak ada sisi antara dua himpunan titik.

b. $w(y_2) =$ keadaan ada sisi antara dua himpunan titik.

Misal $w(y_1) = T$ dan $w(y_2) = A$.

Berdasarkan teorema Polya II, indeks sikel dari R_5 dengan mensubstitusikan

$x_1 = ([w(y_1)] + [w(y_2)]) = (T + A)$;

$x_2 = ([w(y_1)]^2 + [w(y_2)]^2) = (T^2 + A^2)$;

$x_3 = ([w(y_1)]^3 + [w(y_2)]^3) = (T^3 + A^3)$;

$x_4 = ([w(y_1)]^4 + [w(y_2)]^4) = (T^4 + A^4)$; dan

$x_5 = ([w(y_1)]^5 + [w(y_2)]^5) = (T^5 + A^5)$.

pada persamaan (3.4) sehingga diperoleh:

$$Z(R_5;\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \frac{1}{120}\begin{bmatrix} x_1^{10} + 30x_2x_4^2 + 20x_1x_3^3 + 10x_1^4x_2^3 \\ +20x_1x_3x_6 + 15x_1^2x_2^4 + 24x_5^2 \end{bmatrix}$$

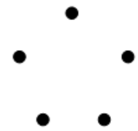
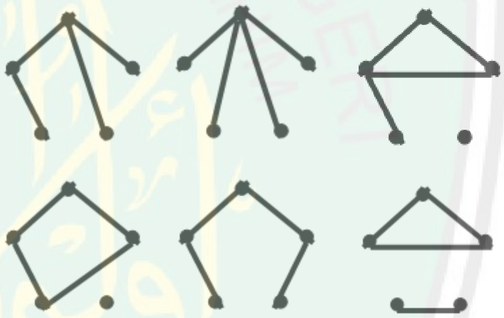
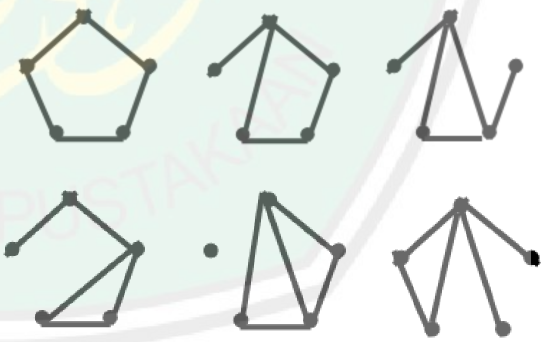
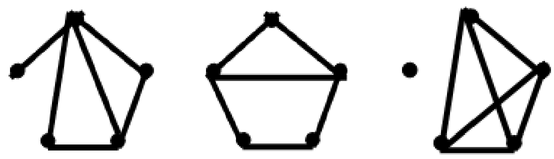
$$Z(R_5;\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \quad = \frac{1}{120}\begin{bmatrix} (T+A)^{10} + 30(T^2+A^2)(T^4+A^4)^2 \\ +20(T+A)(T^3+A^3)^3 + 10(T+A)^4(T^2+A^2)^3 \\ +20(T+A)(T^3+A^3)(T^6+A^6) + 15(T+A)^2 \\ (T^2+A^2)^4 + 24(T^5+A^5) \end{bmatrix}$$

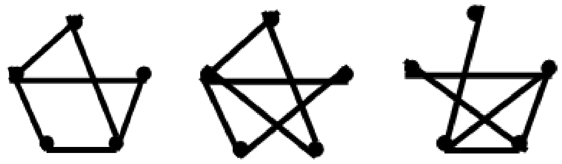
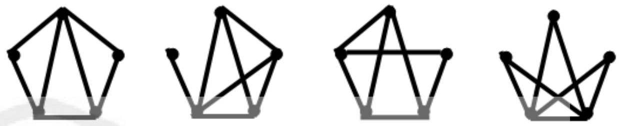
dilakukan perkalian pada tiap suku di ruas kanan kemudian sederhanakan sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} Z(R_5;\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= T^{10} + T^9A + 2T^8A^2 + 4T^7A^3 + 6T^6A^4 + 6T^5A^5 \\ &\quad +6T^4A^6 + 4T^3A^7 + 2T^2A^8 + TA^9 + A^{10} \end{aligned}$$

Dengan kata lain untuk graf yang terdiri atas 5 himpunan titik akan terdapat graf-graf yang tidak saling isomorfik yang memenuhi rincian sebagai berikut: 1 graf tanpa sisi, 1 graf dengan 1 sisi, 2 graf dengan 2 sisi, 4 graf dengan 3 sisi, 6 graf dengan 4 sisi, 6 graf dengan 5 sisi, 6 graf dengan 6 sisi, 4 graf dengan 7 sisi, 2 graf dengan 8 sisi, 1 graf dengan 9 sisi, dan 1 graf dengan 10 sisi.

Tabel 3.4 Graf yang Tidak Saling Isomorfik dengan $n = 5$

	Gambar
1 graf tanpa sisi	
1 graf dengan 1 sisi	
2 graf dengan 2 sisi	
4 graf dengan 3 sisi	
6 graf dengan 4 sisi	
6 graf dengan 5 sisi	
6 graf dengan 6 sisi	

	
4 graf dengan 7 sisi	
2 graf dengan 8 sisi	
1 graf dengan 9 sisi	
1 graf dengan 10 sisi	

3.1.5 Penerapan Teorema Polya pada Graf dengan 6 Titik

Diberikan graf G dengan himpunan titik $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ yang merupakan himpunan titik suatu graf dengan $n = 6$. Misal S_6 adalah grup simetri yang terbentuk dari himpunan X, maka banyaknya anggota dari grup S_6 adalah $n! = 6! = 720$. Dengan bantuan program *maple* diperoleh bentuk-bentuk hasil kali *cycle* yang saling asing dari grup S_6 beserta banyak anggota yang sejenis, yaitu:

a. Bentuk $(1)(2)(3)(4)(5)(6)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 1.

b. Bentuk $(1\quad 2)(3)(4)(5)(6)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 15.

c. Bentuk $(1\quad 2\quad 3)(4)(5)(6)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 40.

d. Bentuk $(1\quad 2\quad 3\quad 4)(5)(6)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 90.

e. Bentuk $(1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5)(6)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 144.

f. Bentuk $(1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 120.

g. Bentuk $(1 \quad 2)(3 \quad 4)(5)(6)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 45.

h. Bentuk $(1 \quad 2)(3 \quad 4)(5 \quad 6)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 15.

i. Bentuk $(1 \quad 2)(3 \quad 4 \quad 5)(6)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 120.

j. Bentuk $(1 \quad 2)(3 \quad 4 \quad 5 \quad 6)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 90.

k. Bentuk $(1 \quad 2 \quad 3)(4 \quad 5 \quad 6)$ dengan banyak anggota yang sejenis ada 40.

Sehingga tipe untai dan indeks sikel dari bentuk hasil perkalian *cycle* di atas ada 11, yaitu:

1. Tipe untai $[6, 0, 0{,}0, 0, 0]$ ada sebanyak 1 anggota dengan indeks sikelnya x_1^6
2. Tipe untai $[4, 1{,}0\ 0, 0, 0]$ ada sebanyak 15 anggota dengan indeks sikelnya $x_1^4 x_2$
3. Tipe untai $[3, 0, 1, 0{,}0{,}0]$ ada sebanyak 40 anggota dengan indeks sikelnya $x_1^3 x_3$
4. Tipe untai $[2, 0{,}0\ 1, 0, 0]$ ada sebanyak 90 anggota dengan indeks sikelnya $x_1^2 x_4$
5. Tipe untai $[1, 0{,}0\ 0, 1, 0]$ ada sebanyak 144 anggota dengan indeks sikelnya $x_1 x_5$
6. Tipe untai $[0, 0{,}0\ 0, 0, 1]$ ada sebanyak 120 anggota dengan indeks sikelnya x_6
7. Tipe untai $[2, 2{,}0\ 0, 0, 0]$ ada sebanyak 45 anggota dengan indeks sikelnya $x_1^2 x_2^2$
8. Tipe untai $[0, 3{,}0\ 0, 0, 0]$ ada sebanyak 15 anggota dengan indeks sikelnya x_2^3

9. Tipe untai $[1, 1, 1, 0, 0, 0]$ ada sebanyak 120 anggota dengan indeks sikelnya $x_1x_2x_3$
10. Tipe untai $[0, 1, 0\ 1, 0, 0]$ ada sebanyak 90 anggota dengan indeks sikelnya x_2x_4
11. Tipe untai $[0, 0, 2, 0, 0, 0]$ ada sebanyak 40 anggota dengan indeks sikelnya x_3^2

Pasangan titik yang mungkin terbentuk dari himpunan n yaitu $12, 13, 14, 15, 16, 23, 24, 25, 26, 34, 35, 36, 45, 46, 56$. Akan dibentuk indeks sikel R_6 (permutasi sisi pada graf) dengan membangkitkan indeks sikel pada S_6 yang sudah diperoleh.

