SPEKTRUM *ADJACENCY*, LAPLACE, *SIGNLESS* LAPLACE, DAN *DETOUR* GRAF SUBGRUP DAN KOMPLEMEN GRAF SUBGRUP DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

OLEH
DINDA AKROMATUL AKHADIYAH
NIM. 14610071

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018

SPEKTRUM *ADJACENCY*, LAPLACE, *SIGNLESS* LAPLACE, DAN *DETOUR* GRAF SUBGRUP DAN KOMPLEMEN GRAF SUBGRUP DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Dinda Akromatul Akhadiyah
NIM. 14610071

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018

SPEKTRUM *ADJACENCY*, LAPLACE, *SIGNLESS* LAPLACE, DAN *DETOUR* GRAF SUBGRUP DAN KOMPLEMEN GRAF SUBGRUP DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Oleh
Dinda Akromatul Akhadiyah
NIM. 14610071

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 06 Juli 2018

Pembimbing I,

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

Pembimbing II,

Mohammad Jamhuri, M.Si
NIP. 19810502 200501 1 004

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

SPEKTRUM *ADJACENCY*, LAPLACE, *SIGNLESS* LAPLACE, DAN *DETOUR* GRAF SUBGRUP DAN KOMPLEMEN GRAF SUBGRUP DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Oleh
Dinda Akromatul Akhadiyah
NIM. 14610071

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 18 Juli 2018

Penguji Utama	: Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd	....
Ketua Penguji	: H. Wahyu H. Irawan, M.Pd	....
Sekretaris Penguji	: Dr. Abdussakir, M.Pd	....
Anggota Penguji	: Mohammad Jamhuri, M.Si	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Dinda Akromatul Akhadiyah
NIM	: 14610071
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Spektrum *Adjacency*, Laplace, *Signless* Laplace, dan *Detour* Graf Subgrup dan Komplemen Graf Subgrup dari Grup Dihedral

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 06 Juli 2018
Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL
7FAB5AFF199942073
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Dinda Akromatul Akhadiyah
NIM. 14610071

MOTO

الحمدلله رب العالمين

"Segala puji bagi Allah, Tuhan semesta alam"

Bersyukur adalah cara terbaik agar merasa cukup, bahkan ketika berkekurangan.

Jangan berharap lebih sebelum berusaha.

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda Solikhin, ibunda Mufarroha, serta adik tersayang Rosy Fadilatul Ilmi.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt. atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Abdul Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan berbagi pengalaman yang berharga kepada penulis.
5. Mohammad Jamhuri, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan, ilmu, dan motivasi kepada penulis.

6. Seluruh dosen Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah ikhlas dan sabar dalam mendidik, membimbing, dan memberikan ilmu kepada penulis.
7. Ayah dan Ibu yang selalu memberikan doa, semangat, nasihat, dan motivasi kepada penulis.
8. Teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2014, khususnya kelas C yang telah berjuang bersama untuk meraih mimpi.
9. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan bagi pembaca.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, Juli 2018

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Akhadiyah, Dinda Akromatul. 2018. **Spektrum *Adjacency*, Laplace, *Signless* Laplace, dan *Detour* Graf Subgrup dan Komplemen Graf Subgrup dari Grup Dihedral**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Abdussakir, M.Pd. (II) Mohammad Jamhuri, M.Si.

Kata Kunci: Spektrum, spektrum *adjacency*, spektrum Laplace, spektrum *signless* Laplace, spektrum *detour*, graf subgrup, komplemen graf subgrup, grup dihedral.

Penelitian ini membahas pola umum spektrum *adjacency*, Laplace, *signless* Laplace, dan *detour* dari graf subgrup dan komplemen graf subgrup $\langle r^2 \rangle$ dari grup dihedral D_{2n}. Spektrum diperoleh dengan terlebih dahulu menentukan subgrup normal dari suatu grup dihedral (D_{2n}) yang dibangun oleh r^2 sehingga diperoleh beberapa kasus n genap saja dan $n \geq 4$. Kemudian mencari nilai Eigen dan vektor Eigen. Sehingga diperoleh hasil penelitian sebagai berikut:

1. Pada graf subgrup hanya didapatkan spektrum *adjacency*, Laplace dan *signless* Laplace. Spektrum *detour* tidak dapat ditentukan karena graf yang diperoleh adalah graf tidak terhubung.
   a. Pola umum spektrum matriks *adjacency* $\boldsymbol{A}\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})\right)$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah
   $$\boldsymbol{spec_A}\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})\right) = \begin{bmatrix} \left(\frac{n-2}{2}\right) & -1 \\ 4 & 2(n-2) \end{bmatrix}$$
   b. Pola umum spektrum matriks Laplace $\boldsymbol{L}\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})\right)$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah
   $$\boldsymbol{spec_L}\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})\right) = \begin{bmatrix} \frac{n}{2} & 0 \\ 2(n-2) & 4 \end{bmatrix}$$
   c. Pola umum spektrum matriks *signless* Laplace $\boldsymbol{L}^+\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})\right)$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah
   $$\boldsymbol{spec_{L^+}}\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})\right) = \begin{bmatrix} (n-2) & \left(\frac{n-4}{2}\right) \\ 4 & 2(n-2) \end{bmatrix}$$
2. Pada komplemen graf subgrup didapatkan spektrum *adjacency*, Laplace, *signless* Laplace dan *detour* karena graf yang diperoleh adalah graf terhubung.
   a. Pola umum spektrum matriks *adjacency* $\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})}\right)$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$\boldsymbol{spec_A}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right) = \begin{bmatrix} \frac{3n}{2} & 0 & \frac{n}{2} \\ 1 & 2(n-2) & 3 \end{bmatrix}$$

b. Pola umum spektrum matriks Laplace $\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$\boldsymbol{spec_L}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right) = \begin{bmatrix} 2n & \frac{3n}{2} & 0 \\ 3 & 2(n-2) & 1 \end{bmatrix}$$

c. Pola umum spektrum matriks *signless* Laplace $\boldsymbol{L^+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$\boldsymbol{spec_{L^+}}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right) = \begin{bmatrix} 3n & \frac{3n}{2} & n \\ 1 & 2(n-2) & 3 \end{bmatrix}$$

d. Pola umum spektrum matriks *detour* $\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$\boldsymbol{spec_{DD}}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right) = \begin{bmatrix} (2n-1)^2 & -(2n-1) \\ 1 & 2n-1 \end{bmatrix}$$

ABSTRACT

Akhadiyah, Dinda Akromatul. 2018. **Adjacency, Laplacian, Signless Laplacian, and Detour Spectrum of Subgroup Graph of Dihedral Group and Their Complements**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Dr. Abdussakir, M.Pd. (II) Mohammad Jamhuri, M.Si.

Keyword: Spectrum, adjacency spectrum, Laplacian spectrum, signless Laplacian spectrum, detour spectrum, subgroup graph, complement of subgroup graph, dihedral group.

This research discusses adjacency, Laplacian, signless Laplacian, and detour spectrum from subgroup graph and complement of subgroup graph $\langle r^2 \rangle$ of dihedral group D_{2n}. Firstly, the spectrum is obtained by determining the normal subgroups of a dihedral group (D_{2n}) which is constructed by r^2. It generates some cases of n is even and $n \geq 4$. Secondly, calculating the Eigen value and Eigen vector. The results of this research are as follows:

1. On the subgroup graph, it is found that there are the adjacency, Laplacian, and signless Laplacian spectrum. The detour spectrum can not be found because the graph is non-connected.
   a. The adjacency matrix spectrum $\boldsymbol{A}\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})\right)$ for n is even and $n \geq 4$ is

   $$\boldsymbol{spec_A}\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})\right) = \begin{bmatrix} \left(\frac{n-2}{2}\right) & -1 \\ 4 & 2(n-2) \end{bmatrix}$$

   b. The Laplacian matrix spectrum $\boldsymbol{L}\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})\right)$ for n is even and $n \geq 4$ is

   $$\boldsymbol{spec_L}\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})\right) = \begin{bmatrix} \frac{n}{2} & 0 \\ 2(n-2) & 4 \end{bmatrix}$$

   c. The signless Laplacian matrix spectrum $\boldsymbol{L}^+\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})\right)$ for n is even and $n \geq 4$ is

   $$\boldsymbol{spec_{L^+}}\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})\right) = \begin{bmatrix} (n-2) & \left(\frac{n-4}{2}\right) \\ 4 & 2(n-2) \end{bmatrix}$$

2. On complement of subgroup graph, the adjacency, Laplace, signless Laplace, and detour spectrum are found since the graph is connected.
   a. The adjacency matrix spectrum $\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})}\right)$ for n is even and $n \geq 4$ is

   $$\boldsymbol{spec_A}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})}\right) = \begin{bmatrix} \frac{3n}{2} & 0 & \frac{n}{2} \\ 1 & 2(n-2) & 3 \end{bmatrix}$$

   b. The Laplacian matrix spectrum $\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})}\right)$ for n is even and $n \geq 4$ is

$$\boldsymbol{spec_L}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right) = \begin{bmatrix} 2n & \frac{3n}{2} & 0 \\ 3 & 2(n-2) & 1 \end{bmatrix}$$

c. The signless Laplacian matrix spectrum $\boldsymbol{L}^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)$ for n is even and $n \geq 4$ is

$$\boldsymbol{spec_{L^+}}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right) = \begin{bmatrix} 3n & \frac{3n}{2} & n \\ 1 & 2(n-2) & 3 \end{bmatrix}$$

d. The detour matrix spectrum $\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)$ for n is even and $n \geq 4$ is

$$\boldsymbol{spec_{DD}}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right) = \begin{bmatrix} (2n-1)^2 & -(2n-1) \\ 1 & 2n-1 \end{bmatrix}$$

ملخص

الأحدية، ديندا أكرمة. ٢٠١٨. **طيف *adjacency*، لابلاس، *signless* لابلاس و *detour* مخطط فرعي وتكملة مخطط فرعي من مجموعة زمرة زوجية**. البحث. شعبة الرياضيات كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف: (1) الدكتور عبد الشاكر الماجستير، (2) محمد جمهوري الماجستير.

الكلمة المفتاحية: طيف، طيف *adjacency*، طيف لابلاس، طيف *signless* اللالابلاس، طيف *detour*، مخطط فرعي، تكملة مخطط فرعي، ومجموعة غروف زمرة زوجية.

بحث هذا البحث عن عموم النمط من طيف *adjacency*، لابلاس، *signless* لابلاس و *detour* مخطط فرعي وتكملة مخطط فرعي $\langle r^2\rangle$ من مجموعة زمرة زوجية D_{2n}. يتم الحصول على الطيف من خلال تحديد فرعي طبيعي أولا من مجموعة زمرة زوجية (D_{2n}) المبنية من r^2 حتى حصل على بعض قضية n الكامل و $n \geq 4$. وبعد ذلك بحث عن لقيمة الذاتية والمتجه الذاتي. ومن هنا حصل على نتيجة البحث على النحو التالي:

1. لقد وجد طيف *adjacency* فى مخطط فرعي، لابلاس *signless* لابلاس. ولا يمكن تحديد طيف *detour* بسبب أن مخطط المحصول عليه مخطط غير متصل.

أ. أما النمط العام من طيف *adjacency* المقلوب $\boldsymbol{A}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})\right)$ لقيمة n الكامل و $n \geq 4$ هو

$$\boldsymbol{spec_A}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})\right) = \begin{bmatrix} \left(\frac{n-2}{2}\right) & -1 \\ 4 & 2(n-2) \end{bmatrix}$$

ب. والنمط العام من طيف لابلاس المقلوب $\boldsymbol{L}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})\right)$ لقيمة n الكامل و $n \geq 4$ هو

$$\boldsymbol{spec_L}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})\right) = \begin{bmatrix} \frac{n}{2} & 0 \\ 2(n-2) & 4 \end{bmatrix}$$

ت. والنمط العام من طيف *signless* لابلاس المقلوب $\boldsymbol{L^+}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})\right)$ لقيمة n الكامل و $n \geq 4$ هو

$$\boldsymbol{spec_{L^+}}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})\right) = \begin{bmatrix} (n-2) & \left(\frac{n-4}{2}\right) \\ 4 & 2(n-2) \end{bmatrix}$$

2. أما في تكملة مخطط فرعي، لقد وجد طيف *adjacency*، ولابلاس، *signless* لابلاس، و *detour* بسبب أن مخطط المحصول عليه مخطط متصل.

أ. أما النمط العام من طيف *adjacency* المقلوب $\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)$ لقيمة n الكامل و $n \geq 4$ هو

$$\boldsymbol{spec_A}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right) = \begin{bmatrix} \frac{3n}{2} & 0 & \frac{n}{2} \\ 1 & 2(n-2) & 3 \end{bmatrix}$$

ب. والنمط العام من طيف لابلاس المقلوب $\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)$ لقيمة n الكامل و $n \geq 4$ هو

$$\boldsymbol{spec_L}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right) = \begin{bmatrix} 2n & \frac{3n}{2} & 0 \\ 3 & 2(n-2) & 1 \end{bmatrix}$$

ت. والنمط العام من طيف *signless* لابلاس المقلوب $\boldsymbol{L^+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)$ لقيمة n الكامل و $n \geq 4$ هو

$$\boldsymbol{spec_{L^+}}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right) = \begin{bmatrix} 3n & \frac{3n}{2} & n \\ 1 & 2(n-2) & 3 \end{bmatrix}$$

ث. والنمط العام من طيف *detour* المقلوب $\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)$ لقيمة n الكامل و $n \geq 4$ هو

$$\boldsymbol{spec_{DD}}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right) = \begin{bmatrix} (2n-1)^2 & -(2n-1) \\ 1 & 2n-1 \end{bmatrix}$$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Firman Allah dalam al-Quran surat al-Qamar ayat 49 sebagai berikut

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ۝

"*Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran*." (*Q.S. Al-Qamar:49*)

Segala sesuatu yang ada di bumi dan langit diciptakan oleh Allah menurut ukuran tertentu. Ahli matematika atau fisika tidak membuat rumus sedikitpun. Mereka hanya menemukan rumus atau persamaan. Rumus-rumus yang ada sekarang bukan diciptakan manusia, tetapi sudah disediakan. Manusia hanya menemukan dan menyimbolkan dalam bahasa matematika (Abdussakir, 2007).

Dalam al-Quran surat al-Qamar telah dijelaskan bahwa segala sesuatu telah diciptakan oleh Allah sesuai dengan ukurannya sehingga ilmu-Nya pun sesuai dengan ukuran. Termasuk salah satu cabang ilmu matematika yaitu teori graf, dalam beberapa kajiannya memiliki ukuran-ukuran tertentu. Secara khusus, yang dimaksud dengan ukuran dalam matematika dapat diartikan sebagai pola-pola tertentu dalam bentuk rumusan matematis. Oleh karena itu penting untuk diselidiki bagaimana pola-pola yang terbentuk dalam teori graf.

Matematika termasuk salah satu ilmu pengetahuan yang banyak dikaji dan diterapkan pada berbagai bidang. Metematika menempati posisi yang cukup penting dalam kajian-kajian ilmu yang lain sehingga matematika disebut dengan ratu dari ilmu. Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang masih menarik untuk dibahas karena teori-teorinya masih aplikatif sampai saat ini dan dapat diterapkan untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari. Dengan mengkaji dan menganalisis model atau rumus, teori graf dapat diperlihatkan peranan dan kegunaannya dalam memecahkan berbagai permasalahan (Purwanto, 1998).

Teori graf adalah cabang dari matematika yang mempelajari graf dengan menggunakan sifat-sifat aljabar dari matriks. Misalkan G graf dengan order p $(p \geq 1)$ dan ukuran q serta himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$. Matriks keterhubungan titik dari graf G dinotasikan dengan $\boldsymbol{A}(G)$, adalah matriks $(p \times p)$ dengan unsur pada baris ke-i dan kolom ke-j bernilai 1 jika titik v_i terhubung langsung dengan titik v_j serta bernilai 0 jika titik v_i tidak terhubung langsung dengan titik v_j. Dengan kata lain matriks keterhubungan dapat ditulis $\boldsymbol{A}(G) = [a_{ij}], 1 \leq i, j \leq p$ (Abdussakir, dkk, 2009).

Matriks derajat dari matriks G, dinotasikan dengan $\boldsymbol{D}(G)$, adalah matriks diagonal yang elemen baris ke-i dan kolom ke-i adalah derajat dari v_i, $\boldsymbol{i} = 1, 2, 3, \ldots, p$. Matriks $\boldsymbol{L}(G) = \boldsymbol{D}(G) - \boldsymbol{A}(G)$ disebut matriks Laplace (Mohar, 1992) dan matriks $\boldsymbol{L}^{+}(G) = \boldsymbol{D}(G) + \boldsymbol{A}(G)$ disebut matriks *signless* Laplace dari graf G (Brouwer & Haemers, 2011).

Pada graf G, lintasan $v_1 v_n$ adalah barisan titik-titik berbeda $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sedemikian sehingga titik yang berurutan terhubung langsung. Suatu graf kemudian disebut terhubung jika terdapat suatu lintasan antara sebarang dua titik di G. Misalkan G adalah graf terhubung dengan order p. Matriks *detour* dari G adalah matriks $\boldsymbol{DD}(G)$ sedemikian sehingga elemen pada baris ke-i dan kolom ke-j adalah bilangan yang menyatakan lintasan terpanjang dari v_i ke v_j di G (Ayyaswamy & Balachandran, 2010).

Pembahasan matriks *adjacency* $\boldsymbol{A}(G)$, matriks Laplace $\boldsymbol{L}(G)$, matriks *signless* Laplace $\boldsymbol{L}^{+}(G)$, dan matriks *detour* $\boldsymbol{DD}(G)$ dari graf G dapat dikaitkan dengan konsep nilai Eigen dan vektor Eigen pada topik aljabar linier yang menghasilkan konsep spektrum. Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ dengan $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$ adalah nilai Eigen berbeda dari matriks suatu graf, dan misalkan $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_n)$ adalah banyaknya basis untuk ruang vektor Eigen masing-masing λ_i. Matriks berordo $(2 \times n)$ yang memuat $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ pada baris pertama dan $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_n)$ pada baris kedua disebut spektrum graf G, dan dinotasikan dengan $\boldsymbol{Spec}(G)$ (Bigg, 1994). Jadi, spektrum graf G dapat ditulis dengan

$$\boldsymbol{Spec}(G) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ m(\lambda_1) & m(\lambda_2) & \dots & m(\lambda_n) \end{bmatrix} \text{ (Yin, 2008).}$$

Spektrum yang diperoleh dari matriks $\boldsymbol{A}(G)$ disebut spektrum *adjacency*, dari matriks $\boldsymbol{L}(G)$ disebut spektrum Laplace, dari matriks $\boldsymbol{L}^{+}(G)$ disebut spektrum *signless* Laplace, dan dari matriks $\boldsymbol{DD}(G)$ disebut spektrum *detour*.

Anderson dkk (2012) mengenalkan konsep baru terkait graf yang diperoleh dari grup yaitu graf subgrup. Misalkan G grup dan H subgrup G. Misalkan $\Gamma_H(G)$ adalah graf berarah (*digraph*) dengan himpunan titik memuat semua unsur di G dan titik x terhubung langsung ke y (atau ada busur dari x ke y) jika dan hanya jika $x \neq y$ dan $xy \in H$. Jika $xy \in H$ dan $yx \in H$ untuk suatu $x, y \in G$ dengan $x \neq y$ maka x dan y dihubungkan langsung oleh suatu sisi tak berarah. Dengan demikian, akan diperoleh graf $\Gamma_H(G)$ yang tidak memuat gelung (*loop*) dan sisi rangkap (*multiple edge*). Graf $\Gamma_H(G)$ ini disebut graf subgrup dari G.

Polinomial karakteristik $det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})$ matriks *adjacency* $\boldsymbol{A}$ dari G disebut polinomial karakteristik dari G dan dinotasikan dengan $P_G(\lambda)$. Nilai Eigen dari $\boldsymbol{A}$ dan spektrum dari $\boldsymbol{A}$ juga disebut nilai Eigen dari G dan spektrum dari G. Nilai Eigen dari G adalah bilangan riil karena $\boldsymbol{A}$ matriks simetri (Cvetkovic, dkk, 2007).

Adapun penelitian sebelumnya yang sudah dilakukan para peneliti tentang spektrum graf yaitu Nurul Faizah (2012) meneliti spektrum *adjacency*, spektrum Laplace, dan spektrum *detour* yang diperoleh dari graf Türan. Amalia Intifaada (2014) meneliti tentang spektrum Laplace pada graf *commuting* dari grup dihedral (D_{2n}) dengan n ganjil. Moh. Zainal Arifandi (2014) meneliti spektrum keterhubungan titik graf multipartisi komplit $K\ (n)(n+1)_{\alpha}$. Muflihatin Nafisah (2014) meneliti spektrum *detour* dari graf *non commuting* dari grup dihedral (D_{2n}) untuk n bilangan asli. Sukris Tri Handayani (2016) meneliti spektrum Laplace graf konjugasi yang dibangun dari grup dihedral dengan n ganjil.

Berdasarkan penelitian sebelumnya, maka peneliti merasa perlu untuk meneliti spektrum suatu graf, yang lebih dikhususkan pada spektrum *adjacency*, Laplace, *signless* Laplace, dan *detour* pada graf subgrup dan komplemen graf subgrup $\langle r^2 \rangle$ dari grup dihedral (D_{2n}) untuk n genap. Karena graf subgrup $\langle r^2, sr \rangle$ dan $\langle r^2, rs \rangle$ sudah diteliti, maka peneliti memilih graf subgrup $\langle r^2 \rangle$.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, rumusan masalah dalam penelitian ini adalah

1. Bagaimana pola umum spektrum *adjacency*, Laplace, dan *signless* Laplace graf subgrup $\langle r^2 \rangle$ dari grup dihedral?

