PENGUJIAN AUTOKORELASI SPASIAL PADA REGRESI SPASIAL *LAG* DENGAN *LOCAL INDICATOR OF SPATIAL AUTOCORRELATION* (LISA)

SKRIPSI

OLEH
RUFI AULIA ASMARANI
NIM. 14610017

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018

PENGUJIAN AUTOKORELASI SPASIAL PADA REGRESI SPASIAL *LAG* DENGAN *LOCAL INDICATOR OF SPATIAL AUTOCORRELATION* (LISA)

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Rufi Aulia Asmarani
NIM. 14610017

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018

PENGUJIAN AUTOKORELASI SPASIAL PADA REGRESI SPASIAL LAG DENGAN *LOCAL INDICATOR OF SPATIAL AUTOCORRELATION* (LISA)

SKRIPSI

Oleh
Rufi Aulia Asmarani
NIM. 14610017

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 06 Juli 2018

Pembimbing I,

Dr. Sri Harini, M.Si
NIP. 19731014 20011 2 002

Pembimbing II,

Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si
NIP. 19770521 200501 2 004

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PENGUJIAN AUTOKORELASI SPASIAL PADA REGRESI SPASIAL LAG DENGAN *LOCAL INDICATOR OF SPATIAL AUTOCORRELATION* (LISA)

SKRIPSI

Oleh
Rufi Aulia Asmarani
NIM. 14610017

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 17 Juli 2018

Penguji Utama	: Anwar Fitrianto, M.Sc., Ph.D	....
Ketua Penguji	: Abdul Aziz, M.Si	....
Sekertaris Penguji	: Dr. Sri Harini, M.Si	....
Anggota Penguji	: Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	Rufi Aulia Asmarani
NIM	:	14610017
Jurusan	:	Matematika
Fakultas	:	Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	:	Pengujian Autokorelasi Spasial Pada Regresi Spasial *Lag* dengan *Local Indicator of Spatial Autocorrelation* (LISA)

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 06 Juli 2018
Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL
TGL.
351CDAFF199548020
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Rufi Aulia Asmarani
NIM. 14610017

MOTO

"Stop dreaming and start doing"

"If opportunity does not come to you, then create it"

PERSEMBAHAN

Dengan rasa syukur skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Kedua orang tua penulis ayah Saili H. Ma'ruf dan ibu Sofiatul Aslamiyah yang selalu memberikan doa, dukungan, kasih sayang dan lain sebagainya yang mungkin tidak bisa penulis balas dengan apapun. Adik tersayang Anjasmara Arrizal Mahfud yang selalu memberikan doa dan dukungan kepada penulis. Para guru yang senantiasa membagikan ilmunya tanpa pamrih dan teman-teman seperjuangan yang selalu memberi dukungan dan saling berbagi.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya sehingga penulis mampu menyelesaikan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat serta salam kepada Nabi Muhammad Saw yang telah membimbing umat manusia menuju jalan yang terang.

Proses penyusunan skripsi ini, penulis mendapat banyak bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu penulis memberikan ucapan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Sri Harini, M.Si, Selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan ide mengenai permasalahan skripsi ini serta meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan dengan baik sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
5. Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, arahan, dan berbagi ilmunya kepada penulis.

6. Angga Dwi Mulyanto, M.Si, selaku dosen bimbingan yang selalu memberikan dukungan, bimbingan, arahan, dan berbagi ilmunya kepada penulis.
7. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas ilmu dan bimbingannya.
8. Segenap keluarga terutama Ayah dan Ibu yang selalu memberikan doa, semangat, serta motivasi kepada penulis sampai saat ini.
9. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2014 yang telah banyak memberikan semangat, motivasi, dan arahan untuk mengerjakan skripsi secara baik dan cepat.
10. Seluruh pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materil.

Penulis berharap agar skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca maupun bagi penulis.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, Juli 2018

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR SIMBOL

$\boldsymbol{y}$	: vektor variabel terikat
$\boldsymbol{\beta}$	: vektor koefisien parameter regresi
ρ	: koefisien parameter spasial *lag*
λ	: koefisien parameter spasial *error*
$\boldsymbol{W}_1$	: matriks pembobot spasial *lag* pada variabel terikat
$\boldsymbol{W}_2$	: matriks pembobot spasial *error*
$\boldsymbol{X}$	: matriks variabel bebas
$\boldsymbol{\varepsilon}$	: vektor *error* pada regresi
$f(\boldsymbol{y}\vert\boldsymbol{\beta},\sigma^2,\rho)$	: fungsi peluang $y_1, y_2, \ldots, y_n$ terhadap $\boldsymbol{\beta},\sigma^2,\rho$
$L(\boldsymbol{\beta},\sigma^2,\rho\vert\boldsymbol{y},\boldsymbol{X})$	: fungsi *likelihood* β,σ^2,ρ terhadap $\boldsymbol{y},\boldsymbol{X}$
$\widehat{\boldsymbol{\beta}}$	: pendugaan parameter β
σ^2	: pendugaan parameter σ^2
$\hat{\rho}$	: pendugaan parameter ρ
I_i	: indeks *Local Indicator of Spatial Autocorrelation* (LISA)
$l(\omega)$	: fungsi maksimum *likelihood* model regresi linier
$l(\gamma)$	: fungsi maksimum *likelihood* model regresi spasial *lag*

ABSTRAK

Asmarani, Rufi Aulia. 2018**. Pengujian Autokorelasi Spasial Pada Regresi Spasial *Lag* dengan *Local Indicator of Spatial Autocorrelation* (LISA)**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (1) Dr. Sri Harini, M.Si (2) Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si

Kata Kunci : Autokorelasi Spasial, Regresi Spasial *Lag*, estimasi parameter, LISA

Model regresi spasial merupakan pengembangan model regresi linier dimana terdapat efek spasial yang dibentuk sebagai matriks pembobot spasial. Adanya efek spasial ditandai dengan autokorelasi spasial dan heterogenitas spasial. Untuk mendeteksi autokorelasi spasial yakni dengan metode *Local Indicator of Spatial Autocorrelation* (LISA). Penelitian ini bertujuan untuk mendapatkan hasil pengujian autokorelasi spasial pada model regresi spasial *lag* menggunakan *metode* LISA. Hasil penelitian diaplikasikan pada data kemiskinan di Provinsi Jawa Timur pada tahun 2015 sehingga didapatkan pemetaan angka kemiskinan di Provinsi Jawa Timur serta pengujian autokorelasi spasial dengan metode LISA pada data kemiskinan di Jawa Timur dan memodelkan angka kemiskinan dengan 5 variabel yang mempengaruhi variabel kemiskinan. Variabel bebas yang digunakan dalam penelitian ini adalah X_1 sebagai presentasi Produk Domestik Regional Bruto (PDRB), X_2 sebagai presentasi Angka Partisipasi Sekolah (APS), X_3 sebagai presentasi Tingkat Pengangguran Terbuka (TPS), X_4 sebagai presentasi Tingkat Partisipasi Angkatan Kerja (TPAK), X_5 sebagai presentasi Prakiraan Permintaan Masyarakat (PPM). Hasil pada penelitian ini didapatkan nilai autokorelasi spasial secara lokal dengan *Local Indicator of Spatial Autocorrelation* (LISA) serta pemetaan kemiskinan di Jawa Timur tahun 2015 secara lokal.

ABSTRACT

Asmarani, Rufi Aulia. 2018. **Spatial Autocorrelation Testing on Spatial Lag Regression with Local Indicator of Spatial Autocorrelation (LISA).** Thesis. Mathematics Department, Science and Technology Faculty, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (1) Dr. Sri Harini, M.Si (2) Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si

Keywords : Spatial Autocorrelation, Spatial Lag Regression, parameter estimation, LISA

Spatial regression model is one of linear regression model developments which has spatial effect that made as spatial weight matrix. Spatial effect can be marked with spatial autocorrelation and spatial heterogeneity. Spatial Autocorrelation can be detected with Local Indicator of Spatial Autocorrelation (LISA) method. This research is used for obtaining spatial autocorrelation testing results on spatial lag regression model with LISA method. The research's result is applied at poverty data in East Java Regency on 2015 so that can be got the poverty mapping in East Java Regency and spatial autocorrelation testing with LISA method on poverty data in East Java and make poverty number with five variables that give the poverty number impacts. Free variables used in this research are X_1 represents as Gross Regional Domestic Product (GDRP), X_2 represents as Studying Participation Number (SPN), X_3 represents as Open Unemployment Number Rating (OUNR), X_4 represents as Workforce Participation Rating (WPR), X_5 represents as Society Requests Estimation (SRE). From this research, it get the local spatial autocorrelation value with Local Indicator of Spatial Autocorrelation (LISA) and poverty mapping in East Java on 2015 locally.

ملخص

أسماراني، روفي أولياء .٢٠١٨ .**تجربة فضاء ذاتي الارتباط في انحدار تأخر الفضاء بالمؤشر المحلي للارتباط الذاتي المكاني** .بحث جامعي .شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج .المشرفة(١:)الدكتورة سري هاريني، الماجستير(٢)أري كوسوماستوتي، الماجستير

الكلمات المفتاحية: الترابط الذاتي المكاني ، انحدار تأخر المكاني ، تقدير المعلمة ، LISA

نموذج انحدار تأخر الفضاء هو التطوير من نموذج الانحدار الخطي إذ يوجد تأثير الفضاء المشكل من فضاء مصفوفة التوزين .ويعرف وجود تأثير الفضاء من فضاء ذاتي الارتباط وتنوع الفضاء . وللوصول إلى معرفة الفضاء ذاتي الارتباط بطريقة المؤشر المحلي للارتباط الذاتي المكاني .يهدف هذا البحث لنيل النتيجة من تجربة الفضاء ذاتي الارتباط في انحدار تأخر الفضاء بالمؤشر المحلي للارتباط الذاتي المكاني .ونتائج البحث المطبقة في بيانات الفقر بولاية الجاوى الشرقية سنة ٢٠١٥ حتى يكتسب تطبيق عدد الفقر فيها مع تجربة الفضاء ذاتي الارتباط بالمؤشر المحلي للارتباط الذاتي المكاني في بيان الفقر مع خمس متغيرات التي تؤثر متغير الفقر .والمتغير الحري المستخدم في هذا البحث هو X_1تقديما من منتجة الأرباح المحلية، و X_2 تقديما من عدد مشاركة المدارس، و X_3 تقديما لدرجة البطالة المفتوحة، و X_4 تقديما من درجة المشاركة لمرحلة العلم، و X_5 تقديما من تقدير متطلبات المجتمع .والنتيجه في هذا البحث أنه يوجد الفضاء ذاتي الارتباط المحلي بطريقة المؤشر المحلي للارتباط الذاتي المكاني مع تطبيق الفقر بولاية الجاوى الشرقية سنة ٢٠١٥ محليا.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Data merupakan kumpulan suatu informasi yang didapatkan dari suatu pengamatan, biasanya berupa angka yang memuat suatu informasi. Salah satu jenis data adalah data spasial. Menurut Hartoyo dkk (2010), data spasial merupakan data yang berorientasi geografis, memiliki sistem koordinat tertentu sebagai dasar referensinya. Suatu pengamatan pada data spasial di suatu lokasi bergantung pada pengamatan di lokasi lain yang berdekatan (*neighboring*). Berdasarkan hukum pertama W. Tobler dalam Anselin (2013) berbunyi "Segala sesuatu saling berhubungan satu dengan lainnya, tetapi sesuatu yang dekat lebih mempunyai pengaruh dari pada sesuatu yang jauh". Hukum tersebut yang menjadi tolok ukur mengenai kajian sains *regional*. Adanya efek spasial merupakan hal yang lazim terjadi antara satu *region* dengan *region* yang lainnya.

Data spasial merupakan salah satu jenis data dependen. Ketika data spasial diselesaikan menggunakan regresi klasik maka terjadi ketidaktepatan dalam pemenuhan asumsi. Salah satunya adalah masalah *error* yang berkorelasi dan masalah pada heterogenitas pada *error*nya. Hal ini dikarenakan adanya pengamatan satu dengan pengamatan lain memiliki ketergantungan yang cukup kuat dengan pengamatan pada lokasi lain yang berdekatan (*nearest neighboring*) sehingga hal tersebut dinamakan efek spasial.

Anselin (2013) juga menyebutkan bahwa adanya efek spasial dibagi menjadi dua yakni autokorelasi spasial dan heterogenitas spasial. Autokorelasi spasial terjadi ketika adanya dependensi atau korelasi antar spasial dalam data *cross section*, sedangkan apabila terjadi efek wilayah yang secara acak (*random*) yakni dengan ditandai adanya perbedaan antar wilayah satu dengan lainnya disebut heterogenitas spasial. Sehingga dalam pemodelan statistik ketika model regresi klasik digunakan sebagai alat analisis pada data spasial dapat menyebabkan kesimpulan yang tidak tepat karena dalam model regresi klasik diasumsikan bahwa variansi *error* tetap atau homoskedastisitas dan tidak terdapat ketergantungan antar *error* atau autokorelasi pada setiap lokasi pengamatan (Cressie, 2015).

Sebagai mana yang difirman kan Allah dalam surah Luqman: 33

يَٰٓأَيُّهَا ٱلنَّاسُ ٱتَّقُوا۟ رَبَّكُمْ وَٱخْشَوْا۟ يَوْمًا لَّا يَجْزِى وَالِدٌ عَن وَلَدِهِۦ وَلَا مَوْلُودٌ هُوَ جَازٍ عَن وَالِدِهِۦ شَيْـًٔا ۚ إِنَّ
وَعْدَ ٱللَّهِ حَقٌّ فَلَا تَغُرَّنَّكُمُ ٱلْحَيَوٰةُ ٱلدُّنْيَا وَلَا يَغُرَّنَّكُم بِٱللَّهِ ٱلْغَرُورُ ﴿٣٣﴾

Hai manusia, bertakwalah kepada Tuhanmu dan takutilah suatu hari yang (pada hari itu) seorang bapak tidak dapat menolong anaknya dan seorang anak tidak dapat (pula) menolong ayahnya sedikit pun. Sesungguhnya janji Allah adalah benar, maka janganlah sekali-kali kehidupan dunia memperdayakan kamu dan jangan (pula) penipu (setan) memperdayakan kamu dalam (menaati) Allah.(QS. Luqman: 33).

Hal mendasar pada pemodelan spasial adalah matriks pembobot spasial. Matriks pembobot spasial merupakan penanda adanya hubungan antara suatu wilayah dengan wilayah lainnya. Terdapat beberapa metode yang dapat digunakan untuk menyusun matriks pembobot antara lain metode pendekatan titik dan area. Metode pendekatan titik yakni pendekatan berdasarkan posisi koordinat garis bujur (*longitude*) dan garis lintang (*latitude*), contoh pendekatan titik yaitu GWR. Sedangkan pendekatan area yakni pendekatan berdasarkan prinsip ketetanggan atau biasa disebut *contiguity* antar wilayah.

Untuk mendekati adanya efek dependensi spasial terdapat beberapa pengujian yang digunakan antara lain uji *Moran I,* uji *Geray's,* uji *Getis and Ods* dan *Local Indicator of Spatial Autocorrelation* (LISA). Penelitian sebelumnya dilakukan oleh Chen (2014) dimana peneliti melakukan pendekatan autokorelasi spasial untuk menguji residu pada model regresi linier. Penelitian serupa dilakukan oleh Fu dkk (2014), menggunakan pendekatan *Moran I* dengan menggunakan SIG (Sistem Informasi Geografis) untuk mengetahui pola spasial di hutan wilayah subtropis China Tenggara. Sedangkan Mathur (2015), menggunakan pendekatan *Moran I, Geray's C* dan *Getis and Ord's G* secara global dan lokal untuk mengetahui autokorelasi spasial pada populasi tumbuhan di India.

Analisis regresi spasial dapat diterapkan pada berbagai bidang, seperti pada penelitian sebelumnya untuk mendeteksi autokorelasi spasial pada data spasial yang diterapkan pada berbagai bidang lingkungan dan ekologi. Dalam hal ini untuk menguji adanya autokorelasi spasial maka peneliti mengaplikasikan pada data jumlah kemiskinan di Provinsi Jawa Timur. Kemiskinan sendiri merupakan ketakmampuan seseorang guna untuk memperluas hidup yang artinya bahwa tidak adanya partisipasi dalam pengambilan kebijakan yang termasuk dalam indikator kemiskinan. Setelah mendeteksi autokorelasi spasial pada data kemiskinan di Provinsi Jawa Timur selanjutnya peneliti memodelkan data kemiskinan dalam model regresi spasial *lag* dengan faktor-faktor yang mempengaruhi data kemiskinan di Provinsi Jawa Timur pada tahun 2015.

Penelitian ini fokus pada pengujian autokorelasi menggunakan uji *Local Indicator of Spatial Autocorrelation* (LISA) yang diaplikasikan pada data kemiskinan di Provinsi Jawa Timur tahun 2015 yang selanjutnya akan dimodelkan dalam regresi spasial *lag* dengan faktor yang mempengaruhi kemiskinan di Provinsi Jawa Timur tahun 2015.

Penelitian ini merupakan penelitian yang sangat penting karena bertujuan untuk menyiapkan prosedur di lapangan yang lebih representatif, sehingga peneliti menyajikan penelitian dalam judul "Pengujian Autokorelasi Spasial Pada Regresi Spasial *Lag* dengan *Local Indicator of Spatial Autocorrelation* (LISA)".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, rumusan masalah dalam penelitian ini adalah

1. Bagaimana pengujian autokorelasi spasial pada regresi spasial *lag* dengan menggunakan *Local Indicator of Spatial Autocorrelation* (LISA)?
2. Bagaimana model regresi spasial *lag* sebagai representasi adanya autokorelasi spasial pada data kemiskinan di Jawa Timur pada tahun 2015?

1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai rumusan masalah, maka tujuan penelitian ini adalah

1. Untuk mengetahui hasil uji koefisien autokorelasi spasial pada regresi spasial *lag* dengan menggunakan *Local Indicator of Spatial Autocorrelation* (LISA).
2. Untuk mengetahui model regresi spasial *lag* pada data kemiskinan di Jawa Timur pada tahun 2015.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat seperti berikut:

1. Memberikan informasi mengenai pengujian autokorelasi spasial pada regresi spasial *lag* dengan menggunakan *Local Indicator of Spatial Autocorrelation* (LISA).

2. Memberikan gambaran faktor-faktor yang mempengaruhi data kemiskinan di Jawa Timur tahun 2015 yang disajikan dalam model regresi spasial *lag*.

1.5 Batasan Masalah

Untuk mendapatkan model terbaik, dalam penelitian ini dibatasi bahwa:

1. Estimasi parameter model regresi spasial *lag* menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimator* (MLE).
2. Matriks pembobot yang digunakan adalah *Queen Contiguity* (persinggungan sisi-sudut).
3. *Error* diasumsikan berdistribusi normal dengan mean nol dan variansi konstan pada setiap lokasi pengamatan.
4. Data yang digunakan dalam pengujian autokorelasi spasial yakni data kemiskinan di Provinsi Jawa Timur tahun 2015.
5. Variabel penelitian dalam penelitian ini terdiri dari variabel terikat jumlah penduduk miskin di Jawa Timur pada tahun 2015 dan variabel bebas yakni Produk Domesti Regional Bruto (PDRB), Angka Partisipasi Sekolah (APS), Tingkat Pengangguran Terbuka (TPT), Tingkat Partisipasi Angkatan Kerja (TPAK) dan Prakiraan Permintaan Masyarakat (PPM).

1.6 Sistematika Penulisan

Agar penulisan skripsi lebih terarah dan mudah dipahami, digunakan sitematika penulisan yang terdiri dari lima bab, masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa subbab dengan sistematika sebagai berikut.

BAB I PENDAHULUAN

Pendahuluan meliputi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II KAJIAN PUSTAKA

Kajian pustaka terdiri dari teori-teori yang dapat digunakan untuk menjawab rumusan masalah sehingga dapat mendukung pembahasan. Pada penelitian ini, teori yang digunakan meliputi analisis regresi, asumsi regresi linier klasik, model regresi spasial, autokorelasi spasial, *Local Indicator of Spatial Autocorrelation* (LISA), matriks pembobot, matriks serta operasinya, estimasi parameter regresi linier, sifat estimasi parameter, *Maximum Likelihood Estimator* (MLE) pada regresi spasial *lag*, uji rasio *likelihood*, signifikasi parameter, definisi kemiskinan dan kajian agama.

BAB III METODE PENELITIAN

Bab ini menjelaskan mengenai pendekatan penelitian yang dilakukan dan tahapan penelitian yang telah dijabarkan dalam melakukan penelitian.

BAB IV PEMBAHASAN

Bab ini menguraikan keseluruhan langkah-langkah dari hasil penelitian yang dijabarkan pada metode penelitian dan kajian agama.

BAB V PENUTUP

Penutup berisi kesimpulan mengenai hasil dari pembahasan dan saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Analisis Regresi

Suatu metode yang memodelkan suatu hubungan linier antar dua variabel atau lebih, yakni variabel bebas dan terikat disebut analisis regresi. Analisis regresi bertujuan untuk memperkirakan variansi terhadap variabel terikat yang mana variabel terikat dipengaruhi oleh variabel bebas dalam suatu pengamatan (Somantri & Muhidin, 2006).

Misalkan y_i adalah observasi dari variabel-variabel dependen untuk pengamatan ke-i, X_i adalah nilai observasi *independent* untuk pengamatan ke-i dan ε_i merupakan *error* pengamatan ke-i, terdapat k variabel *independent* dan n pengamatan sehingga model regresi dapat dituliskan dalam persamaan (2.1) sebagai berikut (Supangat, 2007):

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \beta_0 + \beta_1 X_{11} + X_{12}\beta_2 + \cdots + X_{1k}\beta_k + \varepsilon_1 \\
y_2 &= \beta_0 + \beta_1 X_{21} + X_{22}\beta_2 + \cdots + X_{2k}\beta_k + \varepsilon_2 \\
\vdots \quad & \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \ldots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
y_n &= \beta_0 + \beta_1 X_{n1} + X_{n2}\beta_2 + \cdots + X_{nk}\beta_k + \varepsilon_n
\end{aligned} \tag{2. 1}
$$

atau dapat ditampilkan dalam bentuk matriks pada persamaan (2.2) sebagai berikut (Supangat, 2007):

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1k} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \tag{2. 2}
$$

dengan

$\boldsymbol{y}$ = vektor variabel terikat berdimensi $n \times 1$

$\boldsymbol{X}$ = matriks k variabel bebas berdimensi $n \times (k+1)$

$\boldsymbol{\beta}$ = vektor parameter berdimensi $(k+1) \times 1$

$\boldsymbol{\varepsilon}$ = vektor *error* berdimensi $n \times 1$.

Menurut teorema GAUSS-MARKOV, estimator OLS harus memenuhi kriteria BLUE, yaitu (Gujarati, 2010):

1. *Best* yang berarti estimator terbaik.
2. *Linear* yang berarti adanya kombinasi linear dari data sampel.
3. *Unbiased* yang berarti nilai harapan $E[\hat{a}] = a$ atau rata-rata harus sama dengan nilai sebenarnya a.
4. *Efficient* yang berarti memiliki variansi yang minimal atau variansi terkecil di antara prakiraan yang tak bias.

Penaksir yang memenuhi sifat BLUE (*Best Linear Unbiased Efficient*) yang didapatkan dari penaksir linier kuadrat terkecil (*Ordinary Least Square*) yang selanjutnya harus memenuhi asumsi-asumsi klasik regresi linier.

2.2 Asumsi Regresi Linear Klasik

Berikut terdapat tiga asumsi klasik yang bertujuan untuk menguji estimator-estimator pada regresi linier yakni asumsi normalitas, asumsi multikolinieritas dan asumsi homoskedastisitas.

2.2.1 Normalitas

Asumsi klasik yang pertama dalam analisis regresi linier yaitu asumsi klasik normalitas yang berarti *error* harus menyebar normal atau $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(0, \sigma^2 \boldsymbol{I})$. Tujuan pengujian normalitas untuk menguji apakah suatu residu dalam sebuah model regresi mengikuti distribusi normal atau tidak. Model regresi yang baik adalah model regresi yang mengikuti distribusi data normal atau mendekati normal (Ghozali, 2005).

Uji normalitas dapat dilakukan dengan beberapa cara salah satunya dengan melalui uji *Jarque Bera*. Uji *Jarque Bera* adalah salah satu metode untuk menguji normalitas univariat dan multivariat. Uji ini menghitung koefisien kemencengan (*skewness*) dan peruncingan K (*kurtosis*). Statistik *Jarque Bera* mengikuti distribusi chi-kuadrat dengan derajat bebas dua untuk ukuran sampel besat (Gujarati, 2010).

Berikut ini adalah hipotesis, statistik uji dan titik kritis (daerah penolakan) untuk pengujian menggunakan statistik uji *Jarque-Bera* (Gujarati, 2010):

Hipotesis

H_0 : *error* berdistribusi normal

H_1 : *error* tidak berdistribusi normal

dan statistik uji

$$JB = \frac{n}{2}\left(S^2 + \frac{(k-3)^2}{4}\right) \qquad (2.\ 3)$$

dengan

$$S = \frac{\frac{1}{n}\Sigma_{i=n}^{n}(x_i - \bar{x})^3}{\left(\frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$k = \frac{\frac{1}{n}\Sigma_{i=n}^{n}(x_i - \bar{x})^4}{\left(\frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right)^{2}}$$

dimana n merupakan ukuran sampel, s merupakan kemencengan (*skewness*) dan k menyatakan peruncingan (*kurtosis*). Titik kritis pada pengujian ini yakni H_0 ditolak apabila statistik uji $JB > \chi_2^2$ atau $p - value < \alpha$ yang berarti *error* tidak berdistribusi normal sedangkan H_0 diterima apabila statistik uji $JB < \chi_2^2$ atau $p - value > \alpha$ maka *error* berdistribusi normal.

2.2.2 Multikolinieritas

Multikolinieritas adalah terjadinya hubungan linier antara variabel bebas dalam suatu model regresi linier. Hubungan linier antara variabel bebas dapat terjadi dalam bentuk hubungan linier yang sempurna *(perfect)* dan hubungan linier yang kurang sempurna *(imperfect)* (Gujarati, 2010).

Salah satu cara untuk mendeteksi adanya multikolinieritas yakni dengan uji *Farrar-Glauber* dimana perhitungan ratio-F untuk menguji nilai multikolinieritas. Pengujian multikolinieritas dapat dilakukan melalui perhitungan bilangan kondisi atau *codition index (CI)*. Nilai ini didapatkan dari nilai *Eigen* pada matriks $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})$. Jika τ maks dan τ min masing-masing merupakan nilai *Eigen* terbesar dan terkecil dari matriks $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})$ maka *CI* dapat didefinisikan dalam persamaan (2.4) sebagai berikut (Sembiring, 1995):

$$CI = \sqrt{\frac{\tau_{maks}}{\tau_{min}}} \quad (2.\ 4)$$

Multikolinieritas terjadi dengan ketentuan sebagai berikut (Sembiring, 1995):

$CI < 10$: multikolinieritas rendah

$10 \leq CI \leq 30$: multikolinieritas sedang

$CI > 30$: multikolinieritas tinggi

2.2.3 Homoskedastisitas

Uji homoskedastisitas dilakukan untuk menguji apakah dalam sebuah model regresi terjadi kesamaan variansi residual dari satu pengamatan pada pengamatan yang lain sehingga disebut homogen atau $var(\varepsilon_i) = E(\varepsilon_i{}^2) = \sigma^2$ untuk semua i dengan $i = 1,2,3, \dots, n$. Apabila model regresi terjadi ketaksamaan variansi residual dari satu pengamatan yang lain tetap maka hal tersebut dinamakan heteroskesdastisitas (Singgih, 2000). Untuk menguji apakah *error* pada regresi linier bersifat homoskedastisitas dapat dilakukan melalui uji *Breush Pagan*. Berikut ini adalah hipotesis dalam uji homoskedastisitas (Supangat, 2007):

H_0 : variansi *error* bersifat homoskedastisitas

H_1 : variansi *error* bersifat heteroskedastisitas

dan statistik uji *Breusch Pagan* dituliskan dalam persamaan (2.5) berikut:

$$F = \frac{\frac{R^2_{\varepsilon^2}}{k}}{1 - \frac{R^2_{\varepsilon^2}}{k}} \sim F_{\alpha,(k,n-k-1)} \tag{2.5}$$

dimana k menyatakan banyaknya peubah bebas.

