SIFAT-SIFAT RUANG METRIK QUASI PARSIAL

SKRIPSI

OLEH
MUHAMMAD JAZULY
NIM. 11610071

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018

SIFAT-SIFAT RUANG METRIK QUASI PARSIAL

SKRIPSI

OLEH
MUHAMMAD JAZULY
NIM. 11610071

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018

SIFAT-SIFAT RUANG METRIK QUASI PARSIAL

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Muhammad Jazuly
NIM. 11610071

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018

SIFAT-SIFAT RUANG METRIK QUASI PARSIAL

SKRIPSI

Oleh
Muhammad Jazuly
NIM. 11610071

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 15 Maret 2018

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Hairur Rahman, M.Si	Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si
NIP. 19800429 200604 1 003	NIP. 19770521 200501 2 004

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

SIFAT-SIFAT RUANG METRIK QUASI PARSIAL

SKRIPSI

Oleh
Muhammad Jazuly
NIM. 11610071

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 27 Maret 2018

Penguji Utama	: Dr. Abdussakir, M.Pd	....
Ketua Penguji	: Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd	....
Sekretaris Penguji	: Hairur Rahman, M.Si	....
Anggota Penguji	: Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Muhammad Jazuly

NIM : 11610071

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul : Sifat-sifat Ruang Metrik Quasi Parsial

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 15 Maret 2018
Yang membuat pernyataan

METERAI TEMPEL
2AF7AAFF168422262
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Muhammad Jazuly
NIM. 11610071

MOTO

فَإِنَّ مَعَ ٱلۡعُسۡرِ يُسۡرًا ۝٥ إِنَّ مَعَ ٱلۡعُسۡرِ يُسۡرًا ۝٦

"Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan. Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan." (QS. Al-Insyirah 5-6)."

PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

Dengan rasa syukur kepada Allah Swt penulis persembahkan skripsi ini kepada:

Ayahanda Abdul Jawad Ridwan, ibunda Endang Muji Rahayu, serta keluarga tercinta yang selalu semangat mendorong penulis untuk menyelesaikan skripsi ini.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Alhamdulillahirrobbil 'alamin, segala puji bagi Allah Swt yang telah memberikan rahmat, berkah, dan hidayah-Nya sehingga sehingga penulis mampu menyelesaikan skripsi yang berjudul "Sifat-sifat Ruang Metrik Quasi Parsial" ini dengan baik. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada nabi Muhammad Saw yang telah menunjukkan dan mengubah dari jalan jahiliyah/kegelapan ke jalan yang terang benderang seperti sekarang ini.

Penulis menyadari banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Oleh karena itu, iringan do'a dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan, terutama kepada:

1. Prof Dr. H. Abdul Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Hairur Rahman, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan bimbingan, nasihat dan arahan untuk segera menyelesaikan skripsi ini.
5. Ari Kusumastuti, M.Si., M.Pd, selaku pembimbing II yang telah memberikan arahan dan bimbingan selama penyusunan skripsi ini.
6. Segenap civitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang

terutama seluruh dosen yang telah memberikan bimbingan dalam perkuliahan.

7. Kedua orang tua dan seluruh keluarga yang memberikan dukungan berupa motivasi dan do’a sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik.
8. Teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2011 yang telah membantu dalam penyelesaian skripsi ini.
9. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik berupa materiil maupun moril.

Akhir kata, semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat dan menambah wawasan keilmuan bagi yang membacanya.

Wassalamu’alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, Maret 2018

Penulis

DAFTAR ISI

BAB III PEMBAHASAN

BAB IV PENUTUP

ABSTRAK

Jazuly, Muhammad. 2018. **Sifat-sifat Ruang Metrik Quasi Parsial**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Hairur Rahman, M.Si. (II) Ari Kusumastuti, M.Si, M.Pd.

Kata kunci: ruang metrik, ruang metrik quasi, ruang metrik parsial, ruang metrik quasi parsial

Ruang metrik adalah himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan metrik tertentu. Ruang metrik digeneralisasikan lebih lanjut menjadi ruang metrik quasi, ruang metrik parsial dan ruang metrik quasi parsial. Ruang metrik quasi parsial adalah pasangan (X, q) dengan X adalah himpunan tak kosong dan q adalah metrik quasi parsial pada X.

Tujuan penelitian ini adalah menjelaskan hubungan antara konsep ruang metrik dengan ruang metrik quasi parsial dan menjelaskan sifat-sifat yang berlaku pada ruang metrik quasi parsial.

Berdasarkan pembahasan diperoleh bahwa ruang metrik quasi parsial adalah gabungan dari ruang metrik quasi dan ruang metrik parsial, yang memiliki sifat-sifat ruang metrik quasi parsial sebagai berikut :

a. Metrik quasi parsial pq pada X dengan
$$d_{qp}(x, y) = \frac{1}{2}[qp(x, y) + qp(y, x)] \quad x, y \in X$$
adalah metrik parsial pada X.

b. Diberikan (X, p) adalah ruang metrik parsial. Himpunan $d_p(x, y) = p(x, y) - p(x, x)$ untuk $x, y \in X$. Maka (X, d_p) adalah ruang metrik quasi parsial.

c. Diberikan (X, qp) adalah ruang metrik quasi parsial, (X, p) adalah ruang metrik parsial (yang sesuai), dan (X, d) adalah ruang metrik (yang sesuai). Beberapa pernyataan berikut ekivalen
   1. Barisan $\{x_n\}$ adalah Cauchy di (X, qp) dan (X, qp) adalah lengkap.
   2. Barisan $\{x_n\}$ adalah Cauchy di (X, p) dan (X, p) adalah lengkap.
   3. Barisan $\{x_n\}$ adalah Cauchy di (X, d) dan (X, d) adalah lengkap.

   Lebih lanjut,
$$\lim_{n\to\infty} d(x, x_n) = 0 \Leftrightarrow p(x, x) = \lim_{n\to\infty} p(x, x_n) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m)$$
$$\Leftrightarrow qp(x, x) = \lim_{n\to\infty} qp(x, x_n) = \lim_{n,m\to\infty} qp(x_n, x_m)$$
$$= \lim_{n\to\infty} qp(x_n, x) = \lim_{n,m\to\infty} qp(x_m, x_n)$$

ABSTRACT

Jazuly, Muhammad. 2018. **The Properties of Quasi-Partial Metric Space**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Supervisor: (I) Hairur Rahman, M.Si. (II) Ari Kusumastuti, M.Si, M.Pd.

Keywords: metric space, quasi-metric space, partial-metric space, quasi-partial metric space

A metric space is a non-empty set that comes with certain metrics. The metric space are generalizable further into quasi-metric space, partial metric space, and quasi-partial metric space. The quasi-partial metric space is the pair (X, q) with X is non-empty set and q is the quasi-partial metric on X.

The purphose of this study is to explain the relationship between the concept of metric space with the quasi-partial metric space and to explain properties applicable to the quasi-partial metric space.

Based on the discussion it is found that the quasi-partial metric space is a composite of quasi-metric space and partial metric space, which has the following properties:

a. Quasi-partial metric pq on X where

$$d_{qp}(x,y) = \frac{1}{2}[qp(x,y) + qp(y,x)] \quad x, y \in X$$

is a partial metric on X.

b. Let (X,p) is a partial metric space. The set $d_p(x,y) = p(x,y) - p(x,x)$ for $x, y \in X$. Then (X, d_p) is a quasi-partial metric space.

c. Let (X, qp) be a quasi-partial metric space, let (X,p) be the corresponding partial-metric space, and let (X,d) be the corresponding metric space. Then the following statement are equivalent:

   1. The sequence $\{x_n\}$ is Cauchy in (X, qp) and (X, qp) is complete.
   2. The sequence $\{x_n\}$ is Cauchy in (X,p) dan (X,p) is complete.
   3. The sequence $\{x_n\}$ is Cauchy in (X,d) dan (X,d) is complete.

   Also,

$$\lim_{n\to\infty} d(x,x_n) = 0 \Leftrightarrow p(x,x) = \lim_{n\to\infty} p(x,x_n) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n,x_m)$$
$$\Leftrightarrow qp(x,x) = \lim_{n\to\infty} qp(x,x_n) = \lim_{n,m\to\infty} qp(x_n,x_m)$$
$$= \lim_{n\to\infty} qp(x_n,x) = \lim_{n,m\to\infty} qp(x_m,x_n)$$

المخلص

جازولي، مُحَمَّد. 2018. صفات الفضاء الجزئي متري. بعث جامي. شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا ، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج ، المشرف: هيرالرحمن الماجستيرو اري كوسومستوتي الماجستير.

الكلمات الرئيسية: المساحة المترية، مساحة المقياس، المساحة المترية الجزئية، الفضاء الجزئي متري.

مساحة المقياس هي مجموعة غير فارغة تأتي مع بعض المقاييس، يتم تعميم مقياس المساحة الي مساحة المقياس، المساحة المترية الجزئية، الفضاء الجزئي متري. الفضاء الجزئي متري هو قرين من (X,q) مع X هو جمع غير فارغ و q هو المسافه قوس فرسيل X.

كان الغرض من هذه الدراسة هو شرح العلاقة بين مفهوم المساحة المترية والمساحة الجزئية–المترية وشرح الخصائص المطبقة على الفضاء الجزئي متري.

استنادًا إلى المناقشة تبين أن المساحة شبه المتريّة الجزئية هي مزيج من المساحة شبه المترية والمساحة المترية الجزئية, الذي يحتوي على الخصائص التالية:

أ. مقاييس شبه جزئية pq على X التي

$$d_{qp}(x,y) = \frac{1}{2}[qp(x,y) + qp(y,x)] \quad x,y \in X$$

هي مقياس جزئي على X.

ب. دعونا (X,p) هي مساحة مترية جزئية. المجموعة $d_p(x,y) = p(x,y) - p(x,x)$ ل X $x,y \in X$. ثم (X,d_p) هي مساحة متري شبه جزئية.

ت. دعونا (X,qp) هي مساحة متري شبه جزئية، (X,p) يكون الفضاء الجزئي متري المقابلة، (X,d) تكون المساحة المترية المقابلة. ثم العبارة التالية مكافئة:

1. التسلسل $\{x_n\}$ هى Cauchy في (X,qp) و (X,qp) اكتمال.
2. التسلسل $\{x_n\}$ هى Cauchy في (X,p) و (X,p) اكتمال.