Pembangkit dari setiap indeks sikelnya, yaitu:

1. $(1)(2)(3)(4)(5)(6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow$

   $\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 23 & 24 & 25 & 26 & 34 & 35 & 36 & 45 & 46 & 56 \\ 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 23 & 24 & 25 & 26 & 34 & 35 & 36 & 45 & 46 & 56 \end{pmatrix}$

   $= (12)$

   Bentuk x_1^6 akan membangkitkan indeks sikel x_1^{15}.

2. $(1\quad 2)(3)(4)(5)(6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow$

   $\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 23 & 24 & 25 & 26 & 34 & 35 & 36 & 45 & 46 & 56 \\ 12 & 23 & 24 & 25 & 26 & 13 & 14 & 15 & 16 & 34 & 35 & 36 & 45 & 46 & 56 \end{pmatrix}$

   $= (12)(13\quad 23)(14\quad 24)(15\quad 25)(16\quad 26)(34)(35)(36)(45)(46)(56)$

   Bentuk $x_1^4x_2$ akan membangkitkan indeks sikel $x_1^7x_2^4$.

3. $(1\quad 2\quad 3)(4)(5)(6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow$

   $\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 23 & 24 & 25 & 26 & 34 & 35 & 36 & 45 & 46 & 56 \\ 23 & 12 & 24 & 25 & 26 & 13 & 34 & 35 & 36 & 14 & 15 & 16 & 45 & 46 & 56 \end{pmatrix}$

   $= (12\quad 23\quad 13)(14\quad 24\quad 34)(15\quad 25\quad 35)(16\quad 26\quad 36)(45)(46)(56)$

Bentuk $x_1^3x_3$ akan membangkitkan indeks sikel $x_1^3x_3^4$.

4. $(1\quad 2\quad 3\quad 4)(5)(6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 23 & 24 & 25 & 26 & 34 & 35 & 36 & 45 & 46 & 56 \\ 23 & 24 & 12 & 25 & 26 & 34 & 13 & 35 & 36 & 14 & 45 & 46 & 15 & 16 & 56 \end{pmatrix}$$

$= (12\quad 23\quad 34\quad 14)(13\quad 24)(15\quad 25\quad 35\quad 45)(16\quad 26\quad 36\quad 46)(56)$

Bentuk $x_1^2x_4$ akan membangkitkan indeks sikel $x_1x_2x_4^3$.

5. $(1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5)(6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 23 & 24 & 25 & 26 & 34 & 35 & 36 & 45 & 46 & 56 \\ 23 & 24 & 25 & 12 & 26 & 34 & 35 & 13 & 36 & 45 & 14 & 46 & 15 & 56 & 16 \end{pmatrix}$$

$= (12\quad 23\quad 34\quad 45\quad 15)(13\quad 24\quad 35\quad 14\quad 25)(16\quad 26\quad 36\quad 46\quad 56)$

Bentuk $x_1x_5$akan membangkitkan indeks sikel x_5^3.

6. $(1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5\quad 6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 23 & 24 & 25 & 26 & 34 & 35 & 36 & 45 & 46 & 56 \\ 23 & 24 & 25 & 26 & 12 & 34 & 35 & 36 & 13 & 45 & 46 & 14 & 56 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

$= (12\quad 23\quad 34\quad 45\quad 56\quad 16)(13\quad 24\quad 35\quad 46\quad 15\quad 26)(14\quad 25\quad 36)$

Bentuk x_6 akan membangkitkan indeks sikel $x_3x_6^2$.

7. $(1\quad 2)(3\quad 4)(5)(6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 23 & 24 & 25 & 26 & 34 & 35 & 36 & 45 & 46 & 56 \\ 12 & 24 & 23 & 25 & 26 & 14 & 13 & 15 & 16 & 34 & 45 & 46 & 35 & 36 & 56 \end{pmatrix}$$

$= (12)(13\quad 24)(15\quad 25)(16\quad 26)(14\quad 23)(34)(35\quad 45)(36\quad 46)(56)$

Bentuk $x_1^2x_2^2$ akan membangkitkan indeks sikel $x_1^3x_2^6$.

8. $(1\quad 2)(3\quad 4)(5\quad 6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 23 & 24 & 25 & 26 & 34 & 35 & 36 & 45 & 46 & 56 \\ 12 & 24 & 23 & 26 & 25 & 14 & 13 & 16 & 15 & 34 & 46 & 45 & 36 & 35 & 56 \end{pmatrix}$$

$= (12)(13 \quad 24)(14 \quad 23)(15 \quad 26)(16 \quad 25)(34)(35 \quad 46)(36 \quad 45)(56)$

Bentuk x_2^3 akan membangkitkan indeks sikel $x_1^3 x_2^6$.

9. $(1 \quad 2)(3 \quad 4 \quad 5)(6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow$

$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 23 & 24 & 25 & 26 & 34 & 35 & 36 & 45 & 46 & 56 \\ 12 & 24 & 25 & 23 & 26 & 14 & 15 & 13 & 16 & 45 & 34 & 46 & 35 & 56 & 36 \end{pmatrix}$

$= (12)(13 \quad 24 \quad 15 \quad 23 \quad 14 \quad 25)(16 \quad 26)(34 \quad 45 \quad 35)(36 \quad 46 \quad 56)$

Bentuk $x_1 x_2 x_3$ akan membangkitkan indeks sikel $x_1 x_2 x_3^2 x_6$.

10. $(1 \quad 2)(3 \quad 4 \quad 5 \quad 6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$

$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 23 & 24 & 25 & 26 & 34 & 35 & 36 & 45 & 46 & 56 \\ 12 & 24 & 25 & 26 & 23 & 14 & 15 & 16 & 13 & 45 & 46 & 34 & 56 & 35 & 36 \end{pmatrix}$

$= (12)(13 \quad 24 \quad 15 \quad 26)(14 \quad 25 \quad 16 \quad 23)(34 \quad 45 \quad 56 \quad 36)(35 \quad 46)$

Bentuk $x_2 x_4$ akan membangkitkan indeks sikel $x_1 x_2 x_4^3$.

11. $(1 \quad 2 \quad 3)(4 \quad 5 \quad 6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$

$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 23 & 24 & 25 & 26 & 34 & 35 & 36 & 45 & 46 & 56 \\ 23 & 12 & 25 & 26 & 24 & 13 & 35 & 36 & 34 & 15 & 16 & 14 & 56 & 45 & 46 \end{pmatrix}$

$= (12 \quad 23 \quad 13)(14 \quad 24 \quad 36)(15 \quad 26 \quad 34)(16 \quad 24 \quad 35)(45 \quad 56 \quad 46)$

Bentuk x_3^2 akan membangkitkan indeks sikel x_3^5.

Keseluruhan perubahan indeks sikel dari grup S_6 menjadi R_6 adalah sebagai berikut:

$x_1^6 \rightarrow x_1^{15}$;

$x_1^4 x_2 \rightarrow x_1^7 x_2^4$;

$x_1^3 x_3 \rightarrow x_1^3 x_3^4$;

$x_1^2 x_4 \rightarrow x_1 x_2 x_4^3$;

$x_1 x_5 \rightarrow x_5^3$;

$x_6 \rightarrow x_3x_6^2$;

$x_1^2x_2^2 \rightarrow x_1^3x_2^6$;

$x_2^3 \rightarrow x_1^3x_2^6$;

$x_1x_2x_3 \rightarrow x_1x_2x_3^2x_6$;

$x_2x_4 \rightarrow x_1x_2x_4^3$; dan

$x_3^2 \rightarrow x_3^5$.

Sehingga indeks sikel dari R_6 diperoleh:

$$Z(R_6; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{1}{720}\begin{bmatrix} x_1^{15} + 15x_1^7x_2^4 + 40x_1^3x_3^4 + 90x_1x_2x_4^3 \\ +144x_5^3 + 120x_3x_6^2 + 45x_1^3x_2^6 + \\ 15x_1^3x_2^6 + 120x_1x_2x_3^2x_6 + 90x_1x_2x_4^3 \\ +40x_3^5 \end{bmatrix} \quad \ldots(3.5)$$

Selanjutnya, indeks sikel R_6 akan diaplikasikan pada teorema Polya I dan teorema Polya II.

Aplikasi Teorema Polya I:

Ada dua keadaan yang mungkin terjadi di antara dua himpuan titik. Keadaan tersebut adalah:

a. keadaan tidak ada sisi antara dua himpunan titik.

b. keadaan ada sisi antara dua himpunan titik.