$R^2_{\varepsilon^2}$ diperoleh dengan cara meregresikan *error* ε terhadap k variabel bebas yang termasuk dalam *intersep*. $R^2_{\varepsilon^2}$ adalah *R-Square* dari regresi. Apabila statistik uji $F > F_{\alpha,(k,n-k-1)}$ atau $p - value > \alpha$ maka H_0 ditolak, yang berarti variansi *error* tidak homogen (Supangat, 2007).

2.3 Model Regresi Spasial

Model regresi yang melibatkan pengaruh spasial disebut dengan model regresi spasial. Analisis spasial merupakan suatu analisis data untuk mendapatkan informasi pengamatan yang dipengaruhi efek ruang atau lokasi. Pengaruh efek ruang tersebut disajikan dalam bentuk koordinat lokasi (*longitude, latitude*) atau pembobotan. Metode ini banyak digunakan untuk analisis geostatistik maupun pemodelan matematika yang membutuhkan adanya informasi lokasi (Anselin, 2013).

Penerapan analisis data spasial berupa model regresi spasial. Model regresi spasial merupakan suatu model regresi linier dengan satu variabel respon dengan informasi lokasi atau ruang yang diketahui. Salah satu permasalahan yang sering muncul pada model regresi spasial adalah adanya autokorelasi spasial dimana hal tersebut mengakibatkan terbentuknya parameter spasial *autoregressive* dan *moving average* pada model regresi spasial, sehingga bentuk proses spasial yang terjadi sebagai berikut (Anselin, 2013):

$$\boldsymbol{y} = \rho \boldsymbol{W}_1 \boldsymbol{y} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\phi} \tag{2. 6}$$

dan

$$\boldsymbol{\phi} = \lambda \boldsymbol{W}_2 \boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2. 7}$$

untuk $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(0, \sigma^2 \boldsymbol{I})$ tidak ada autokorelasi.

Berdasarkan persamaan (2.6) dan (2.7) maka model yang terbentuk yaitu

$$\boldsymbol{y} = \rho \boldsymbol{W}_1 \boldsymbol{y} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \lambda \boldsymbol{W}_2 \boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2. 8}$$

yang dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & \cdots & W_{1n} \\ W_{21} & W_{22} & \cdots & W_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ W_{n1} & W_{n2} & \cdots & W_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1k} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} +$$

$$\lambda \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & \cdots & W_{1n} \\ W_{21} & W_{22} & \cdots & W_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ W_{n1} & W_{n2} & \cdots & W_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

dengan

$\boldsymbol{y}$ = vektor peubah *dependent*

$\boldsymbol{X}$ = matriks peubah *independent*

$\boldsymbol{\beta}$ = vektor koefisien parameter regresi

ρ = koefisien spasial *lag* pada variabel terikat

λ = koefisien spasial *error*

$\boldsymbol{\phi}$ = vektor *error* yang diasumsikan memuat autokorelasi spasial

$\boldsymbol{W}_1$ = matriks bobot spasial *lag* peubah dependent

$\boldsymbol{W}_2$ = matriks bobot spasial *error*

$\boldsymbol{\varepsilon}$ = vektor *error* yang diasumsikan tidak memuat autokorelasi

Secara umum parameter-parameter pada regresi spasial dapat ditulis dalam bentuk vektor sebagai berikut:

$$\boldsymbol{\theta} = [\rho \quad \beta \quad \lambda \quad \sigma^2]^T$$

dengan σ^2 merupakan variansi dari vektor *error* (Anselin, 2001).

Terdapat pula model regresi spasial yang memperhitungkan pengaruh spasial *lag* dan spasial *error* atau yang disebut regresi spasial gabungan *lag* dan *error*. Model regresi spasial ini dapat digunakan pada data *cross-section* dan *space-time*. Data *cross-section* adalah data yang hanya melibatkan unit-unit spasial pada satu titik waktu, sedangkan data *space-time* yakni data yang melibatkan unit-unit spasial pada suatu waktu deret tertentu (Anselin, 2001).

Berdasarkan parameter-parameter pada persamaan, maka model regresi spasial dapat dibedakan menjadi 2 yakni Model Regresi Spasial *Lag* dan Model Regresi Spasial *Error*.

1. Model Regresi Spasial *Lag*

Model regresi linier dengan memperhitungkan pengaruh spasial *lag* pada peubah terikat ($\lambda = 0$) dinyatakan dengan persamaan (2.9) berikut (Anselin, 2013):

$$\boldsymbol{y} = \rho \boldsymbol{W}_1 \boldsymbol{y} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \qquad (2.9)$$

apabila ditulis dalam bentuk matriks, persamaan (2.9) akan menjadi sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & \cdots & W_{1n} \\ W_{21} & W_{22} & \cdots & W_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ W_{n1} & W_{n2} & \cdots & W_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1k} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

dimana ρ adalah koefisien spasial *lag* pada variabel terikat, $\boldsymbol{W}_1$ matriks bobot spasial variabel terikat, dan $\boldsymbol{\varepsilon}$ adalah vektor *error* dengan konstanta variansi $\boldsymbol{\sigma}^2$ (Anselin, 2013).

2. Model Regresi Spasial *Error*

Model regresi linier dengan memperhitungkan pengaruh spasial pada *error* ($\rho = 0$) dinyatakan dengan persamaan (2.10) berikut (Anselin, 2013):

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + (\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W}_2)^{-1}\boldsymbol{\phi} \quad (2.\ 10)$$

jika persamaan regresi spasial dinyatakan $\rho = 0$, maka akan diperoleh bentuk persamaan (2.11) berikut

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\phi} \quad (2.\ 11)$$

dimana

$$\boldsymbol{\phi} = \lambda \boldsymbol{W}_2\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.\ 12)$$

Apabila persamaan (2.11) dan (2.12) digabung maka menjadi persamaan (2.13) berikut:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \lambda \boldsymbol{W}_2\,\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.\ 13)$$

Persamaan (2.13) dapat pula ditulis dalam bentuk matriks, sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1k} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & \cdots & W_{1n} \\ W_{21} & W_{22} & \cdots & W_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ W_{n1} & W_{n2} & \cdots & W_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

dimana λ adalah koefisien spasial *error*, $\boldsymbol{W}_2$ matriks bobot spasial *error* dan $\boldsymbol{\varepsilon}$ adalah vektor *error* dengan konstanta variansi σ^2 (Anselin, 2013).

2.4 Autokorelasi Spasial

Autokorelasi spasial didefinisikan sebagai penilaian korelasi antar pengamatan atau lokasi pada suatu variabel. Jika pengamatan $y_1, y_2, \dots, y_n$ menunjukkan saling ketergantungan terhadap ruang, maka data tersebut dikatakan terautokorelasi secara spasial. Lembo (2006) menyatakan bahwa autokorelasi spasial merupakan korelasi antara variabel dengan dirinya sendiri berdasarkan ruang atau dapat diartikan pula suatu ukuran kemiripan dari objek dalam suatu ruangan (jarak, waktu dan wilayah). Apabila terdapat pola sistematik dalam penyebaran variabel, maka terdapat autokorelasi spasial. Adanya autokorelasi spasial mengindikasi bahwa nilai atribut pada daerah tertentu terkait oleh nilai atribut tersebut pada daerah lain yang saling berdekatan (bertetanggaan).

Menurut Lembo (2006) jika terdapat pola spasial yang sistematik dalam sebaran spasial suatu atribut, maka dapat dikatakan bahwa terdapat autokorelasi spasial dalam atribut tersebut. Apabila suatu daerah yang saling berdekatan memiliki nilai yang sangat mirip, maka hal tersebut menunjukkan adanya autokorelasi positif, sedangkan apabila nilai pada daerah yang berdekatan tidak mirip, maka hal tersebut menunjukkan bahwa adanya autokorelasi negatif, dan apabila suatu nilai tersebar secara acak maka hal tersebut menunjukkan tidak adanya autokorelasi.

Adanya autokorelasi spasial dinyatakan seperti persamaan (2.14) sebagai berikut:

$$Cov(Y_i, Y_j) = E(Y_i, Y_j) - E(Y_j).E(Y_j)$$

$$Cov(Y_i, Y_j) \neq 0$$

$$i \neq j \quad (2.\ 14)$$

dimana y_i dan y_j adalah pengamatan pada variabel acak pada lokasi i dan j berdasarkan ruang dan i, j adalah titik, misalnya balai kota, pasar atau alun-alun kota (diukur sebagai lintang dan bujur) atau dapat juga berupa area, misalnya negara, kabupaten atau kota dan kecamatan (Anselin, 2001).

2.5 *Local Indicator of Spatial Autocorrelation* (LISA)

Local Indicator of Spatial Autocorrelation (LISA) adalah metode yang digunakan untuk pengidentifikasian koefisien *autocorrelation* secara lokal (*local autocorrelation*) atau korelasi spasial pada setiap wilayah. Menurut Lee dan D. W. S (2011), "Semakin tinggi nilai lokal maka akan memberikan informasi bahwa wilayah yang berdekatan memiliki nilai yang hampir sama atau membentuk suatu penyebaran yang mengelompok". Untuk rumus dengan pengujian LISA dalam persamaan (2.15) sebagai berikut (Lee & Wong, 2001):

$$I_i = z_i \sum_{i=1}^{n} w_{ij} z_j \quad (2.\ 15)$$

dimana

$$z_i = \frac{(x_i - \bar{x})}{\sigma_x}$$

$$z_j = \frac{(x_j - \bar{x})}{\sigma_x}$$

dengan σ_x adalah nilai standar deviasi dari variabel prediktor.

Berikut adalah hipotesis untuk pengujian autokorelasi spasial menggunakan metode *Local Indicator of Spatial Autocorrelation* (LISA) (Lee & Wong, 2001):

$H_0: I_i = 0$ (tidak ada autokorelasi pada lokasi ke-i)

$H_1: I_i \neq 0$ (ada autokorelasi pada lokasi ke-i)

untuk i merupakan masing-masing wilayah atau lokasi ke-i, dimana $i = 1,2,3 \dots, n$ dan statistik uji LISA dituliskan dalam persamaan (2.17) berikut (Lee & Wong, 2001):

$$Z_{hitung} = \frac{I_i - E(I_i)}{\sqrt{var(I_i)}} \qquad (2.\ 16)$$

dengan variansi dan ekspetasi dari indeks LISA ke-i, I_i dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$var(I_i) = w_i^{(2)} \frac{\left(n - \frac{m_4}{m_2^2}\right)}{n-1} - 2\, w_{i(kh)} \frac{\left(\frac{2m_4}{m_2^2 - n}\right)}{(n-1)(n-2)} - \frac{w_i^2}{(n-1)^2}$$

$$E(I_i) = -\frac{w_i}{n-1}$$

dan

$$w_i^2 = \sum_{i=1}^{n} w_{ij}^2\,, i \neq j$$

$$w_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} w_{ij}^2\right)^2$$

$$w_{i(kh)} = \sum_{k \neq i}^{n} \sum_{h \neq i}^{n} w_{ik} w_{ih}.$$

Daerah penolakan untuk pengujian autokorelasi spasial yakni jika nilai $|Z_{hitung}| > Z_{\frac{\alpha}{2}}$ atau $p - value\ < \alpha$ makan H_0 ditolak yang artinya lokasi atau wilayah ke-i terindikasi adanya autokorelasi spasial (Lee & Wong, 2001).

2.6 Penentuan Matriks Pembobot

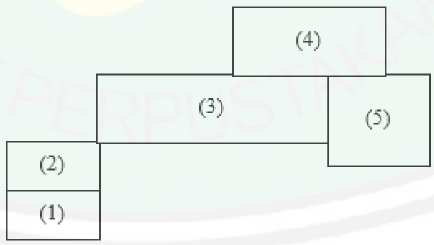
Pada analisis spasial, pembobot merupakan suatu hal yang dibutuhkan karena pembobot merupakan alat untuk mewakili letak data suatu pengamatan satu dengan pengamatan yang lainnya. Selain itu matriks pembobot spasial juga berperan dalam pengujian autokorelasi spasial dan analisis regresi karena ketika melakukan pendugaan parameter spasial maka pendugaan tersebut akan bergantung pada matriks pembobot spasial $\boldsymbol{W}$ yang telah ditetapkan (LeSage, 2008).

Menurut LeSage (2008), pemilihan matriks pembobot pada model spasial ($\boldsymbol{W}$) dapat diperoleh berdasarkan informasi jarak dari ketetanggan (*neighborhood*) atau jarak antar satu wilayah dengan wilayah lainnya. Terdapat beberapa alternatif untuk mendefinisikan hubungan persinggungan antar wilayah tersebut antara lain (LeSage, 2008):

1. *Linier Contiguity* (persinggungan tepi) dimana mendefinisikan $W_{ij} = 1$ untuk *region* yang berada di tepi (*edge*) kiri ataupun kanan *region* yang menjadi perhatian, $W_{ij} = 0$ untuk *region* lainnya.
2. *Rook Contiguity* (persinggungan sisi) dimana mendefinisikan $W_{ij} = 1$ untuk *region* yang bersisian (*common side*) dengan *region* yang menjadi perhatian, $W_{ij} = 0$ untuk *region* lainnya.

3. *Bhisop Contiguity* (persinggungan sudut) dimana mendefinisikan $W_{ij} = 1$ untuk *region* yang titik sudutnya (*common vertex*) bertemu dengan sudut *region* yang menjadi perhatian, $W_{ij} = 0$ untuk *region* lainnya.
4. *Double Linear Contiguity* (persingungan dua tepi) dimana mendefinisikan $W_{ij} = 1$ untuk dua *entity* yang berada di sisi (*edge*) kiri dan kanan *region* yang menjadi perhatian, $W_{ij} = 0$ untuk *region* lainnya.
5. *Double Rook Contiguity* (persinggungan dua sisi) dimana mendefinisikan $W_{ij} = 1$ untuk dua *entity* di kiri, kanan, atas dan bawah *region* yang menjadi perhatian, $W_{ij} = 0$ untuk *region* lainnya.
6. *Queen Contiguity* (persinggungan sisi-sudut) dimana mendefinisikan $W_{ij} = 1$ untuk *entity* yang bersisian (*common side*) atau titik sudutnya (*common vertex*) bertemu dengan *region* yang menjadi perhatian, $W_{ij} = 0$ untuk *region* lainnya.

Sebagai contoh, perhatikan Gambar 2.1 yang merupakan gambaran dari lima wilayah yang tampak seperti Gambar 2.1 dibawah ini:



Gambar 2.1 Contoh ilustrasi 5 wilayah

Apabila digunakan metode *rook contiguity* maka diperoleh matriks susunan berukuran 5×5 sebagai berikut:

$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dimana baris dan kolom menyatakan wilayah yang ada pada peta. Matriks pembobot spasial merupakan matriks simetris, dengan aturan bahwa diagonal utama selalu nol dalam pembentukan matriks pembobot. Sehingga dilakukan transformasi untuk mendapatkan jumlah baris, yaitu jumlah baris yang sama dengan satu. Agar lebih mudah digambarkan, maka matriks pembobot spasial yang telah terbentuk kemudian distandarkan sehingga pada tiap baris elemen-elemen pada matriks akan bernilai antara 0 dan 1 melalui perhitungan:

$$W_{ij(std)} = \frac{W_{ij}}{\sum W_{ij}}$$

dimana $W_{ij(std)}$ adalah elemen pada matriks pembobot yang terstandarkan, sehingga diperoleh bentuk matriks pembobot spasial yang distandarkan yakni:

$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

2.7 Matriks dan Operasi Matriks

Matriks adalah susunan dari bilangan atau elemen yang disusun menurut baris dan kolom. Matriks yang mempunyai m baris dan n kolom disebut matriks berukuran atau berordo $m \times n$. Bilangan yang disusun pada matriks disebut entri pada matriks (Anton & Rorres, 2010). Biasanya matriks disimbolkan dengan huruf kapital dan entrinya disimbolkan dengan huruf non kapital. Matriks $\boldsymbol{B}$ yang berukuran $p \times q$ dapat ditulis dengan $\boldsymbol{B}_{p\times q}$. Berikut merupakan bentuk umum matriks $\boldsymbol{B}$ berukuran $p \times q$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pq} \end{bmatrix}.$$

Matriks yang memiliki satu baris disebut matriks baris, sedangkan matriks yang memiliki satu kolom disebut matriks kolom (Anton & Rorres, 2010). Matriks baris $\boldsymbol{B}$ ditulis dengan $\boldsymbol{B}_{1\times q}$ dan matriks kolom $\boldsymbol{B}$ ditulis dengan $\boldsymbol{B}_{p\times 1}$. Berikut merupakan bentuk umum matriks baris $\boldsymbol{B}$ dan matriks kolom $\boldsymbol{C}$

$$\boldsymbol{B} = [b_{11} \quad b_{12} \quad \cdots \quad b_{1q}] \text{ dan } \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{p1} \end{bmatrix}.$$

Matriks dengan jumlah baris sama dengan jumlah kolom disebut matriks persegi atau matriks bujur sangkar. Jika matriks persegi $\boldsymbol{B}$ berukuran $p \times q$ maka $p = q$ (Anton & Rorres, 2010).

2.7.1 Operasi Matriks

2.7.1.1 Penjumlahan Matriks

Penjumlahan dua matriks yang berukuran sama adalah penjumlahan bersama-sama elemen yang bersesuaian dalam kedua matriks tersebut. Menurut Anton dan Rorres (2010) jika dua matriks $\boldsymbol{B} = [b_{ij}]$ dan $\boldsymbol{C} = [c_{ij}]$ berukuran sama, maka jumlah matriks $\boldsymbol{B}$ dengan matriks $\boldsymbol{C}$ yang ditulis $\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}$ diperoleh dari penjumlahan elemen dari matriks $\boldsymbol{C}$ yang bersesuaian dengan elemen matriks $\boldsymbol{B}$. Matriks $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$ mempunyai ukuran sama $p \times q$ dapat ditulis

$$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pq} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1q} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{p1} & c_{p2} & \cdots & c_{pq} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} b_{11}+c_{11} & b_{12}+c_{12} & \cdots & b_{1q}+c_{1q} \\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22} & \cdots & b_{2q}+c_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{p1}+c_{p1} & b_{p2}+c_{p2} & \cdots & b_{pq}+c_{pq} \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan uraian di atas diketahui bahwa ordo yang sama menjadi syarat perlu yang harus dipenuhi agar penjumlahan dua matriks atau lebih dapat terpenuhi.

2.7.1.2 Pengurangan Matriks

Pengurangan dua matriks yang berukuran sama adalah pengurangan bersama-sama elemen yang bersesuaian dalam kedua matriks tersebut. Menurut Anton dan Rorres (2010) jika dua matriks $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$ dan $\boldsymbol{C}=[c_{ij}]$ berukuran sama, maka selisih matriks $\boldsymbol{B}$ dengan matriks $\boldsymbol{C}$ yang ditulis $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}$ diperoleh dari pengurangan elemen dari matriks $\boldsymbol{C}$ yang bersesuaian dengan elemen matriks $\boldsymbol{B}$. Matriks $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}$ mempunyai ukuran sama $p \times q$ dapat ditulis

$$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pq} \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1q} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{p1} & c_{p2} & \cdots & c_{pq} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} b_{11}-c_{11} & b_{12}-c_{12} & \cdots & b_{1q}-c_{1q} \\ b_{21}-c_{21} & b_{22}-c_{22} & \cdots & b_{2q}-c_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{p1}-c_{p1} & b_{p2}-c_{p2} & \cdots & b_{pq}-c_{pq} \end{bmatrix}.$$

2.7.1.3 Perkalian Matriks dengan Skalar

Hasil kali matriks $\boldsymbol{B}$ dengan skalar k yang ditulis $k\boldsymbol{B}$ adalah matriks dari perkalian setiap elemen dari $\boldsymbol{B}$ dengan k (Lipschutz & Lipson, 2009). Hasil kali matriks B dengan skalar k dapat ditulis

$$k\boldsymbol{B} = k[b_{ij}] = [kb_{ij}] = \begin{bmatrix} kb_{11} & kb_{12} & \cdots & kb_{1q} \\ kb_{21} & kb_{22} & \cdots & kb_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ kb_{p1} & kb_{p2} & \cdots & kb_{pq} \end{bmatrix}.$$

2.7.1.4 Perkalian Matriks

Jika matriks $\boldsymbol{B}$ berukuran $p \times r$ dan matriks $\boldsymbol{C}$ berukuran $r \times q$, maka hasil kali matriks $\boldsymbol{BC}$ berukuran $p \times q$ yang elemennya ditentukan sebagai berikut: untuk mencari elemen pada baris i dan kolom j dari $\boldsymbol{BC}$, sendirikan baris i dari matriks $\boldsymbol{B}$ dan kolom j dari matriks $\boldsymbol{C}$. Kalikan elemen dari baris dan kolom yang bersesuaian bersama-sama, kemudian jumlahkan hasilnya (Anton & Rorres, 2010). Hasil kali matriks $\boldsymbol{B}$ dengan matriks $\boldsymbol{C}$ dapat ditulis

$$\boldsymbol{B} = [b_{ij}] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rp} \end{bmatrix}.$$

dan

$$\boldsymbol{C} = [c_{ij}] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1q} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & c_{r2} & \cdots & c_{rq} \end{bmatrix}$$

Elemen $(bc)_{ij}$ pada baris i dan kolom j dari $\boldsymbol{BC}$ diberikan oleh

$$(bc)_{ij} = b_{i1}c_{1j} + b_{i2}c_{2j} + \cdots + b_{ir}c_{rj},$$

untuk setiap $i = 1, 2, 3, \cdots, p$ dan $j = 1, 2, 3, \cdots, q$.

2.7.2 Transpos dan Invers Matriks

2.7.2.1 Transpos Matriks

Jika $\boldsymbol{B}$ adalah sebarang matriks $p \times q$, maka transpos $\boldsymbol{B}$ dinyatakan sebagai $\boldsymbol{B}^T$ dan didefinisikan dengan matriks $p \times q$ yang kolom pertamanya adalah baris pertama dari $\boldsymbol{B}$, kolom keduanya adalah baris kedua dari $\boldsymbol{B}$, kolom ketiga adalah baris ketiga dari $\boldsymbol{B}$, dan seterusnya (Anton & Rorres, 2010). Transpos dari matriks $\boldsymbol{B}$ dapat ditulis sebagai berikut:

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pq} \end{bmatrix}$$

dan

$$\boldsymbol{B}^T = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{p1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{p2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{1q} & b_{2q} & \cdots & b_{pq} \end{bmatrix}.$$

2.7.2.2 Invers Matriks

Jika matriks bujur sangkar $\boldsymbol{B}$ dikalikan dengan matriks bujur sangkar $\boldsymbol{C}$ yang berukuran sama, menghasilkan matriks identitas, yaitu: $\boldsymbol{BC} = \boldsymbol{BC} = \boldsymbol{I}$, maka $\boldsymbol{B}$ merupakan invers dari $\boldsymbol{C}$, atau sebaliknya. Maka notasi yang digunakan adalah $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}^{-1}$, sehingga $\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{I}$ (Andrianto & Prijono, 2006).

2.7.3 Pendiferensialan Matriks

Misal $\boldsymbol{b}^T = [b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_p]$ merupakan vektor baring berisi angka dan $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_p \end{bmatrix}$ adalah vektor kolom dari variabel $v_1, v_2, \dots, v_p$, maka (Gujarati, 2010),

$$\frac{\partial(\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{v})}{\partial \boldsymbol{b}} = b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix}$$

Bukti:

$$\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{v} = [b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_p]\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_p \end{bmatrix} = \left[b_1v_1 + b_2v_1 + \cdots + b_pv_p\right]$$

$$\frac{\partial(\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{v})}{\partial \boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\left(b_1v_1 + b_2v_1 + \cdots + b_pv_p\right)}{\partial v_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial\left(b_1v_1 + b_2v_1 + \cdots + b_pv_p\right)}{\partial v_p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}$$

Perhatikan matriks $\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{v}$ sedemikian sehingga

$$\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{v} = [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_p]\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pp} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_p \end{bmatrix}$$

maka,

$$\frac{\partial(\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{v})}{\partial \boldsymbol{v}} = 2\boldsymbol{B}\boldsymbol{v}$$

yang merupakan vektor kolom dari p elemen, atau

$$\frac{\partial(\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{v})}{\partial \boldsymbol{v}} = 2\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{B}$$

yang merupakan vektor baris dari p elemen.

Bukti:

$$\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{v} = [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_p]\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pp} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_p \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} b_{ij}v_iv_j = b_{ii}{v_i}^2 + 2v_i\sum_{\substack{i=1 \\ j\neq j}}^{p} b_{ij}v_j + \sum_{h\neq i}\sum_{j\neq i} b_{hj}v_hv_j$$

Turunkan terhadap $\boldsymbol{v}$ elemen ke-k sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial(\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{v})}{\partial v} = \sum_{j=1}^{p} b_{kj}v_j + \sum_{i=1}^{p} b_{ik}v_i$$

Untuk $k = 1,2,\dots,p$ menghasilkan

$$\frac{\partial(\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{v})}{\partial v_k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{v})}{\partial v_1} \\ \frac{\partial(\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{v})}{\partial v_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial(\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{v})}{\partial v_p} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (b_{11} + b_{12} + \cdots + b_{1p})v_1 + (b_{11} + b_{21} + \cdots + b_{p1}v_p) \\ (b_{21} + b_{22} + \cdots + b_{2p})v_2 + (b_{12} + b_{22} + \cdots + b_{p2}v_p) \\ \vdots \\ (b_{p1} + b_{p2} + \cdots + b_{pp})v_p + (b_{1p} + b_{2p} + \cdots + b_{pp}v_p) \end{bmatrix}$$

$$= \boldsymbol{B}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^T)\boldsymbol{v}$$

Karena $\boldsymbol{B}$ matriks simetris, dimana $\boldsymbol{B}^T = \boldsymbol{B}$, maka didapatkan:

$$\frac{\partial(\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{v})}{\partial v_k} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{B}\boldsymbol{v}$$

2.8 Estimasi Parameter Regresi Linier dengan Metode Maksimum *Likelihood*

Metode maksimum *likelihood* merupakan salah satu metode untuk menduga koefisien parameter model regresi, salah satunya juga dapat menduga parameter model regresi spasial. Untuk fungsi *likelihood*, nilai parameter yang memaksimalkan nilai fungsi disebut estimator maksimum *likelihood*.

Aziz (2010) menjelaskan bahwa persamaan regresi dapat diperoleh dari persamaan (2.2) yang dapat ditulis sebagai berikut:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2. 17}$$

Misalkan $\boldsymbol{X}$ vektor $1 \times (k+1)$, untuk $1 = 1,2,\dots,n$ dan $\boldsymbol{y} \sim N(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\beta},\sigma^2)$. Jika diberikan $\boldsymbol{X},\boldsymbol{\beta}$ dan σ^2 dan diasumsikan $y_1, y_2, \dots, y_n$ saling bebas, maka fungsi distribusi peluang gabungan dari y_i adalah (Aziz, 2010):

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{X},\boldsymbol{\beta},\sigma^2) &= f(y_1, y_2, \dots, y_n|\boldsymbol{X},\boldsymbol{\beta},\sigma^2) \\
&= f(y_1\boldsymbol{X},\boldsymbol{\beta},\sigma^2) f(y_2\boldsymbol{X},\boldsymbol{\beta},\sigma^2) \cdots = f(y_n|\boldsymbol{X},\boldsymbol{\beta},\sigma^2) \\
&= \prod_{i=1}^{n} f(y_i|\boldsymbol{X},\boldsymbol{\beta},\sigma^2) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_i - \boldsymbol{X\beta}}{\sigma^2}\right)^2} \right) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^n e^{\sum_{i-1}^{n} -\frac{1}{2}\left(\frac{y_i - \boldsymbol{X\beta}}{\sigma^2}\right)^2} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^n e^{\sum_{i-1}^{n} -\frac{1}{2\sigma^2}(y_i - \boldsymbol{X\beta})^2} \\
&= \left(\sqrt{2\pi\sigma^2} \right)^{-n} e^{\sum_{i-1}^{n} -\frac{1}{2\sigma^2}(y_i - \boldsymbol{X\beta})^2} \\
&= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{\sum_{i-1}^{n} -\frac{1}{2\sigma^2}(y_i - \boldsymbol{X\beta})^2} \\
&= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(\sum_{i-1}^{n} -\frac{1}{2\sigma^2}(y_i - \boldsymbol{X\beta})^2 \right) \\
&= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta}) \right)
\end{aligned}
$$

Karena nilai β dan σ^2 tidak diketahui dan nilai data X dan y diketahui sehingga persamaan di atas menjadi fungsi *likelihood* sebagai berikut (Aziz, 2010):

$$
l(\beta,\sigma^2|\boldsymbol{X},\boldsymbol{y}) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta}) \right) \qquad (2.18)
$$

Selanjutnya, untuk mempermudah perhitungan nilai turunan fungsi *likelihood* maka fungsi tersebut diubah dalam bentuk logaritma sebagai berikut (Aziz, 2010):

$$L = \ln l$$

$$= -\frac{n}{2}(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})$$

$$= -\frac{n}{2}(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}(\boldsymbol{y}' - \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}')\,(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})$$

$$= -\frac{n}{2}(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}(\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}'\boldsymbol{X\beta} - \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X\beta})$$

$$= -\frac{n}{2}(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}(\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - (\boldsymbol{y}'\boldsymbol{X\beta})' - \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X\beta})$$

$$= -\frac{n}{2}(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}(\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X\beta})$$

$$= -\frac{n}{2}(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}(\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - 2\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X\beta}) \quad (2.\ 19)$$

2.8.1 Estimasi Parameter $\boldsymbol{\beta}$

Untuk mendapatkan estimator β yang dinotasikan $\hat{\beta}$ yakni dengan memaksimumkan fungsi *log-likelihood* terhadap β dengan mendifferensialkan fungsi *log-likelihood* terhadap β, kemudian disamadengankan dengan nol (Aziz, 2010).