3. التسلسل $\{x_n\}$ هى Cauchy في (X,d) و (X,d) اكتمال.

ايضا،

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} d(x,x_n)=0 &\Leftrightarrow p(x,x)=\lim_{n\to\infty} p(x,x_n)=\lim_{n,m\to\infty} p(x_n,x_m)\\ &\Leftrightarrow qp(x,x)=\lim_{n\to\infty} qp(x,x_n)=\lim_{n,m\to\infty} qp(x_n,x_m)\\ &=\lim_{n\to\infty} qp(x_n,x)=\lim_{n,m\to\infty} qp(x_m,x_n)\end{aligned}$$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Ilmu merupakan sesuatu yang sangat penting dalam kehidupan ini, pada setiap ruang dan waktu manusia membutuhkan ilmu untuk menjalankan hidupnya. Dengan berilmu manusia dapat memahami fenomena alam dan mengembangkan informasi sains dan teknologi. Pandangan al-Quran tentang sains dan teknologi terdapat dalam wahyu pertama yang diterima nabi Muhammad Saw:

ٱقْرَأْ بِٱسْمِ رَبِّكَ ٱلَّذِى خَلَقَ ﴿١﴾ خَلَقَ ٱلْإِنسَٰنَ مِنْ عَلَقٍ ﴿٢﴾ ٱقْرَأْ وَرَبُّكَ
ٱلْأَكْرَمُ ﴿٣﴾ ٱلَّذِى عَلَّمَ بِٱلْقَلَمِ ﴿٤﴾ عَلَّمَ ٱلْإِنسَٰنَ مَا لَمْ يَعْلَمْ ﴿٥﴾

"bacalah dengan (menyebut) nama Tuhanmu yang menciptakan. Allah telah menciptakan manusia dari segumpal darah. Bacalah, dan Tuhanmulah yang Maha pemurah, yang mengajar (manusia) dengan perantaran kalam[1589], Dia mengajar kepada manusia apa yang tidak diketahuinya." (al-Alaq : 1-5).

Kata *iqra'* diambil dari akar kata yang berarti menghimpun. Dari menghimpun lahir aneka makna seperti menyampaikan, menelaah, mendalami, meneliti, mengetahui ciri sesuatu, dan membaca baik yang tertulis maupun tidak. Sedangkan dari segi obyeknya, perintah *iqra'* itu mencakup segala sesuatu yang dapat dijangkau oleh manusia (Shihab, 1996).

Berdasarkan penjelasan di atas, sebenarnya tidak ada dikotomi ilmu agama dan non agama. Termasuk dalam konsep jarak yang memegang peranan penting dalam kehidupan sehari-hari. Seringkali perlu diketahui jarak dalam mengambil keputusan. Selanjutnya dapat dikonstruksi teori dari konsep jarak secara matematis. Deda (2016) mengatakan bahwa pada garis bilangan riil, jarak a ke 0 adalah nilai mutlak $|a|$ dari suatu elemen $a \in \mathbb{R}$. Secara umum, jarak *(distance)* antara elemen a dan b di $\mathbb{R}$ adalah $|a - b|$.

Pada tahun 1906 Maurice Frechet memperkenalkan konsep jarak pada himpunan yang tak kosong. Jarak ini selanjutnya disebut metrik pada himpunan bilangan riil. Kajian tentang metrik merupakan salah satu konsep dasar penting yang menjadi pembahasan dalam analisis matematika. Metrik adalah jarak di antara pasangan elemen yang memenuhi sifat-sifat tertentu, yaitu positifitas, definitas, simetri dan ketaksamaan segitiga. Selanjutnya himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan metrik tertentu disebut ruang metrik. Lebih jelasnya, himpunan X yang tidak kosong dilengkapi metrik d ditulis (X, d) disebut ruang metrik, sedangkan anggota-anggota himpunan X disebut titik-titik pada ruang metrik yang termuat dalam bilangan riil $d(x, y)$ adalah jarak titik x dan y di dalam (X, d) (Bahtiar, 2012).

Pada perkembangan analisis banyak menghasilkan konsep-konsep baru seperti konsep ruang metrik quasi merupakan perluasan dari ruang metrik. Pada tahun 1914 Hausdorff mengenalkan jarak asimetri, yang merupakan bagian penting dari pembahasan metrik quasi karena perbedaan antara ruang metrik dengan ruang metrik quasi terletak pada sifat simetrinya. Jika metrik pada himpunan tak kosong X mempunyai sifat simetri, maka metrik quasi pada himpunan tak kosong X tidak mempunyai sifat simetri. Sedangkan sifat-sifat lainnya pada metrik seperti positifitas, definitas, dan ketaksamaan segitiga berlaku serupa pada metrik quasi (Firdaus, dkk., 2013).

Ruang metrik parsial merupakan generalisasi dari suatu ruang metrik dan memiliki aplikasi dalam ilmu komputer teoritis Matthews (1994). Jarak suatu titik dari dirinya sendiri tidak selalu bernilai nol. Dengan mengganti kondisi $d(x,x) = 0$ dengan kondisi $d(x,x) \leq d(x,y)$ untuk setiap x, y dalam definisi metrik.

Gupta dan Gautam (2015) menggeneralisasikan konsep ruang metrik menjadi ruang quasi parsial b metrik, yang merupakan generalisasi dari ruang metrik quasi parsial. Suatu ruang metrik quasi parsial adalah pasangan (X, q) dengan X adalah himpunan tak kosong dan q adalah metrik quasi parsial pada X. Pada jurnal tersebut tidak dijelaskan secara rinci ruang metrik quasi parsial, hanya menyinggung sedikit tentang ruang metrik quasi parsial.

Ruang metrik quasi parsial sebagai generalisasi lebih lanjut dari ruang metrik dan ruang metrik parsial, maka akan mengadopsi sifat-sifat pada ruang metrik dan ruang metrik parsial. Seperti barisan konvergen pada ruang metrik quasi parisal, barisan Cauchy pada ruang metrik quasi parsial dan kelengkapan ruang metrik quasi parsial. Salah satu manfaat dari konsep ruang metrik quasi parsial adalah sebagai alat matematika untuk analisis kompleksitas asimptotik di ilmu komputer.

Sehingga pada skripsi ini akan diteliti seperti apakah konsep dasar ruang metrik quasi parsial. Konsep dasar yang dimaksud adalah menjelaskan definisi ruang metrik quasi parsial beserta contohnya dan menjelaskan sifat-sifat ruang metrik quasi parsial beserta pembuktian dan contohnya. Sehingga penelitian ini mengambil judul "*Sifat-sifat Ruang Metrik Quasi Parsial*".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam skripsi ini adalah bagaimana sifat-sifat yang berlaku pada ruang metrik quasi parsial?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka penelitian ini bertujuan untuk mengkaji dan memperjelas sifat-sifat yang berlaku pada ruang metrik quasi parsial.

1.4 Manfaat Penelitian

Hasil penelitian ini diharapkan agar memberikan pengetahuan tentang sifat-sifat pada ruang metrik quasi parsial.

1.5 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur, yaitu dengan mengkaji buku atau jurnal, serta referensi lain yang sekiranya mendukung penelitian ini. Langkah-langkah dalam menjelaskan sifat-sifat pada ruang metrik quasi parsial dapat dirinci sebagai berikut:

a. Menguji sifat-sifat ruang metrik.
b. Menguji sifat-sifat ruang metrik quasi.
c. Menguji sifat-sifat ruang metrik parsial.
d. Menguji kelengkapan pada ruang metrik, ruang metrik quasi, ruang metrik parsial.
e. Menyimpulkan sifat-sifat ruang metrik quasi parsial dan kelengkapan ruang metrik quasi parsial.

1.6 Sistematika Penulisan

Dalam penulisan proposal ini, penulis menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab, dan masing-masing bab dibagi dalam sub bab dengan sistematika penulisan sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pada bab ini akan diuraikan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan, manfaat, metode, dan sistematika penulisan penelitian.

Bab II Kajian Pustaka

Bagian ini berisi landasan teori yang menjadi dasar dalam penulisan skripsi, hal ini dimaksudkan untuk dipahami agar mempermudah dalam mengikuti pembahasan selanjutnya, pada bagian ini diuraikan himpunan dan sub himpunan, barisan, limit, ruang metrik, ruang metrik quasi, dan kajian keagamaan.

Bab III Pembahasan

Bagian ini berisikan pembahasan tentang ruang metrik quasi parsial yang meliputi definisi, sifat-sifat yang berlaku di dalamnya disertai dengan contoh, dan pembahasan tentang hubungan antara konsep ruang metrik quasi parsial dengan ruang metrik serta kajian keagamaan.

Bab IV Penutup

Pada bab ini ditentukan kesimpulan dari pembahasan hasil penelitian yang telah dibahas dengan dilengkapi dengan saran-saran yang berkaitan dengan penelitian ini.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Himpunan

Jika suatu elemen x dalam himpunan A, ditulis $x \in A$, dan dikatakan bahwa x anggota A, atau x milik A. Jika x tidak dalam himpunan A, ditulis $x \notin A$ (Bartle dan Sherbert, 2010).

Jika setiap elemen pada himpunan A juga termasuk dalam himpunan B, dikatakan bahwa A adalah himpunan bagian (*subset*) dari B dan ditulis $A \subseteq B$ atau $B \supseteq A$ (Bartle dan Sherbert, 2010).

Dikatakan bahwa himpunan A adalah himpunan bagian sejati dari himpunan B jika $A \subseteq B$, tetapi setidaknya ada satu elemen B yang tidak ada pada A. Dalam kasus ini dituliskan $A \subset B$ (Bartle dan Sherbert, 2010).

Definisi 2.1.1

Dua himpunan A dan B disebut sama, dan dituliskan $A = B$, jika keduanya mengandung unsur/elemen yang sama (Bartle dan Sherbert, 2010).

Dengan demikian, untuk membuktikan bahwa himpunan A dan B adalah sama, sehingga ditunjukkan bahwa $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$ (Bartle dan Sherbert, 2010).