Jika r adalah keadaan yang mungkin terjadi di antara dua himpunan titik maka, $r = 2$. Dari persamaan (3.5) diperoleh $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 2$, dan berdasarkan teorema Polya I diperoleh:

$$Z(R_6; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{1}{720}\begin{bmatrix} x_1^{15} + 15x_1^7x_2^4 + 40x_1^3x_3^4 + 90x_1x_2x_4^3 \\ +144x_5^3 + 120x_3x_6^2 + 45x_1^3x_2^6 + 15x_1^3x_2^6 \\ +120x_1x_2x_3^2x_6 + 90x_1x_2x_4^3 + 40x_3^5 \end{bmatrix}$$

$$Z(R_6; 2,2,2,2,2,2) = \frac{1}{720}\begin{bmatrix} 2^{15} + 15 \cdot 2^7 \cdot 2^4 + 40 \cdot 2^3 \cdot 2^4 + 90 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2^3 + \\ 144 \cdot 2^3 + 120 \cdot 2 \cdot 2^2 + 45 \cdot 2^3 \cdot 2^6 + \\ 15 \cdot 2^3 \cdot 2^6 + 120 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2^2 \cdot 2 + \\ 90 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2^2 + 40 \cdot 2^5 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{720}\begin{bmatrix} 32.768 + 30.720 + 5.120 + 2.880 + 1.152 + \\ 960 + 23.040 + 7.680 + 3.840 + 2.880 + 1.280 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{720}[112.320]$$

$$= 156$$

Jadi, untuk graf yang memuat 6 titik akan terdapat 156 graf yang tidak saling isomorfik.

Aplikasi Teorema Polya II:

Jika keadaan-keadaan di antara dua himpunan titik diberi bobot w, maka

a. $w(y_1)$ = keadaan tidak ada sisi antara dua himpunan titik.

b. $w(y_2)$ = keadaan ada sisi antara dua himpunan titik.

Misal $w(y_1) = T$ dan $w(y_2) = A$.

Berdasarkan teorema Polya II, indeks sikel dari R_6 dengan mensubstitusikan

$x_1 = ([w(y_1)] + [w(y_2)]) = (T + A)$;

$x_2 = ([w(y_1)]^2 + [w(y_2)]^2) = (T^2 + A^2)$;

$x_3 = ([w(y_1)]^3 + [w(y_2)]^3) = (T^3 + A^3)$;

$x_4 = ([w(y_1)]^4 + [w(y_2)]^4) = (T^4 + A^4)$;

$x_5 = ([w(y_1)]^5 + [w(y_2)]^5) = (T^5 + A^5)$;dan

$x_6 = ([w(y_1)]^6 + [w(y_2)]^6) = (T^6 + A^6)$.

pada persamaan (3.5) sehingga diperoleh:

$$Z(R_6; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{1}{720}\begin{bmatrix} x_1^{15} + 15x_1^7x_2^4 + 40x_1^3x_3^4 + 90x_1x_2x_4^3 \\ +144x_5^3 + 120x_3x_6^2 + 45x_1^3x_2^6 + 15x_1^3x_2^6 \\ +120x_1x_2x_3^2x_6 + 90x_1x_2x_4^3 + 40x_3^5 \end{bmatrix}$$

$$Z(R_6; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{1}{720}\begin{bmatrix} (T+A)^{15} + 15(T+A)^7(T^2+A^2)^4 + \\ 40(T+A)^3(T^3+A^3)^4 + \\ 90(T+A)(T^2+A^2)(T^4+A^4)^3 + \\ 144(T^5+A^5)^3 + 120(T^3+A^3)(T^6+A^6)^2 \\ +45(T+A)^3(T^2+A^2)^6 + \\ 120(T+A)(T^2+A^2)(T^3+A^3)^2(T^6+A^6) \\ +90(T+A)(T^2+A^2)(T^4+A^4)^3 + \\ 40(T^3+A^3)^5 + 15(T+A)^3(T^2+A^2)^6 \end{bmatrix}$$

dilakukan perkalian pada tiap suku di ruas kanan kemudian sederhanakan sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} Z(R_6; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) &= T^{15} + T^{14}A + 2T^{13}A^2 + 5T^{12}A^3 + 9T^{11}A^4 + \\ &15T^{10}A^5 + 21T^9A^6 + 24T^8A^7 + 24T^7A^8 + \\ &21T^6A^9 + 15T^5A^{10} + 9T^4A^{11} + 5T^3A^{12} + \\ &2T^2A^{13} + TA^{14} + A^{15} \end{aligned}$$

Dengan kata lain untuk graf yang terdiri atas 6 himpunan titik akan terdapat graf-graf yang tidak saling isomorfik yang memenuhi rincian sebagai berikut: 1 graf tanpa sisi, 1 graf dengan 1 sisi, 2 graf dengan 2 sisi, 5 graf dengan 3 sisi, 9 graf dengan 4 sisi, 15 graf dengan 5 sisi, 21 graf dengan 6 sisi, 24 graf dengan 7 sisi, 24 graf dengan 8 sisi, 21 graf dengan 9 sisi, 15 graf dengan 10 sisi, 9 graf dengan 11 sisi, 5 graf dengan 12 sisi, 2 graf dengan 13 sisi, 1 graf dengan 14 sisi, dan 1 graf dengan 15 sisi.

3.1.6 Penerapan Teorema Polya pada Graf dengan 7 Titik

Diberikan graf G dengan himpunan titik $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ yang merupakan himpunan titik suatu graf dengan $n = 7$. Misal S_7 adalah grup simetri yang terbentuk dari himpunan X, maka banyaknya anggota dari grup S_7 adalah

$n! = 7! = 5040$. Dengan bantuan program *maple* diperoleh bentuk-bentuk hasil kali *cycle* yang saling asing dari grup S_7 beserta banyak anggota yang sejenis.

Sehingga tipe untai dan indeks sikel dari bentuk hasil perkalian *cycle* di atas ada 15, yaitu:

1. Tipe untai $[7, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$ ada sebanyak 1 anggota dengan indeks sikelnya x_1^7
2. Tipe untai $[5, 1, 0, 0, 0, 0, 0]$ada sebanyak 21 anggota dengan indeks sikelnya $x_1^5 x_2$
3. Tipe untai $[4, 0, 1, 0, 0, 0, 0]$ ada sebanyak 70 anggota dengan indeks sikelnya $x_1^4 x_3$
4. Tipe untai $[3, 0,0\ 1, 0, 0, 0]$ ada sebanyak 210 anggota dengan indeks sikelnya $x_1^3 x_4$
5. Tipe untai $[2, 0,0, 0, 1, 0, 0]$ ada sebanyak 504 anggota dengan indeks sikelnya $x_1^2 x_5$
6. Tipe untai $[1, 0,0, 0, 0, 1, 0]$ ada sebanyak 840 anggota dengan indeks sikelnya $x_1 x_6$
7. Tipe untai $[0, 0, 0, 0, 0, 0, 1]$ ada sebanyak 720 anggota dengan indeks sikelnya x_7
8. Tipe untai $[3, 2, 0, 0, 0, 0, 0]$ ada sebanyak 105 anggota dengan indeks sikelnya $x_1^3 x_2^2$
9. Tipe untai $[1, 3, 0, 0, 0, 0, 0]$ ada sebanyak 105 anggota dengan indeks sikelnya $x_1 x_2^3$
10. Tipe untai $[0, 2, 1, 0, 0, 0, 0]$ ada sebanyak 210 anggota dengan indeks sikelnya $x_2^2 x_3$

11. Tipe untai $[2,1,1,0,0,0,0]$ ada sebanyak 420 anggota dengan indeks sikelnya $x_1^2x_2x_3$
12. Tipe untai $[1,1,0,1,0,0,0]$ ada sebanyak 630 anggota dengan indeks sikelnya $x_1x_2x_4$
13. Tipe untai $[0,1,0,0,1,0,0]$ ada sebanyak 504 anggota dengan indeks sikelnya x_2x_5
14. Tipe untai $[1,0,2,0,0,0,0]$ ada sebanyak 280 anggota dengan indeks sikelnya $x_1x_3^2$
15. Tipe untai $[0,0,1,1,0,0,0]$ ada sebanyak 420 anggota dengan indeks sikelnya x_3x_4

Pasangan titik yang mungkin terbentuk dari himpunan n yaitu $12, 13, 14, 15, 16, 17, 23, 24, 25, 26, 27, 34, 35, 36, 37, 45, 46, 47, 56, 57, 67$.

Akan dibentuk indeks sikel R_7 (permutasi sisi pada graf) dengan membangkitkan indeks sikel pada S_7 yang sudah diperoleh. Cara menentukan pembangkit dari setiap indeks sikelnya sama seperti dilakukan di atas.