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = \frac{\partial\left(-\frac{n}{2}(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}(\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - 2\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X\beta})\right)}{\partial\beta}$$

$$= \frac{\partial}{\partial\beta}\left(-\frac{n}{2}(2\pi\sigma^2)\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} + \frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} - \frac{1}{2\sigma^2}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X\beta}\right)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial\beta}\left(-\frac{n}{2}(2\pi\sigma^2)\right) - \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{2\sigma^2}\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{2\sigma^2}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X\beta}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta'}\left(\frac{1}{2\sigma^2}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X\beta}\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2}(-2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + \boldsymbol{X}'\boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{X}'\boldsymbol{X\beta})$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2}(-2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + \boldsymbol{2X}'\boldsymbol{X\beta})$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}'\boldsymbol{X\beta})$$

Kemudian disamadenganakan dengan nol.

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = \frac{1}{\sigma^2}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}'\boldsymbol{X\beta})$$

$$0 = \frac{1}{\sigma^2}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}'\boldsymbol{X\beta})$$

$$0 = \frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} - \frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X\beta}$$

$$\frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X\beta} = \frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}$$

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X\beta} = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}$$

$$(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-\boldsymbol{1}}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}$$

$$\boldsymbol{I\beta} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}$$

$$\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}$$

Sehingga diperoleh nilai $\hat{\beta}$ sebagai berikut:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} \tag{2. 20}$$

Sedangkan turunan kedua dar β selalu bernilai negatif, sehingga β merupakan nilai maksimum global untuk fungsi *log-likelihood*, sehingga turunan keduanya adalah sebagai berikut (Aziz, 2010):

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \beta' \partial \beta} = \frac{\mathbf{X'X}}{\sigma^2} \tag{2. 21}$$

2.7.2 Estimasi Parameter $\boldsymbol{\sigma^2}$

Untuk mendapatkan estimator σ^2 yang dinotasikan $\widehat{\sigma^2}$ yakni dengan memaksimumkan fungsi *log-likelihood* terhadap σ^2 dengan mendifferensialkan fungsi *log-likelihood* terhadap σ^2, kemudian disamadengankan dengan nol (Aziz, 2010).

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma^2} = \frac{\partial\left(-\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}(\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - 2\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})\right)}{\partial \sigma^2}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \sigma^2}\left(-\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} + \frac{1}{2\sigma^2}2\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} - \frac{1}{2\sigma^2}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \sigma^2}\left(-\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2)\right) - \frac{\partial}{\partial \sigma^2}\left(\frac{1}{2\sigma^2}\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y}\right) + \frac{\partial}{\partial \sigma^2}\left(\frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}\right)$$

$$- \frac{\partial}{\partial \sigma^2}\left(\frac{1}{2\sigma^2}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \sigma^2}\left(-\frac{n}{2}\ln(2\pi)\right) + \frac{\partial}{\partial \sigma^2}\left(-\frac{n}{2}\ln(\sigma^2)\right) - \frac{\partial}{\partial \sigma^2}\left(\frac{1}{2\sigma^2}\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y}\right)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \sigma^2}\left(\frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}\right) - \frac{\partial}{\partial \sigma^2}\left(\frac{1}{2\sigma^2}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}\right)$$

$$= 0 - \frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - \frac{1}{(\sigma^2)^2}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}$$

$$= -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - \frac{1}{(\sigma^2)^2}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}$$

Lalu $\frac{\partial L}{\partial \sigma^2}$ disamadengankan dengan nol.

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - \frac{1}{(\sigma^2)^2}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}$$

$$0 = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - \frac{1}{(\sigma^2)^2}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}$$

$$\frac{n}{2\sigma^2} = \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - \frac{1}{(\sigma^2)^2}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}$$

$$\frac{n}{2\sigma^2} = \frac{1}{2(\sigma^2)^2}(\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})$$

$$\frac{n\sigma^2}{2(\sigma^2)^2} = \frac{1}{2(\sigma^2)^2}(\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})$$

$$n\sigma^2 = (\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}(\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})$$

$$= \frac{1}{n}(\boldsymbol{y}' - \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}')\,(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})$$

$$= \frac{1}{n}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})$$

Sedangkan turunan kedua dari σ^2 selalu bernilai negatif, sehingga $\boldsymbol{\sigma}^2$ merupakan nilai maksimum global untuk fungsi *log-likelihood*, sehingga turunan keduanya adalah sebagai berikut (Aziz, 2010):

$$\frac{\partial L}{\partial(\sigma^2)^2} = \frac{\partial}{\partial\sigma^2}\left(-\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - \frac{1}{(\sigma^2)^2}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial\sigma^2}\left(-\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}(\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})\right)$$

$$= \frac{n}{2(\sigma^2)^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^3}(\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})$$

$$= \frac{n}{2(\sigma^2)^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^3}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})$$

$$= \frac{n}{2(\sigma^2)^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^3}z'z$$

$$= \frac{n}{2(\sigma^2)^2} + \frac{z'z}{2(\sigma^2)^3}$$

$$= \frac{n}{2\sigma^4} + \frac{z'z}{2\sigma^6}$$

$$= \frac{n}{2\sigma^4} + \frac{z'z}{2\sigma^6}$$

$$= \frac{1}{\sigma^4}\left(\frac{n}{2} + \frac{z'z}{2\sigma^2}\right)$$

Karena hasil turunan kedua dari σ^2 belum tentu bernilai negatif, maka belum bisa dipastikan bahwa σ^2 yang diperoleh adalah nilai maksimum (Aziz, 2010).

2.9 Sifat Estimasi

2.9.1 Tidak Bias

Menurut Yitnosumarto (1990) tujuan estimasi yakni estimasi harus mendekati nilai sebenarnya dari parameter yang diduga. Misal terdapat parameter β dan $\hat{\beta}$ adalah estimasi tak bias dari parameter β, maka

$$E[\hat{\beta}] = \beta \tag{2. 22}$$

Berikut pembuktian sifat tak bias untuk parameter pada *maximum likelihood* (Aziz, 2010):

1. $$\begin{aligned} E(\hat{\beta}_{ml}) &= E\left((\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y})\right) \\ &= E\left((\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\left(\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{X\beta}+\boldsymbol{\varepsilon})\right)\right) \\ &= E((\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X\beta} + (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\varepsilon}) \\ &= E(\boldsymbol{I\beta} + \boldsymbol{I\varepsilon}) \\ &= E(\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}) \\ &= E(\boldsymbol{\beta}) + E(\boldsymbol{\varepsilon}) \\ &= \boldsymbol{\beta} + 0 \\ &= \boldsymbol{\beta} \end{aligned}$$

Karena nilai $E(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{ml}) = \boldsymbol{\beta}$ maka parameter $\boldsymbol{\beta}$ bersifat tak bias.

2. $E(\hat{\sigma}^2{}_{ml}) = E\left(\frac{\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}}{n}\right)$

Bukti:

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon} &= \boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} \\ &= \boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}) \end{aligned}$$

$= [\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}']\boldsymbol{y}$

$= \boldsymbol{My}$

$= \boldsymbol{M}(\boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon})$

$= \boldsymbol{MX\beta} + \boldsymbol{M}\varepsilon$

$= [\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}']\boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{M\varepsilon}$

$= \boldsymbol{I}_n\boldsymbol{X\beta} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{M\varepsilon}$

$= \boldsymbol{X\beta} - \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{M}\varepsilon$

$= \boldsymbol{M\varepsilon}$

sehingga

$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\boldsymbol{M\varepsilon})'(\boldsymbol{M\varepsilon})$

$= \boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{M}'\boldsymbol{M\varepsilon}$

$= \boldsymbol{\varepsilon}'[\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}']'[\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}']\boldsymbol{\varepsilon}$

$= \boldsymbol{\varepsilon}'[\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'][\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}']\boldsymbol{\varepsilon}$

$= \boldsymbol{\varepsilon}'[\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}' - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}' + \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}']\boldsymbol{\varepsilon}$

$= \boldsymbol{\varepsilon}'[\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}']\boldsymbol{\varepsilon}$

$= \boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{M\varepsilon}$

Jadi

$tr(\boldsymbol{M}) = tr[\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}']$

$= tr(\boldsymbol{I}_n) - tr(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}')$

$= tr(\boldsymbol{I}_n) - tr(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})$

$= tr(\boldsymbol{I}_n) - tr(\boldsymbol{I}_k)$

$= n - k$

Sehingga:

$$E(\hat{\sigma}^2{}_{ml}) = E\left(\frac{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n}E(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'\hat{\boldsymbol{\varepsilon}})$$

$$= \frac{1}{n}E\big(tr\ (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'\boldsymbol{M}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}})\big)$$

$$= \frac{1}{n}E\big(tr\ (\boldsymbol{M}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'\hat{\boldsymbol{\varepsilon}})\big)$$

$$= \frac{1}{n}tr\ (\boldsymbol{M})E(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'\hat{\boldsymbol{\varepsilon}})$$

$$= \frac{1}{n}(n-k)\hat{\sigma}^2$$

Karena nilai $E(\hat{\sigma}^2{}_{ml}) \neq \hat{\sigma}^2$ maka parameter $\hat{\sigma}^2$ bersifat bias.

2.8.2 Konsisten

Suatu penduga dikatakan konsisten jika ukuran sampel semakin bertambah, maka penduga akan mendekati parameternya. Jika besar sampel menjadi tak terhingga maka penduga konsisten harus dapat memberi suatu penduga titik yang sempurna terhadap parameternya. Jadi $\hat{a}$ merupakan penduga konsisten, jika dan hanya jika:

$$E\big(\hat{a} - E(\hat{a})\big)^2 \rightarrow 0 \text{ jika } n \rightarrow \infty \qquad (2.\ 23)$$

2.8.3 Efisien

Suatu penduga $(\hat{\beta})$ dikatakan efisien apabila penduga tersebut mempunyai variansi yang kecil. Apabila terdapat lebih dari satu penduga, penduga yang efisien adalah penduga yang mempunyai variansi terkecil.

$$Var(\hat{\beta}) = E\left(\hat{\beta} - E(\hat{\beta})\right)^2$$

$$= E\left[\left(\hat{\beta} - E(\hat{\beta})'\left(\hat{\beta} - E(\hat{\beta})\right)\right)\right] \qquad (2.\ 24)$$

2.10 Estimasi Parameter Regresi Spasial

Menurut Anselin (1998) proses spasial seperti pada persamaan (2.10) dapat dibentuk menjadi persamaan (2.25) sebagai berikut:

$$\boldsymbol{y} = \rho \boldsymbol{W}_1 \boldsymbol{y} + \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{y} - \rho \boldsymbol{W}_1 \boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$(\boldsymbol{I} - \rho \boldsymbol{W}_1)\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = A\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta} \tag{2. 25}$$

dimana: $A = \boldsymbol{I} - \rho \mathbf{W}_1$**,** lalu persamaan (2.10) dibentuk menjadi persamaan (2.26) sebagai berikut:

$$\boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{W}_2 \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{u} - \lambda \boldsymbol{W}_2 \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$(\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W}_2)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2. 26}$$

Misalkan $\boldsymbol{I} - \lambda \mathbf{W}_2 = \mathrm{B}$ sehingga

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W}_2}$$

dengan variansi kovarian *error* adalah:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W}_2)^{-1}\boldsymbol{u} \tag{2. 27}$$

$var(\boldsymbol{\varepsilon}) = \Sigma$ atau dapat dinyatakan dengan matriks variansi kovarian adalah:

$$E[\boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\varepsilon}] = \Sigma \tag{2. 28}$$

karena merupakan *error* yang diasumsikan memiliki rata-rata nol dan ragam Σ yang masing-masing elemen diagonalnya bernilai σ^2, sehingga ditransformasikan dalam bentuk persamaan normal baku $\boldsymbol{v} \sim N(0,1)$ dengan elemen diagonalnya bernilai 1. Maka persamaan (2.27) diubah dalam model berikut:

$$\boldsymbol{v} = \Sigma^{-1/2}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{2. 29}$$

dengan vektor *error* acak $\boldsymbol{v} \sim N(0,1)$, sehingga vektor *error* $\boldsymbol{u}$ pada persamaan (2.27) menjadi

$$\boldsymbol{u} = B^{-1}\Sigma^{-1/2}\boldsymbol{v} \tag{2. 30}$$

dengan mensubstitusikan persamaan (2.30) pada persamaan (2.25), maka diperoleh $A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + B^{-1}\Sigma^{1/2}\boldsymbol{v}$ atau dapat ditulis

$$\boldsymbol{v} = \Sigma^{-\frac{1}{2}}B(A\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta}) \tag{2. 31}$$

$$E[\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{v}] = 1$$

Sehingga $\boldsymbol{v}$ merupakan vektor dari *error* yang bersifat saling bebas.

Transformasi vektor peubah acak $\boldsymbol{v}$ menjadi vektor peubah $\boldsymbol{y}$ dilakukan melalui matriks Jacobian.

$$J = \det\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{y}}\right)$$

$$= \det\left(\frac{\partial A\boldsymbol{y}\Sigma^{-\frac{1}{2}}B - \boldsymbol{X\beta}\Sigma^{-\frac{1}{2}}B}{\partial \boldsymbol{y}}\right)$$

$$= \det\left(\left(\frac{\partial A\boldsymbol{y}\Sigma^{-\frac{1}{2}}B}{\partial \boldsymbol{y}}\right) - \left(\frac{\partial \boldsymbol{X\beta}\Sigma^{-\frac{1}{2}}B}{\partial \boldsymbol{y}}\right)\right)$$

$$= \det\left(\Sigma^{-\frac{1}{2}}BA\right) - 0$$

Sehingga persamaan (2.29) menjadi

$$\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{I} - \lambda\boldsymbol{W})^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}$$

$$(\boldsymbol{I} - \lambda\boldsymbol{W})^{-1}\boldsymbol{\varepsilon} = \det\left(\Sigma^{-\frac{1}{2}}BA\right)$$

$$\det\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{y}}\right) = \left|\Sigma^{-\frac{1}{2}}BA\right| = \Sigma^{-\frac{1}{2}}|B||A| \tag{2. 32}$$

Berdasarkan sebaran normal baku gabungan pada vektor $\boldsymbol{v}$ maka fungsi *log likelihood* untuk gabungan vektor observasi $\boldsymbol{y}$ diperoleh sebagai berikut:

$$\boldsymbol{L(y|\beta,1)} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathbf{exp}\left(-\frac{1}{2}\left((\boldsymbol{Ay}-\boldsymbol{X\beta})\boldsymbol{B\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right)^{T}\left((\boldsymbol{Ay}-\boldsymbol{X\beta})\boldsymbol{B\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right)\right)$$

(2. 33)

Fungsi *likelihood* (L) yang didefinisikan sebagai fungsi kepadatan bersama dari random *error*, ketika *random error* diasumsikan *independent*, maka distribusi peluang dari y terhadap β dan σ^2 merupakan hasil dari fungsi tersendiri (*marjinal*) dimana $i = 1,2,3,\dots,n$, maka persamaan (2.34) dinyatakan sebagai berikut:

$$L(y|\beta,1) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}(A\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})^{T}B^{T}\Sigma^{-\frac{1}{2}}B(A\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})\right)\right. \qquad (2.\ 34)$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right]^{n}\exp\left(-\frac{1}{2}(A\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})^{T}B^{T}\Sigma^{-\frac{1}{2}}B(A\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})\right)$$

$$= \left[\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\right]^{n}\exp\left(-\frac{1}{2}(A\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})^{T}B^{T}\Sigma^{-\frac{1}{2}}B(A\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})\right) \qquad (2.\ 35)$$

Selanjutnya persamaan (2.29) diubah kedalam fungsi *likelihood* sebagai berikut:

$$\ln L(\boldsymbol{\beta},\sigma^2|\boldsymbol{y}) = \ln(2\pi)^{-\frac{n}{2}} - \frac{1}{2}(A\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})^{T}\Sigma^{-\frac{1}{2}}B(A\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta}) \qquad (2.\ 36)$$

Selanjutnya jumlahkan persamaan (2.36) dan persamaan (2.32)

$$\det\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{y}}\right) = \left|\Sigma^{-\frac{1}{2}}BA\right| = \Sigma^{-\frac{1}{2}}|B||A|$$

$$= -\frac{n}{2}\ln(2\pi) + \ln\Sigma^{-\frac{1}{2}}|B||A| - \frac{1}{2}(A\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})^{T}\Sigma^{-\frac{1}{2}}B(A\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})$$

$$= -\frac{n}{2}\ln(2\pi) + \ln\Sigma^{-\frac{1}{2}}|B| + \ln|A| - \frac{1}{2}(A\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})^{T}\Sigma^{-\frac{1}{2}}B(A\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})$$

$$= -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln\Sigma\ + \ln|B| + \ln|A| - \frac{1}{2}(A\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})^T\Sigma^{-\frac{1}{2}}B(A\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\beta) \tag{2. 37}$$

dimana $\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{v} = (A\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})^T B^T\Sigma^{-\frac{1}{2}}B(A\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})$ merupakan jumlah kuadrat *error*. Syarat determinan dari matriks Jacobian terpenuhi yakni $\left|\Sigma^{-\frac{1}{2}}BA\right| > 0$, atau secara parsial memenuhi syarat sebagai berikut:

$$|\boldsymbol{I} = \rho\mathbf{W}_1| > 0$$

$$|\boldsymbol{I} = \lambda\mathbf{W}_2| > 0$$

$$\sum_{ii} > 0\,,\forall i$$

Penduga maksimum *likelihood* dengan cara mengambil turunan pertama secara parsial dari *log likelihood* pada persamaan terhadap masing-masing parameter β, σ^2, ρ, dan λ.

2.11 Uji Rasio *Likelihood*

Misalkan $x_1, x_2, \dots, x_n$ menyatakan n peubah acak saling bebas yang memiliki masing-masing fungsi kepadatan peluang $f_i(x_i; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n); \boldsymbol{i} = 1,2, \dots, n$. Deret yang terdiri dari semua titik parameter $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ dinotasikan dengan Ω, dimana Ω merupakan sebuah parameter. Misal ω adalah himpunan bagian dari parameterΩ. Dengan hipotesis $H_0: (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \in \omega$, jika tidak maka merupakan hipotesis alternatif (Hogg & Craig, 1978).

Definisi

$$L(\omega) = f_i(x_i; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n), (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \in \omega$$

dan

$$L(\Omega) = f_i(x_i; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n), (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \in \Omega.$$

Misal $L(\widehat{\omega})$ dan $L(\widehat{\Omega})$ maksimum, maka diasumsikan terdapat dua fungsi kemungkinan. Rasio $L(\widehat{\omega})$ dan $L(\widehat{\Omega})$ disebut rasio kemungkinan (*likelihood ratio*) dan dinotasikan sebagai berikut:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{L(\widehat{\omega})}{L(\widehat{\Omega})}$$

Misalkan, hipotesis yang diuji yakni:

$$H_0: \beta = \beta_0$$

$$H_0: \beta \neq \beta_0$$

Untuk sampel acak $y_1, y_2, \dots, y_n$ dengan $y = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ dan $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I_n)$, maka fungsi *likelihood* (Aziz, 2010),

$$L(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 | \boldsymbol{X}, \boldsymbol{y}) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[\frac{1}{2\sigma^2}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})^T(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})\right]$$

dan

$$L(\beta, \sigma^2 | \boldsymbol{X}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\beta} = \beta_0) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[\frac{1}{2\sigma^2}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\beta_0)^T(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\beta_0)\right]$$

sehingga estimasi untuk persamaan yakni

$$\hat{\beta} = (\boldsymbol{X^T X})^{-\mathbf{1}}(\boldsymbol{X^T y})$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}})^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}})$$

sedangkan estimasi persamaan yakni

$$\hat{\beta} = \beta_0$$

$$\hat{\sigma}^2 = -\frac{1}{n}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta_0})^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta_0})$$

sehingga dengan mensubtitusikan estimator ke fungsi maksimum *likelihood*

$$L(\widehat{\omega}) = \max[l(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 | \boldsymbol{X}, \boldsymbol{y})]$$

$$= \max\left[(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})\right]\right]$$

$$= (2\pi\hat{\sigma}^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\hat{\beta}}\right)^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\hat{\beta}})\right]$$

$$= \left(2\pi(\frac{1}{n}\left(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\hat{\beta}}\right)^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\hat{\beta}}))\right)^{-\frac{n}{2}}\exp\left[-\frac{\left(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\hat{\beta}}\right)^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\hat{\beta}})}{2\left(\frac{1}{n}\left(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\hat{\beta}}\right)^{\boldsymbol{T}}\left(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\hat{\beta}}\right)\right)}\right]$$

$$= \left(\frac{2\pi}{n}\left(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\hat{\beta}}\right)^{\boldsymbol{T}}\left(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\hat{\beta}}\right)\right)^{-\frac{n}{2}}\exp\left[-\frac{n}{2}\right]$$

$$L(\hat{\Omega}) = \max[l(\beta,\sigma^2|X,y,\boldsymbol{\beta}=\beta_0)]$$

$$= \left(\frac{2\pi}{n}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\beta_0)^T(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\beta_0)\right)^{-\frac{n}{2}}\exp\left[-\frac{n}{2}\right]$$

sehingga uji rasio *likelihood* adalah (Aziz, 2010):

$$\lambda = \frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})} = \left[\frac{\left(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\hat{\beta}}\right)^{\boldsymbol{T}}\left(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\hat{\beta}}\right)}{(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\beta_0)^T(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\beta_0)}\right]^{-\frac{n}{2}}$$

2.12 Signifikasi Parameter Regresi Spasial

Menurut Anselin (1988) *asymtotic normality* merupakan salah satu prinsip penduga maksimum *likelihood* yang berarti bahwa semakin besar ukuran pengamatan N maka kurva akan semakin mendekati kurva sebaran normal. Pengujian signifikasi parameter regresi (β) dan autoregresif spasial (λ dan ρ) secara spasial yaitu didasarkan pada nilai ragam *error* (σ^2) yang berasal dari distribusi asimtotik, sehingga statistik uji signifikasi parameter yang digunakan adalah:

$$Z_{hitung} = \frac{\boldsymbol{\hat{\theta}}}{s.b_{\hat{\theta}}} \qquad (2.\ 38)$$

dimana $s.b_{\hat{\theta}}$ adalah *asymptotic* standar *error*. Menggunakan uji parsial masing-masing parameter $\boldsymbol{\theta}$ dengan hipotesis:

$H_0: \boldsymbol{\theta} = 0$ artinya koefisien regresi layak digunakan pada model

$H_1: \boldsymbol{\theta} \neq 0$ artinya koefisien regresi layak digunakan pada model

dimana $\boldsymbol{\theta}$ merupakan koefisien regresi spasial (yaitu β, λ dan ρ). Titik kritis apabila $Z_{hitung} \geq Z_{\frac{\alpha}{2}}$ atau $p - value < \alpha$, maka keputusan tolak H_0, yang berarti koefisien regresi layak digunakan untuk model (Anselin, 2013).

2.13 Definisi Kemiskinan

Kemiskinan merupakan masalah yang multidimensional yang berarti kemiskinan memiliki banyak aspek seiring dengan faktor penyebabnya, indikator maupun permasalahan yang lain yang mempengaruhinya. Hal ini menunjukkan bahwa kemiskinan tidak hanya dipandang dari sisi perekonomian, namun telah meluas hingga pada segi sosial, pendidikan, politik dan kesehatan. Menurut *United Nation Development Progamme* atau biasa disingkat UNDP dalam Cahyat (2004) kemiskinan adalah ketakmampuan seseorang untuk memperluas pilihan hidup yakni dengan menyertakan penilaian terhadap tidak adanya partisipasi dalam pengikutsertaan pengambilan kebijakan publik sebagai salah satu indikator kemiskinan.

Menurut BPS (2016) kemiskinan adalah ketidakmampuan dari sisi ekonomi untuk memenuhi kebutuhan dasar makanan dan non makanan yang diukur dari sisi pengeluaran. Sehingga pengertian lain dari penduduk miskin yakni penduduk yang mempunyai rata-rata pengeluaran perkapita perbulan dibawah garis kemiskinan. Terdapat beberapa indikator yang menjadi alat ukur dalam menghitung indeks kemiskinan yakni presentasi penduduk miskin, garis kemiskinan, indeks keparahan kemiskinan dan indeks kedalaman kemiskinan.

Menurut BPS (2016) penduduk yang memiliki rata-rata pengeluaran perkapita perbulan dibawah garis kemiskinan dikategorikan sebagai penduduk miskin. Garis kemiskinan (GK) adalah jumlah dari Garis Kemiskinan Makanan (GKM) dan Garis Kemiskinan Non Makanan (GKNM). Garis Kemiskinan Makanan (GKM) adalah nilai pengeluaran kebutuhan minimum makanan yang setara dengan 2100 kilo kalori perkapita sehari, sedangkan Garis Kemiskinan Non Makanan (GKNM) yakni kebutuhan minimum untuk perumahan, sandang, kesehatan dan pendidikan. Berikut adalah rumus Garis Kemiskinan (GK) yang dinyatakan dalam persamaan (2.39) (BPS, 2016):

$$GK = GKM + GKNM \tag{2. 39}$$

artinya seseorang dikatakan miskin apabila pengeluaran rata-rata perkapita perbulan kurang dari Garis Kemiskinan (GK).

Indeks Keparahan Kemiskinan atau *Proverty Severity Index* adalah gambaran yang menunjukkan tentang penyebaran pengeluaran diantara penduduk miskin. Semakin tinggi nilai indeks maka semakin tinggi ketimpangan pengeluaran diantara penduduk miskin. Sedangkan Indeks Kedalaman Kemiskinan atau *Proverty Gap Index* adalah suatu ukuran rata-rata kesenjangan pengeluaran masing-masing penduduk miskin terhadap garis kemiskinan. Semakin tinggi nilai indeks maka akan semakin menjauhi rata-rata pengeluaran penduduk berdasarkan garis kemiskinan (BPS, 2016).

Menurut Laksmi (2017) dalam berita online angka kemiskinan tertinggi di sumbangkan oleh Provinsi Jawa Timur pada tahun 2015. Menurut data BPS tahun

2016, kurang lebih terdapat 4.775.000 penduduk miskin yang tinggal di Jawa Timur. Berdasarkan laporan BPS tahun 2016, Jawa Timur merupakan Provinsi yang menyumbangkan angka kemiskinan tertinggi di Indonesia, yakni sekitar 4,7 juta jiwa penduduk miskin.

