PENYELESAIAN PERSAMAAN RELASIONAL *FUZZY*

SKRIPSI

OLEH
ATIKA ZAKIYATUL FIKRIYA
NIM. 14610054

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018

PENYELESAIAN PERSAMAAN RELASIONAL *FUZZY*

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Atika Zakiyatul Fikriya
NIM. 14610054

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018

PENYELESAIAN PERSAMAAN RELASIONAL *FUZZY*

SKRIPSI

Oleh
Atika Zakiyatul Fikriya
NIM. 14610054

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 03 Mei 2018

Pembimbing I,

Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D
NIP. 19571005 198203 1 006

Pembimbing II

Hairur Rahman, M.Si
NIP. 19800429 200604 1 003

Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PENYELESAIAN PERSAMAAN RELASIONAL *FUZZY*

SKRIPSI

Oleh
Atika Zakiyatul Fikriya
NIM. 14610054

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 31 Mei 2018

Penguji Utama	:	H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd	....
Ketua Penguji	:	Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si	....
Sekretaris Penguji	:	Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D	....
Anggota Penguji	:	Hairur Rahman, M.Si	....

Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Atika Zakiyatul Fikriya
NIM	: 14610054
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Penyelesaian Persamaan Relasional *Fuzzy*

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 03 Mei 2018
Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL
0510CAEF037113090
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Atika Zakiyatul Fikriya
NIM. 14610054

MOTO

وخير الناس أنفعهم للناس

"Dan sebaik-baik manusia adalah orang yang paling bermanfaat bagi manusia"
(HR. Thabrani dan Daruquthni)

"Aku berpikir maka aku ada" (Descartes, Philosof Perancis)

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda Kusrin dan Ibunda Anni Alfiyah tercinta,
yang senantiasa dengan ikhlas mendo'akan, memberi nasihat, semangat,
dan kasih sayang yang tak ternilai, serta adik tersayang Laila Qothrun Nada
yang selalu menjadi kebanggaan bagi penulis.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Abdul Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan berbagi pengalaman yang berharga kepada penulis.
5. Hairur Rahman, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.

6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.
7. Bapak dan Ibu serta adik tercinta yang selalu memberikan do’a, semangat, serta motivasi kepada penulis sampai saat ini.
8. Sahabat-sahabat terbaik penulis, Nisfu Lailatul Maghfiroh, Nur Kholilin Karima, Dini Amalina, Yunita Indawati, Anik Imaniyah, Aisyah, Nofiratullah, Ema Yusrina Fahmidah, Siti Nur Choiriyah, Khoirunniyah, Fenny Maulidah, Lailis Eptiq Wahna, Niswatin Khoiriyah, Sutri Rahayu, Muhimmatus Sholihah, Siti Nur Alifah, Luluk Handayani, Yogas Andika Damara Putri, Nanum Sovia, Anik Rizka Rahmawati, Alinul Layali, Mahdiatul Maknun, Iffana Intanlya Fauzie, Siti Halimah, Nuzulul Imamah, Abdul Hadi, dan Fikri Alfian Manshuroni yang selalu menemani, membantu, dan memberikan dukungan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
9. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2014 (MATH EIGEN) khususnya Matematika-B, Griya Tahfidz Muslimah (GTM), Ikatan Keluarga Madrasah Raudlatul ‘Ulum (IKAMARU) Malang Raya, Serambi Matematika Aktif (SEMATA), Unit Kegiatan Mahasiswa (UKM) Seni Religius, Himpunan Mahasiswa Jurusan (HMJ) “Integral” Matematika, kelompok KKM 194 dan ABA 35 yang berjuang bersama-sama untuk meraih mimpi, terimakasih kenang-kenangan indah yang dirajut bersama dalam menggapai impian.

10. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu-persatu, yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materiil.

Semoga Allah Swt melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Akhirnya penulis berharap semoga dengan rahmat dan izin-Nya mudah-mudahan skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan bagi pembaca. *Amiin.*

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 03 Mei 2018

Penulis

DAFTAR ISI

ABSTRAK

Fikriya, Atika Zakiyatul. 2018. **Penyelesaian Persamaan Relasional *Fuzzy***. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D. (II) Hairur Rahman, M.Si.

Kata kunci: persamaan, relasi, *fuzzy*.

Persamaan relasi *fuzzy* dapat digunakan untuk menyelidiki solusi optimal dari masalah invers, meskipun ada pembatasan kondisi ketersediaan solusi dari masalah invers. Penelitian ini bertujuan untuk mencari solusi maksimum dan solusi minimum pada kasus invers dari persamaan relasi *fuzzy* dalam bentuk $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$, dimana $\boldsymbol{R}: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$; $\boldsymbol{S}: \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Z}$ dan $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Z}$. Untuk ketiga kasus $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{S}$ dan $\boldsymbol{T}$ tidak diketahui. Metode yang diusulkan untuk menemukan solusi maksimum dan minimum dari bentuk $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$ didasarkan pada perhitungan relasi *fuzzy* $\boldsymbol{T}$ yaitu komposisi *maks-produk.* Hasil penelitian ini adalah solusi maksimum dan solusi minimum dalam persamaan relasi *fuzzy* dengan menggunakan komposisi *maks-produk* yang dinyatakan sebagai berikut:

a. Solusi maksimum
   1) Maksimum $\boldsymbol{S}$ atau $\boldsymbol{S}^{\nabla}$ dari persamaan relasi *fuzzy* $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$ adalah $\boldsymbol{S}^{\nabla} = \boldsymbol{R}^{-1} @ \boldsymbol{T}$.
   2) Maksimum $\boldsymbol{R}$ atau $\boldsymbol{R}^{\nabla}$ dari persamaan relasi *fuzzy* $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$ adalah $\boldsymbol{R}^{\nabla} = (\boldsymbol{S} @ \boldsymbol{T}^{-1})^{-1}$.

b. Solusi minimum
   1) Minimum $\boldsymbol{S}$ atau $\boldsymbol{S}^{\Delta}$ dari persamaan relasi *fuzzy* $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$ adalah $\boldsymbol{S}^{\Delta} = \neg\left(\boldsymbol{R}^{-1} @ \neg \boldsymbol{T}\right)$.
   2) Minimum R atau R^{Δ} dari persamaan relasi *fuzzy* $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$ adalah $\boldsymbol{R}^{\Delta} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{B}$.

ABSTRACT

Fikriya, Atika Zakiyatul. 2018. **The Solutions of Fuzzy Relational Equation**. Thesis. Departmen of Mathematics Faculty of Science and Technology Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Supervisor: (I) Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D. (II) Hairur Rahman, M.Si.

Keywords: equation, relation, fuzzy.

The fuzzy relation equation can be used to investigate the optimal solution of the inverse problem, although there are restrictions for the conditions of the existence of solutions of the inverse problem. The study aims to find the maximum and minimum solutions for inverse case of fuzzy relation equations of the form of $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$, where $\boldsymbol{R}: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$; $\boldsymbol{S}: \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Z}$ and $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Z}$. For all three cases $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{S}$ and $\boldsymbol{T}$ are unknowns. The proposed method for finding the maximum and minimum solutions of the form $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$ is based on the calculation of the fuzzy $\boldsymbol{T}$-relation namely the max-product composition. The results of this study showed that the maximum and minimum solution in fuzzy relation equations by using max-product compositions are as follow:

a. Maximum solutions
   1) The maximum $\boldsymbol{S}$ or $\boldsymbol{S}^{\nabla}$ of the fuzzy relational equations $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$ is $\boldsymbol{S}^{\nabla} = \boldsymbol{R}^{-1} @ \boldsymbol{T}$.
   2) The maximum $\boldsymbol{R}$ or $\boldsymbol{R}^{\nabla}$ of the fuzzy relational equations $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$ is $\boldsymbol{R}^{\nabla} = (\boldsymbol{S} @ \boldsymbol{T}^{-1})^{-1}$.

b. Minimum Solutions
   1) The minimum $\boldsymbol{S}$ or $\boldsymbol{S}^{\Delta}$ of the fuzzy relational equations $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$ is $\boldsymbol{S}^{\Delta} = \neg(\boldsymbol{R}^{-1} @ \neg \boldsymbol{T})$.
   2) The minimum $\boldsymbol{R}$ or $\boldsymbol{R}^{\Delta}$ of the fuzzy relational equations $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$ is $\boldsymbol{R}^{\Delta} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{B}$.

ملخص

الفكريا، اتيك زكية. ٢٠١٨. **الحل من المعادلات العلائقية الضبابية**. البحث الجامعى. شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا. الجامعة الحكومية الإسلامية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف: (١) الدكتور الحج ترمدى، الماجستر. (٢) حيرالرحم ، الماجستر.

كلمات البحث: المعادلة، العلاقات، ضبابي.

يمكن استخدام معادلة العلاقة الضبابية للتحقيق في الحل الأمثل للمشكلة العكسية، على الرغم من وجود قيود على شروط توفر حل المشكلة العكسية. تهدف هذه الدراسة إلى إيجاد الحل الأقصى والحل الأدنى في حالة معكوس لمعادلة علاقة ضبابية في شكل $\boldsymbol{R \circ S = T}$ ، حيث $\boldsymbol{R: X \to Y;\ S: Y \to Z}$ و $\boldsymbol{T: X \to Z}$ لكل الحالات الثلاث $\boldsymbol{R, S}$ و $\boldsymbol{T}$ غير معروفة. تعتمد الطريقة المقترحة لإيجاد الحل الأقصى والأدنى للنموذج $\boldsymbol{R \circ S = T}$ على حساب العلاقة $\boldsymbol{T}$ الضبابية، أي تركيبة *max-product* وتكوين المنتج الأقصى. نتائج هذه الدراسة هي كما يلي الحل الأقصى والحل الأدنى في معادلة العلاقة غير واضحة باستخدام التركيب *max-product*:

أ. الحل الأقصى

١) الحد الأقصى $\boldsymbol{S}$ أو $\boldsymbol{S^{\nabla}}$ لمعادلة العلاقة الغامضة $\boldsymbol{R \circ S = T}$ هي $\boldsymbol{S^{\nabla} = R^{-1}@T}$.

٢) الحد الأقصى $\boldsymbol{R}$ أو $\boldsymbol{R^{\nabla}}$ لمعادلة العلاقة الغامضة $\boldsymbol{R \circ S = T}$ هي $\boldsymbol{R^{\nabla} = (S@T^{-1})^{-1}}$.

ب. الحل الأدنى

١) الحد الأدنى $\boldsymbol{S}$ أو $\boldsymbol{S^{\Delta}}$ لمعادلة العلاقة الغامضة $\boldsymbol{R \circ S = T}$ هي $\boldsymbol{S^{\Delta} = \neg(R^{-1}@\neg T).}$.

٢) الحد الأدنى $\boldsymbol{R}$ أو $\boldsymbol{R^{\Delta}}$ لمعادلة العلاقة الغامضة $\boldsymbol{R \circ S = T}$ هي $\boldsymbol{R^{\Delta} = A(\sigma)B}$.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Suatu penyelesaian masalah dan penalarannya biasanya dinyatakan secara tepat dalam representasi karakter tegas *(crisp)*, hal ini berarti bahwa suatu pernyataan dapat dinyatakan secara tegas sebagai pernyataan yang benar atau salah. Teori himpunan *fuzzy* memberikan penilaian secara berkesinambungan pada unsur keanggotaan suatu himpunan dalam interval kontinu [0,1] (Zimmermann, 2001: 240). Konsep teori himpunan *fuzzy* pertama kali diusulkan oleh Lotfi A. Zadeh pada tahun 1965 di Universitas Berkeley California. Himpunan *fuzzy* memainkan peran yang sangat mendalam dalam pemodelan control *fuzzy*, diagnosis medis dan komputasi intelijen, bidang rekayasa, dan teknologi.

Persamaan *fuzzy* dapat dinyatakan dalam berbagai bentuk. Pada umumnya, persamaan relasi *fuzzy* dapat dijelaskan dengan menggunakan komposisi *maks-min.* Komposisi *maks-min* biasanya digunakan ketika sebuah sistem membutuhkan penyelesaian konservatif, dalam arti bahwa kebaikan suatu nilai tidak dapat mengkompensasi keburukan nilai lain (Zimmermann, 2001: 241). Hal ini memungkinkan adanya kompensasi antara nilai-nilai vektor penyelesaian. Dalam kasus seperti ini, operator *min* tidak dapat digunakan sebagai operator penyelesaian, namun komposisi hasil kali *maks* dapat digunakan sebagai penyelesaian yang lebih baik atau paling tidak setara.

Pada penelitian sebelumnya, Nirmal & Maheswara (2014) melakukan penelitian mengenai solusi maksimum dalam persamaan relasi *fuzzy* dengan komposisi *maks*-$\boldsymbol{T}$. Persamaan relasional *fuzzy* yang diberikan adalah $\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$. Peneliti menemukan solusi maksimum dalam persamaan relasi *fuzzy* dengan komposisi *maks*-$\boldsymbol{T}$. Peneliti juga menyebutkan bahwa solusi maksimum dari persamaan relasi *fuzzy* dapat dipecahkan dengan komposisi *maks-min*, namun sulit untuk memperoleh satu matriks di sisi kiri yang tidak diketahui. Selain itu, invers dari matriksnya tidak dapat diterapkan karena matriks tersebut tidak invertibel, sehingga solusi maksimum sulit untuk didapatkan. Kemudian Wu (2004), Shieh (2008), Yeh (2008), Mazarbhuiya (2011) dan Ezzati (2012) melakukan berbagai penelitian untuk mencari penyelesaian persamaan *fuzzy* menggunakan berbagai metode, seperti komposisi *maks-produk*, komposisi *maks-min*, metode potongan α, dan juga metode superimposisi. Penelitian-penelitian tersebut menghasilkan berbagai solusi dari persamaan *fuzzy*, tetapi matriksnya tidak invertibel.

Dari berbagai permasalahan tersebut, peneliti mencoba mencari penyelesaian dari solusi maksimum dan solusi minimum dalam persamaan relasional *fuzzy* yang dinyatakan dalam bentuk $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$ dengan menggunakan komposisi yang berbeda yaitu komposisi *maks-produk.*

Al-Qur’an telah memberikan penjelasan mengenai solusi dan penyelesaiannya di dalam QS. al-Insyirah/94:5-6, yaitu:

فَإِنَّ مَعَ ٱلۡعُسۡرِ يُسۡرًا ﴿٥﴾ إِنَّ مَعَ ٱلۡعُسۡرِ يُسۡرٗا ﴿٦﴾

“Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan. Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan” (QS. al-Insyirah/94:5-6).

Berdasarkan QS. Al-Insyirah ayat 5 di atas, Allah Swt memberikan penjelasan bahwa sesudah kesulitan pasti terdapat kemudahan. Kemudian Allah Swt menegaskannya kembali pada ayat selanjutnya, yaitu pada ayat 6. Konsep tersebut menunjukkan bahwa setiap permasalahan dalam matematika pasti mempunyai solusi dan penyelesaian.

Pada ayat lain, Allah Swt juga berfirman mengenai konsep relasi (hubungan), yaitu pada QS. az-Zariyat/51:56, yaitu:

وَمَا خَلَقْتُ ٱلْجِنَّ وَٱلْإِنسَ إِلَّا لِيَعْبُدُونِ ﴿٥٦﴾

"Dan aku tidak menciptakan jin dan manusia melainkan supaya mereka beribadah kepada-Ku" (QS. az-Zariyat/51:56).

Ayat di atas menjelaskan tentang adanya hubungan dengan aturan tertentu yang saling berkaitan antara Allah Swt, jin, dan manusia. Allah Swt menciptakan jin dan manusia hanya untuk beribadah kepada-Nya. Hal ini merupakan aturan tertentu dalam hubungan antara Allah Swt, jin, dan manusia. Dalam ilmu matematika, konsep hubungan disebut dengan relasi. Relasi adalah hubungan antara dua elemen himpunan. Relasi dari dua himpunan *A* ke himpunan *B* adalah pemasangan anggota-anggota himpunan *A* dengan anggota-anggota himpunan *B*. Relasi (hubungan) antara kedua himpunan sangat erat kaitannya, sehingga keduanya saling mempengaruhi.

Persamaan relasi *fuzzy* adalah identitas dalam bentuk $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$, dimana $\boldsymbol{R}: \boldsymbol{X} \rightarrow \boldsymbol{Y}$; $\boldsymbol{S}: \boldsymbol{Y} \rightarrow \boldsymbol{Z}$ dan $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{X} \rightarrow \boldsymbol{Z}$. Relasi $\boldsymbol{R}$ dan $\boldsymbol{S}$ dikomposisikan menggunakan operasi komposisi " $\circ$ " dan hasilnya harus sama dengan relasi $\boldsymbol{T}$. Hanya satu dari relasi $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{S}$ dan $\boldsymbol{T}$ yang tidak diketahui, sedangkan yang lainnya telah diberikan. Tujuannya adalah untuk menghitung penyelesaian persamaan relasi *fuzzy*, yaitu untuk menemukan salah satu relasi $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{S}$ atau $\boldsymbol{T}$ yang tidak diketahui, sehingga persamaan $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$ terpenuhi.

Berdasarkan latar belakang yang ada, peneliti tertarik untuk memperoleh solusi maksimum (∇) dan solusi minimum (Δ) dalam persamaan relasi *fuzzy*, sehingga peneliti menggunakan komposisi *maks-produk* untuk memperoleh solusi tersebut.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian pada latar belakang di atas, dalam skripsi ini akan dibahas beberapa masalah yang berkaitan dengan persamaan relasi *fuzzy*, yaitu bagaimana solusi maksimum dan solusi minimum dalam persamaan relasi *fuzzy* dengan menggunakan komposisi *maks-produk*.

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan dalam penelitian ini adalah untuk menentukan solusi maksimum dan solusi minimum dalam persamaan relasi *fuzzy* dengan menggunakan komposisi *maks-produk*.

1.4 Batasan Masalah

Agar tidak menimbulkan kesalahan dalam penafsiran dan meluasnya masalah, maka batasan permasalahan dalam skripsi ini adalah persamaan relasi *fuzzy* dinyatakan dalam bentuk $R \circ S = T$ dengan "$\circ$" adalah operasi komposisi *maks-produk* dengan salah satu relasi tidak diketahui asalkan bukan T.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari skripsi ini adalah adanya kontribusi dalam pengembangan keilmuan khususnya dalam bidang matematika murni mengenai metode penentuan solusi maksimum dan solusi minimum dalam persamaan relasi *fuzzy* dengan menggunakan komposisi *maks-produk*.