Himpunan biasanya didefinisikan dengan mencantumkan elemennya secara eksplisit, atau dengan menentukan properti yang menentukan elemen himpunan. Jika P menunjukkan properti yang bermakna dan tidak ambigu untuk elemen himpunan S. Maka dituliskan

$$\{x \in S : P(x)\}$$

untuk himpunan semua elemen x di S dimana properti P benar. Jika himpunan ini dipahami dari konteksnya, maka hal itu sering diabaikan dalam notasi ini:

- Himpunan bilangan asli $\mathbb{N} \coloneqq \{1,2,3,\ldots\}$,
- Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z} \coloneqq \{0,1,-1,2,-2,\ldots\}$,
- Himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q} \coloneqq \{\frac{m}{n} : m,n \in \mathbb{Z}\ dan\ n \neq 0\}$,
- Himpunan bilangan riil $\mathbb{R}$ (Bartle dan Sherbert, 2010).

Contoh 2.1.2

(a) Himpunan $\{x \in \mathbb{N} :\ x^2 - 3x + 2 = 0\}$

Jawaban dari persamaan di atas terdiri dari bilangan asli. Karena satu-satunya solusi dari persamaan kuadrat ini adalah $x = 1$ dan $x = 2$ sehingga dapat disederhanakan dengan $\{1, 2\}$.

(b) Bilangan asli n adalah genap jika memiliki bentuk $n = 2k$ untuk $k \in \mathbb{N}$. Himpunan bilangan asli genap dapat dituliskan

$$\{2k : k \in \mathbb{N}\},$$

yang lebih sederhana dibandingkan $\{n \in \mathbb{N} : n = 2k, k \in \mathbb{N}\}$. Demikian juga, himpunan bilangan asli ganjil dapat dituliskan $\{2k - 1 : k \in \mathbb{N}\}$ (Bartle dan Sherbert, 2010).

2.2 Fungsi

Sebelum mendefinisikan fungsi, terlebih dahulu akan didefinisikan *Cartesian Product* pada dua himpunan.

Definisi 2.2.1

Jika A dan B himpunan tak kosong, maka *Cartesian Product* $A \times B$ dari A dan B adalah himpunan semua pasangan terurut (a, b) dengan $a \in A$ dan $b \in B$, ditulis $A \times B \coloneqq \{(a, b): a \in A, b \in B\}$ (Bartle dan Sherbert, 2010).

Jadi, jika $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{1, 5\}$, maka himpunan $A \times B$ adalah himpunan yang elemen-elemennya adalah pasangan terurut

$$(1, 1), (1, 5), (2, 1), (2, 5), (3, 1), (3, 5).$$

Definisi 2.2.2

Diberikan A dan B suatu himpunan. Maka fungsi dari A ke B adalah himpunan f dari pasangan berurutan $A \times B$ sehingga setiap $a \in A$ ada $b \in B$ dengan $(a, b) \in f$ dan jika $(a, b) \in f$ dan $(a, b') \in f$, maka $b = b'$ (Bartle dan Sherbert, 2010).

Himpunan A dari elemen pertama dari fungsi f disebut domain f dan sering dilambangkan dengan $D(f)$. Himpunan semua elemen kedua di f disebut range f dan sering dilambangkan dengan $R(f)$. Walaupun $D(f) = A$, tetapi $R(f) \subseteq B$ (Bartle dan Sherbert, 2010).

Kondisi penting bahwa $(a, b) \in f$ dan $(a, b') \in f$ mengisyaratkan bahwa $b = b'$ kadang-kadang disebut tes garis vertikal. Dalam teori geometri dikatakan setiap garis vertikal $x = a$ dengan $a \in A$ bersimpangan grafik atas f tepat satu (Bartle dan Sherbert, 2010).

Notasi $f: A \longrightarrow B$ sering digunakan untuk menunjukkan bahwa A ke B. Dikatakan juga bahwa f adalah pemetaan A ke B. Jika (a, b) adalah elemen pada f, dapat dituliskan $b = f(a)$ atau $a \mapsto b$ (Bartle dan Sherbert, 2010).

Definisi 2.2.3

Diberikan $f: A \to B$ adalah fungsi dari A ke B.

a. Fungsi f dikatakan injektif (satu-satu) jika $x_1 \neq x_2$, maka $f(x_1) \neq f(x_2)$. Jika f adalah fungsi injektif maka dikatakan bahwa f adalah injeksi.

b. Fungsi f dikatakan surjektif (onto) jika $f(A) = B$; yaitu, jika *range* $R(f) = B$. Jika f adalah fungsi surjekstif maka dikatakan bahwa f adalah surjeksi.

c. Jika f adalah injektif dan surjektif maka f adalah bijektif. Jika f adalah fungsi bijektif maka dikatakan bahwa f adalah bijeksi (Bartle dan Sherbert, 2010).

Contoh 2.2.4

Diberikan $A \coloneqq \{x \in \mathbb{R}\,; x \neq 1\}$ dan didefinisikan $f(x) \coloneqq \frac{2x}{x-1}$ untuk semua $x \in A$, untuk menunjukkan f adalah injektif, ambil x_1 dan x_2 di A dan diasumsikan bahwa $f(x_1) = f(x_2)$ sehingga

$$\frac{2x_1}{x_1 - 1} = \frac{2x_2}{x_2 - 1}$$

berarti bahwa $2x_1(x_2 - 1) = 2x_2(x_1 - 1)$ dan berakibat $x_1 = x_2$. Maka f adalah injektif.

Sedangkan untuk menentukan *range* dari f, dengan menyelesaikan persamaan $y = \frac{2x}{x-1}$ untuk x di y, didapatkan $x = \frac{y}{y-2}$, yang berarti untuk $y \neq 2$. Sehingga *range* dari f adalah himpunan $B \coloneqq \{y \in \mathbb{R}\,; y \neq 2\}$. Sehingga A ke B adalah bijektif.

2.3 Himpunan Terbatas dan Tak Terbatas

Definisi 2.3.1

a) Himpunan kosong $\emptyset$ dikatakan memiliki 0 elemen.

b) Jika $n \in \mathbb{N}$, himpunan S dikatakan memiliki n elemen jika ada bijeksi dari himpunan $\mathbb{N}_n \coloneqq \{1,2,\dots,n\}$ ke S.

c) Himpunan S dikatakan terbatas jika himpunan S kosong atau memiliki n elemen untuk $n \in \mathbb{N}$.

d) Himpunan S dikatakan tak terbatas jika himpunan S tidak terbatas (Bartle dan Sherbert, 2010).

Karena kebalikan dari bijeksi adalah bijeksi, sangat mudah melihat bahwa himpunan S memiliki n elemen jika dan hanya jika ada bijeksi dari S ke himpunan $\{1,2,\dots,n\}$. Juga, karena komposisi dua bijeksi adalah bijeksi, dapat diketahui bahwa suatu himpunan S_1 memiliki n elemen jika dan hanya jika ada bijeksi dari S_1 ke S_2 lain yang memiliki n elemen. Selanjutnya, suatu himpunan T_1 terbatas jika dan hanya jika ada bijeksi dari T_1 ke T_2 lain yang terbatas (Bartle dan Sherbert, 2010).

2.4 Nilai Mutlak

Definisi 2.4.1

Nilai mutlak bilangan riil a, dilambangkan dengan $|a|$, didefinisikan dengan:

$$|a| \coloneqq \begin{cases} a \;, & a > 0 \\ 0 \;, & a = 0 \\ -a \;, & a < 0 \end{cases}$$

Misalnya, $|5| = 5$ dan $|-8| = 8$. Dilihat dari definisi bahwa $|a| \geq 0$ untuk semua $a \in \mathbb{R}$, dan $|a| = 0$ jika dan hanya jika $a = 0$. Juga $|-a| = |a|$ untuk semua $a \in \mathbb{R}$.

Teorema 2.4.2

a. $|ab| = |a||b|$ untuk semua $a, b \in \mathbb{R}$.

b. $|a|^2 = a^2$ untuk semua $a \in \mathbb{R}$.

c. Jika $c \geq 0$, maka $|a| \leq c$ jika dan hanya jika $-c \leq |a| \leq c$.

d. $-|a| \leq a \leq |a|$ untuk semua $a \in \mathbb{R}$ (Bartle dan Sherbert, 2010).

Bukti.

a. Jika a atau b adalah 0, maka kedua sisinya sama dengan 0. Ada empat kondisi lain yang perlu dipertimbangkan. Jika $a > 0, b > 0$, maka $ab > 0$, sehingga $|ab| = ab = |a||b|$. Jika $a > 0, b < 0$ maka $ab < 0$, sehingga $|ab| = -ab = a(-b) = |a||b|$. Kondisi yang tersisa diperlakukan sama.

b. Ketika $a^2 \geq 0$, diperoleh $a^2 = |a^2| = |aa| = |a||a| = |a|^2$.

c. Jika $|a| \leq c$, maka dimiliki kedua sisi $a \leq c$ and $-a \leq c$, setara dengan $-c \leq a \leq c$. Sebaliknya, jika $-c \leq a \leq c$, maka dimiliki kedua sisi $a \leq c$ dan $-a \leq c$, sehingga $|a| \leq c$.

d. Ambil $c = |a|$ pada pembuktian (c).

2.5 Ketaksamaan Segitiga

Teorema 2.5.1

Jika $a, b \in \mathbb{R}$, maka $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Bukti.

Dari teorema harga mutlak diperoleh $-|a| \leq a \leq |a|$ dan $-|b| \leq b \leq |b|$. Pada penambahan ketaksamaan, diperoleh

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|.$$

Sehingga, dengan teorema harga mutlak diperoleh $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Hal ini dapat ditunjukkan bahwa persamaan dalam ketaksamaan segitiga jika dan hanya jika $ab > 0$, yang setara dengan mengatakan bahwa a dan b memiliki tanda yang sama.

2.6 Barisan

Barisan (*sequence*) pada himpunan S adalah suatu fungsi dengan domain $\mathbb{N}$ dan mempunyai range dalam S.

Definisi 2.6.1

Barisan bilangan riil (atau barisan di $\mathbb{R}$) adalah suatu fungsi yang didefinisikan pada himpunan bilangan asli $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ yang *range*-nya terdapat dalam himpunan bilangan riil $\mathbb{R}$ (Bartle dan Sherbert, 2010).