2. Bagaimana pola umum spektrum *adjacency*, Laplace, *signless* Laplace, dan *detour* komplemen graf subgrup $\langle r^2 \rangle$ dari grup dihedral?

1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai rumusan masalah, maka tujuan penelitian ini adalah

1. Mengetahui pola umum spektrum *adjacency*, Laplace, dan *signless* Laplace graf subgrup $\langle r^2 \rangle$ dari grup dihedral.
2. Mengetahui pola umum spektrum *adjacency*, Laplace, *signless* Laplace, dan *detour* komplemen graf subgrup $\langle r^2 \rangle$ dari grup dihedral.

1.4 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini, spektrum yang akan dibahas dibatasi pada spektrum matriks *adjacency*, Laplace, *signless* Laplace, dan *detour*. Subgrup yang diambil adalah subgrup normal $\langle r^2 \rangle$ dari grup dihedral (D_{2n}) untuk n genap dan $n \geq 4$.

1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut.

1. Memberikan informasi mengenai pola umum spektrum *adjacency*, Laplace, dan *signless* Laplace graf subgrup dan komplemen graf subgrup $\langle r^2 \rangle$ dari grup dihedral.
2. Memberikan informasi saling keterkaitan antara beberapa topik dalam matematika, khususnya teori graf, aljabar linier, dan aljabar abstrak.

1.6 Metode Penelitian

1.6.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini adalah penelitian pustaka (*library research*). Penelitian dilakukan dengan melakukan kajian terhadap buku-buku teori graf, aljabar linier, dan aljabar abstrak. Kajian pada buku teori graf dan jurnal terkait penelitian dikhususkan pada kajian mengenai graf. Kajian pada buku-buku aljabar linear berkaitan dengan topik matriks, khususnya tentang penentuan nilai Eigen dan vektor Eigen suatu matriks. Kajian pada buku aljabar abstrak berkaitan dengan topik grup dan subgrup normal.

1.6.2 Tahap Penelitian

Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif. Pola pembahasannya dimulai dari hal-hal khusus (induktif) menuju pada suatu generalisasi yang bersifat deduktif. Secara garis besar langkah penelitian ini sebagai berikut.

1. Menentukan spektrum graf subgrup $\langle r^2 \rangle$ dari grup dihedral.
   a. Menentukan subgrup normal yang dibangun oleh r^2 pada suatu grup D_{2n} untuk beberapa kasus *n* genap, yaitu $n = 4, 6, 8$.
   b. Menggambar graf subgrup $\langle r^2 \rangle$ kemudian menyatakan ke dalam bentuk matriks *adjacency*, Laplace, dan *signless* Laplace.
   c. Menentukan spektrum matriks *adjacency*, Laplace, dan *signless* Laplace graf subgrup dengan mencari nilai Eigen dan vektor Eigen terlebih dahulu.
   d. Membuat dugaan (konjektur) berdasarkan pola yang ditemukan untuk masing-masing kasus.
   e. Merumuskan konjektur sebagai suatu teorema.

f. Menghasilkan suatu teorema yang dilengkapi dengan bukti secara deduktif.

2. Menentukan spektrum komplemen graf subgrup $\langle r^2 \rangle$ dari grup dihedral.

   a. Menggambar komplemen graf subgrup $\langle r^2 \rangle$ kemudian menyatakan ke dalam bentuk matriks *adjacency*, Laplace, *signless* Laplace, dan *detour*.

   b. Menentukan spektrum matriks *adjacency*, Laplace, *signless* Laplace, dan *detour* komplemen graf subgrup dengan mencari nilai Eigen dan vektor Eigen terlebih dahulu.

   c. Membuat dugaan (konjektur) berdasarkan pola yang ditemukan untuk masing-masing kasus.

   d. Merumuskan konjektur sebagai suatu teorema.

   e. Menghasilkan suatu teorema yang dilengkapi dengan bukti secara deduktif.

1.7 Sistematika Penulisan

Agar penulisan skripsi lebih terarah, mudah ditelaah dan dipahami, maka digunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab, masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa subbab dengan rumusan sebagai berikut

Bab I Pendahuluan

Pendahuluan dalam skripsi ini meliputi: latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bagian ini terdiri atas teori-teori yang bisa digunakan untuk menjawab rumusan masalah sehingga dapat mendukung bagian pembahasan. Teori-teori tersebut antara lain meliputi: teori graf, graf dan matriks, spektrum graf, grup dan subgrup, ukuran dalam al-Quran.

Bab III Pembahasan

Pembahasan berisi tentang bagaimana spektrum *adjacency*, Laplace, *signless* Laplace, dan *detour* graf subgrup dan komplemen graf subgrup $\langle r^2 \rangle$ dari grup dihedral, ukuran pada spektrum graf subgrup.

Bab IV Penutup

Penutup berisi kesimpulan mengenai hasil dari pembahasan dan saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Teori Graf

Graf G adalah pasangan $(V(G),\ E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut *titik*, dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan takberurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut sisi. Banyaknya unsur di $V(G)$ disebut order dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$, dan banyaknya unsur di $E(G)$ disebut ukuran dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka order dan ukuran dari G masing-masing cukup ditulis p dan q (Abdussakir, dkk, 2009).

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung *(adjacent)*, v dan e serta u dan e disebut terkait langsung *(incident)*, dan titik u dan v disebut ujung dari e. Dua sisi berbeda e_1 dan e_2 disebut terhubung langsung (*adjacent*), jika terkait langsung pada satu titik yang sama. Untuk selanjutnya, sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = uv$ (Bondy & Murthy, 2008).

2.1.1 Derajat Titik

Derajat dari titik v di graf G, ditulis $deg_G(v)$, adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung dengan v. Dalam konteks pembicaraan hanya terdapat datu graf G, maka tulisan $deg_G(v)$ dapat disingkat menjadi $deg(v)$. Titik yang berderajat genap sering disebut titik genap (*even vertices*) dan titik yang berderajat ganjil disebut titik ganjil (*odd vertices*). Titik yang berderajat nol disebut titik terisolasi *(isolated vertices)* dan titik yang berderajat satu disebut titik ujung (*end vertices*) (Chartrand dan Lesniak, 1996).

Graf G dikatakan beraturan-r atau beraturan dengan derajat r jika masing-masing titik v di G berderajat r, ditulis $deg_G(v) = r$, untuk bilangan bulat tak negatif r. Graf beraturan-3 biasa juga disebut dengan graf kubik (Bondy & Murthy, 2008).

Graf G disebut graf komplit jika setiap dua titik yang berbeda saling terhubung langsung. Graf komplit dengan order n dinyatakan dengan K_n. Dengan demikian maka graf K_n merupakan graf beraturan-$(n-1)$ dengan order $p = n$ dan ukuran $q = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$ (Bondy & Murthy, 2008).

2.1.2 Graf Terhubung

Misalkan G graf. Misalkan u dan v adalah titik di G (yang tidak harus berbeda). Jalan u-v pada graf adalah barisan berhingga yang berselang-seling

$$W: u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, \dots, e_n, v_n = v$$

antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik dan diakhiri dengan titik, dengan

$$e_i = v_{i-1}v_i \qquad i = 1,2,3, \dots, n$$

adalah sisi di G. v_0 disebut titik awal, v_n disebut titik akhir, titik $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ disebut tititk internal, dan n menyatakan panjang dari W. Jika $v_0 \neq v_n$, maka W disebut jalan terbuka. Jika $v_0 = v_n$, maka W disebut jalan tertutup. Jalan yang tidak mempunyai sisi disebut jalan trivial.

Karena dalam graf dua titik hanya akan dihubungkan oleh tepat satu sisi, maka jalan u-v

$$W: u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, \dots, e_n, v_n = v$$

dapat ditulis menjadi

$W: u = v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n = v$ (Abdussakir, dkk, 2009).

2.1.3 Graf Komplemen

Graf komplemen $\bar{G}$ dari graf G adalah graf dengan himpunan titik $V(\bar{G}) = V(G)$ dan dua titik akan terhubung langsung di $\bar{G}$ jika dan hanya jika dua titik tersebut tidak terhubung langsung di G. Artinya jika $xy \in E(G)$ maka $xy \notin E(\bar{G})$ dan sebaliknya. Dengan demikian maka gabungan antara $\bar{G}$ dan G akan menghasilkan graf komplit, atau $q + \bar{q} = \binom{n}{2}$ (Bondy & Murthy, 2008).

2.2 Graf dan Matriks

Misalkan G graf dengan order p $(p \geq 1)$ dan ukuran q serta himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$. Matriks keterhubungan titik (atau matriks keterhubungan) dari graf G dinotasikan dengan $\boldsymbol{A}(G)$, adalah matriks $(p \times p)$ dengan unsur pada baris ke-i dan kolom ke-j bernilai 1 jika titik v_i terhubung langsung dengan titik v_j serta bernilai 0 jika titik v_i tidak terhubung langsung dengan titik v_j. Dengan kata lain matriks keterhubungan dapat ditulis $\boldsymbol{A}(G) = [a_{ij}], 1 \leq i, j \leq p$, dengan

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, jika } v_i v_j \in E(G) \\ 0 & \text{, jika } v_i v_j \notin E(G) \end{cases}$$

Matriks keterhubungan suatu graf G adalah matriks simetri dengan unsur 0 dan 1 dan memuat nilai 0 pada diagonal utamanya. Hal ini karena graf tidak memuat gelung (*loop*) dan tidak memuat sisi paralel (Abdussakir, dkk, 2009).

Selain konsep matriks *adjacency*, masih terdapat konsep matriks lainnya yang dapat diperoleh dari suatu graf. Matriks derajat dari matriks G, dinotasikan dengan $\boldsymbol{D}(G)$, adalah matriks diagonal yang elemen baris ke-i dan kolom ke-i

adalah derajat dari v_i, $i = 1,2,3, \dots, p$. Jadi, matriks derajat dari graf G dapat ditulis $\boldsymbol{D}(G) = [d_{ij}]$, $1 \le i, j \le p$, dengan

$$d_{ij} = \begin{cases} deg(v_i) & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$$

Matriks $\boldsymbol{L}(G) = \boldsymbol{D}(G) - \boldsymbol{A}(G)$ disebut matriks Laplace (Mohar, 1992) dan matriks $\boldsymbol{L}^{+}(G) = \boldsymbol{D}(G) + \boldsymbol{A}(G)$ disebut matriks *signless* Laplace dari graf G (Brouwer & Haemers, 2011).

Pada graf G, lintasan-$v_1 v_n$ adalah barisan titik-titik berbeda $v_1, v_2, \dots, v_n$ sedemikian hingga titik yang berurutan terhubung langsung. Suatu graf kemudian disebut terhubung jika terdapat suatu lintasan antara sebarang dua titik di G. Misalkan G adalah graf terhubung dengan order p. Matriks *detour* dari G adalah matriks $\boldsymbol{DD}(G)$ sedemikian hingga elemen pada baris ke-i dan kolom ke-j adalah bilangan yang menyatakan lintasan terpanjang dari v_i ke v_j di G (Ayyaswamy & Balachandran, 2010).

2.3 Spektrum Graf

Misalkan G graf berorder p dan $\boldsymbol{A}$ adalah matriks keterhubungan dari graf G. Suatu vektor tak nol $\boldsymbol{x}$ disebut vektor Eigen *(Eigen vector)* dari $\boldsymbol{A}$ jika $\boldsymbol{Ax}$ adalah suatu kelipatan skalar dari $\boldsymbol{x}$; yakni, $\boldsymbol{Ax} = \lambda \boldsymbol{x}$, untuk sebarang skalar λ. Skalar λ disebut nilai Eigen (*Eigen value*) dari $\boldsymbol{A}$, dan $\boldsymbol{x}$ disebut sebagai vektor Eigen dari $\boldsymbol{A}$ yang bersesuaian dengan λ. Untuk menentukan nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{A}$, persamaan $\boldsymbol{Ax} = \lambda \boldsymbol{x}$ ditulis kembali dalam bentuk $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = 0$, dengan $\boldsymbol{I}$ adalah matriks identitas berordo $(1 \times p)$. Persamaan ini akan mempunyai solusi tak nol jika dan hanya jika $det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$.

Persamaan $det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$ akan menghasilkan persamaan polinomial dalam variabel λ dan disebut persamaan karakteristik dari matriks $\boldsymbol{A}$. Skalar-skalar λ yang memenuhi persamaan karakteristik ini tidak lain adalah nilai-nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{A}$ (Anton & Rorres, 2004).

Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ adalah nilai Eigen berbeda dari $\boldsymbol{A}$, dengan $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n$, dan misalkan $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_n)$ adalah banyaknya basis untuk ruang vektor Eigen masing-masing λ_i, maka matriks berordo $(2 \times n)$ yang memuat $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ pada baris pertama dan $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_n)$ pada baris kedua disebut *spectrum* graf G, dan dinotasikan dengan $\boldsymbol{Spec}(G)$ (Bigg, 1994). Jadi, spektrum graf G dapat ditulis dengan

$$\boldsymbol{Spec}(G) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ m(\lambda_1) & m(\lambda_2) & \dots & m(\lambda_n) \end{bmatrix} \text{ (Yin, 2008).}$$

Spektrum yang diperoleh dari matriks $\boldsymbol{A}(G)$ disebut spektrum *adjacency*, dari matriks $\boldsymbol{L}(G)$ disebut spektrum Laplace, dari matriks $\boldsymbol{L}^+(G)$ disebut spektrum *signless* Laplace, dan dari matriks $\boldsymbol{DD}(G)$ disebut spektrum *detour*.

2.4 Grup dan Subgrup

2.4.1 Grup Dihedral

Grup dihedral adalah grup dari himpunan simetri-simetri dari segi-n beraturan, dinotasikan D_{2n}, untuk setiap n bilangan bulat positif dan $n \geq 3$. Dalam buku lain ada yang menuliskan grup *dihedral* dengan D_n (Dummit dan Foote, 1991). Karena grup dihedral akan digunakan secara ekstensif, maka perlu beberapa notasi dan beberapa hitungan yang dapat menyederhanakan perhitungan selanjutnya dan membantu mengamati D_{2n} sebagai grup abstrak, yaitu:

(1) $1, r, r^2, \dots, r^{n-1}$ semuanya berbeda dan $r^n = 1$. Jadi $|r| = n$.

(2) $|s| = 2$.

(3) $s \neq r^i$ untuk semua i.

(4) $sr^i \neq sr^j$untuk semua $0 \leq i, j \leq n-1$ dengan $i \neq j$. Jadi

$$D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$$

yaitu setiap elemen dapat dituliskan secara tunggal dalam bentuk $s^k r^i$ untuk $k = 0$ atau 1 dan $0 \leq i \leq n-1$.

(5) $rs = sr^{-1}$. Ini menunjukkan bahwa r dan s keduanya tidak komutatif sehingga D_{2n} tidak abelian.

(6) $sr = r^{-1}s$, untuk semua $0 \leq i \leq n$ (Dummit dan Foote, 1991).

2.4.2 Subgrup dan Subgrup Normal

Misalkan G grup dan H himpunan bagian di G. Jika H dengan operasi biner yang sama dengan di G membentuk grup, maka H disebut subgrup dari G dan dinotasikan dengan $H \leq G$ (Dummit dan Foote, 1991). Unsur identitas di subgrup H adalah unsur identitas di grup G. Dengan demikian, maka H subgrup G jika dan hanya jika $H \subseteq G$, $H \neq \emptyset$, dan $xy^{-1} \in H$ untuk semua $x, y \in H$.

Jika $H \leq G$ dan berlaku $ghg^{-1} \in H$ untuk semua $h \in H$ dan $g \in G$, maka H disebut subgrup normal dari G dan dinotasikan dengan $H \trianglelefteq G$. Jika G grup abelian maka semua subgrup di G adalah subgrup normal karena $h = eh = gg^{-1}h = ghg^{-1} \in H$ untuk semua $h \in H$ dan $g \in G$ Dengan notasi lain, H subgrup normal di G jika dan hanya jika $gHg^{-1} = H$ atau $gH = Hg$, untuk semua $g \in G$.

2.5 Graf Subgrup

Misalkan G grup dan H subgrup G. Misalkan $\Gamma_H(G)$ adalah graf berarah (*digraph*) dengan himpunan titik memuat semua unsur di G dan titik x terhubung langsung ke y (atau ada busur dari x ke y) jika dan hanya jika $x \neq y$ dan $xy \in H$. Jika $xy \in H$ dan $yx \in H$ untuk suatu $x, y \in G$ dengan $x \neq y$ maka x dan y dihubungkan langsung oleh suatu sisi tak berarah. Dengan demikian, akan diperoleh graf $\Gamma_H(G)$ yang tidak memuat gelung (*loop*) dan sisi rangkap (*multiple edge*). Graf $\Gamma_H(G)$ ini disebut graf subgrup dari G (Anderson, dkk, 2012)

Kakeri dan Erfanian (2015) menjelaskan bahwa graf subgrup $\Gamma_H(G)$ jelas eksistensinya ketika H adalah subgrup normal dari G. Jika $xy \in H$ maka belum tentu $yx \in H$. Jika H subgrup normal di G, maka $xy \in H$ berakibat $yx = x^{-1}(xy)x \in H$. Dengan demikian, ketika H subgrup normal maka komplemen dari graf subgrup $\Gamma_H(G)$ juga berbentuk graf (*graph*), bukan graf berarah (*digraph*).

2.6 Ukuran dalam Al-Quran

Allah berfirman dalam surat al-Qamar ayat 49 sebagai berikut

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ۝

"*Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran.*" (*Q.S. Al-Qamar:49*)

Sesungguhnya segala yang terjadi di dalam kehidupan ini adalah dengan ketentuan Allah dan pembentukannya, menurut ketentuan hikmah-Nya Yang Maha Bijaksana dan aturan-Nya yang menyeluruh, dan sesuai dengan Sunnah-sunnah yang Dia letakkan pada makhluk-Nya (Al-Maragi, 1993).

Semakna dengan surat al-Qamar ayat 49 ialah firman Allah dalam surat al-Furqan ayat 2 sebagai berikut

الَّذِي لَهُ مُلْكُ السَّمَاوَاتِ وَالْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُنْ لَهُ شَرِيكٌ فِي الْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَّرَهُ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

"*Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan Dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu bagi-Nya dalam kekuasaan(Nya), dan Dia telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya*."

Dalam tafsir Al-Maragi (1993) ayat di atas menyatakan sifat kebesaran Allah yang menyifati diri-Nya sendiri dengan empat sifat kebesaran, yaitu:

1. الَّذِي لَهُ مُلْكُ السَّمَاوَاتِ وَالْأَرْضِ

   Dia mempunyai keperkasaan dan kekuasaan yang sempurna terhadap langit dan bumi serta segala isinya, baik dalam hal mengadakan maupun dalam hal meniadakan, dalam hal memerintah maupun dalam hal melarang, sesuai dengan tuntutan kehendak-Nya yang didasarkan atas berbagai hikmah dan kemaslahatan.

2. وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا

   Dia tidak mempunyai anak seperti dikatakan orang-orang yang memandang demikian tentang Al-Masih, Uzair dan para malaikat, sebagai mana cerita Allah tentang mereka di dalam firman-Nya:

   وَقَالَتِ الْيَهُودُ عُزَيْرٌ ابْنُ اللَّهِ وَقَالَتِ النَّصَارَى الْمَسِيحُ ابْنُ اللَّهِ ۖ

   "*Orang-orang Yahudi mengatakan, Uzair itu putra Allah. Dan orang-orang Nasrani mengatakan, Al-Masih itu putra Allah*." (At-Taubah, 9:30).

Dan firman-Nya:

فَاسْتَفْتِهِمْ أَلِرَبِّكَ الْبَنَاتُ وَلَهُمُ الْبَنُونَ ۝ أَمْ خَلَقْنَا الْمَلَائِكَةَ إِنَاثًا وَهُمْ شَاهِدُونَ ۝ أَلَا إِنَّهُمْ مِنْ إِفْكِهِمْ لَيَقُولُونَ ۝ وَلَدَ اللَّهُ وَإِنَّهُمْ لَكَاذِبُونَ ۝ أَصْطَفَى الْبَنَاتِ عَلَى الْبَنِينَ ۝

"*Apakah untuk Tuhanmu anak-anak perempuan dan untuk mereka anak laki-laki, atau apakah Kami menciptakan malaikat-malaikat berupa perempuan dan mereka menyaksikan(nya)? Ketahuilah bahwa sesungguhnya mereka dengan kebohongannya benar-benar mengatakan, 'Allah beranak'. Dan sesungguhnya mereka benar-benar orang yang berdusta. Apakah Tuhan memilih (mengutamakan) anak-anak perempuan daripada anak laki-laki?*" (As-Saffat, 37: 149-153).

3. وَلَمْ يَكُنْ لَهُ شَرِيكٌ فِي الْمُلْكِ

Allah tidak mempunyai sekutu dalam kerajaan dan kekuasaan-Nya yang patut untuk disembah selain-Nya. Maka beribadahlah kepada-Nya semata secara murni tanpa menyertakan "tuhan-tuhan", para malaikat, jin dan manusia dalam ibadah.

Di sini terdapat penolakan terhadap kaum musyrikin Arab yang dahulu mengatakan dalam talbiyah hajinya:

"Kusambut panggilan-Mu tidak ada sekutu bagi-Mu kecuali sekutu yang ia adalah milik-Mu Engkau memiliknya dan apa yang ia miliki".