1.6 Metode Penelitian

Penelitian ini termasuk ke dalam jenis penelitian kepustakaan (*library research*). Penelitian ini merupakan penelitian dengan menggunakan pendekatan kualitatif. Pada pembahasannya dimulai dari hal-hal khusus (induktif) menuju pada generalisasi yang bersifat deduktif. Langkah-langkah penelitian ini adalah:

1. Menentukan solusi maksimum dan solusi minimum dalam persamaan relasi *fuzzy* dengan menggunakan komposisi *maks-produk*.
   a. Menentukan solusi maksimum:
      1) Menentukan persamaan relasi *fuzzy* yang digunakan.
      2) Menentukan maksimum $\boldsymbol{S}$ dari persamaan $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$ yang diperoleh dari beberapa lemma dan teorema beserta pembuktian dan juga contohnya.
      3) Menentukan syarat perlu keberadaan $\boldsymbol{S}^{\nabla}$ yang diterapkan dalam beberapa contoh dengan penyelesaiannya beserta pengecekan hasil perhitungannya.
      4) Menentukan maksimum $\boldsymbol{R}$ dari persamaan $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$ yang diperoleh dari beberapa teorema beserta pembuktiannya.
      5) Menentukan syarat perlu keberadaan $\boldsymbol{R}^{\nabla}$ yang diterapkan dalam beberapa contoh dengan penyelesaiannya beserta pengecekan hasil perhitungannya.
   b. Menentukan solusi minimum:
      1) Menentukan persamaan relasi *fuzzy* yang digunakan.

2) Menentukan minimum $\boldsymbol{S}$ dari persamaan $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$ yang diperoleh dari suatu teorema beserta pembuktiannya.
3) Menentukan syarat perlu keberadaan $\boldsymbol{S}^{\Delta}$ yang diterapkan dalam beberapa contoh dengan penyelesaiannya beserta pengecekan hasil perhitungannya.
4) Menentukan minimum $\boldsymbol{R}$ yang diperoleh dari beberapa teorema beserta pembuktiannya.
5) Menentukan syarat perlu keberadaan $\boldsymbol{R}^{\nabla}$ yang diterapkan dalam beberapa contoh dengan penyelesaiannya beserta pengecekan hasil perhitungannya.

1.7 Sistematika Penulisan

Agar penulisan skripsi lebih terarah dan mudah dipahami, digunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab, dan masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa subbab dengan sistematika sebagai berikut.

Bab I Pendahuluan

Pendahuluan meliputi: latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Kajian pustaka terdiri dari teori-teori yang dapat digunakan untuk menjawab rumusan masalah sehingga dapat mendukung pembahasan. Pada penelitian ini, teori yang digunakan meliputi: himpunan tegas, himpunan *fuzzy*, operasi gabungan dan irisan himpunan *fuzzy*, relasi biner *fuzzy*, relasi *fuzzy* invers $\boldsymbol{R}^{-1}$, komplemen relasi *fuzzy* $\neg\boldsymbol{R}$, aturan komposisi relasi *fuzzy*, persamaan relasi *fuzzy*, persamaan relasi *fuzzy* invers, operator penyelesaian persamaan relasi *fuzzy*, dan kajian Islam mengenai persamaan relasi *fuzzy*.

Bab III Pembahasan

Pembahasan berisi tentang bagaimana solusi maksimum dan solusi minimum dalam persamaan relasi *fuzzy* dengan menggunakan komposisi *maks-produk.*

Bab IV Penutup

Penutup berisi kesimpulan mengenai hasil dari pembahasan dan saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Himpunan Tegas

Kumpulan suatu objek yang mempunyai ciri dan karakteristik yang sama dalam hal ini disebut himpunan.

Definisi 2.1:

Diketahui A dan B adalah dua himpunan dimana anggota A juga terdapat di B, disimbolkan dengan $x \in A \rightarrow x \in B$, maka A disebut subset terhadap B yang dinotasikan dengan $A \subseteq B$ (Raisinghania & Aggarwal, 1980: 2).

Definisi 2.2:

Diketahui A dan B adalah dua himpunan. Jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$ maka dapat dikatakan A dan B sama, dinotasikan dengan $A = B$. Jika $A \subseteq B$ dan $A \neq B$ maka dapat dikatakan A subset sejati dari B, dinotasikan $A \subset B$ (Raisinghania & Aggarwal, 1980: 3).

Suatu himpunan harus terdefinisi dengan tegas, dalam arti bahwa setiap objek selalu dapat ditentukan secara tegas apakah objek tersebut merupakan anggota himpunan itu atau tidak. Dengan kata lain, untuk setiap himpunan terdapat batas yang tegas antara objek-objek yang merupakan anggota dan objek-objek yang tidak merupakan anggota dari himpunan itu. Oleh karena itu, himpunan semacam ini dinamakan himpunan tegas *(crisp set).* Teori himpunan secara formal mulai dikembangkan oleh matematikawan Georg Cantor (1845-1918) pada akhir abad ke-19, dan saat ini telah menjadi salah satu unsur pokok dalam landasaan matematika modern. Himpunan tegas seringkali disebut juga himpunan Cantor (Susilo, 2006: 49).

2.2 Himpunan *Fuzzy*

Himpunan *fuzzy* pertama kali diperkenalkan oleh Lotfi A. Zadeh pada tahun 1965. Himpunan *fuzzy* didefinisikan sebagai himpunan dari objek-objek dengan nilai keanggotaan yang berada dalam interval kontinu [0,1]. Keanggotaan ini merepresentasikan tingkat nilai keanggotaan suatu himpunan yang berada pada tingkatan tertentu yang berbeda-beda secara kontinu (Ahmed & Saqib, 2010: 1). Secara matematis, himpunan *fuzzy* didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.3: Derajat keanggotaan himpunan *fuzzy*

Fungsi keanggotaan dari sutu himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ dalam semesta X adalah pemetaan $\mu_{\tilde{A}}$ dari X ke selang [0,1], yaitu $\mu_{\tilde{A}} : X \to [0,1]$. Nilai fungsi $\mu_{\tilde{A}}(x)$ menyatakan derajat keanggotaan unsur $x \in X$ dalam himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$. Nilai fungsi sama dengan 1 menyatakan keanggotaan penuh, dan nilai fungsi sama dengan 0 menyatakan sama sekali bukan anggota himpunan *fuzzy* tersebut (Susilo, 2006: 50).

Secara matematis, derajat keanggotaan himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ dalam semesta wacana X dapat dinyatakan sebagai himpunan pasangan terurut (Bartl, 2012: 20).

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x) | x \in X)\} \tag{2.1}$$

Maka himpunan tegas juga dipandang sebagai kejadian khusus dari himpunan *fuzzy* yang fungsi keanggotaannya hanya bernilai 0 atau 1 saja. Secara matematis, derajat keanggotaan himpunan tegas X dinyatakan sebagai fungsi berikut:

$$f(x) = \mu_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ jika } x \notin X \\ 1 \text{ jika } x \in X \end{cases} \quad (2.2)$$

Contoh 2.1: Himpunan *fuzzy*

Diberikan himpunan tegas X yang menyatakan tentang usia orang yang berbeda-beda, yaitu:

$$X = \{10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50\}$$

Himpunan *fuzzy* $A \subseteq X$ adalah dinyatakan sebagai $A = \{pemuda\}$. Maka nilai yang menyatakan derajat keanggotaan dari A sebagai anggota A, adalah:

$$A = \left\{\frac{0}{10}, \frac{0,5}{15}, \frac{1}{20}, \frac{1}{25}, \frac{1}{30}, \frac{0,5}{40}, \frac{0}{50}\right\}$$

Derajat keanggotaan $\mu_A(x)$ didasarkan kepada batasan bahwa "pemuda" adalah orang-orang yang berada pada rentang usia $20 \le x \le 40$ (Ahmed & Saqib, 2010: 2).

Definisi 2.4: Inklusi dan kesamaan himpunan

Jika diberikan himpunan A dan B di dalam semesta X, maka inklusi atau himpunan bagian A di dalam himpunan B dan kesamaan himpunan A dengan B didefinisikan sebagai berikut (Susilo, 2006: 51):

i. $A \subseteq B$ jika dan hanya jika $\mu_A(x) \le \mu_B(x)$, untuk setiap $x \in X$

ii. $A = B$ jika dan hanya jika $\mu_A(x) = \mu_B(x)$, untuk setiap $x \in X$

2.3 Operasi Gabungan dan Irisan Himpunan *Fuzzy*

Jika diberikan himpunan A dan B di dalam semesta X, maka didefinisikan derajat keanggotaan gabungan, irisan, dan komplemen dalam himpunan *fuzzy* sebagai berikut (Susilo, 2006: 66):

i. $\mu_{A\cup B}(x) = maks(\mu_A(x), \mu_B(x))$ (2.3)

ii. $\mu_{A\cap B}(x) = min(\mu_A(x), \mu_B(x))$ (2.4)

iii. $\mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x)$ (2.5)

2.4 Relasi Biner *Fuzzy*

Diberikan himpunan tak kosong X dan Y. Relasi $\boldsymbol{R}$ antara X dan Y himpunan bagian *fuzzy* dari $X \times Y$, ditulis $\boldsymbol{R} : \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y} \to [0,1]$ atau lebih singkat ditulis $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$. Relasi *fuzzy* dari X ke Y memetakkan setiap anggota X ke satu atau lebih anggota Y. Jika $X = Y$ maka $\boldsymbol{R}$ disebut sebagai relasi *fuzzy* biner. Relasi *fuzzy* dapat dituliskan secara formal sebagai berikut (Susilo, 2006: 88):

Jika $A = a_i, i = 1,2,3, \dots, n$ dan $B = b_j, j = 1,2,3, \dots, m,$ maka relasi *fuzzy* $\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ atau $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ dapat dinyatakan sebagai:

$$\boldsymbol{R} = \{(\boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{b_i}), \boldsymbol{R}(\boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{b_i})\} \tag{2.6}$$

Gambaran yang tepat dari relasi *fuzzy* $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ adalah dengan menyatakan dalam matriks derajat keanggotaan $\boldsymbol{R} = [\boldsymbol{r_{xy}}]$ dimana $\boldsymbol{r_{xy}} = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{b_i})$. Gambaran lainnya dari relasi *fuzzy* biner adalah dengan menyatakan dalam diagram sagital. Setiap himpunan X, Y digambaran sebagai himpunan bulatan (simpul) di sebelah kiri dalam diagram sagital yang berkorespondensi dengan himpunan bulatan lainnya yang berbeda di sebelah kanan. Anggota dari $X \times Y$ dengan derajat keanggotaan yang tidak nol di dalam $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ dihubungkan oleh diagram garis masing-masing bulatan (Susilo, 2006: 89).

Suatu relasi biner tegas $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X})$ yang refleksif, anti simetris dan transitif urutan parsial. Simbol umum $\leq$ menunjukkan sifat-sifat dari kelas relasi. Dengan demikian, $x \leq y$ yang ditandai $(x, y) \in \boldsymbol{R}$ menandakan bahwa x mendahului y.

Invers urutan parsial $\boldsymbol{R^{-1}}$ $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X})$ dinyatakan dengan simbol $\geq$ (Kandasamy & Smarandache, 2004: 24).

Contoh 2.2: Relasi *fuzzy*

Misalkan A dan B merupakan himpunan tidak kosong yang memuat tinggi badan (dalam cm) beberapa orang, yaitu (Bartl, 2012: 21):

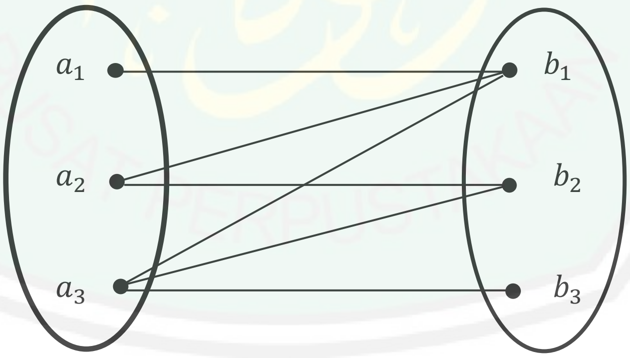
$$A = \{153,178,190\}$$
$$B = \{150,172,181\}$$

Relasi *fuzzy* $\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ dinyatakan dalam pernyataan sebagai berikut:

$\boldsymbol{a_i R b_j}$ = "a_i jauh lebih tinggi dari b_j" dengan R adalah relasi *fuzzy*.

$$R = \{(153,150), (178,150), (178,172), (190,150), (190,172), (190,181)\}$$

Relasi *fuzzy* $R \subseteq A \times B$ tersebut dinyatakan dalam diagram sagital sebagai berikut:



Relasi *fuzzy* $\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ juga dapat dinyatakan dalam matriks relasi seperti gambar berikut:

$$\boldsymbol{\mu_{tinggi\ badan}(a_i, b_i)} = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0{,}7 & 0{,}15 & 0 \\ 1 & 1{,}45 & 0{,}2 \end{bmatrix} \end{array} \text{dimana } i, j = 1,2,3$$

Diberikan sebuah relasi *fuzzy* $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$, domain $\boldsymbol{R}$ ditulis $dom\ \boldsymbol{R}$, adalah himpunan *fuzzy* pada X yang fungsi keanggotaannya didefinisikan sebagai berikut (Klir & Yuan, 2002: 124):

$$dom\ \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}) = maks_{y\in Y}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \tag{2.7}$$

untuk setiap $y \in Y$.

Range dari relasi *fuzzy* $\boldsymbol{R}$ atau ditulis *range* $\boldsymbol{R}$ adalah relasi *fuzzy* pada Y yang fungsi keanggotaannya didefinisikan sebagai berikut:

$$range\ \boldsymbol{R}(\boldsymbol{y}) = maks_{x\in X}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{y}) \tag{2.8}$$

untuk setiap $x \in X$ (Klir & Yuan, 2002: 125).

2.5 Relasi *Fuzzy* Invers $\boldsymbol{R^{-1}}$

Relasi *fuzzy* invers $\boldsymbol{R}^{-1} \subseteq \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{X}$ atau ditulis $\boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X})$ merupakan invers dari relasi *fuzzy* $\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$ yang didefinisikan sebagai $\boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \forall x \in X$ dan $\forall y \in Y$. Untuk semua pasangan berurutan $(y,x) \in Y \times X$, fungsi keanggotaan relasi *fuzzy* invers $\boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X})$ dinyatakan sebagai berikut (Ahmed & Saqib, 2010: 4):

$$\mu_{R^{-1}(y,x)} = \mu_R(x,y) \tag{2.9}$$

Matriks keanggotaan dari $\boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X})$ adalah $\boldsymbol{R}^{-1} = \left[\boldsymbol{r}^{-1}{}_{yx}\right]$ ditentukan oleh transpos dari matriks $\boldsymbol{R}$ yaitu $\boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{R}^{t}$. Di samping itu, berdasarkan definisi $\boldsymbol{R}^{-1}$ juga diperoleh $(\boldsymbol{R}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{R}$, untuk setiap relasi *fuzzy* biner $\boldsymbol{R}$ (Ahmed & Saqib, 2010: 4).

2.6 Komplemen Relasi *Fuzzy* $\neg\boldsymbol{R}$

Komplemen relasi *fuzzy* $\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$ dinotasikan dengan $\neg\boldsymbol{R}$ dan fungsi keanggotaan dinyatakan sebagai berikut (Ahmed & Saqib, 2010: 4):

$$\mu_{\neg R}(x,y) = 1 - \mu_R(x,y), \quad \forall x \in X \; dan \; \forall y \in Y \qquad (2.10)$$

2.7 Aturan Komposisi Relasi *Fuzzy*

Ada operasi khusus dalam relasi *fuzzy* yang tidak ada dalam himpunan-himpunan tegas. Operasi-operasi ini menggunakan operasi himpunan yang telah didefinisikan pada uraian sebelumnya (Ahmed & Saqib, 2010: 4).

2.7.1 Komposisi *Maks-min*

Diketahui dua relasi *fuzzy* $\boldsymbol{R_1}$ dan $\boldsymbol{R_2}$ sebagai berikut (Abbasbandy, dkk, 2006: 1322).

$$\begin{gathered} \boldsymbol{R_1(x,y) \subseteq X \times Y} \text{ dan} \\ \boldsymbol{R_2(y,z) \subseteq Y \times Z} \end{gathered} \qquad (2.11)$$

Maka komposisi $maks - min$ dari R_1 dan R_2 diberikan sebagai berikut.

$$\boldsymbol{R_1 \circ R_2} = \left\{(x,y), maks_{y\in Y}\left(min\left(\mu_{R_1}(x,y), \mu_{R_2}(y,z)\right)\right)\right\} \qquad (2.12)$$

atau

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x,z) = \vee_{y\in Y}\left\{\left(\mu_{R_1}(x,y), \mu_{R_2}(y,z)\right)\right\} \qquad (2.13)$$

dengan $x \in X, y \in Y$ dan $z \in Z$.

μ_{R_1} dan μ_{R_2} adalah fungsi keanggotaan relasi *fuzzy* pada himpunan *fuzzy*. Simbol $\vee$ melambangkan fungsi *maks*, simbol $\wedge$ melambangkan fungsi *min*, dan " $\circ$ " adalah operasi komposisi *maks-min* (Abbasbandy, dkk, 2006: 1323).

Contoh 2.3: Komposisi *maks-min*

Diberikan $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$, dan $Z = \{z_1, z_2\}$.

Misalkan $\boldsymbol{R_1 \subseteq X \times Y}$ dan $\boldsymbol{R_2 \subseteq Y \times Z}$ berturut-turut merupakan relasi *fuzzy*, maka (Ahmed & Saqib, 2010: 5):

$$\boldsymbol{R_1} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}7 \\ 0{,}4 & 1 & 0{,}9 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\boldsymbol{R_2} = \begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} z_1 & z_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 1 & 0{,}8 \\ 0{,}5 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Sebagai langkah pertama akan dihitung $\boldsymbol{R_1} \circ \boldsymbol{R_2}$ dengan menggunakan komposisi *maks-min*.

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x_1, z_1) = maks\{min(0{,}3; 0{,}6), min(0{,}5; 1), min(0; 0{,}5)\} = 0{,}5$$

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x_1, z_2) = maks\{min(0{,}3; 0{,}4), min(0{,}5; 0{,}8), min(0; 0)\} = 0{,}5$$

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x_2, z_1) = maks\{min(0{,}2; 0{,}4), min(0{,}6; 1), min(0{,}7; 0{,}5)\} = 0{,}6$$

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x_2, z_2) = maks\{min(0{,}2; 0{,}4), min(0{,}6; 0{,}8), min(0{,}7; 0{,}0)\} = 0{,}6$$

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x_3, z_1) = maks\{min(0{,}4; 0{,}6), min(1; 1), min(0{,}9; 0{,}5)\} = 1$$

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x_3, z_2) = maks\{min(0{,}4; 0{,}4), min(1; 0{,}8), min(0{,}9; 0{,}0)\} = 0{,}8$$

Dengan menggunakan komposisi $maks - min$ didapatkan hasil berikut.

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{R_1} \circ \boldsymbol{R_2} = \begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} z_1 & z_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0{,}6 \\ 1 & 0{,}8 \end{bmatrix} \end{array}$$

2.7.2 Komposisi *Maks-Produk*

Komposisi *maks-produk* dari dua relasi *fuzzy* $\boldsymbol{R_1}$ dan $\boldsymbol{R_2}$ didefinisikan sebagai berikut (Markovskii, 2004: 1486):

$$\boldsymbol{R_1} \circ \boldsymbol{R_2} = \{(x, z), maks_{y \in Y}\{\mu_{R_1}(x, y) \circ \mu_{R_2}(y, z)\}\} \tag{2.14}$$

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x, z) = \bigvee_{y \in Y} \{\mu_{R_1}(x, y) \circ \mu_{R_2}(y, z)\} \tag{2.15}$$

dengan $x \in X, y \in Y$ dan $z \in Z$.