Keseluruhan perubahan indeks sikel dari grup S_7 menjadi R_7 adalah sebagai berikut:

$x_1^7 \rightarrow x_1^{21};$

$x_1^5x_2 \rightarrow x_1^{11}x_2^5$

$x_1^4x_3 \rightarrow x_1^6x_3^5$

$x_1^3x_4 \rightarrow x_1^3x_2x_4^4$

$x_1^2x_5 \rightarrow x_1x_5^4$

$x_1x_6 \rightarrow x_3x_6^3$

$x_7 \rightarrow x_7^3$

$x_1^3x_2^2 \to x_1^5x_2^8$

$x_1x_2^3 \to x_1^3x_2^9$

$x_2^2x_3 \to x_1^2x_2^2x_3x_6^2$

$x_1^2x_2x_3 \to x_1^2x_2^2x_3^3x_6$

$x_1x_2x_4 \to x_1x_2^2x_4^4$

$x_2x_5 \to x_1x_5^2x_{10}$

$x_1x_3^2 \to x_3^7$

$x_3x_4 \to x_2x_3x_4x_{12}$

Sehingga indeks sikel dari R_7 diperoleh:

$$Z(R_7;\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = \frac{1}{5040}\begin{bmatrix} x_1^{21} + 21x_1^{11}x_2^5 + 70x_1^6x_3^5 + 210x_1^3x_2x_4^4 \\ +504x_1x_5^4 + 840x_3x_6^3 + 720x_7^3 + 105x_1^5x_2^8 \\ +105x_1^3x_2^9 + 210x_1^2x_2^2x_3x_6^2 \\ +420x_1^2x_2^2x_3^3x_6 + 630x_1x_2^2x_4^4 \\ +504x_1x_5^2x_{10} + 280x_3^7 + 420x_2x_3x_4x_{12} \end{bmatrix}$$

……. (3.6)

Selanjutnya, indeks sikel R_7 akan diaplikasikan pada teorema Polya I dan teorema Polya II.

Aplikasi Teorema Polya I:

Ada dua keadaan yang mungkin terjadi di antara dua himpuan titik. Keadaan tersebut adalah:

a. keadaan tidak ada sisi antara dua himpunan titik.

b. keadaan ada sisi antara dua himpunan titik.

Jika r adalah keadaan yang mungkin terjadi di antara dua himpunan titik maka, $r = 2$. Dari persamaan (3.6) diperoleh $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = 2$, dan berdasarkan teorema Polya I diperoleh:

$$Z(R_7;\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7) = \frac{1}{5040}\begin{bmatrix} x_1^{21}+21x_1^{11}x_2^5+70x_1^6x_3^5+210x_1^3x_2x_4^4 \\ +504x_1x_5^4+840x_3x_6^3+720x_7^3+105x_1^5x_2^8 \\ +105x_1^3x_2^9+210x_1^2x_2^2x_3x_6^2 \\ +420x_1^2x_2^2x_3^3x_6+630x_1x_2^2x_4^4 \\ +504x_1x_5^2x_{10}+280x_3^7+420x_2x_3x_4x_{12} \end{bmatrix}$$

$$Z(R_7;\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7) = \frac{1}{5040}\begin{bmatrix} 2^{21}+21\cdot 2^{11}\cdot 2^5+70\cdot 2^6\cdot 2^5 \\ +210\cdot 2^3\cdot 2\cdot 2^4+504\cdot 2\cdot 2^4 \\ +840\cdot 2\cdot 2^3+720\cdot 2^3+105\cdot 2^5\cdot x_2^8 \\ +105\cdot 2^3\cdot 2^9+210\cdot 2^2\cdot 2^2\cdot 2\cdot 2^2 \\ +420\cdot 2^2\cdot 2^2\cdot 2^3\cdot 2 \\ +630\cdot 2\cdot 2^2\cdot 2^4+504\cdot 2\cdot 2^2\cdot 2 \\ +280\cdot 2^7+420\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 \end{bmatrix}$$

$$= 1044$$

Jadi, untuk graf yang memuat 7 titik akan terdapat 1044 graf yang tidak saling isomorfik.

Aplikasi Teorema Polya II:

Pada perhitungan menggunakan teorema Polya II, cara ini sama halnya seperti di atas, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} Z(R_7;x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7) &= T^{21}+T^{20}A+2T^{19}A^2+5T^{18}A^3+10T^{17}A^4 \\ &+21T^{16}A^5+41T^{15}A^6+65T^{14}A^7+97T^{13}A^8 \\ &+131T^{12}A^9+148T^{11}A^{10}+148T^{10}A^{11} \\ &+131T^9A^{12}+97T^8A^{13}+65T^7A^{14}+41T^6A^{15} \\ &+21T^5A^{16}+10T^4A^{17}+5T^3A^{18}+2T^2A^{19} \\ &+TA^{20}+A^{21} \end{aligned}$$

Dengan kata lain untuk graf yang terdiri atas 7 himpunan titik akan terdapat graf-graf yang tidak saling isomorfik yang memenuhi rincian sebagai berikut: 1 graf tanpa sisi, 1 graf dengan 1 sisi, 2 graf dengan 2 sisi, 5 graf dengan 3 sisi, 10 graf dengan 4 sisi, 21 graf dengan 5 sisi, 41 graf dengan 6 sisi, 65 graf dengan 7 sisi, 97 graf dengan 8 sisi, 131 graf dengan 9 sisi, 148 graf dengan 10 sisi, 148 graf dengan 11 sisi, 131 graf dengan 12 sisi, 97 graf dengan 13 sisi, 65 graf dengan 14 sisi, 41 graf dengan 15 sisi, 21 graf dengan 16 sisi, 10 graf dengan 17 sisi, 5 graf dengan 18 sisi, 2 graf dengan 19 sisi, 1 graf dengan 20 sisi, dan 1 graf dengan 21 sisi.

3.1.7 Penerapan Teorema Polya pada Graf dengan 8 Titik

Dengan cara yang sama seperti di atas, pada perhitungan menggunakan teorema Polya I untuk graf yang memuat 8 himpunan titik akan terdapat 12346 graf yang tidak saling isomorfik dan pada perhitungan menggunakan teorema Polya II dapat diperoleh:

$$\begin{aligned} Z(R_8; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = {} & T^{28} + T^{27}A + 2T^{26}A^2 + 5T^{25}A^3 + 11T^{24}A^4 \\ & +24T^{23}A^5 + 56T^{22}A^6 + 115T^{21}A^7 \\ & +221T^{20}A^8 + 402T^{19}A^9 + 663^{18}A^{10} \\ & +980T^{17}A^{11} + 1312T^{16}A^{12} + 1557T^{15}A^{13} \\ & +1646T^{14}A^{14} + 1557T^{13}A^{15} + 1312T^{12}A^{16} \\ & +980T^{11}A^{17} + 663T^{10}A^{18} + 402T^9A^{19} \\ & +221T^8A^{20} + 115T^7A^{21} + 56T^6A^{22} \\ & +24T^5A^{23} + 11T^4A^{24} + 5T^3A^{25} \\ & +2T^2A^{26} + TA^{27} + A^{28} \end{aligned}$$

Dengan kata lain untuk graf yang terdiri atas 8 himpunan titik akan terdapat graf-graf yang tidak saling isomorfik yang memenuhi rincian sebagai berikut: 1 graf tanpa sisi,1 graf dengan 1 sisi, 2 graf dengan 2 sisi, 5 graf dengan 3 sisi, 11 graf dengan 4 sisi, 24 graf dengan 5 sisi, 56 graf dengan 6 sisi, 115 graf dengan 7 sisi, 221 graf dengan 8 sisi, 402 graf dengan 9 sisi, 663 graf dengan 10 sisi, 980 graf dengan 11 sisi, 1312 graf dengan 12 sisi, 1557 graf dengan 13 sisi, 1646 graf dengan 14 sisi, 1557 graf dengan 15 sisi, 1312 graf dengan 16 sisi, 980 graf dengan 17 sisi, 663 graf dengan 18 sisi, 402 graf dengan 19 sisi, 221 graf dengan 20 sisi, 115 graf dengan 21 sisi, 56 graf dengan 22 sisi, 24 graf dengan 23 sisi, 11 graf dengan 24 sisi, 5 graf dengan 25 sisi, 2 graf dengan 26 sisi, 1 graf dengan 27 sisi, dan 1 graf dengan 28 sisi.

3.2 Teorema-teorema dari Pola Banyaknya Graf yang Tidak Saling Isomorfik

Berdasarkan beberapa perhitungan banyaknya graf dan jenis-jenis graf yang tidak saling isomorfik menggunakan teorema Polya dengan order $n = 2, 3, \dots, 8$ seperti di atas, kemudian dapat dibuat tabel pola banyaknya graf yang tidak saling isomorfik seperti di bawah ini:

Tabel 3.5 Banyak Graf yang Tidak Saling Isomorfik dengan $n = 1, 2, 3, \dots, 8$

n	G_0	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	G_8	G_9	G_{10}	G_{11}	…	…	$\sum_{i=0}^{\frac{n(n-1)}{2}} G_i$
1	1														1
2	1	1													2
3	1	1	1	1											4
4	1	1	2	3	2	1	1								11
5	1	1	2	4	6	6	6	4	2	1	1				34
6	1	1	2	5	9	15	21	24	24	21	15	9	…	…	156
7	1	1	2	5	10	21	41	65	97	131	148	148	…	…	1044
8	1	1	2	5	11	24	56	115	221	402	663	980	…	…	12346

Dari Tabel 3.5 di atas didapatkan teorema-teorema pola banyaknya graf yang tidak saling isomorfik, sebagai berikut:

Teorema 1

Terdapat 1 jenis graf yang dapat dibuat dari titik sebanyak n tanpa sisi, $n \in N$.