4. فِي الْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَّرَهُ تَقْدِيرًا

Dia mengadakan segala sesuatu sesuai dengan tuntutan kehendak-Nya yang didasarkan atas hikmah yang sempurna, serta mempersiapkannya untuk menerima apa yang dikehendaki-Nya, berupa keistimewaan dan perbuatan yang sesuai dengannya. Maka, Dia mempersiapkan manusia untuk dapat memahami, memikirkan urusan dunia dan akhirat, menemukan berbagai industri, dan memanfaatkan apa yang terdapat di permukaan serta di dalam perut bumi. Dia juga mempersiapkan berbagai jenis hewan untuk melakukan berbagai pekerjaan yang sesuai dengannya dan dengan kemampuannya.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Pola Umum Spektrum Graf Subgrup $\langle r^2 \rangle$ dari Grup Dihedral

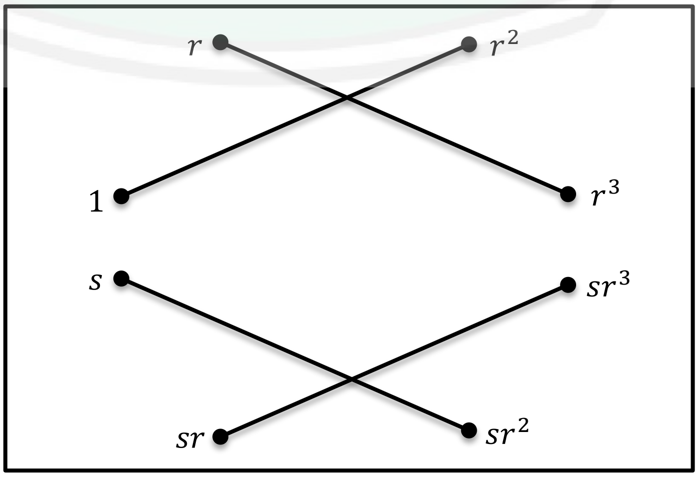
3.1.1 Spektrum Graf Subgrup $\langle r^2 \rangle$ dari D_8

Grup dihedral D_8 dengan operasi fungsi komposisi dapat dinyatakan dalam tabel Cayley berikut.

Tabel 3.1 Tabel Cayley Grup Dihedral D_8

$\circ$	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
1	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
r	r	r^2	r^3	1	sr^3	s	sr	sr^2
r^2	r^2	r^3	1	r	sr^2	sr^3	s	sr
r^3	r^3	1	r	r^2	sr	sr^2	sr^3	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	1	r	r^2	r^3
sr	sr	sr^2	sr^3	s	r^3	1	r	r^2
sr^2	sr^2	sr^3	s	sr	r^2	r^3	1	r
sr^3	sr^3	s	sr	sr^2	r	r^2	r^3	1

Subgrup dari grup dihedral D_8 yang dibangun oleh r^2 adalah $\{1, r^2\}$. Titik-titik graf subgrup $\langle r^2 \rangle$ dari grup dihedral (D_8) adalah $V\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_8)\right) = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$. Sehingga jika dua unsur di grup dihedral D_8 dioperasikan menggunakan operasi fungsi komposisi $(\circ)$ menghasilkan $\{1, r^2\}$, maka diperoleh graf subgrup berikut



Gambar 3.1 Graf $\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_8)$

Dari Gambar 3.1 dapat diperoleh matriks a*djacency* dari $\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_8)$ sebagai berikut

$$A\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_8)\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks *adjacency* maka dicari nilai Eigen dari matriks *adjacency* tersebut.

$$det\left(A\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_8)\right) - \lambda I\right)$$

$$= det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$= det\left(\begin{bmatrix} 0-\lambda & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0-\lambda & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

Matriks $A\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_8)\right) - \lambda I$ dapat dijadikan matriks segitiga atas atau segitiga bawah atau menjadikan matriks eselon baris tereduksi, yang kesemuanya akan menghasilkan determinan yang sama.

$$det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-1}{\lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-1}{\lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-1}{\lambda} \end{bmatrix}\right)$$

atau

$$det\left(\begin{bmatrix} -\frac{\lambda^2-1}{\lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda^2-1}{\lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-1}{\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-1}{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}\right)$$

atau

$$det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-1}{\lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-1}{\lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-1}{\lambda} \end{bmatrix}\right)$$

Polinomial karakteristik $\boldsymbol{A}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)\right) - \lambda \boldsymbol{I}$ diperoleh dari hasil perkalian diagonal utama matriks-matriks tersebut sebagai berikut

$$p(\lambda) = (-\lambda)^4 \left(-\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda}\right)^4 = (\lambda + 1)^4 (\lambda - 1)^4$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = -1$ dan $\lambda_2 = 1$. Kemudian dicari basis untuk ruang vektor Eigen dari matriks tersebut.

Untuk $\lambda_1 = -1$ disubstitusikan ke dalam $\left(\boldsymbol{A}\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_8)\right) - \lambda \boldsymbol{I}\right)$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut direduksi, sehingga diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat diperoleh $m(\lambda_1) = 4$.

Untuk $\lambda_2 = 1$ disubstitusikan ke dalam $\left(\boldsymbol{A}\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_8)\right) - \lambda \boldsymbol{I}\right)$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut direduksi, maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat diperoleh $m(\lambda_2) = 4$.

Dengan demikian terbentuklah spektrum *adjacency* dari $\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_8)$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{spec_A}\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_8)\right) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dari Gambar 3.1 dapat diperoleh matriks derajat dari $\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_8)$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{D}\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_8)\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh matriks Laplace dari $\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_8)$

$$\boldsymbol{L}\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_8)\right) = \boldsymbol{D}\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_8)\right) - \boldsymbol{A}\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_8)\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks Laplace maka dicari nilai Eigen dari matriks Laplace tersebut.

$det\left(\boldsymbol{L}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)\right) - \lambda\boldsymbol{I}\right)$

$$= det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$= det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

Matriks tersebut dijadikan matriks segitiga atas yaitu sebagai berikut

$$det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda(-2+\lambda)}{-1+\lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda(-2+\lambda)}{-1+\lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda(-2+\lambda)}{-1+\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda(-2+\lambda)}{-1+\lambda} \end{bmatrix}\right)$$

Polinomial karakteristik $\boldsymbol{L}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)\right) - \lambda\boldsymbol{I}$ diperoleh dari hasil perkalian diagonal utama matriks segitiga atas sebagai berikut

$$p(\lambda) = (1-\lambda)^4\left(-\frac{\lambda(-2+\lambda)}{-1+\lambda}\right)^4 = (\lambda-2)^4\lambda^4$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = 0$. Kemudian dicari basis untuk ruang vektor Eigen dari matriks tersebut.

Untuk $\lambda_1 = 2$ disubstitusikan ke dalam $\left(\boldsymbol{L}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)\right) - \lambda\boldsymbol{I}\right)$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut direduksi, sehingga diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat diperoleh $m(\lambda_1) = 4$.

Untuk $\lambda_2 = 0$ disubstitusikan ke dalam $\left(\boldsymbol{L}\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_8)\right) - \lambda \boldsymbol{I}\right)$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut direduksi, maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat diperoleh $m(\lambda_2) = 4$.

Dengan demikian terbentuklah spektrum Laplace dari $\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)$ sebagai berikut:

$$\boldsymbol{spec_L}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)\right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Kemudian matriks *signless* Laplace dari $\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)$ dapat ditentukan dengan menggunakan cara berikut

$$\boldsymbol{L}^+\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)\right) = \boldsymbol{D}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)\right) + \boldsymbol{A}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks *signless* Laplace maka dicari nilai Eigen dari matriks *signless* Laplace tersebut.

$$det\left(\boldsymbol{L}^+\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)\right) - \lambda \boldsymbol{I}\right)$$

$$= det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$= det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

Matriks tersebut dijadikan matriks segitiga atas yaitu sebagai berikut

$$det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda(-2+\lambda)}{-1+\lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda(-2+\lambda)}{-1+\lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda(-2+\lambda)}{-1+\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda(-2+\lambda)}{-1+\lambda} \end{bmatrix}\right)$$

Polinomial karakteristik $\boldsymbol{L}^{+}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)\right)-\lambda\boldsymbol{I}$ diperoleh dari hasil perkalian diagonal utama matriks segitiga atas sebagai berikut

$$p(\lambda)=(1-\lambda)^4\left(-\frac{\lambda(-2+\lambda)}{-1+\lambda}\right)^4=(\lambda-2)^4\lambda^4$$

Dengan menetapkan $p(\lambda)=0$ maka diperoleh $\lambda_1=2$ dan $\lambda_2=0$. Kemudian dicari basis untuk ruang vektor Eigen dari matriks tersebut.

Untuk $\lambda_1=2$ disubstitusikan ke dalam $\left(\boldsymbol{L}^{+}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)\right)-\lambda\boldsymbol{I}\right)$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut direduksi, sehingga diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat diperoleh $m(\lambda_1) = 4$.

Untuk $\lambda_2 = 0$ disubstitusikan ke dalam $\left(\boldsymbol{L}^+\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)\right) - \lambda \boldsymbol{I}\right)$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut direduksi, maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat diperoleh $m(\lambda_2) = 4$.

Dengan demikian terbentuklah spektrum *signless* Laplace dari $\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{spec}_{\boldsymbol{L}^+}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)\right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

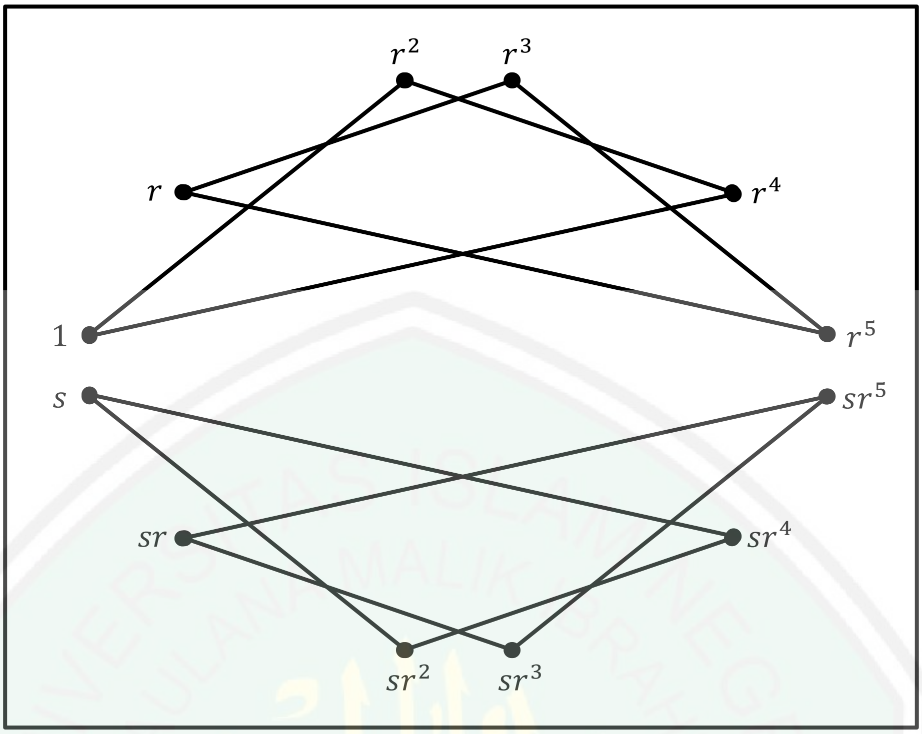
3.1.2 Spektrum Graf Subgrup $\langle r^2 \rangle$ dari D_{12}

Grup dihedral D_{12} dengan operasi fungsi komposisi dapat dinyatakan dalam tabel Cayley berikut.

Tabel 3.2 Tabel Cayley Grup Dihedral D_{12}

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3
r^3	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2
r^4	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr
r^5	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2
sr^4	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r
sr^5	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1

Subgrup dari grup dihedral D_{12} yang dibangun oleh r^2 adalah $\{1, r^2, r^4\}$. Titik-titik graf subgrup $\langle r^2 \rangle$ dari grup dihedral (D_{12}) adalah $V\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{12})\right) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$. Sehingga jika dua unsur di grup dihedral D_{12} dioperasikan menggunakan operasi fungsi komposisi $(\circ)$ menghasilkan $\{1, r^2, r^4\}$, maka diperoleh graf subgrup berikut



Gambar 3.2 Graf $\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{12})$

Dari Gambar 3.2 dapat diperoleh matriks *adjacency* dari $\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{12})$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{A}\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{12})\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks *adjacency* maka dicari nilai Eigen dari matriks *adjacency* tersebut.

$$det\left(\boldsymbol{A}\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{12})\right) - \lambda \boldsymbol{I}\right)$$

$$= det\left(\begin{bmatrix} 0-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0-\lambda & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0-\lambda & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

Matriks tersebut direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan menggunakan cara yang sama pada grup dihedral (D_8), diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut

$$p(\lambda) = (-\lambda)^4\left(-\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)^4\left(-\frac{\lambda^2-\lambda-2}{\lambda-1}\right)^4 = -(\lambda+1)^8(\lambda-2)^4$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = -1$. Dengan cara yang sama pada grup dihedral (D_8) dapat ditentukan basis masing-masing nilai Eigen dari matriks tersebut yaitu multiplisitas dari nilai Eigen. Sehingga $m(\lambda_1) = 4$ dan $m(\lambda_2) = 8$.

Dengan demikian terbentuklah spektrum *adjacency* dari $\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{12})$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{spec_A}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{12})\right) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, dari Gambar 3.2 dapat diketahui matriks derajat dari $\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{12})$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{D}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{12})\right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh matriks Laplace dari $\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{12})$

$$\boldsymbol{L}\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{12})\right) = \boldsymbol{D}\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{12})\right) - \boldsymbol{A}\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{12})\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks Laplace maka dicari nilai Eigen dari matriks Laplace tersebut.

$$det\left(\boldsymbol{L}\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{12})\right) - \lambda \boldsymbol{I}\right)$$

$$= det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2-\lambda & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2-\lambda & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 2-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 2-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2-\lambda & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2-\lambda & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2-\lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

Matriks tersebut direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan menggunakan cara yang sama pada grup dihedral (D_8), diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut

$$p(\lambda) = (2-\lambda)^4 \left(-\frac{\lambda^2 - 4\lambda + 3}{-2+\lambda}\right)^4 \left(-\frac{(\lambda-3)\lambda}{-1+\lambda}\right)^4 = -(\lambda-3)^8\lambda^4$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 3$ dan $\lambda_2 = 0$. Dengan cara yang sama pada grup dihedral (D_8) dapat ditentukan basis masing-masing nilai Eigen dari matriks tersebut yaitu multiplisitas dari nilai Eigen. Sehingga $m(\lambda_1) = 8$ dan $m(\lambda_2) = 4$.

Dengan demikian terbentuklah spektrum Laplace dari $\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{12})$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{spec_L}\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{12})\right) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$$

Kemudian matriks *signless* Laplace dari $\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{12})$ dapat ditentukan dengan menggunakan cara berikut

$$\boldsymbol{L}^+\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{12})\right) = \boldsymbol{D}\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{12})\right) + \boldsymbol{A}\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{12})\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&2&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&2&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&2&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&2&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&2&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&2&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&2&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&2&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&2&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&2&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&2&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&2&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&1&0&2&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&1&0&2&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&2&0&1&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&2&0&1&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&2&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&2&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&2&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&2 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks *signless* Laplace maka dicari nilai Eigen dari matriks *signless* Laplace tersebut.

$$det\left(\boldsymbol{L}^{+}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{12})\right)-\lambda\boldsymbol{I}\right)$$

$$= det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2-\lambda & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

Matriks tersebut direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan menggunakan cara yang sama pada grup dihedral (D_8), diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut

$$p(\lambda) = (2-\lambda)^4\left(-\frac{\lambda^2-4\lambda+3}{-2+\lambda}\right)^4\left(-\frac{\lambda^2-5\lambda+4}{\lambda-3}\right)^4 = -(\lambda-1)^8(\lambda-4)^4$$

Dengan menetapkan $p(\lambda)=0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 4$ dan $\lambda_2 = 1$. Dengan cara yang sama pada grup dihedral (D_8) dapat ditentukan basis masing-masing nilai Eigen dari matriks tersebut yaitu multiplisitas dari nilai Eigen. Sehingga $m(\lambda_1) = 4$ dan $m(\lambda_2) = 8$.

Dengan demikian terbentuklah spektrum *signless* Laplace dari $\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{12})$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{spec}_{\boldsymbol{L}^{+}}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{12})\right) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

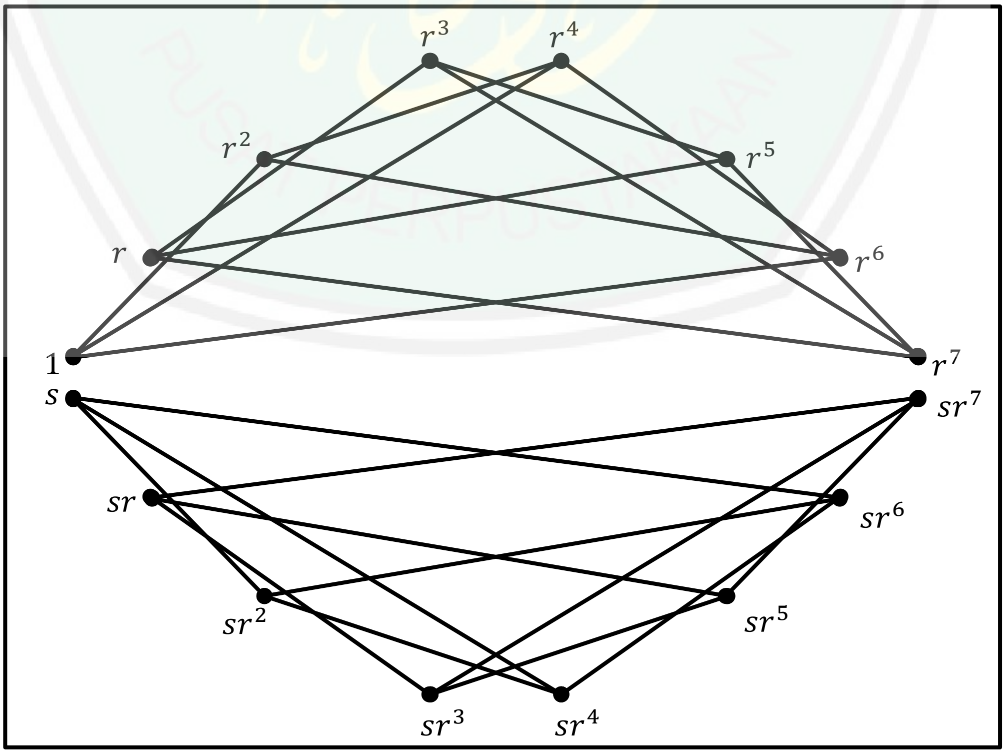
3.1.3 Spektrum Graf Subgrup $\langle r^2\rangle$ dari D_{16}

Grup dihedral D_{16} dengan operasi fungsi komposisi dapat dinyatakan dalam tabel Cayley berikut.

Tabel 3.3 Tabel Cayley Grup Dihedral D_{16}

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r^3	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^4	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3
r^5	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2
r^6	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr
r^7	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^4	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3
sr^5	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2
sr^6	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r
sr^7	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1

Subgrup dari grup dihedral D_{16} yang dibangun oleh r^2 adalah $\{1, r^2, r^4, r^6\}$. Titik-titik graf subgrup $\langle r^2 \rangle$ dari grup dihedral (D_{16}) adalah $V\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{16})\right) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}$. Sehingga jika dua unsur di grup dihedral D_{16} dioperasikan menggunakan operasi fungsi komposisi $(\circ)$ menghasilkan $\{1, r^2, r^4, r^6\}$, maka diperoleh graf subgrup berikut



Gambar 3.3 Graf $\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{16})$

Dari Gambar 3.3 dapat diperoleh matriks *adjacency* dari $\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{16})$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{A}\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{16})\right) = \begin{bmatrix} 0&0&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0&0 \end{bmatrix}$$

$$det\left(\boldsymbol{A}\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{16})\right) - \lambda \boldsymbol{I}\right)$$

$$= det\left(\begin{bmatrix} 0-\lambda&0&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0-\lambda&0&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0-\lambda&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0-\lambda&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&0-\lambda&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0-\lambda&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&1&0&0-\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&0-\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0-\lambda&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0-\lambda&0&1&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0-\lambda&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0-\lambda&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0-\lambda&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0-\lambda&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0&0-\lambda&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0&0-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

Matriks tersebut direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan menggunakan cara yang sama pada grup dihedral (D_8), diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut

$$p(\lambda) = (-\lambda)^4 \left(-\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda}\right)^4 \left(-\frac{\lambda^2 - \lambda - 2}{\lambda - 1}\right)^4 \left(-\frac{\lambda^2 - 2\lambda - 3}{\lambda - 2}\right)^4$$

$$= (\lambda - 3)^4 (\lambda + 1)^{12}$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 3$ dan $\lambda_2 = -1$. Dengan cara yang sama pada grup dihedral (D_8) dapat ditentukan basis masing-masing nilai

Eigen dari matriks tersebut yaitu multiplisitas dari nilai Eigen. Sehingga $m(\lambda_1) = 4$ dan $m(\lambda_2) = 12$.