μ_{R_1} dan μ_{R_2} adalah fungsi keanggotaan relasi *fuzzy* pada himpunan *fuzzy*. Simbol $\vee$ melambangkan fungsi *maks* dan " $\circ$ " adalah operasi komposisi *maks-produk* (Abbasbandy, dkk, 2006: 1324).

Contoh 2.4: Komposisi *maks-produk*

Diberikan $X = \{x_1, x_2, x_3\}, Y = \{y_1, y_2, y_3\}$, dan $Z = \{z_1, z_2\}$. Misalkan $\boldsymbol{R_1} \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{R_2} \subseteq \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{Z}$ berturut-turut merupakan relasi *fuzzy* yang diberikan dengan matriks relasi sebagai berikut (Ahmed & Saqib, 2010: 6):

$$\boldsymbol{R_1} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,3 & 0,5 & 0 \\ 0,2 & 0,6 & 0,7 \\ 0,4 & 1 & 0,9 \end{bmatrix} \end{array}$$

dan

$$\boldsymbol{R_2} = \begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} z_1 & z_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 1 & 0,8 \\ 0,5 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Digunakan aturan *maks-produk* untuk mengkomposisikan relasi *fuzzy* $\boldsymbol{R_1}$ dan $\boldsymbol{R_2}$ sebagai berikut:

$\mu_{R_1 \circ R_2}(x_1, z_1) = maks\{(0{,}3 \circ 0{,}6), (0{,}5 \circ 1), (0{,}0 \circ 0{,}5)\} = 0{,}5$

$\mu_{R_1 \circ R_2}(x_1, z_2) = maks\{(0.3 \circ 0.4), (0{,}5 \circ 0.8), (0{,}0 \circ 0{,}0)\} = 0{,}4$

$\mu_{R_1 \circ R_2}(x_2, z_1) = maks\{(0.2 \circ 0.4), (0{,}6 \circ 1), (0{,}7 \circ 0{,}5)\} = 0{,}6$

$\mu_{R_1 \circ R_2}(x_2, z_2) = maks\{(0.2 \circ 0.4), (0{,}6 \circ 0.8), (0{,}7 \circ 0{,}0)\} = 0{,}48$

$\mu_{R_1 \circ R_2}(x_3, z_1) = maks\{(0.4 \circ 0.6), (1 \circ 1), (0{,}9 \circ 0{,}5)\} = 1$

$\mu_{R_1 \circ R_2}(x_3, z_2) = maks\{(0.4 \circ 0.4), (1 \circ 0{,}8), (0{,}9 \circ 0{,}0)\} = 0{,}8$

Dengan menggunakan komposisi $maks - produk$ didapatkan hasil berikut.

$$
\boldsymbol{S} = \boldsymbol{R_1} \circ \boldsymbol{R_2} = \begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} z_1 & z_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 \\ 0,6 & 0,48 \\ 1 & 0,8 \end{bmatrix} \end{array}
$$

2.8 Persamaan Relasi *Fuzzy*

Persamaan relasi *fuzzy* berperan penting dalam teori himpunan *fuzzy* dan aplikasinya. Yakni, sering terjadi masalah pada aplikasi tertentu. Logika *fuzzy* dapat ditransformasikan ke dalam identifikasi masalah yang tidak diketahui relasi *fuzzy* nya (Klir & Yuan, 2007: 1453).

Persamaan relasi *fuzzy* mempunyai bentuk seperti berikut.

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} \tag{2.16}$$

Dimana $T, R,$ dan S adalah relasi $fuzzy$ dan " $\circ$ " adalah komposisi *maks-min* dan komposisi *maks-produk* dalam persamaan relasi *fuzzy* (Ahmed & Saqib, 2010: 7).

2.9 Persamaan Relasi *Fuzzy* Invers

Berdasarkan suatu persamaan relasi *fuzzy* dengan bentuk $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S}$, hubungan *fuzzy* invers didefinisikan sebagai berikut (Ahmed & Saqib, 2010: 7).

$$\boldsymbol{T}^{-1} = (\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S})^{-1} \tag{2.17}$$

menjadi

$$(\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S})^{-1} = \boldsymbol{S}^{-1} \circ \boldsymbol{R}^{-1} \tag{2.18}$$

Hubungan *fuzzy* inversnya adalah

$$\boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{S}^{-1} \circ \boldsymbol{R}^{-1} \tag{2.19}$$

Contoh 2.5: Relasi *fuzzy*

Misalkan $X = \{x_1, x_2\}, Y = \{y_1, y_2, y_3\}$, dan $Z = \{z_1, z_2\}$. Perhatikan dua relasi *fuzzy* $\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$ dan $\boldsymbol{T} \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Z}$ dengan derajat keanggotaan secara berurutan adalah $\mu_R(x, y)$ dan $\mu_T(x, z)$. Relasi *fuzzy* $\boldsymbol{S}$ dapat dihitung dengan menggunakan persamaan relasi *fuzzy* sebagai berikut (Ahmed & Saqib, 2010: 8):

Dari bentuk $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S}$ kedua sisi dikomposisikan dengan $\boldsymbol{R^{-1}}$, sehingga diperoleh:

$$\boldsymbol{R^{-1}} \circ \boldsymbol{T} = \boldsymbol{R^{-1}} \circ \boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{I} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}$$

Dengan $\boldsymbol{I}$ relasi identitas pada $\boldsymbol{Y}$ atau $\boldsymbol{I} \subseteq \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{Y}$ dan $\boldsymbol{R^{-1}} \subseteq \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{X}$ adalah relasi invers dari $\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{X}$ dan $\mu_{R^{-1}}(y, x) = \mu_R(x, y)$.

Jadi

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{R^{-1}} \circ \boldsymbol{T}$$

Jika diberikan

$$\boldsymbol{T} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} z_1 & z_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,2 & 1 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix} \end{array}$$

dan

$$\boldsymbol{R} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0,9 & 0,1 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \end{bmatrix} \end{array}$$

maka

$$\boldsymbol{R^{-1}} = \begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0,5 \\ 0,9 & 1 \\ 0,1 & 0,3 \end{bmatrix} \end{array}$$

dengan $\boldsymbol{R^{-1}} \subseteq \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{X}$.

Selanjutnya dihitung $\boldsymbol{S}$ dengan menggunakan operator " $\circ$ ", yaitu:

$\mu_S(y,z) = \bigvee x \in X \, \{\mu_{R^{-1}}(y,x) \wedge \mu_T(x,z)\}$ dan dengan demikian diperoleh:

$$\mu_S(y_1, z_1) = \bigvee\{0 \wedge 0{,}2, 0{,}5 \wedge 0\}$$

$$\mu_S(y_1, z_2) = \bigvee\{0 \wedge 1, 0{,}5 \wedge 0{,}5\}$$

$$\mu_S(y_2, z_1) = \bigvee\{0{,}9 \wedge 0{,}2, 1 \wedge 0\}$$

$$\mu_S(y_2, z_2) = \bigvee\{0{,}9 \wedge 1, 1 \wedge 0{,}5\}$$

$$\mu_S(y_3, z_1) = \bigvee\{0{,}1 \wedge 0{,}2, 0{,}3 \wedge 0\}$$

$$\mu_S(y_3, z_2) = \bigvee\{0{,}1 \wedge 1, 0{,}3 \wedge 0{,}5\}$$

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{R}^{-1} \circ \boldsymbol{T} = \begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} z_1 & z_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 \\ 0{,}2 & 0{,}9 \\ 0{,}1 & 0{,}3 \end{bmatrix} \end{array}$$

dengan $S \subseteq X \times Z$ (Ahmed & Saqib, 2010: 9).

2.10 Penyelesaian Persamaan Relasi *Fuzzy*

Selesaian berarti hasil dari menyelesaikan, yang biasanya menjelaskan tentang sesuatu yang diselesaikan dan bertalian dengan alurnya. Hal ini berarti untuk memperoleh suatu selesaian diperlukan suatu alur untuk menyelesaikan. Sedangkan penyelesaian berarti cara menyelesaikan. Persamaan relasi *fuzzy* melibatkan dua jenis dasar persamaan. Salah satunya didasarkan pada norma-norma komposisi *sup-t* dari persmaan relasi *fuzzy* yang didefinisikan sebagai berikut (Bartl, 2012: 24):

$$\boldsymbol{U} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T} \text{ dan } \boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{U} = \boldsymbol{T}.$$

Solusi dari persamaan relasi *fuzzy* $\boldsymbol{U} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$ adalah relasi *fuzzy* acak $\boldsymbol{R} \in \boldsymbol{L}^{\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}}$ sedemikian sehingga setara dengan persamaan $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$ yang terpenuhi. Berikut merupakan definisi dari solusi persamaan relasi *fuzzy* (Bartl, 2012: 26).

Definisi 2.5: Solusi persamaan relasi *fuzzy*

Solusi persamaan relasi *fuzzy* $\boldsymbol{U} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$ adalah relasi *fuzzy* $\boldsymbol{R} \in \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}}$ sedemikian sehingga $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$ berlaku. Kumpulan semua solusi untuk persamaan $\boldsymbol{U} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$ didefinisikan oleh (Bartl, 2012: 27):

$$\mathcal{R} = \{\boldsymbol{R} \in \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}} | \boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}\}.$$

SOLVFRE merupakan singkatan dari *Solving Fuzzy Relational Equation*. Dengan menggunakan SOLVFRE, dapat ditunjukkan bahwa persamaan relasi *fuzzy* dapat diselesaikan. SOLVFRE dapat diidentifikasi oleh satu set yang mengandung semua persamaan yang dapat diselesaikan. SOLVFRE didefinisikan sebagai berikut (Bartl, 2012: 27).

SOLVFRE = $\{\boldsymbol{U} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}|$ dimana $\boldsymbol{R} \in \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}}$ sedemikian sehingga $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}\}$

Dalam bukunya, Klir juga mendefinisikan mengenai solusi dari persamaan relasi *fuzzy* sebagai berikut (Klir, 2002: 156):

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{T}) = \{\boldsymbol{R} | \boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}\}$$

Untuk mendeskripsikan metode penyelesaian, akan didefinisikan $\mathcal{R}$ yang menunjukkan himpunan semua vektor yang mungkin

$$\boldsymbol{R} = [\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{j}} | \boldsymbol{j} \in \boldsymbol{J}]$$

dimana $\boldsymbol{R}^{-1} \circ \boldsymbol{T} = \boldsymbol{R}^{-1} \circ \boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{I} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}$

Dengan $\boldsymbol{I}$ relasi identitas pada $\boldsymbol{Y}$ atau $\boldsymbol{I} \subseteq \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{Y}$ **d**an $\boldsymbol{R}^{-1} \subseteq \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{X}$ adalah relasi invers dari $\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{X}$ dan $\mu_{R^{-1}}(y, x) = \mu_R(x, y)$.

Jadi

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{R}^{-1} \circ \boldsymbol{T}$$

Jika diberikan

$$\boldsymbol{T} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} z_1 & z_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,2 & 1 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix} \end{array}$$

dan

$$\boldsymbol{R} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0,9 & 0,1 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \end{bmatrix} \end{array}$$

maka

$$\boldsymbol{R^{-1}} = \begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0,5 \\ 0,9 & 1 \\ 0,1 & 0,3 \end{bmatrix} \end{array}$$

dengan $\boldsymbol{R^{-1}} \subseteq \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{X}.$

Selanjutnya dihitung $\boldsymbol{S}$ dengan menggunakan operator " $\circ$ ", yaitu:

$\in [0,1]$ untuk semua $j \in J$, dan pasangan berurutan pada $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ didefinisikan sebagai berikut: untuk setiap pasangan $\boldsymbol{R^1}, \boldsymbol{R^2} \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ (Klir, 2002: 156):

$$\boldsymbol{R^1} \leq \boldsymbol{R^2} \text{ iff } \boldsymbol{R_j^1} \leq \boldsymbol{R_j^2}$$

untuk semua $j \in J$. Diberikan pasangan berurutan $\boldsymbol{R^1}, \boldsymbol{R^2} \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ sedemikian sehingga $\boldsymbol{R^1} \leq \boldsymbol{R^2}$ adalah

$$[\boldsymbol{R^1}, \boldsymbol{R^2}] = \{\boldsymbol{R} \in \boldsymbol{\mathcal{R}} | \boldsymbol{R^1} \leq \boldsymbol{R} \leq \boldsymbol{R^2}\}$$

untuk setiap pasangan $\boldsymbol{R^1}, \boldsymbol{R^2} \in \boldsymbol{\mathcal{R}}, ([\boldsymbol{R^1}, \boldsymbol{R^2}], \leq)$ merupakan latis (Klir, 2002: 157).

Selain membutuhkan metode penyelesaian, dalam menyelesaikan persamaan relasi *fuzzy* juga dibutuhkan operator penyelesaian persamaan relasi *fuzzy* untuk memperoleh solusi yang akan ditentukan. Operator-operator tersebut sangat erat kaitannya dengan latis dalam himpunan *fuzzy*. Hal tersebut dikarenakan latis mempunyai batas atas terkecil atau *supremum* yang dinotasikan dengan $X \vee Y = maks(X, Y)$ dan batas bawah terbesar atau *infimum* yang dinotasikan dengan $X \wedge Y = min(X, Y)$. Oleh karena itu, digunakan sifat-sifat latis dalam operator-operator penyelesaian persamaan relasi *fuzzy* untuk memperoleh solusi yang akan ditentukan (Elie, 1976: 38).

2.11 Latis

Latis yang dinotasikan dengan L adalah himpunan terurut parsial atau *partially ordered set* (poset) dengan dua operasi $\vee$ (disebut sebagai *join* atau gabungan) dan $\wedge$ (disebut sebagai *meet* atau irisan), mempunyai batas atas terkecil atau *supremum* yang dinotasikan dengan $X \vee Y = maks(X, Y)$ dan batas bawah terbesar atau *infimum* yang dinotasikan dengan $X \wedge Y = min(X, Y)$ (Elie, 1976: 39).

Jika diberikan L suatu relasi $R = \preccurlyeq$ atau secara umum ditulis $(L, \preccurlyeq)$, suatu poset dan sebarang himpunan bagian $S \subseteq L$, maka poset $(L, \preccurlyeq)$ disebut sebagai latis jika dan hanya jika sebarang dua unsur $x, y \in S$ mempunyai *supremum* $u \in L$ yang ditulis dengan $u = x \vee y$ atau $u = \vee(x, y)$ dan disebut sebagai *join* dan *infimum* $l \in L$ yang ditulis $l = x \wedge y$ atau $u = \wedge(x, y)$ disebut sebagai *meet.* Jika L himpunan terurut total *(toset)* maka L disebut sebagai rangkaian *(chain)* (Elie, 1976: 39).

Operasi $\vee$ dan $\wedge$ dapat dipandang sebagai operasi yang tertutup *(closure)* dalam himpunan L, karena sesuai pengertian latis untuk sebarang dua anggota x dan y dari himpunan $L, x \vee y = u \in L$ dan $x \wedge y = l \in L$. Oleh karena itu L dengan kedua operasi $\vee$ dan $\wedge$ membentuk suatu struktur aljabar yang dilambangkan dengan $(L, \vee, \wedge)$. Hal ini memungkinkan untuk mendefinisikan tentang latis dalam aljabar. Latis dapat dipandang sebagai struktur aljabar seperti ditunjukkan pada definisi berikut (Elie, 1976: 38):

Definisi 2.6: Latis

Struktur aljabar $(L, \vee, \wedge)$ yang terdiri dari himpunan L dan dua operasi biner $\vee$ dan $\wedge$ disebut latis jika memenuhi aksioma-aksioma sebagai berikut (Ping, 2003: 658):

1. Hukum Komutatif:

$$x \vee y = y \vee x$$

$$x \wedge y = y \wedge x$$

untuk setiap $x, y \in L$.

2. Hukum Asosiatif:

$$x \vee (y \vee z) = (y \vee x) \vee z$$

$$x \wedge (y \wedge z) = (y \wedge x) \wedge z$$

untuk setiap $x, y \in L$.

3. Hukum Absorbsi:

$$x \vee (x \wedge y) = x$$

$$x \wedge (x \vee y) = x$$

untuk setiap $x, y \in L$.

4. Hukum Idempoten:

$$x \vee x = x$$

$$x \wedge x = x$$

Aksioma terakhir sebenarnya muncul mengikuti bentuk dari hukum absorbsi yang dikenakan bersama, yaitu $x \vee x = x \vee (x \wedge x) = x$ dan $x \wedge x = x \wedge (x \vee x) = x$. Meskipun seperti itu, kedua kesamaan tersebut biasanya juga dipandang sebagai aksioma tersendiri, yaitu hukum idempoten (Ping, 2003: 659).

Unsur terbesar dari latis disebut unsur maksimum atau puncak *(top)* dari latis, sedangkan unsur terkecil dari latis disebut unsur minimum atau dasar *(bottom)* dari latis. Mengikuti argumen induksi bahwa setiap himpunan bagian berhingga yang tidak kosong dari latis mempunyai *join* dan *meet*. Suatu latis disebut *complete* atau lengkap jika sebarang himpunan bagian X mempunyai *supremum* yang ditulis dengan $sup\ X$ atau $\vee X$ dan *infimum* yang ditulis dengan $inf\ X$ atau $\wedge X$ (Ping, 2003: 659).

Contoh 2.6: Latis

1. Diberikan sebarang himpunan A. *Power set* atau keluarga himpunan bagian A yang ditulis dengan $2^A = \mathcal{P}(A)$ adalah poset berdasarkan relasi inklusi (operasi $\subseteq$). Operasi gabungan $\cup$ dan irisan $\cap$ dapat diinterpretasikan secara berurutan sebagai *join* dan meet dari latis. Jika $A = \{a, b, c\}$, maka himpunan kuasanya adalah poset, yaitu (Elie, 1976: 40):

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

   Secara umum untuk sebarg semesta U, keluarga semua himpunan bagian dari semesta U adalah latis yang terbatas dengan batas atas *(top)* $1 = U$ dan batas bawah *(bottom)* $0 = \emptyset$.

2. Jika $\mathbb{N}$ adalah bilangan bulat positif, maka himpunan D_m pembagi-pembagi dari $m \in \mathbb{N}$ adalah latis dengan relasi pembagi. Untuk sebarang pasangan $a, b \in \mathbb{N}$ didefinisikan operasi (Elie, 1976: 40):

$$a \vee b = \sup(a, b) = KPK(a, b)$$

$$a \wedge b = \inf(a, b) = FPB(a, b)$$

2.11.1 Latis Terbatas

Suatu latis dengan tambahan bahwa unsur terbesarnya 1 dan unsur terkecilnya 0 disebut latis terbatas *(bounded latis)*, sehingga untuk setiap $x \in L$ memenuhi $0 \leq x \leq 1$. Seperti halnya pada poset bahwa notasi 0 dan 1 bukan berarti numerik tetapi hanya simbol untuk menyatakan batas dari latis (Ping, 2003: 660).

Berdasarkan definisi pada aljabar, suatu latis terbatas merupakan struktur aljabar yang ditulis dalam bentuk $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$, dengan $(L, \vee, \wedge)$ adalah latis. Unsur terkecil 0 adalah dasar *(bottom)* latis dan disebut identitas operasi $\vee$, sedangkan unsur terbesar 1 adalah puncak *(top)* dari latis dan disebut identitas dari operasi $\wedge$ (Ping, 2003: 660).