Berdasarkan data penduduk miskin, Jawa Timur berada pada urutan pertama provinsi yang menyumbang angka kemiskinan terbanyak di Indonesia, yakni sekitar 4.775.000 penduduk miskin. Lebih dari 3.2 juta penduduk berada di pedesaan dan 1.5 juta penduduk di kota-kota besar dengan batas penghasilan per bulan berada pada angka Rp 318.000 (Laksmi, 2017).

Data yang di rilis oleh BPS (2016) menunjukkan bahwa Kabupaten Sampang menempati urutan pertama dengan jumlah presentase kemiskinan tertinggi di Provinsi Jawa Timur, yakni sebesar 27,9% dari jumlah penduduknya. Urutan kedua dan ketiga diikuti oleh Kabupaten Bangkalan dan Kabupaten Probolinggo yakni sebesar 24,7% dan 22,2%. Sedangkan daerah yang memiliki jumlah presentase kemiskinan terendah adalah Kota Batu yakni sebesar 4,47% dari total jumlah penduduknya yang hanya berkisar 195 ribu penduduk, kemudian diikuti Kota Malang dan Kota Madiun yang masing-masing sebesar 5,21% dan 5,37% (Laksmi, 2017).

2.14 Kajian Islam Mengenai Lingkungan

Di dalam al-Qur'an, keimanan sesorang akan dipengaruhi oleh faktor lingkungannya, yakni terdapat dalam surat An-Nisa'/4: 136"

يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوٓاْ ءَامِنُواْ بِٱللَّهِ وَرَسُولِهِۦ وَٱلۡكِتَٰبِ ٱلَّذِي نَزَّلَ عَلَىٰ رَسُولِهِۦ وَٱلۡكِتَٰبِ ٱلَّذِيٓ أَنزَلَ مِن قَبۡلُۚ وَمَن يَكۡفُرۡ بِٱللَّهِ وَمَلَٰٓئِكَتِهِۦ وَكُتُبِهِۦ وَرُسُلِهِۦ وَٱلۡيَوۡمِ ٱلۡأٓخِرِ فَقَدۡ ضَلَّ ضَلَٰلَۢا بَعِيدًا ١٣٦

Wahai orang-orang yang beriman, tetaplah beriman kepada Allah dan Rasul-Nya dan kepada kitab yang Allah turunkan kepada Rasul-Nya serta kitab yang Allah turunkan sebelumnya. Barangsiapa yang kafir kepada Allah, malaikat-malaikat-Nya, kitab-kitab-Nya, rasul-rasul-Nya, dan hari kemudian, maka sesungguhnya orang itu telah sesat sejauh-jauhnya.(QS An Nisa': 136).

Allah Swt memerintahkan hamba-hambaNya yang beriman untuk memasukiseluruh syari'at, cabang-cabang, rukun-rukun dan tiang-tiang keimanan. Hal ini bukanlah memerintahkan kepada sesuatu yang sudah tercapai. Akan tetapi lebih menyempurnakan hal yang sempurna serta menetapkan, mengukuhkan dan melanggengkannya. Sebagaimana ucapan seorang muslim di setiap shalat, "Tunjukilah kami jalan yang lurus". (QS. Al-Fatihah: 6). Yaitu, arahkan, tambahkan dan kukuhkan kami dalam hidayah. Maka (pada ayat ini), Allah perintahkan mereka untuk berimana kepada-Nya dan kepada Rasul-Nya (Katsir, 2001a). Sebagaimana firman-Nya,

يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ ٱتَّقُواْ ٱللَّهَ وَءَامِنُواْ بِرَسُولِهِۦ يُؤۡتِكُمۡ كِفۡلَيۡنِ مِن رَّحۡمَتِهِۦ وَيَجۡعَل لَّكُمۡ نُورٗا تَمۡشُونَ بِهِۦ وَيَغۡفِرۡ لَكُمۡۚ وَٱللَّهُ غَفُورٞ رَّحِيمٞ ٢٨

Hai orang-orang yang beriman, bertaqwalah kepada Allah dan berimanlah kepada Rasul-Nya. (QS. Al-Hadiid: 28)

Firman-Nya, "*Dan kitab yang Allah turunkan kepada Rasul-Nya*", yaitu al-Qur'an. "*Serta kitab yang Allah turunkan sebelumnya,*" ini adalah jenis yang mencakup seluruh kitab-kitab terdahulu. Tentang al-Qur;an, Allah Swt berfirman dengan kata *Nazzala*, karena ia diturunkan secara terpisah, berangsur-angsur, sesuai kejadian yang dibutuhkan setiap hamba dalam kehidupan dunia dan akhirat mereka. Sedangkan kitab-kitab terdahulu turun sekaligus. Untuk itu Allah Swt berfirman, "*Serta kitab yang Allah turunkan sebelumnya*" (Katsir, 2001a).

Kemudian Allah Swt berfirman, "*Barangsiapa yang kafir terhadap Allah, Malaikat-Malaikat-Nya, kitab-kitab-Nya, Rasul-Rasul-Nya dan hari kemudian, maka sesungguhnya orang itu telah sesat sejauh-jauhnya.*" Yaitu, berarti telah keluar dari jalan hidayah dan jauh sekali dari tujuannya (Katsir, 2001a).

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Pendekatan Penelitian

Pendekatan penelitian yang digunakan pada penelitian ini adalah studi literatur dan deskriptif kuantitatif. Untuk studi literatur yaitu dengan mengumpulkan bahan pustaka dari buku, jurnal dan artikel yang dibutuhkan peneliti sebagai acuan untuk menyelesaikan penelitian. Sedangkan deskriptif kuantitatif yaitu menyusun dan menganalisis data sesuai dengan kebutuhan peneliti.

3.2 Sumber Data

Pada penelitian ini data yang digunakan adalah data kemiskinan di Kabupaten/Kota Provinsi Jawa Timur pada tahun 2015 yang bersumber dari Badan Pusat Statistika (BPS) Provinsi Jawa Timur tahun 2016 yang dipublikasikan di internet yang diakses pada tanggal 04 April 2018. Unit observasi pada penelitian ini dalah 29 kabupaten dan 9 kota di Provinsi Jawa Timur.

3.3 Variabel Penelitian

Penelitian ini menggunakan dua jenis variabel yakni variabel bebas dan variabel terikat. Variabel bebas yakni variabel yang mempengaruhi variabel terikat, dimana variabel bebas adalah kontrol dari variabel terikat, sedangkan variabel terikat adalah variabel yang dipengaruhi oleh variabel bebas.

1. Variabel Terikat

Variabel terikat yang digunakan dalam penelitian ini yakni jumlah penduduk miskin di tiap Kabupaten/Kota di Jawa Timur pada tahun 2015.

2. Variabel Bebas

Variabel bebas yang digunakan dalam penelitian ini yakni beberapa faktor yang mempengaruhi kemiskinan di tiap Kabupaten/Kota di Jawa Timur pada tahun 2015, diantaranya terdapat 5 variabel bebeas yang ditetapkan yakni:

X_1 = Presentasi Produk Domestik Regional Bruto (PDRB)

X_2 = Presentasi Angka Partisipasi Sekolah (APS)

X_3 = Presentasi Tingkat Pengangguran Terbuka (TPS)

X_4 = Presentasi Tingkat Partisipasi Angkatan Kerja (TPAK)

X_5 = Presentasi Prakiraan Permintaan Masyarakat (PPM)

3.4 Tahapan Analisis Data

3.4.1 Pengujian Autokorelasi Spasial pada Model Spasial *Lag* menggunakan metode *Local Indicator of Spatial Autocorrelation* (LISA)

Langkah-langkah pengujian autokorelasi pada model regresi spasial *lag* dengan *local indicator of spatial autocorrelation* yang meliputi tahapan sebagai berikut:

1. menetapkan model regresi spasial *lag*

$$\boldsymbol{y} = \rho \mathbf{W}\boldsymbol{y} + \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon},$$

dengan mengasumsikan *error* $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(0, \sigma^2 \boldsymbol{I})$,

2. menetapkan matriks pembobot spasial yakni *queen contiguity*, dimana matriks pembobot dijelaskan sebagai berikut:

$$W_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{, untuk wilayah yang bersisihan} \\ 1 & \text{, untuk wilayah yang lainnya,} \end{cases}$$

3. mencari penaksir parameter β dan ρ pada regresi spasial *lag* dengan metode maksimum *likelihood* dimana fungsi disusun sebagai

$$L(\boldsymbol{\beta}, \rho, \sigma^2 | \boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{y} - \rho \boldsymbol{W}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})^T \Sigma^{-1} (\boldsymbol{y} - \rho \boldsymbol{W}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})\right),$$

4. mendapatkan penaksir $\hat{\beta}$ dan $\hat{\rho}$ pada model regresi spasial *lag* yang efisien berdasarkan langkah ke-4,
5. pengujian autokorelasi spasial *lag* menggunakan hipotesis dan statistik uji *Local Indicator of Spatial Autocorrelation* (LISA) yakni sebagai berikut:

Hipotesis :

$H_0: I_i = 0$ (tidak ada autokorelasi pada lokasi ke-i)

$H_1: I_i \neq 0$ (ada autokorelasi pada lokasi ke-i)

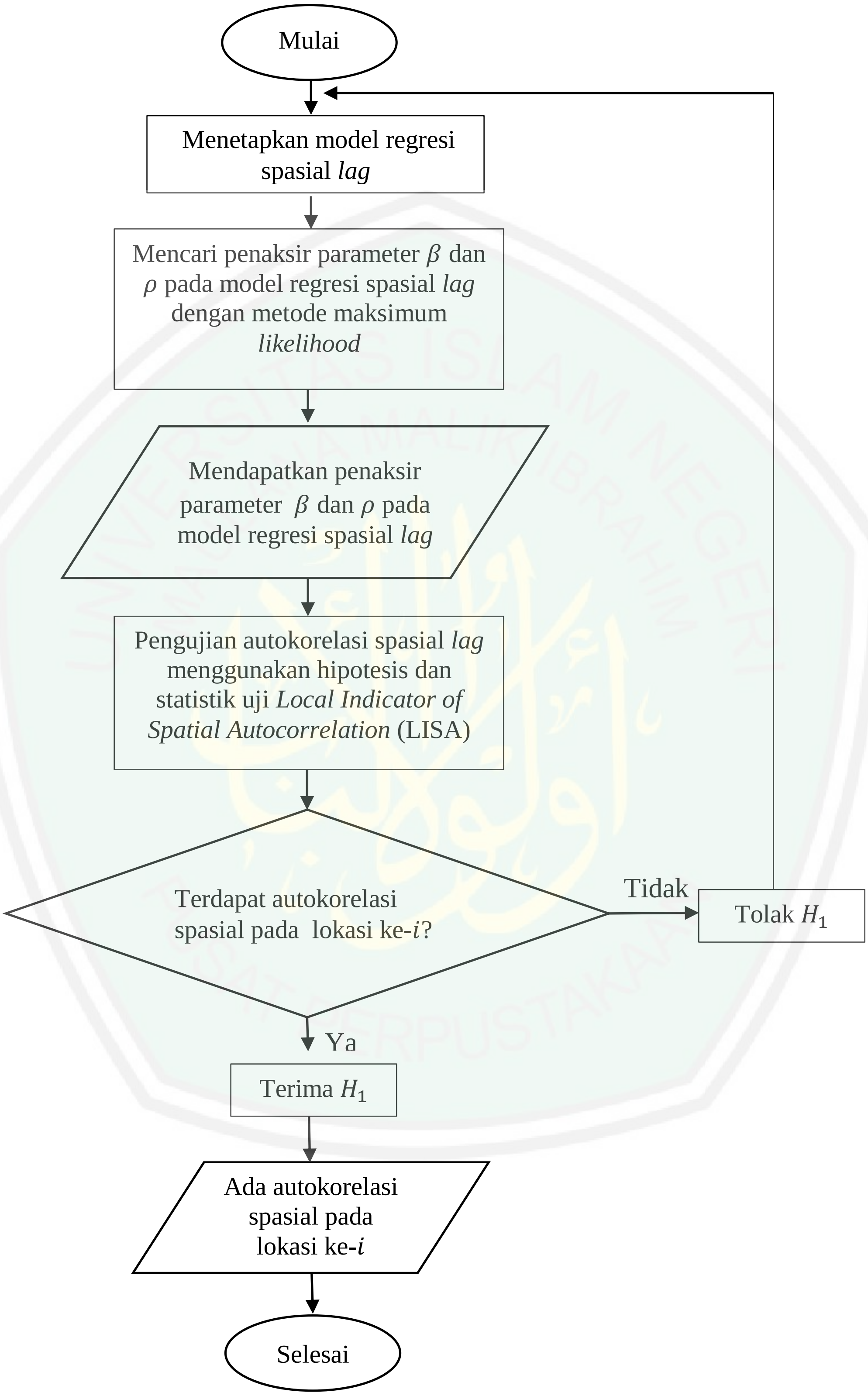
untuk i adalah unit observasi wilayah, $i = 1,2, \dots, n$,

dengan statistik uji:

$$Z_{hitung} = \frac{I_i - E(I_i)}{\sqrt{var(I_i)}}.$$

Pada hipotesis tersebut H_0 ditolak jika nilai $|Z_{hitung}| > Z_{\frac{\alpha}{2}}$ atau $p - value < \alpha$.

Untuk lebih jelas tentang penggambaran langkah-langkah dalam pengujian autokorelasi spasial pada penelitian ini, maka peneliti memberikan diagram alur dalam Gambar 3.1 berikut:



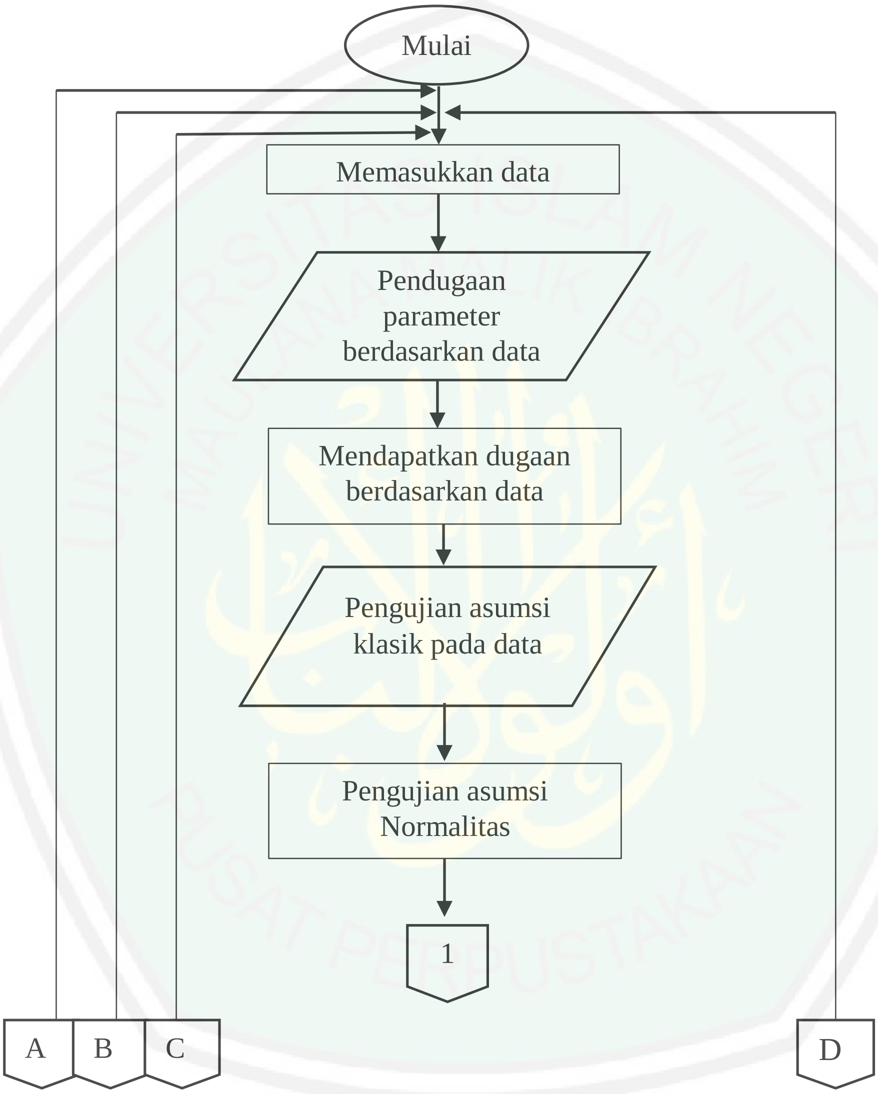
Gambar 3.1 Diagram alur estimasi model regresi spasial *lag* menggunakan *Local Indicator of Spatial Autocorrelation* (LISA)

3.4.2 Pemetaan Data Kemiskinan di Provinsi Jawa Timur

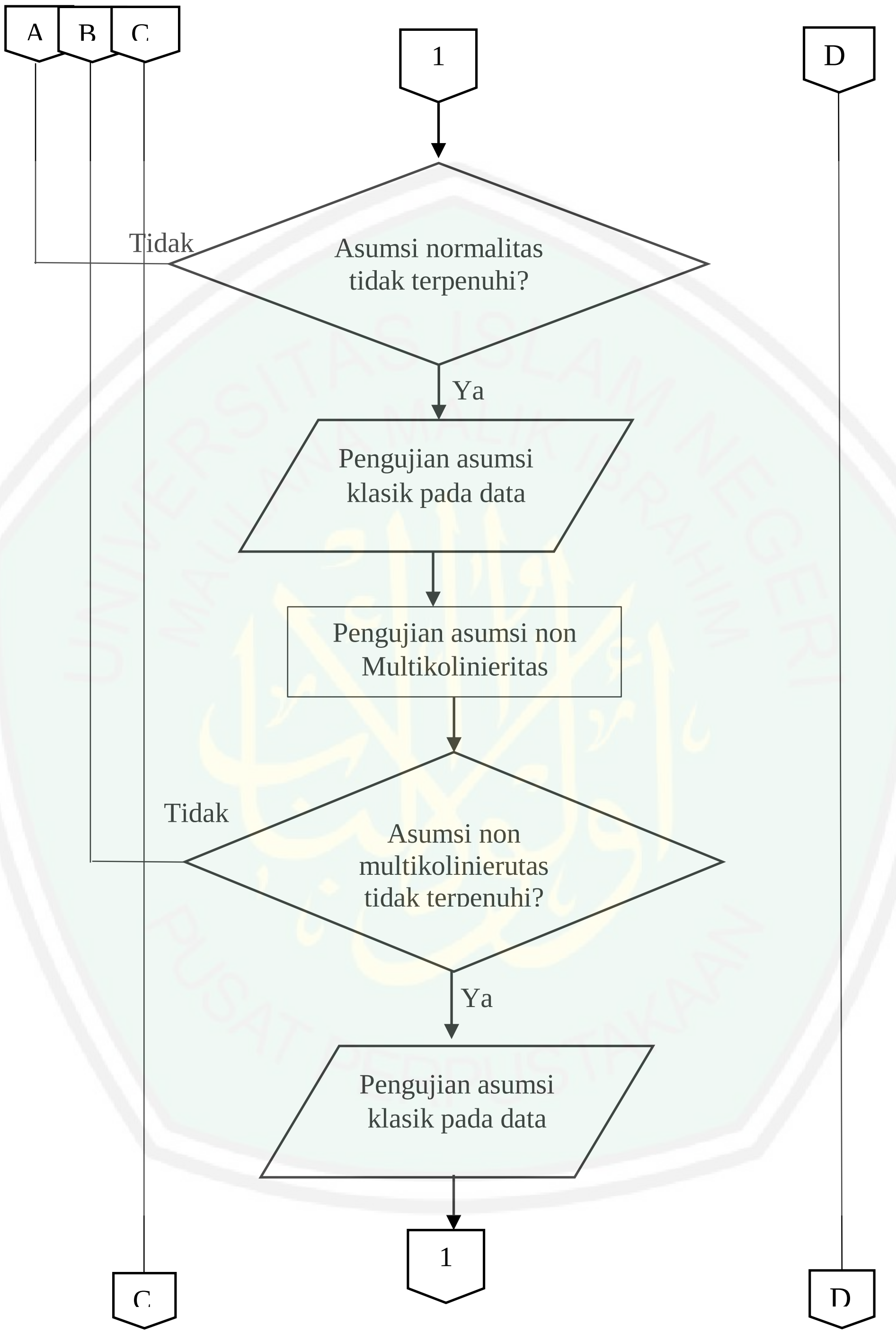
Berikut ini adalah langkah-langkah dalam pemetaan data Kemiskinan di Jawa Timur :

1. mendefinisikan peta dengan memasukkan data-data yang telah ditentukan oleh peneliti serta ID sebagai variabel kunci untuk pengidentifikasian area pada masing-masing basis data sebagai hasil digitalisasi,
2. pendugaan parameter dengan menggunakan metode maksimum *likelihood* pada data yang telah ditentukan yakni data kemiskinan sebagai variabel terikat dan faktor-faktor yang mempengaruhi variabel kemiskinan yakni variabel X_1 = presentasi Produk Domestik Regional Bruto (PDRB), X_2 = presentasi Angka Partisipasi Sekolah (APS), X_3 = presentasi Tingkat Pengangguran Terbuka (TPS), X_4 = presentasi Tingkat Partisipasi Angkatan Kerja (TPAK) dan X_5 = presentasi Prakiraan Permintaan Masyarakat (PPM) sebagai variabel bebas,
3. melakukan pengujian asumsi klasik regresi linier antara lain pengujian normalitas, uji multikolinieritas dan uji homoskedastisitas,
4. pengujian autokorelasi spasial, yakni dengan membentuk matriks pembobot terlebih dahulu, dalam hal ini matriks pembobot telah ditetapkan yaitu *Queen Contiguity*, lalu matriks pembobot disimpan dalam format .gal,
5. mendeteksi autokorelasi spasial dengan statistik uji *Local Indicator of Spatial Autocorrelation* (LISA),
6. didapatkan model regresi spasial *lag* lalu melakukan uji signifikasi parameter pada model spasial *lag*.

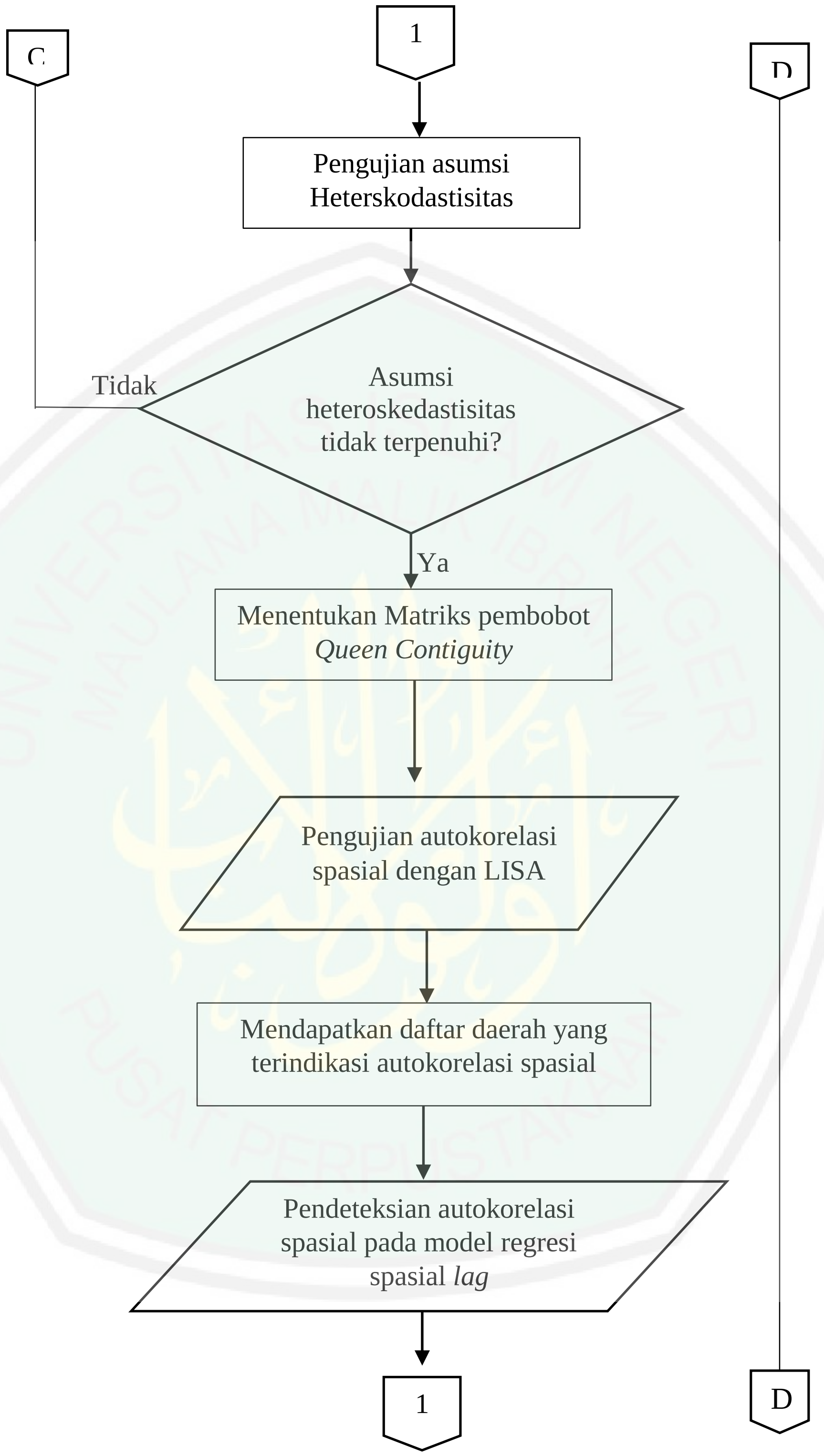
Untuk lebih jelas tentang penggambaran langkah-langkah dalam pemetaan data pada penelitian ini, maka peneliti memberikan diagram alur dalam gambar berikut:



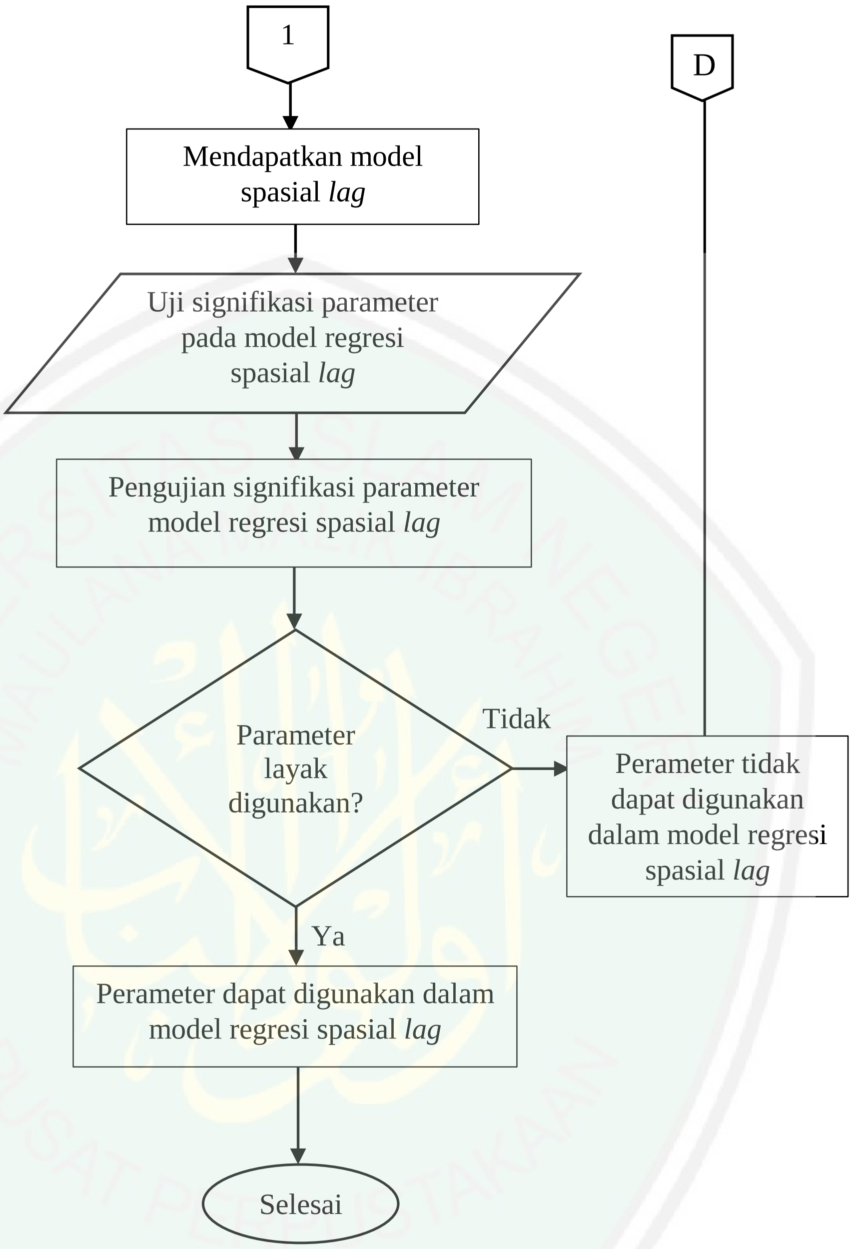
Gambar 3.2 Diagram alur pemetaan data kemiskinan pada model regresi spasial *lag* menggunakan *Local Indicator of Spatial Autocorrelation* (LISA).