Dengan demikian terbentuklah spektrum *adjacency* dari $\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{16})$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{spec_A}\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{16})\right) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, dari Gambar 3.3 dapat diketahui matriks derajat dari $\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{16})$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{D}\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{16})\right) = \begin{bmatrix}
3&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&3&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&3&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&3&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&3&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&3&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&3&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&3&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&3&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&3&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&3&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&3&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&3&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&3&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&3&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&3
\end{bmatrix}$$

dengan demikian diperoleh matriks Laplace dari $\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{16})$

$$\boldsymbol{L}\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{16})\right) = \boldsymbol{D}\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{16})\right) - \boldsymbol{A}\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{16})\right)$$

$$= \begin{bmatrix}
3&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&3&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&3&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&3&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&3&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&3&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&3&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&3&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&3&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&3&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&3&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&3&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&3&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&3&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&3&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&3
\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}
0&0&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0&0
\end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix}
3 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 3 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 3
\end{bmatrix}
$$

Setelah mendapatkan matriks Laplace maka dicari nilai Eigen dari matriks Laplace tersebut.

$$
det\left(\boldsymbol{L}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{16})\right) - \lambda\boldsymbol{I}\right)
$$

$$
= det\left(\begin{bmatrix}
3-\lambda & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 3-\lambda & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 3-\lambda & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 3-\lambda & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & -1 & 0 & 3-\lambda & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 3-\lambda & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 3-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 3-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3-\lambda & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3-\lambda & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3-\lambda & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3-\lambda & 0 & -1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 3-\lambda & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 3-\lambda & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 3-\lambda & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 3-\lambda
\end{bmatrix}\right)
$$

Matriks tersebut direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan menggunakan cara yang sama pada grup dihedral (D_8), diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut

$$
p(\lambda) = (3-\lambda)^4\left(-\frac{\lambda^2 - 6\lambda + 8}{-3+\lambda}\right)^4\left(-\frac{\lambda^2 - 5\lambda + 4}{\lambda - 2}\right)^4\left(-\frac{(-4+\lambda)\lambda}{\lambda - 1}\right)^4 = (\lambda - 4)^{12}\lambda^4
$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 4$ dan $\lambda_2 = 0$. Dengan cara yang sama pada grup dihedral (D_8) dapat ditentukan basis masing-masing nilai Eigen dari matriks tersebut yaitu multiplisitas dari nilai Eigen. Sehingga $m(\lambda_1) = 12$ dan $m(\lambda_2) = 4$.

Dengan demikian terbentuklah spektrum Laplace dari $\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{16})$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{spec_L}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{16})\right)=\begin{bmatrix}4 & 0\\12 & 4\end{bmatrix}$$

Kemudian matriks *signless* Laplace dari $\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{16})$ dapat ditentukan dengan menggunakan cara berikut

$$\boldsymbol{L}^{+}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{16})\right)=\boldsymbol{D}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{16})\right)+\boldsymbol{A}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{16})\right)$$

$$=\begin{bmatrix}
3&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&3&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&3&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&3&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&3&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&3&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&3&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&3&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&3&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&3&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&3&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&3&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&3&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&3&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&3&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&3
\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}
0&0&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0&0
\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}
3&0&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&3&0&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&3&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&3&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&1&0&3&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&1&0&3&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&1&0&1&0&3&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&1&0&1&0&3&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&3&0&1&0&1&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&3&0&1&0&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&3&0&1&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&3&0&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&3&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&3&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0&3&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0&3
\end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks *signless* Laplace maka dicari nilai Eigen dari matriks *signless* Laplace tersebut.

$$det\left(\boldsymbol{L}^{+}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{16})\right)-\lambda\boldsymbol{I}\right)$$

$$= det\left(\begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3-\lambda & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3-\lambda & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

Matriks tersebut direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan menggunakan cara yang sama pada grup dihedral (D_8), diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut

$$p(\lambda) = (3-\lambda)^4\left(-\frac{\lambda^2-6\lambda+8}{-3+\lambda}\right)^4\left(-\frac{\lambda^2-7\lambda+10}{\lambda-4}\right)^4\left(-\frac{\lambda^2-8\lambda+12}{\lambda-5}\right)^4$$

$$= (\lambda-6)^4(\lambda-2)^{12}$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 6$ dan $\lambda_2 = 2$. Dengan cara yang sama pada grup dihedral (D_8) dapat ditentukan basis masing-masing nilai Eigen dari matriks tersebut yaitu multiplisitas dari nilai Eigen. Sehingga $m(\lambda_1) = 4$ dan $m(\lambda_2) = 12$.

Dengan demikian terbentuklah spektrum *signless* Laplace dari $\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{16})$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{spec_{L^+}}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{16})\right) = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$$

Dari spektrum yang telah ditemukan, diperoleh bentuk polinomial karakteristik dan spektrum *adjacency* graf subgrup $\langle r^2\rangle$ dari beberapa grup dihedral, di antaranya

Tabel 3.4 Polinomial Karakteristik Matriks *Adjacency* dari Beberapa Graf Subgrup $\langle r^2 \rangle$ dari Grup Dihedral D_{2n}

n	Graf Subgrup	Polinomial Graf Subgrup
4	Grup Dihedral D_8	$(\lambda-1)^4(\lambda+1)^4$
6	Grup Dihedral D_{12}	$-(\lambda-2)^4(\lambda+1)^8$
8	Grup Dihedral D_{16}	$(\lambda-3)^4(\lambda+1)^{12}$
$\vdots$		
n	Grup Dihedral D_{2n}	$(-1)^{\frac{n}{2}}\left(\lambda-\left(\frac{n-2}{2}\right)\right)^4(\lambda+1)^{2(n-2)}$

Tabel 3.5 Spektrum *Adjacency* dari Beberapa Graf Subgrup $\langle r^2 \rangle$ dari Grup Dihedral D_{2n}

n	Graf Subgrup	Spektrum Graf Subgrup
4	Grup Dihedral D_8	$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$
6	Grup Dihedral D_{12}	$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$
8	Grup Dihedral D_{16}	$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$
$\vdots$		
n	Grup Dihedral D_{2n}	$\begin{bmatrix} \left(\frac{n-2}{2}\right) & -1 \\ 4 & 2(n-2) \end{bmatrix}$

Teorema 1

Pola umum polinomial karakteristik matriks *adjacency* $\boldsymbol{A}\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})\right)$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$p(\lambda)=(-1)^{\frac{n}{2}}\left(\lambda-\left(\frac{n-2}{2}\right)\right)^4(\lambda+1)^{2(n-2)}$$

Bukti:

Diketahui grup dihedral $(D_{2n})=\{1,r,r^2,\dots,r^{n-1},s,sr,sr^2,\dots,sr^{n-1}\}$. Untuk n genap dan $n \geq 4$ diperoleh bahwa subgrup $\langle r^2 \rangle$ dari grup dihedral D_{2n} adalah $\{1,r^2,\dots,r^{n-2}\}$.

Sesuai dengan definisi graf subgrup, maka diperoleh graf $\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})$ yang terdiri dari 4 graf komplit. Dikatakan graf komplit jika setiap dua titik yang berbeda saling terhubung langsung (*adjacent*). Titik-titik graf komplit yang pertama adalah $\{1, r^2, r^4, \dots, r^{n-2}\}$. Titik-titik graf komplit yang kedua adalah $\{r, r^3, r^5, \dots, r^{n-1}\}$. Titik-titik graf komplit yang ketiga adalah $\{s, sr^2, sr^4, \dots, sr^{n-2}\}$. Titik-titik graf komplit yang keempat adalah $\{sr, sr^3, sr^5, \dots, sr^{n-1}\}$.

Sehingga diperoleh matriks *adjacency* dari $\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})$ sebagai berikut

$$A\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})\right) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} 1 & r & r^2 & \dots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \dots & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Polinomial karakteristik $A\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})\right)$ diperoleh dari $det\left(A\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})\right) - \lambda I\right)$. Dengan eliminasi Gauss $A\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})\right) - \lambda I$ dapat dijadikan matriks segitiga atas atau segitiga bawah atau matriks eselon baris tereduksi sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} (-\lambda) & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & (-\lambda) & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \left(-\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda}\right) & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{(\lambda + 1)\left(\lambda - \frac{n-2}{2}\right)}{\lambda - \frac{n-4}{2}} \end{bmatrix}$$

atau

$$\begin{bmatrix} -\frac{(\lambda+1)\left(\lambda-\frac{n-2}{2}\right)}{\lambda-\frac{n-4}{2}} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \left(-\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right) & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & -\lambda & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -\lambda \end{bmatrix}$$

atau

$$\begin{bmatrix} (-\lambda) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (-\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{(\lambda+1)\left(\lambda-\frac{n-2}{2}\right)}{\lambda-\frac{n-4}{2}} \end{bmatrix}$$

Maka $det\left(\boldsymbol{A}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})\right)-\lambda\boldsymbol{I}\right)$ tidak lain adalah perkalian unsur-unsur diagonal utama matriks-matriks tersebut. Maka diperoleh pola umum polinomial karakteristik dari $\boldsymbol{A}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})\right)$ adalah

$$p(\lambda)=(-1)^{\frac{n}{2}}\left(\lambda-\left(\frac{n-2}{2}\right)\right)^4(\lambda+1)^{2(n-2)}$$

***Corollary* 1**

Pola umum spektrum matriks *adjacency* $\boldsymbol{A}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})\right)$ untuk n genap dan $n\geq 4$ adalah

$$\boldsymbol{spec_A}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})\right)=\begin{bmatrix}\left(\frac{n-2}{2}\right) & -1 \\ 4 & 2(n-2)\end{bmatrix}$$

Bukti:

Berdasarkan Teorema 1, pola umum polinomial karakteristik dari $\boldsymbol{A}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})\right)$ untuk n genap dan $n\geq 4$ adalah

$$p(\lambda)=(-1)^{\frac{n}{2}}\left(\lambda-\left(\frac{n-2}{2}\right)\right)^4(\lambda+1)^{2(n-2)}$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = \left(\frac{n-2}{2}\right)$ dan $\lambda_2 = -1$ dan diperoleh multiplisitas $m(\lambda_1) = 4$ dan $m(\lambda_2) = 2(n-2)$.

Pola umum spektrum matriks *adjacency* graf subgrup $\langle r^2 \rangle$ dari grup dihedral D_{2n} untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$\boldsymbol{spec_A}\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})\right) = \begin{bmatrix} \left(\frac{n-2}{2}\right) & -1 \\ 4 & 2(n-2) \end{bmatrix}$$

Dari spektrum yang telah ditemukan, diperoleh bentuk polinomial karakteristik dan spektrum Laplace graf subgrup $\langle r^2 \rangle$ dari beberapa grup dihedral di antaranya

Tabel 3.6 Polinomial Karakteristik Matriks Laplace dari Beberapa Graf Subgrup $\langle r^2 \rangle$ dari Grup Dihedral D_{2n}

n	Graf Subgrup	Polinomial Graf Subgrup
4	Grup Dihedral D_8	$(\lambda - 2)^4 \lambda^4$
6	Grup Dihedral D_{12}	$-(\lambda - 3)^8 \lambda^4$
8	Grup Dihedral D_{16}	$(\lambda - 4)^{12} \lambda^4$
$\vdots$		
n	Grup Dihedral D_{2n}	$(-1)^{\frac{n}{2}} \left(\lambda - \frac{n}{2}\right)^{2(n-2)} \lambda^4$

Tabel 3.7 Spektrum Laplace dari Beberapa Graf Subgrup $\langle r^2 \rangle$ dari Grup Dihedral D_{2n}

n	Graf Subgrup	Spektrum Graf Subgrup
4	Grup Dihedral D_8	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$
6	Grup Dihedral D_{12}	$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$
8	Grup Dihedral D_{16}	$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 12 & 4 \end{bmatrix}$
$\vdots$		
n	Grup Dihedral D_{2n}	$\begin{bmatrix} \frac{n}{2} & 0 \\ 2(n-2) & 4 \end{bmatrix}$

<u>Teorema 2</u>

Pola umum polinomial karakteristik matriks Laplace $\boldsymbol{L}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})\right)$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$p(\lambda) = (-1)^{\frac{n}{2}}\left(\lambda - \frac{n}{2}\right)^{2(n-2)} \lambda^4$$

Bukti:

Diketahui grup dihedral $(D_{2n}) = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$. Untuk n genap dan $n \geq 4$ diperoleh bahwa subgrup $\langle r^2\rangle$ dari grup dihedral D_{2n} adalah $\{1, r^2, \dots, r^{n-2}\}$.

Sesuai dengan definisi graf subgrup, maka diperoleh graf $\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})$ yang sudah dijelaskan pada pembuktian Teorema 1. Sehingga diperoleh matriks *adjacency* dari $\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{A}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})\right) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccc} 1 & r & r^2 & \dots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \dots & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

dan matriks derajat dari $\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})$ adalah

$$\boldsymbol{D}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})\right) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccc} 1 & r & r^2 & \dots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \dots & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array} & \begin{bmatrix} \frac{n-2}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{n-2}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n-2}{2} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{n-2}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{n-2}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{n-2}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \frac{n-2}{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{n-2}{2} \end{bmatrix} \end{array}$$

Matriks Laplace graf subgrup $\langle r^2\rangle$ dari grup dihedral D_{2n} adalah sebagai berikut

$$
\boldsymbol{L}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})\right)=
\begin{array}{c}
\\ 1\\ r\\ r^2\\ \vdots\\ r^{n-1}\\ s\\ sr\\ sr^2\\ \vdots\\ sr^{n-1}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} 1 & r & r^2 & \dots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \dots & sr^{n-1}\end{array}\\
\begin{bmatrix}
\frac{n-2}{2} & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & \frac{n-2}{2} & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\
-1 & 0 & \frac{n-2}{2} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
0 & -1 & 0 & \dots & \frac{n-2}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{n-2}{2} & 0 & -1 & \dots & 0\\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{n-2}{2} & 0 & \dots & -1\\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \frac{n-2}{2} & \dots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & \frac{n-2}{2}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Polinomial karakteristik $\boldsymbol{L}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})\right)$ diperoleh dari $det\left(\boldsymbol{L}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})\right)-\lambda\boldsymbol{I}\right)$. Dengan eliminasi Gauss pada $\boldsymbol{L}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})\right)-\lambda\boldsymbol{I}$ diperoleh matriks segitiga atas sebagai berikut

$$
\begin{bmatrix}
\frac{n-2}{2}-\lambda & \dots & \dots & \dots & \dots\\
0 & \frac{n-2}{2}-\lambda & \dots & \dots & \dots\\
0 & 0 & -\frac{\left(\lambda-\frac{n-4}{2}\right)\left(\lambda-\frac{n}{2}\right)}{\lambda-\frac{n-2}{2}} & \dots & \dots\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{\lambda\left(\lambda-\frac{n}{2}\right)}{\lambda-1}
\end{bmatrix}
$$

Maka $det\left(\boldsymbol{L}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})\right)-\lambda\boldsymbol{I}\right)$ tidak lain adalah perkalian unsur-unsur diagonal utama matriks segitiga atas tersebut. Maka diperoleh pola umum polinomial karakteristik dari $\boldsymbol{L}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})\right)$ adalah

$$p(\lambda)=(-1)^{\frac{n}{2}}\left(\lambda-\frac{n}{2}\right)^{2(n-2)}\lambda^4$$

***Corollary* 2**

Pola umum spektrum matriks Laplace $\boldsymbol{L}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})\right)$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$\boldsymbol{spec}_L\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})\right) = \begin{bmatrix} \frac{n}{2} & 0 \\ 2(n-2) & 4 \end{bmatrix}$$

Bukti:

Dari Teorema 2, pola umum polinomial karakteristik dari $\boldsymbol{L}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})\right)$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$p(\lambda) = (-1)^{\frac{n}{2}}\left(\lambda - \frac{n}{2}\right)^{2(n-2)} \lambda^4$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = \left(\frac{n}{2}\right)$ dan $\lambda_2 = 0$ dan diperoleh multiplisitas $m(\lambda_1) = 2(n-2)$ dan $m(\lambda_2) = 4$.

Pola umum spektrum matriks Laplace graf subgrup $\langle r^2\rangle$ dari grup dihedral D_{2n} untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$\boldsymbol{spec}_L\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})\right) = \begin{bmatrix} \frac{n}{2} & 0 \\ 2(n-2) & 4 \end{bmatrix}$$

Dari spektrum yang telah ditemukan, diperoleh bentuk polinomial karakteristik dan spektrum *signless* Laplace graf subgrup $\langle r^2\rangle$ dari beberapa grup dihedral di antaranya

Tabel 3.8 Polinomial Karakteristik Matriks *Signless* Laplace dari Beberapa Graf Subgrup $\langle r^2\rangle$ dari Grup Dihedral D_{2n}

n	Graf Subgrup	Polinomial Graf Subgrup
4	Grup Dihedral D_8	$(\lambda-2)^4\lambda^4$
6	Grup Dihedral D_{12}	$-(\lambda-4)^4(\lambda-1)^8$
8	Grup Dihedral D_{16}	$(\lambda-6)^4(\lambda-2)^{12}$

$\vdots$		
n	Grup Dihedral D_{2n}	$(-1)^{\frac{n}{2}}(\lambda-(n-2))^4\left(\lambda-\left(\frac{n-4}{2}\right)\right)^{2(n-2)}$

Tabel 3.9 Spektrum *Signless* Laplace dari Beberapa Graf Subgrup $\langle r^2\rangle$ dari Grup Dihedral D_{2n}

n	Graf Subgrup	Spektrum Graf Subgrup
4	Grup Dihedral D_8	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$
6	Grup Dihedral D_{12}	$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$
8	Grup Dihedral D_{16}	$\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$
$\vdots$		
n	Grup Dihedral D_{2n}	$\begin{bmatrix} (n-2) & \left(\frac{n-4}{2}\right) \\ 4 & 2(n-2) \end{bmatrix}$

Teorema 3

Pola umum polinomial karakteristik matriks *signless* Laplace $\boldsymbol{L}^+\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})\right)$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$p(\lambda)=(-1)^{\frac{n}{2}}(\lambda-(n-2))^4\left(\lambda-\left(\frac{n-4}{2}\right)\right)^{2(n-2)}$$

Bukti:

Diketahui grup dihedral $(D_{2n})=\{1,r,r^2,\dots,r^{n-1},s,sr,sr^2,\dots,sr^{n-1}\}$. Untuk n genap dan $n \geq 4$ diperoleh bahwa subgrup $\langle r^2\rangle$ dari grup dihedral D_{2n} adalah $\{1,r^2,\dots,r^{n-2}\}$.

Sesuai dengan definisi graf subgrup, maka diperoleh graf $\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})$ yang sudah dijelaskan pada pembuktian Teorema 1. Sehingga diperoleh matriks *adjacency* dari $\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{A}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})\right)=\begin{array}{c} \\ 1\\ r\\ r^2\\ \vdots\\ r^{n-1}\\ s\\ sr\\ sr^2\\ \vdots\\ sr^{n-1}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccccc} 1 & r & r^2 & \dots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \dots & sr^{n-1}\end{array}\\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}\end{array}$$

dan matriks derajat dari $\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})$ adalah

$$\boldsymbol{D}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})\right)=\begin{array}{c} \\ 1\\ r\\ r^2\\ \vdots\\ r^{n-1}\\ s\\ sr\\ sr^2\\ \vdots\\ sr^{n-1}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccccc} 1 & r & r^2 & \dots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \dots & sr^{n-1}\end{array}\\ \begin{bmatrix} \frac{n-2}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \frac{n-2}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \frac{n-2}{2} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{n-2}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{n-2}{2} & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{n-2}{2} & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \frac{n-2}{2} & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{n-2}{2}\end{bmatrix}\end{array}$$

Matriks *signless* Laplace graf subgrup $\langle r^2\rangle$ dari grup dihedral D_{2n} adalah sebagai berikut

$$\boldsymbol{L}^{+}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})\right)=\begin{array}{c} \\ 1\\ r\\ r^2\\ \vdots\\ r^{n-1}\\ s\\ sr\\ sr^2\\ \vdots\\ sr^{n-1}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccccc} 1 & r & r^2 & \dots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \dots & sr^{n-1}\end{array}\\ \begin{bmatrix} \frac{n-2}{2} & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \frac{n-2}{2} & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 1 & 0 & \frac{n-2}{2} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 1 & 0 & \dots & \frac{n-2}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{n-2}{2} & 0 & 1 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{n-2}{2} & 0 & \dots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \frac{n-2}{2} & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \frac{n-2}{2}\end{bmatrix}\end{array}$$

Polinomial karakteristik $\boldsymbol{L}^{+}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})\right)$ diperoleh dari $det\left(\boldsymbol{L}^{+}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})\right)-\lambda\boldsymbol{I}\right)$. Dengan eliminasi Gauss pada $\boldsymbol{L}^{+}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})\right)-\lambda\boldsymbol{I}$ diperoleh matriks segitiga atas sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} \frac{n-2}{2}-\lambda & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \frac{n-2}{2}-\lambda & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & -\frac{\left(\lambda-\frac{n-4}{2}\right)\left(\lambda-\frac{n}{2}\right)}{\lambda-\frac{n-2}{2}} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{\left(\lambda-\frac{n-4}{2}\right)\left(\lambda-(n-2)\right)}{\lambda-(n-3)} \end{bmatrix}$$

Maka $det\left(\boldsymbol{L}^{+}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})\right)-\lambda\boldsymbol{I}\right)$ tidak lain adalah perkalian unsur-unsur diagonal utama matriks segitiga atas tersebut. Maka diperoleh pola umum polinomial karakteristik dari $\boldsymbol{L}^{+}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})\right)$ adalah

$$p(\lambda)=(-1)^{\frac{n}{2}}\left(\lambda-(n-2)\right)^{4}\left(\lambda-\left(\frac{n-4}{2}\right)\right)^{2(n-2)}$$

***Corollary* 3**

Pola umum spektrum matriks *signless* Laplace $\boldsymbol{L}^{+}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})\right)$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$\boldsymbol{spec}_{\boldsymbol{L}^{+}}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})\right)=\begin{bmatrix}(n-2) & \left(\frac{n-4}{2}\right) \\ 4 & 2(n-2)\end{bmatrix}$$

Bukti:

Dari Teorema 3, pola umum polinomial karakteristik dari $\boldsymbol{L}^{+}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})\right)$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$p(\lambda)=(-1)^{\frac{n}{2}}\left(\lambda-(n-2)\right)^{4}\left(\lambda-\left(\frac{n-4}{2}\right)\right)^{2(n-2)}$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = (n-2)$ dan $\lambda_2 = \left(\frac{n-4}{2}\right)$ dan diperoleh multiplisitas $m(\lambda_1) = 4$ dan $m(\lambda_2) = 2(n-2)$.