Dengan kata lain, barisan di $\mathbb{R}$ diberikan masing-masing bilangan asli $n = 1, 2, \dots$ bilangan riil yang ditentukan secara unik. Jika $X: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ adalah barisan, maka unsur ke n dari X ditunjukkan dengan simbol x_n tidak dinotasikan dengan $X(n)$. Barisan itu sendiri akan dinotasikan dengan

$$X, \qquad (x_n), \qquad (x_n : n \in \mathbb{N}).$$

Sering digunakan juga huruf-huruf yang lain seperti, $Y = (y_k)$, $Z = (z_i)$, dan seterusnya, untuk mendefinisikan barisan (Bartle dan Sherbert, 2010).

Penggunaan tanda kurung digunakan untuk membedakan antara barisan $(x_n : n \in \mathbb{N})$ dengan himpunan $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Contoh, barisan $X \coloneqq ((-1)^n : n \in \mathbb{N})$ memiliki unsur yang bergantian antara -1 dan 1, sedangkan himpunan $\{(-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$ sama dengan himpunan $\{-1, 1\}$, yang hanya memiliki dua elemen (Bartle dan Sherbert, 2010).

Barisan dapat didefinisikan dengan memberikan rumus untuk suku ke-n sebagai x_n, dituliskan secara berurutan unsur-unsur dalam barisan, sampai rumus untuk barisan tersebut nampak. Sebagai contoh, barisan bilangan bulat genap ditentukan dengan menuliskan

$$X \coloneqq \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots\right),$$

menyatakan rumus umumnya adalah

$$X \coloneqq \left(\frac{1}{2n} : n \in \mathbb{N}\right)$$

atau lebih sederhana $X = (\frac{1}{2n})$ (Bartle dan Sherbert, 2010).

Cara lain untuk mendefinisikan suatu barisan adalah dengan menetapkan unsur x_1 dan rumus untuk $x_{n+1} (n \geq 1)$ setelah x_n diketahui. Secara umum, dapat ditentukan x_1 dan diberikan rumus untuk mendapatkan x_{n+1} dari $x_1, x_2, \dots, x_n$. Barisan yang didefinisikan dengan cara ini dikatakan definisi induktif (atau rekursif) (Bartle dan Sherbert, 2010).

Contoh 2.6.2

a. Jika $b \in \mathbb{R}$, barisan $B \coloneqq (b, b, b, \dots)$, yang semua sukunya sama dengan b, disebut barisan konstan b. Dengan demikian barisan konstan 1 adalah barisan $(1,1,1, \dots)$, dan barisan konstan 0 adalah barisan $(0,0,0, \dots)$.

b. Jika $b \in \mathbb{R}$, maka $B \coloneqq (b^n)$ adalah barisan $B \coloneqq (b, b^2, b^3, \dots b^n, \dots)$. Khususnya jika $b = \frac{1}{2}$, maka didapatkan barisan

$$\left(\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots\right).$$

c. Barisan $(2n : n \in \mathbb{N})$ dari bilangan asli dapat didefinisikan secara induktif

$$x_1 \coloneqq 2, \quad x_{n+1} \coloneqq x_n + 2,$$

atau dengan definisi

$$y_1 := 2, \quad y_{n+1} := y_1 + y_n.$$

d. Barisan Fibonacci $F := (f_n)$ didefinisikan secara induktif

$$f_1 := 1,\ f_2 := 1,\ f_{n+1} := f_{n-1} + f_n (n \geq 2).$$

sepuluh suku pertama barisan Fibonacci adalah

$$F = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots).$$

2.7 Limit Barisan

Definisi 2.7.1

Barisan $X = (x_n)$ di $\mathbb{R}$ dikatakan konvergen ke $x \in \mathbb{R}$, atau x dikatakan limit (x_n), jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada bilangan asli $K(\varepsilon)$ sedemikian hingga untuk semua $n \geq K(\varepsilon)$, x_n memenuhi $|x_n - x| < \varepsilon$ (Bartle dan Sherbert, 2010).

Jika suatu barisan mempunyai limit, maka barisan tersebut dikatakan konvergen, jika tidak mempunyai limit maka barisan tersebut dikatakan barisan divergen (Bartle dan Sherbert, 2010).

Jika barisan memiliki limit x, dinotasikan dengan

$$\lim X = x \text{ atau } \lim(x_n) = x$$

simbol $x_n \to x$ digunakan untuk menyatakan x_n mendekati x sebagaimana $n \to \infty$ (Bartle dan Sherbert, 2010).

Teorema 2.7.2

Barisan di $\mathbb{R}$ dapat memiliki paling banyak satu limit (Bartle dan Sherbert, 2010).

Bukti.

Misalkan x' dan x'' keduanya adalah limit dari (x_n). Untuk masing-masing $\varepsilon > 0$ ada K' sedemikian hingga $|x_n - x'| < \varepsilon/2$ untuk semua $n \geq K'$, dan ada K'' sedemikian hingga $|x_n - x''| < \varepsilon/2$ untuk semua $n \geq K', n \geq K''$. Diberikan K menjadi lebih besar dari K' dan K''. Maka untuk $n \geq K$ dengan menggunakan ketaksamaan segitiga didapatkan

$$|x' - x''| = |x' - x_n + x_n - x''|$$

$$< |x' - x_n| + |x_n - x''| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Karena $\varepsilon > 0$ adalah sebarang bilangan positif, maka $x' - x'' = 0$.

Untuk $x \in \mathbb{R}$ dan $\varepsilon > 0$, maka ε persekitaran x adalah himpunan

$$V_n(x) \coloneqq \{u \in \mathbb{R} : |u - x| < \varepsilon.$$

Karena $u \in V_n(x)$ ekivalen dengan $|u - x| < \varepsilon$, definisi konvergen dari suatu barisan dapat dirumuskan dalam hal persekitaran.

Teorema 2.7.3

Diberikan $X = (x_n)$ adalah barisan bilangan riil dan diberikan $x \in \mathbb{R}$. Pernyataan berikut adalah ekivalen.

(a). X konvergen ke x

(b). Untuk setiap $\varepsilon > 0$, ada bilangan asli K sedemikian hingga untuk semua $n \geq K$, x_n memenuhi $|x_n - x| < \varepsilon$

(c). Untuk setiap $\varepsilon > 0$, ada bilangan asli K sedemikian hingga untuk semua $n \geq K$, x_n memenuhi $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$

(d). Untuk setiap ε persekitaran $V_\varepsilon(x)$ dari x, ada bilangan asli K sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$, x_n anggota $V_\varepsilon(x)$ (Bartle dan Sherbert, 2010).

Bukti.

Ekivalensi (a) dan (b) adalah definisi. Sedangkan ekivalensi (b), (c) dan (d) mengikuti implikasi berikut

$$|u-x|<\varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon<u-x<\varepsilon \Leftrightarrow x-\varepsilon<x<x+\varepsilon \Leftrightarrow u \in V_\varepsilon(x).$$

2.8 Ruang Metrik

Di dalam kalkulus dipelajari tentang fungsi-fungsi yang terdefinisi dalam garis bilangan riil $\mathbb{R}$. Di dalam bilangan riil $\mathbb{R}$ terdefinisi fungsi jarak, yaitu memasangkan $d(x,y)=|x-y|$ dengan setiap pasang titik $x,y \in \mathbb{R}$. Jadi $\mathbb{R}$ mempunyai fungsi jarak atau disebut dengan d, dengan jarak $d(x,y)=|x-y|$ untuk setiap pasangan titik $x,y \in \mathbb{R}$ (Kreyszig, 1989).

Definisi 2.8.1

Ruang metrik adalah pasangan (X,d), dengan X merupakan himpunan dan d merupakan metrik pada X (atau fungsi jarak pada X), yaitu fungsi yang didefinisikan pada $X \times X$ untuk semua $x,y,z \in X$ sehingga

(M1) $d(x,y) \geq 0$ (d adalah bernilai riil, terbatas dan tidak negatif)

(M2) $d(x,y)=0$ jika dan hanya jika $x=y$

(M3) $d(x,y)=d(y,x)$ (simetri)

(M4) $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$ (ketaksamaan segitiga) (Kreyszig, 1989).

Contoh 2.8.2

Pada himpunan bilangan riil $\mathbb{R}$ dilengkapi dengan fungsi

$$d(x,y)=|x-y|$$

Dengan menggunakan sifat-sifat fungsi nilai mutlak dapat dibuktikan bahwa d suatu metrik di $\mathbb{R}$.

Jawaban

(M1) *Positive Definite*

$$d(x,y) = |x - y| \geq 0$$

dan

$$d(x,x) = |x - x| = |0| = |00| = |0||0| = 0.0 = 0$$

(M2) $\Longrightarrow$ Jika $d(x,y) = 0$, maka $|x - y| = 0$ jadi $x - y = 0$ dan $x = y$.

$\Longleftarrow$ Jika $x = y$ maka $d(x,y) = |x - y| = |x - x| = |0| = 0$

(M3) *Symmetric*

$$d(x,y) = |x - y| = |(-1)(y - x)|$$

$$= |-1||y - x|$$

$$= 1|y - x|$$

$$= |y - x| = d(y,x)$$

(M4) *Triangle Inequality*

$$d(x,y) = |x - y| \leq |x - z| + |z - y|$$

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

Sehingga terbukti bahwa d metrik pada $\mathbb{R}$.

Contoh 2.8.3

Didefinisikan fungsi $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sebagai berikut

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

dengan $x = (x_1 - x_2)$ dan $y = (y_1 - y_2)$. Tunjukkan bahwa fungsi d adalah metrik

Jawaban

Akan ditunjukkan bahwa d adalah metrik

1. $d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \geq 0$

Jadi $d(x,y) \geq 0$

2. $\Rightarrow d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$

$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = 0$

$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = 0$

Kondisi ini berlaku jika dan hanya jika

$(x_1 - y_1)^2 = 0$ dan $(x_2 - y_2)^2 = 0$

Akibatnya

$(x_1 - y_1)^2 = 0$ dan $(x_2 - y_2)^2 = 0$

Sehingga, $x_1 = y_1$ dan $x_2 = y_2$

Jadi, jika $d(x,y) = 0$ maka $x = y$

$\Leftarrow$ Diketahui $x = y$ akan dibuktikan $d(x,y) = 0$

$x = y$ maka $x_1 = y_1$ dan $x_2 = y_2$

$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$

$= \sqrt{(0)^2 + (0)^2}$

$= 0$

Sehingga $d(x,y) = 0$

3. $d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$

$= \sqrt{({x_1}^2 - 2x_1y_1 + {y_1}^2) + ({x_2}^2 - 2x_2y_2 + {y_2}^2)}$

$= \sqrt{({y_1}^2 - 2x_1y_1 + {x_1}^2) + ({y_2}^2 - 2x_2y_2 + {x_2}^2)}$

$= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$

$= d(y,x)$

Jadi $d(x,y) = d(y,x)$

4. $d(x,y)+d(y,z)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}+\sqrt{(y_1-z_1)^2+(y_2-z_2)^2}$

$$\geq \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}+\sqrt{(y_1-z_1)^2+(y_2-z_2)^2}$$

$$\geq \sqrt{({x_1}^2-2x_1z_1+{z_1}^2)+({x_2}^2-2x_2z_2+{z_2}^2)}$$

$$=\sqrt{(x_1-z_1)^2+(x_2-z_2)^2}$$

$$=d(x,z)$$

Jadi $d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$

Berdasarkan penjelasan di atas maka terbukti bahwa d adalah metrik.