Kedua identitas di atas dapat ditulis dalam pernyataan yang saling dual sebagai berikut (Ping, 2003: 660):

$$a \vee 0 = a$$

$$a \wedge 1 = a$$

Seperti pada himpunan, pada latis juga menganut prinsip dual bahwa dual dari suatu teorema dalam latis juga teorema. Dual pada latis diperoleh dengan saling menukar operasi $\vee$ dengan operasi $\wedge$ dan 0 dengan 1. Sebagai contoh bahwa $a \vee 0 = a$ dan $a \wedge 1 = a$ adalah dua pernyataan yang saling dual (Elie, 1976: 41).

Berdasarkan beberapa sifat secara berurutan yaitu komutatif, identitas, dan absorbsi dapat dibuktikan kesamaan lain yang saling dual, yaitu:

$$a \vee 1 = 1$$

$$a \wedge 0 = 0$$

Bukti:

$$a \vee 1 = 1 \vee a = 1 \vee (1 \wedge a) = 1$$

Sedangkan $a \wedge 0 = 0$ adalah dual dari $a \vee 1 = 1$.

Suatu poset adalah latis terbatas jika dan hanya jika setiap himpunan berhingga (termasuk himpunan kosong) mempunyai *join* dan *meet*. Untuk semua unsur x dari poset adalah kebenaran trivial (kebenaran kosong), yaitu $\forall a \in \emptyset, x \preccurlyeq a$ dan $\forall a \in \emptyset, a \preccurlyeq x$ dan oleh karena itu setiap unsur dari poset merupakan batas atas dan batas bawah dari himpunan kosong. Hal ini berarti bahwa *join* dari himpunan kosong adalah unsur terkecil yaitu $\vee\emptyset = 0$ dan *meet* dari himpunan kosong adalah unsur terbesar, yaitu $\wedge\emptyset = 1$. Hal ini konsisten dengan hukum komutatif dan asosiatif dari *join* dan *meet* (Elie, 1976: 42).

2.11.2 Sifat-sifat Latis

Join dari gabungan himpunan berhingga sama dengan *join* dari *join* masing-masing himpunan, dan dualnya adalah *meet* dari gabungan himpunan berhingga sama dengan *meet* dari *meet* masing-masing himpunan. Untuk sebarang himpunan berhingga A dan B dari poset L. Pernyataan di atas dapat ditulis sebagai (Ping, 2003: 661):

$$\bigvee(A \cup B) = (\bigvee A) \vee (\bigvee B)$$

$$\bigwedge(A \cup B) = (\bigwedge A) \wedge (\bigwedge B)$$

Dengan mengganti $B = \emptyset$ diperoleh:

$$\bigvee(A \cup \emptyset) = (\bigvee A) \vee (\bigvee\emptyset) = (\bigvee A) \vee 0 = (\bigvee A)$$

$$\bigwedge(A \cup \emptyset) = (\bigwedge A) \wedge (\bigwedge\emptyset) = (\bigwedge A) \wedge 0 = (\bigwedge A)$$

hal ini konsisten dengan kenyataan bahwa $A \cup \emptyset = A$.

Suatu latis L disebut distributif jika untuk setiap unsur $x, y, z \in L$ memenuhi sifat distributif, sebagai berikut (Ping, 2003: 661):

a. $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

b. $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

2.12 Operator Penyelesaian Persamaan Relasi *Fuzzy*

Ada beberapa operator yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan relasi *fuzzy*, seperti operator $\alpha, \gamma, \sigma,$ dan ε. Berikut uraiannya (Ahmed & Saqib, 2010: 9).

2.12.1 Operator α

Sebelum membahas mengenai operator α akan didefinisikan terlebih dahulu mengenai *Latis Brouwerian*. Jika diberikan sebarang dua anggota a dan b, maka *Latis Brouwerian* dari a dan b adalah himpunan semua $x \in L$ sedemikian sehingga $a \wedge x \leq b$ memuat satu unsur terbesar dan ditulis sebagai $a\, \alpha\, b$. Diberikan suatu Latis $L \in [0,1]$, maka operator α didefinisikan sebagai berikut:

$$a\, \alpha\, b = \begin{cases} 1 \text{ jika } a \leq b \\ b \text{ jika } a > b \end{cases} \qquad (2.20)$$

Contoh 2.7: Operator α

Untuk sebarang nilai a dan b yang berbeda, operator α disajikan sebagai berikut:

$$0{,}8\ \alpha\ 0{,}5 = 0{,}5 \qquad 0{,}5\ \alpha\ 0{,}6 = 1$$
$$0{,}3\ \alpha\ 0{,}3 = 1 \qquad 0{,}6\ \alpha\ 0{,}3 = 0{,}3$$

2.12.2 Sifat-sifat Operator α

Operator α memiliki beberapa sifat, yaitu (Ahmed & Saqib, 2010: 10):

a. Jika $b = 0$, maka $a\ \alpha\ b$ diberikan sebagai berikut:

$$a\ \alpha\ 0 = \begin{cases} 1 \text{ jika } a = b \\ 0 \text{ jika } a > b \end{cases} \tag{2.21}$$

b. Jika $a = 0$, maka $a\ \alpha\ b$ diberikan sebagai berikut:

$$0\ \alpha\ b = 1$$

c. Jika $b = 1$, maka $a\ \alpha\ b$ diberikan sebagai berikut:

$$a\ \alpha\ 1 = 1$$

d. Jika $a = 1$, maka $a\ \alpha\ b$ diberikan sebagai berikut:

$$1\ \alpha\ b = b$$

e. Operator α tidak komutatif:

$$a\ \alpha\ b \neq b\ \alpha\ a$$

Jika $a = 0{,}5$ dan $b = 0{,}7$, maka:

$0{,}5\ \alpha\ 0{,}7 = 1$ dan $0{,}7\ \alpha\ 0{,}5 = 0{,}5$, sehingga

$$0{,}5\ \alpha\ 0{,}7 \neq 0{,}7\ \alpha\ 0{,}5$$
$$1 \neq 0{,}5$$

f. Operator α tidak assosiatif:

$$a\ \alpha\ (b\ \alpha\ c) \neq (a\ \alpha\ b)\ \alpha\ c$$

Jika $a = 0{,}5$, $b = 0{,}7$, dan $c = 0{,}6$ maka:

$$a\ \alpha\ (b\ \alpha\ c) = 0{,}5\ \alpha\ (0{,}7\ \alpha\ 0{,}6) = 0{,}5\ \alpha\ 0{,}6 = 1$$

$$(a\ \alpha\ b)\ \alpha\ c = (0{,}5\ \alpha\ 0{,}7)\ \alpha\ 0{,}6 = 1\ \alpha\ 0{,}6 = 0{,}6$$

Sehingga

$$0{,}5\ \alpha\ (0{,}7\ \alpha\ 0{,}6) \neq (0{,}5\ \alpha\ 0{,}7)\ \alpha\ 0{,}6$$
$$0{,}5\ \alpha\ 0{,}6 \neq 1\ \alpha\ 0{,}6$$
$$1 \neq 0{,}6$$

Dalam hal ini, berarti sifat assosiatif tidak berlaku.

Di samping itu, operator α juga mempunyai beberapa sifat lain yang didefinisikan sebagai berikut (Ahmed & Saqib, 2010: 11):

$$a \wedge (a\ @\ b) = a \wedge b \leq b \qquad (2.22)$$
$$a\ \alpha\ b \geq b \qquad (2.23)$$
$$a\ \alpha\ (b \vee c) \geq a\ @\ b \qquad (2.24)$$
$$a\ @\ (a \wedge b) \geq b \qquad (2.25)$$
$$a\ \alpha\ (b \vee c) \geq a\ @\ c \qquad (2.26)$$

Simbol $\vee$ melambangkan fungsi *maks*, simbol $\wedge$ melambangkan fungsi *min*, dan @ adalah operasi komposisi oleh operator α (Abbasbandy, dkk, 2006: 1325).

2.12.3 Operator γ

Diberikan sebarang dua unsur yang berbeda dari suatu Latis $L \in [0,1]$, maka operator γ didefinisikan sebagai berikut:

$$a\ \gamma\ b = \begin{cases} 1 \text{ jika } a = b \\ 0 \text{ jika } a \neq b \end{cases} \tag{2.27}$$

Operator γ juga disebut sebagai operator kesamaan (Ahmed & Saqib, 2010: 12).

Contoh 2.8: Operator γ

Untuk sebarang nilai a dan b yang berbeda, operator γ disajikan sebagai berikut (Ahmed & Saqib, 2010: 12):

$$\begin{array}{ll} 0{,}8\ \gamma\ 0{,}5 = 0 & 0{,}2\ \gamma\ 0{,}2 = 1 \\ 0{,}5\ \gamma\ 0{,}9 = 0 & 0{,}7\ \gamma\ 0{,}7 = 1 \end{array}$$

2.12.4 Operator σ

Diberikan sebarang dua unsur yang berbeda dari suatu Latis $L \in [0,1]$, maka operator σ didefinisikan sebagai berikut (Zadeh, 2010: 31):

$$a\ \sigma\ b = \begin{cases} 0 \text{ jika } a < b \\ b \text{ jika } a \geq b \end{cases} \tag{2.28}$$

Contoh 2.9: Operator σ

Untuk sebarang nilai a dan b yang berbeda, operator α disajikan sebagai berikut (Ahmed & Saqib, 2010: 12):

$$\begin{array}{ll} 0{,}2\ \sigma\ 0{,}5 = 0 & 0{,}3\ \sigma\ 0{,}3 = 0{,}3 \\ 0{,}7\ \sigma\ 1 = 0 & 1\ \sigma\ 0{,}6 = 0{,}6 \end{array}$$

2.12.5 Operator ε

Diberikan sebarang dua unsur yang berbeda dari suatu Latis $L \in [0,1]$, maka operator ε didefinisikan sebagai berikut (Ahmed & Saqib, 2010: 12):

$$a\ \varepsilon\ b = \begin{cases} b \text{ jika } a < b \\ 0 \text{ jika } a \geq b \end{cases} \tag{2.29}$$

Contoh 2.10: Operator ε

Untuk sebarang nilai a dan b yang berbeda, operator ε disajikan sebagai berikut (Ahmed & Saqib, 2010: 13):

$$0{,}1\ \varepsilon\ 0{,}9 = 0{,}9 \qquad 0{,}7\ \varepsilon\ 0 = 0$$
$$0{,}2\ \varepsilon\ 0{,}2 = 0 \qquad 0{,}2\ \varepsilon\ 0{,}5 = 0{,}5$$

2.12.6 Produk σ dari Dua Himpunan *Fuzzy*

Diberikan sebarang dua himpunan *fuzzy* $A \in X$ dan $B \in Y$ unsur yang berbeda dari suatu Latis $L \in [0,1]$, maka produk σ diantara dua himpunan *fuzzy* A dan B tersebut dinotasikan dengan $A\ \sigma\ B$ dan fungsi keanggotaanya didefinisikan sebagai berikut (Ezzati, dkk, 2012: 2):

$$\mu_{A\,\sigma\,B}(x,y) = \mu_A(x)\ \sigma\ \mu_A(y) \tag{2.30}$$

$\forall x \in X$ dan $y \in Y$.

μ_A dan μ_B adalah fungsi keanggotaan relasi *fuzzy* pada himpunan *fuzzy*, dan σ adalah operasi komposisi oleh operator σ (Abbasbandy, dkk, 2006: 1326).

Contoh 2.11: Produk σ

Diberikan dua himpunan *fuzzy* X dan Y sebagai berikut (Ahmed & Saqib, 2010: 14):

$$X = \{x_1, x_2, x_3\}$$

$$Y = \{y_1, y_2, y_3\}$$

dan

$$A = \left\{\frac{0{,}2}{x_1}, \frac{0{,}5}{x_2}, \frac{0{,}9}{x_3}\right\}$$

$$B = \left\{\frac{0,7}{y_1}, \frac{0,1}{y_2}, \frac{0,8}{y_3}\right\}$$

Dengan menggunakan operasi komposisi oleh operator σ diperoleh hasil sebagai berikut:

$$A\ \sigma\ B = \frac{0}{(x_1,y_1)} + \frac{0,1}{(x_1,y_2)} + \frac{0}{(x_1,y_3)} + \frac{0}{(x_2,y_1)} + \frac{0,1}{(x_2,y_2)} + \frac{0}{(x_2,y_3)} + \frac{0,7}{(x_3,y_1)} + \frac{0,1}{(x_3,y_2)} + \frac{0,8}{(x_3,y_3)}$$

$$A\ \sigma\ B = \frac{0,1}{(x_1,y_2)} + \frac{0,1}{(x_2,y_2)} + \frac{0,7}{(x_3,y_1)} + \frac{0,1}{(x_3,y_2)} + \frac{0,8}{(x_3,y_3)}$$

2.12.7 Komposisi Operator @

Diberikan dua relasi *fuzzy* $R \subseteq X \times Y$ dan $S \subseteq Y \times Z$. Hubungan diantara dua relasi menggunakan komposisi @ didefinisikan sebagai berikut (Ahmed & Saqib, 2010: 14):

$$R\ @\ S \subseteq X \times Z \tag{2.31}$$

Dengan fungsi keanggotaan yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\mu_{R@S}(x,z) = \wedge_{y\in Y}\{(\mu_R(x,y) @ \mu_S(y,z))\} \quad \forall x \in X, y \in Y \text{ dan } z \in Z \tag{2.32}$$

μ_R dan μ_S adalah fungsi keanggotaan relasi *fuzzy* pada himpunan *fuzzy*. Simbol $\wedge$ melambangkan fungsi *min* dan @ adalah operasi komposisi oleh operator α (Abbasbandy, dkk, 2006: 1327).

Contoh 2.12: Komposisi @

Diberikan $X = \{x_1, x_2, x_3\}, Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ dan $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$ dan dua relasi *fuzzy* $\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$ dan $\boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{Z}$, yang diberikan dengan matriks relasi sebagai berikut (Ahmed & Saqib, 2010: 14):

$$\boldsymbol{R} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0 & 0{,}5 \\ 1 & 0{,}7 & 0{,}8 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{bmatrix} \end{array}$$

dan

$$\boldsymbol{S} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0{,}9 & 0{,}6 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}7 & 0{,}3 \end{bmatrix} \end{array}$$

$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})@\boldsymbol{S}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ untuk setiap $x \in X$ dan $z \in Z$ sehingga

$$\boldsymbol{R}@\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0 & 0{,}5 \\ 1 & 0{,}7 & 0{,}8 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} 1 & 0{,}9 & 0{,}6 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}7 & 0{,}3 \end{bmatrix}$$

Dan fungsi kenggotaan dari komposisi $\boldsymbol{R}@\boldsymbol{S}$ tersebut ditentukan sebagai berikut:

$$\mu_{R@S}(x_1, z_1) = \bigwedge y \in Y\,\{(0{,}1\alpha 1), (0\alpha 0{,}5), (0{,}5\alpha 0)\} = 0{,}5$$

$$\mu_{R@S}(1, z_2) = \bigwedge y \in Y\,\{(0{,}1\alpha 0{,}9), (0\alpha 0), (0{,}5\alpha 0{,}7)\} = 1$$

$$\mu_{R@S}(x_1, z_3) = \bigwedge y \in Y\,\{(0{,}1\alpha 0{,}6), (0\alpha 0{,}2), (0{,}5\alpha 0{,}3)\} = 0{,}3$$

$$\mu_{R@S}(x_2, z_1) = \bigwedge y \in Y\,\{(1\alpha 1), (0{,}7\alpha 0{,}5), (0{,}8\alpha 0)\} = 0$$

$$\mu_{R@S}(x_2, z_2) = \bigwedge y \in Y\,\{(1\alpha 0{,}9), (0{,}7\alpha 0), (0{,}8\alpha 0{,}7)\} = 0$$

$$\mu_{R@S}(x_2, z_3) = \bigwedge y \in Y\,\{(1\alpha 0{,}6), (0{,}7\alpha 0{,}2), (0{,}8\alpha 0{,}3)\} = 0{,}2$$

$$\mu_{R@S}(x_3, z_1) = \bigwedge y \in Y\,\{(0{,}4\alpha 1), (0{,}3\alpha 0{,}5), (1\alpha 0)\} = 0$$

$$\mu_{R@S}(x_3, z_2) = \bigwedge y \in Y\,\{(0{,}4\alpha 0{,}9), (0{,}3\alpha 0), (1\alpha 0{,}7)\} = 0$$

$$\mu_{R@S}(x_3, z_3) = \bigwedge y \in Y\,\{(0{,}4\alpha 0{,}6), (0{,}3\alpha 0{,}2), (1\alpha 0{,}3)\} = 0{,}2$$

dengan demikian diperoleh:

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{R}@\boldsymbol{S} = \boldsymbol{R} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,2 \end{bmatrix} \end{array}$$

2.12.8 Komposisi Operator $\boldsymbol{\gamma}$

Diberikan $\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$ dan $\boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{Z}$, hubungan diantara dua relasi menggunakan komposisi γ didefinisikan sebagai berikut (Ahmed & Saqib, 2010: 15):

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Z}$$

Dengan fungsi keanggotaan yang ditentukan sebagai berikut:

$$\mu_{R(\gamma)S}(x,z) = \wedge\, y \in Y \left\{\mu_R(x,y)\gamma\mu_Q(y,z)\right\} \forall x \in X, y \in Y \text{ dan } z \in Z \qquad (2.33)$$

μ_R dan μ_S adalah fungsi keanggotaan relasi *fuzzy* pada himpunan *fuzzy*. Simbol $\wedge$ melambangkan fungsi *min* dan γ adalah operasi komposisi oleh operator γ (Abbasbandy, dkk, 2006: 1328).