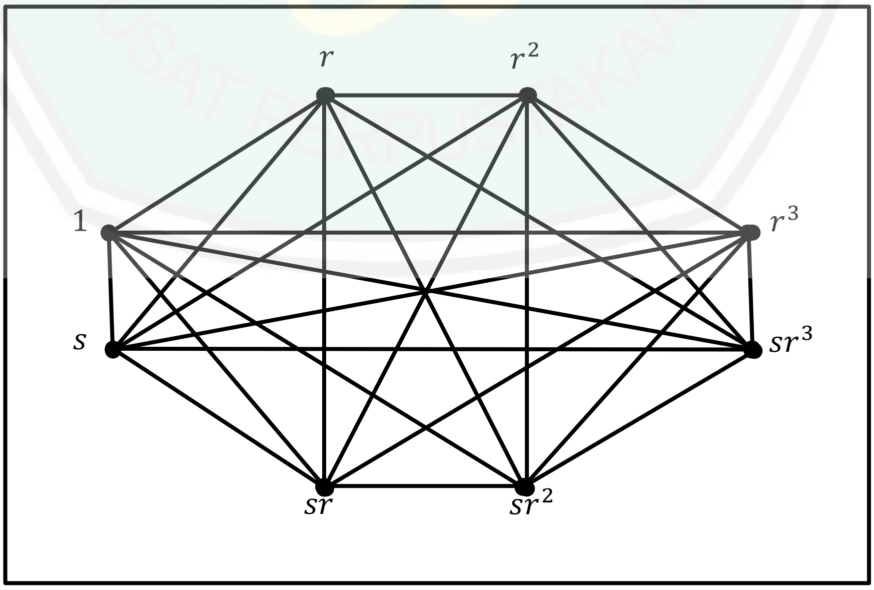
Pola umum spektrum matriks *signless* Laplace graf subgrup $\langle r^2 \rangle$ dari grup dihedral D_{2n} untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$\boldsymbol{spec}_{L^+}\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})\right) = \begin{bmatrix} (n-2) & \left(\frac{n-4}{2}\right) \\ 4 & 2(n-2) \end{bmatrix}$$

3.2 Pola Umum Spektrum Komplemen Graf Subgrup $\langle r^2 \rangle$ dari Grup Dihedral

3.2.1 Spektrum Komplemen Graf Subgrup $\langle r^2 \rangle$ dari D_8

Komplemen subgrup dari grup dihedral D_8 yang dibangun oleh r^2 adalah $\{r, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$. Titik komplemen graf subgrup $\langle r^2 \rangle$ dari grup dihedral (D_8) adalah $V\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_8)}\right) = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$. Sehingga jika dua unsur di grup dihedral D_8 dioperasikan menggunakan operasi komposisi $(\circ)$ menghasilkan $\{r, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$, maka diperoleh komplemen graf subgrup berikut



Gambar 3.4 Graf $\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_8)}$

Dari Gambar 3.4 dapat diperoleh matriks a*djacency* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_8)}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{A}(\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_8)}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks *adjacency* maka dicari nilai Eigen dari matriks *adjacency* tersebut.

$$det\left(\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_8)}\right) - \lambda \boldsymbol{I}\right)$$

$$= det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$= det\left(\begin{bmatrix} 0-\lambda & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0-\lambda & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0-\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0-\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0-\lambda & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

Matriks tersebut dijadikan matriks segitiga atas sebagai berikut

$$det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{\lambda^2-1}{\lambda} & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda(\lambda^2-2)}{\lambda^2-1} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda(\lambda^2-4)}{\lambda^2-2} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-2\lambda-4}{\lambda-2} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^3-2\lambda^2-9\lambda-6}{\lambda^2-2\lambda-4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda(\lambda^3-2\lambda^2-14\lambda-12)}{\lambda^3-2\lambda^2-9\lambda-6} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda(\lambda^2-4\lambda-12)}{\lambda^2-4\lambda-6} \end{bmatrix}\right)$$

Polinomial karakteristik $\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_8)}\right) - \lambda \boldsymbol{I}$ diperoleh dari hasil perkalian diagonal matriks segitiga atas sebagai berikut

$$p(\lambda) = (-\lambda)\left(-\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)\left(-\frac{\lambda(\lambda^2-2)}{\lambda^2-1}\right)\left(-\frac{\lambda(\lambda^2-4)}{\lambda^2-2}\right)\left(-\frac{\lambda^2-2\lambda-4}{\lambda-2}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^3-2\lambda^2-9\lambda-6}{\lambda^2-2\lambda-4}\right)\left(-\frac{\lambda(\lambda^3-2\lambda^2-14\lambda-12)}{\lambda^3-2\lambda^2-9\lambda-6}\right)\left(-\frac{\lambda(\lambda^2-4\lambda-12)}{\lambda^2-4\lambda-6}\right)$$

$$= (\lambda-6)\lambda^4(\lambda+2)^3$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 0,$ dan $\lambda_3 = -2$. Kemudian dicari basis untuk ruang vektor Eigen dari matriks tersebut.

Untuk $\lambda_1 = 6$ disubstitusikan ke dalam $\left(\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)}\right) - \lambda\boldsymbol{I}\right)$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} -6 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut direduksi, sehingga diperoleh $m(\lambda_1) = 1$.

Untuk $\lambda_2 = 0$ disubstitusikan ke dalam $\left(\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)}\right) - \lambda\boldsymbol{I}\right)$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut direduksi, sehingga diperoleh $m(\lambda_2) = 4$.

Untuk $\lambda_3 = -2$ disubstitusikan ke dalam $\left(\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)}\right) - \lambda\boldsymbol{I}\right)$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut direduksi, sehingga diperoleh $m(\lambda_2) = 3$.

Dengan demikian terbentuklah spektrum *adjacency* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_8)}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{spec_A}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_8)}\right) = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, dari Gambar 3.4 dapat diperoleh matriks derajat dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_8)}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{D}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_8)}\right) = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh matriks Laplace dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_8)}$

$$\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_8)}\right) = \boldsymbol{D}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_8)}\right) - \boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_8)}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 6 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 6 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks Laplace maka dicari nilai Eigen dari matriks Laplace tersebut.

$$det\left(\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_8)}\right) - \lambda \boldsymbol{I}\right)$$

$$= det\left(\begin{bmatrix} 6 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 6 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 6 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$= det\left(\begin{bmatrix} 6-\lambda & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 6-\lambda & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 6-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 6-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 6-\lambda & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 6-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 6-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

Matriks tersebut dijadikan matriks segitiga atas sebagai berikut

$$det\left(\begin{bmatrix} 6-\lambda & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -\frac{\lambda^2-12\lambda+35}{-6+\lambda} & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda^3-18\lambda^2+106\lambda-204}{\lambda^2-12\lambda+35} & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^3-18\lambda^2+104\lambda-192}{\lambda^2-12\lambda+34} & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-10\lambda+20}{\lambda-4} & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^3-16\lambda^2+75\lambda-84}{\lambda^2-10\lambda+20} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^4-22\lambda^3+166\lambda^2-468\lambda+288}{\lambda^3-16\lambda^2+75\lambda-84} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda(\lambda^2-14\lambda+48)}{\lambda^2-8\lambda+6} \end{bmatrix}\right)$$

Polinomial karakteristik $\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)}\right) - \lambda\boldsymbol{I}$ diperoleh dari hasil perkalian diagonal matriks segitiga atas sebagai berikut

$$p(\lambda) = (6-\lambda)\left(-\frac{\lambda^2-12\lambda+35}{-6+\lambda}\right)\left(-\frac{\lambda^3-18\lambda^2+106\lambda-204}{\lambda^2-12\lambda+35}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^3-18\lambda^2+104\lambda-192}{\lambda^2-12\lambda+34}\right)\left(-\frac{\lambda^2-10\lambda+20}{\lambda-4}\right)\left(-\frac{\lambda^3-16\lambda^2+75\lambda-84}{\lambda^2-10\lambda+20}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^4-22\lambda^3+166\lambda^2-468\lambda+288}{\lambda^3-16\lambda^2+75\lambda-84}\right)\left(-\frac{\lambda(\lambda^2-14\lambda+48)}{\lambda^2-8\lambda+6}\right)$$

$$= (\lambda-8)^3(\lambda-6)^4\lambda$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 8, \lambda_2 = 6, \text{dan } \lambda_3 = 0.$ Kemudian dicari basis untuk ruang vektor Eigen dari matriks tersebut.

Untuk $\lambda_1 = 8$ disubstitusikan ke dalam $\left(\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)}\right) - \lambda\boldsymbol{I}\right)$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut direduksi, sehingga diperoleh $m(\lambda_1) = 3$.

Untuk $\lambda_2 = 6$ disubstitusikan ke dalam $\left(\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_8)}\right) - \lambda \boldsymbol{I}\right)$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut direduksi, sehingga diperoleh $m(\lambda_2) = 4$.

Untuk $\lambda_3 = 0$ disubstitusikan ke dalam $\left(\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_8)}\right) - \lambda \boldsymbol{I}\right)$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 6 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 6 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut direduksi, sehingga diperoleh $m(\lambda_3) = 1$.

Dengan demikian terbentuklah spektrum Laplace dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_8)}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{spec_L}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_8)}\right) = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Kemudian matriks *signless* Laplace dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_8)}$ dapat ditentukan dengan menggunakan cara berikut

$$\boldsymbol{L}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)}\right) = \boldsymbol{D}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)}\right) + \boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks *signless* Laplace maka dicari nilai Eigen dari matriks *signless* Laplace tersebut.

$$det\left(\boldsymbol{L}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)}\right) - \lambda \boldsymbol{I}\right)$$

$$= det\left(\begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$= det\left(\begin{bmatrix} 6-\lambda & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6-\lambda & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 6-\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 6-\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6-\lambda & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 6-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 6-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 6-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

Matriks tersebut dapat dijadikan matriks segitiga atas sebagai berikut

$$det\left(\begin{bmatrix} 6-\lambda & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{\lambda^2-12\lambda+35}{-6+\lambda} & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda^3-18\lambda^2+106\lambda-204}{\lambda^2-12\lambda+35} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^3-18\lambda^2+104\lambda-192}{\lambda^2-12\lambda+34} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-14\lambda+44}{\lambda-8} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^3-20\lambda^2+123\lambda-240}{\lambda^2-14\lambda+44} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^4-26\lambda^3+238\lambda^2-924\lambda+1296}{\lambda^3-20\lambda^2+123\lambda-240} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^3-22\lambda^2+144\lambda-288}{\lambda^2-16\lambda+54} \end{bmatrix}\right)$$

Polinomial karakteristik $\boldsymbol{L}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)}\right)-\lambda\boldsymbol{I}$ diperoleh dari hasil perkalian diagonal matriks segitiga atas sebagai berikut

$$p(\lambda)=(6-\lambda)\left(-\frac{\lambda^2-12\lambda+35}{-6+\lambda}\right)\left(-\frac{\lambda^3-18\lambda^2+106\lambda-204}{\lambda^2-12\lambda+35}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^3-18\lambda^2+104\lambda-192}{\lambda^2-12\lambda+34}\right)\left(-\frac{\lambda^2-14\lambda+44}{\lambda-8}\right)\left(-\frac{\lambda^3-20\lambda^2+123\lambda-240}{\lambda^2-14\lambda+44}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^4-26\lambda^3+238\lambda^2-924\lambda+1296}{\lambda^3-20\lambda^2+123\lambda-240}\right)\left(-\frac{\lambda^3-22\lambda^2+144\lambda-288}{\lambda^2-16\lambda+54}\right)$$

$$=(\lambda-12)(\lambda-6)^4(\lambda-4)^3$$

Dengan menetapkan $p(\lambda)=0$ maka diperoleh $\lambda_1=12, \lambda_2=6,$ dan $\lambda_3=4$. Kemudian dicari basis untuk ruang vektor Eigen dari matriks tersebut.

Untuk $\lambda_1=12$ disubstitusikan ke dalam $\left(\boldsymbol{L}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)}\right)-\lambda\boldsymbol{I}\right)$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} -6 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut direduksi, sehingga diperoleh $m(\lambda_1)=1$.

Untuk $\lambda_2=6$ disubstitusikan ke dalam $\left(\boldsymbol{L}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)}\right)-\lambda\boldsymbol{I}\right)$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut direduksi, sehingga diperoleh $m(\lambda_2)=4$.

Untuk $\lambda_3 = 4$ disubstitusikan ke dalam $\left(\boldsymbol{L}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)}\right) - \lambda\boldsymbol{I}\right)$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut direduksi, sehingga diperoleh $m(\lambda_3) = 3$.

Dengan demikian terbentuklah spektrum *signless* Laplace dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{spec}_{\boldsymbol{L}^{+}}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)}\right) = \begin{bmatrix} 12 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, dari Gambar 3.4 dapat diperoleh matriks *detour* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks *detour* maka dicari nilai Eigen dari matriks *detour* tersebut.

$det\left(\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)}\right) - \lambda\boldsymbol{I}\right)$

$$= det\left(\begin{bmatrix} 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$= det\left(\begin{bmatrix} 0-\lambda & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 0-\lambda & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 0-\lambda & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 0-\lambda & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 0-\lambda & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0-\lambda & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0-\lambda & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat pada *software* Maple 18, diperoleh matriks segitiga atas sebagai berikut

$$det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 0 & -\frac{\lambda^2-49}{\lambda} & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-7\lambda-98}{\lambda-7} & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-14\lambda-147}{\lambda-14} & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-21\lambda-196}{\lambda-21} & 7 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-28\lambda-245}{\lambda-28} & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-35\lambda-294}{\lambda-35} & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-42\lambda-343}{\lambda-42} \end{bmatrix}\right)$$

Polinomial karakteristik $\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)}\right)-\lambda\boldsymbol{I}$ diperoleh dari hasil perkalian diagonal matriks segitiga atas sebagai berikut

$$p(\lambda)=(-\lambda)\left(-\frac{\lambda^2-49}{\lambda}\right)\left(-\frac{\lambda^2-7\lambda-98}{\lambda-7}\right)\left(-\frac{\lambda^2-14\lambda-147}{\lambda-14}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^2-21\lambda-196}{\lambda-21}\right)\left(-\frac{\lambda^2-28\lambda-245}{\lambda-28}\right)\left(-\frac{\lambda^2-35\lambda-294}{\lambda-35}\right)\left(-\frac{\lambda^2-42\lambda-343}{\lambda-42}\right)$$

$$=(\lambda-49)(\lambda+7)^7$$

Dengan menetapkan $p(\lambda)=0$ maka diperoleh $\lambda_1=49$ dan $\lambda_2=-7$. Kemudian dicari basis untuk ruang vektor Eigen dari matriks tersebut.

Untuk $\lambda_1=49$ disubstitusikan ke dalam $\left(\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)}\right)-\lambda\boldsymbol{I}\right)$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} -49 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & -49 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & -49 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & -49 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & -49 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & -49 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & -49 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & -49 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut direduksi dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat dalam *software* Maple 18, sehingga diperoleh $m(\lambda_1) = 1$.

Untuk $\lambda_2 = -7$ disubstitusikan ke dalam $\left(\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)}\right) - \lambda\boldsymbol{I}\right)$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut direduksi dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat dalam *software* Maple 18, sehingga diperoleh $m(\lambda_2) = 7$.

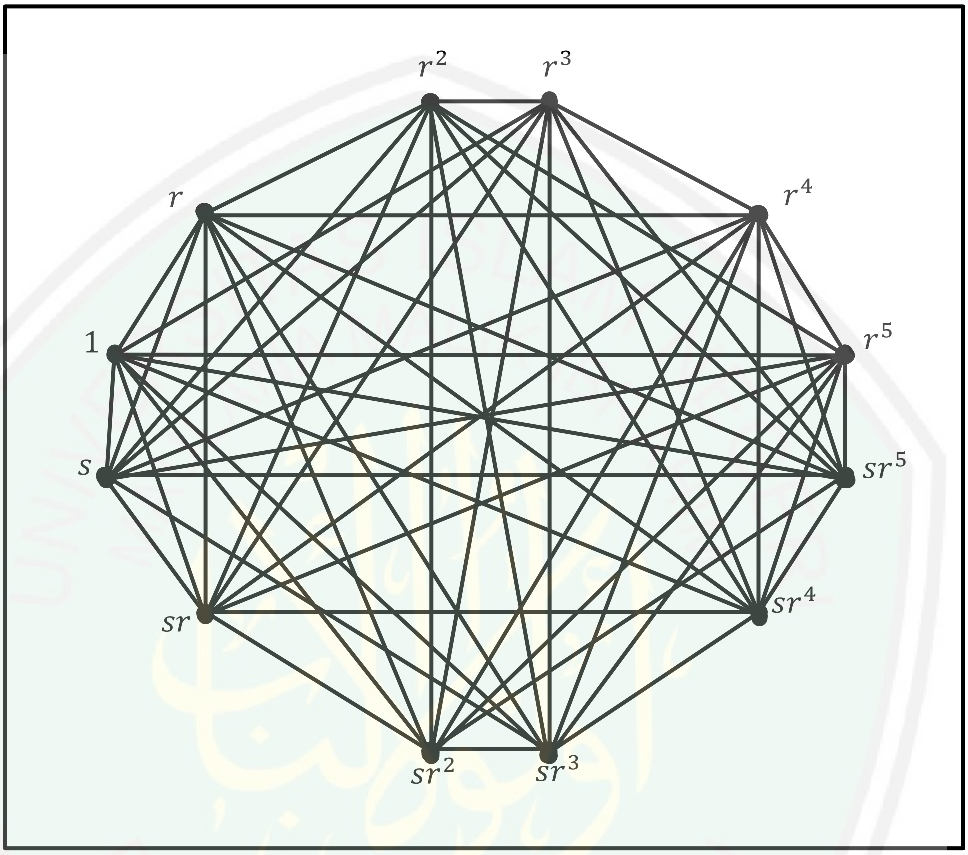
Dengan demikian terbentuklah spektrum *detour* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{spec_{DD}}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)}\right) = \begin{bmatrix} 49 & -7 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

3.2.2 Spektrum Komplemen Graf Subgrup $\langle r^2\rangle$ dari D_{12}

Komplemen subgrup dari grup dihedral D_{12} yang dibangun oleh r^2 adalah $\{r, r^3, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$. Titik komplemen graf subgrup $\langle r^2\rangle$ dari grup dihedral D_{12} adalah $V\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{12})}\right) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$.

Sehingga jika dua unsur di grup dihedral D_{12} dioperasikan menggunakan operasi komposisi $(\circ)$ menghasilkan $\{r, r^3, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$, maka diperoleh komplemen graf subgrup berikut



Gambar 3.5 Graf $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{12})}$

Dari Gambar 3.5 dapat diperoleh matriks *adjacency* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{12})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{12})}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks *adjacency* maka dicari nilai Eigen dari matriks *adjacency* tersebut.

$det\left(\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{12})}\right)-\lambda\boldsymbol{I}\right)$

$$= det\left(\begin{bmatrix} 0-\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0-\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0-\lambda & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0-\lambda & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0-\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0-\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0-\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0-\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0-\lambda & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

Matriks tersebut direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan menggunakan cara yang sama pada grup dihedral (D_8), diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut

$$p(\lambda) = (-\lambda)\left(-\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)\left(-\frac{\lambda(\lambda^2-2)}{\lambda^2-1}\right)\left(-\frac{\lambda(\lambda^2-4)}{\lambda^2-2}\right)\left(-\frac{\lambda(\lambda^2-6)}{\lambda^2-4}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda(\lambda^2-9)}{\lambda^2-6}\right)\left(-\frac{\lambda^2-3\lambda-6}{\lambda-3}\right)\left(-\frac{\lambda^3-3\lambda^2-13\lambda-9}{\lambda^2-3\lambda-6}\right)\left(-\frac{\lambda(\lambda^3-3\lambda^2-20\lambda-18)}{\lambda^3-3\lambda^2-13\lambda-9}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda(\lambda^3-3\lambda^2-28\lambda-36)}{\lambda^3-3\lambda^2-20\lambda-18}\right)\left(-\frac{\lambda(\lambda^3-3\lambda^2-36\lambda-54)}{\lambda^3-3\lambda^2-28\lambda-36}\right)\left(-\frac{\lambda(\lambda^2-6\lambda-27)}{\lambda^2-6\lambda-18}\right)$$

$$= (\lambda-9)\lambda^8(\lambda+3)^3$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = 0,$ dan $\lambda_3 = -3$. Dengan cara yang sama pada grup dihedral (D_8) dapat ditentukan basis masing-masing nilai Eigen dari matriks tersebut yaitu multiplisitas dari nilai Eigen. Sehingga $m(\lambda_1) = 1$, $m(\lambda_2) = 8$ dan $m(\lambda_3) = 3$.