2.8.4 Konsepsi Topologi di Ruang Metrik

Gagasan dasar yang diperlukan untuk mengetahui konsep *limit* adalah persekitaran, dan didefiniskan dalam ruang metrik sebagai berikut.

Definisi 2.8.4.1 Persekitaran

Misalkan (X,d) adalah ruang metrik, maka untuk $\varepsilon > 0$, persekitaran ε pada titik $x_0 \in X$ merupakan himpunan

$$V_\varepsilon(x_0) \coloneqq \{x \in X : d(x_0,x) < \varepsilon\}.$$

Persekitaran x_0 adalah kumpulan himpunan U yang berisi persekitaran ε pada x_0 untuk $\varepsilon > 0$ (Bartle dan Sherbert, 2010).

Setiap gagasan yang didefinisikan dalam persekitaran dapat didefinisikan dan dibahas dalam konteks ruang metrik. Pertimbangan pertama adalah barisan konvergen (Bartle dan Sherbert, 2010).

Barisan dalam ruang metrik (X,d) adalah fungi $X:\mathbb{N} \longrightarrow X$ dengan domain $\mathbb{N}$ dan range di X, notasi yang biasa digunakan untuk barisan adalah $X=(x_n)$ tetapi sekarang $x_n \in X$ untuk semua $x \in X$. Jika harga multak diganti dengan metrik dalam definisi barisan konvergen, didapatkan gagasan barisan konvergen dalam ruang metrik (Bartle dan Sherbert, 2010).

Definisi 2.8.4.2 Konvergen

Diberikan (x_n) barisan di ruang metrik (X, d). Barisan (x_n) adalah konvergen ke x di X jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $K \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $x_n \in V_\varepsilon(x)$ untuk semua $n \in K$ (Bartle dan Sherbert, 2010).

Karena $x_n \in V_\varepsilon(x)$ jika dan hanya jika $d(x_n, x) < \varepsilon$, barisan (x_n) konvergen ke x jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada K sedemikian sehingga $d(x_n, x) < \varepsilon$ untuk semua $n \geq K$. Dengan kata lain, barisan (x_n) di (X, d) konvergen ke x jika dan hanya jika barisan bilangan riil $(d(x_n, x))$ konvergen ke 0 (Bartle dan Sherbert, 2010).

Definisi 2.8.4.3 Barisan Cauchy

Diberikan (X, d) adalah ruang metrik. Barisan (x_n) pada X dikatakan barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, ada $H \in \mathbb{N}$ maka $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ untuk semua $n, m \geq H$ (Bartle dan Sherbert, 2010).

Lemma 2.8.4.4

Barisan konvergen adalah Cauchy (Hutahaean, 1994).

Bukti

Misalkan $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ dan $\varepsilon > 0$ sebarang, maka ada H sehingga $d(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ jika $n > H$.

Jika $m > H$ dan $n > H$, maka ada $d(x_m, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$, $d(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Sehingga, $d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_0) + (x_0, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Berarti (x_n) adalah barisan Cauchy.

2.8.4.5 Lemma

Barisan konvergen di suatu ruang metrik mempunyai titik limit tunggal (Hutahaean, 1994).

Bukti.

Misalkan $\lim_{n\to\infty} x_n = p$, $\lim_{n\to\infty} x_n = q$, $p \neq q$, maka $d(p,q) > 0$.

Untuk $\varepsilon > 0$ sebarang ada H sehingga $d(x_n, p) < \frac{\varepsilon}{2}$, $d(x_n, q) < \frac{\varepsilon}{2}$ bila $n > n_0$.

$0 \leq d(p,q) \leq d(p,x_n) + d(x_n,q) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, sehingga $d(p,q) = 0$ ini bertentangan dengan $p \neq q$. Jadi $\lim_{n\to\infty} x_n$ adalah tunggal.

Definisi 2.8.4.6 Kelengkapan

Ruang metrik (X,d) dikatakan lengkap, jika setiap barisan Cauchy adalah konvergen (Hutahaean, 1994).

Contoh 2.8.4.7

1. Metrik $d(x,y) = |x-y|$ pada sistem bilangan riil $(\mathbb{R})$ adalah ruang metrik lengkap.
2. Metrik $d(x,y) = |x-y|$ pada sistem bilangan rasional $(\mathbb{Q})$ adalah ruang metrik tak lengkap.

Jawaban

1. Misalkan $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Ambil sebarang barisan Cauchy (x_n) di $\mathbb{R}$, maka untuk setiap $\varepsilon < 0$ terdapat $N \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku

$$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ambil $m > n \geq N$, maka berlaku $d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ dan $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ dengan menggunakan ketaksamaan segitiga, untuk $m > n \geq N$ berlaku

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Jadi barisan (x_n) adalah barisan Cauchy. selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $d(x,y)$ konvergen.

$d(x, y) = |x - y|$ mempunyai limit yaitu $\lim_{n\to\infty}|x - y| = 0$, maka

$$|x - y - 0| < \varepsilon.$$

Ambil $\varepsilon > 0$, yang berarti bahwa y juga merupakan limit dari $d(x, y) = |x - y|$.

Sehingga $\lim_{n\to\infty} x = y$ dapat dilihat bahwa $|x - y| < \varepsilon$ dan $\varepsilon > 0$. Maka dapat disimpulkan bahwa $d(x, y)$ konvergen.

Sehingga terbukti bahwa $d(x, y)$ adalah ruang metrik lengkap.

2. Misalkan barisan (x_n) dimana $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ dan $n = 1,2,3, \dots$ adalah barisan Cauchy. Maka menurut **Definisi 2.8.4.2** barisan (x_n) konvergen, yaitu konvergen ke $1 \in \mathbb{R}$, Jadi terbukti bahwa (X, d) adalah ruang metrik lengkap.
3. Ambil barisan Cauchy (x_n) di $(\mathbb{Q})$ dengan $x_n > 0$, ${x_n}^2 < 2$ dengan $n = 1,2, \dots$, maka $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

2.9 Ruang Metrik Quasi

Ruang metrik quasi merupakan perumuman dari ruang metrik. Hal ini dapat diketahui dari tidak adanya sifat simetri pada ruang metrik quasi, sedangkan sifat-sifat lainnya pada ruang metrik terdapat pada ruang metrik quasi.

Definisi 2.9.1

Diberikan X suatu himpunan tak kosong. Didefinisikan metrik quasi sebagai fungsi bernilai riil $d: X \times X \to \mathbb{R}$ yang memenuhi sifat-sifat

Untuk setiap $x, y, z \in X$, berlaku:

(QM1) $d_q(x, y) \geq 0$.

(QM2) $d_q(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$.

(QM3) $d_q(x, y) \leq d_q(x, z) + d_q(z, y)$

Jika d_q metrik quasi di X, maka pasangan (X, d_q) disebut ruang metrik quasi (Firdaus, dkk., 2013).

Contoh 2.9.2

Pada himpunan bilangan riil $\mathbb{R}$ dilengkapi dengan fungsi

$$d_q(x, y) = |x - y|,$$

Dengan menggunakan sifat-sifat fungsi nilai mutlak dapat dibuktikan bahwa d_q suatu metrik quasi di $\mathbb{R}$.

Jawaban

(QM1) *Positive Definite*

$$d_q(x, y) = |x - y| \geq 0$$

dan

$$d_q(x, x) = |x - x| = |0| = |00| = |0||0| = 0.0 = 0$$

(QM2) $\Longrightarrow$ jika $d_q(x, y) = 0$, maka $|x - y| = 0$ jadi $x - y = 0$ dan $x = y$.

$\Longleftarrow$ jika $x = y$ maka $d_q(x, y) = |x - y| = |x - x| = |0| = 0$

(QM3) *Triangle Inequality*

$$d_q(x, y) = |x - y| \leq |x - z| + |z - y|$$

$$d_q(x, y) \leq d_q(x, z) + d_q(z, y)$$

Sehingga terbukti bahwa d_q metrik quasi pada $\mathbb{R}$.

2.10 Kajian Keagamaan

Untuk dapat menelaah, mendalami, meneliti, mengetahui ciri sesuatu, dan membaca baik yang tertulis maupun tidak tertulis seperti konsep jarak dan lain sebagainya, sebagaimana pemaknaan *iqra'* maka dibutuhkan akal yang sempurna lagi sehat. Firman Allah dalam surat Ali 'Imran ayat 190:

إِنَّ فِي خَلْقِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَٱخْتِلَٰفِ ٱلَّيْلِ وَٱلنَّهَارِ لَأَيَٰتٍ لِّأُو۟لِى ٱلْأَلْبَٰبِ

"Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, dan silih bergantinya malam dan siang terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal."