Bukti:

Ambil n titik yang tidak saling terhubung satu sama lain, notasikan sebagai $x_1, x_2, \dots, x_n$, $n \in N$, maka jelas bahwa berdasarkan definisi graf, n titik tersebut membentuk suatu graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \emptyset$.

Selanjutnya misal terdapat graf lain $H \cong G$ sedemikian sehingga H memiliki n titik yang dinotasikan sebagai $y_1, y_2, \dots, y_n$ dan tanpa sisi, maka dapat dibentuk pemetaan $\phi(x_n) = y_n$, $\phi: G \to H$. Jelas bahwa ϕ merupakan isomorfisme karena $\forall\, x_n, x_m \in V(G)$, $x_n \neq x_m$, berlaku $(x_n, x_m) \notin E(G) \Leftrightarrow \big(\phi(x_n), \phi(x_m)\big) \notin E(H)$.

Karena ϕ adalah isomorfisma maka $G \cong H$. Artinya G dan H secara prinsip adalah graf yang sama. Jadi graf yang memiliki n titik tanpa sisi adalah tunggal.

Gambar 3.1 Graf tanpa Sisi

Teorema 2

Terdapat 1 jenis graf yang dapat dibuat dari titik sebanyak $n \geq 2$ dengan sisi sebanyak 1, $n \in N$.

Bukti:

Definisikan n titik dan notasikan sebagai $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $n \in N$. yang di mana x_p terhubung dengan x_q untuk suatu $p, q \in \{1, 2, \ldots, n\}, p \neq q$, maka jelas bahwa berdasarkan definisi graf, n titik tersebut membentuk suatu graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{(x_p, x_q)\}$.

Selanjutnya misal terdapat graf lain $H \ncong G$ sedemikian sehingga H memiliki n titik yang dinotasikan sebagai $y_1, y_2, \ldots, y_n$ dan satu sisi yaitu (y_p, y_q), maka dapat dibentuk pemetaan $\phi(x_n) = y_n$, $\phi: G \to H$. Jelas bahwa ϕ merupakan isomorfisma, karena $(x_n, x_m) \notin E(G), \forall\, x_n, x_m \in V(G) \setminus \{x_p, x_q\}$ dan $(y_n, y_m) \notin E(H), \forall\, y_n, y_m \in V(G) \setminus \{y_p, y_q\}$.

Karena ϕ adalah isomorfisma maka $G \cong H$. Artinya G dan H secara prinsip adalah graf yang sama. Jadi graf yang memiliki n titik dengan satu sisi adalah tunggal.

Gambar 3.2 Graf dengan Satu Sisi

Teorema 3

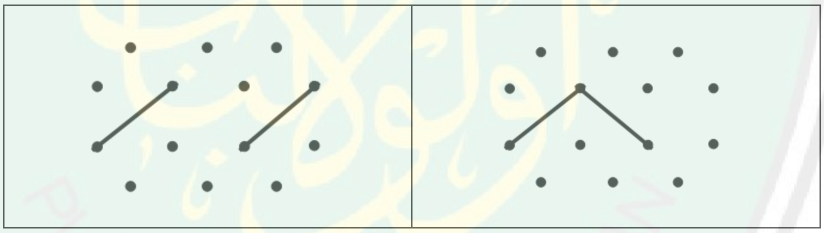
Terdapat 2 jenis graf yang tidak saling isomorfik yang dapat dibuat dari titik sebanyak $n \geq 4$ dengan sisi sebanyak 2, $n \in N$.

Bukti:

Misalkan himpunan $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, n \in N$. Selanjutnya tetapkan 4 titik $x_i, x_j, x_p, x_q \in V$, $x_i \neq x_j \neq x_p \neq x_q$ maka dapat dibentuk himpunan pasangan berurutan $E_1 = \{(x_p, x_i), (x_q, x_i)\}$ dan $E_2 = \{(x_p, x_i), (x_q, x_j)\}$. Jelas bahwa $E_1 \neq E_2$ sehingga graf $G_1 = (V, E_1) \ncong G_2 = (V, E_2)$. Jadi terdapat paling sedikit 2 graf yang dapat dibentuk dengan $n \geq 4$ titik dan 2 sisi yang tidak saling isomorfik.

Misalkan terdapat graf $H \ncong G_1$ dan $H \ncong G_2$ dengan $|V(H)| = n$, dan $|E(H)| = 2$, maka dapat ditulis $E(H) = \{(y_i, y_p), (y_j, y_q)\}$ atau bisa juga $E(H) = \{(y_i, y_p), (y_i, y_q)\}$.

Karena $H \ncong G_1$ maka tidak terdapat bijeksi $\phi: H \to G_1$ tetapi dengan mengambil $\phi(y_i) = x_i$, dan $\phi(y_p) = x_p$. jelas bahwa ϕ adalah isomorfisma. Selanjutnya $H \ncong G_2$ maka tidak terdapat bijeksi $\phi: H \to G_2$ tetapi dengan mengambil $\phi(y_i) = x_i$, dan $\phi(y_p) = x_p$. Jelas bahwa ϕ adalah isomorfik (kontradiksi).



Gambar 3.3 Dua Graf yang Tidak Saling Isomorfik dengan Dua Sisi

Teorema 4

Terdapat 5 jenis graf yang tidak saling isomorfik yang dapat dibuat dari titik sebanyak $n \geq 6$ dengan sisi sebanyak 3, $n \in N$.

Bukti:

Definisikan himpunan $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $n \in N$, $n \geq 6$. Selanjutnya, ambil sebarang p titik dari V, dengan $p \in \mathbb{N}$, $p > 6$, dan notasikan sebagai

$x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_p}$, dengan $k_i \in \{1, \dots, n\}$. Definisikan $V_e = \{x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_p}\}$, Selanjutnya, definisikan $E_1 = \{(x_{k_1}, x_{k_2}), (x_{k_3}, x_{k_4}), (x_{k_5}, x_{k_6})\}$, $E_2 = \{(x_{k_1}, x_{k_2}), (x_{k_1}, x_{k_3}), (x_{k_4}, x_{k_5})\}$, $E_3 = \{(x_{k_1}, x_{k_2}), (x_{k_1}, x_{k_3}), (x_{k_1}, x_{k_4})\}$, $E_4 = \{(x_{k_1}, x_{k_2}), (x_{k_2}, x_{k_3}), (x_{k_3}, x_{k_4})\}$, $E_5 = \{(x_{k_1}, x_{k_2}), (x_{k_2}, x_{k_3}), (x_{k_3}, x_{k_1})\}$, maka jelas bahwa E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 tidak ada yang saling isomorfik. Sehingga diperoleh 5 graf berbeda dan saling tidak isomorfik satu sama lain. Selanjutnya, misalkan E_6, dengan $|E_6| = 3$, adalah suatu himpunan sisi yang berbeda dari seluruh $E_1, \dots, E_5$, maka E_6 dapat ditulis sebagai $E_6 = \{(x_{p_1}, x_{p_2}), (x_{p_3}, x_{p_4}), (x_{p_5}, x_{p_6})\}$, dengan $x_{p_1}, \dots, x_{p_6} \in V$. Definisikan $V' = \{x_{p_1}, \dots, x_{p_6}\} \subset V$ (Himpunan titik-titik pada V yang terkait pada suatu sisi di E_6). Tinjau kasus-kasus berikut:

Kasus 1: Misalkan $p_i \neq p_j$,$(\forall i, j \in \{1, \dots, 6\}, i \neq j)$.

Ambil $\phi: V \to V$, $\phi(x_{p_i}) = x_{k_i}$, $i \in \{1, \dots, 6\}$, maka diperoleh $E_6 \cong E_1$ (Kontradiksi). Dengan demikian, kasus 1 menuntun pada kontradiksi.

Kasus 2: Misalkan $p_i = p_j$, $i, j \in \{1, \dots, 6\}$, $i \neq j$.

Karena $|E_6| = 3$, maka $(x_{p_i}, x_{p_j}) \notin E_6$. Ambil $\phi: V \to V$, $\phi(x_{p_i}) = \phi(x_{p_j}) = x_{k_1}$, dan $\phi(x_p) \in \{x_{k_1}, \dots, x_{k_6}\}, \forall x_p \in V'$, maka jelas bahwa $E_6 \cong E_2$ (Kontradiksi). Dengan demikian kasus 2 menuntun pada kontradiksi.

Kasus 3: Misalkan $p_i = p_j = p_k$, $i, j, k \in \{1, \dots, 6\}$, $i \neq j \neq k$.

Karena $|E_6| = 3$, maka $(x_{p_i}, x_{p_j}), (x_{p_j}, x_{p_k}), (x_{p_i}, x_{p_k}) \notin E_6$. Ambil $\phi: V \to V$, $\phi(x_{p_i}) = \phi(x_{p_j}) = \phi(x_{p_k}) = x_{k_1}$,$\phi(x_p) \in \{x_{k_1}, \dots, x_{k_6}\}, \forall x_p \in V'$, maka jelas bahwa $E_6 \cong E_3$ (Kontradiksi). Dengan demikian kasus 3 menuntun pada kontradiksi.