Dengan demikian terbentuklah spektrum *adjacency* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{12})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{spec_A}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{12})}\right) = \begin{bmatrix} 9 & 0 & -3 \\ 1 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, dari Gambar 3.5 dapat diperoleh matriks derajat dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{12})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{D}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{12})}\right)=\begin{bmatrix}9&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&9&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&9&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&9&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&9&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&9&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&9&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&9&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&9&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&9&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&9&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&9\end{bmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh matriks Laplace dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{12})}$

$\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{12})}\right)=\boldsymbol{D}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{12})}\right)-\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{12})}\right)$

$$=\begin{bmatrix}9&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&9&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&9&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&9&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&9&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&9&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&9&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&9&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&9&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&9&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&9&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&1&0&1&0&1&1&1&1&1&1&1\\1&0&1&0&1&0&1&1&1&1&1&1\\0&1&0&1&0&1&1&1&1&1&1&1\\1&0&1&0&1&0&1&1&1&1&1&1\\0&1&0&1&0&1&1&1&1&1&1&1\\1&0&1&0&1&0&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&0&1&0&1&0&1\\1&1&1&1&1&1&1&0&1&0&1&0\\1&1&1&1&1&1&0&1&0&1&0&1\\1&1&1&1&1&1&1&0&1&0&1&0\\1&1&1&1&1&1&0&1&0&1&0&1\\1&1&1&1&1&1&1&0&1&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}9&-1&0&-1&0&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\-1&9&-1&0&-1&0&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\0&-1&9&-1&0&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\-1&0&-1&9&-1&0&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\0&-1&0&-1&9&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\-1&0&-1&0&-1&9&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\-1&-1&-1&-1&-1&-1&9&-1&0&-1&0&-1\\-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&9&-1&0&-1&0\\-1&-1&-1&-1&-1&-1&0&-1&9&-1&0&-1\\-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&0&1&9&1&0\\-1&-1&-1&-1&-1&-1&0&-1&0&-1&9&-1\\-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&0&-1&0&-1&9\end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks Laplace maka dicari nilai Eigen dari matriks Laplace tersebut.

$det\left(\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{12})}\right)-\lambda\boldsymbol{I}\right)$

$$= det\left(\begin{bmatrix} 9-\lambda & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 9-\lambda & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 9-\lambda & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 9-\lambda & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 9-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 9-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 9-\lambda & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 9-\lambda & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 9-\lambda & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 9-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 9-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 9-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

Matriks tersebut direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan menggunakan cara yang sama pada grup dihedral (D_8), diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut

$$p(\lambda) = (9-\lambda)\left(-\frac{\lambda^2 - 18\lambda + 80}{\lambda - 9}\right)\left(-\frac{\lambda^3 - 18\lambda^2 + 79\lambda + 9}{\lambda^2 - 18\lambda + 80}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^4 = 27\lambda^3 - 239\lambda^2 + 675\lambda - 162}{\lambda^3 - 18\lambda^2 + 79\lambda + 9}\right)\left(-\frac{(\lambda^3 - 18\lambda^2 + 75\lambda + 36)\lambda}{\lambda^3 - 18\lambda^2 + 77\lambda + 18}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^4 - 27\lambda^3 + 234\lambda^2 - 594\lambda - 486}{\lambda^3 - 18\lambda^2 + 75\lambda + 36}\right)\left(-\frac{\lambda^4 - 27\lambda^3 + 228\lambda^2 - 504\lambda - 756}{\lambda^3 - 18\lambda^2 + 72\lambda + 54}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^5 - 36\lambda^4 + 464\lambda^3 - 2382\lambda^2 + 2448\lambda + 9720}{\lambda^4 - 27\lambda^3 + 228\lambda^2 - 504\lambda - 756}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^6 - 45\lambda^5 + 781\lambda^4 - 6321\lambda^3 + 20988\lambda^2 + 2592\lambda - 113724}{\lambda^5 - 36\lambda^4 + 464\lambda^3 - 2382\lambda^2 + 2448\lambda + 9720}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^6 - 45\lambda^5 + 773\lambda^4 - 6045\lambda^3 + 17568\lambda^2 + 20250\lambda - 144342}{\lambda^5 - 36\lambda^4 + 457\lambda^3 - 2208\lambda^2 + 1116\lambda + 12636}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^6 - 45\lambda^5 + 765\lambda^4 - 5769\lambda^3 + 14148\lambda^2 + 37908\lambda - 174960}{\lambda^5 - 36\lambda^4 + 449\lambda^3 - 2004\lambda^2 - 468\lambda + 16038}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^5 - 33\lambda^4 + 360\lambda^3 - 1134\lambda^2 - 3402\lambda + 17496}{\lambda^4 - 24\lambda^3 + 153\lambda^2 + 36\lambda - 1620}\right)$$

$$= (\lambda - 12)^3(\lambda - 9)^8\lambda$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 12, \lambda_2 = 9,$ dan $\lambda_3 = 0.$ Dengan cara yang sama pada grup dihedral (D_8) dapat ditentukan basis masing-

masing nilai Eigen dari matriks tersebut yaitu multiplisitas dari nilai Eigen. Sehingga $m(\lambda_1) = 3$, $m(\lambda_2) = 8$ dan $m(\lambda_3) = 1$.

Dengan demikian terbentuklah spektrum Laplace dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{12})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{spec_L}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{12})}\right) = \begin{bmatrix} 12 & 9 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

Kemudian matriks *signless* Laplace dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{12})}$ dapat ditentukan dengan menggunakan cara berikut

$$\boldsymbol{L}^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{12})}\right) = \boldsymbol{D}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{12})}\right) + \boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{12})}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 9 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 9 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 9 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 9 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 9 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 9 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 9 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 9 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks *signless* Laplace maka dicari nilai Eigen dari matriks *signless* Laplace tersebut.

$$det\left(\boldsymbol{L}^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{12})}\right) - \lambda \boldsymbol{I}\right)$$

$$= det \left(\begin{bmatrix} 9-\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9-\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 9-\lambda & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 9-\lambda & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 9-\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 9-\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 9-\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 9-\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 9-\lambda & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 9-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 9-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 9-\lambda \end{bmatrix} \right)$$

Matriks tersebut direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan menggunakan cara yang sama pada grup dihedral (D_8), diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut

$$p(\lambda) = (9-\lambda)\left(-\frac{\lambda^2 - 18\lambda + 80}{\lambda - 9}\right)\left(-\frac{\lambda^3 - 27\lambda^2 + 241\lambda - 711}{\lambda^2 - 18\lambda + 80}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^3 - 27\lambda^2 + 239\lambda - 693}{\lambda^2 - 18\lambda + 79}\right)\left(-\frac{\lambda^3 - 27\lambda^2 + 237\lambda - 675}{\lambda^2 - 18\lambda + 77}\right)\left(-\frac{\lambda^3 - 27\lambda^2 + 234\lambda - 648}{\lambda^2 - 18\lambda + 75}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^2 - 21\lambda + 102}{\lambda - 12}\right)\left(-\frac{\lambda^3 - 30\lambda^2 + 284\lambda - 864}{\lambda^2 - 21\lambda + 102}\right)\left(-\frac{\lambda^4 - 39\lambda^3 + 547\lambda^2 - 3303\lambda + 7290}{\lambda^3 - 30\lambda^2 + 284\lambda - 864}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^4 - 39\lambda^3 + 539\lambda^2 - 3177\lambda + 6804}{\lambda^3 - 30\lambda^2 + 277\lambda - 810}\right)\left(-\frac{\lambda^4 - 39\lambda^3 + 531\lambda^2 - 3051\lambda + 6318}{\lambda^3 - 30\lambda^2 + 269\lambda - 756}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^3 - 33\lambda^2 + 324\lambda - 972}{\lambda^2 - 24\lambda + 117}\right)$$

$$= (\lambda - 18)(\lambda - 9)^8(\lambda - 6)^3$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 18, \lambda_2 = 9,$ dan $\lambda_3 = 6$. Dengan cara yang sama pada grup dihedral (D_8) dapat ditentukan basis masing-masing nilai Eigen dari matriks tersebut yaitu multiplisitas dari nilai Eigen. Sehingga $m(\lambda_1) = 1, m(\lambda_2) = 8$ dan $m(\lambda_3) = 3$.

Dengan demikian terbentuklah spektrum *signless* Laplace dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{12})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{spec_{L^+}}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{12})}\right) = \begin{bmatrix} 18 & 9 & 6 \\ 1 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, dari Gambar 3.5 dapat diperoleh matriks *detour* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{12})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{12})}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks *detour* maka dicari nilai Eigen dari matriks *detour* tersebut.

$$det\left(\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{12})}\right) - \lambda I\right)$$

$$= det\left(\begin{bmatrix} 0-\lambda & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 0-\lambda & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 0-\lambda & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 0-\lambda & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 0-\lambda & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0-\lambda & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0-\lambda & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0-\lambda & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0-\lambda & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0-\lambda & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0-\lambda & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

Matriks tersebut direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan menggunakan cara yang sama pada grup dihedral (D_8), diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut

$$p(\lambda) = (-\lambda)\left(-\frac{\lambda^2 - 121}{\lambda}\right)\left(-\frac{\lambda^2 - 11\lambda - 242}{\lambda - 11}\right)\left(-\frac{\lambda^2 - 22\lambda - 363}{\lambda - 22}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^2 - 33\lambda - 484}{\lambda - 33}\right)\left(-\frac{\lambda^2 - 44\lambda - 605}{\lambda - 44}\right)\left(-\frac{\lambda^2 - 55\lambda - 726}{\lambda - 55}\right)\left(-\frac{\lambda^2 - 66\lambda - 847}{\lambda - 66}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^2 - 77\lambda - 968}{\lambda - 77}\right)\left(-\frac{\lambda^2 - 88\lambda - 1089}{\lambda - 88}\right)\left(-\frac{\lambda^2 - 99\lambda - 1210}{\lambda - 99}\right)\left(-\frac{\lambda^2 - 110\lambda - 1331}{\lambda - 110}\right)$$

$$= (\lambda - 121)(\lambda + 11)^{11}$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 121$ dan $\lambda_2 = -11$. Dengan cara yang sama pada grup dihedral (D_8) dapat ditentukan basis masing-masing nilai Eigen dari matriks tersebut yaitu multiplisitas dari nilai Eigen. Sehingga $m(\lambda_1) = 1$ dan $m(\lambda_2) = 11$.

Dengan demikian terbentuklah spektrum *detour* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{12})}$ sebagai berikut

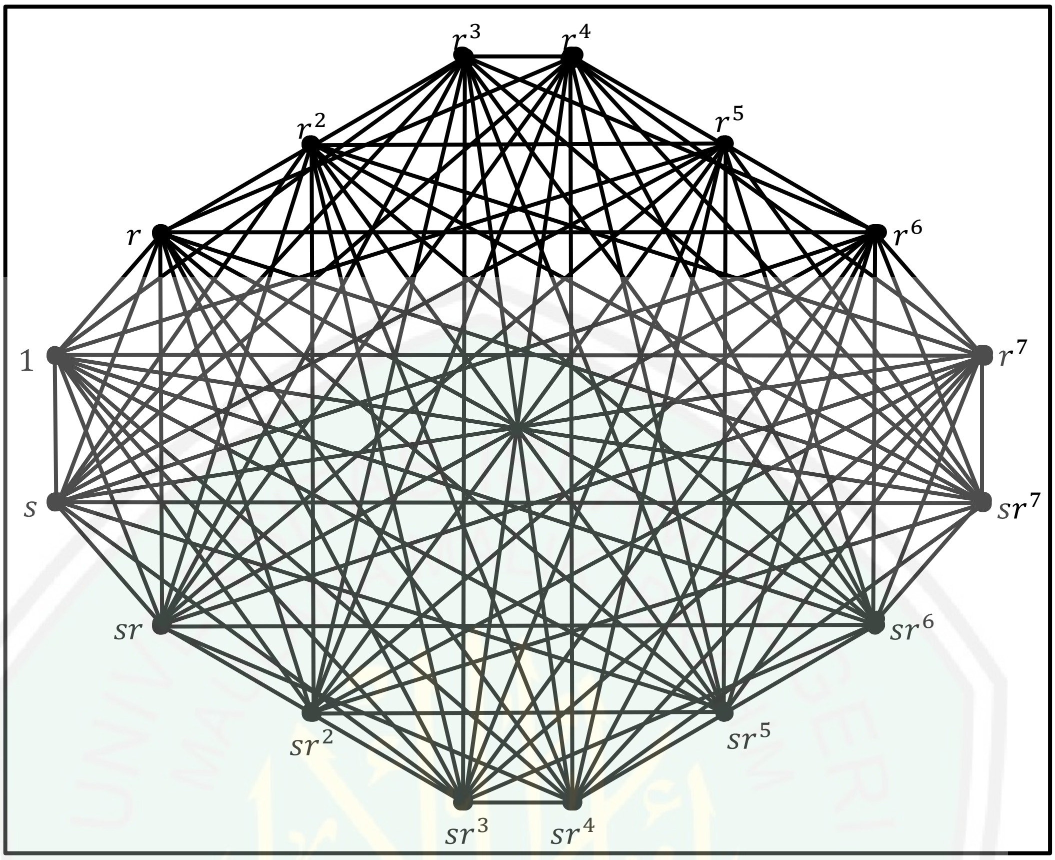
$$\boldsymbol{spec_{DD}}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{12})}\right) = \begin{bmatrix} 121 & -11 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}$$

3.2.3 Spektrum Komplemen Graf Subgrup $\langle r^2 \rangle$ dari D_{16}

Komplemen subgrup dari grup dihedral D_{16} yang dibangun oleh r^2 adalah $\{r, r^3, r^5, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}$. Titik komplemen graf subgrup $\langle r^2 \rangle$ dari grup dihedral D_{16} adalah

$V\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{16})}\right) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}$.

Sehingga jika dua unsur di grup dihedral D_{16} dioperasikan menggunakan operasi komposisi $(\circ)$ menghasilkan $\{r, r^3, r^5, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}$, maka diperoleh komplemen graf subgrup berikut



Gambar 3.6 Graf $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{16})}$

Dari Gambar 3.6 dapat diperoleh matriks *adjacency* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{16})}$ sebagai berikut

$$A\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{16})}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks *adjacency* maka dicari nilai Eigen dari matriks *adjacency* tersebut.

$det\left(\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{16})}\right)-\lambda \boldsymbol{I}\right)$

$$= det\left(\begin{bmatrix}
0-\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
1 & 0-\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
0 & 1 & 0-\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
1 & 0 & 1 & 0-\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0-\lambda & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0-\lambda & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0-\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0-\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0-\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0-\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0-\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0-\lambda & 1 & 0 & 1 & 0\\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0-\lambda & 1 & 0 & 1\\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0-\lambda & 1 & 0\\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0-\lambda & 1\\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0-\lambda
\end{bmatrix}\right)$$

Matriks tersebut direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan menggunakan cara yang sama pada grup dihedral (D_8), diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut

$$p(\lambda)=(-\lambda)\left(-\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)\left(-\frac{\lambda(\lambda^2-2)}{\lambda^2-1}\right)\left(-\frac{\lambda(\lambda^2-4)}{\lambda^2-2}\right)\left(-\frac{\lambda(\lambda^2-6)}{\lambda^2-4}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda(\lambda^2-9)}{\lambda^2-6}\right)\left(-\frac{\lambda(\lambda^2-12)}{\lambda^2-9}\right)\left(-\frac{\lambda(\lambda^2-16)}{\lambda^2-12}\right)\left(-\frac{\lambda^2-4\lambda-8}{\lambda-4}\right)\left(-\frac{\lambda^3-4\lambda^2-17\lambda-12}{\lambda^2-4\lambda-8}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda(\lambda^3-4\lambda^2-26\lambda-24)}{\lambda^3-4\lambda^2-17\lambda-12}\right)\left(-\frac{\lambda(\lambda^3-4\lambda^2-36\lambda-48)}{\lambda^3-4\lambda^2-26\lambda-24}\right)\left(-\frac{\lambda(\lambda^3-4\lambda^2-46\lambda-72)}{\lambda^3-4\lambda^2-36\lambda-48}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda(\lambda^3-4\lambda^2-57\lambda-108)}{\lambda^3-4\lambda^2-46\lambda-72}\right)\left(-\frac{\lambda(\lambda^3-4\lambda^2-68\lambda-144)}{\lambda^3-4\lambda^2-57\lambda-108}\right)\left(-\frac{\lambda(\lambda^2-8\lambda-48)}{\lambda^2-8\lambda-36}\right)$$

$$=(\lambda-12)\lambda^{12}(\lambda+4)^3$$

Dengan menetapkan $p(\lambda)=0$ maka diperoleh $\lambda_1=12, \lambda_2=0,$ dan $\lambda_3=-4$. Dengan cara yang sama pada grup dihedral (D_8) dapat ditentukan basis masing-masing nilai Eigen dari matriks tersebut yaitu multiplisitas dari nilai Eigen. Sehingga $m(\lambda_1)=1, m(\lambda_2)=12$ dan $m(\lambda_3)=3$.

Dengan demikian terbentuklah spektrum *adjacency* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{16})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{spec_A}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{16})}\right)=\begin{bmatrix}12 & 0 & -4\\ 1 & 12 & 3\end{bmatrix}$$

Selanjutnya, dari Gambar 3.6 dapat diketahui matriks derajat dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{16})}$

$$\boldsymbol{D}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{16})}\right)=\begin{bmatrix}12&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&12&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&12&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&12&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&12&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&12&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&12&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&12&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&12&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&12&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&12&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&12&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&12&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&12&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&12&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&12\end{bmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh matriks Laplace dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{16})}$

$$\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{16})}\right)=\boldsymbol{D}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{16})}\right)-\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{16})}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}12&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&12&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&12&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&12&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&12&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&12&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&12&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&12&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&12&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&12&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&12&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&12&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&12&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&12&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&12&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&12\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&1&0&1&0&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\1&0&1&0&1&0&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1\\0&1&0&1&0&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\1&0&1&0&1&0&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1\\0&1&0&1&0&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\1&0&1&0&1&0&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1\\0&1&0&1&0&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\1&0&1&0&1&0&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&0&1&0&1&0\\1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&0&1&0&1&0\\1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&0&1&0&1&0\\1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&0&1&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}12&-1&0&-1&0&-1&0&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\-1&12&-1&0&-1&0&-1&0&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\0&-1&12&-1&0&-1&0&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\-1&0&-1&12&-1&0&-1&0&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\0&-1&0&-1&12&-1&0&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\-1&0&-1&0&-1&12&-1&0&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\0&-1&0&-1&0&-1&12&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\-1&0&-1&0&-1&0&-1&12&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&12&-1&0&-1&0&-1&0&-1\\-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&12&-1&0&-1&0&-1&0\\-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&0&-1&12&-1&0&-1&0&-1\\-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&0&-1&12&-1&0&-1&0\\-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&0&-1&0&-1&12&-1&0&-1\\-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&0&-1&0&-1&12&-1&0\\-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&0&-1&0&-1&0&-1&12&-1\\-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&0&-1&0&-1&0&-1&12\end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks Laplace maka dicari nilai Eigen dari matriks Laplace tersebut.

$det\left(\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{16})}\right)-\lambda\boldsymbol{I}\right)$

$$= det\left(\begin{bmatrix}
12-\lambda & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\\
-1 & 12-\lambda & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\\
0 & -1 & 12-\lambda & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\\
-1 & 0 & -1 & 12-\lambda & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\\
0 & -1 & 0 & -1 & 12-\lambda & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\\
-1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 12-\lambda & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\\
0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 12-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\\
-1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 12-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 12-\lambda & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1\\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 12-\lambda & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0\\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 12-\lambda & -1 & 0 & -1 & 0 & -1\\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 12-\lambda & -1 & 0 & -1 & 0\\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 12-\lambda & -1 & 0 & -1\\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 12-\lambda & -1 & 0\\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 12-\lambda & -1\\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 12-\lambda
\end{bmatrix}\right)$$

Matriks tersebut direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan menggunakan cara yang sama pada grup dihedral (D_8), diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut

$$p(\lambda) = (12-\lambda)\left(-\frac{\lambda^2-24\lambda+143}{\lambda-12}\right)\left(-\frac{\lambda^3-36\lambda^2+430\lambda-1704}{\lambda^2-24\lambda+143}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^3-36\lambda^2+428\lambda-1680}{\lambda^2-24\lambda+142}\right)\left(-\frac{\lambda^3-36\lambda^2+426\lambda-1656}{\lambda^2-24\lambda+140}\right)\left(-\frac{\lambda^3-36\lambda^2+423\lambda-1620}{\lambda^2-24\lambda+138}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^3-36\lambda^2+420\lambda-1584}{\lambda^2-24\lambda+135}\right)\left(-\frac{\lambda^3-36\lambda^2+416\lambda-1536}{\lambda^2-24\lambda+132}\right)\left(-\frac{\lambda^2-20\lambda+88}{\lambda-8}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^3-32\lambda^2+319\lambda-936}{\lambda^2-20\lambda+88}\right)\left(-\frac{\lambda^4-44\lambda^3+694\lambda^2-4536\lambda+9792}{\lambda^3-32\lambda^2+319\lambda-936}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^4-44\lambda^3+684\lambda^2-4272\lambda+8064}{\lambda^3-32\lambda^2+310\lambda-816}\right)\left(-\frac{\lambda^4-44\lambda^3+674\lambda^2-4008\lambda+6336}{\lambda^3-32\lambda^2+300\lambda-672}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^4-44\lambda^3+663\lambda^2-3708\lambda+4320}{\lambda^3-32\lambda^2+290\lambda-528}\right)\left(-\frac{\lambda^4-44\lambda^3+652\lambda^2-3408\lambda+2304}{\lambda^3-32\lambda^2+279\lambda-360}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda(\lambda^2-28\lambda+192)}{\lambda^2-16\lambda+12}\right)$$

$$= (\lambda-16)^3(\lambda-12)^{12}\lambda$$

Dengan menetapkan $p(\lambda)=0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 16, \lambda_2 = 12,$ dan $\lambda_3 = 0$. Dengan cara yang sama pada grup dihedral (D_8) dapat ditentukan basis masing-masing nilai Eigen dari matriks tersebut yaitu multiplisitas dari nilai Eigen. Sehingga $m(\lambda_1) = 3, m(\lambda_2) = 12$ dan $m(\lambda_3) = 1$.