Makna ayat di atas bahwa Allah berfirman: *"Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi"*, artinya pada ketinggian dan keluasan langit dan juga pada kerendahan bumi serta kepadatannya, dan juga tanda-tanda kekuasaan Allah yang terdapat pada ciptaan-Nya yang dapat dijangkau oleh indera manusia pada langit dan bumi, baik yang berupa bintang-bintang, komet, daratan, lautan, pegunungan, pepohonan, tumbh-tumbuhan, buah-buahan, binatang, barang tambang, serta berbagai macam warna dan aneka ragam makanan bebauan. *"dan silih bergantinya malam dan siang."* Yakni, silih bergantinya, susul menyusulnya, panjang dan pendeknya. Terkadang ada malam yang lebih panjang dan siang yang pendek. Lalu masing-masing menjadi seimbang. Setelah itu, salah satunya mengambil masa dari yang lainnya sehingga yang terjadi pendek menjadi lebih panjang, dan yang diambil menjadi pendek yang sebelumnya panjang. Semua itu merupakan ketetapan Allah yang Maha perkasa dan Masa mengetahui. Oleh karena itu, Allah berfirman: *"terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal (Ulul Albab)."* Yaitu mereka yang mempunyai akal yang sempurna lagi bersih, yang mengetahui hakikat banyak hal secara jelas dan nyata. Mereka bukan orang-orang tuli dan bisu yang tidak berakal (Abdullah, 1994).

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Sifat-sifat Ruang Metrik Quasi Parsial

3.1.1 Ruang Metrik Parsial

Definisi 3.1.1.1

Ruang metrik parsial adalah pasangan $(X, d_p : X \times X \to \mathbb{R})$ sehingga memenuhi:

(P1) $0 \leq d_p(x,x) \leq d_p(x,y)$ (non-negatif dan *small self-distances)*

(P2) Jika $d_p(x,x) = d_p(x,y) = d_p(y,y)$ maka $x = y$ (*indistancy implies equality*)

(P3) $d_p(x,y) = d_p(y,x)$ (*symmetric*)

(P4) $d_p(x,z) \leq d_p(x,y) + d_p(y,z) - d_p(y,y)$ (*triangularity*).

Contoh 3.1.1.2

Buktikan bahwa himpunan R^n dengan fungsi jarak d_p yang didefinisikan dengan:

$$d_p(x,y) = \max\{|x_i - y_i|, \quad 1 \leq i \leq n\}$$

adalah ruang metrik parsial.

Jawaban

(P1) $d_p(x,y) = \max\{|x_i - y_i|,\ 1 \leq i \leq n\} \geq 0$

$d_p(x,x) = \max\{|x_i - x_i|,\ 1 \leq i \leq n\} = 0$

Sehingga, $0 \leq d_p(x,x) \leq d_p(x,y)$

(P2) $d_p(x,x) = \max\{|x_i - x_i|,\ 1 \leq i \leq n\} = 0$

$d_p(y,y) = \max\{|y_i - y_i|,\ 1 \le i \le n\} = 0$

Jika $d_p(x,y) = 0$ maka $\max\{|x_i - y_i|,\ 1 \le i \le n\} = 0$.

Artinya $|x_i - y_i| = 0$ yang berakibat $x_i - y_i = 0$.

Karena $x - y = 0$ maka $x = y$

Sehingga, $d_p(x,x) = d_p(x,y) = d_p(y,y)$ maka $x = y$

(P3) $d_p(x,y) = \max\{|x_i - y_i|,\ 1 \le i \le n\}$

$= \max\{|(-1)(y_i - x_i)|,\ 1 \le i \le n\}$

$= \max\{|-1||y_i - x_i|,\ 1 \le i \le n\}$

$= \max\{1|y_i - x_i|,\ 1 \le i \le n\}$

$= \max\{|y_i - x_i|, 1 \le i \le n\}$

$= d_p(y,x)$

(P4) $d_p(x,z) = \max\{|x_i - z_i|,\ 1 \le i \le n\}$

$= \max\{|(x_i - z_i) + (y_i - y_i) - (y_i - y_i)|,\ 1 \le i \le n\}$

$\le \max\{|x_i - y_i| + |y_i - z_i| - |y_i - y_i|,\ 1 \le i \le n\}$

$= \max\{|x_i - y_i|,\ 1 \le i \le n\} + \max\{|y_i - z_i|,\ 1 \le i \le n\} -$

$\max\{|x_i - y_i|,\ 1 \le i \le n\}$

$= d_p(x,y) + d_p(x,z) - d_p(y,y)$

$d_p(x,z) \le d_p(x,y) + d_p(x,z) - d_p(y,y)$

Sehingga terbukti bahwa d_p metrik parsial pada R^n.

3.1.2 Ruang Metrik Quasi Parsial

Definisi 3.1.2.1

Metrik quasi parsial pada himpunan tak kosong X adalah fungsi $d_{qp}: X \times X \to \mathbb{R}^+$, yang memenuhi sifat-sifat:

(QPM1) Jika $d_{qp}(x,x) = d_{qp}(x,y) = d_{qp}(y,y)$ maka $x = y$.

(QPM2) $d_{qp}(x,x) \leq d_{qp}(x,y)$.

(QPM3) $d_{qp}(x,x) \leq d_{qp}(y,x)$

(QPM4) $d_{qp}(x,y) + d_{qp}(z,z) \leq d_{qp}(x,z) + d_{qp}(z,y)$ untuk semua $x,y,z \in X$.

Ruang metrik quasi parsial adalah pasangan (X, d_{qp}) sehingga X adalah himpunan tak kosong dan d_{qp} adalah metrik quasi parsial pada X.

Sebagai catatan, jika $d_{qp}(x,y) = d_{qp}(y,x)$, $\forall x,y \in X$ maka (X, d_{qp}) menjadi ruang metrik parsial. Untuk metrik parsial d_p pada X, diberikan fungsi $d: X \times X \to \mathbb{R}^+$ yang didefinisikan dengan:

$$d(x,y) = 2d_p(x,y) - d_p(x,x) - d_p(y,y)$$

adalah metrik pada X.

Diberikan qp adalah metrik quasi parsial pada himpunan X. Maka

$$d_{qp}(x,y) = qp(x,y) + qp(y,x) - qp(x,x) - qp(y,y)$$

adalah metrik pada X (Gupta dan Gautam, 2015).

Contoh 3.1.2.2

Diberikan $X = [0,1]$. Tunjukkan $d_{qp}(x,y) = |x-y| + x$ adalah ruang metrik quasi parsial.

Jawaban

(QPM1) Jika $d_{qp}(x,x) = d_{qp}(x,y) = d_{qp}(y,y)$ maka

$$d_{qp}(x,x) = d_{qp}(y,y)$$
$$|x-x| + x = |y-y| + y$$
$$x = y$$

(QPM2) $d_{qp}(x,x) = |x-x| + x$

$$= x$$

$d_{qp}(x,y) = |x-y| + x$

$x \leq |x-y| + x \geq 0$

Sehingga, $d_{qp}(x,x) \leq d_{qp}(x,y)$

(QPM3) $d_{qp}(x,x) \leq d_{qp}(y,x)$

$d_{qp}(x,x) = |x-x| + x$

$= x$

$d_{qp}(y,x) = |y-x| + y$

$x \leq |y-x| + y \geq 0$

Sehingga, $d_{qp}(x,x) \leq d_{qp}(y,x)$

(QPM4) $d_{qp}(x,y) + d_{qp}(z,z) = |x-y| + x + |z-z| + z$

$= |x-y| + x + z$

$= |x-z+z-y| + x + z$

$\leq |x-z| + |z-y| + x + z = |x-z| + x +$

$|z-y| + z$

Sehingga, terbukti $d_{qp}(x,y) + d_{qp}(z,z) \leq d_{qp}(x,z) + d_{qp}(z,y)$.

Lemma 3.1.2.3

Untuk metrik quasi parsial pq pada X

$$d_{qp}(x,y) = \frac{1}{2}[qp(x,y) + qp(y,x)] \quad x,y \in X$$

adalah metrik parsial pada X.

Bukti.

Pembuktian **Lemma 3.1.2.3** di atas adalah dengan melihat

$$d_{qp}(x,x) = qp(x,x), \qquad \forall x \in X.$$

Jika $d_{qp}(x,y) = \frac{1}{2}[qp(x,y) + qp(y,x)],\ x,y \in X$ adalah metrik quasi parsial qp pada X maka memenuhi sifat-sifat metrik quasi parsial. Sehingga akan dibuktikan bahwa (X, pq) adalah ruang metrik parsial pada X.

(P1) $d_{qp}(x,x) = \frac{1}{2}[qp(x,x) + qp(x,x)],\ x \in X$

$$= \frac{1}{2}[2qp(x,x)],\ x \in X$$

$$= qp(x,x) \geq 0,\ x \in X$$

$$d_{qp}(x,y) = \frac{1}{2}[qp(x,y) + qp(y,x)] \geq qp(x,x) \geq 0,\ x,y \in X$$

Sehingga (P1) terpenuhi.

(P2) Berdasarkan definisi ruang metrik quasi parsial (QPM1) maka

$$d_{qp}(x,x) = d_{qp}(x,y) = d_{qp}(y,y) \Longrightarrow x = y.$$

(P3) Karena $x = y$ maka $d_{qp}(x,y) = d_{qp}(y,x)$.

(P4) Berdasarkan definisi ruang metrik quasi parsial (QPM4)

$$d_{qp}(x,y) + d_{qp}(z,z) \leq d_{qp}(x,z) + d_{qp}(z,y)$$

maka

$$d_{qp}(x,y) \leq d_{qp}(x,z) + d_{qp}(z,y) - d_{qp}(z,z).$$

Dalil 3.1.2.4

Diberikan (X,p) adalah ruang metrik parsial. Himpunan $d_p(x,y) = p(x,y) - p(x,x)$ untuk $x,y \in X$. Maka (X, d_p) adalah ruang metrik quasi parsial.

Bukti.

(i) Jika $x = y, \forall x,y \in X \ \Rightarrow 0 \leq d_p(x,x) = d_p(x,y) = d_p(y,y)$

(ii) $0 \leq d_p(x,y) - d_p(x,x)$

$d_p(x,x) \leq d_p(x,y)$

(iii) Dari (i) maka $d_p(x,y) = d_p(y,x)$ sehingga

$d_p(x,x) \leq d_p(y,x)$

(iv) $d_p(x,z) \leq d_p(x,y) + d_p(y,z) - d_p(y,y)$

$d_p(x,z) + d_p(y,y) \leq d_p(x,y) + d_p(y,z)$

Maka terbukti (X, d_p) adalah ruang metrik quasi parsial.

Sebenarnya, dalil di atas memberikan penjelasan bahwa (X, q_p) adalah ruang metrik quasi berdasarkan fakta bahwa $q_p(x,x) = p(x,x) - p(x,x) = 0$.