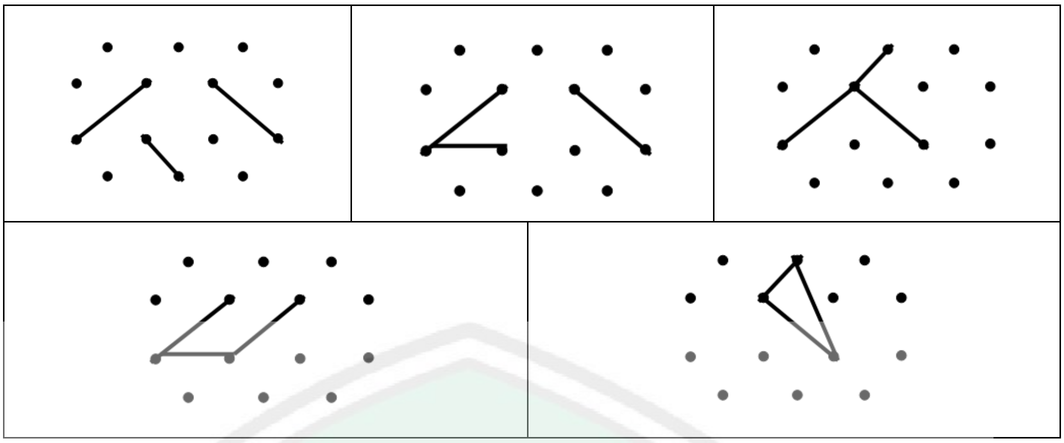
<u>Kasus 4</u>: Misalkan $p_i = p_j, p_k = p_l,\ i,j,k,l \in \{1,\ldots,6\}, i \neq j \neq k \neq l.$

Karena $|E_6| = 3$, maka tepat salah satu dari $\left(x_{p_j}, x_{p_k}\right), (x_{p_i}, x_{p_l})$, $(x_{p_i}, x_{p_k}), \left(x_{p_j}, x_{p_l}\right)$ adalah anggota E_6. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $\left(x_{p_j}, x_{p_k}\right) \in E_6$. Maka dapat diambil $\phi: V \to V$, $\phi(x_{p_i}) = \phi\left(x_{p_j}\right) = x_{k_2}$, $\phi(x_{p_k}) = \phi(x_{p_l}) = x_{k_3} \in \{x_{k_1}, \ldots, x_{k_6}\}, \forall x_p \in V'$, maka diperoleh $E_6 \cong E_4$ (Kontradiksi). Dengan demikian, kasus 4 menuntun pada kontradiksi.

<u>Kasus 5</u>: Misalkan $p_i = p_j, p_k = p_l, p_u = p_v,\ i,j,k,l,u,v \in \{1,\ldots,6\},\ i \neq j \neq k \neq l \neq u \neq v.$

Karena $|E_6| = 3$, maka tepat salah satu dari $(x_{p_i}, x_{p_k}), (x_{p_i}, x_{p_l})$, $(x_{p_i}, x_{p_u}), (x_{p_i}, x_{p_v})$ adalah anggota E_6. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $(x_{p_i}, x_{p_k}) \in E_6$, maka tepat salah satu dari $(x_{p_l}, x_{p_u}), (x_{p_l}, x_{p_v})$ adalah anggota E_6. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $(x_{p_l}, x_{p_u}) \in E_6$. Maka dapat diambil $\phi: V \to V$, $\phi(x_{p_i}) = \phi\left(x_{p_j}\right) = x_{k_1}$, $\phi(x_{p_k}) = \phi(x_{p_l}) = x_{k_2}$, $\phi(x_{p_u}) = \phi(x_{p_v}) = x_{k_3} \in \{x_{k_1}, \ldots, x_{k_6}\}, \forall x_p \in V'$, maka diperoleh $E_6 \cong E_5$ (Kontradiksi). Dengan demikian, kasus 5 menuntun pada kontradiksi.

Berdasarkan seluruh kasus diperoleh kontradiksi. Sehingga untuk setiap E_6 yang mungkin dibangun, E_6 haruslah isomorfik dengan salah satu dari $E_1, E_2, \ldots, E_5$. Dengan demikian terbukti bahwa hanya terdapat 5 graf berbeda yang memiliki n titik $(n \geq 6)$ dan 3 sisi.



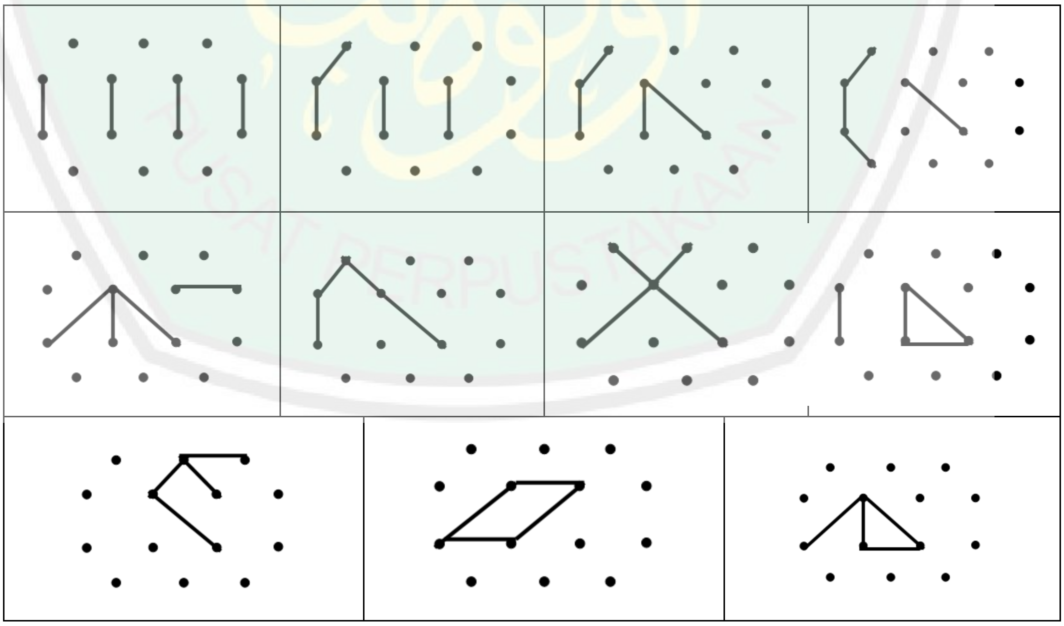
Gambar 3.4 Lima Graf yang Tidak Saling Isomorfik dengan Tiga Sisi

Teorema 5

Terdapat 11 jenis graf yang tidak saling isomorfik yang dapat dibuat dari titik sebanyak $n \geq 8$ dengan sisi sebanyak 4, $n \in N$.

Bukti:

Bukti serupa dengan Teorema 4, tetapi dengan 11 kasus mewakili 11 struktur yang berbeda.



Gambar 3.5 Sebelas Graf yang Tidak Saling Isomorfik dengan Empat Sisi

3.3 Graf yang Tidak Saling Isomorfik pada Al-Quran

Sesungguhnya Allah Swt itu Maha Pencipta dan Dia mengusai segala ciptaan-Nya, mengaturnya, dan menjaganya. Allah Swt lebih mulia dari segala makhluk yang ada, yang dia ciptakan. Allah Swt lebih besar dari segala makhluk-makhluk tersebut. Ciptaan Allah meliputi langit dan bumi beserta segala apa-apa yang berada di antara keduannya, dan Allah mengkaruniakan manusia untuk mencipta yaitu dengan ciptaan manusia yang hanya sebatas manusia. Hal ini tertera dalan al-Quran surah al-Baqarah/2:117 berikut ini:

بَدِيعُ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلۡأَرۡضِۖ وَإِذَا قَضَىٰٓ أَمۡرٗا فَإِنَّمَا يَقُولُ لَهُۥ كُن فَيَكُونُ ١١٧

Artinya: *"Allah Pencipta langit dan bumi, dan bila Dia berkehendak (untuk menciptakan) sesuatu, maka (cukuplah) Dia hanya mengatakan kepadanya: "Jadilah". Lalu jadilah ia" (QS. al-Baqarah/2:117).*

Ayat di atas menjelaskan bahwa Niscaya hanya bagi Allah Swt ciptaan yang kekal lagi abadi, sedang ciptaan Allah Swt itu meliputi luasnya langit dan bumi beserta apa-apa yang ada diantara keduanya.

Semua makhluk ciptaan Allah Swt dapat dibagi kepada dua macam, yaitu: makhluk yang gaib (al ghaib) dan makhluk yang nyata (as syahadah). Yang bisa membedakan keduanya adalah panca indera manusia. Segala sesuatu yang tidak bisa dijangkau oleh salah satu panca indera manusia digolongkan kepada al ghaib, sedangkan yang bisa dijangkau oleh salah satu panca indera manusia digolongkan kepada as syahadah.