Lanjutan Gambar 3.2 Diagram alur pemetaan data kemiskinan pada model regresi spasial *lag* menggunakan *Local Indicator of Spatial Autocorrelation* (LISA).



Lanjutan Gambar 3.2 Diagram alur pemetaan data kemiskinan pada model regresi spasial *lag* menggunakan *Local Indicator of Spatial Autocorrelation* (LISA).



Lanjutan Gambar 3.2 Diagram alur pemetaan data kemiskinan pada model regresi spasial *lag* menggunakan *Local Indicator of Spatial Autocorrelation* (LISA).

BAB IV

PEMBAHASAN

4.1 Penaksir Parameter dan Pengujian Autokorelasi Spasial Model Spasial *Lag*

Pada penelitian ini, model regresi linier dengan memperhitungkan pengaruh spasial pada peubah terikat yakni model regresi spasial *lag*, sesuai dengan persamaan (2.9) yakni sebagai berikut:

$$\boldsymbol{y} = \rho \boldsymbol{W}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{4.1}$$

Atau

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{y} - \rho \boldsymbol{W}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} \tag{4.2}$$

Berdasarkan persamaan (4.2) akan dicari estimasi parameter β dan ρ dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimator* (MLE). Menggunakan fungsi kepadatan bersama berdasarkan persamaan (4.2) dengan asumsi $\boldsymbol{X}$ dan $\boldsymbol{y}$ berdistribusi normal dengan $E(\boldsymbol{y}) = \rho \boldsymbol{W}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}$ yakni:

$$f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{X},\boldsymbol{\beta},\sigma^2) = f(y_1, y_2, \dots, y_n|\boldsymbol{X},\boldsymbol{\beta},\sigma^2)$$

$$= f(y_1|\boldsymbol{\beta},\sigma^2,\rho) f(y_2|\boldsymbol{\beta},\sigma^2,\rho) \cdots = f(y_n|\boldsymbol{\beta},\sigma^2,\rho)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} f(y_i|\boldsymbol{\beta},\sigma^2,\rho)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} (\boldsymbol{y} - \rho \boldsymbol{W}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})^T \Sigma^{-1} (\boldsymbol{y} - \rho \boldsymbol{W}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}) \right) \right) \tag{4.3}$$

lalu persamaan (4.3) diubah dalam fungsi *likelihood* sehingga menjadi persamaan (4.4) berikut seperti pada persamaan (2.26):

$$L(\boldsymbol{\beta},\sigma^2,\rho|\boldsymbol{y},\boldsymbol{X}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2} [\boldsymbol{y} - \rho \boldsymbol{W}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}]^T \Sigma^{-1} [\boldsymbol{y} - \rho \boldsymbol{W}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}] \right) \tag{4.4}$$

Selanjutnya persamaan (4.4) akan diubah ke bentuk logaritma sebagai berikut:

$$\ln L(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2, \rho | \boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2}[\boldsymbol{y} - \rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}]^T\Sigma^{-1}[\boldsymbol{y} - \rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}]\right)$$

$$= \ln\left(\left(\tfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left(-\tfrac{1}{2}[\boldsymbol{y} - \rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}]^T\Sigma^{-1}[\boldsymbol{y} - \rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}]\right)\right)$$

$$= \ln\left(\left(\sqrt{2\pi\sigma^2}\right)^{-n} \exp\left(-\tfrac{1}{2}[\boldsymbol{y} - \rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}]^T\Sigma^{-1}[\boldsymbol{y} - \rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}]\right)\right)$$

$$= \ln\left((2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\tfrac{1}{2}[\boldsymbol{y}^T - \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{W}^T\rho - \boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}^T]\Sigma^{-1}[\boldsymbol{y} - \rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}]\right)\right)$$

$$= \ln\left((2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\tfrac{1}{2}[\boldsymbol{y}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^T\Sigma^{-1}\rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{W}^T\rho\Sigma^{-1}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{W}^T\rho\Sigma^{-1}\rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{W}^T\rho\Sigma^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}]\right)\right)$$

$$= -\tfrac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \tfrac{1}{2}[\boldsymbol{y}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^T\Sigma^{-1}\rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{W}^T\rho\Sigma^{-1}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{W}^T\rho\Sigma^{-1}\rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{W}^T\rho\Sigma^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}]$$

$$= -\tfrac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \tfrac{1}{2}[\boldsymbol{y}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^T\Sigma^{-1}\rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} - (\boldsymbol{y}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})^{\boldsymbol{T}} - (\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{W}^T\rho\Sigma^{-1}\boldsymbol{y})^{\boldsymbol{T}} + \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{W}^T\rho\Sigma^{-1}\rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} + (\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{W}^T\rho\Sigma^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})^T - \boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}]$$

$$= -\tfrac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \tfrac{1}{2}[\boldsymbol{y}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^T\Sigma^{-1}\rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}\Sigma^{-1}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^T\Sigma^{-1}\rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{W}^T\rho\Sigma^{-1}\rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}\Sigma^{-1}\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}]$$

$$= -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2}[\boldsymbol{y}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{y} - 2\boldsymbol{y}^T\Sigma^{-1}\rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} - 2\boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}\Sigma^{-1}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{W}^T\rho\Sigma^{-1}\rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} + 2\boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}\Sigma^{-1}\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}] \quad (4.5)$$

didapatkan fungsi *log-likelihod* model spasial *lag*, yang selanjutnya akan dicari penaksir parameter dari persamaan spasial *lag* yaitu penaksir β dan ρ.

4.1.1 Penaksir Parameter $\boldsymbol{\beta}$

Untuk mendapatkan penaksir parameter β pada model spasial *lag* yakni dengan menurunkan persamaan (4.5) dengan β sebagai berikut:

$$\frac{\partial \ln(L(\boldsymbol{\beta},\rho|\boldsymbol{X},\boldsymbol{y}))}{\partial\boldsymbol{\beta}} = \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\beta}}\left(-\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2}[\boldsymbol{y}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{y} - 2\boldsymbol{y}^T\Sigma^{-1}\rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} - 2\boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}\Sigma^{-1}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{W}^T\rho\Sigma^{-1}\rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} + 2\boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}\Sigma^{-1}\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}]\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\beta}}\left(-\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2)\left[-\frac{1}{2}\boldsymbol{y}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}^T\Sigma^{-1}\rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}\Sigma^{-1}\boldsymbol{y} - \frac{1}{2}\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{W}^T\rho\Sigma^{-1}\rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}\Sigma^{-1}\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}\right]\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\beta}}\left(-\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2)\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{y}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{y}) + \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{y}^T\Sigma^{-1}\rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{y}) + \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}\Sigma^{-1}\boldsymbol{y}) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{W}^T\rho\Sigma^{-1}\rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{y}) - \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}\Sigma^{-1}\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y}) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}) + \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\beta}^T}(\boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})\right)$$

$$= 0 - 0 + 0 + \boldsymbol{X}\Sigma^{-1}\boldsymbol{y} - 0 - \boldsymbol{X}\Sigma^{-1}\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} - (\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})$$

$$= \boldsymbol{X}\Sigma^{-1}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\Sigma^{-1}\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})$$

$$= \boldsymbol{X}\Sigma^{-1}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\Sigma^{-1}\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}$$

lalu hasil penurunan persamaan (4.5) terhadap β disamakan dengan nol sedemikian diperoleh:

$$0 = \boldsymbol{X}\Sigma^{-1}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\Sigma^{-1}\boldsymbol{\rho W y} - \boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X\beta}$$

$$\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X\beta} \;\; = \boldsymbol{X}\Sigma^{-1}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\Sigma^{-1}\boldsymbol{\rho W y}$$

sehingga didapatkan penaksir parameter $\hat{\beta}$ yakni:

$$\hat{\beta} = (\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}(\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\rho\boldsymbol{W y}) \qquad (4.6)$$

4.1.1.1 Tak bias

Jika $E(\hat{\beta}) = \beta$, maka $\hat{\beta}$ adalah estimator tak bias untuk β, sehingga akan ditunjukkan bahwa estimator β merupakan penaksir yang tak bias (*unbiased*). Akan dibuktikan bahwa merupakan penaksir yang *unbias*, apabila $E(\hat{\beta}) = \beta$.

Bukti:

$$E(\hat{\beta}) = E\big((\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}(\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\rho\boldsymbol{W y})\big)$$

$$= E\big((\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}(\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}(\rho\boldsymbol{W y} + \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}) - \boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\rho\boldsymbol{W y})\big)$$

$$= E\big((\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}(\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\rho\boldsymbol{W y} + \boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\rho\boldsymbol{W y})\big)$$

$$= E\big((\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}(\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\varepsilon})\big)$$

$$= E((\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X\beta} + (\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\varepsilon})$$

$$= E((\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}(\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})\boldsymbol{\beta} + (\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\varepsilon})$$

$$= E(\boldsymbol{I\beta} + (\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\varepsilon})$$

$$= E(\boldsymbol{\beta}) + E((\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1})E(\boldsymbol{\varepsilon})$$

$$= E(\boldsymbol{\beta}) + 0$$

$$= E(\boldsymbol{\beta})$$

$$= \boldsymbol{\beta}$$

Sedemikian terbukti bahwa penaksir β *unbias*.

4.1.1.2 Varian kovarian minimum atau efisien

Apabila $\hat{\beta}$ adalah estimator terbaik maka $\hat{\beta}$ mempunyai variansi kovarian minimum diantara variansi kovarian estimator tak bias yang lain.

Bukti:

Dengan menggunakan penyelesaian Gauss Markov maka didapatkan penaksir parameter $\hat{\beta}$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\hat{\beta} &= (\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\left(\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{y}\right) \\
&= (\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{y} - (\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} \\
&= (\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}(\rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}) - (\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} \\
&= (\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} + (\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \\
&\quad (\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\varepsilon} - (\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} \\
&= (\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\left(\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X}\right)\boldsymbol{\beta} + (\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\varepsilon} \\
&= \boldsymbol{I}\boldsymbol{\beta} + (\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\varepsilon} \\
&= \boldsymbol{\beta} + (\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}
\end{aligned}$$

Dimana $Cov(\hat{\beta})$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
Cov(\hat{\boldsymbol{\beta}}) &= E\left[(\hat{\boldsymbol{\beta}} - E[\hat{\boldsymbol{\beta}}])(\hat{\boldsymbol{\beta}} - E[\hat{\boldsymbol{\beta}}])^T\right] \\
&= E\left[(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})^T\right] \\
&= E\left[\left(\boldsymbol{\beta} + (\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\beta}\right)\left(\boldsymbol{\beta} + (\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\beta}\right)^T\right] \\
&= E\left[\left((\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}\right)\left((\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}\right)^T\right] \\
&= E\left[\left((\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}\right)\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{T}}\Sigma^{-1}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\right)\right] \\
&= (\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}E(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{T}})\Sigma^{-1}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}
\end{aligned}$$

$$= (\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}E(\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon^T})$$

$$= (\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}E(\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon^T})$$

$$= (\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\Sigma$$

Untuk mendapatkan $\hat{\beta}$ yang efisien, maka Σ harus bernilai kecil.

4.1.2 Penaksir Parameter $\boldsymbol{\rho}$

Untuk mendapatkan penaksir parameter ρ pada model spasial *lag* yakni dengan menurunkan persamaan (4.5) terhadap ρ sebagai berikut:

$$\frac{\partial \ln(L(\boldsymbol{\beta},\rho|\boldsymbol{X},\boldsymbol{y}))}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}}\Big(-\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2}[\boldsymbol{y}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{y} - 2\boldsymbol{y}^T\Sigma^{-1}\rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} - 2\boldsymbol{\beta^T}\boldsymbol{X}\Sigma^{-1}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{W}^T\rho\Sigma^{-1}\rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} + 2\boldsymbol{\beta^T}\boldsymbol{X}\Sigma^{-1}\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\beta^T}\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}]\Big)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}}\Big(-\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2)\Big) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{y}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{y} - 2\boldsymbol{y}^T\Sigma^{-1}\rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} - 2\boldsymbol{\beta^T}\boldsymbol{X}\Sigma^{-1}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{W}^T\rho\Sigma^{-1}\rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} + 2\boldsymbol{\beta^T}\boldsymbol{X}\Sigma^{-1}\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\beta^T}\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})$$

$$= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}}\Big(-\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2)\Big) - \frac{1}{2}\bigg(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{y}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{y}) - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}}(2\boldsymbol{y}^T\Sigma^{-1}\rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{y}) - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}}(2\boldsymbol{\beta^T}\boldsymbol{X}\Sigma^{-1}\boldsymbol{y}) + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{W}^T\rho\Sigma^{-1}\rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{y}) + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}}(2\boldsymbol{\beta^T}\boldsymbol{X}\Sigma^{-1}\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y}) + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{\beta^T}\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})\bigg)$$

$$= 0 - \frac{1}{2}(0 - 2\boldsymbol{y}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} - 0 + 2\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{W}^T\rho\Sigma^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} + 2\boldsymbol{\beta^T}\boldsymbol{X}\Sigma^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} + 0)$$

$$= -\frac{1}{2}(-2\boldsymbol{y}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} + 2\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{W}^T\rho\Sigma^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} + 2\boldsymbol{\beta^T}\boldsymbol{X}\Sigma^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y})$$

$$= \boldsymbol{y}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{W}^T\rho\Sigma^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\beta^T}\boldsymbol{X}\Sigma^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y}$$

Lalu hasil penurunan disamakan dengan nol sedemikian diperoleh:

$$0 = \boldsymbol{y}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{W}^T\rho\Sigma^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}\Sigma^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y}$$

$$\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{W}^T\rho\Sigma^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}\Sigma^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y}$$

selanjutnya substitusikan persamaan (4.6) diperoleh

$$\rho\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{W}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}\Sigma^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y}$$

$$\rho\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{W}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} - \left((\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}(\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{y})\right)^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}\Sigma^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y}$$

$$\rho\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{W}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} - ((\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{y} - (\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{y})^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}\Sigma^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y}$$

$$\rho\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{W}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} - (\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}\Sigma^{-1}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1} - \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{W}^T\rho\Sigma^{-1}\boldsymbol{X}^T(\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1})\boldsymbol{X}\Sigma^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y}$$

$$\rho\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{W}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}\Sigma^{-1}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}\Sigma^{-1}\boldsymbol{W} - \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{W}^T\rho\Sigma^{-1}\boldsymbol{X}^T(\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}\Sigma^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y}$$

Misal $\boldsymbol{y}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}\Sigma^{-1}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}\Sigma^{-1}\boldsymbol{W} = Z$, maka

$$\rho\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{W}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} = Z - \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{W}^T\rho\Sigma^{-1}\boldsymbol{X}^T(\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}\Sigma^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y}$$

$$-Z = -\rho\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{W}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{W}^T\rho\Sigma^{-1}\boldsymbol{X}^T(\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}\Sigma^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y}$$

$$Z = \rho\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{W}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{W}^T\rho\Sigma^{-1}\boldsymbol{X}^T(\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}\Sigma^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y}$$

$$Z = \rho(\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{W}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{W}^T\rho\Sigma^{-1}\boldsymbol{X}^T(\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}\Sigma^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y})$$

$$\rho = Z(\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{W}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{W}^T\rho\Sigma^{-1}\boldsymbol{X}^T(\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}\Sigma^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y})^{-1}$$

sedemikian didapatkan penaksir parameter ρ yakni:

$$\hat{\rho} = Z(\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{W}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{W}^T\rho\Sigma^{-1}\boldsymbol{X}^T(\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}\Sigma^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y})^{-1}$$

$$= (\boldsymbol{y}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}\Sigma^{-1}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}\Sigma^{-1}\boldsymbol{W})(\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{W}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{W}^T\rho\Sigma^{-1}\boldsymbol{X}^T(\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}\Sigma^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y})^{-1} \quad (4.7)$$

Selanjutnya persamaan (4.7) disubstitusikan pada persamaan (4.6), sehingga didapatkan penaksir $\hat{\beta}$ yakni:

$$\begin{aligned}
\hat{\beta} &= (\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}(\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{y}) \\
&= (\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{y} - (\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} \\
&= (\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{y} - (\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\Big((\boldsymbol{y}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} - \\
&\quad \boldsymbol{y}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}\Sigma^{-1}\boldsymbol{W})(\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{W}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} + \\
&\quad \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{W}^T\rho\Sigma^{-1}\boldsymbol{X}^T(\boldsymbol{X}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}\Sigma^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y})^{-1}\Big)\boldsymbol{W}\boldsymbol{y}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

4.1.3 Pengujian Autokorelasi pada Model Spasial *Lag* Menggunakan *Local Indicator of Spatial Autocorrelation*

Local Indicator of Spatial Autocorrelation (LISA) digunakan untuk menguji adanya autokorelasi spasial secara lokal. Tujuan pengujian autokorelasi spasial menggunakan metode LISA yakni untuk mengetahui ada atau tidaknya ketergantungan antar wilayah atau biasa disebut dependensi spasial. Pengujian autokorelasi spasial menggunakan koefisien LISA yang mana indeks LISA (I_i), dimana i merupakan unit observasi masing-wilayah yang diamati, akan digunakan untuk pengujian ketergantungan antar lokasi (dependensi spasial) atau autokorelasi spasial antar lokasi secara lokal.

Berikut hipotesis yang digunakan untuk menguji adanya autokorelasi spasial yakni:

$H_0: I_i = 0$ (tidak ada autokorelasi pada lokasi ke-i)

$H_1: I_i \neq 0$ (ada autokorelasi pada lokasi ke-i)

dengan i merupakan unit observasi wilayah.

Berdasarkan hipotesis awal dan hipotesis alternatif, maka akan ditentukan indeks *local indicator of spatial autocorrelation* (I_i) berdasarkan koefisien parameter regresi linier dan koefisien parameter regresi spasial *lag* secara lokal. Sehingga untuk menentukan indeks lokal indikator digunakan uji rasio *likelihood*. Pada uji rasio *likelihood* dilakukan dengan membandingkan nilai *likelihood* model keseluruhan dan model reduksinya, dimana dalam penelitian ini model regresi keseluruhan adalah model regresi spasial *lag* dengan model reduksinya yakni model regresi linier.

Dimisalkan $\hat{l}(\gamma)$ adalah fungsi *likelihood* untuk model regresi spasial *lag*, dinyatakan sebagai berikut:

$$\hat{l}(\gamma) = \left(-\frac{2\pi}{n}\left([\boldsymbol{y} - \rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}][\boldsymbol{y} - \rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}]^T\right)\right)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[\frac{n}{2}\right]$$

dan misalkan $\hat{l}(\omega)$ merupakan fungsi *likelihood* untuk model regresi reduksinya yakni model regresi linier dimana

$$\hat{l}(\omega) = \left(-\frac{2\pi}{n}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}})^T(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}})\right)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[\frac{n}{2}\right]$$

dengan

$$\hat{\beta} = (\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X})^{-1}(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{y})$$

$$\hat{\sigma}^2 = -\frac{1}{n}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})^T$$

Statistik uji pada indeks LISA didapatkan dari perbandingan $\hat{l}(\gamma)$ dengan $\hat{l}(\omega)$, dimana perbandingan didapatkan dari statistik uji rasio *likelihood* yang bertujuan untuk menguji hipotesis. Daerah penolakan dalam pengujian autokorelasi spasial menggunakan metode LISA yakni H_0 ditolak apabila $|Z_{hitung}| > Z_{\frac{\alpha}{2}}$.

Berikut ini adalah perbandingan berdasarkan rasio *likelihood* dari model spasial *lag* dan model regresi linier,

$$I = \frac{\hat{l}(\gamma)}{\hat{l}(\omega)} = \left[\frac{\left(-\frac{2\pi}{n}\left([\boldsymbol{y}-\rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}][\boldsymbol{y}-\rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}]^T\right)\right)^{-\frac{n}{2}}\exp\left[\frac{n}{2}\right]}{\left(-\frac{2\pi}{n}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})^T(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})\right)^{-\frac{n}{2}}\exp\left[\frac{n}{2}\right]}\right] \sim Z$$

Berdasarkan perbandingan rasio *likelihood* didapatkan 2 alternatif, yakni:

1. Ketika $\rho = 0$ maka

$$I = \left[\frac{\left(-\frac{2\pi}{n}\left([\boldsymbol{y}-\rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}][\boldsymbol{y}-\rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}]^T\right)\right)^{-\frac{n}{2}}\exp\left[\frac{n}{2}\right]}{\left(-\frac{2\pi}{n}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})^T(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})\right)^{-\frac{n}{2}}\exp\left[\frac{n}{2}\right]}\right] \sim Z = 0 \qquad (4.9)$$

   dapat dikatakan bahwa tidak terdapat autokorelasi spasial pada model regresi spasial *lag*, dimana I merupakan indeks LISA (I_i) masing-masing pengamatan ke-i dengan $i = 1,2,\dots,n$ pengamatan.

2. Ketika Jika $\rho \neq 0$ maka

$$I = \left[\frac{\left(-\frac{2\pi}{n}\left([\boldsymbol{y}-\rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}][\boldsymbol{y}-\rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}]^T\right)\right)^{-\frac{n}{2}}\exp\left[\frac{n}{2}\right]}{\left(-\frac{2\pi}{n}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})^T(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})\right)^{-\frac{n}{2}}\exp\left[\frac{n}{2}\right]}\right] \sim Z \neq 0 \qquad (4.10)$$

   dapat dikatakan bahwa terdapat autokorelasi spasial antar lokasi pada model regresi spasial *lag* secara lokal atau masing-masing wilayah yang diamati, dimana I merupakan indeks LISA (I_i) masing-masing pengamatan ke-i dengan $i = 1,2,\dots,n$ pengamatan.

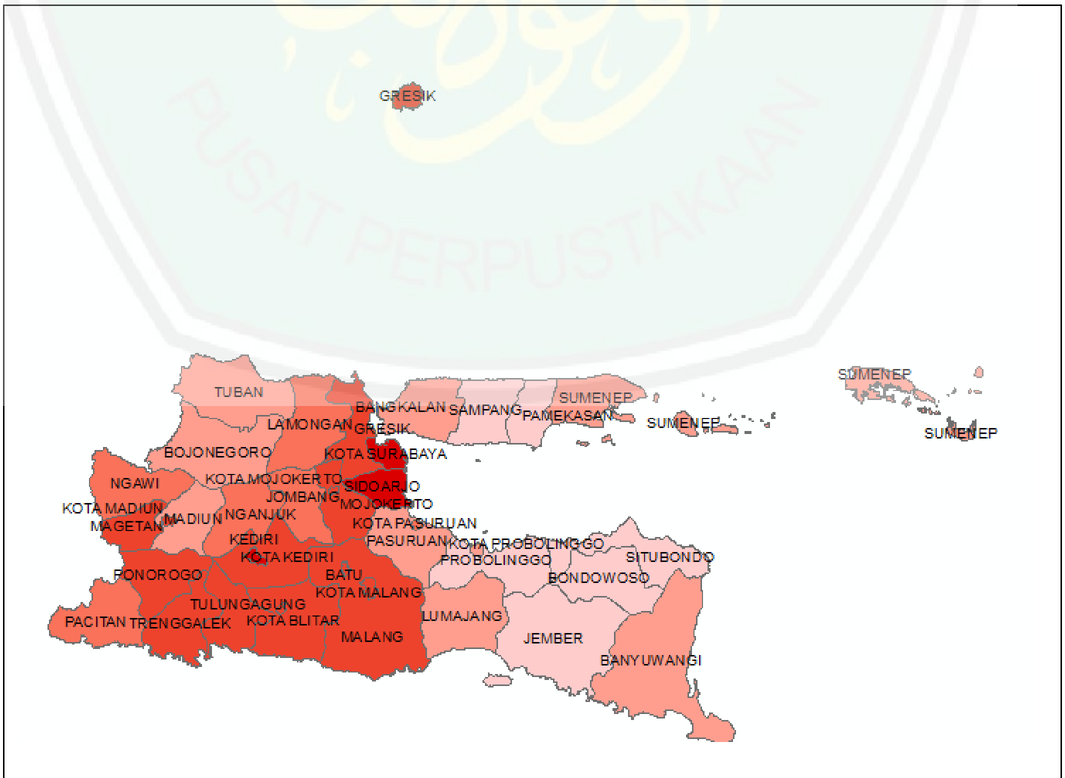
4.2 Model Regresi Spasial *Lag* dan Pengujian Autokorelasi pada Data Kemiskinan di Jawa Timur

4.2.1 Statistik Deskriptif Kemiskinan di Jawa Timur

Suatu data yang disajikan dengan lebih mudah dipahami dan dimengerti maka hal tersebut disebut dengan penyajian dari analisis data secara deskriptif, contohnya berupa penyajian dalam bentuk grafik atau tabel. Analisis data secara deskriptif merupakan langkah awal sebelum dilakukannya analisis data selanjutnya.

Pada penelitian ini data pengamatan yang digunakan yakni data jumlah kemiskinan di Provinsi Jawa Timur pada tahun 2015, dengan variabel terikatnya yakni data jumlah kemiskinan di masing-masing kabupaten/kota di Provinsi Jawa Timur dan variabel bebasnya terdiri atas lima variabel yakni PDRB atau Produk Domestik Regional Bruto (X_1), APS atau Angka Partisipasi Sekolah (X_2), TPT atau Tingkat Pengangguran Terbuka (X_3), TPAK atau Tingkat Partisipasi Angkatan Kerja (X_4) serta PPM atau Prakiraan Permintaan Masyarakat (X_5).

Statistik deskriptif pada data jumlah kemiskinan pada masing-masing kabupaten/kota di Provinsi Jawa Timur tahun 2015 dapat dilihat pada Gambar 4.1 dimana Gambar 4.1 merupakan peta tematik pada data kemiskinan ditiap kabupaten/kota di Provinsi Jawa Timur pada tahun 2015.



Gambar 4.1 Peta Tematik Data Kemiskinan di Jawa Timur

Pada Gambar 4.1 merupakan peta penyebaran data jumlah kemiskinan pada masing-masing kabupaten/kota di Provinsi Jawa Timur. Dalam Gambar 4.1 dijelaskan bahwa kategori jumlah penduduk miskin tebagi menjadi enam bagian, dimana enam bagian tersebut ditunjukkan dari warna merah terang hingga merah yang gelap. Pada Gambar 4.1 ditunjukkan bahwa terdapat wilayah dengan jumlah penduduk miskin dengan kategori tinggi dimana hal tersebut ditandai dengan wilayah yang berwarna merah paling gelap diantara warna merah lainnya dengan jumlah penduduk miskin antara 72,38 hingga 73,78 penduduk miskin dengan 4 wilayah yang tergolong jumlah penduduk miskin yang tinggi yakni Kabupaten Sidoarjo dengan kode 15, Kota Surabaya dengankoda 37, Kabupaten Tulungagung dengan kode 4 dan Kota Blitar dengan kode 31. Dilihat dari letak geografis masing-masing wilayah yang terindikasi jumlah kemiskinan yang tinggi maka letak wilayah yang termasuk dalam kategori kemiskinan tinggi cenderung saling berdekatan seperti pada Kota Blitar yang berdekatan dengan Kabupaten Tulungagung dan Kota Surabaya yang berdekatan dengan Kabupaten Sidoarjo. Dari Gambar 4.1 semakin rendah tingkat kemiskinan pada masing-masing wilayah ditunjukkan dengan semakin terangnya warna merah pada masing-masing wilayah tersebut. Warna merah terang merupakan warna untuk menandai wilayah yang jumlah kemiskinannya rendah yakni antara 65,08 hingga 67,8 penduduk miskin, dimana wilayah yang tercakup dalam jumlah penduduk miskin terdapat 7 wilayah yakni Kabupaten Jember dengan kode 9, Kabupaten Bondowoso dengan kode 11, Kabupeten Situbondo dengan kode 12, Kabupaten Probolinggo dengan kode 13, Kabupaten Pamekasan dengan kode 28 dan Kabupaten Sampang dengan kode 27.