Dengan demikian terbentuklah spektrum Laplace dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{16})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{spec_L}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{16})}\right) = \begin{bmatrix} 16 & 12 & 0 \\ 3 & 12 & 1 \end{bmatrix}$$

Kemudian matriks *signless* Laplace dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{16})}$ dapat ditentukan dengan menggunakan cara berikut

$\boldsymbol{L}^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{16})}\right) = \boldsymbol{D}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{16})}\right) + \boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{16})}\right)$

$$= \begin{bmatrix} 12&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&12&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&12&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&12&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&12&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&12&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&12&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&12&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&12&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&12&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&12&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&12&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&12&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&12&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&12&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0&1&0&1&0&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 0&1&0&1&0&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 0&1&0&1&0&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 0&1&0&1&0&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&0&1&0&1&0&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&0&1&0&1&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&0&1&0&1&0&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&0&1&0&1&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&0&1&0&1&0&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&0&1&0&1&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&0&1&0&1&0&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&0&1&0&1&0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12&1&0&1&0&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&12&1&0&1&0&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 0&1&12&1&0&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&0&1&12&1&0&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 0&1&0&1&12&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&0&1&0&1&12&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 0&1&0&1&0&1&12&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&0&1&0&1&0&1&12&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&12&1&0&1&0&1&0&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&12&1&0&1&0&1&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&12&1&0&1&0&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&12&1&0&1&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&0&1&12&1&0&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&0&1&12&1&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&0&1&0&1&12&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&0&1&0&1&12 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks *signless* Laplace maka dicari nilai Eigen dari matriks *signless* Laplace tersebut.

$det\left(\boldsymbol{L}^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{16})}\right) - \lambda \boldsymbol{I}\right)$

$$= det\left(\begin{bmatrix} 12-\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 12-\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 12-\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 12-\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 12-\lambda & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 12-\lambda & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 12-\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 12-\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 12-\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 12-\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 12-\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 12-\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 12-\lambda & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 12-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 12-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 12-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

Matriks tersebut direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan menggunakan cara yang sama pada grup dihedral (D_8), diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut

$$p(\lambda) = (12-\lambda)\left(-\frac{\lambda^2 - 24\lambda + 143}{\lambda - 12}\right)\left(-\frac{\lambda^3 - 36\lambda^2 + 430\lambda - 1704}{\lambda^2 - 24\lambda + 143}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^3 - 36\lambda^2 + 428\lambda - 1680}{\lambda^2 - 24\lambda + 142}\right)\left(-\frac{\lambda^3 - 36\lambda^2 + 426\lambda - 1656}{\lambda^2 - 24\lambda + 140}\right)\left(-\frac{\lambda^3 - 36\lambda^2 + 423\lambda - 1620}{\lambda^2 - 24\lambda + 138}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^3 - 36\lambda^2 + 420\lambda - 1584}{\lambda^2 - 24\lambda + 135}\right)\left(-\frac{\lambda^3 - 36\lambda^2 + 416\lambda - 1536}{\lambda^2 - 24\lambda + 132}\right)\left(-\frac{\lambda^2 - 28\lambda + 184}{\lambda - 16}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^3 - 40\lambda^2 + 511\lambda - 2112}{\lambda^2 - 28\lambda + 184}\right)\left(-\frac{\lambda^4 - 52\lambda^3 + 982\lambda^2 - 8040\lambda - 24192}{\lambda^3 - 40\lambda^2 + 511\lambda - 2112}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^4 - 52\lambda^3 + 972\lambda^2 - 7824\lambda - 23040}{\lambda^3 - 40\lambda^2 + 502\lambda - 2016}\right)\left(-\frac{\lambda^4 - 52\lambda^3 + 962\lambda^2 - 7608\lambda - 21888}{\lambda^3 - 40\lambda^2 + 492\lambda - 1920}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^4 - 52\lambda^3 + 951\lambda^2 - 7380\lambda - 20736}{\lambda^3 - 40\lambda^2 + 482\lambda - 1824}\right)\left(-\frac{\lambda^4 - 52\lambda^3 + 940\lambda^2 - 7152\lambda - 19584}{\lambda^3 - 40\lambda^2 + 471\lambda - 1728}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^3 - 44\lambda^2 + 576\lambda - 2304}{\lambda^2 - 32\lambda + 204}\right)$$

$$= (\lambda - 24)(\lambda - 12)^{12}(\lambda - 8)^3$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 24, \lambda_2 = 12,$ dan $\lambda_3 = 8$. Dengan cara yang sama pada grup dihedral (D_8) dapat ditentukan basis masing-masing nilai Eigen dari matriks tersebut yaitu multiplisitas dari nilai Eigen. Sehingga $m(\lambda_1) = 1, m(\lambda_2) = 12$ dan $m(\lambda_3) = 3$.

Dengan demikian terbentuklah spektrum *signless* Laplace dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{16})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{spec}_{L^+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{16})}\right) = \begin{bmatrix} 24 & 12 & 8 \\ 1 & 12 & 3 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, dari Gambar 3.6 dapat diperoleh matriks *detour* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{16})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{16})}\right) = \begin{bmatrix}
0 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\
15 & 0 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\
15 & 15 & 0 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\
15 & 15 & 15 & 0 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\
15 & 15 & 15 & 15 & 0 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\
15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 0 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\
15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 0 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\
15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 0 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\
15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 0 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\
15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 0 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\
15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 0 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\
15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 0 & 15 & 15 & 15 & 15 \\
15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 0 & 15 & 15 & 15 \\
15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 0 & 15 & 15 \\
15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 0 & 15 \\
15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 0
\end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks *detour* maka dicari nilai Eigen dari matriks *detour* tersebut.

$$det\left(\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{16})}\right) - \lambda \boldsymbol{I}\right)$$

$$= det\left(\begin{bmatrix}
0-\lambda & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\
15 & 0-\lambda & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\
15 & 15 & 0-\lambda & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\
15 & 15 & 15 & 0-\lambda & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\
15 & 15 & 15 & 15 & 0-\lambda & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\
15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 0-\lambda & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\
15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 0-\lambda & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\
15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 0-\lambda & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\
15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 0-\lambda & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\
15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 0-\lambda & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\
15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 0-\lambda & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\
15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 0-\lambda & 15 & 15 & 15 & 15 \\
15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 0-\lambda & 15 & 15 & 15 \\
15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 0-\lambda & 15 & 15 \\
15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 0-\lambda & 15 \\
15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 0-\lambda
\end{bmatrix}\right)$$

Matriks tersebut direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan menggunakan cara yang sama pada grup dihedral (D_8), diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut

$$p(\lambda) = (-\lambda)\left(-\frac{\lambda^2 - 225}{\lambda}\right)\left(-\frac{\lambda^2 - 15\lambda - 450}{\lambda - 15}\right)\left(-\frac{\lambda^2 - 30\lambda - 675}{\lambda - 30}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^2-45\lambda-900}{\lambda-45}\right)\left(-\frac{\lambda^2-60\lambda-1125}{\lambda-60}\right)\left(-\frac{\lambda^2-75\lambda-1350}{\lambda-75}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^2-90\lambda-1575}{\lambda-90}\right)\left(-\frac{\lambda^2-105\lambda-1800}{\lambda-105}\right)\left(-\frac{\lambda^2-120\lambda-2025}{\lambda-120}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^2-135\lambda-2250}{\lambda-135}\right)\left(-\frac{\lambda^2-150\lambda-2475}{\lambda-150}\right)\left(-\frac{\lambda^2-165\lambda-2700}{\lambda-165}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^2-180\lambda-2925}{\lambda-180}\right)\left(-\frac{\lambda^2-195\lambda-3150}{\lambda-195}\right)\left(-\frac{\lambda^2-210\lambda-3375}{\lambda-210}\right)$$

$$= (\lambda-225)(\lambda+15)^{15}$$

Dengan menetapkan $p(\lambda)=0$ maka diperoleh $\lambda_1=225$ dan $\lambda_2=-15$. Dengan cara yang sama pada grup dihedral (D_8) dapat ditentukan basis masing-masing nilai Eigen dari matriks tersebut yaitu multiplisitas dari nilai Eigen. Sehingga $m(\lambda_1)=1$ dan $m(\lambda_2)=15$.

Dengan demikian terbentuklah spektrum *detour* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{16})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{spec_{DD}}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{16})}\right)=\begin{bmatrix}225 & -15\\ 1 & 15\end{bmatrix}$$

Dari spektrum yang telah ditemukan, diperoleh bentuk polinomial karakteristik dan spektrum *adjacency* komplemen graf subgrup $\langle r^2\rangle$ dari beberapa grup dihedral, di antaranya

Tabel 3.10 Polinomial Karakteristik Matriks *Adjacency* dari Beberapa Komplemen Graf Subgrup $\langle r^2\rangle$ dari Grup Dihedral D_{2n}

n	Graf Subgrup	Polinomial Graf Subgrup
4	Grup Dihedral D_8	$(\lambda-6)\lambda^4(\lambda+2)^3$
6	Grup Dihedral D_{12}	$(\lambda-9)\lambda^8(\lambda+3)^3$
8	Grup Dihedral D_{16}	$(\lambda-12)\lambda^{12}(\lambda+4)^3$
$\vdots$		
n	Grup Dihedral D_{2n}	$\left(\lambda-\frac{3n}{2}\right)\lambda^{2(n-2)}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)^3$

Tabel 3.11 Spektrum *Adjacency* dari Beberapa Komplemen Graf Subgrup $\langle r^2 \rangle$ dari Grup Dihedral D_{2n}

n	Graf Subgrup	Spektrum Graf Subgrup
4	Grup Dihedral D_8	$\begin{bmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$
6	Grup Dihedral D_{12}	$\begin{bmatrix} 9 & 0 & -3 \\ 1 & 8 & 3 \end{bmatrix}$
8	Grup Dihedral D_{16}	$\begin{bmatrix} 12 & 0 & -4 \\ 1 & 12 & 3 \end{bmatrix}$
$\vdots$		
n	Grup Dihedral D_{2n}	$\begin{bmatrix} \frac{3n}{2} & 0 & \frac{n}{2} \\ 1 & 2(n-2) & 3 \end{bmatrix}$

Teorema 4

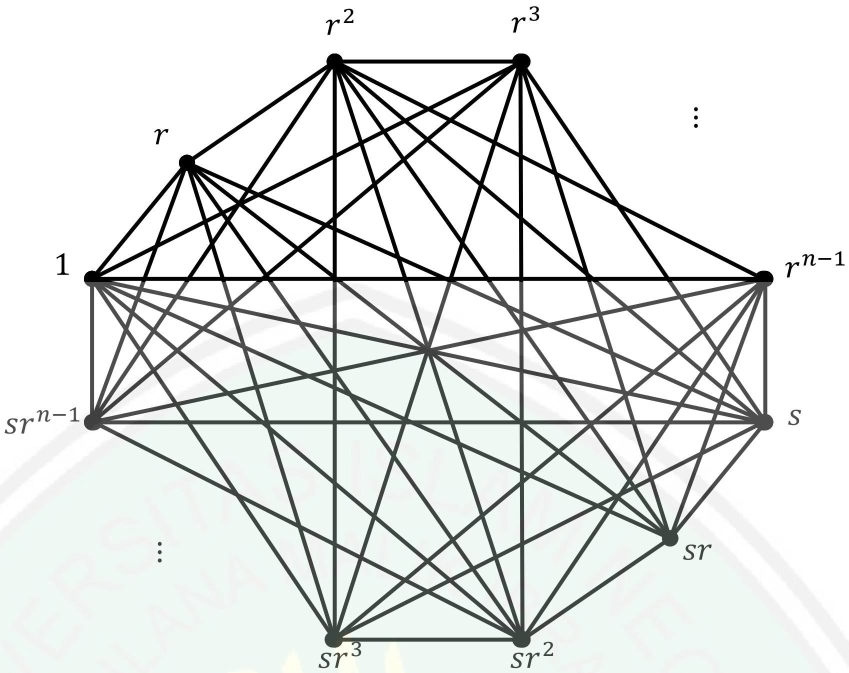
Pola umum polinomial karakteristik matriks *adjacency* $\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})}\right)$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$p(\lambda) = \left(\lambda - \frac{3n}{2}\right) \lambda^{2(n-2)} \left(\lambda + \frac{n}{2}\right)^3$$

Bukti:

Diketahui grup dihedral $(D_{2n}) = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$. Untuk n genap dan $n \geq 4$ diperoleh bahwa komplemen subgrup $\langle r^2 \rangle$ dari grup dihedral D_{2n} adalah $\{r, r^3, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, sr^3, \dots, sr^{n-1}\}$.

Sesuai dengan definisi komplemen graf subgrup, maka diperoleh graf $\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})}$ sebagai berikut



Sehingga diperoleh matriks *adjacency* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}$ sebagai berikut

$$A\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)=\begin{array}{c} \\ 1\\ r\\ r^2\\ \vdots\\ r^{n-1}\\ s\\ sr\\ sr^2\\ \vdots\\ sr^{n-1}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccccc}1 & r & r^2 & \dots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \dots & sr^{n-1}\end{array}\\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1\\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0\\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}\end{array}$$

Polinomial karakteristik $\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)$ diperoleh dari $det\left(\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)-\lambda\boldsymbol{I}\right)$. Dengan eliminasi Gauss $\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)-\lambda\boldsymbol{I}$ diperoleh matriks segitiga atas sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} (-\lambda) & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & \left(-\dfrac{\lambda^2-1}{\lambda}\right) & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \left(-\dfrac{\lambda(\lambda^2-2)}{\lambda^2-1}\right) & \dots & \dots\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & \left(-\dfrac{\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)\left(\lambda-\frac{3n}{2}\right)}{\lambda^2-n\lambda-\left(\frac{3n^2-6n}{4}\right)}\right) \end{bmatrix}$$

Maka $det\left(\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)-\lambda\boldsymbol{I}\right)$ tidak lain adalah perkalian unsur-unsur diagonal utama matriks segitiga atas tersebut. Maka diperoleh pola umum polinomial karakteristik dari $\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)$ adalah

$$p(\lambda)=\left(\lambda-\frac{3n}{2}\right)\lambda^{2(n-2)}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)^3$$

<u>Corollary 4</u>

Pola umum spektrum matriks *adjacency* $\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)$ untuk n genap dan $n\geq 4$ adalah

$$\boldsymbol{spec}_{\boldsymbol{A}}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)=\begin{bmatrix}\frac{3n}{2} & 0 & \frac{n}{2}\\ 1 & 2(n-2) & 3\end{bmatrix}$$

Bukti:

Dari Teorema 4 diperoleh pola umum polinomial karakteristik dari $\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)$ untuk n genap dan $n\geq 4$ adalah

$$p(\lambda)=\left(\lambda-\frac{3n}{2}\right)\lambda^{2(n-2)}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)^3$$

Dengan menetapkan $p(\lambda)=0$ maka diperoleh $\lambda_1=\frac{3n}{2}$, $\lambda_2=0$ dan $\lambda_3=-\frac{n}{2}$ diperoleh multiplisitas $m(\lambda_1)=1$, $m(\lambda_2)=2(n-2)$ dan $m(\lambda_3)=3$.

Pola umum spektrum matriks *adjacency* komplemen graf subgrup $\langle r^2\rangle$ dari grup dihedral D_{2n} untuk n genap dan $n\geq 4$ adalah

$$\boldsymbol{spec}_{\boldsymbol{A}}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)=\begin{bmatrix}\frac{3n}{2} & 0 & \frac{n}{2}\\ 1 & 2(n-2) & 3\end{bmatrix}$$

Dari spektrum yang telah ditemukan, diperoleh bentuk polinomial karakteristik dan spektrum Laplace komplemen graf subgrup $\langle r^2\rangle$ dari beberapa grup dihedral di antaranya

Tabel 3.12 Polinomial Karakteristik Matriks Laplace dari Beberapa Komplemen Graf Subgrup $\langle r^2 \rangle$ dari Grup Dihedral D_{2n}

n	Graf Subgrup	Polinomial Graf Subgrup
4	Grup Dihedral D_8	$(\lambda-8)^3(\lambda-6)^4\lambda$
6	Grup Dihedral D_{12}	$(\lambda-12)^3(\lambda-9)^8\lambda$
8	Grup Dihedral D_{16}	$(\lambda-16)^3(\lambda-12)^{12}\lambda$
$\vdots$		
n	Grup Dihedral D_{2n}	$(\lambda-2n)^3\left(\lambda-\frac{3n}{2}\right)^{2(n-2)}\lambda$

Tabel 3.13 Spektrum Laplace dari Beberapa Komplemen Graf Subgrup $\langle r^2 \rangle$ dari Grup Dihedral D_{2n}

n	Graf Subgrup	Spektrum Graf Subgrup
4	Grup Dihedral D_8	$\begin{bmatrix} 8 & 6 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$
6	Grup Dihedral D_{12}	$\begin{bmatrix} 12 & 9 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix}$
8	Grup Dihedral D_{16}	$\begin{bmatrix} 16 & 12 & 0 \\ 3 & 12 & 1 \end{bmatrix}$
$\vdots$		
n	Grup Dihedral D_{2n}	$\begin{bmatrix} 2n & \frac{3n}{2} & 0 \\ 3 & 2(n-2) & 1 \end{bmatrix}$

Teorema 5

Pola umum polinomial karakteristik matriks Laplace $\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})}\right)$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$p(\lambda) = (\lambda-2n)^3\left(\lambda-\frac{3n}{2}\right)^{2(n-2)}\lambda$$

Bukti:

Diketahui grup dihedral $(D_{2n}) = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$. Untuk n genap dan $n \geq 4$ diperoleh bahwa komplemen subgrup $\langle r^2 \rangle$ dari grup dihedral D_{2n} adalah $\{r, r^3, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, sr^3, \dots, sr^{n-1}\}$.

Sesuai dengan definisi komplemen graf subgrup, maka diperoleh graf $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}$. Sehingga diperoleh matriks *adjacency* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}$ sebagai berikut

$$A\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)=\begin{array}{c} \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccccc} 1 & r & r^2 & \dots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \dots & sr^{n-1}\end{array}\\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}\end{array}$$

dan matriks derajat dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}$ adalah

$$D\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)=\begin{array}{c} \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccccc} 1 & r & r^2 & \dots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \dots & sr^{n-1}\end{array}\\ \begin{bmatrix} \frac{3n}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{3n}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3n}{2} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{3n}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{3n}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{3n}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \frac{3n}{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{3n}{2} \end{bmatrix}\end{array}$$

Matriks Laplace komplemen graf subgrup $\langle r^2\rangle$ dari grup dihedral D_{2n} sebagai berikut

$$
\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right) =
\begin{array}{c}
\\ 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc}
1 & r & r^2 & \dots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \dots & sr^{n-1}
\end{array} \\
\begin{bmatrix}
\frac{3n}{2} & -1 & 0 & \dots & -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\
-1 & \frac{3n}{2} & -1 & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\
0 & -1 & \frac{3n}{2} & \dots & -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
-1 & 0 & -1 & \dots & \frac{3n}{2} & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\
-1 & -1 & -1 & \dots & -1 & \frac{3n}{2} & -1 & 0 & \dots & -1 \\
-1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & \frac{3n}{2} & -1 & \dots & 0 \\
-1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & -1 & \frac{3n}{2} & \dots & -1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
-1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & 0 & -1 & \dots & \frac{3n}{2}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Polinomial karakteristik $\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)$ diperoleh dari $det\left(\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right) - \lambda\boldsymbol{I}\right)$. Dengan eliminasi Gauss $\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right) - \lambda\boldsymbol{I}$ diperoleh matriks segitiga atas sebagai berikut

$$
\begin{bmatrix}
\left(\frac{3n}{2} - \lambda\right) & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \left(-\frac{\left(\lambda - \frac{3n-2}{2}\right)\left(\lambda - \frac{3n+2}{2}\right)}{\lambda - \frac{3n}{2}}\right) & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \left(-\frac{\left(\lambda - \frac{3n}{2}\right)\left(\lambda^2 - 3n\lambda + \frac{9n^2-8}{4}\right)}{\left(\lambda - \frac{3n-2}{2}\right)\left(\lambda - \frac{3n+2}{2}\right)}\right) & \dots & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & \left(-\frac{\left(\lambda - \frac{3n}{2}\right)(\lambda - 2n)}{\lambda^2 - 2n\lambda + \frac{3n}{2}}\right)
\end{bmatrix}
$$

Maka $det\left(\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right) - \lambda\boldsymbol{I}\right)$ tidak lain adalah perkalian unsur-unsur diagonal utama matriks segitiga atas tersebut. Maka diperoleh pola umum polinomial karakteristik dari $\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)$ adalah

$$
p(\lambda) = (\lambda - 2n)^3 \left(\lambda - \frac{3n}{2}\right)^{2(n-2)} \lambda
$$

<u>Corollary 5</u>

Pola umum spektrum matriks Laplace $\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$
\boldsymbol{spec_L}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right) = \begin{bmatrix} 2n & \frac{3n}{2} & 0 \\ 3 & 2(n-2) & 1 \end{bmatrix}
$$

Bukti:

Dari Teorema 5 diperoleh pola umum polinomial karakteristik dari $\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$p(\lambda) = (\lambda - 2n)^3 \left(\lambda - \frac{3n}{2}\right)^{2(n-2)} \lambda$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 2n$, $\lambda_2 = \frac{3n}{2}$ dan $\lambda_3 = 0$ diperoleh multiplisitas $m(\lambda_1) = 3$, $m(\lambda_2) = 2(n-2)$ dan $m(\lambda_3) = 1$.