Untuk mengetahui dan mengimani wujud makhluk gaib tersebut, seseorang dapat menempuh dua cara. Pertama, melalui berita atau informasi yang diberikan oleh sumber tertentu (bil-Akhbar). Kedua, melalui bukti bukti nyata yang menunjukkan makhluk gaib itu ada (bil atsar). Di dalam al-Quran, makhluk ciptaan Allah disebut hanya ada 3 macam yang berakal, yaitu: malaikat, jin, manusia.

Malaikat adalah makhluk yang memiliki kekuatan-kekuatan yang patuh pada ketentuan dan perintah Allah. Malaikat di dalam ajaran Islam. Malaikat diciptakan oleh Allah terbuat dari cahaya (nur), berdasarkan salah satu hadist nabi Muhammad Saw, "Malaikat telah diciptakan dari cahaya" (HR. Imam Muslim). Makhluk Kedua, jin adalah makhluk Allah yang diciptakan sesudah malaikat. Jika malaikat berbadan cahaya, maka badan Jin dibuat Allah dari nyala api yang sangat panas, lantas ditiupkan Ruh-Nya. Seperti dalam firman-Nya:

وَٱلْجَآنَّ خَلَقْنَٰهُ مِن قَبْلُ مِن نَّارِ ٱلسَّمُومِ ٢٧

Artinya: "Dan Kami telah menciptakan jin sebelum (Adam) dari api yang sangat panas" (QS. Al-Hijr/15:27).

Sebagaimana jin, manusia diciptakan Allah untuk beribadah kepada-Nya. Manusia memiliki kebebasan untuk memilih peran dalam drama kehidupan ini, apakah ingin menjadi penjahat (setan) ataukah ingin jadi orang baik. Badan manusia terbuat dari unsur-unsur yang terdapat dalam tanah, sebagaimana telah dijelaskan pada bagian sebelumnya. Secara umum badan manusia terbuat dari zat-zat biokimiawi. Karena bersifat material, maka badan manusia paling berat di antara makhluk Allah yang bernama malaikat dan jin. Kedua makhluk yang disebut terakhir itu badannya terbuat dari gelombang elektromagnetik, yang bersifat energial. Sedangkan manusia material. Seperti dalam firman-Nya:

وَلَقَدْ خَلَقْنَا ٱلْإِنسَٰنَ مِن صَلْصَٰلٍ مِّنْ حَمَإٍ مَّسْنُونٍ ٢٦

Artinya: "Dan sesungguhnya Kami telah menciptakan manusia (Adam) dari tanah liat kering (yang berasal) dari lumpur hitam yang diberi bentuk" (QS. Al-Hijr/15:26).

Maka manusia hidup di langit yang paling rendah, yaitu langit pertama. Jin hidup di langit yang lebih tinggi, yaitu langit kedua. Sedangkan malaikat hidup di langit yang paling tinggi, yaitu langit ke tujuh. Selain itu, langit ketiga sampai dengan langit ke enam juga ditempati oleh arwah manusia yang sudah meninggal. Mereka menunggu terjadinya hari kiamat, untuk dibangkitkan dan hidup kembali menempati badan wadahnya. Di langit pertama inilah manusia hidup di atas permukaan planet bumi. Langit pertama ini juga disebut sebagai langit dunia.

Dari penafsiran di atas, terdapat persamaan dan perbedaan pada malaikat, jin dan manusia. Persamaannya yaitu ketiganya makhluk yang diciptakan Allah Swt, mempunyai akal, diciptakan untuk tunduk kepada Allah Swt, berkumpul di hari kiamat, dan berasal dari surga. Sedangkan perbedaannya adalah karena diciptakan dari materi yang berbeda. Begitu pula pada permasalahan tak isomorfik pada graf, jika Graf G dikatakan isomorfik dengan graf G' maka terdapat tiga hal yang pasti dipenuhi. Jika terdapat salah satu dari ketiga syarat tidak terpenuhi, maka graf G dan G' tidak isomorfik. Ini menunjukkan bahwa graf G dan G' terdapat perbedaan pada jumlah titik, jumlah sisi, atau jumlah sisi dengan derajat tertentu. Jadi, dapat dikatakan masing-masing ketiga makhluk ciptaan Allah Swt yaitu malaikat, jin, dan manusia tidak saling isomorfik karena terdapat perbedaan walaupun terdapat persamaan pula. Malaikat diciptakan dari cahaya, jin diciptakan dari api dan manusia diciptakan dari tanah.

Perbedaan yang lain bahwa jin atau setan itu ada yang laki dan ada yang perempuan dan mereka sama dengan manusia, kawin dan bercampur antara laki-laki dan perempuan. Sebagai mana firman-Nya:

وَأَنَّهُۥ كَانَ رِجَالٌ مِّنَ ٱلْإِنسِ يَعُوذُونَ بِرِجَالٍ مِّنَ ٱلْجِنِّ فَزَادُوهُمْ رَهَقًا ۝٦

Artinya:“Dan bahwasannya ada beberapa orang laki laki diantara manusia meminta perlindungan kepada beberapa laki laki diantara jin, maka jin-jin itu menambah bagi mereka dosa dan kesalahan.” (QS. al-Jin/72:6).

Sedangkan pada Malaikat tidak dilengkapi dengan hawa nafsu, tidak memiliki keinginan seperti manusia, tidak berjenis lelaki atau perempuan, dan tidak berkeluarga. Hidup dalam alam yang berbeda dengan kehidupan alam semesta yang kita saksikan ini. Yang mengetahui hakikat wujudnya hanyalah Allah Swt. Malaikat adalah hamba Allah Swt yang sangat tunduk kepada perintah Allah Swt. Tidak pernah sekalipun mereka menentang perintah yang diberikan Allah Swt kepada mereka. Sebagai mana firman-Nya:

وَقَالُواْ ٱتَّخَذَ ٱلرَّحۡمَٰنُ وَلَدٗاۗ سُبۡحَٰنَهُۥۚ بَلۡ عِبَادٞ مُّكۡرَمُونَ ٢٦ لَا يَسۡبِقُونَهُۥ بِٱلۡقَوۡلِ وَهُم بِأَمۡرِهِۦ يَعۡمَلُونَ ٢٧

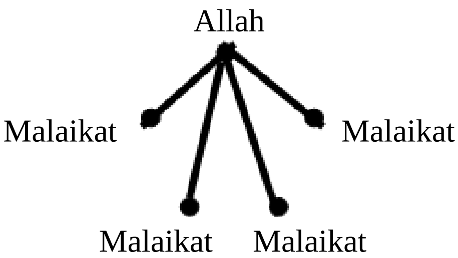
Artinya:”Dan mereka berkata: "Tuhan yang Maha Pemurah telah mengambil (mempunyai) anak", Maha suci Allah. sebenarnya (malaikat-malaikat itu), adalah hamba-hamba yang dimuliakan, mereka tidak mendahului-Nya dengan perkataan dan mereka mengerjakan perintah-perintah-Nya” (QS. an-Anbiya/21:26-27).

Ini berbeda dengan jin dan manusia yang diciptakan Allah Swt dengan kehendak bebas (*free will*). Dan Allah Swt bermaksud dengan kehendak bebas ini agar Allah Swt ingin melihat siapa diantara kalangan manusia dan jin yang paling bertaqwa kepada Allah Swt Karena orang yang paling bertaqwa adalah orang yang paling mulia di sisi Allah Swt. Sebagai mana firman-Nya:

وَمَا خَلَقۡتُ ٱلۡجِنَّ وَٱلۡإِنسَ إِلَّا لِيَعۡبُدُونِ ٥٦

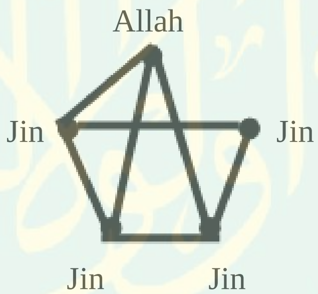
Artinya:“Dan Aku tidak menciptakan jin dan manusia melainkan supaya mereka menyembah-Ku (QS. adz-Dzaariyaat/51:56).

Sehingga dapat digambarkan dalam bentuk graf $G_1, G_2,$ dan G_3 seperti pada gambar berikut:



Gambar 3.6 Graf G_1 Hubungan antara Allah dengan Malaikat-Nya serta Sesama Malaikat

Gambar 3.7 Graf G_2 Hubungan antara Allah dengan Hamba-Nya serta Sesama Hamba



Gambar 3.8 Graf G_3 Hubungan antara Allah dengan Jin-Nya serta Sesama Jin

Demikianlah perbedaan antara hubungan Allah Swt dengan makhluk-makhluk ciptaan-Nya dengan karakter masing-masing. Apabila perbedaan malaikat, manusia, dan jin digambarkan dalam graf, maka graf dapat menggambarkan hubungan antara pencipta (Allah Swt) dan makhluk-makhluk ciptaan-Nya (malaikat, manusia, dan jin) dimana titik-titik dalam graf menggambarkan makhluk ciptaan-Nya, yaitu: malaikat, manusia, dan jin.