Adapun selain menggunakan pemetaan wilayah di Provinsi Jawa Timur dapat juga dilihat pada Tabel 4.1 mengenai data jumlah kemiskinan dan faktor-faktor yang mempengaruhi kemiskinan di Provinsi Jawa Timur yakni sebagai berikut:

Tabel 4.1 Statistik Deskriptif Variabel Bebas dan Variabel Terikat

Variabel	Minimun	Maksimum	Total	Rata-rata	Median	St.Dev
y	65,08	73,78	2681,77	70,572895	71,16	2,134299
X_1	0,063	24,19	99,443	2,616921	1,425	4,016297
X_2	50,61	92,17	2770,7	72,913158	74,59	10,942835
X_3	0,97	8,46	165,62	4,358421	4,18	1,706544
X_4	60,56	80,64	2595,75	68,309211	68,485	3,342288
X_5	4,6	25,69	462,28	12,165263	11,525	4,967501

Berdasarkan Tabel 4.1 terdiri dari satu variabel terikat dan 5 variabel bebas dimana 1 variabel terikat yakni jumlah kemiskinan di Provinsi Jawa Timur dengan rata-rata 70,572895 jumlah penduduk miskin. Sedangkan untuk variabel bebas sebagai faktor yang mempengaruhi kemiskinan yakni X_1 yakni PDRB (Produk Domestik Regional Bruto) dengan rata-rata 2,616921, X_2 yakni APS (Angka Partisipasi Sekolah) dengan rata-rata 72,913158, X_3 yakni TPT (Tingkat Pengangguran Terbuka) dengan rata-rata 4,358421, X_4 yakni TPAK (Tingkat Partisipasi Angkatan Kerja) dengan rata-rata 68,309211 dan X_5 yakni PPM (Prakiraan Permintaan Masyarakat) dengan rata-rata 12,165263.

4.2.2 Analisis Regresi dengan OLS

Analisis data pada model regresi linier menggunakan metode OLS dengan bantuan *software* Geoda didapatkan hasil sebagai berikut:

$$y = 60{,}2788 + 0{,}11868\, X_1 + 0{,}0526795\, X_2 + 0{,}165994\, X_3 + 0{,}118524\, X_4 - 0{,}220079\, X_5$$

dimana y merupakan jumlah data kemiskinan di Provinsi Jawa Timur dengan X_1 adalah PDRB (Produk Domestik Regional Bruto), X_2 adalah APS (Angka Partisipasi Sekolah), X_3 adalah TPT (Tingkat Pengangguran Terbuka), X_4 adalah TPAK (Tingkat Partisipasi Angkatan Kerja) serta X_5 adalah PPM (Prakiraan Permintaan Masyarakat), dan hasil pendugaan parameter β menggunakan analisis regresi linier dengan OLS yakni:

$$\beta_0 = 60{,}2788$$

$$\beta_1 = 0{,}11868$$

$$\beta_2 = 0{,}0526795$$

$$\beta_3 = 0{,}165994$$

$$\beta_4 = 0{,}118524$$

$$\beta_5 = -0{,}220079$$

Berikut ini adalah hasil analisis regresi linier menggunakan OLS yang disajikan dalam Tabel 4.2.

Tabel 4.2 Hasil Uji Parameter pada Regresi Linier

Variable	**Coefficient**	**Std.Error**	**t-Statistic**
CONSTANT	60,2788	6,90676	8,72751
PDRB_X1	0,11868	0,0787742	1,50658
APS_X2	0,0526795	0,025717	2,04843
TPT_X3	0,165994	0,195638	0,848471
TPAK_X4	0,118524	0,0921355	1,28641
PPM_X5	-0,220079	0,0654973	-3,36012

Berdasarkan Tabel 4.2 terdapat 5 variabel bebas yang menjadi faktor-faktor yang mempengaruhi variabel terikat. Berdasarkan pengujian parameter regresi lalu maka hanya terdapat 2 variabel yang *significant* yakni variabel CONTANT, APS_X2 dan variabel PPM_X5, dimana pengujian dilakukan dengan membandingkan nilai *t-hitung*. Dari pengujian parameter maka didapatkan model dengan variabel yang signifikan sebagai berikut:

$$y = 60{,}2788 + 0{,}0526795\, X_2 - 0{,}220079\, X_5$$

Output hasil analisis regresi linier menggunakan OLS dengan bantuan *software* Geoda secara lengkap dapat dilihat pada lampiran 4. Berdasarkan model yang telah diperoleh selanjutnya akan dilakukan pengujian asumsi klasik pada regresi linier yakni pengujian asumsi normalitas, pengujian asumsi multikolinieritas dan pengujian asumsi homoskedastisitas.

1. Normalitas

Pengujian asumsi klasik yang pertama yakni pengujian asumsi klasik normalitas, dimana dalam pengujian asumsi klasik diasumsikan bahwa *error* mengikuti distribusi normal. Salah satu cara pengujian normalitas yakni dengan menggunakan statistik uji *Jarque Bera*. Berikut hipotesis, statistik uji, titik kritis serta keputusan.

Hipotesis

H_0 : *error* berdistribusi normal

H_1 : *error* tidak berdistribusi normal

Statistik uji

$$JB = \frac{n}{2}\left(S^2 + \frac{(k-3)^2}{4}\right)$$

$$JB = 3{,}144$$

$$\chi^2_{(0.05,2)} = 5{,}99$$

Titik kritis

H_0 ditolak apabila $JB > \chi^2_2$ atau H_0 diterima apabila $JB < \chi^2_2$

Keputusan

$JB = 3{,}144 < 5{,}99 = \chi^2_{(0.05,2)}$ berarti H_0 diterima yang berarti *error* berdistribusi normal.

Hasil *output* pengujian menggunakan *software* Geoda dapat dilihat pada lampiran 2.

2. Multikolinieritas

Pengujian asumsi klasik selanjutnya yakni pengujian asumsi klasik multkolinieritas, dimana dalam pengujian asumsi multikolinieritas diasumsikan bahwa tidak terdapat korelasi antar pengamatan. Salah satu cara pengujian multikolinieritas yakni dengan menggunakan perhitungan bilangan kondisi (CI). Berdasarkan hasil *output* pada lampiran 4 didapatkan bahwa nilai bilangan kondisi multikolinieritas (CI) yakni 76,190612. Berdasarkan bilangan kondisi (CI) multikolinieritas maka multikolinieritas berada pada tingkat tinggi, karena niai multikolinieritas lebih dari 10. Hasil *output* pengujian menggunakan *software* Geoda dapat dilihat pada lampiran 2.

3. Homoskedastisitas

Pengujian asumsi selanjutnya yakni pengujian asumsi klasik homoskedastisitas, dimana dalam pengujian asumsi homoskedastisitas diasumsikan *error* memiliki variansi tetap atau homogen. Salah satu cara pengujian homoskedastisitas yakni dengan menggunakan statistik uji Breusch-Pagan. Berikut hipotesis, statistik uji, titik kritis serta keputusan.

Hipotesis

H_0 : *error* memiliki variansi homogen

H_1 : *error* memiliki variansi heterogen

Statistik uji

$$F = \frac{R^2_{\varepsilon^2} \,/\, k}{1 - R^2_{\varepsilon^2}/(n-k-1)}$$

$$F = 5{,}9279$$

$$F_{tabel} = 2{,}51$$

Titik kritis

H_0 ditolak apabila $F > F_{tabel}$ atau H_0 diterima apabila $F < F_{tabel}$

Keputusan

$F = 5{,}9279 > F_{tabel} = 2{,}51$ berarti H_0 ditolak yang berarti *error* memiliki variansi heterogen.

Hasil *output* pengujian menggunakan *software* Geoda dapat dilihat pada lampiran 2.

4.2.3 Pengujian Autokorelasi Spasial

Hal yang mendasar dalam pendeteksian autokorelasi spasial pada pemetaan data yakni pemilihan matriks pembobot spasial, karena matriks pembobot spasial menunjukkan adanya hubungan antar pengamatan. Selanjutnya dilakukan pemetaan dengan bantuan *software* ArcGIS 10.4 dan mendeteksi autokorelasi spasial menggunakan bantuan *software* Geoda.

1. Pemilihan Matriks Pembobot

   Pada penelitian ini matriks pembobot telah ditentukan terlebih dahulu diawal, karena matriks pembobot digunakan untuk menunjukkan adanya efek spasial dalam suatu pengamatan. Dalam hal ini matriks pembobot yang digunakan adalah *queen contiguity* atau persinggungan sisi sudut dimana matriks pembobot spasial dapat dilihat pada lampiran 4

Pembentukan matriks pembobot pada lampiran 4 dapat dijelaskan yakni baris yang pertama menunjukkan bahwa peng-*input*-an 38 Kabupaten/Kota pada data KB_JATIM.shp dengan format file *shapefile* dengan Kode_BPS sebagai pengganti nama Kabupaten/Kota di Jawa Timur, sedemikian menghasilkan hubungan antar wilayah (Kabupaten/Kota) di Jawa Timur. Dapat dilihat pada lampiran 6 pada matriks pembobot berukuran 38×38 dijelaskan bahwa elemen 0 dan 1 menjelaskan tetangga pada lokasi pengamatan. Misal dapat dilihat pada baris pertama menunjukan lokasi pengamatan pada Kabupaten Pacitan mempunyai dua tetangga yakni Kabupaten Ponorogo dan Trenggalek, dimana Kabupaten Ponorogo berdasarkan ID diberi nomor 3 dan Kabupaten Trenggalek berdasarkan ID diberi nomor 2, sehingga pada kolom 3 dan 2 baris pertama dalam matriks 38×38 elemen matriksnya adalah 1, selain itu diberi elemen 0. Hal itu juga berlaku pada pengamatan di Kabupaten/Kota lainnya di Provinsi Jawa Timur.

2. Pemetaan Kemiskinan *menggunakan Local Indicator of Spatial Autocorrelation* (LISA)

Sebelum melakukan analisis data spasial secara statistik spasial menggunakan indeks LISA akan lebih mudah apabila data dipetakan guna untuk melihat pola penyebaran data jumlah kemiskinan di Provinsi Jawa Timur pada tahun 2015. Pemetaan dilakukan dengan menggunakan bantuan dari *software* ArcGIS 10.4 untuk pemetaan data jumlah kemiskinan dimana pemetaan data dilakukan dengan mengubah data menjadi *shapefile* lalu akan dilanjutkan pada pemetaan yang dioperasikan oleh *software* ArcGIS 10.4.

Pemetaan data jumlah kemiskinan menggunakan theme *polygon* dimana pemetaan akan berdasar pada wilayah masing-masing kabupaten/kota di Provinsi Jawa Timur. Berikut adalah pemetaan data kemiskinan dengan menggunakan metode LISA,

Gambar 4.2 Pemetaan data jumlah kemiskinan menggunakan LISA

Berdasarkan Gambar 4.2 dapat dijelaskan bahwa pemetaan dilakukan berdasarkan *longitude* dan *latitude* wilayah masing-masing kabupaten/kota di Provinsi Jawa Timur dimana pada masing-masing wilayah telah diberi warna untuk menandakan efek spasial pada masing-masing wilayah dengan menggunakan metode (LISA) merupakan metode pengujian autokorelasi secara lokal. Dapat dilihat pada Gambar 4.2 bahwa jumlah kemiskinan di Provinsi Jawa Timur tidak terlalu merata, yang berarti bahwa hanya beberapa kabupaten/kota yang benar-benar penduduknya termasuk kategori miskin. Dalam pemetaan terdapat 3 warna untuk menunjukan adanya indikasi spasial berdasarkan wilayah/lokasi yakni putih, merah dan biru. Warna putih menunjukkan bahwa wilayah tersebut tidak terindikasi kasus kemiskinan secara wilayah, dimana wilayah yang tidak dipengaruhi oleh kasus kemiskinan pada daerah yang diberi warna putih. Sedangkan untuk warna biru menunjukkan bahwa terindikasinya kasus kemiskinan namun dalam kategori rendah, sedangkan warna merah menunjukkan bahwa wilayah tersebut terindikas kasus kemiskinsn dengan kategori tinggi. Berikut merupakan kabupaten/kota yang diklasifikasikan terindikasi dan tidak terindikasi autokorelasi spasial menggunakan metode LISA yang disajikan dalam Tabel 4.3.

Tabel 4.3 Klasifikasi Kabupaten/Kota yang Terindikasi Autokorelasi Spasial dengan LISA

Cluster	Kabupaten/Kota
Kuadran I *High-High* (HH)	Kota Surabaya
Kuadran II *Low-High* (LH)	-
Kuadran III *Low-Low* (LL)	Kabupaten Jember, Kabupaten Bondowoso, Kabupaten Situbondo, Kabupaten Probolinggo, Kabupaten Sampang, Kabupaten Pamekasan
Kuadran IV *High-Low* (HL)	-

3. Pengujian Autokorelasi menggunakan *Local Indicator of Spatial Autocorrelation* (LISA)

Salah satu pendeteksian adanya efek spasial yakni dengan *Local Indicator of Spatial Autocorrelation* (LISA) dimana pendeteksian menggunakan metode lokal indokator yang merupakan metode untuk pendeteksian autokorelasi secara lokal. Berdasarkan data Kemiskinan pada tahun 2015 didapatkan data Kabupaten/Kota di Provisinsi Jawa Timur yang terindikasi autokorelasi spasial dengan menggunakan *software* ArcGIS 10.4 sebagai berikut:

Tabel 4.4 Nilai Indeks LISA dan Z hitung 7 Kabupaten/Kota yang terindikasi adanya autokorelasi spasial

Kabupaten/Kota	I_i	Z_{hitung}
Situbondo	6,724042	4,155504
Sampang	3,530612	2,644702
Pamekasan	3,485327	2,611292
Jember	8,577816	4,658055
Bondowoso	13,797653	7,45733
Kota Surabaya	3,039746	2,28255
Probolinggo	16,434698	7,482445

Berikut pengujian autokorelasi spasial dengan menggunakan metode LISA terhadap 7 Kabupaten/Kota dalam Tabel 4.4.

a. Pengujian wilayah Kabupaten Situbondo (12)

Hipotesis:

$H_0: I_{12} = 0$ (tidak ada autokorelasi spasial pada wilayah Kabupaten Situbondo)

$H_1: I_{12} \neq 0$ (ada autokorelasi spasial pada wilayah Kabupaten Situbondo)

Statistik uji:

$$|Z_{hitung}| = \frac{I_{12} - E(I_{12})}{\sqrt{var(I_{12})}} = \frac{6{,}724042 - E(6{,}724042)}{\sqrt{var(6{,}724042)}} = 4{,}155504$$

Tabel 4.5 Nilai Indeks LISA dan Z hitung Kabupaten Situbondo

I_{12}	Z_{hitung}	$Z_{\frac{\alpha}{2}}$
6,724042	4,155504	1,96

Titik kritis:

H_0 ditolak jika nilai $|Z_{hitung}| > Z_{\frac{\alpha}{2}}$ atau H_0 diterima jika nilai $|Z_{hitung}| \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}$

Keputusan,

$|Z_{hitung}| = 4{,}155504 > 1{,}96 = Z_{\frac{\alpha}{2}}$, artinya H_0 ditolak yang berarti wilayah Kabupaten Situbondo terindikasi autokorelasi spasial.

b. Pengujian wilayah Kabupaten Sampang (27)

Hipotesis:

$H_0: I_{27} = 0$ (tidak ada autokorelasi spasial pada wilayah Kabupaten Sampang)

$H_1: I_{27} \neq 0$ (ada autokorelasi spasial pada wilayah Kabupaten Sampang)

Statistik uji:

$$|Z_{hitung}| = \frac{I_{27} - E(I_{27})}{\sqrt{var(I_{27})}} = \frac{3{,}530612 - E(3{,}530612)}{\sqrt{var(3{,}530612)}} = 2{,}644702$$

Tabel 4.6 Nilai Indeks LISA dan Z hitung Kabupaten Sampang

I_{27}	Z_{hitung}	$Z_{\frac{\alpha}{2}}$
3,530612	2,644702	1,96

Titik kritis:

H_0 ditolak jika nilai $|Z_{hitung}| > Z_{\frac{\alpha}{2}}$ atau H_0 ditolak jika nilai $|Z_{hitung}| \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}$

Keputusan,

$|Z_{hitung}| = 2{,}644702 > 1{,}96 = Z_{\frac{\alpha}{2}}$, artinya H_0 ditolak yang berarti wilayah Kabupaten Sampang terindikasi autokorelasi spasial.

c. Pengujian wilayah Kabupaten Pamekasan (28)

Hipotesis:

$H_0: I_{28} = 0$ (tidak ada autokorelasi spasial pada wilayah Kabupaten Pamekasan)

$H_1: I_{28} \neq 0$ (ada autokorelasi spasial pada wilayah Kabupaten Pamekasan)

Statistik uji:

$$Z_{hitung} = \frac{I_{28} - E(I_{28})}{\sqrt{var(I_{28})}} = \frac{3{,}485327 - E(3{,}485327)}{\sqrt{var(3{,}485327)}} = 2{,}611292$$

Tabel 4.7 Nilai Indeks LISA dan Z hitung Kabupaten Pamekasan

I_{28}	Z_{hitung}	$Z_{\frac{\alpha}{2}}$
3,485327	2,611292	1,96

Titik kritis:

H_0 ditolak jika nilai $|Z_{hitung}| > Z_{\frac{\alpha}{2}}$ atau H_0 ditolak jika nilai $|Z_{hitung}| \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}$

Keputusan,

$|Z_{hitung}| = 2{,}611292 > 1{,}96 = Z_{\frac{\alpha}{2}}$, artinya H_0 ditolak yang berarti wilayah Kabupaten Pamekasan terindikasi autokorelasi spasial.

d. Pengujian wilayah Kabupaten Jember (9)

Hipotesis:

$H_0: I_9 = 0$ (tidak ada autokorelasi spasial pada wilayah Kabupaten Jember)

$H_1: I_9 \neq 0$ (ada autokorelasi spasial pada wilayah Kabupaten Jember)

Statistik uji:

$$Z_{hitung} = \frac{I_9 - E(I_9)}{\sqrt{var(I_9)}} = \frac{8{,}577816 - E(8{,}577816)}{\sqrt{var(8{,}577816)}} = 4{,}658055$$

Tabel 4.8 Nilai Indeks LISA dan Z hitung Kabupaten Jember

I_i	Z_{hitung}	$Z_{\frac{\alpha}{2}}$
8,577816	4,658055	1,96

Titik kritis:

H_0 ditolak jika nilai $|Z_{hitung}| > Z_{\frac{\alpha}{2}}$ atau H_0 ditolak jika nilai $|Z_{hitung}| \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}$

Keputusan,

$|Z_{hitung}| = 4{,}658055 > 1{,}96 = Z_{\frac{\alpha}{2}}$, artinya H_0 ditolak yang berarti wilayah Kabupaten Jember terindikasi autokorelasi spasial.

e. Pengujian wilayah Kabupaten Bondowoso (11)

Hipotesis:

$H_0: I_{11} = 0$ (tidak ada autokorelasi spasial pada wilayah Kabupaten Bondowoso)

$H_1: I_{11} \neq 0$ (ada autokorelasi spasial pada wilayah Kabupaten Bondowoso)

Statistik uji:

$$Z_{hitung} = \frac{I_{11} - E(I_{11})}{\sqrt{var(I_{11})}} = \frac{13{,}797653 - E(13{,}797653)}{\sqrt{var(13{,}797653)}} = 7{,}45733$$

Tabel 4.9 Nilai Indeks LISA dan Z hitung Kabupaten Bondowoso

I_{11}	Z_{hitung}	$Z_{\frac{\alpha}{2}}$
13,797653	7,45733	1,96

Titik kritis:

H_0 ditolak jika nilai $|Z_{hitung}| > Z_{\frac{\alpha}{2}}$ atau H_0 ditolak jika nilai $|Z_{hitung}| \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}$

Keputusan,

$Z_{hitung} = 7{,}45733 > 1{,}96 = Z_{\frac{\alpha}{2}}$, artinya H_0 ditolak yang berarti wilayah Kabupaten Bondowoso terindikasi autokorelasi spasial.

f. Pengujian wilayah Kota Surabaya (37)

Hipotesis:

$H_0: I_{37} = 0$ (tidak ada autokorelasi spasial pada wilayah Kota Surabaya)

$H_1: I_{37} \neq 0$ (ada autokorelasi spasial pada wilayah Kota Surabaya)

Statistik uji:

$$Z_{hitung} = \frac{I_{37} - E(I_{37})}{\sqrt{var(I_{37})}} = \frac{3{,}039746 - E(3{,}039746)}{\sqrt{var(3{,}039746)}} = 2{,}28255$$

Tabel 4.10 Nilai Indeks LISA dan Z hitung Kota Surabaya

I_{37}	Z_{hitung}	$Z_{\frac{\alpha}{2}}$
3,039746	2,28255	1,96

Titik kritis:

H_0 ditolak jika nilai $|Z_{hitung}| > Z_{\frac{\alpha}{2}}$ atau H_0 ditolak jika nilai $|Z_{hitung}| \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}$

Keputusan,

$Z_{hitung} = 2{,}28255 > 1{,}96 = Z_{\frac{\alpha}{2}}$, artinya H_0 ditolak yang berarti wilayah Kota Surabaya terindikasi autokorelasi.

g. Pengujian wilayah Kabupaten Probolinggo (13)

Hipotesis:

$H_0: I_{13} = 0$ (tidak ada autokorelasi spasial pada wilayah Kabupaten Probolinggo)

$H_1 : I_{13} \neq 0$ (ada autokorelasi spasial pada wilayah Kabupaten Probolinggo)

Statistik uji:

$$Z_{hitung} = \frac{I_{13} - E(I_{13})}{\sqrt{var(I_{13})}} = \frac{16{,}434698 - E(16{,}434698)}{\sqrt{var(16{,}434698)}} = 7{,}482445$$

Tabel 4.11 Nilai Indeks LISA dan Z hitung Kabupaten Probolinggo

I_{13}	Z_{hitung}	$Z_{\frac{\alpha}{2}}$
16,434698	7,482445	1,96

Titik kritis:

H_0 ditolak jika nilai $|Z_{hitung}| > Z_{\frac{\alpha}{2}}$ atau H_0 ditolak jika nilai $|Z_{hitung}| \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}$.

Keputusan,

$Z_{hitung} = 7{,}482445 > 1{,}96 = Z_{\frac{\alpha}{2}}$, artinya H_0 ditolak yang berarti wilayah Kabupaten Probolinggo terindikasi autokorelasi.

Pengujian autokorelasi spasial terhadap 38 Kabupaten/Kota di Provinsi Jawa Timur diambil hanya 7 Kabupaten/Kota saja melalui bantuan *software* ArcGIS 10.4, dimana 7 Kabupaten/Kota tersebut adalah Kabupaten/Kota yang terindikasi autokorelasi spasial secara lokal menggunakan metode *Local Indicator of Spatial Autocorrelation* (LISA). Nilai indeks lokal indikator, Z hitung dan $p-value$ 38 Kabupaten/Kota di Jawa Timur dapat dilihat pada Lampiran 7.

4.2.4 Model Regresi Spasial *Lag*

Model regresi spasial *lag* yang didapatkan berdasarkan variabel terikat yakni variabel kemiskinan (y_i) dengan i adalah unit observasi masing-masing wilayah di Jawa Timur yang mengandung efek spasial dengan faktor-faktor yang mempengaruhi antara lain yakni PDRB atau Produk Domestik Regional Bruto (X_1), APS atau Angka Partisipasi Sekolah (X_2), TPT atau Tingkat Pengangguran Terbuka (X_3), TPAK atau Tingkat Partisipasi Angkatan Kerja (X_4) serta PPM atau

Prakiraan Permintaan Masyarakat (X_5). Dengan peubah terikat kemiskinan (y_i) dengan faktor-faktor yang mempengaruhi sehingga didapatkan suatu model regresi spasial *lag* dengan bantuan *software* Geoda yang ditunjukkan dalam Tabel 4.12 sebagai berikut:

Tabel 4.12 Nilai Parameter pada Model Regresi Spasial *Lag*

Variable	Coefficient	Std.Error	z-value
W_kemiskinan	0,498462	0,120103	4,15027
CONSTANT	31,98	9,67197	3,30647
PDRB_X1	0.0564973	0.0571377	0,988793
APS_X2	0.0270742	0.0186623	1,45074
TPT_X3	0.0587763	0.14017	0,419323
TPAK_X4	0.0455616	0.0660445	0,689862
PPM_X5	-0.155897	0.051733	-3,0135

Keterangan:
R^2 =68,2375%
α = 5%

Berdasarkan Tabel 4.12 dapat dilihat bahwa terdapat 5 variabel bebas, variabel tak bebas dan parameter spasial *lag* yakni ρ dimana parameter spasial *lag* ini menunjukkan besarnya pengaruh lokasi atau wilayah pada variabel tak bebas yakni kemiskinan sehingga dari hasil estimasi parameter regresi spasial *lag* didapatkan model sebagai berikut:

$$y_i = 31{,}98 + 0{,}498462 \sum_{i=1, i\neq j}^{n} W_{ij}\, y_j + 0{,}0564973X_1 + 0{,}0270742X_2$$

$$+ 0{,}0587763X_3 + 0{,}0455616\mathrm{X}_4 - 0{,}155897\mathrm{X}_5,$$

Model regresi spasial *lag* tersebut menjelaskan bahwa faktor-faktor yang bertanda positif searah mendukung variabel terikat yakni kemiskinan, sedangkan untuk faktor yang bertanda negatif yakni X_5 artinya faktor PPM berlawanan arah, namun faktor ini juga turut mempengaruhi variabel terikat yakni kemiskinan.

Berdasarkan Tabel 4.12 juga ditunjukkan bahwa koefisien *lag* pada kasus data kemiskinan signifikan, dilihat pada z hitung yang didapatkan. Sedemikian disimpulkan bahwa nilai CONSTANT dan PPM_X_5 adalah signifikan karena z hitung lebih besar dari z tabel yakni 1,64. Sedemikian model yang terbentuk berdasarkan variabel yang signifikan yakni:

$$y_i = 31{,}98 + 0{,}498462 \sum_{i=1, i \neq j}^{n} W_{ij}\, y_j - 0{,}155897 X_5,$$

dimana nilai CONTANT dianggap sebagai faktor lain yang tidak ditetapkan sebagai faktor yang mempengaruhi kemiskinan namun juga memiliki pengaruh yang signifikan terhadap kemiskinan itu sendiri. Sedangkan untuk faktor lain selain faktor PPM (X_5) merupakan faktor yang tidak signifikan secara statistik, hal ini diketahui bahwa nilai z hitung lebih kecil dari pada z tabel sehingga dapat dijelaskan bahwa faktor selain PPM (X_5) tidak signifikan secara statistik. Sedangkan untuk koefisien spasial *lag* memiliki pengaruh yang signifikan secara statistik, hal ini berarti bahwa faktor lokasi benar-benar mempengaruhi pada pangamatan data kemiskinan pada masing-masing wilayah/daerah di Kabupaten/Kota di Provinsi Jawa Timur.