Contoh 2.13: Komposisi γ

Diberikan $X = \{x_1, x_2\}, Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ dan $Z = \{z_1, z_2\}$ dan dua relasi *fuzzy* $\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$ dan $\boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{Z}$, yang diberikan dengan matriks relasi sebagai berikut (Ahmed & Saqib, 2010: 15):

$$\boldsymbol{R} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,5 & 0,6 & 0,9 \\ 0,4 & 0,2 & 0,8 \end{bmatrix} \end{array}$$

dan

$$\boldsymbol{S} = \begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} z_1 & z_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,9 & 0,5 \\ 0,7 & 0,6 \\ 0,8 & 0,9 \end{bmatrix} \end{array}$$

Dihitung $\boldsymbol{T} \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Z}$ dengan menggunakan komposisi (γ) sebagai berikut:

$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{S}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ untuk setiap $x \in X$ dan $z \in Z$ sehingga

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,6 & 0,9 \\ 0,4 & 0,2 & 0,8 \end{bmatrix} (\gamma) \begin{bmatrix} 0,9 & 0,5 \\ 0,7 & 0,6 \\ 0,8 & 0,9 \end{bmatrix}$$

dan fungsi keanggotaan dari komposisi $\boldsymbol{R@S}$ tersebut ditentukan sebagai berikut:

$$\mu_{R(\gamma)S}(x_1, z_1) = \bigwedge y \in Y \{(0,5\alpha 0,9), (0,6\alpha 0,7), (0,5\alpha 0,8)\} = 0$$

$$\mu_{R(\gamma)S}(x_1, z_2) = \bigwedge y \in Y \{(0,5\alpha 0,5), (0,6\alpha 0,6), (0,9\alpha 0,9)\} = 1$$

$$\mu_{R(\gamma)S}(x_2, z_1) = \bigwedge y \in Y \{(0,4\alpha 0,9), (0,2\alpha 0,7), (0,8\alpha 0,8)\} = 0$$

$$\mu_{R(\gamma)S}(x_2, z_2) = \bigwedge y \in Y \{(0,4\alpha 0,5), (0,2\alpha 0,6), (0,8\alpha 0,9)\} = 0$$

dengan demikian

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{S} = \boldsymbol{R_2} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} z_1 & z_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

2.13 Kajian Islam Mengenai Persamaan Relasi *Fuzzy*

Allah Swt adalah sebaik-baik pencipta. Allah Swt menciptakan manusia ke bumi agar senantiasa beribadah kepada-Nya, namun masih banyak manusia yang terjerumus ke dalam lembah dosa. Allah Swt sangat menyayangi makhluk ciptaan-Nya, salah satu bentuknya yaitu dengan memberikan ujian kepada makhluk-Nya. Dan ujian yang berikan Allah Swt tersebut pasti disertai pula dengan jalan keluar. Allah Swt berfirman dalam QS. al-Insyirah/94: 5-6, yaitu:

فَإِنَّ مَعَ ٱلۡعُسۡرِ يُسۡرًا ۝٥ إِنَّ مَعَ ٱلۡعُسۡرِ يُسۡرٗا ۝٦

"Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan. Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan" (QS. al-Insyirah/94:5-6).

Ayat ini merupakan kabar gembira akan datangnya kemudahan untuk Nabi SAW dan para sahabatnya setelah merasakan pahit getirnya hidup (Al-Jazari, 2009: 967). Dalam QS. al-Insyirah ayat 5 di atas, Allah Swt memberitahukan bahwa bersama kesulitan itu terdapat kemudahan. Kemudian Allah Swt mempertegas berita tersebut. Ibnu Jarir meriwayatkan dari al-Hasan, dia berkata: "Nabi Saw. pernah keluar rumah pada suatu hari dalam keadaan senang dan gembira, dan beliau juga dalam keadaan tertawa seraya bersabda:

لَنْ يَغْلِبَ عُسْرٌ يُسْرَيْنِ, لَنْ يَغْلِبَ عُسْرٌ يُسْرَيْنِ, فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا

"Satu kesulitan itu tidak akan pernah mengalahkan dua kemudahan, satu kesulitan itu tidak akan pernah mengalahkan dua kemudahan, karena bersama kesulitan itu pasti ada kemudahan, sesungguhnya bersama kesulitan itu terdapat kemudahan. (Ishaq, 2004: 498)."

Dengan demikian, dapat dikatakan bahwa kesulitan itu dapat diketahui pada dua keadaan, dimana kalimatnya dalam bentuk *mufrad* (tunggal). Sedangkan kemudahan *(al-hasyr)* dalam bentuk *nakirah* (tidak ada ketentuannya) sehingga bilangannya bertambah banyak. Oleh karena itu, beliau bersabda, "Satu kesulitan itu tidak akan pernah mengalahkan dua kemudahan (Ishaq, 2004: 498)."

Pada ayat lain, Allah Swt juga berfirman mengenai konsep relasi (hubungan), yaitu pada QS. az-Zariyat/51:56, yaitu:

وَمَا خَلَقْتُ ٱلْجِنَّ وَٱلْإِنسَ إِلَّا لِيَعْبُدُونِ ﴿٥٦﴾

"Dan aku tidak menciptakan jin dan manusia melainkan supaya mereka beribadah kepada-Ku" (QS. az-Zariyat/51:56).

Dalam ayat di atas, Allah Swt menjelaskan bahwa Allah Swt menciptakan jin dan manusia dengan tujuan untuk menyuruh mereka beribadah kepada Allah Swt, bukn karena Allah membutuhkan mereka. Mengenai firman Allah Swt (إِلَّالِيَعْبُدُونِ)

“Melainkan supaya mereka beribadah kepada-Ku.”, Ali bin Abi Thalhah meriwayatkan dari Ibnu ‘Abbas: “Artinya, melainkan supaya mereka mau tunduk beribadah kepada-Ku., baik secara sukarela maupun terpaksa”. Dan itu pula yang menjadi pilihan Ibnu Jarir. Sedangkan Ibnu Juraij menyebutkan: “Yakni, supaya mereka mengenal-Ku.”. Ar-Rabi’ bin Anas mengatakan: “Maksudnya tidak lain kecuali untuk beribadah.”. As-Suddi mengemukakan: “Di antara ibadah itu ada yang bermanfaat dan ada pula yang tidak bermanfaat.”. Allah Swt berfirman:

وَلَئِنْ سَأَلْتَهُمْ مَنْ خَلَقَ السَّمَاوَاتِ وَالْأَرْضَ لَيَقُولُنَّ اللَّهُ قُلِ الْحَمْدُ لِلَّهِ بَلْ أَكْثَرُهُمْ لَا يَعْلَمُونَ

“Dan Sesungguhnya jika kamu tanyakan kepada mereka: "Siapakah yang menciptakan langit dan bumi?" tentu mereka akan menjawab: "Allah" (Ishaq, 2004: 546).

Allah Swt menciptakan jin dan manusia tidak main-main. Bukan untuk sebuah tujuan tertentu, melainkan Allah Swt menciptakan keduanya untuk beribadah dan tunduk kepada-Nya. Menaati perintah dan menjauhi larangan-Nya. Kemudian dalam ayat 57, Allah Swt berfirman yang artinya: *“Aku tidak menghendaki rezeki sedikitpun dari mereka dan Aku tidak menghendaki supaya mereka memberi-Ku makan.”*. Maksudnya, hubungan antara Allah Swt dengan jin dan manusia bukan seperti hubungan seorang majikan dengan budak-budaknya. Ada seorang budak yang bertugas mencari uang dan budak yang lain bertugas menyiapkan makanan sang majikan. Akan tetapi, Allah Swt menciptakan mereka agar mereka beribadah dan mengesakan-Nya. Apabila mereka beribadah dengan menyekutukan-Nya, ibadah mereka tidak akan diterima dan Allah Swt tidak akan memberikan pahala kepada mereka. Sebaliknya Allah Swt akan menyiksa mereka, walaupun mereka taat beribadah. Hal ini dikarenakan mereka telah menyembah sesuatu yang tidak berhak untuk disembah (Al-Jazari, 2009: 98-99).

Ibadah mereka yang disertai dengan kesyirikan itu sama sekali tidak mendatangkan manfaat bagi mereka. Adh-Dhahhak mengatakan: "Dan yang dimaksudkan dengan hal itu adalah orang-orang yang beriman (Al-Jazari, 2009: 99)."

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Solusi Maksimum dan Solusi Minimum Persamaan Relasi *Fuzzy* dengan Menggunakan Komposisi *Maks-Produk*

3.1.1 Solusi Maksimum Persamaan Relasi *Fuzzy*

Pada Subbab 3.1.1 ini akan dibahas beberapa metode menentukan solusi maksimum dari persamaan relasi *fuzzy* dengan menggunakan matriks fungsi keanggotaan berdasarkan komposisi *maks-produk*. Akan dibahas bagaimana cara menentukan maksimum $\boldsymbol{S}$ dan maksimum maksimum $\boldsymbol{R}$ untuk persamaan relasi *fuzzy* $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$. Solusi maksimum dinotasikan dengan lambang "∇".

3.1.1.1 Menentukan Maksimum $\boldsymbol{S}$ dari Persamaan $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$

Jika diberikan persamaan relasi *fuzzy* $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$, maka untuk menentukan maksimum $\boldsymbol{S}$ terlebih dahulu akan dibahas mengenai beberapa lemma dan teorema sebagai berikut.

Lemma 3.1:

Jika terdapat dua relasi *fuzzy* $\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$ dan $\boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{Z}$, maka dapat dinotasikan sebagai

$$\boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{R}^{-1} @ (\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S}) \qquad (3.1)$$

Dimana " $\circ$ " menyatakan komposisi *maks-produk* dan "@" adalah komposisi oleh operator α.

Bukti:

Misalkan

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{R}^{-\mathbf{1}} @ (\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S}) \subseteq \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{Z}$$

Berdasarkan persamaan (2.9) dan persamaan (2.26), diperoleh

$$\mu_P(y,z) = \bigwedge_{x\in X} \{\mu_{R^{-1}}(y,x)\ \alpha\ \mu_{R\circ S}(x,z)\}$$

$$= \bigwedge_{x\in X} \{\mu_R(x,y)\ \alpha\ \mu_{R\circ S}(x,z)\}$$

$$= \bigwedge_{x\in X} \left(\mu_R(x,y)\ \alpha\ \left(\bigvee_{t\in Y} \left\{ \mu_R(x,t) \bigvee \mu_S(t,z) \right\} \right) \right)$$

$$= \bigwedge_{x\in X} \left(\mu_R(x,y)\ \alpha\ (\mu_R(x,y) \wedge\ \mu_S(y,z) \wedge \bigvee_{t\in Y, t\neq y} (\mu_R(x,t) \wedge \mu_S(t,z)) \right)$$

sehingga diperoleh

$$\mu_P(y,z) \geq \bigwedge_{x\in X} \{\mu_R(x,y)\ \alpha\ (\mu_R(x,y) \wedge \mu_S(y,z)))\}$$

Seperti diketahui pada persamaan (2.25), maka dengan menggunakan operator $\boldsymbol{\alpha}$ diperoleh

$$a\ \alpha (a \wedge b) \geq b \qquad (3.2)$$

berdasarkan persamaan (3.2), diperoleh

$$\mu_P(y,z) \geq \mu_S(y,z) \quad \forall y \in Y \text{ dan } z \in Z$$

Contoh 3.1:

Misalkan $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ dan $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$. Diketahui $\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$ dan $\boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{Z}$ berturut-turut merupakan dua relasi *fuzzy* yang diberikan dengan matriks relasi sebagai berikut:

$$R = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$S = \begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}6 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 1 & 0{,}8 \end{bmatrix} \end{array}$$

dengan menggunakan komposisi *maks-produk* diperoleh

$$R \circ S = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 1 & 0{,}8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & 1 & 0{,}8 \end{bmatrix}$$

dan

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh

$$R^{-1} @ (R \circ S) = \begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0{,}6 & 1 & 0{,}8 \end{bmatrix} \end{array}$$

Contoh ini menunjukkan bahwa $S \subset R^{-1} @ (R \circ S)$. Dengan demikian, Lemma 3.1 terpenuhi.

Lemma 3.2 (Elie, 1976: 41):

Diberikan dua relasi *fuzzy* $R \subseteq X \times Y$ dan $T \subseteq X \times Z$, maka relasi tersebut memenuhi relasi inklusi sebagai berikut:

$$R \circ (R^{-1} @ T) \subset T \tag{3.3}$$

Lemma 3.3 (Elie, 1976: 42):

Diberikan dua relasi *fuzzy* $R \subseteq X \times Y$ dan $S \subseteq Y \times Z$, maka relasi tersebut memenuhi relasi inklusi sebagai berikut:

$$\boldsymbol{R} \subseteq (\boldsymbol{S}@(\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S})^{-1})^{-1} \tag{3.4}$$

Lemma 3.4 (Elie, 1976: 42):

Diberikan dua relasi *fuzzy* $\boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{Z}$ dan $\boldsymbol{T} \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Z}$, maka relasi tersebut memenuhi relasi inklusi sebagai berikut:

$$(\boldsymbol{S}@\boldsymbol{T}^{-1})^{-1} \circ \boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{T} \tag{3.5}$$

Teorema 3.1 (Elie, 1976: 42):

Diberikan dua relasi *fuzzy* $\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$ dan $\boldsymbol{T} \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Z},$ $H(S)$ adalah himpunan relasi *fuzzy* $\boldsymbol{S} \in \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{Z}$ sedemikian sehingga $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}.$

$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{S}) = \{\boldsymbol{S} \in \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{Z} | \boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}\} \neq \boldsymbol{\phi}$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{R}^{-1}@\boldsymbol{T} \in \boldsymbol{H}(\boldsymbol{S})$ maka "$\boldsymbol{R}^{-1}$ $@\boldsymbol{T}$" adalah unsur terbesar di $H(S)$.

Teorema 3.2:

Diberikan dua relasi *fuzzy* $\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$ dan $\boldsymbol{T} \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Z},$ himpunan dari relasi *fuzzy* $\boldsymbol{S} \in \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{Z}$ sedemikian sehingga $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$ yang mengandung unsur terbesar $\boldsymbol{R}^{-1}$ $@\boldsymbol{T}.$

Bukti:

Misalkan $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{S})^* = \{\boldsymbol{S} \in (\boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{Z}) |\ \boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{T}|$ dan $H(S)^* \neq \phi$.

Karena relasi bernilai nol, maka

$$0(y, z) = 0 \quad \forall\ (y, z) \in Y \times Z, \in H(S)^*$$

Misalkan $\boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{H}(\boldsymbol{S})^* : \boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$

maka didapatkan

$$\boldsymbol{R}^{-1}@(\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S}) \subseteq \boldsymbol{R}^{-1}@\boldsymbol{T}$$

tetapi berdasarkan Lemma 3.1, diperoleh

$$\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{R}^{-1}@(\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S})$$

Hal ini menunjukkan bahwa

$$\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{R}^{-1}@\boldsymbol{T}$$

Dari Teorema 3.1 diperoleh

$$\boldsymbol{R}^{-1}@\boldsymbol{T} \in \boldsymbol{H}(\boldsymbol{S})$$

Hal ini menunjukkan bahwa $\boldsymbol{R}^{-1}@\boldsymbol{T} \in \boldsymbol{H}(\boldsymbol{S})^*$, maka $\boldsymbol{R}^{-1}@\boldsymbol{T}$ merupakan unsur terbesar di $H(S)^*$. Oleh karena itu, $\boldsymbol{R}^{-1}@\boldsymbol{T}$ adalah unsur terbesar di $H(S)^*$. Dengan demikian,

$$\boldsymbol{S}^{\nabla} = \boldsymbol{R}^{-1}@\boldsymbol{T} \tag{3.6}$$

merupakan relasi maksimum dari $\boldsymbol{S}$ yang memenuhi persamaan $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$.

3.1.1.2 Menentukan Syarat Perlu Keberadaan Maksimum $\boldsymbol{S}$ atau $\boldsymbol{S}^{\nabla}$

Syarat perlu keberadaan maksimum $\boldsymbol{S}$ atau $\boldsymbol{S}^{\nabla}$ yang memenuhi persamaan relasi *fuzzy* $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$ dinyatakan dalam suatu Teorema sebagai berikut

Teorema 3.3:

$$\mu_T(x,z) \leq \bigvee_{y \in Y} \mu_R(x,y) \qquad \forall x \in X \text{ dan } z \in Z \tag{3.7}$$

Bukti:

Misalkan

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{R}^{-1}@(\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S}) \subseteq \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{Z}$$

Berdasarkan persamaan (2.9) dan persamaan (2.26), diperoleh

$$\mu_T(x,z) = \bigwedge_{x \in X} \{\mu_{R^{-1}}(x,z)\ \alpha\ \mu_{R \circ S}(z,y)\}$$

$$= \bigwedge_{x \in X} \{\mu_R(x,z)\ \alpha\ \mu_{R \circ S}(z,y)\}$$

$$= \bigwedge_{x \in X} \left(\mu_R(x,z)\ \alpha\ \left(\bigvee_{t \in Y} \left\{ \mu_R(x,t) \bigvee \mu_S(t,y) \right\} \right) \right)$$

$$= \bigwedge_{x \in X} \left(\mu_R(x,z)\ \alpha\ (\mu_R(x,y) \wedge\ \mu_S(y,z) \wedge \bigvee_{t \in Y, t \neq y} (\mu_R(x,t) \wedge \mu_S(t,y)) \right)$$

sehingga diperoleh

$$\mu_T(x,z) \geq \bigwedge_{x \in X} \{\mu_R(x,z)\ \alpha\ (\mu_R(x,t) \wedge \mu_S(t,y)))\}$$

Seperti diketahui pada persamaan (2.24), maka dengan menggunakan operator α diperoleh

$$a\ \alpha\ (b \vee c) \geq a\ @\ b \tag{3.8}$$

berdasarkan persamaan (3.8), diperoleh

$$\mu_T(x,z) \leq \bigvee_{y \in Y} \mu_R(x,y) \qquad \forall x \in X \text{ dan } z \in Z$$

Contoh 3.2: Menentukan Maksimum $\boldsymbol{S}$

Misalkan $X = \{x_1, x_2, x_3\}, Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ dan $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$.

Diketahui bahwa $\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$ dan $\boldsymbol{T} \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Z}$ berturut-turut merupakan dua relasi *fuzzy* yang diberikan dengan matriks relasi sebagai berikut:

$$\boldsymbol{R} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

dan

$$\boldsymbol{T} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}9 \\ 0{,}7 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & 0{,}6 & 0{,}5 \end{bmatrix} \end{array}$$

Akan dihitung $\boldsymbol{S}^{\nabla}$.

Untuk menentukan keberadaan maksimum $\boldsymbol{S}$ atau $\boldsymbol{S}^{\nabla}$, langkah pertama adalah memeriksa syarat perlu keberadaan $\boldsymbol{S}^{\nabla}$ dengan menggunakan persamaan (3.7):

$$\mu_T(x,z) \leq \bigvee_{y \in Y} \mu_R(x \circ y)$$

kemudian diperoleh

$$\begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}9 \\ 0{,}7 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & 0{,}6 & 0{,}5 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Karena kondisi keberadaan maksimum $\boldsymbol{S}$ atau $\boldsymbol{S}^{\nabla}$ (3.7) terpenuhi, maka

$$\boldsymbol{R}^{-1} = \begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Selanjutnya dihitung $\boldsymbol{R}^{-1}@\boldsymbol{T}$ sebagai berikut:

$$\boldsymbol{R}^{-1}@\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}9 \\ 0{,}7 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & 0{,}6 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \wedge(0{,}3, 1, 1) & \wedge(0{,}6, 1, 1) & \wedge(0{,}9, 1, 1) \\ \wedge(1, 1, 1) & \wedge(1, 1, 1) & \wedge(1, 1, 1) \\ \wedge(1, 0{,}7, 1) & \wedge(1, 0{,}4, 1) & \wedge(1, 0{,}4, 1) \\ \wedge(1, 1, 0{,}6) & \wedge(1, 1, 0{,}6) & \wedge(1, 1, 0{,}5) \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh

$$\boldsymbol{S}^{\nabla} = \boldsymbol{R}^{-1}@\boldsymbol{T} = \begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}9 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0{,}7 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & 0{,}6 & 0{,}5 \end{bmatrix} \end{array}$$

Langkah terakhir adalah memeriksa apakah "$\boldsymbol{S}^{\nabla}$" memenuhi persamaan relasi *fuzzy* (2.16) yaitu $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S}^{\nabla} = \boldsymbol{T}$ atau tidak.

$$\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S}^{\nabla} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0,3 & 0,6 & 0,9 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0,7 & 0,4 & 0,4 \\ 0,6 & 0,6 & 0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,6 & 0,9 \\ 0,7 & 0,4 & 0,4 \\ 0,6 & 0,6 & 0,5 \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}$$

Dengan demikian, $\boldsymbol{S}^{\nabla}$ memenuhi persamaan relasi *fuzzy* yaitu $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$.