Sedangkan sisi atau garis yang menghubungkan titik-titik tersebut adalah bagaimana hubungan Allah Swt dengan makhluk-makhluk ciptaan-Nya yang terjalin. Dari ketiga graf di atas merupakan graf-graf yang tidak saling isomorfik karena terdapat sisi-sisi pada G_1 tidak sama dengan G_2 dan G_3. Pada graf G_1, para malaikat ini merupakan makhluk Allah yang paling taat dan sama sekali tidak pernah melanggar perintah-Nya, malaikat tidak dilengkapi dengan hawa nafsu sedikitpun, tidak memiliki keinginan seperti manusia atau jin, tidak berjenis lelaki atau perempuan, dan tidak berkeluarga. Sedangkan pada graf G_2 dan G_3, manusia dan jin ada yang taat dan ada yang tidak taat, serta jin itu ada yang laki-laki dan ada yang perempuan, mereka sama dengan manusia, kawin dan bercampur antara laki laki dan perempuan.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada bab sebelumnya, diperoleh beberapa kesimpulan yaitu sebagai berikut:

f. Terdapat 1 jenis graf yang dapat dibuat dari titik sebanyak n tanpa sisi, $n \in N$.
g. Terdapat 1 jenis graf yang dapat dibuat dari titik sebanyak $n \geq 2$ dengan sisi sebanyak 1, $n \in N$.
h. Terdapat 2 jenis graf yang tidak saling isomorfik yang dapat dibuat dari titik sebanyak $n \geq 4$ dengan sisi sebanyak 2, $n \in N$.
i. Terdapat 5 jenis graf yang tidak saling isomorfik yang dapat dibuat dari titik sebanyak $n \geq 6$ dengan sisi sebanyak 3, $n \in N$.
j. Terdapat 11 jenis graf yang tidak saling isomorfik yang dapat dibuat dari titik sebanyak $n \geq 8$ dengan sisi sebanyak 4, $n \in N$.

4.2 Saran

Dalam penelitian ini, peneliti menggunakan graf yang tidak saling isomorfik menggunakan teorema Polya dengan $n = 2, 3, 4, \ldots, 8$ titik. Terdapat pasangan titik tak berurut (artinya $ab = ba$) dari n titik. Bagi peneliti lain yang ingin mengembangkan penelitian serupa, peneliti menyarankan pada jenis graf-graf yang lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2006. *Ada Matematika dalam Al-Qur'an*. Malang: UIN Malang Press.

Abdussakir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Abdussakir. 2009. *Matematika 1 Kajian Integratif Matematika & Al-Qur'an*. Malang: UIN-Malang Press.

Abdussakir, Azizah, F.N. dan Novandika, F.F. 2009. *Teori Graf*: *Topik Dasar untuk Tugas Akhir/Skripsi*. Malang: UIN-Malang Press.

Aziz, A. 2007. *Bumi Sholat Secara Matematis*. Malang: UIN-Malang Press.

Chartrand, G. dan Lesniak, L. 1996. *Graph and Digraph: Third Edition*. California: A Division Wadsworth.

Departemen Agama RI. 1995. *Al-Qur'an dan Terjemahnya*. Semarang: PT. Karya Toha Putra.

Dummit, D.S. dan Foote, R.M. 1991. *Abstract algebra*. New Jersey: a Division of Simon & Schuster, Inc.

Fel, L.G. 2009. On the Polya Enumeration Theorem. *Intelligent Information Management*. Israel: Departemant of Civil Engineering. No 1, Hal:172-173.

Munir, R. 2007. *Matematika Diskrit*. Bandung: INFORMATIKA.

Murtadho, M. 2008. *Ilmu Falak Praktis*. Malang: UIN-Malang Press.

Ni'mah, K. 2013. *Aplikasi Teorema Polya Untuk Menghitung Banyaknya Graf Sederhana Yang Tidak Isomorfik*. Kediri: Universitas Nusantara PGRI.

Purwanto. 1998. *Matematika Diskrit*. Malang: IKIP Malang.

Raisinghania. M.D. dan Aggarwal. R.S. 1980. *Modern Algebra*. New Delhi: S. Chand & Company LTD.

Rosalianti, V.T., Suhery, C. dan Kusumastuti, N. 2013. *Penggunaan Teorema Polya Dalam Menentukan Banyaknya Graf Sederhana yang Tidak Saling Isomorfis*. Pontianak: Universitas Tanjungpura Pontianak. Vol 2, No 1, Hal:39-44.

Santosa, R.G. 2003. *Aplikasi Teorema Polya pada Enumerasi Graf Sederhana*, (online), (http://home.unpar.ac.id/integral.pdf.html, diakses 20 Maret 2016).

Siang, J.J. 2002. *Matematika Disrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer*. Yogyakarta: Andi.

Lampiran: Banyaknya Graf yang Tidak Saling Isomorfik dengan order $n = 1, 2, 3, \ldots, 8$

n	G_0	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	G_8	G_9	G_{10}	G_{11}	G_{12}	G_{13}	G_{14}	G_{15}	G_{16}	G_{17}	G_{18}	G_{19}	G_{20}	G_{21}	G_{22}	G_{23}	G_{24}	G_{25}	G_{26}	G_{27}	G_{28}	$\sum_{i=0}^{\frac{n(n-1)}{2}} G_i$
1	1																													1
2	1	1																												2
3	1	1	1	1																										4
4	1	1	2	3	2	1	1																							11
5	1	1	2	4	6	6	6	4	2	1	1																			34
6	1	1	2	5	9	15	21	24	24	21	15	9	5	2	1	1														156
7	1	1	2	5	10	21	41	65	97	131	148	148	131	97	65	41	21	10	5	2	1	1								1044
8	1	1	2	5	11	24	56	115	221	402	663	980	1312	1557	1646	1557	1312	980	663	402	221	115	56	24	11	5	2	1	1	12346

RIWAYAT HIDUP

Iffah Nur Hamidah, biasa dipanggil Iffah, lahir di Kabupaten Lamongan pada 21 April 1994, tinggal di Desa Siman RT/RW 005/002 Kecamatan Sekaran Kabupaten Lamongan. Putri ke-empat dari 5 bersaudara yang dilahirkan dari pasangan bapak H. Syamsul Hadi dan ibu Hj. Musyrifah.

Pendidikan dasarnya ditempuh di TK Simanjaya dan lulus pada tahun 2000, kemudian dilanjutkan ke MI Salafiyah Banin Banat di Yayasan Pondok Pesantren Al-Fattah Siman dan lulus pada tahun 2006, kemudian melanjutkan pendidikan di yayasan yang sama pada tingkat SMP Simanjaya dan lulus pada tahun 2009, kemudian melanjutkan pendidikan di yayasan yang sama pada tingkat SMA 1 Simanjaya, dengan mengambil program jurusan IPA dan lulus pada tahun 2012. Selanjutnya Pada tahun itu juga dia melanjutkan pendidikan ke jenjang perkuliahan di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang melalui jalur SNMPTN Undangan dengan mengambil Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.

Untuk mengembangkan kompetensi akademiknya, selama menempuh study dia pernah ikut organisasi di Himpunan Mahasiswa Jurusan (HMJ) Matematika.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Iffah Nur Hamidah
NIM : 12610016
Fakultas/Jurusan : SainsdanTeknologi/Matematika
JudulSkripsi : Pola Banyaknya Graf yang Tidak Saling Isomorfik Menggunakan Teorema Polya
Pembimbing I : Dr. Abdussakir, M.Pd
Pembimbing II : Abdul Aziz, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1	30 April 2016	Konsultasi Bab I & Bab II	1.
2	16 Mei 2016	Revisi Bab I & Bab II	2.
3	30 Mei 2016	Konsultasi Bab III	3.
4	5 Juni 2016	Revisi Bab III	4.
5	29 Juni 2016	Konsultasi Agama Bab I & Bab II	5.
6	5 Oktober 2016	Konsultasi Bab II & Bab III	6.
7	3 November 2016	Revisi Agama Bab I & Bab II	7.
8	9 November 2016	Konsultasi Bab I, Bab II & Bab III	8.
9	8 Desember 2016	Konsultasi Bab III	9.
10	16 Februari 2017	Konsultsi Agama Bab III	10.
11	23 Februari 2017	ACC Kajian Agama Bab III	11.
12	7 Maret 2017	Konsultsi Bab III & Bab IV	12.
13	9 Maret 2017	Revisi Bab III	13.
14	30 Mei 2017	Revisi Bab III	14.
15	4 Oktober 2017	Revisi Bab III	15.
16	2 November 2017	Revisi Bab III	16.
17	9 Januari 2018	Revisi Bab III	17.
18	21 Februari 2018	Revisi Bab III	18.
19	4 Juni 2018	Revisi Bab III	19.

Malang, 7 September 2018
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001