Pola umum spektrum matriks Laplace komplemen graf subgrup $\langle r^2\rangle$ dari grup dihedral D_{2n} untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$\boldsymbol{spec_L}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right) = \begin{bmatrix} 2n & \frac{3n}{2} & 0 \\ 3 & 2(n-2) & 1 \end{bmatrix}$$

Dari spektrum yang telah ditemukan, diperoleh bentuk polinomial karakteristik dan spektrum *signless* Laplace komplemen graf subgrup $\langle r^2\rangle$ dari beberapa grup dihedral di antaranya

Tabel 3.14 Polinomial Karakteristik Matriks *Signless* Laplace dari Beberapa Komplemen Graf Subgrup $\langle r^2\rangle$ dari Grup Dihedral D_{2n}

n	Graf Subgrup	Polinomial Graf Subgrup
4	Grup Dihedral D_8	$(\lambda-12)(\lambda-6)^4(\lambda-4)^3$
6	Grup Dihedral D_{12}	$(\lambda-18)(\lambda-9)^8(\lambda-6)^3 = 0$
8	Grup Dihedral D_{16}	$(\lambda-24)(\lambda-12)^{12}(\lambda-8)^3 = 0$
⋮		
n	Grup Dihedral D_{2n}	$(\lambda-3n)\left(\lambda-\frac{3n}{2}\right)^{2(n-2)}(\lambda-n)^3$

Tabel 3.15 Spektrum *Signless* Laplace dari Beberapa Komplemen Graf Subgrup $\langle r^2 \rangle$ dari Grup Dihedral D_{2n}

n	Graf Subgrup	Spektrum Graf Subgrup
4	Grup Dihedral D_8	$\begin{bmatrix} 12 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$
6	Grup Dihedral D_{12}	$\begin{bmatrix} 18 & 9 & 6 \\ 1 & 8 & 3 \end{bmatrix}$
8	Grup Dihedral D_{16}	$\begin{bmatrix} 24 & 12 & 8 \\ 1 & 12 & 3 \end{bmatrix}$
$\vdots$		
n	Grup Dihedral D_{2n}	$\begin{bmatrix} 3n & \frac{3n}{2} & n \\ 1 & 2(n-2) & 3 \end{bmatrix}$

Teorema 6

Pola umum polinomial karakteristik matriks *signless* Laplace $\boldsymbol{L}^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})}\right)$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$p(\lambda) = (\lambda - 3n)\left(\lambda - \frac{3n}{2}\right)^{2(n-2)}(\lambda - n)^3$$

Bukti:

Diketahui grup dihedral $(D_{2n}) = \{1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \ldots, sr^{n-1}\}$.

Untuk n genap dan $n \geq 4$ diperoleh bahwa komplemen subgrup $\langle r^2 \rangle$ dari grup dihedral D_{2n} adalah $\{r, r^3, \ldots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, sr^3, \ldots, sr^{n-1}\}$.

Sesuai dengan definisi komplemen graf subgrup, maka diperoleh graf $\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})}$. Sehingga diperoleh matriks *adjacency* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})}\right) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} 1 & r & r^2 & \ldots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \ldots & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

dan matriks derajat dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}$ adalah

$$\boldsymbol{D}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccc} 1 & r & r^2 & \dots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \dots & sr^{n-1}\end{array}\\ \begin{array}{c} 1\\ r\\ r^2\\ \vdots\\ r^{n-1}\\ s\\ sr\\ sr^2\\ \vdots\\ sr^{n-1}\end{array} & \begin{bmatrix} \frac{3n}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \frac{3n}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \frac{3n}{2} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{3n}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{3n}{2} & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{3n}{2} & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \frac{3n}{2} & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{3n}{2}\end{bmatrix}\end{array}$$

Matriks *signless* Laplace komplemen graf subgrup $\langle r^2\rangle$ dari grup dihedral D_{2n} sebagai berikut

$$\boldsymbol{L}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccc} 1 & r & r^2 & \dots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \dots & sr^{n-1}\end{array}\\ \begin{array}{c} 1\\ r\\ r^2\\ \vdots\\ r^{n-1}\\ s\\ sr\\ sr^2\\ \vdots\\ sr^{n-1}\end{array} & \begin{bmatrix} \frac{3n}{2} & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & \frac{3n}{2} & 1 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 0 & 1 & \frac{3n}{2} & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 0 & 1 & \dots & \frac{3n}{2} & 1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \frac{3n}{2} & 1 & 0 & \dots & 1\\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \frac{3n}{2} & 1 & \dots & 0\\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & \frac{3n}{2} & \dots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & \frac{3n}{2}\end{bmatrix}\end{array}$$

Polinomial karakteristik $\boldsymbol{L}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)$ diperoleh dari $det\left(\boldsymbol{L}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)-\lambda\boldsymbol{I}\right)$. Dengan eliminasi Gauss $\boldsymbol{L}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)-\lambda\boldsymbol{I}$ diperoleh matriks segitiga atas sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{3n}{2}-\lambda\right) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \left(-\frac{\left(\lambda-\frac{3n-2}{2}\right)\left(\lambda-\frac{3n+2}{2}\right)}{\lambda-\frac{3n}{2}}\right) & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \left(-\frac{\left(\lambda-\frac{3n}{2}\right)\left(\lambda^2-3n\lambda+\frac{9n^2-8}{4}\right)}{\left(\lambda-\frac{3n-2}{2}\right)\left(\lambda-\frac{3n+2}{2}\right)}\right) & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \left(-\frac{(\lambda-3n)\left(\lambda^2-\frac{5n}{2}\lambda+\frac{3n^2}{2}\right)}{\lambda^2-4n\lambda+\frac{6n^2+3n}{2}}\right) \end{bmatrix}$$

Maka $det\left(\boldsymbol{L}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)-\lambda\boldsymbol{I}\right)$ tidak lain adalah perkalian unsur-unsur diagonal utama matriks segitiga atas tersebut. Maka diperoleh pola umum polinomial karakteristik dari $\boldsymbol{L}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)$ adalah

$$p(\lambda)=(\lambda-3n)\left(\lambda-\frac{3n}{2}\right)^{2(n-2)}(\lambda-n)^3$$

***Corollary* 6**

Pola umum spektrum matriks *signless* Laplace $\boldsymbol{L}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)$ untuk n genap dan $n\geq 4$ adalah

$$\boldsymbol{spec}_{\boldsymbol{L}^{+}}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)=\begin{bmatrix} 3n & \frac{3n}{2} & n \\ 1 & 2(n-2) & 3 \end{bmatrix}$$

Bukti:

Dari Teorema 6 diperoleh pola umum polinomial karakteristik dari $\boldsymbol{L}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)$ untuk n genap dan $n\geq 4$ adalah

$$p(\lambda)=(\lambda-3n)\left(\lambda-\frac{3n}{2}\right)^{2(n-2)}(\lambda-n)^3$$

Dengan menetapkan $p(\lambda)=0$ maka diperoleh $\lambda_1=3n,\ \lambda_2=\frac{3n}{2}$ dan $\lambda_3=n$ diperoleh multiplisitas $m(\lambda_1)=1, m(\lambda_2)=2(n-2)$ dan $m(\lambda_3)=3$.

Pola umum spektrum matriks *signless* Laplace komplemen graf subgrup $\langle r^2\rangle$ dari grup dihedral D_{2n} untuk n genap dan $n\geq 4$ adalah

$$\boldsymbol{spec}_{\boldsymbol{L}^+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right) = \begin{bmatrix} 3n & \frac{3n}{2} & n \\ 1 & 2(n-2) & 3 \end{bmatrix}$$

Dari spektrum yang telah ditemukan, diperoleh bentuk polinomial karakteristik dan spektrum *detour* komplemen graf subgrup $\langle r^2\rangle$ dari beberapa grup dihedral di antaranya

Tabel 3.16 Polinomial Karakteristik Matriks *Detour* dari Beberapa Komplemen Graf Subgrup $\langle r^2\rangle$ dari Grup Dihedral D_{2n}

n	Graf Subgrup	Polinomial Graf Subgrup
4	Grup Dihedral D_8	$(\lambda-49)(\lambda+7)^7$
6	Grup Dihedral D_{12}	$(\lambda-121)(\lambda+11)^{11}$
8	Grup Dihedral D_{16}	$(\lambda-225)(\lambda+15)^{15}$
$\vdots$		
n	Grup Dihedral D_{2n}	$(\lambda-(2n-1)^2)(\lambda+(2n-1))^{(2n-1)}$

Tabel 3.17 Spektrum *Detour* dari Beberapa Komplemen Graf Subgrup $\langle r^2\rangle$ dari Grup Dihedral D_{2n}

n	Graf Subgrup	Spektrum Graf Subgrup
4	Grup Dihedral D_8	$\begin{bmatrix} 49 & -7 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$
6	Grup Dihedral D_{12}	$\begin{bmatrix} 121 & -11 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}$
8	Grup Dihedral D_{16}	$\begin{bmatrix} 225 & -15 \\ 1 & 15 \end{bmatrix}$
$\vdots$		
n	Grup Dihedral D_{2n}	$\begin{bmatrix} (2n-1)^2 & -(2n-1) \\ 1 & 2n-1 \end{bmatrix}$

<u>Teorema 7</u>

Pola umum polinomial karakteristik matriks *detour* $\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$p(\lambda) = (\lambda-(2n-1)^2)(\lambda+(2n-1))^{(2n-1)}$$

Bukti:

Graf $\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)$ terhubung karena setiap titik-titiknya saling terhubung. Matrik *detour* $\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)$ adalah elemen pada baris-i dan kolom-j memuat bilangan yang menyatakan lintasan terpanjang dari v_i ke v_j di $\Gamma^C_{\langle r^2\rangle}\left(D\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)_{2n}\right)$. Matriks *detour* yang dihasilkan adalah sebagai berikut

$$\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right) =$$

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} 1 & r & r^2 & \dots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \dots & sr^{n-1} \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 2n-1 & 2n-1 & \dots & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \dots & 2n-1 \\
2n-1 & 0 & 2n-1 & \dots & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \dots & 2n-1 \\
2n-1 & 2n-1 & 0 & \dots & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \dots & 2n-1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \dots & 0 & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \dots & 2n-1 \\
2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \dots & 2n-1 & 0 & 2n-1 & 2n-1 & \dots & 2n-1 \\
2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \dots & 2n-1 & 2n-1 & 0 & 2n-1 & \dots & 2n-1 \\
2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \dots & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & 0 & \dots & 2n-1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \dots & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \dots & 0
\end{bmatrix} \end{array}$$

Polinomial karakteristik $\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)$ diperoleh dari $det\left(\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right) - \lambda\boldsymbol{I}\right)$. Dengan eliminasi Gauss $\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right) - \lambda\boldsymbol{I}$ diperoleh matriks segitiga atas sebagai berikut

$$\begin{bmatrix}
(-\lambda) & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \left(-\frac{\lambda^2-(2n-1)^2}{\lambda}\right) & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \left(-\frac{\lambda^2-(2n-1)\lambda-2(2n-1)^2}{\lambda-(2n-1)}\right) & \dots & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & \left(-\frac{\lambda^2-(2n-1)(2n-2)\lambda-(2n-1)^3}{\lambda-(2n-1)(2n-2)}\right)
\end{bmatrix}$$

Maka $det\left(\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right) - \lambda\boldsymbol{I}\right)$ tidak lain adalah perkalian unsur-unsur diagonal utama matriks segitiga atas tersebut. Maka diperoleh pola umum polinomial karakteristik dari $\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)$ adalah

$$p(\lambda) = (\lambda - (2n-1)^2)(\lambda + (2n-1))^{(2n-1)}$$

Corollary 7

Pola umum spektrum matriks *detour* $\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$\boldsymbol{spec_{DD}}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right) = \begin{bmatrix} (2n-1)^2 & -(2n-1) \\ 1 & 2n-1 \end{bmatrix}$$

Bukti:

Dari Teorema 7 diperoleh pola umum polinomial karakteristik dari $\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$p(\lambda) = (\lambda - (2n-1)^2)\big(\lambda + (2n-1)\big)^{(2n-1)}$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = (2n-1)^2$ dan $\lambda_2 = (2n-1)$ diperoleh multiplisitas $m(\lambda_1) = 1$ dan $m(\lambda_2) = (2n-1)$. Pola umum spektrum matriks *detour* komplemen graf subgrup $\langle r^2\rangle$ dari grup dihedral D_{2n} untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$\boldsymbol{spec_{DD}}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right) = \begin{bmatrix} (2n-1)^2 & -(2n-1) \\ 1 & 2n-1 \end{bmatrix}$$

3.3 Ukuran pada Spektrum Graf Subgrup dan Komplemennya

Ukuran dalam al-Quran telah dijelaskan dalam bab II, QS. al-Qamar ayat 49 bahwa sesungguhnya segala yang terjadi di dalam kehidupan ini adalah dengan ketentuan Allah dan pembentukannya menurut ketentuan hikmah-Nya. Manusia sebagai makhluk ciptaan Allah yang berakal wajib mencari tahu dan belajar tentang segala sesuatu yang diciptakan Allah untuk mengetahui manfaat dan dapat menjaga ciptaan Allah. Ukuran yang ditetapkan oleh Allah juga dapat dilihat contohnya di dalam ilmu matematika khususnya teori graf.

Keterkaitan antara beberapa topik dalam matematika, khususnya teori graf, aljabar linier, dan aljabar abstrak yang telah dibahas dalam skripsi ini membentuk ukuran/pola masing-masing. Spektrum *adjacency*, Laplace, *signless* Laplace, dan *detour* membentuk pola-pola yang berbeda. Untuk subgrup graf dan komplemennya pun juga membentuk pola yang berbeda. Ini membuktikan bahwa segala sesuatu ciptaan Allah telah diperhitungkan dan memiliki ukuran masing-masing.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan maka dapat disimpulkan beberapa pola umum spektrum matriks *adjacency*, Laplace, *signless* Laplace dan *detour* graf subgrup dan komplemen graf subgrup $\langle r^2 \rangle$ dari grup dihedral.

1. Pada graf subgrup hanya didapatkan pola umum spektrum *adjacency*, Laplace dan *signless* Laplace. Spektrum *detour* tidak dapat ditentukan karena graf yang diperoleh adalah graf tidak terhubung.

   a. Pola umum spektrum matriks *adjacency* $\boldsymbol{A}\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})\right)$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

   $$\boldsymbol{spec_A}\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})\right) = \begin{bmatrix} \left(\frac{n-2}{2}\right) & -1 \\ 4 & 2(n-2) \end{bmatrix}$$

   b. Pola umum spektrum matriks Laplace $\boldsymbol{L}\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})\right)$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

   $$\boldsymbol{spec_L}\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})\right) = \begin{bmatrix} \frac{n}{2} & 0 \\ 2(n-2) & 4 \end{bmatrix}$$

   c. Pola umum spektrum matriks signless Laplace $\boldsymbol{L^+}\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})\right)$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

   $$\boldsymbol{spec_{L^+}}\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})\right) = \begin{bmatrix} (n-2) & \left(\frac{n-4}{2}\right) \\ 4 & 2(n-2) \end{bmatrix}$$

2. Pada komplemen graf subgrup didapatkan pola umum spektrum *adjacency*, Laplace, *signless* Laplace dan *detour* karena graf yang diperoleh adalah graf terhubung.

   a. Pola umum spektrum matriks *adjacency* $\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$\boldsymbol{spec_A}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right) = \begin{bmatrix} \frac{3n}{2} & 0 & \frac{n}{2} \\ 1 & 2(n-2) & 3 \end{bmatrix}$$

   b. Pola umum spektrum matriks Laplace $\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$\boldsymbol{spec_L}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right) = \begin{bmatrix} 2n & \frac{3n}{2} & 0 \\ 3 & 2(n-2) & 1 \end{bmatrix}$$

   c. Pola umum spektrum matriks *signless* Laplace $\boldsymbol{L^+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$\boldsymbol{spec_{L^+}}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right) = \begin{bmatrix} 3n & \frac{3n}{2} & n \\ 1 & 2(n-2) & 3 \end{bmatrix}$$

   d. Pola umum spektrum matriks *detour* $\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$\boldsymbol{spec_{DD}}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right) = \begin{bmatrix} (2n-1)^2 & -(2n-1) \\ 1 & 2n-1 \end{bmatrix}$$

4.2 Saran

Pada penelitian ini spektrum didapatkan dari graf subgrup dan komplemen graf subgrup dari grup dihedral. Untuk penelitian selanjutnya dapat meneliti tentang spektrum selain dari grup dihedral D_{2n}.

DAFTAR RUJUKAN

Abdussakir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Abdussakir, Azizah, N.N. & Nofandika, F.F.. 2009. *Teori Graf*. Malang: UIN Malang Press.

Al-Maragi, A.M.. 1993. *Tafsir Al-Maragi, Jilid 18*. Terjemahan Bahrun Abu Bakar Lc, Drs. Hery Noer Aly, K. Anshori Umar Sitanggal. Semarang: CV. Toha Putra Semarang.

Al-Maragi, A.M.. 1993. *Tafsir Al-Maragi, Jilid 27*. Terjemahan Bahrun Abu Bakar Lc, Drs. Hery Noer Aly, K. Anshori Umar Sitanggal. Semarang: CV. Toha Putra Semarang.

Anderson, D.F., Fasteen, J. dan LaGrange, J.D.. 2012. The Subgroup Graphs of a Group. *Arab J Math.*1:17–27. DOI 10.1007/s40065-012-0018-1.

Anton, H.dan Rorres, Ch. 2004. *Elementary Linier Algebra, 8th Edition.* New York: JohnWilley&Sons, Inc.

Arifandi, M.Z.. 2014. *Spektrum dari Graf Multipartisi Komplit*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Ayyaswamy, S.K. & Balachandran, S. 2010. On Detour Spectra of Some Graph. *International Journal of Computational and Mathematical Sciences*. 4(7): 1038-1040.

Biggs, N. 1994. *Algebraic Graph Theory*. London: Cambridge University Press.

Bondy, J.A. & Murty, U.S.R. 2008. *Graph Theory*. New York: Springer.

Brouwer, A.E. & Haemers, W.H.. 2011. *Spectra of graphs: Monograph*. New York: Springer.

Chartrand, G. & Lesniak, L. 1996. *Graph and Digraph* 2^{nd} *Edition*. California: Wadsworth, Inc.

Cvetkovic, Dragos, Rowlinson, Peter & Simi, S.K.. 2007. *Eigenvalue Bounds for The Signless Laplacian*. Nouvelle serie, tome 81(95),11-27.

Dummit, D.S. dan Foote, R.M.. 1991. *Abstract Algebra*. New Jersey: Prentice Hall, Inc.

Faizah, N. 2012. *Spektrum Adjacency, Detour dan Laplace pada Graf Turan*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Handayani, S.T. 2016. *Spektrum Laplace Graf Konjugasi dari Grup Dihedral*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Intifaada, A. 2014. *Spektrum Laplace Graf Commuting dari Grup Dihedral*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Kakeri, F & Erfanian, A. 2015. The Complement of Subgroup Graph of a Group. Journal of Prime Research in Mathematics Vol. 11, 55-60.

Mohar, B. 1992. Laplace Eigenvalues of Graphs: A Survey. *Discrete Math*. 109(1–3): 171–183.

Nafisah, M. 2014. *Spektrum Detour Graf Non Commuting dari Grup Dihedral*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Purwanto. 1998. *Matematika Diskrit*. Malang: IKIP Malang.

Yin, Sh. 2008. *Investigation on Spectrum of the Adjacency Matrix and Laplacian Matrix of Graph* G_l. WSEAS Transaction on Systems. Vol 7, No 4, Hal: 362-372.

RIWAYAT HIDUP

Dinda Akromatul Akhadiyah, lahir di Malang pada tanggal 28 Agustus 1995, biasa dipanggil Dinda. Kakak dari Rosy Fadilatul Ilmi yang merupakan anak pertama dari 2 bersaudara pasangan Bapak Solikhin dan Ibu Mufarroha.

Pendidikan dasarnya ditempuh di SD Negeri Ciptomulyo 2 Malang dan lulus pada tahun 2007. Setelah itu melanjutkan sekolah di SMP Negeri 2 Malang, lulus tahun 2010. Pendidikan selanjutnya ditempuh di SMA Negeri 2 Malang, lulus tahun 2013. Selanjutnya, pada tahun 2014 melanjutkan kuliah Jurusan Matematika di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Selama menjadi mahasiswa telah mengikuti beberapa penelitian, diantaranya adalah Penelitian Program Penguatan Studi (P3S) dan Penelitian Kompetitif Mahasiswa (PKM) pada tahun 2017. Hasil penelitian tersebut diteruskan menjadi skripsi.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Dinda Akromatul Akhadiyah
NIM : 14610071
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Spektrum *Adjacency*, Laplace, *Signless* Laplace, dan *Detour* Graf Subgrup dan Komplemen Graf Subgrup dari Grup Dihedral
Pembimbing I : Dr. Abdussakir, M.Pd
Pembimbing II : Mohammad Jamhuri, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	02 Februari 2018	Konsultasi Bab I, II, III	1.
2.	08 Februari 2018	Konsultasi Bab III, IV	2.
3.	20 Maret 2018	Konsultasi Keagamaan Bab I	3.
4.	09 April 2018	ACC BAB I, II, & III	4.
5.	11 April 2018	ACC Keagamaan	5.
6.	08 Mei 2018	Konsultasi Bab III	6.
7.	22 Mei 2018	Konsultasi Bab III, IV	7.
8.	23 Mei 2018	Konsultasi Bab I, II, III	8.
9.	25 Mei 2018	Konsultasi Keagamaan Bab II	9.
10.	26 Juni 2018	Konsultasi Bab I, II, III, IV	10.
11.	04 Juli 2018	ACC BAB I,II, III & IV	11.
12.	05 Juli 2018	ACC Agama	12.

Malang, 05 Juli 2018
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

KEMENTERIAN AGAMA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
JURUSAN MATEMATIKA
REPUBLIK INDONESIA

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001