Contoh 3.3: Menentukan Maksimum $\boldsymbol{S}$

Misalkan $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ dan $Z = \{z_1, z_2, \}$.

Diketahui bahwa $\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$ dan $\boldsymbol{T} \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Z}$ berturut-turut merupakan dua relasi *fuzzy* yang diberikan dengan matriks relasi sebagai berikut:

$$\boldsymbol{R} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

dan

$$\boldsymbol{T} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} z_1 & z_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,6 & 1 \\ 0,7 & 0,1 \\ 0,2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Akan dihitung $\boldsymbol{S}^{\nabla}$.

Karena kondisi (3.7) terpenuhi untuk $\boldsymbol{R}$ dan $\boldsymbol{T}$ di atas, maka dengan menggunakan (3.6) diperoleh:

$$\boldsymbol{S}^{\nabla} = \boldsymbol{R}^{-1} @ \boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 0,6 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0,7 & 0,1 \\ 0,2 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian, $\boldsymbol{S}^{\nabla}$ juga memenuhi persamaan relasi *fuzzy* yaitu $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$.

3.1.1.3 Menentukan Maksimum R dari Persamaan $R \circ S = T$

Jika diberikan persamaan relasi *fuzzy* $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$, maka untuk menentukan maksimum R terlebih dahulu akan dibahas mengenai beberapa teorema sebagai berikut.

Teorema 3.4 (Elie, 1976: 43):

Diberikan dua relasi *fuzzy* $\boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{Z}$ dan $\boldsymbol{T} \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Z}$, $H(R)$ adalah himpunan relasi *fuzzy* $\boldsymbol{R} \in \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$ sedemikian sehingga $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$.

$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R}) = \{\boldsymbol{R} \in \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y} | \boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}\} \neq \boldsymbol{\phi}$ jika dan hanya jika $(\boldsymbol{S}@\boldsymbol{T}^{-1})^{-1} \in H(R)$ adalah unsur terbesar di $H(S)$.

Teorema 3.5:

Diberikan dua relasi *fuzzy* $\boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{Z}$ dan $\boldsymbol{T} \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Z}$, $H(R)$ adalah himpunan relasi *fuzzy* $\boldsymbol{R} \in \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$ sedemikian sehingga $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$ yang mengandung unsur terbesar $(\boldsymbol{S}@\boldsymbol{T}^{-1})^{-1}$.

Bukti:

Misalkan $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})^* = \{\boldsymbol{R} \in (\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}) |\ \boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{T}|$ dan $H(R)^* \neq \phi$

Karena relasi bernilai nol, maka

$$0(x, y) = 0 \quad \forall\ (x, y) \in X \times Y, \in H(R)^*$$

Misalkan $\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})^* : \boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$

maka didapatkan

$$(\boldsymbol{S}@(\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S})^{-1})^{-1} \subseteq (\boldsymbol{S}@\boldsymbol{T}^{-1})^{-1}$$

berdasarkan Lemma 3.3, diperoleh

$$\boldsymbol{R} \subset (\boldsymbol{S}@(\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S})^{-1})^{-1}$$

hal ini menunjukkan bahwa

$$\boldsymbol{R} \subset (\boldsymbol{S}@\boldsymbol{T}^{-1})^{-1}$$

dengan menggunakan Teorema 3.4, diperoleh

$$(\boldsymbol{S}@\boldsymbol{T}^{-1})^{-1} \in \boldsymbol{H}(\boldsymbol{R}).$$

Hal ini menunjukkan bahwa $(\boldsymbol{S}@\boldsymbol{T}^{-1})^{-1} \in \boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})^*$, maka $(\boldsymbol{S}@\boldsymbol{T}^{-1})^{-1}$ menjadi unsur terbesar di $H(R)^*$. Oleh karena itu, $(\boldsymbol{S}@\boldsymbol{T}^{-1})^{-1}$ merupakan unsur terbesar di $H(R)^*$.

Dengan demikian

$$\boldsymbol{R}^{\nabla} = (\boldsymbol{S}@\boldsymbol{T}^{-1})^{-1} \qquad (3.9)$$

persamaan (3.9) merupakan relasi maksimum dari $\boldsymbol{R}$ yang memenuhi persamaan $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$.

3.1.1.4 Menentukan Syarat Perlu Keberadaan Maksimum $\boldsymbol{R}$ atau $\boldsymbol{R}^{\nabla}$

Syarat perlu keberadaan maksimum $\boldsymbol{R}$ atau $\boldsymbol{R}^{\nabla}$ yang memenuhi persamaan relasi *fuzzy* $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$ dinyatakan dalam suatu Teorema sebagai berikut:

Teorema 3.6:

$$\mu_T(x,z) \leq \bigvee_{y \in Y} \mu_S(y,z) \qquad \forall x \in X \text{ dan } z \in Z \qquad (3.10)$$

Bukti:

Misalkan

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{R}^{-1}@(\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S}) \subseteq \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{Z}$$

Berdasarkan persamaan (2.9) dan persamaan (2.26), diperoleh

$$\mu_T(x,z) = \bigwedge_{x \in X} \{\mu_{R^{-1}}(y,x) \; \alpha \; \mu_{R \circ S}(x,z)\}$$

$$= \bigwedge_{x \in X} \{\mu_R(y, x)\ \alpha\ \mu_{R \circ S}(x, z)\}$$

$$= \bigwedge_{x \in X} \left(\mu_R(x, z)\ \alpha\ \left(\bigvee_{t \in Y} \left\{\mu_R(y, t) \bigvee \mu_S(t, z)\right\}\right)\right)$$

$$= \bigwedge_{x \in X} \left(\mu_R(x, z)\ \alpha\ (\mu_R(x, y) \wedge\ \mu_S(y, z) \wedge \bigvee_{t \in Y, t \neq y} (\mu_R(y, t) \wedge \mu_S(t, z))\right)$$

sehingga diperoleh

$$\mu_T(x, z) \geq \bigwedge_{x \in X} \{\mu_R(x, z)\ \alpha\ (\mu_R(y, t) \wedge \mu_S(t, z)))\}$$

Seperti diketahui pada persamaan (2.24), maka dengan menggunakan operator α diperoleh

$$a\ \alpha\ (b \vee c) \geq a\ @\ b \qquad (3.11)$$

berdasarkan persamaan (3.11), diperoleh

$$\mu_T(x, z) \leq \bigvee_{y \in Y} \mu_S(y, z) \qquad \forall x \in X \text{ dan } z \in Z$$

Contoh 3.4: Menentukan Maksimum ***R***

Misalkan $X = \{x_1, x_2, x_3\}, Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ dan $Z = \{z_1, z_2\}$. Diketahui bahwa $\boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{Z}$ dan $\boldsymbol{T} \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Z}$ berturut-turut merupakan dua relasi *fuzzy* yang diberikan dengan matriks relasi sebagai berikut:

$$\boldsymbol{S} = \begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} z_1 & z_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

dan

$$\boldsymbol{T} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} z_1 & z_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}7 \\ 0{,}6 & 0{,}5 \end{bmatrix} \end{array}$$

Untuk menentukan $\boldsymbol{R}^{\nabla}$, langkah pertama adalah memeriksa syarat perlu keberadaan $\boldsymbol{R}^{\nabla}$ dengan menggunakan persamaan (3.10)

$$\mu_T(x,z) \leq \bigvee_{y \in Y} \mu_S(y,z)$$

Kemudian, akan dihitung $(\boldsymbol{S}@\boldsymbol{T}^{-1})^{-1}$.

Akibat syarat perlu pada persamaan (3.10) harus dipenuhi, maka

$$\boldsymbol{T}^{-1} = \begin{array}{c} \\ z_1 \\ z_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}5 & 0{,}6 \\ 0{,}4 & 0{,}7 & 0{,}5 \end{bmatrix} \end{array}$$

Selanjutnya dihitung $\boldsymbol{S}^{-1}@\boldsymbol{T}$ sebagai berikut:

$$\boldsymbol{S}@\boldsymbol{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}5 & 0{,}6 \\ 0{,}4 & 0{,}7 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \wedge(1, 0{,}4) & \wedge(1, 0{,}7) & \wedge(1, 0{,}5) \\ \wedge(0{,}7, 1) & \wedge(0{,}5, 1) & \wedge(0{,}6, 1) \\ \wedge(1, 1) & \wedge(1, 1) & \wedge(1, 1) \\ \wedge(1, 0{,}4) & \wedge(1, 0{,}7) & \wedge(1, 0{,}5) \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh

$$\boldsymbol{S}@\boldsymbol{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}7 & 0{,}5 \\ 0{,}7 & 0{,}5 & 0{,}6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0{,}4 & 0{,}7 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian

$$\boldsymbol{R}^{\nabla} = (\boldsymbol{S}@\boldsymbol{T}^{-1})^{-1} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}7 & 1 & 0{,}4 \\ 0{,}7 & 0{,}5 & 1 & 0{,}7 \\ 0{,}5 & 0{,}6 & 1 & 0{,}5 \end{bmatrix} \end{array}$$

Langkah terakhir yaitu memeriksa apakah $\boldsymbol{R}^{\nabla}$ memenuhi persamaan relasi *fuzzy* (2.16) yaitu $\boldsymbol{R}^{\nabla} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$ atau tidak.

$$\boldsymbol{R}^{\nabla} \circ \boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,7 & 1 & 0,4 \\ 0,7 & 0,5 & 1 & 0,7 \\ 0,5 & 0,6 & 1 & 0,5 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,4 \\ 0,5 & 0,7 \\ 0,6 & 0,5 \end{bmatrix} = T$$

Dengan demikian, $\boldsymbol{R}^{\nabla}$ memenuhi persamaan relasi *fuzzy* yaitu $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$.

Contoh 3.5: Menentukan Maksimum $\boldsymbol{R}$

Misalkan $X = \{x_1, x_2, x_3\}, Y = \{y_1, y_2\}$ dan $Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$.

Diketahui bahwa $\boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$ dan $\boldsymbol{T} \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Z}$ berturut-turut merupakan dua relasi *fuzzy* yang diberikan dengan matriks relasi sebagai berikut:

$$\boldsymbol{S} = \begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

dan

$$\boldsymbol{T} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,9 \\ 0,7 & 0,5 & 0,3 \\ 0,2 & 0,2 & 0,9 \end{bmatrix} \end{array}$$

Selanjutnya dihitung $\boldsymbol{S}^{\nabla}$.

Karena syarat perlu (3.10) terpenuhi untuk $\boldsymbol{S}$ dan $\boldsymbol{T}$ di atas, maka dengan menggunakan (3.9) diperoleh:

$$\boldsymbol{R}^{\nabla} = (\boldsymbol{S} @ \boldsymbol{T}^{-1})^{1} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,3 & 0,9 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 0,5 \\ 0,2 & 0,9 & 0,2 \end{bmatrix} \end{array}$$

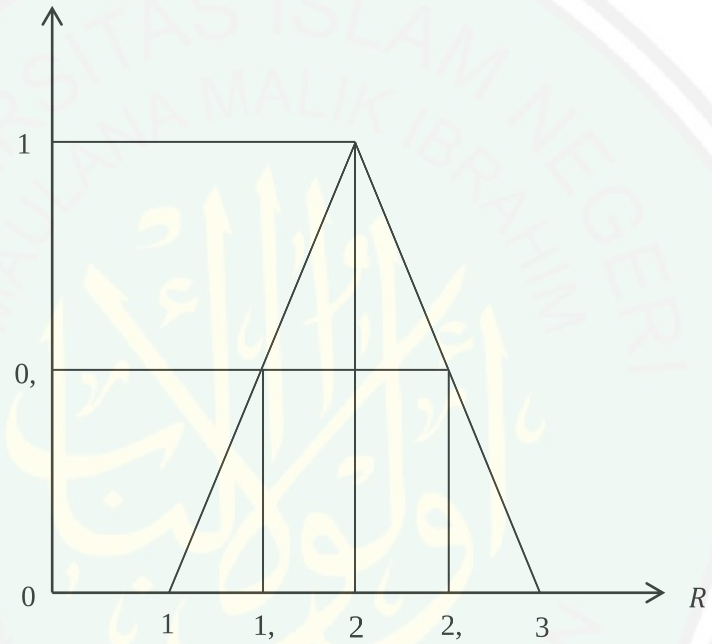
Dengan demikian, $\boldsymbol{R}^{\nabla}$ juga memenuhi persamaan relasi *fuzzy* yaitu $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$.

Contoh 3.6: Nilai maksimum dalam himpunan *fuzzy* kontinu

Nilai maksimum dalam himpunan *fuzzy* kontinu memiliki syarat khusus, yaitu himpunan *fuzzy* yang diberikan haruslah *uncountable* (tidak terhitung). Hal ini dikarenakan himpunan *fuzzy* kontinu memiliki fungsi keanggotaan dengan representasi grafik yang memliki bentuk tertentu. Seperti fungsi keanggotaan segitiga, trapesium, *gauss*, *cauchy*, dan *sigmoid*.

Diketahui himpunan *fuzzy R* sebagai berikut:

R =”Jumlah bilangan riil antara 1 dan 3”. Grafik dari himpunan *fuzzy* dengan fungsi keanggotaan Segitiga$(2; 0, 0.5, 1)$ adalah sebagai berikut



Kemudian fungsi keanggotaannya dinyatakan sebagai:

$$\text{Segitiga}(x; a, b, c) = maks\left(\left(\frac{x-a}{b-a} \circ \frac{c-x}{c-b}\right), 0\right)$$

Diketahui bahwa $x = \{1, 1.5, 2, 2.5, 3\}$, dengan $a = 0, b = 0.5$, dan $c = 1$

- Fungsi keanggotaan jika $x = 1$

$$\text{Segitiga}(1; 0, 0.5, 1) = maks\left(\left(\frac{1-0}{0.5-0} \circ \frac{1-1}{1-0.5}\right), 0\right)$$

$$= maks\left(\left(\frac{1}{0.5} \circ \frac{0}{0.5}\right), 0\right)$$

$$= maks\big((2 \circ 0), 0\big)$$

$$= maks(0, 0)$$

$$= 0$$

- Fungsi keanggotaan jika $x = 1.5$

- $$\text{Segitiga}(1.5; 0, 0.5, 1) = maks\left(\left(\frac{1.5-0}{0.5-0} \circ \frac{1-1.5}{1-0.5}\right), 0\right)$$

$$= maks\left(\left(\frac{1.5}{0.5} \circ \frac{-0.5}{0.5}\right), 0\right)$$

$$= maks\big((3 \circ -1), 0\big)$$

$$= maks(-3, 0)$$

$$= 0$$

- Fungsi keanggotaan jika $x = 2$

$$\text{Segitiga}(2; 0, 0.5, 1) = maks\left(\left(\frac{2-0}{0.5-0} \circ \frac{1-2}{1-0.5}\right), 0\right)$$

$$= maks\left(\left(\frac{2}{0.5} \circ \frac{-1}{0.5}\right), 0\right)$$

$$= maks\big((4 \circ -2), 0\big)$$

$$= maks(-8, 0)$$

$$= 0$$

- Fungsi keanggotaan jika $x = 2.5$

$$\text{Segitiga}(2.5; 0, 0.5, 1) = maks\left(\left(\frac{2.5-0}{0.5-0} \circ \frac{1-2.5}{1-0.5}\right), 0\right)$$

$$= maks\left(\left(\frac{2.5}{0.5} \circ \frac{-1.5}{0.5}\right), 0\right)$$

$$= maks\big((5 \circ -3), 0\big)$$

$$= maks(-15, 0)$$

$$= 0$$

- Fungsi keanggotaan jika $x = 3$

$$\text{Segitiga}(3; 0, 0.5, 1) = maks\left(\left(\frac{3-0}{0.5-0} \circ \frac{1-3}{1-0.5}\right), 0\right)$$

$$= maks\left(\left(\frac{3}{0.5} \circ \frac{-2}{0.5}\right), 0\right)$$

$$= maks\big((6 \circ -4), 0\big)$$

$$= maks(-24, 0)$$

$$= 0$$

Dari hasil perhitungan di atas, diperoleh nilai maksimum yaitu 0 untuk semua fungsi keanggotaan $x = 1$, $x = 1.5$, $x = 2$, $x = 2.5$, dan $x = 3$ dengan $a = 0, b = 0.5$, dan $c = 1$. Hal ini berarti bahwa nilai maksimum untuk semua fungsi keanggotaan $x = 1$, $x = 1.5$, $x = 2$, $x = 2.5$, dan $x = 3$ dengan $a = 0, b = 0.5$, dan $c = 1$ adalah sama, yaitu bernilai 0.

3.1.2 Solusi Minimum Persamaan Relasi *Fuzzy*

Pada Subbab 3.1.2 ini akan dibahas beberapa metode menentukan solusi minimum dari persamaan relasi *fuzzy* dengan menggunakan matriks fungsi keanggotaan berdasarkan komposisi *maks-produk*. Akan dibahas bagaimana cara menentukan minimum $\boldsymbol{S}$ dan minimum $\boldsymbol{R}$ untuk persamaan relasi *fuzzy* $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$. Solusi minimum dinotasikan dengan lambang "Δ".

3.1.2.1 Menentukan Minimum $\boldsymbol{S}$ dari Persamaan $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$

Jika diberikan persamaan relasi *fuzzy* $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$, maka untuk menentukan minimum $\boldsymbol{S}$, terlebih dahulu akan dibahas mengenai relasi fungsional berikut:

3.1.2.1.1 Relasi Fungsional

Berdasarkan relasi $\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$ dikatakan fungsional jika dan hanya jika $\forall x \in X$, ada $p(q) \in V$ sedemikian sehingga

$$\begin{cases} \mu_S(p, q(p)) = 1 \\ \mu_S(p, q) = 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

Pada kasus finit, relasi fungsional dinyatakan oleh suatu matriks sedemikian sehingga untuk setiap barisnya ada satu dan hanya satu unsur yang mempunyai derajat keanggotaan 1, dan unsur lainnya adalah 0.

Berdasarkan pemetaan f dari P ke Q sebagai relasi fungsional $\mu_f(p,q) = 1$ jika $f(p) = q$ dan $\mu_f(p,q) = 0$ untuk lainnya.