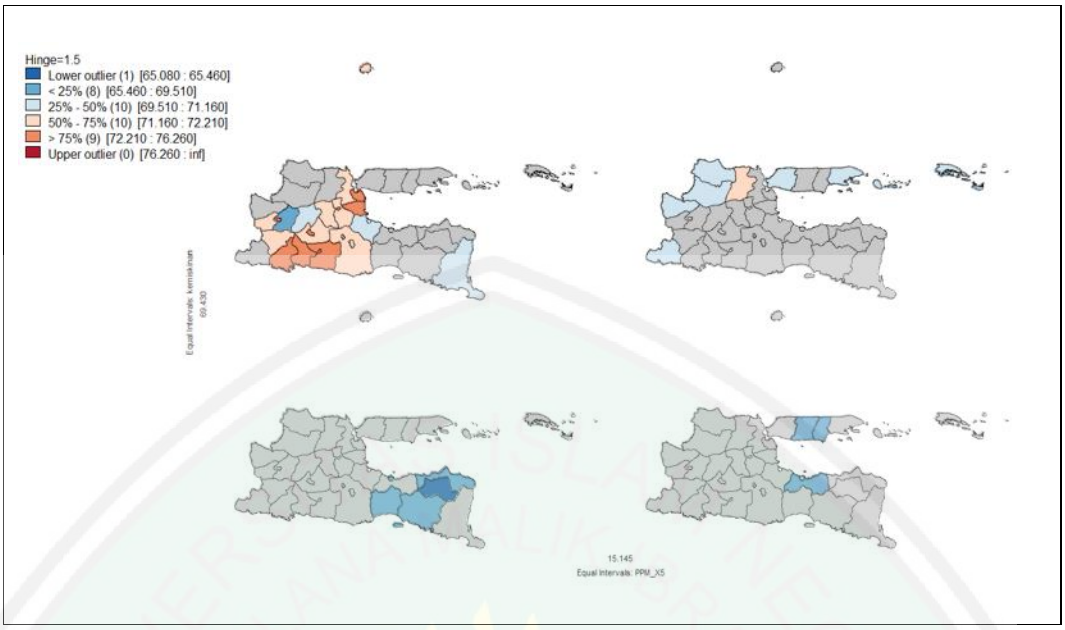
Berikut adalah contoh model regresi spasial *lag* pada Kabupaten Jember, dengan terdapat 4 Kabupaten yang berdekatan (bertetangga) dengan Kabupaten Jember sehingga model yang terbentuk adalah:

$$y_9 = 31{,}98 + 0{,}124616 y_8 + 0{,}124616 y_{10} + 0{,}124616 y_{11} + 0{,}124616 y_{13} - 0.155897 X_5$$

Berdasarkan model pada Kabupaten Jember dapat dijelaskan bahwa 31,98 merupakan konstan, yang artinya terdapat faktor lain yang mempengaruhi kemiskinan sebanyak 31,98 yang tidak termasuk faktor yang telah ditetapkan. Untuk x_5 yakni PPM atau prakiraan permintaan masyarakat apabila meningkat maka jumlah kasus kemiskinan di Kabupaten Jember akan berkurang sebesar 0,155897. Sedangkan untuk variabel y_8, y_{10}, y_{11} dan y_{13} merupakan kabupaten/kota yang bertetanggaan dengan Kabupaten Jember antara lain yakni y_8 yang merupakan Kabupaten Lumajang yang diberi id 8, y_{10} yang merupakan Kabupaten Banyuwangi yang diberi id 10, y_{11} yang merupakan Kabupaten Bondowoso yang diberi id 11, dan y_{13} yang merupakan Kabupaten Probolinggo yang diberi id 13 dimana pada masing-masing tetangga berpengaruh secara spasial sebesar 0,124616.

4.2.5 Faktor yang mempengaruhi Jumlah Kemiskinan

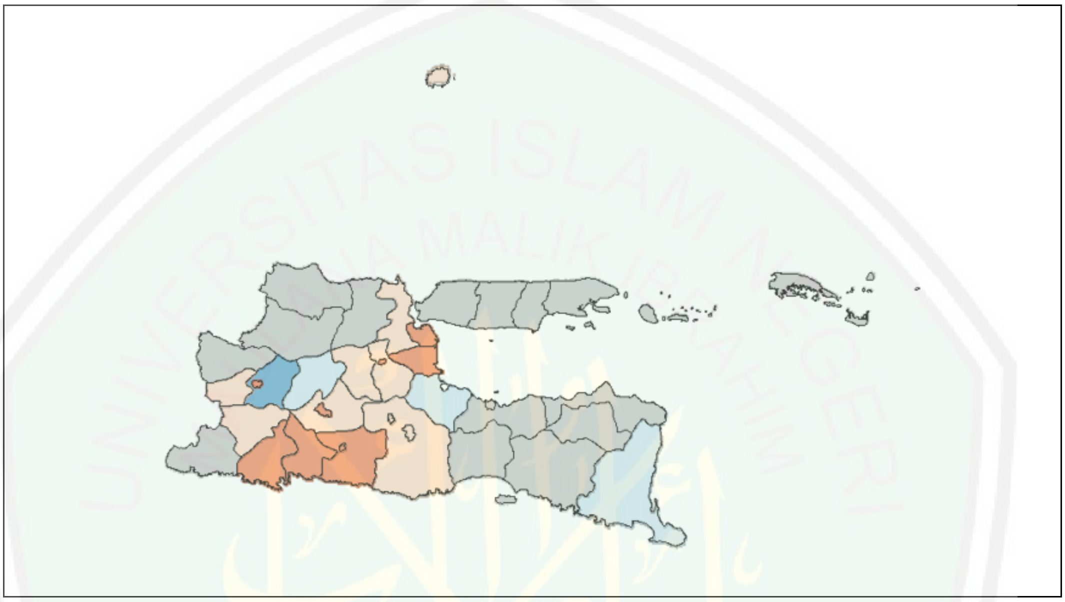
Berdasarkan hasil pengujian parameter model regresi spasial *lag* dari faktor-faktor yang mempengaruhi jumlah kemiskinan dapat diketahui bahwa variabel yang *significant* secara stastistik yakni variabel X_5 atau faktor PPM (Prakiraan Permintaan Masyarakat). Kondisi faktor PPM (Prakiraan Permintaan Masyarakat pada masing-masing kabupaten/kota) dapat ditunjukkan pada gambar berikut.



Gambar 4.3 Peta Tematik Faktor yang Mepengaruhi Jumlah Kemiskinan

Peta penyebaran pada Gambar 4.3 dapat dijelaskan bahwa variabel terikat (y) yakni kemiskinan dipengaruhi oleh variabel terikat yang signifikan secara statistik yakni variabel PPM (X_5) dimana pada Gambar 4.3 dijelaskan bahwa variabel terikat dan bebas berada dalam kuadran yang sama yang berdasarkan pada kemiripan wilayah/area pada kabupaten/kota di Jawa Timur. Degradasi warna menunjukkan bahwa area berdasarkan kasus kemiskinan yang dipengaruhi oleh faktor PPM yakni dimulai dari warna biru gelap ke warna merah gelap, dimana biru gelap menunjukkan bahwa area/wilayah berdasarkan kasus jumlah kemiskinan yang dipengaruhi faktor PPM berada dalam tingkat yang rendah. Sedangkan warna biru muda hingga *orange* menunjukkan bahwa bahwa area/wilayah berdasarkan kasus jumlah kemiskinan yang dipengaruhi faktor PPM berada dalam tingkat yang sedang, dan warna merah gelap menunjukkan bahwa area/wilayah berdasarkan kasus jumlah kemiskinan yang dipengaruhi faktor PPM berada dalam tingkat yang tinggi. Pada Gambar 4.3 terdapat 4 kuadran dimana masing-masing berdasarkan pada kemiripan wilayah di masing-masing Kabupaten/Kota di Provinsi Jawa Timur yang mana juga menjelaskan bahwa wilayah kemiskinan yang dipengaruhi oleh faktor PPM.

Berikut merupakan peta tematik berdasarkan wilayah kemiskinan yang dipengaruhi oleh faktor PPM pada kuadran I.



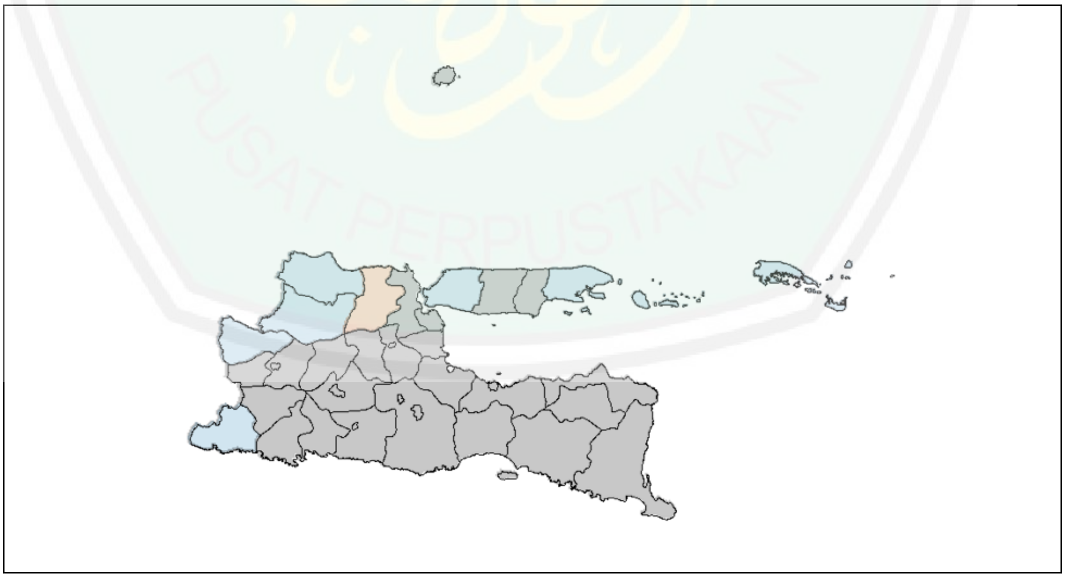
Gambar 4.4 Peta Tematik Faktor PPM yang Mepengaruhi Kemiskinan berdasarkan Wilayah Kemiskinan pada Kuadran I

Gambar 4.4 merupakan peta tematik berdasarkan kemiripan wilayah pada kuadran 1. Pada Gambar 4.4 dijelaskan bahwa berdasarkan wilayah kemiskinan yang dipengaruhi oleh faktor PPM berada pada tingkat rendah hingga tinggi yang terlihat berdasarkan warna pada masing-masing wilayah. Dimana hal tersebut menjelaskan bahwa berdasarkan kemiripan wilayah pada pola penyebaran kemiskinan dan membentuk kelompok berdasarkan wilayah kasus kemiskinan yang bersisihan atau tetangga. Hal ini juga menjelaskan bahwa dengan rata-rata kasus kemiskinan yakni 69.430 penduduk miskin dengan wilayah kemiripan yang dikelompokkan pada kuadran I maka terdapat rata-rata Prakiraan Permintaan Masyarakat (PPM) sebesar 15.145 yang mempengaruhi kemiskinan berdasarkan kemiripan wilayah pada kuadran I. Berikut klasifikasi Kabupaten/Kota berdasarkan kemiripan wilayah pada kasus kemiskinan yang dipengaruhi oleh PPM berdasarkan wilayah kemiskinan pada kuadran I.

Tabel 4.13 Tabel Klasifikasi Kabupaten/Kota Berdasarkan Wilayah Kemiskinan yang Dipengaruhi oleh PPM pada Kuadran I

Kategori		Kabupaten/Kota
Sedang	Biru Muda (25%-50% [69.510-71.160])	Kabupaten Banyuwangi, Kota Pasuruan, Kabupaten Pasuruan
	Merah Muda (50%-75% [71.160-72.210])	Kabupaten Malang, Kota Malang, Kota Batu, Kabupaten Mojokerto, Kabupaten Jombang, Kabupaten Kediri, Kabupaten Gresik, Kabupaten Ponorogo, Kabupaten Magetan
Tinggi	Merah Terang (75% [72.210-76.260])	Kota Blitar, Kabupaten Tulungagung, Kabupaten Trenggalek, Kota Kediri, Kabupaten Sidoarjo, Kota Surabaya, Kota Mojokerto, Kota Madiun,

Berikut merupakan peta tematik berdasarkan wilayah kemiskinan yang dipengaruhi oleh faktor PPM pada kuadran II.



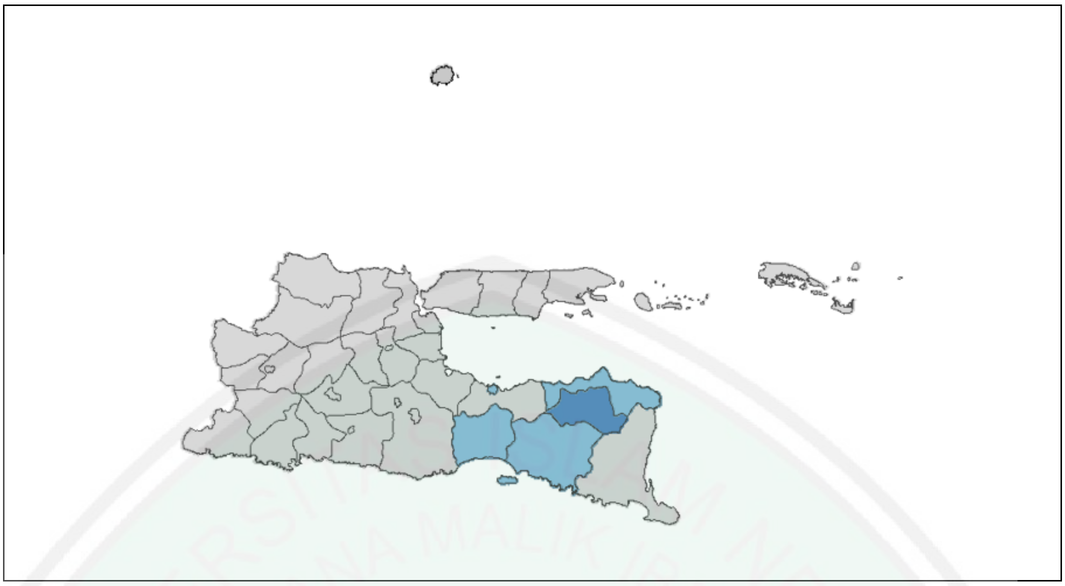
Gambar 4.5 Peta Tematik Faktor PPM yang Mepengaruhi Kemiskinan berdasarkan Wilayah Kemiskinan pada Kuadran II

Gambar 4.5 merupakan peta tematik berdasarkan kemiripan wilayah pada kuadran II. Serupa dengan Gambar 4.4, pada Gambar 4.5 juga ditunjukkan bahwa berdasarkan wilayah kemiskinan yang dipengaruhi oleh faktor PPM berada pada tingkat rendah dan sedang yang berdasarkan warna pada masing-masing wilayah. Hal tersebut dapat dijelaskan berdasarkan kemiripan wilayah kemiskinan dan membentuk kelompok berdasarkan wilayah yang bersisihan atau tetangga, sehingga ketika kasus kemiskinan yakni 69.430 penduduk miskin dengan wilayah kemiripan yang dikelompokkan pada kuadran II maka terdapat rata-rata Prakiraan Permintaan Masyarakat (PPM) sebesar 15.145 yang mempengaruhi kasus kemiskinan berdasarkan kemiripan wilayah pada kuadran II. Berikut klasifikasi kabupaten/kota berdasarkan kemiripan wilayah pada kasus kemiskinan yang dipengaruhi oleh PPM pada kuadran II.

Tabel 4.14 Tabel Klasifikasi Kabupaten/Kota Berdasarkan Wilayah Kemiskinan yang Dipengaruhi oleh PPM pada Kuadran II

Kategori		Kabupaten/Kota
Sedang	Merah Muda (50%-75% [71.160-72.210])	Kabupaten Lamongan
Tinggi	Merah Terang (75% [72.210-76.260])	Kabupaten Pacitan, Kabupaten Ngawi, Kabupaten Bojonegoro, Kabupaten Tuban, Kabupaten Bangkalan, Kabupaten Sumenep

Berikut merupakan peta tematik berdasarkan wilayah kemiskinan yang dipengaruhi oleh faktor PPM pada kuadran III.



Gambar 4.6 Peta Tematik Faktor PPM yang Mepengaruhi Kemiskinan berdasarkan Wilayah Kemiskinan pada Kuadran III

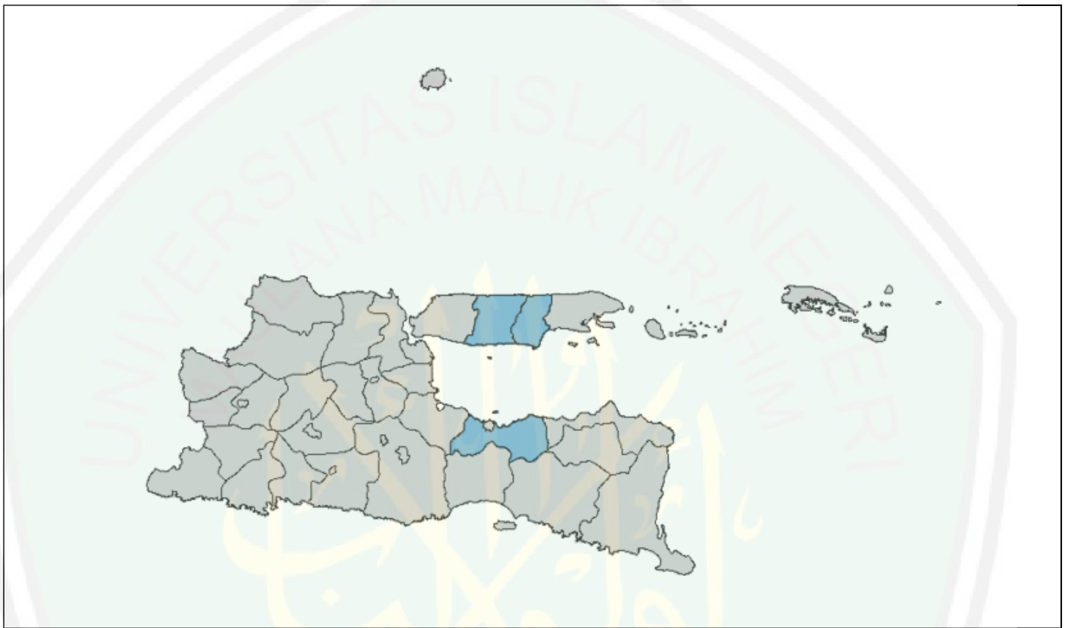
Pada Gambar 4.6 adalah peta tematik berdasarkan kemiripan wilayah pada kuadran III. Pada Gambar 4.6 ditunjukkan bahwa berdasarkan wilayah kemiskinan yang dipengaruhi oleh faktor PPM berada pada tingkat rendah berdasarkan warna pada masing-masing wilayah. Hal tersebut dapat dijelaskan jika berdasarkan kemiripan wilayah dan membentuk kelompok berdasarkan wilayah yang bersisihan atau tetangga. Apabila terjadi kasus kemiskinan dengan rata-rata yakni 69.430 penduduk miskin dengan wilayah kemiripan yang dikelompokkan pada kuadran III maka terdapat rata-rata Prakiraan Permintaan Masyarakat (PPM) sebesar 15.145 yang mempengaruhi kasus kemiskinan berdasarkan kemiripan atau penyebaran wilayah kemiskinan pada kuadran III. Berikut klasifikasi kabupaten/kota berdasarkan kemiripan wilayah pada kasus kemiskinan yang dipengaruhi oleh PPM pada kuadran III.

Tabel 4.15 Tabel Klasifikasi Kabupaten/Kota Berdasarkan Wilayah Kemiskinan yang Dipengaruhi oleh PPM pada Kuadran III

Kategori		Kabupaten/Kota
Tinggi	Biru Gelap (Lower Outlier [65.080:65.460])	Kabupaten Bondowoso

	Biru Terang (<25% [65.460:69.510])	Kabupaten Jember, Kabupaten Lumajang, Kabupaten Kabupetn Situbondo

Berikut merupakan peta tematik berdasarkan wilayah kemiskinan yang dipengaruhi oleh faktor PPM pada kuadran III.



Gambar 4.7 Peta Tematik Faktor PPM yang Mepengaruhi Kemiskinan berdasarkan Wilayah pada Kuadran IV

Pada Gambar 4.7 adalah peta tematik berdasarkan kemiripan wilayah pada kuadran IV. Gambar 4.7 ditunjukkan bahwa berdasarkan wilayah kemiskinan yang dipengaruhi oleh faktor PPM berada pada tingkat rendah saja. Hal tersebut dapat dijelaskan jika berdasarkan kemiripan wilayah dan membentuk kelompok berdasarkan wilayah yang bersisihan atau tetangga. Apabila terjadi kasus kemiskinan dengan rata-rata yakni 69.430 penduduk miskin dengan wilayah kemiripan yang dikelompokkan pada kuadran IV maka terdapat rata-rata Prakiraan Permintaan Masyarakat (PPM) sebesar 15.145 yang mempengaruhi kasus kemiskinan berdasarkan kemiripan wilayah pada kuadran IV. Berikut klasifikasi kabupaten/kota berdasarkan kemiripan wilayah pada kasus kemiskinan yang dipengaruhi oleh PPM pada kuadran IV.

Tabel 4.16 Tabel Klasifikasi Kabupaten/Kota Berdasarkan Wilayah Kemiskinan yang Dipengaruhi oleh PPM pada Kuadran IV

Kategori		Kabupaten/Kota
Tinggi	Biru Terang (<25% [65.460:69.510])	Kabupaten Probolinggo, Kabupaten Sampang, Kabupaten Pamekasan

Berdasarkan uraian di atas maka dapat dijelaskan bahwa faktor PPM adalah faktor yang mempengaruhi kasus kemiskinan secara spasial dengan model spasial *lag*, dimana faktor kemiskinan yang dipengaruhi oleh wilayah. Sehingga dapat tepat dikatakan bahwa faktor PPM yang mempengaruhi jumlah kemiskinan namun hal tersebut juga tidak lepas dari faktor lain yang mempengaruhi selain dari faktor PPM sendiri dan faktor wilayah disekitar atau tetangga (*neighboring*). Apabila faktor pada tetangga baik maka kasus jumlah kemiskinan pun akan berkurang dengan baik sehingga dapat mengurahi kasus jumlah kemiskinan yang berarti, namun sebaliknya apabila faktor yang mempengaruhi bersifat buruk maka kasus jumlah kemiskinan pun akan bertambah sehingga berdampak pada resiko banyaknya jumlah kemiskinan yang terus meningkat.

4.3 Pentingnya Lingkungan dalam Islam

Sebagai Khalifah, manusia harus tetap menjaga keimanan dalam situasi dan kondisi apapun itu, seperti yang disampaikan Allah Swt dalam al-Qur'an surat al Hujuraat: 15:

إِنَّمَا ٱلۡمُؤۡمِنُونَ ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ بِٱللَّهِ وَرَسُولِهِۦ ثُمَّ لَمۡ يَرۡتَابُواْ وَجَٰهَدُواْ بِأَمۡوَٰلِهِمۡ وَأَنفُسِهِمۡ فِي سَبِيلِ ٱللَّهِۚ أُوْلَٰٓئِكَ هُمُ ٱلصَّٰدِقُونَ ١٥

Sesungguhnya orang-orang yang beriman itu hanyalah orang-orang yang percaya (beriman) kepada Allah dan Rasul-Nya, kemudian mereka tidak ragu-ragu dan mereka berjuang (berjihad) dengan harta dan jiwa mereka pada jalan Allah. Mereka itulah orang-orang yang benar.

Firman Allah Ta'ala, "*Sesungguhnya orang-orang yang beriman,*" maksudnya, orang-orang yang beriman secara sempurna: "*Adalah orang-orang yang beriman kepada Allah dan Rasul-Nya, kemudian mereka tidak ragu-ragu,"* yakni, tidak bimbang dan tidak pula goyah, bahkan mereka semakin kokoh dalam satu keadaam, yaitu keimanan yang sebenarnya. "*Dan mereka berjihad dengan harta dan jiwa mereka pada jalan Allah,*" yakni, mengerahkan seluruh jiwa dan harta benda mereka untuk berbuat taat kepada Allah dan mencari keridhaan-Nya. "*Mereka itulah orang-orang yang benar.*" Yakni, benar dalam ucapan mereka jika mereka mngatakan bahwa mereka beriman, dan tidak seperti sebagian orang-orang Arab Badui yang mereka tidak beriman melainkan hanya perkataan lahiriah semata (Katsir, 2001b).

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan uraian yang dipaparkan pada bab sebelumnya maka dapat disimpulkan bahwa:

1. Pada pengujian autokorelasi spasial menggunakan statistik uji *Local Indicator of Spatial Autocorrelation* atau LISA didapatkan dari perbandingan $\hat{l}(\gamma)$ dengan $\hat{l}(\omega)$ dalam hal ini disebut dengan statistik uji rasio *likelihood*, dimana

$$I = \frac{\hat{l}(\gamma)}{\hat{l}(\omega)} = \left[\frac{\left(-\frac{2\pi}{n}\left([\boldsymbol{y}-\hat{\rho}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}][\boldsymbol{y}-\hat{\rho}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}]^T\right)\right)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[\frac{n}{2}\right]}{\left(-\frac{2\pi}{n}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})^T(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})\right)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[\frac{n}{2}\right]}\right] \sim Z$$

ketika $\rho = 0$ maka

$$I = \left[\frac{\left(-\frac{2\pi}{n}\left([\boldsymbol{y}-\hat{\rho}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}][\boldsymbol{y}-\hat{\rho}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}]^T\right)\right)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[\frac{n}{2}\right]}{\left(-\frac{2\pi}{n}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})^T(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})\right)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[\frac{n}{2}\right]}\right] \sim Z = 0$$

artinya tidak terdapat autokorelasi spasial pada model regresi spasial *lag*.

sedangkan ketika $\rho \neq 0$ maka

$$I = \left[\frac{\left(-\frac{2\pi}{n}\left([\boldsymbol{y}-\hat{\rho}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}][\boldsymbol{y}-\hat{\rho}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}]^T\right)\right)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[\frac{n}{2}\right]}{\left(-\frac{2\pi}{n}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})^T(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})\right)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[\frac{n}{2}\right]}\right] \sim Z \neq 0$$

artinya terdapat autokorelasi spasial antar lokasi pada model regresi spasial *lag* secara lokal.

2. Berdasarkan data Kemiskinan tahun 2015 didapatkan 7 kabupaten/kota yang terindikasi autokorelasi spasial antara lain Kabupaten Situbondo, Kabupaten Sampang, Kabupaten Pamekasan, Kabupaten Jember Kabupaten Bondowoso, Kota Surabaya dan Kabupaten Probolinggo dengan nilai Indeks LISA, Z hitung dan *probability value* sebagai berikut:

Tabel 5.1 Nilai Indeks LISA, Z hitung dan *probability value* 7 Kabupaten/Kota yang terindikasi adanya autokorelasi spasial

Kabupaten/Kota	I_i	Z_{hitung}	*p-value*
Situbondo	6,724042	4,155504	0,000032
Sampang	3,530612	2,644702	0,008176
Pamekasan	3,485327	2,611292	0,00902
Jember	8,577816	4,658055	0,000003
Bondowoso	13,797653	7,45733	0,000000
Kota Surabaya	3,039746	2,28255	0,022457
Probolinggo	16,434698	7,482445	0,000000

sedangkan pemodelan regresi spasial *lag* yang terbentuk berdasarkan data kemiskinan dengan 5 faktor yang yang mempengaruhi variabel kemiskinan (y) antara lain PDRB atau Produk Domestik Regional Bruto (X_1), APS atau Angka Partisipasi Sekolah (X_2), TPT atau Tingkat Pengangguran Terbuka (X_3), TPAK atau Tingkat Partisipasi Angkatan Kerja (X_4) serta PPM atau Prakiraan Permintaan Masyarakat (X_5) yakni sebagai berikut:

$$y_i = 31{,}98 + 0{,}498462 \sum_{i=1, i\neq j}^{n} W_{ij}\, y_j - 0{,}155897 X_5,$$

dimana

y = jumlah kemiskinan

W_{ij} = pembobot spasial *lag*

X_5 = faktor PPM (Prakiraan Permintaan Masyarakat)

5.2 Saran

Saran untuk penulisan skripsi ini antara lain :

1. Pada metode dan model yang digunakan pembaca diharapkan dapat menggunakan metode lain dari yang peneliti gunakan, baik dalam estimasi parameter ataupun dalam pengujian autokorelasi spasial, sedangkan untuk model yang digunakan, pembaca diharapkan untuk menggunakan model dengan parameter yang lebih luas seperti dengan menambahkan parameter waktu dalam model spasial, sehingga dalam masalah yang lebih komplek dapat memberikan penyelesaian.
2. Pada pengaplikasian data pembaca diharapkan untuk menambahkan beberapa faktor yang mempengaruhi variabel penelitian guna untuk pengembangan serta persiapan prosedur dilapangan agar lebih representatif.