Contoh 3.1.2.5

Pasangan $(\mathbb{R}^+, p)$ dengan $p(x,y) = \max\{x,y\}$ adalah ruang metrik parsial. Dalam kasus ini $d_p(x,y) = |x - y|$. Maka $(\mathbb{R}^+, d_p)$ adalah ruang metrik quasi parsial.

Jawaban

Berdasarkan definisi ruang metrik parsial, maka

(QPM1) jika $d_p(x,x) = d_p(x,y) = d_p(y,y)$ maka

$$|x - x| = |x - y| = |y - y|$$

$$|0| = |x - y| = |0|$$

$$0 = x - y = 0$$

$$x = y.$$

(QPM2) $d_p(x,x) \leq d_p(x,y)$

$d_p(x,x) = |x - x| = 0$

$d_p(x,y) = |x - y| \geq 0$

Maka terbukti $d_p(x,x) \leq d_p(x,y)$

(QPM3) $d_p(x,x) \leq d_p(y,x)$

$d_p(x,x) = |x - x| = 0$

$d_p(x,y) = |y - x| \geq 0$

Sehingga terbukti $d_p(x,x) \leq d_p(y,x)$

(QPM4) $d_p(x,y) + d_p(z,z) = |x-y| + |z-z|$

$= |x-y|$

$= |x-z+z-y|$

$\leq |x-z| + |z-y|$

Maka terbukti bahwa $d_p(x,y) + d_p(z,z) \leq d_p(x,z) + d_p(z,y)$.

Sehingga terbukti bahwa $(\mathbb{R}^+, d_p)$ adalah ruang metrik quasi parsial.

Definisi 3.1.2.6

Diberikan (X, qp) ruang metrik quasi parsial. Maka

(i) Barisan $\{x_n\} \subset X$ konvergen ke $x \in X$ jika dan hanya jika

$$qp(x,x) = \lim_{n\to\infty} qp(x,x_n) = \lim_{n\to\infty} qp(x_n,x)$$

(ii) Barisan $\{x_n\} \subset X$ disebut barisan Cauchy jika dan hanya jika $\lim_{n,m\to\infty} qp(x_n,x_m)$ dan $\lim_{n,m\to\infty} qp(x_m,x_n)$ ada (dan terbatas)

(iii) Ruang metrik quasi parsial (X,qp) disebut lengkap jika setiap barisan Cauchy $\{x_n\} \subset X$ konvergen ke titik $x \in X$ sehingga $qp(x,x) = \lim_{n,m\to\infty} qp(x_m,x_n) = \lim_{n,m\to\infty} qp(x_n,x_m)$.

Contoh 3.1.2.7

(i) Diberikan himpunan tak kosong $X = [0,1]$ dan ruang metrik quasi parsial (X, qp) dengan definisi pemetaan $qp = X \times X \to [0,1)$ yaitu

$$qp(x,y) = |x-y| + |x|$$

untuk setiap $x, y \in X$. Jika barisan $\{x_n\} \subset X$ didefinisikan dengan

$$x_n = \frac{n}{n^2+1}$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka barisan $\{x_n\}$ konvergen ke $0 \in \mathbb{R}$

(ii) Diberikan himpunan tak kosong $X = [0, 1]$ dan ruang metrik quasi parsial (X, qp) dengan definisi pemetaan $qp: X \times X \to [0, \infty)$ yaitu:

$$qp(x, y) = |x - y| + |x|$$

untuk setiap $x, y \in X$. Jika barisan $\{x_n\} \subset X$ didefinisikan dengan

$$x_n = \frac{1}{n}$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka barisan $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy.

(iii) Diberikan himpunan tak kosong $X = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ dan pemetaan $d: X \times X \to [0,\ \infty)$ yang didefinisikan dengan

$$qp(x, y) = |x - y| + |x|$$

untuk setiap $x, y \in X$. Pasangan (X, qp) adalah ruang metrik quasi parsial lengkap.

Jawaban

(i) Karena $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$ maka terbukti bahwa x_n konvergen ke 0

(ii) Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, maka terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Oleh karena itu untuk setiap $n, m \geq n_0$ dengan asumsi $m > n$ diperoleh

$$\begin{aligned} qp(x_n, x_m) &= |x_n - x_m| + |x_n| \\ &= \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| + \left|\frac{1}{n}\right| \\ &= \left|\frac{m-n}{nm}\right| + \left|\frac{1}{n}\right| \\ &= \frac{m-n}{nm} + \frac{1}{n} < \frac{m}{nm} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} \leq 2\frac{1}{n_0} < 2\frac{\varepsilon}{2} = \text{å} \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy.

(iii) Ambil sebarang barisan Cauchy $\{x_n\} \subset X$, karena $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy berarti untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n, m \geq n_0$ berlaku

$$qp(x_n, x_m) < \varepsilon \Leftrightarrow |x_n - x_m| + |x_n| < \varepsilon$$

Karena $|x_n - x_m| + |x_n| < \varepsilon$ maka $|x_n - x_m| < \varepsilon$, dengan kata lain $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy di $\mathbb{R}$. Karena $\mathbb{R}$ mempunyai sifat lengkap maka barisan $\{x_n\}$ konvergen, misalkan barisan $\{x_n\}$ konvergen ke x. Jelas $x \in X$, karena barisan $\{x_n\} \subset X$ dan X merupakan himpunan tertutup.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa barisan $\{x_n\}$ konvergen ke $x \in X$, dengan kata lain akan ditunjukkan bahwa $\lim_{n\to\infty} qp(x_n, x) = \lim_{n\to\infty} qp(x, x_n) = 0$.

Karena $\{x_n\} \subset X$ merupakan barisan Cauchy, maka diperoleh bahwa

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} qp(x_n, x) &= \lim_{n\to\infty} |x_n - x| + |x_n| \\
&= \lim_{n\to\infty} |x_n - \lim_{m\to\infty} x_m| + |x_n| \\
&= \lim_{n,m\to\infty} qp(x_n, x_m) \\
&= 0
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} qp(x, x_n) &= \lim_{n\to\infty} |x - x_n| + |x| \\
&= \lim_{n\to\infty} |\lim_{m\to\infty} x_m - x_n| + \lim_{m\to\infty} |x_m| \\
&= \lim_{n,m\to\infty} qp(x_m, x_n) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Sehingga terbukti bahwa (X, qp) adalah ruang metrik quasi parsial lengkap.

Lemma 3.1.8

Diberikan (X, qp) adalah ruang metrik quasi parsial, diberikan (X, p) adalah ruang metrik parsial (yang sesuai), dan diberikan (X, d) adalah ruang metrik (yang sesuai). Beberapa pernyataan berikut ekivalen

a. Barisan $\{x_n\}$ adalah Cauchy di (X, qp) dan (X, qp) adalah lengkap.

b. Barisan $\{x_n\}$ adalah Cauchy di (X, p) dan (X, p) adalah lengkap.

c. Barisan $\{x_n\}$ adalah Cauchy di (X, d) dan (X, d) adalah lengkap.

Lebih lanjut,

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0 \Leftrightarrow p(x, x) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, x) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m)$$

$$\Leftrightarrow qp(x, x) = \lim_{n\to\infty} qp(x, x_n) = \lim_{n,m\to\infty} qp(x_n, x_m)$$

$$= \lim_{n\to\infty} qp(x_n, x) = \lim_{n,m\to\infty} qp(x_m, x_n)$$

Bukti.

Akan dibuktikan a dan b ekivalen

Diberikan $\varepsilon > 0$ ada K sedemikian hingga untuk setiap $n, m \geq K$, x_n dan x_m memenuhi $qp(x_n, x_m) < \varepsilon$. Sehingga

$$\lim_{n,m\to\infty} qp(x_m, x_n) = \lim_{n,m\to\infty} qp(x_n, x_m) = \lim_{n\to\infty} qp(x_n, x) = qp(x, x)$$

Berdasarkan **Lemma 3.1.2.3** maka $qp(x, x) = p(x, x)$. Sehingga

$$qp(x, x) = p(x, x) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, x) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m).$$

Jadi terbukti bahwa a dan b ekivalen. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa b dan c ekivalen.

Diberikan $\varepsilon > 0$ ada K sedemikian hingga untuk setiap $n, m \geq K$, x_n dan x_m memenuhi $p(x_n, x_m) < \varepsilon$. Sehingga

$$\lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, x) = p(x, x)$$

berdasarkan definisi

$d(x,y) = 2d_p(x,y) - d_p(x,x) - d_p(y,y)$ maka

$d(x_n,x) = 2p(x_n,x) - p(x_n,x_n) - p(x,x)$

$d(x_n,x) = p(x_n,x) + p(x_n,x) - p(x_n,x_n) - p(x,x)$

$d(x_n,x) = p(x_n,x) + p(x_n,x) - p(x_n,x_n)$

$d(x_n,x) = p(x_n,x) + p(x_n,x_n) - p(x_n,x_n)$ (dari sifat P2)

$d(x_n,x) = p(x_n,x)$

$d(x_n,x) = p(x,x)$

$d(x_n,x) = 0.$

Berdasarkan definisi ruang metrik lengkap sehingga $\lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0.$

Jadi terbukti bahwa b dan c ekivalen. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa a dan c adalah ekivalen

Diberikan $\varepsilon > 0$ ada K sedemikian hingga untuk setiap $n,m \geq K,\ x_n$ dan x_m memenuhi $d(x_n,x) <$ å. Sehingga

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0$$

berdasarkan definisi

$d_{qp}(x,y) = qp(x,y) + qp(y,x) - qp(x,x) - qp(y,y)$ maka

$d_{qp}(x_n,x) = qp(x_n,x) + qp(x,x_n) - qp(x_n,x_n) - qp(x,x)$

$0 = qp(x_n,x) + qp(x,x_n) - qp(x_n,x_n) - qp(x,x)$

$qp(x_n,x_n) + qp(x,x) = qp(x_n,x) + qp(x,x_n)$

berdasarkan (QPM1) maka

$qp(x_n,x) + qp(x_n,x) = qp(x_n,x) + qp(x_n,x)$

$qp(x_n,x) = qp(x_n,x)$

Dikembalikan kepada (QPM1) maka

$qp(x,x) = qp(x_n,x)$

$qp(x,x) = \lim_{n\to\infty} qp(x_n,x)$

Sehingga terbukti bahwa a dan c ekivalen.