Teorema 3.7:

Jika $\boldsymbol{S} \neq \phi$, maka $(\boldsymbol{S}, \subseteq)$ adalah suatu Latis dengan unsur terbesar $\boldsymbol{R^{-1}}@\boldsymbol{T}$ dan unsur terkecil sebagai berikut

$$\boldsymbol{S}^{\Delta} = \neg(\boldsymbol{R^{-1}}@\neg\boldsymbol{T}) \quad (3.13)$$

Bukti:

Jika $\boldsymbol{S}$ dan $\boldsymbol{L}$ adalah unsur dari $\boldsymbol{S},$ maka

$$\boldsymbol{R} \circ (\boldsymbol{S} \cup \boldsymbol{L}) = (\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S}) \cup (\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{L}) \qquad \text{(kondisi yang selalu terpenuhi)}$$

Oleh karena itu,

$$\boldsymbol{R} \circ (\boldsymbol{S} \cup \boldsymbol{L}) = \boldsymbol{T} \cup \boldsymbol{T} = \boldsymbol{T} \text{ dan } \boldsymbol{S} \cup \boldsymbol{L} \in \boldsymbol{S}$$

diperoleh

$$\boldsymbol{R} \circ (\boldsymbol{S} \cup \boldsymbol{L}) = (\boldsymbol{S} \cup \boldsymbol{R}) \cap (\boldsymbol{L} \circ \boldsymbol{R})$$

Hal ini berlaku karena R adalah relasi fungsional, maka $\boldsymbol{S} \cap \boldsymbol{L} \in \boldsymbol{S}.$ Dengan demikian $(\boldsymbol{S}, \subseteq)$ merupakan suatu Latis. Karena $\boldsymbol{R^{-1}}@\boldsymbol{T}$ merupakan unsur terbesar dari persamaan (3.6), maka dapat ditunjukkan bahwa $\neg(\boldsymbol{R^{-1}}@\neg\boldsymbol{T})$

merupakan unsur terkecil. $\boldsymbol{S} \neq \phi$, sehingga $\forall s \in \boldsymbol{S}, \boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$; $\boldsymbol{R}$ adalah relasi fungsional, dan juga diketahui bahwa $\neg\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \neg\boldsymbol{T}$, dari Lemma 3.1 diperoleh:

$$\neg\boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{R}^{-1}@(\neg\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S})$$

yaitu $\neg\boldsymbol{S} \subseteq (\boldsymbol{R}^{-1}@\boldsymbol{T})$ adalah ekivalen dengan $\neg(\boldsymbol{R}^{-1}@\neg\boldsymbol{T}) \subseteq \boldsymbol{S}$.

Dengan demikian, bukti di atas adalah lengkap.

3.1.2.2 Menentukan Syarat Perlu Keberadaan Minimum $\boldsymbol{S}$ atau $\boldsymbol{S}^{\Delta}$

Syarat perlu keberadaan minimum $\boldsymbol{S}$ atau $\boldsymbol{S}^{\Delta}$ yang memenuhi persamaan relasi *fuzzy* $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$ dinyatakan dalam suatu Teorema sebagai berikut

Teorema 3.8:

$$\mu_T(x,z) \geq \bigwedge_{y \in Y} \mu_R(x,y) \qquad \forall x \in X \text{ dan } z \in Z \tag{3.14}$$

Bukti:

Misalkan

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{R}^{-1}@(\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S}) \subseteq \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{Z}$$

Berdasarkan persamaan (2.9) dan persamaan (2.26), diperoleh

$$\begin{aligned}
\mu_T(x,z) &= \bigvee_{x \in X} \{\mu_{R^{-1}}(x,z)\ \alpha\ \mu_{R \circ S}(z,y)\} \\
&= \bigvee_{x \in X} \{\mu_R(x,z)\ \alpha\ \mu_{R \circ S}(z,y)\} \\
&= \bigvee_{x \in X} \left(\mu_R(x,z)\ \alpha \left(\bigwedge_{t \in Y} \left\{\mu_R(x,t) \bigwedge \mu_S\,(t,y)\right\}\right)\right) \\
&= \bigvee_{x \in X} \left(\mu_R(x,z)\ \alpha\ (\mu_R(x,y) \vee \mu_S(y,z) \vee \bigwedge_{t \in Y, t \neq y} (\mu_R(x,t)\ \vee \mu_S(t,y))\right)
\end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$\mu_T(x,z) \leq \bigvee_{x\in X}\{\mu_R(x,z)\ \alpha(\mu_R(x,t) \vee \mu_S(t,y)))\}$$

Seperti diketahui pada persamaan (2.24), maka dengan menggunakan operator α diperoleh

$$a\ \alpha\ (b \vee c) \geq a\ @\ b \tag{3.15}$$

berdasarkan persamaan (3.15), diperoleh

$$\mu_T(x,z) \geq \bigwedge_{y\in Y} \mu_R(x,y) \qquad \forall x \in X \text{ dan } z \in Z$$

Contoh 3.7: Menentukan Minimum $\boldsymbol{S}$

Misalkan $X = \{x_1, x_2, x_3\}, Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ dan $Z = \{z_1, z_2\}$. Diketahui bahwa $\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$ dan $\boldsymbol{T} \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Z}$ berturut-turut merupakan dua relasi *fuzzy* yang diberikan dengan matriks relasi sebagai berikut:

$$\boldsymbol{R} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

dan

$$\boldsymbol{T} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} z_1 & z_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}8 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}8 \end{bmatrix} \end{array}$$

Selanjutnya akan dihitung $\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{\Delta}}$.

Untuk menentukan keberadaan minimum $\boldsymbol{S}$ atau $\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{\Delta}}$, langkah pertama adalah memeriksa syarat perlu keberadaan $\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{\Delta}}$ dengan menggunakan persamaan (3.14):

$$\mu_T(x,z) \geq \bigwedge_{y \in Y} \mu_R(x,y)$$

kemudian diperoleh

$$\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}8 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}8 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Karena kondisi keberadaan minimum $\boldsymbol{S}$ atau $\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{\Delta}}$ (3.14) terpenuhi, maka

$$\boldsymbol{R}^{-\boldsymbol{1}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } \neg\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}5 & 0{,}2 \end{bmatrix}$$

kemudian dihitung $\boldsymbol{R}^{-\boldsymbol{1}}@\neg\boldsymbol{T}$ yaitu:

$$\boldsymbol{R}^{-\boldsymbol{1}}@\neg\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}5 & 0{,}2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \wedge(1, 1, 0{,}3, 1) & \wedge(1, 1, 0{,}7, 1) \\ \wedge(1, 1, 1, 1) & \wedge(1, 1, 1, 1) \\ \wedge(0{,}5, 0, 0, 0{,}5) & \wedge(0{,}2, 0, 0, 0{,}2) \\ \wedge(1, 0{,}4, 1, 1) & \wedge(1, 0{,}6, 1, 1) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}^{-\boldsymbol{1}}@\neg\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 1 & 1 \\ 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh

$$\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{\Delta}} = \neg(\boldsymbol{R}^{-\boldsymbol{1}}@\neg\boldsymbol{T}) = \begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} z_1 & z_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}8 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{bmatrix} \end{array}$$

Langkah terakhir yaitu memeriksa apakah $\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{\Delta}}$ memenuhi persamaan relasi *fuzzy* (2.16) yaitu $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$ atau tidak.

$$\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S}^{\Delta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}8 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}8 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}8 \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}$$

Dengan demikian, $\boldsymbol{R}^{\nabla}$ memenuhi persamaan relasi *fuzzy* yaitu $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$.

Contoh 3.8: Menentukan Minimum $\boldsymbol{S}$

Misalkan $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ dan $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$. Diketahui bahwa $\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$ dan $\boldsymbol{T} \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Z}$ berturut-turut merupakan dua relasi *fuzzy* yang diberikan dengan matriks relasi sebagai berikut:

$$\boldsymbol{R} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

dan

$$\boldsymbol{T} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}7 \\ 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}6 \\ 0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}9 \\ 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}9 \end{bmatrix} \end{array}$$

Selanjutnya akan dihitung $\boldsymbol{S}^{\Delta}$.

Untuk menentukan keberadaan minimum $\boldsymbol{S}$ atau $\boldsymbol{S}^{\Delta}$, langkah pertama adalah memeriksa syarat perlu keberadaan $\boldsymbol{S}^{\Delta}$ dengan menggunakan persamaan (3.14):

$$\mu_T(x, z) \geq \bigwedge_{y \in Y} \mu_R(x, y)$$

kemudian diperoleh

$$\begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 & 0,7 \\ 0,6 & 0,5 & 0,6 \\ 0,5 & 0,7 & 0,9 \\ 0,6 & 0,5 & 0,9 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Karena kondisi keberadaan minimum $\boldsymbol{S}$ atau $\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{\Delta}}$ (3.14) terpenuhi, maka

$$\boldsymbol{R}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } \neg\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,5 & 0,4 \\ 0,5 & 0,3 & 0,1 \\ 0,4 & 0,5 & 0,4 \end{bmatrix}$$

kemudian dihitung $\boldsymbol{R}^{-1}@\neg\boldsymbol{T}$ yaitu:

$$\boldsymbol{R}^{-1}@\neg\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} 0,5 & 0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,5 & 0,4 \\ 0,5 & 0,3 & 0,1 \\ 0,4 & 0,5 & 0,4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \wedge(1,1,0{,}5,1) & \wedge(1,1,0{,}3,1) & \wedge(1,1,0{,}1,1) \\ \wedge(0{,}5,1,1,1) & \wedge(1,0{,}6,1,1) & \wedge(0{,}3,1,1,1) \\ \wedge(1,0{,}4,1,0{,}4) & \wedge(1,0{,}5,1,0{,}5) & \wedge(1,0{,}4,1,0{,}4) \\ \wedge(1,1,1,1) & \wedge(1,1,1,1) & \wedge(1,1,1,1) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}^{-1}@\neg\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,1 \\ 0,5 & 0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,5 & 0,4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh

$$\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{\Delta}} = \neg(\boldsymbol{R}^{-1}@\neg\boldsymbol{T}) = \begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,5 & 0,7 & 0,9 \\ 0,5 & 0,4 & 0,7 \\ 0,6 & 0,5 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Langkah terakhir yaitu memeriksa apakah $\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{\Delta}}$ memenuhi persamaan relasi *fuzzy* yaitu $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$ atau tidak.

$$\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S}^{\boldsymbol{\Delta}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0,5 & 0,7 & 0,9 \\ 0,5 & 0,4 & 0,7 \\ 0,6 & 0,5 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 & 0,7 \\ 0,6 & 0,5 & 0,6 \\ 0,5 & 0,7 & 0,9 \\ 0,6 & 0,5 & 0,6 \end{bmatrix} = T$$

Dengan demikian, $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{\nabla}}$ juga memenuhi persamaan relasi *fuzzy* yaitu $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$.

3.1.2.3 Menentukan Minimum $\boldsymbol{R}$ dari Persamaan $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$

Misalkan $A \subseteq X$ dan $B \subseteq Y$ adalah dua himpunan *fuzzy* dan $\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$, maka persamaan relasi didefinisikan

$$A \circ \boldsymbol{R} = B \tag{3.16}$$

dimana A dan B adalah himpunan *fuzzy* dan $\boldsymbol{R}$ adalah relasi *fuzzy*. Koleksi dari suatu solusi dilambangkan dengan persamaan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R}) = \{\boldsymbol{R} \ \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y} | \boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{R} = \boldsymbol{B}\} \tag{3.17}$$

Suatu pemetaan $\Gamma : Y \to M(X)$ dimana $M(X)$ terdiri dari semua subset dari X. Didefinisikan $\Gamma(y)$ oleh

$$\Gamma\{y\} = \{x \in X : \mu_A(x) \geq \mu_B(y)\} \tag{3.18}$$

dan komplemen “Gamma” didefinisikan sebagai

$$\neg\Gamma\{y\} = \{x \in X : \mu_A(x) \geq \mu_B(y)\} \tag{3.19}$$

Gabungan dari persamaan (3.14) dan (3.15) sama dengan X dan irisan dari persamaan (3.14) dan (3.15) sama dengan ϕ.

Teorema 3.9 (Ezzati, dkk, 2012: 6):

Diberikan $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R}) = \{\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y} : \boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B}\}$**.** Jika $H(R) \neq \phi$, maka

$$A(\sigma)B \in H(R) \tag{3.20}$$

dimana σ adalah produk σ antara dua himpunan *fuzzy*.

3.1.2.4 Menentukan Syarat Perlu Keberadaan Minimum $\boldsymbol{R}$ atau $\boldsymbol{R}^{\Delta}$

Syarat perlu keberadaan minimum $\boldsymbol{R}$ atau $\boldsymbol{R}^{\Delta}$ yang memenuhi persamaan relasi *fuzzy* $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$ dinyatakan dalam suatu Teorema sebagai berikut

Teorema 3.10:

Syarat perlu dan syarat cukup keberadaan solusi minimum $\boldsymbol{R}^{\Delta}$ pada $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$ adalah:

$$|(\Gamma)\{y\}| = 1 \text{ atau } \mu_B(y) = 0 \quad \forall y \in Y \tag{3.21}$$

Minimum $\boldsymbol{R}^{\Delta}$ pada persamaan (3.16) didefinisikan sebagai:

$$\boldsymbol{R}^{\Delta} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{B} \tag{3.22}$$

Dimana A dan B adalah himpunan *fuzzy* dan $|y|$ menotasikan kardinalitas, atau unsur pada himpunan Y pada kasus finit.

Contoh 3.9: Menentukan Minimum $\boldsymbol{R}$

Misalkan $X = \{x_1, x_2, x_3\}, Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$, dan dua himpunan *fuzzy*

$A = \left\{\frac{1}{x_1}, \frac{0}{x_2}, \frac{1}{x_3}\right\}$, dan $B = \left\{\frac{0,7}{y_1}, \frac{0,0}{y_2}, \frac{0,5}{y_3}, \frac{0,9}{y_4}\right\}$

dengan menggunakan persamaan (3.18), diperoleh

$$\Gamma\{y_1\} = \{x_1, x_3\} \qquad \Gamma\{y_2\} = \{x_2\}$$
$$\Gamma\{y_3\} = \{x_1, x_3\} \qquad \Gamma\{y_4\} = \{x_1, x_3\}$$

dengan demikian

$$|\Gamma\{y_1\}| = 2 \qquad |\Gamma\{y_2\}| = 1$$
$$|\Gamma\{y_3\}| = 2 \qquad |\Gamma\{y_4\}| = 2$$

Karena syarat perlu dan syarat cukup pada persamaan (3.21) harus dipenuhi, maka digunakan persamaan (3.22) untuk menentukan solusi minimum $\boldsymbol{R}^{\Delta}$

$$\mu_{A\sigma B}(x, y) = \mu_A(x)\sigma\, \mu_B(y) \quad \forall x \in X \ \text{ dan } y \in Y$$

diperoleh

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1\sigma0,7 & 1\sigma0,0 & 1\sigma0,5 & 1\sigma0,9 \\ 0\sigma0,7 & 0\sigma0,0 & 0\sigma0,5 & 0\sigma0,9 \\ 1\sigma0,7 & 1\sigma0,0 & 1\sigma0,5 & 1\sigma0,9 \end{bmatrix}$$

Sehingga

$$\boldsymbol{R}^{\Delta} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{B} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0,7 & 0 & 0,5 & 0,9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,7 & 0 & 0,5 & 0,9 \end{bmatrix} \end{array}$$

Maka, solusi minimum yang diperlukan untuk relasi "$\boldsymbol{R}$" dapat dicari dengan menggunakan operator *sigma*.

Langkah terakhir yaitu memeriksa apakah $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{\Delta}}$ memenuhi persamaan relasi (3.16) yaitu $A \circ \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{\Delta}} = B$ atau tidak.

$$A \circ \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{\Delta}} = \left\{\frac{0{,}7}{y_1}, \frac{0{,}0}{y_2}, \frac{0{,}5}{y_3}, \frac{0{,}9}{y_4}\right\} = B$$

Dengan demikian, $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{\Delta}}$ memenuhi persamaan relasi (3.16) yaitu $A \circ \boldsymbol{R} = B$.

Contoh 3.10: Menentukan Minimum $\boldsymbol{R}$

Misalkan $X = \{x_1, x_2, x_3\}, Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$, dan dua himpunan *fuzzy* $A = \left\{\frac{1}{x_1}, \frac{0}{x_2}, \frac{1}{x_3}\right\}$, dan $B = \left\{\frac{0{,}7}{y_1}, \frac{0{,}0}{y_2}, \frac{0{,}8}{y_3}, \frac{0{,}7}{y_4}\right\}$.

dengan menggunakan persamaan (3.18), diperoleh

$$\Gamma\{y_1\} = \{x_1, x_3\} \qquad \Gamma\{y_2\} = \{x_2\}$$
$$\Gamma\{y_3\} = \{x_1, x_3\} \qquad \Gamma\{y_4\} = \{x_1, x_3\}$$

dengan demikian

$$|\Gamma\{y_1\}| = 2 \qquad |\Gamma\{y_2\}| = 1$$
$$|\Gamma\{y_3\}| = 2 \qquad |\Gamma\{y_4\}| = 2$$

Karena kondisi (3.21) terpenuhi, maka digunakan persamaan (3.22) untuk menentukan solusi minimum $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{\Delta}}$

$$\mu_{A\sigma B}(x, y) = \mu_A(x)\sigma\, \mu_B(y) \quad \forall x \in X \quad \text{dan } y \in Y$$

diperoleh

$$\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{\Delta}} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{B} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0 & 0{,}8 & 0{,}7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}7 & 0 & 0{,}8 & 0{,}7 \end{bmatrix} \end{array}$$

Maka, solusi minimum yang diperlukan untuk relasi "$\boldsymbol{R}$" dapat dicari dengan menggunakan operator *sigma*.

Langkah terakhir yaitu memeriksa apakah $\boldsymbol{R}^{\Delta}$ memenuhi persamaan relasi (3.16) yaitu $A \circ \boldsymbol{R}^{\Delta} = B$ atau tidak.

$$A \circ \boldsymbol{R}^{\Delta} = \left\{\frac{0{,}7}{y_1}, \frac{0{,}0}{y_2}, \frac{0{,}8}{y_3}, \frac{0{,}7}{y_4}\right\} = B$$

Dengan demikian, $\boldsymbol{R}^{\Delta}$ memenuhi persamaan relasi (3.16) yaitu $A \circ \boldsymbol{R} = B$.

Teorema 3.11:

Jika $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}) \neq \emptyset$ maka $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$ mempunyai komponen $\boldsymbol{R_i}$ minimum yang masing-masing didefinisikan sebagai fungsi:

$$\mu_{R_i}(x, y) = \begin{cases} (1) & c(c \neq 0) \\ (2) & 0 \end{cases}$$

Dimana:

(1) Untuk $\forall y \in Y$, dan untuk satu dan hanya satu $x \in X$ sedemikian sehingga $x = x_i | x_i \in \Gamma\{y\}$

(2) Untuk yang lain.

Dan banyaknya unsur minimum sama dengan:

$$N_{min} = \prod_{\mu_B(y) \neq 0, y \in Y} |\Gamma\{y\}| \qquad (3.23)$$

Teorema 3.12 (Ezzati, dkk, 2012: 7):

Jika $S(R) \neq \emptyset$ maka gabungan dari semua unsur minimum dalam $S(R)$:

$$\boldsymbol{R}^* = \cup \boldsymbol{R_i} \qquad (3.24)$$

dimana $i = 1,2, \dots, N_{min.}$

Hal ini berarti bahwa dalam kasus $|X||Y| < \infty$, maka diperoleh solusi untuk $\boldsymbol{R}$ dari persamaan persamaan relasi (3.14) yaitu $A \circ \boldsymbol{R} = B$.

Contoh 3.11: Menentukan $\boldsymbol{R}^*$

Misalkan $X = \{x_1, x_2, x_3\}, Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$, dan dua himpunan *fuzzy*

$A = \left\{\frac{1}{x_1}, \frac{0}{x_2}, \frac{1}{x_3}\right\}$, dan $B = \left\{\frac{0,7}{y_1}, \frac{0,0}{y_2}, \frac{0,8}{y_3}, \frac{0,4}{y_4}\right\}$.

Akan ditentukan semua unsur dari solusi minimum. Berdasarkan Teorema 3.11, diperoleh pasangan berurutan (x, y) untuk $\mu_R(x, y) \neq 0$

$$\Gamma\{y_1\} = \{x_1, x_3\} \qquad \Gamma\{y_2\} = \{x_2\}$$
$$\Gamma\{y_3\} = \{x_1, x_3\} \qquad \Gamma\{y_4\} = \{x_1, x_3\}$$

dengan demikian

$$|\Gamma\{y_1\}| = 2 \qquad |\Gamma\{y_2\}| = 1$$
$$|\Gamma\{y_3\}| = 2 \qquad |\Gamma\{y_4\}| = 2$$

$$N_{min} = \prod_{\mu_B(y)\neq 0, y\in Y} |\Gamma\{y\}| = |(\Gamma)\{y_1\}||(\Gamma)\{y_2\}||(\Gamma)\{y_3\}||(\Gamma)\{y_4\}|$$

$$= (2)(2)(1)(2) = 8$$

Dengan demikian, ada 8 solusi minimum untuk masalah yang telah diberikan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{R_p}^{\Delta} = \begin{bmatrix} 0,7 & 0 & 0,8 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{R_q}^{\Delta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,8 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,7 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R_r}^{\Delta} = \begin{bmatrix} 0,7 & 0 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{R_s}^{\Delta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,7 & 0 & 0,8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R_t}^{\Delta} = \begin{bmatrix} 0,7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0,4 \end{bmatrix}, \boldsymbol{R_u}^{\Delta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,7 & 0 & 0,8 & 0,4 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R_v}^{\Delta} = \begin{bmatrix} 0,7 & 0 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4 \end{bmatrix}, \boldsymbol{R_w}^{\Delta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,7 & 0 & 0 & 0,4 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan Teorema 3.12, maka gabungan dari delapan solusi minimum di atas adalah:

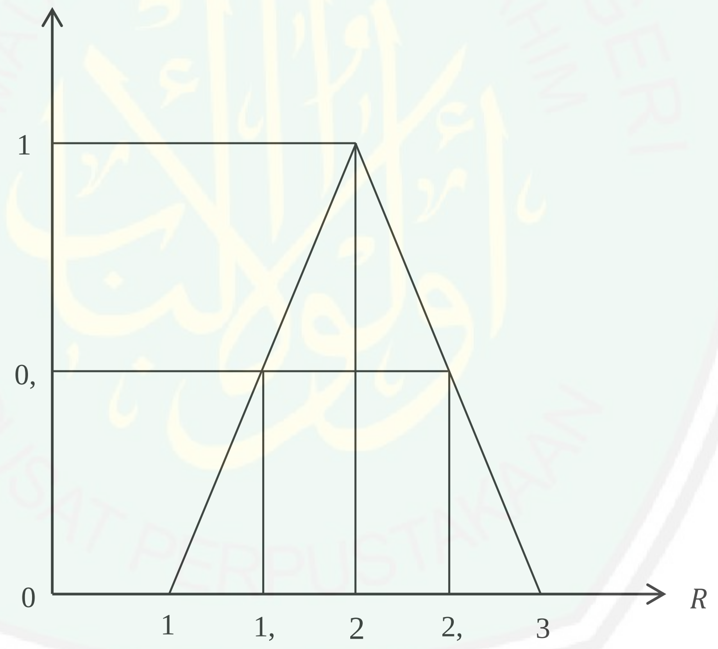
$$\boldsymbol{R_p}^{\Delta} \cup \boldsymbol{R_q}^{\Delta} \cup \boldsymbol{R_r}^{\Delta} \cup \boldsymbol{R_s}^{\Delta} \cup \boldsymbol{R_t}^{\Delta} \cup \boldsymbol{R_u}^{\Delta} \cup \boldsymbol{R_v}^{\Delta} \cup \boldsymbol{R_w}^{\Delta} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0,7 & 0 & 0,8 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,7 & 0 & 0,8 & 0,4 \end{bmatrix} \end{array} = \boldsymbol{R}^*$$

Contoh 3.12: Nilai minimum dalam himpunan *fuzzy* kontinu

Diketahui himpunan *fuzzy R* sebagai berikut:

Nilai maksimum dalam himpunan *fuzzy* kontinu memiliki syarat khusus, yaitu himpunan *fuzzy* yang diberikan haruslah *uncountable* (tidak terhitung). Hal ini dikarenakan himpunan *fuzzy* kontinu memiliki fungsi keanggotaan dengan representasi grafik yang memliki bentuk tertentu. Seperti fungsi keanggotaan segitiga, trapesium, *gauss*, *cauchy*, dan *sigmoid*.

R =”Jumlah bilangan riil antara 1 dan 3”. Grafik dari himpunan *fuzzy* dengan fungsi keanggotaan $\text{Segitiga}(2; 0, 0.5, 1)$ adalah sebagai berikut



Kemudian fungsi keanggotaannya dinyatakan sebagai:

$$\text{Segitiga}(x; a, b, c) = min\left(\left(\frac{x-a}{b-a} \circ \frac{c-x}{c-b}\right), 0\right)$$

Diketahui bahwa $x = \{1, 1.5, 2, 2.5, 3\}$, dengan $a = 0, b = 0.5$, dan $c = 1$

- Fungsi keanggotaan jika $x = 1$

$$\text{Segitiga}(1; 0, 0.5, 1) = min\left(\left(\frac{1-0}{0.5-0} \circ \frac{1-1}{1-0.5}\right), 0\right)$$

$$= min\left(\left(\frac{1}{0.5} \circ \frac{0}{0.5}\right), 0\right)$$

$$= min\big((2 \circ 0), 0\big)$$

$$= min(0, 0)$$

$$= 0$$

- Fungsi keanggotaan jika $x = 1.5$

$$\text{Segitiga}(1.5; 0, 0.5, 1) = min\left(\left(\frac{1.5-0}{0.5-0} \circ \frac{1-1.5}{1-0.5}\right), 0\right)$$

$$= maks\left(\left(\frac{1.5}{0.5} \circ \frac{-0.5}{0.5}\right), 0\right)$$

$$= min\big((3 \circ -1), 0\big)$$

$$= min(-3, 0)$$

$$= -3$$

- Fungsi keanggotaan jika $x = 2$

$$\text{Segitiga}(2; 0, 0.5, 1) = min\left(\left(\frac{2-0}{0.5-0} \circ \frac{1-2}{1-0.5}\right), 0\right)$$

$$= min\left(\left(\frac{2}{0.5} \circ \frac{-1}{0.5}\right), 0\right)$$

$$= min\big((4 \circ -2), 0\big)$$

$$= min(-8, 0)$$

$$= -8$$

- Fungsi keanggotaan jika $x = 2.5$

$$\text{Segitiga}(2.5; 0, 0.5, 1) = min\left(\left(\frac{2.5-0}{0.5-0} \circ \frac{1-2.5}{1-0.5}\right), 0\right)$$

$$= min\left(\left(\frac{2.5}{0.5} \circ \frac{-1.5}{0.5}\right), 0\right)$$

$$= min\big((5 \circ -3), 0\big)$$

$$= min(-15, 0)$$

$$= -15$$

- Fungsi keanggotaan jika $x = 3$

$$\text{Segitiga}(3; 0, 0.5, 1) = min\left(\left(\frac{3-0}{0.5-0} \circ \frac{1-3}{1-0.5}\right), 0\right)$$

$$= min\left(\left(\frac{3}{0.5} \circ \frac{-2}{0.5}\right), 0\right)$$

$$= min\big((6 \circ -4), 0\big)$$

$$= min(-24, 0)$$

$$= -24$$

Dari hasil perhitungan di atas, diperoleh nilai minimum $0, -3, -8, -15, -24$ untuk semua fungsi keanggotaan $x = 1$, $x = 1.5$, $x = 2$, $x = 2.5$, dan $x = 3$ dengan $a = 0, b = 0.5$, dan $c = 1$. Hal ini berarti bahwa nilai maksimum untuk semua fungsi keanggotaan $x = 1$, $x = 1.5$, $x = 2$, $x = 2.5$, dan $x = 3$ dengan $a = 0, b = 0.5$, dan $c = 1$ adalah berbeda.

3.2 Kajian Kegamaan Mengenai Persamaan Relasi *Fuzzy*

Dalam ilmu matematika, konsep hubungan disebut dengan relasi. Relasi adalah hubungan antara dua elemen himpunan. Relasi dari dua himpunan *A* ke himpunan *B* adalah pemasangan anggota-anggota himpunan *A* dengan anggota-anggota himpunan *B*. Relasi (hubungan) antara kedua himpunan mempunyai aturan tertentu yang sangat erat kaitannya, sehingga keduanya saling mempengaruhi.

Allah Swt adalah Dzat Yang Maha Pencipta. Seperti yang telah disebutkan pada bab II, yaitu dalam kandungan QS. az-Zariyat ayat 56. Dalam ayat tersebut Allah Swt menjelaskan bahwa Dia menciptakan jin dan manusia hanya untuk beribadah kepada-Nya. Hal ini menunjukkan bahwa dalam penciptaan jin dan manusia terdapat aturan tertentu, yaitu hanya untuk beribadah kepada-Nya. Kandungan yang terdapat dalam surat az-Zariyat ayat 56 tersebut sesuai dengan konsep relasi yang penulis bahas dalam skripsi ini. Relasi *fuzzy* yang dibahas dalam skripsi ini dinyatakan dalam bentuk $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$. Relasi $\boldsymbol{R}$ dan $\boldsymbol{S}$ dikomposisikan menggunakan operasi komposisi "$\circ$", dimana komposisi "$\circ$" merupakan komposisi *maks-produk* dan *maks-produk* yang keduanya memiliki aturan yang berbeda. Relasi *fuzzy* dinyatakan dalam interval kontinu $[0,1]$, bernilai 0 jika pernyataan tersebut bernilai salah dan bernilai 1 jika pernyataan tersebut bernilai salah. Relasi *fuzzy* disebut juga relasi kabur, dalam hal ini relasi (hubungan) yang disebutkan dalam surat az-Zariyat ayat 56 termasuk dalam relasi kabur, karena parameternya tidak terukur. Dalam kasus relasi *fuzzy*, hubungan antara manusia dan jin kepada Allah Swt bernilai 1 jika manusia dan jin ta'at terhadap segala perintah dan larangan Allah Swt. Sebaliknya, hubungan antara manusia dan jin kepada Allah Swt bernilai 0 jika manusia dan jin tidak ta'at terhadap segala perintah dan larangan Allah Swt.

Beribadah kepada Allah Swt merupakan tugas pokok manusia sebagai hamba-Nya, bahkan satu-satunya tugas dalam kehidupan manusia sehingga apapun yang dilakukan manusia di dunia ini, ia tidak boleh meninggalkan kewajibannya untuk beribadah kepada-Nya. Konsep relasi sangat erat kaitannya dengan kehidupan manusia. Konsep ini juga dapat diterapkan dalam kehidupan sehari-hari. Dalam hal ibadah misalnya, kandungan surat az-Zariyat ayat 56 dapat diterapkan dengan cara melakukan segala sesuatu dengan niat yang ikhlas semata-mata hanya karena Allah Swt, melakukan segala sesuatu dengan cara yang benar, melakukan segala sesuatu dengan tujuan hanya mengharap Ridho Allah Swt, seantiasa beriman dan bertaqwa kepada-Nya, tidak menyekutukan-Nya dengan sesuatu apapun, dan menanamkan kesadaran dalam hati bahwa manusia diciptakan oleh Allah Swt bukan semata-mata untuk hidup di dunia bukan pula untuk sekedar makan dan minum. Apalagi berfoya-foya untuk memenuhi keinginan hawa nafsu, tetapi tujuan hidup manusia sebenarnya adalah beribadah kepada-Nya.

Uraian diatas menunjukkan bahwa konsep relasi dalam matematika sangat erat kaitannya dengan kajian keagamaan yang dapat diterapkan dalam kehidupan sehari-hari.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya, maka diperoleh hasil sebagai berikut:

1. Solusi maksimum dan solusi minimum dalam persamaan relasi *fuzzy* dengan menggunakan komposisi *maks-produk*:
   a. Solusi Maksimum
      1) Maksimum $\boldsymbol{S}$ atau $\boldsymbol{S}^{\nabla}$ dari persamaan relasi *fuzzy* $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$ adalah $\boldsymbol{S}^{\nabla} = \boldsymbol{R}^{-1} @ \boldsymbol{T}$.
      2) Maksimum $\boldsymbol{R}$ atau $\boldsymbol{R}^{\nabla}$ dari persamaan relasi *fuzzy* $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$ adalah $\boldsymbol{R}^{\nabla} = (\boldsymbol{S} @ \boldsymbol{T}^{-1})^{-1}$.
   b. Solusi Minimum
      1) Minimum $\boldsymbol{S}$ atau $\boldsymbol{S}^{\Delta}$ dari persamaan relasi *fuzzy* $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$ adalah $\boldsymbol{S}^{\Delta} = \neg(\boldsymbol{R}^{-1} @ \neg \boldsymbol{T})$.
      2) Minimum $\boldsymbol{R}$ atau $\boldsymbol{R}^{\Delta}$ dari persamaan relasi *fuzzy* $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$ adalah $\boldsymbol{R}^{\Delta} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{B}$.

4.2 Saran

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya, peneliti memberikan saran kepada pembaca yang tertarik pada penelitian ini agar mengembangkannya lebih dalam lagi. Sehingga dapat diperoleh berbagai macam solusi dalam persamaan relasi *fuzzy* dengan menggunakan komposisi yang berbeda-beda.

DAFTAR RUJUKAN

Abbasbandy, S, dkk. 2006. *Numerical Solution of Fuzzy Max-min Systems*, 174: 1321-1328.

Ahmed , U., & Saqib, M. 2010. *Fuzzy Relation Equations and Their Solution.* Sweden: Blekinge Institute of Technology.

Al-Jazari, Syaikh Abu Bakar Jabir. 2009. *Tafsir Al-Qur'an Al-Aisar*. Jakarta: Darus Sunnah.

Bartl, Eduard. 2012. *Fuzzy Relational Equations.* Czech Republic: Palacky University Olomouc.

Elie, Sanchez. 1976. *Resolution of Fuzzy Relation Equation*, 2012 (00117): 1-11.

Ezzati, R, dkk. 2012. *Solving Fully Fuzzy Linear System of Equations in General Form*, 1976 (30): 38-48.

Ishaq, Abdullah. 2004. *Tafsir Ibnu Kasir Jilid 1*. Bogor: Pustaka Imam Syafi'i.

Kandasamy, W. B & Smarandache, F. 2004. *Fuzzy Relational Maps and Neutrosophic Relational Maps.* India: Indian Institute of Technology.

Klir, G. J., & Yuan, B. 2007. *Approximate Solutions of Systems of Fuzzy Equations.* New York: State University of New York.

Klir, G. J., & Yuan, B. 2002. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic Theory and Applications.* Delhi: Prentice Hall of India Pvt. Ltd.

Markovskii, A. V. 2004. *Solution of Fuzzy Equations with Max-Product Composition in Inverse Control and Decision Making Problem*, 65 (9): 1486-1496.

Mazarbhuiya, F. A, dkk. 2011. *Solution of the Fuzzy Equation A+X=B Using the Method of Superimposition*, 2: 1039-1045.

Mitra, N. K. & Valluri, R. M. 2014. *Maximum Solution of Fuzzy Relation Equation. Proceeding of 2nd IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZY-IEEE).* 10: 1-4.

Ping, Wang Xue. 2003. *Infinite Fuzzy Relational Equations on a Complete Brouwerian Lattice*, 138: 657-666.

Raishinghania, M.D & Anggarawal, R.S. 1980. *Modern Algebra*. New Delhi: S. Chan and Company Ltd.

Shieh, B. S. 2008. *Deriving Minimal Solutions for Fuzzy Relation Equations with Max-Product Composition*, 178: 3766-3774.

Susilo, F. 2006. *Himpunan & Logika Kabur serta Aplikasinya.* Yogyakarta: Graha Ilmu.

Wu, Y. K. & Guu, S. M. 2004. *Finding the Complete Set of Minimal Solutions for Fuzzy Relational Equations with Max-produk Composition*, 1 (1): 29-36.

Zadeh, L. A. 1973. *Outline of New Approach to the Analysis of Complex Systems and Decision Processes, IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics*, SMC-3 (1): 28-44.

Zimmermann, H-J. 2001. *Fuzzy Set Theory and Its Applications, Fourth Edition.* London: Kluwer Academica.

RIWAYAT HIDUP

Atika Zakiyatul Fikriya, lahir di Pati pada tanggal 06 Maret 1996, biasa dipanggil Fiki. Kakak dari Laila Qothrun Nada yang merupakan anak pertama dari 2 bersaudara pasangan Bapak Kusrin dan Ibu Anni Alfiyah.

Pendidikan dasarnya ditempuh di MI Manahijul Ulum Pati dan lulus pada tahun 2008. Setelah itu melanjutkan sekolah di MTs Manahujul Ulum Pati, lulus tahun 2011. Pendidikan selanjutnya ditempuh di MA Raudlatul Ulum di bawah naungan Pondok Pesantren Raudlatul Ulum dan lulus tahun 2014. Selanjutnya, pada tahun yang sama melanjutkan kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang Jurusan Matematika dan tinggal di Griya Tahfidz Muslimah (GTM) sejak semester 3.

Selama menjadi mahasiswa telah mengikuti beberapa penelitian, diantaranya adalah Penelitian Program Penguatan Studi (P3S) dan Penelitian Kompetitif Mahasiswa (PKM) pada tahun 2017. Selain itu, disela-sela kesibukannya menjadi mahasiswa ia juga aktif dalam berbagai organisasi intra maupun ekstra kampus, asisten laboratorium, kepengurusan pondok, bisnis online shop, dan tentor kelas di LBB Rumah Rahil serta tentor privat di LBB Griya Ilmu Malang.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345 Fax. (0341) 572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Atika Zakiyatul Fikriya
NIM : 14610054
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Penyelesaian Persamaan Relasional *Fuzzy*
Pembimbing I : Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D
Pembimbing II : Hairur Rahman, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan	
1	15 Januari 2018	Revisi Bab I dan II	1.	
2	30 Januari 2018	Revisi Bab III		2.
3	10 Maret 2018	ACC untuk diseminarkan	3.	
4	12 Maret 2018	Revisi Kajian Agama Bab I & II		4.
5	14 Maret 2018	ACC untuk diseminarkan	5.	
6	09 April 2018	Revisi BAB III		6.
7	18 April 2018	Revisi Kajian Agama BAB I & II	7.	
8	23 April 2018	Revisi BAB III		8.
9	27 April 2018	Revisi Kajian Agama BAB III	9.	
10	02 Mei 2018	Revisi Abstrak		10.
11	02 Mei 2018	ACC Keseluruan	11.	
12	03 Mei 2018	ACC Keseluruhan		12.

Malang, 03 Mei 2018
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001