Lemma 3.1.9

Diberikan (X, qp) adalah ruang metrik quasi parsial. Maka memenuhi:

a. Jika $qp(x, y) = 0$ maka $x = y$

b. Jika $x \neq y$, maka $qp(x, y) > 0$ dan $qp(y, x) > 0$

Bukti

a. Misalkan $qp(x, y) = 0$, dengan definisi ruang metrik quasi parsial didapatkan $qp(x, x) \leq qp(x, y) = 0$ dan $qp(y, y) \leq qp(x, y) = 0$.

   Dengan analogi, $qp(x, x) \leq qp(y, x) = 0$ dan $qp(y, y) \leq qp(y, x) = 0$.

   Sehingga $qp(x, x) = qp(x, y) = qp(y, y) = 0$ dan $qp(x, x) = qp(y, x) = qp(y, y) = 0$.

b. Misalkan $x \neq y$. Dengan definisi, $qp(x, y) \geq 0$ dan $qp(y, x) \geq 0$ untuk semua $x, y \in X$. Diasumsikan bahwa $qp(x, y) = 0$, dengan pembuktian poin "a" didapatkan $x = y$, hal ini merupakan kontradiksi. Sehingga, $qp(x, y) > 0, x \neq y$. Dengan analogi, $qp(y, x) > 0, x \neq y$.

3.2 Kajian Keagamaan

Pembahasan tentang sifat-sifat ruang metrik quasi parsial di atas merupakan hasil generalisasi dari ruang metrik quasi dan ruang metrik parsial. Hal ini dilakukan dengan proses *iqra'*. Bahkan, wahyu pertama yang diterima Nabi Muhammad mengandung indikasi pentingnya proses penyelidikan. Subyek yang dimaksudkan dalam al-Alaq ayat 1 sampai 5 adalah manusi, karena potensi ke arah itu hnaya diberikan oleh Allah kepada manusia. Pemberian potensi ini tentunya tidak terlepas dari fungsi dan tanggung jawab manusia sebagai *khalifah*

Allah di bumi. Sedangkan bumi dan langin beserta isinya telah ditundukkan bagi kepentingan manusia. Firman Allah dalam surat al-Jatsiyah ayat 13:

وَسَخَّرَ لَكُم مَّا فِي ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَمَا فِي ٱلْأَرْضِ جَمِيعًا مِّنْهُ ۚ إِنَّ فِي ذَٰلِكَ لَأَيَٰتٍ لِّقَوْمٍ يَتَفَكَّرُونَ ١٣

"dan Dia telah menundukkan untukmu apa yang di langit dan apa yang di bumi semuanya, (sebagai rahmat) daripada-Nya. Sesungguhnya pada yang demikian itu benar-benar terdapat tanda-tanda (kekuasaan Allah) bagi kaum yang berfikir."

Kata *sakhkhara* (menundukkan pada ayat di atas atau kata yang semakna dengan itu banyak ditemukan di dalam al-Quran yang menegaskan bahwa Allah menundukkan semua ciptaan-Nya sesuai dengan peraturan-peraturan Allah, sehingga manusia dapat mengambil manfaat sepanjang manusia mau menggunakan akal dan pikiran serta mengikuti langkah dan prosedur yang sesuai dengan peraturan tersebut.

Pandangan al-Quran tentang keilmuan non agama seperti ruang metrik quasi parsial dapat ditelusuri dari pandangan al-Quran tentang ilmu. Al-Quran meletakkan posisi ilmu pada tingkatan yang hampir sama dengan iman yang terdapat pada surat al-Mujadalah ayat 11:

يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوٓاْ إِذَا قِيلَ لَكُمْ تَفَسَّحُواْ فِي ٱلْمَجَٰلِسِ فَٱفْسَحُواْ يَفْسَحِ ٱللَّهُ لَكُمْ ۖ وَإِذَا قِيلَ ٱنشُزُواْ فَٱنشُزُواْ يَرْفَعِ ٱللَّهُ ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ مِنكُمْ وَٱلَّذِينَ أُوتُواْ ٱلْعِلْمَ دَرَجَٰتٍ ۚ وَٱللَّهُ بِمَا تَعْمَلُونَ خَبِيرٌ ١١

"Hai orang-orang beriman apabila kamu dikatakan kepadamu: "Berlapang-lapanglah dalam majlis", Maka lapangkanlah niscaya Allah akan memberi kelapangan untukmu. dan apabila dikatakan: "Berdirilah kamu", Maka berdirilah, niscaya Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat. dan Allah Maha mengetahui apa yang kamu kerjakan."

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari pembahasan pada bab sebelumnya, dapat ditarik kesimpulan bahwa ruang metrik quasi parsial merupakan gabungan dari ruang metrik quasi dan ruang metrik parsial. Sifat-sifat ruang metrik quasi parsial sebagai berikut :

a. Metrik quasi parsial pq pada X

$$d_{qp}(x,y) = \frac{1}{2}[qp(x,y) + qp(y,x)] \quad x,y \in X$$

adalah metrik parsial pada X.

b. Diberikan (X,p) adalah ruang metrik parsial. Himpunan $d_p(x,y) = p(x,y) - p(x,x)$ untuk $x,y \in X$. Maka (X,d_p) adalah ruang metrik quasi parsial.

c. Diberikan (X,qp) adalah ruang metrik quasi parsial, diberikan (X,p) adalah ruang metrik parsial (yang sesuai), dan diberikan (X,d) adalah ruang metrik (yang sesuai). Beberapa pernyataan berikut ekivalen

1. Barisan $\{x_n\}$ adalah Cauchy di (X,qp) dan (X,qp) adalah lengkap.
2. Barisan $\{x_n\}$ adalah Cauchy di (X,p) dan (X,p) adalah lengkap.
3. Barisan $\{x_n\}$ adalah Cauchy di (X,d) dan (X,d) adalah lengkap.

Lebih lanjut,

$$\lim_{n\to\infty} d(x,x_n) = 0 \Leftrightarrow p(x,x) = \lim_{n\to\infty} p(x,x_n) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n,x_m)$$

$$\Leftrightarrow qp(x,x) = \lim_{n\to\infty} qp(x,x_n) = \lim_{n,m\to\infty} qp(x_n,x_m)$$

$$= \lim_{n\to\infty} qp(x_n,x) = \lim_{n,m\to\infty} qp(x_m,x_n)$$

4.2 Saran

Pada skripsi ini, peneliti mengkaji tentang sifat-sifat ruang metrik quasi parsial saja. Oleh karena itu peneliti memberikan saran kepada pembaca yang tertarik pada permasalahan ini supaya mengembangkannya pada konsep titik tetap pada ruang metrik quasi parsial.

DAFTAR RUJUKAN

Abdullah. 1994. *Tafsir Ibnu Katsir*. Bogor: Pustaka Imam Syafi'i.

Bahtiar, A.R. 2012. *Konsep Dasar Ruang Metrik Cone*. *Skripsi* Tidak Diterbitkan. Yogyakarta: Jurusan Matematika F. Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga.

Bartle, R.G. dan Sherbert, D.R. 2010. *Introduction to Real Analysis*, Fourth Edition. New York: John Wiley and Sons.

Deda, Y.N. 2016. *Buku Ajar Pengantar Analisis Variabel Real*. Yogyakarta: Penerbit Deepublish.

Firdaus, F., Sunarsini, dan Sadjidon. 2013. Konvergensi dan Kelengkapan pada Ruang Quasi Metrik $\mathbb{R}^2$. *Jurnal Sains dan Seni POMITS*, 2, (1): 1-6.

Gupta, A. dan Gautam, P. 2015. Quasi-Parsial *b*-Metric Spaces and Some Related Fixed Point Theorems. *Fixed Point Theory and Applications*, 20015, (18): 1-12.

Hutahaean, E. 1994. *Fungsi Riil*. Bandung: Penerbit ITB.

Kreyzig, E. 1989. *Introductory Functional Analysis with Application.* New York: John Wiley and Son.

Matthews, S.G. 1994. Partial Metric Topology. *Papers on General Topology and Application*, 728: 1-16.

Shihab, Q. 1996. *Wawasan al-Quran.* Bandung: Mizan.

RIWAYAT HIDUP

Muhammad Jazuly, lahir di Kota Semarang pada tanggal 13 Juni 1993, biasa dipanggil Jay. Anak kedua dari tiga bersaudara dari bapak Abdul Jawad Ridwan dan ibu Endang Muji Rahayu.

Pendidikan dasarnya ditempuh di SDN 01-02 Rejomulyo dan lulus pada tahun 2006, setelah itu melanjutkan ke Madrasah Tsanawiyah (MTs) Syaroful Millah dan lulus pada tahun 2009. Kemudian melanjutkan pendidikan ke Sekolah Menengah Pertama (SMA) Ibrahimy Sukorejo Situbondo dan lulus tahun 2011. Selanjutnya, pada tahun 2011 menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil Jurusan Matematika.

Selama menjadi mahasiswa, penulis berperan aktif pada organisasi intra kampus dalam rangka mengembangkan kompetensi akademiknya. Penulis menjadi anggota Himpunan Mahasiswa Jurusan (HMJ) Matematika pada tahun 2012.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Muhammad Jazuly
NIM : 11610071
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Sifat-sifat Ruang Metrik Quasi Parsial
Pembimbing I : Hairur Rahman, M.Si
Pembimbing II : Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	03 Maret 2017	Konsultasi Bab I	1.
2.	06 April 2017	Konsultasi Bab II	2.
3.	20 Oktober 2017	ACC Bab I & Bab II	3.
4.	30 Oktober 2017	Konsultasi Kajian Keagamaan	4.
5.	08 November 2017	Konsultasi Kajian Keagamaan	5.
6.	17 November 2017	Konsultasi Bab III	6.
7.	22 Desember 2017	Konsultasi Bab III	7.
8.	19 Januari 2018	ACC Bab III	8.
9.	26 Januari 2018	Konsultasi Bab IV	9.
10.	02 Februari 2018	ACC Bab IV	10.
11.	02 Maret 2018	Konsultasi Abstrak	11.
12.	05 Maret 2018	ACC Abstrak	12.
13.	14 Maret 2018	ACC Kajian Keagamaan	13.
14.	15 Maret 2018	ACC Keseluruhan	14.

Malang, 15 Maret 2018
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001