DAFTAR RUJUKAN

Andrianto, H. & Prijono, A., 2006. *Menguasai Matriks dan Vektor*. Bandung: Rekayasa Saisn.

Anselin, L., 2001. Lagrange Multiplier Test Diagnostics for Spatial Dependence and Spatial Heterogeneity. *Geographical Analysis*, 20(1), 1-17.

Anselin, L., 2001. Spatial Externalities, Spatial Multiplier, and Spatial Econometrics. *International regional science review*, 26(2), 153-166.

Anselin, L., 2013. *Spatial Econometrics: Method and Models.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Anton, H. & Rorres, C., 2010. *Elementary Linear Algebra Aplications Version.* New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.

Aziz, A., 2010. *Ekonometrika.* Malang: UIN Malang Press.

BPS, 2016. *Badan Pusat Statistik Provinsi Jawa Timur.* [Online] Available at: https://jatim.bps.go.id/subject/23/kemiskinan.html#subjekViewTab1 [Diakses 26 April 2018].

Cahyat, A., 2004. *Governance Brief-Bagaimana Kemiskinan Terukur?,* Bogor: CIFOR.

Chen, Y., 2015. Spatial Autocorrelation Approaches to Testing Residuals from Least Squares Regression. *Journal Pone,* 11(1), 1-19.

Cressie, N., 2015. *Statistics for Spatial data.* Second penyunt. New York: John Wiley and Sons.

Fang, C. et al., 2015. Estimating The Impact of Urbanization on Air Quality in China Using Spatial Regression Models. *Sustainability,* 7(15), 15570-15592.

Ghozali, I., 2005. *Aplikasi Analisis Multivariat dengan Program SPSS.* Semarang: Badan Penerbit Univesitas Diponegoro.

Gujarati, D. N., 2010. *Basic Econometrics.* 5th ed. New York: Mc Graw Hill.

Hartoyo, E., Nugroho, Y., Bhirowo, A. & Khalid, B., 2010. *Modul Pelatihan Sistem Informasi Geografis (GIS) Tingkat Dasar.* Tropenbos Intenational Indonesia Progamme: s.n.

Hogg, R. V. & Craig, A. T., 1978. *Introduction To Mathematical Statistics.* New York: Macmil-an Publishing, Inc.

Katsir, I., 2001a. *Tafsir Ibnu Katsir Juz 2.* Bandung: Sinar Baru Algensindo.

Katsir, I., 2001b. *Tafsir Ibnu Katsir Juz 3.* Bandung: Sinar Baru Algensindo.

Laksmi, S., 2017. *Kemiskinan di Provinsi Jawa Timur.* [Online] Available at: https://www.kompasiana.com/slaksmisari/kemiskinan-di-provinsi-jawa-timur_5900c44cce7e616b52aaf3bd [Diakses 26 April 2018].

Lee, J. & Wong, D. W. S., 2001. *Statistical Analysis with Arcview GIS.* United States of America: John Willey and Sons.

Lembo, A. J., 2006. *Spatial Autocorrelation.* [Online] Available at: faculty.salisbury.edu/~ajlembo/419/sa.pdf [Diakses 14 Januari 2018].

LeSage, J. P., 2008. Regression Analysis of Spatial Data. *Regional Analysis and Policy*, 27(2), 83-94.

Lipschutz, S. & Lipson, M., 2009. *SCHAUM'S Outlines Linear Algebra Fourth Edition.* New York: McGraw-Hill Companies, Inc.

Mathur, M., 2015. Spatial Autocorrelation Analysis in Plant Population: An Overview. *Applied and Natural Science*, 7(1), 502-513.

Sembiring, 1995. *Analisis Regresi.* Bandung: ITB.

Singgih, S., 2000. *Latihan SPSS Statistik Parametik.* Jakarta: Gramedia.

Somantri, A. & Muhidin, S. A., 2006. *Aplikasi Statistika Dalam Penelitian.* Bandung: Pustaka Setya.

Supangat, A., 2007. *Statistika dalam Kajian Deskriptif, Inferensi dan Nonparametrik.* Jakarta: Kencana Prenada Media Group.

Xie, H., Liu, G., Liu, Q. & Wang, P., 2014. Analysis of Spatial Disparities and Driving Factors of Energy Consumption Change in China Based on Spatial Statistics. *Sustainability*, 23(6), 2264-2280.

LAMPIRAN

Lampiran 1 Data Kemiskinan Provinsi Jawa Timur pada Tahun 2015

Kabupaten/Kota	Kemiskinan (Y)	PDRB (X1) (Produk Domestik Regional Bruto)	APS (X2) (Angka Partisipasi Sekolah)	TPT (X3) (Tingkat Pengangguran Terbuka)	TPAK (X4) (Tingkat Partisipasi Angkatan Kerja)	PPM (5) (Prakiraan Permintaan Masyarakat)
Tulungagung	72,77	1.67	74.05	3.95	8.57	69.63
Trenggalek	72,38	0.78	62.33	2.46	13.39	74.43
Sumenep	69,81	1.62	75.13	2.07	20.2	69.99
Situbondo	67,83	0.83	68.28	3.57	13.63	68.9
Sidoarjo	73,42	8.36	84.72	6.3	6.44	67.49
Sampang	67,4	0.89	55.34	2.51	25.69	68.37
Ponorogo	71,7	0.87	77.22	3.68	11.91	70.24
Pamekasan	66,43	0.7	69.81	4.26	17.41	70.05
Ngawi	71,1	0.84	75.17	3.99	15.61	65.95
Nganjuk	70,68	1.11	71.17	2.1	12.69	64.48
Magetan	71,71	0.81	85.76	6.05	11.35	70.6
Lumajang	68,81	1.39	50.61	2.6	11.52	66.75
Lamongan	71,26	1.66	81.55	4.1	15.38	68.63
Jombang	71,22	1.71	81.11	6.11	10.79	68.79
Jember	67,54	3.3	52.52	4.77	11.22	63.98
Gresik	72,16	6.07	84.26	5.67	13.63	64.69
Bondowoso	65,08	0.83	61.13	1.75	14.96	71.33

Bojonegoro	69,89	3.5	62.2	5.01	15.71	66.22
Banyuwangi	69,7	3.32	67.92	2.55	9.17	72.87
Bangkalan	69,51	1.26	58.73	5.00	22.57	69.64
Pasuruan	69,7	6.3	62.77	6.41	10.72	67.7
Kota Pasuruan	70,44	0.36	83.12	5.57	7.47	67.24
Kota Malang	72,21	3.13	78.91	7.28	4.6	60.56
Kota Surabaya	73,78	24.19	75.19	7.01	5.82	66.1
Malang	71,67	4.13	64.44	4.95	11.53	66.28
Kota Batu	71,99	0.68	76.67	4.29	4.71	68.6
Madiun	69,49	0.8	89.22	6.99	12.54	66.12
Kota Madiun	72,27	0.63	87.77	5.1	4.89	65.97
Kota Kediri	71,92	5.44	88.43	8.46	8.51	65.7
Kediri	73,46	1.79	71.8	5.02	12.91	67.93
Pacitan	70,51	0.67	69.79	0.97	16.68	80.64
Tuban	70,07	2.78	68.49	3.03	17.08	67.18
Kota Blitar	72,63	0.29	92.17	3.8	7.29	71.46
Blitar	72,36	1.56	70.14	2.79	9.97	67.57
Mojoketo	71,69	3.49	78.51	4.05	10.57	69.56
Kota Mojokero	72,3	0.3	85.78	4.88	6.16	69.87
Probolinggo	65,47	1.46	62.25	2.51	20.82	69.19
Kota Probolinggo	69,41	0.49	82.78	4.01	8.17	63.61

Lampiran 2 *Output* untuk Model Regresi Linier dan Regresi Spasial

1. *Output* program pengujian asumsi klasik dan pendugaan parameter untuk model regresi linier

```
REGRESSION
----------
SUMMARY OF OUTPUT: ORDINARY LEAST SQUARES ESTIMATION
Data set            :  KB_JATIM
Dependent Variable  :  kemiskinan  Number of Observations:   38
Mean dependent var  :     70.5729  Number of Variables   :    6
S.D. dependent var  :      2.1343  Degrees of Freedom    :   32

R-squared           :    0.478205  F-statistic           :      5.86535
Adjusted R-squared  :    0.396674  Prob(F-statistic)     : 0.000591425
Sum squared residual:     90.3221  Log likelihood        :     -70.3698
Sigma-square        :     2.82257  Akaike info criterion :       152.74
S.E. of regression  :     1.68005  Schwarz criterion     :      162.565
Sigma-square ML     :      2.3769
S.E of regression ML:     1.54172

-----------------------------------------------------------------------------
       Variable      Coefficient      Std.Error    t-Statistic   Probability
-----------------------------------------------------------------------------
          CONSTANT       60.2788        6.90676       8.72751      0.00000
           PDRB_X1       0.11868      0.0787742       1.50658      0.14173
            APS_X2     0.0526795       0.025717       2.04843      0.04880
            TPT_X3      0.165994       0.195638      0.848471      0.40248
            PPM_X5     -0.220079      0.0654973      -3.36012      0.00203
           TPAK_X4      0.118524      0.0921355       1.28641      0.20753
-----------------------------------------------------------------------------

REGRESSION DIAGNOSTICS
MULTICOLLINEARITY CONDITION NUMBER   76.190612
TEST ON NORMALITY OF ERRORS
TEST                     DF            VALUE              PROB
Jarque-Bera               2              31.444           0.00020759

DIAGNOSTICS FOR HETEROSKEDASTICITY
RANDOM COEFFICIENTS
TEST                     DF            VALUE              PROB
Breusch-Pagan test        5              5.9279           0.31330
Koenker-Bassett test      5              6.2761           0.28027
SPECIFICATION ROBUST TEST
TEST                     DF            VALUE              PROB
White                    20             21.2992           0.37971

DIAGNOSTICS FOR SPATIAL DEPENDENCE
FOR WEIGHT MATRIX : KB_JATIM
   (row-standardized weights)
TEST                             MI/DF        VALUE           PROB
Moran's I (error)                0.4101         3.6332        0.00028
Lagrange Multiplier (lag)          1           15.7323        0.00007
Robust LM (lag)                    1            7.3809        0.00659
Lagrange Multiplier (error)        1            8.6368        0.00329
Robust LM (error)                  1            0.2855        0.59315
Lagrange Multiplier (SARMA)        2           16.0178        0.00033


COEFFICIENTS VARIANCE MATRIX
   CONSTANT     PDRB_X1      APS_X2      TPT_X3      PPM_X5
  47.703360   -0.148129   -0.076059   -0.287908    0.012065
  -0.148129    0.006205    0.000317   -0.005108    0.000061
  -0.076059    0.000317    0.000661    0.000331    0.000215
  -0.287908   -0.005108    0.000331    0.038274    0.005122
   0.012065    0.000061    0.000215    0.005122    0.004290
  -0.594176    0.001908    0.000336    0.000703   -0.001500
```

```
  TPAK_X4
-0.594176
 0.001908
 0.000336
 0.000703
-0.001500
 0.008489


OBS       kemiskinan         PREDICTED         RESIDUAL
  1          72.77000          71.40039          1.36961
  2          72.38000          69.93817          2.44183
  3          69.81000          68.62244          1.18756
  4          67.83000          69.73354         -1.90354
  5          73.42000          73.52878         -0.10878
  6          67.40000          66.06177          1.33823
  7          71.70000          70.54322          1.15678
  8          66.43000          69.24018         -2.81018
  9          71.10000          69.86796          1.23204
 10          70.68000          69.53223          1.14777
 11          71.71000          71.04157          0.66843
 12          68.81000          69.37400         -0.56400
 13          71.26000          69.97912          1.28088
 14          71.22000          71.52851         -0.30851
 15          67.54000          69.86506         -2.32506
 16          72.16000          70.81993          1.34007
 17          65.08000          69.31562         -4.23562
 18          69.89000          69.28947          0.60053
 19          69.70000          71.36547         -1.66547
 20          69.51000          68.14833          1.36167
 21          69.70000          71.26199         -1.56199
 22          70.44000          71.20424         -0.76424
 23          72.21000          71.90981          0.30019
 24          73.78000          73.51697          0.26303
 25          71.67000          71.26632          0.40368
 26          71.99000          72.04781         -0.05781
 27          69.49000          70.86603         -1.37603
 28          72.27000          71.28819          0.98181
 29          71.92000          72.31387         -0.39387
 30          73.46000          70.97045          2.48955
 31          70.51000          69.52349          0.98651
 32          70.07000          71.56903         -1.49903
 33          72.63000          71.08450          1.54550
 34          72.36000          70.87916          1.48084
 35          71.69000          70.89282          0.79718
 36          72.30000          72.90557         -0.60557
 37          65.47000          68.19420         -2.72420
 38          69.41000          70.87978         -1.46978
```

2. *Output* program pendugaan parameter untuk model regresi spasial *lag*

```
REGRESSION
----------
SUMMARY OF OUTPUT: SPATIAL LAG MODEL - MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION
Data set              : KB_JATIM
Spatial Weight        : KB_JATIM
Dependent Variable    :  kemiskinan  Number of Observations:   38
Mean dependent var    :     70.5729  Number of Variables   :    7
S.D. dependent var    :      2.1343  Degrees of Freedom    :   31
Lag coeff.   (Rho)    :    0.498462

R-squared             :    0.682375  Log likelihood        :    -62.4409
Sq. Correlation       : -            Akaike info criterion :     138.882
Sigma-square          :     1.44686  Schwarz criterion     :     150.345
S.E of regression     :     1.20285
```

Variable	Coefficient	Std.Error	z-value	Probability
W_kemiskinan	0.498462	0.120103	4.15027	0.00003
CONSTANT	31.98	9.67197	3.30647	0.00094
PDRB_X1	0.0564973	0.0571377	0.988793	0.32276
APS_X2	0.0270742	0.0186623	1.45074	0.14685
TPT_X3	0.0587763	0.14017	0.419323	0.67498
PPM_X5	-0.155897	0.051733	-3.0135	0.00258
TPAK_X4	0.0455616	0.0660445	0.689862	0.49028

REGRESSION DIAGNOSTICS
DIAGNOSTICS FOR HETEROSKEDASTICITY
RANDOM COEFFICIENTS

TEST	DF	VALUE	PROB
Breusch-Pagan test	5	11.8688	0.03663

DIAGNOSTICS FOR SPATIAL DEPENDENCE
SPATIAL LAG DEPENDENCE FOR WEIGHT MATRIX : KB_JATIM

TEST	DF	VALUE	PROB
Likelihood Ratio Test	1	15.8578	0.00007

COEFFICIENTS VARIANCE MATRIX

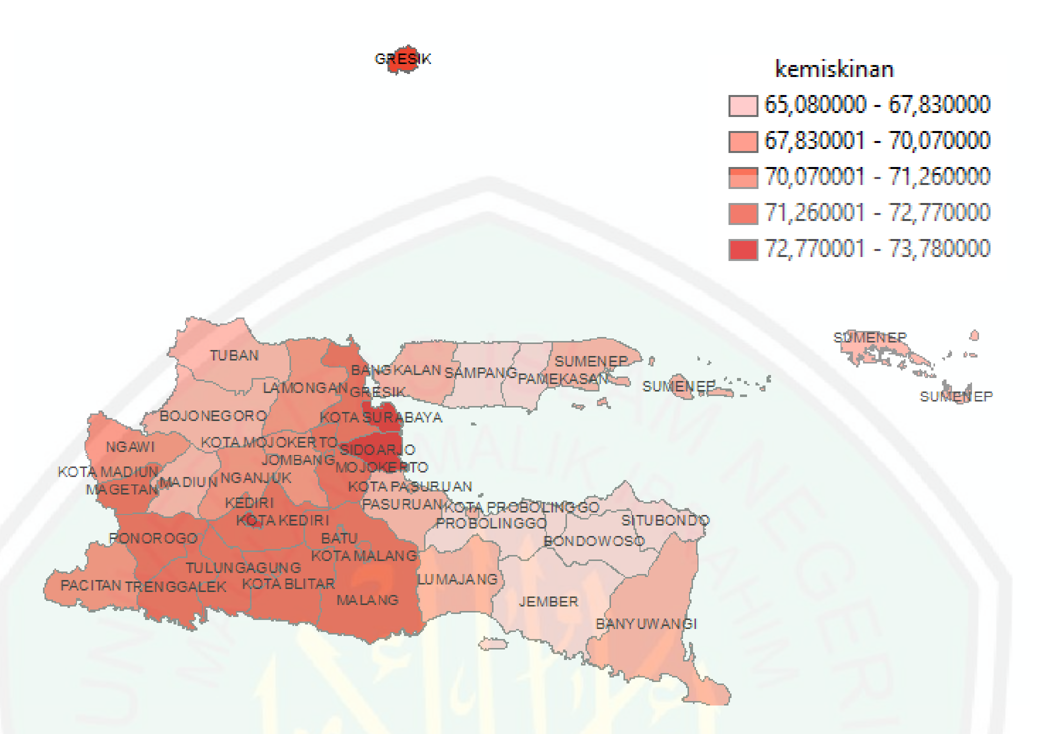
CONSTANT	PDRB_X1	APS_X2	TPT_X3	PPM_X5
93.546908	0.000171	-0.013687	-0.191512	-0.175413
0.000171	0.003265	0.000190	-0.002667	-0.000169
-0.013687	0.000190	0.000348	0.000154	0.000044
-0.191512	-0.002667	0.000154	0.019647	0.002741
-0.175413	-0.000169	0.000044	0.002741	0.002676
-0.277755	0.001007	0.000182	0.000343	-0.000839
-0.998333	-0.001100	-0.000366	0.000635	0.002624

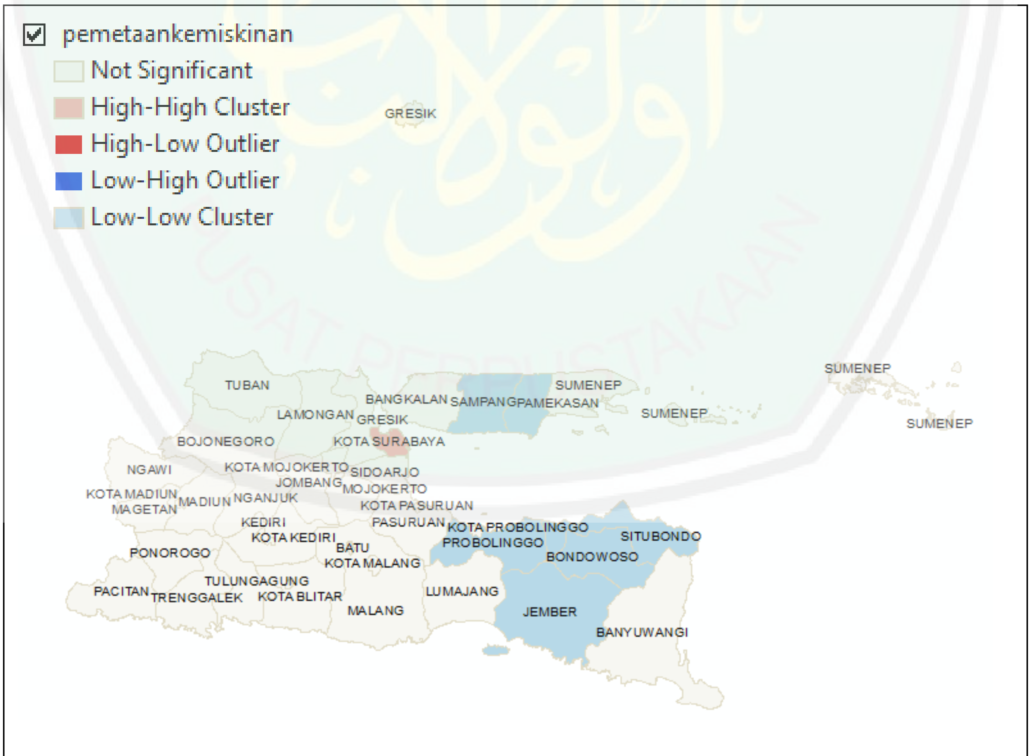
TPAK_X4	W_kemiskinan
-0.277755	-0.998333
0.001007	-0.001100
0.000182	-0.000366
0.000343	0.000635
-0.000839	0.002624
0.004362	-0.000388
-0.000388	0.014425

OBS	kemiskinan	PREDICTED	RESIDUAL	PRED ERROR
1	72.77	71.73664	0.65445	1.03336
2	72.38	70.54417	1.50033	1.83583
3	69.81	68.27010	2.43016	1.53990
4	67.83	69.99790	-0.54201	-2.16790
5	73.42	73.14506	0.36267	0.27494
6	67.4	66.42400	0.77349	0.97600
7	71.7	71.00091	0.53959	0.69909
8	66.43	68.21601	-2.41305	-1.78601
9	71.1	70.27976	0.97137	0.82024
10	70.68	70.51825	0.21293	0.16175
11	71.71	71.12789	0.56554	0.58211
12	68.81	70.18557	-0.38429	-1.37557
13	71.26	70.55428	0.72708	0.70572
14	71.22	71.50879	-0.33950	-0.28879
15	67.54	70.14901	-1.21817	-2.60901
16	72.16	71.63047	0.34856	0.52953
17	65.08	69.87192	-3.57438	-4.79192
18	69.89	69.96213	-0.01461	-0.07213
19	69.7	71.08171	0.20819	-1.38171
20	69.51	66.91143	2.11207	2.59857
21	69.7	71.40520	-1.21536	-1.70520
22	70.44	71.67935	-0.38938	-1.23935
23	72.21	72.26030	-0.03601	-0.05030
24	73.78	73.39258	0.18692	0.38742
25	71.67	71.69866	0.17518	-0.02866
26	71.99	72.43160	-0.42732	-0.44160
27	69.49	70.90959	-1.65529	-1.41959
28	72.27	71.62392	1.35369	0.64608
29	71.92	72.16039	-0.49744	-0.24039
30	73.46	71.74173	1.83810	1.71827

31	70.51	70.22323	-0.34501	0.28677
32	70.07	70.74174	-0.82965	-0.67174
33	72.63	71.88383	0.56301	0.74617
34	72.36	71.65453	0.33353	0.70547
35	71.69	71.60579	0.15574	0.08421
36	72.3	72.69504	-0.43701	-0.39504
37	65.47	69.08181	-2.47634	-3.61181
38	69.41	70.42813	0.78222	-1.01813

Lampiran 3 Hasil Pemetaan Data menggunakan ArcGIS 10.4





Lampiran 4 Matriks Pembobot *Queen Contiguity*

1. Kabupaten/Kota di Jawa Timur berdasasarkan ID

ID	Kabupaten/Kota	Tetangga	Jumlah Tetangga
1	Pacitan	3, 2	2
2	Ponorogo	4, 3, 18, 20, 19, 30, 1	7
3	Trenggalek	4, 2, 1	3
4	Tulungagung	3, 2, 30, 31	4
5	Blitar	4, 7, 30, 5	4
6	Kediri	30	1
7	Malang	8, 17, 14, 32, 38, 30, 31, 16	8
8	Lumajang	9, 14, 7, 13	4
9	Jember	8, 11, 10, 13	4
10	Banyuwangi	12, 9, 11	3
11	Bondowoso	12, 9, 10, 13	4
12	Situbondo	11, 10, 13	3
13	Probolinggo	12, 8, 9 , 11, 14, 33	6
14	Pasuruan	15, 8, 34, 7, 16, 13	6
15	Sidoarjo	25, 14, 37, 16	4
16	Mojoketo	15, 24, 17, 25, 14, 7, 30, 35	8
17	Jombang	18, 24, 22, 7, 30, 16	6
18	Nganjuk	2, 24, 17, 22, 19, 30	6
19	Madiun	2, 21, 18, 20, 22, 36	6
20	Magetan	2, 21, 19	3
21	Ngawi	20, 22, 19	3
22	Bojonegoro	21, 18, 24, 17, 19, 23	6
23	Tuban	24, 22	2
24	Lamongan	18, 17, 25, 22, 23, 16	6
25	Gresik	15, 24, 37, 16	4
26	Bangkalan	27	1
27	Sampang	28, 26	2
28	Pamekasan	29, 27	2
29	Sumenep	28	1
30	Kota Kediri	4, 2, 18, 17, 7, 31, 16	7
31	Kota Blitar	4, 7, 30, 5	4
32	Kota Malang	7	1
33	Kota Probolinggo	13	1
34	Kota Pasuruan	14	1
35	Kota Mojokero	15	1
36	Kota Madiun	16	1

37	Kota Surabaya	15, 25	2
38	Kota Batu	7	1

2. Matriks Pembobot Spasial 38 Kabupaten/Kota di Jawa Timur (38×38)

$$
\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix}
0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
1&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0 \\
0&0&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&1 \\
0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\
0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0 \\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0 \\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
0&1&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\
0&0&0&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{bmatrix}
$$

3. Matriks Pembobot Spasial 38 Kabupaten/Kota di Jawa Timur terstandarisasi (38×38)

$$
\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix}
0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{7} & 0 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{7} & 0 & \frac{1}{7} & 0 & 0 & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

Lampiran 5 Hasil Pengujian Autokorelasi Spasial Data Kemiskinan

Kabupaten/Kota	I_i	Z_{hitung}	*p-value*
Tulungagung	2,976731	1,654326	0,098061
Trenggalek	1,259749	0,818769	0,412918
Sumenep	0,675579	0,723446	0,469406
Situbondo	6,724042	4,155504	0,000032
Sidoarjo	3,066237	1,702326	0,088694
Sampang	3,530612	2,644702	0,008176
Ponorogo	1,312949	0,63662	0,524373
Pamekasan	3,485327	2,611292	0,00902
Ngawi	-0,070833	0,006258	0,995007
Nganjuk	0,046764	0,094191	0,924957
Magetan	0,138862	0,134307	0,89316
Lumajang	2,981242	1,656745	0,097571
Lamongan	0,33378	0,223588	0,823078
Jombang	0,507996	0,302131	0,762553
Jember	8,577816	4,658055	0,000003
Gresik	2,66593	1,487651	0,136843
Bondowoso	13,797653	7,45733	0,000000
Bojonegoro	-0,055852	0,047928	0,961774
Banyuwangi	2,102533	1,333409	0,182397
Bangkalan	0,720864	0,770075	0,441256
Pasuruan	0,361478	0,236075	0,813374
Kota Pasuruan	0,024796	0,05336	0,957445
Kota Malang	0,383913	0,423129	0,672201
Kota Surabaya	3,039746	2,28255	0,022457
Malang	1,310154	0,614708	0,538748
Kota Batu	0,332321	0,370007	0,711377
Madiun	-0,905655	-0,335193	0,73748
Kota Madiun	-0,392828	-0,376651	0,706433
Kota Kediri	3,23559	1,390129	0,16449
Kediri	0,831327	0,883814	0,376797
Pacitan	-0,039447	0,010777	0,991401
Tuban	-0,000453	0,039546	0,968455
Kota Blitar	2,826627	1,573829	0,115527
Blitar	0,785804	0,836941	0,402626
Mojoketo	2,165	0,958976	0,337571
Kota Mojokero	0,412402	0,452463	0,650936
Probolinggo	16,434698	7,482445	0,000000
Kota Probolinggo	1,268425	1,333876	0,182244

RIWAYAT HIDUP

Rufi Aulia Asmarani, lahir di Jember 23 Agustus 1996, tinggal di Desa Tutul, Kecamatan Balung, Kabupaten Jember. Anak sulung dari dua bersaudara, putri dari pasangan bapak Saili H. Ma'ruf dan ibu Sofiatul Aslamiyah.

Pendidikan dasar ditempuh di SDN Tutul 01 dan lulus pada tahun 2008, kemudian melanjutkan pendidikan menengah pertama di SMP Negeri 1 Balung dan lulus pada tahun 2011, kemudian melanjutkan pendidikan menengah atas di SMA Negeri Balung dan lulus pada tahun 2014. Selanjutnya menempuh pendidikan tinggi pada tahun 2014 di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi. Penulis dapat dihubungi melalui email: rufi_aulia@yahoo.com.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Rufi Aulia Asmarani
NIM : 14610017
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Pengujian Autokorelasi Spasial pada Regresi Spasial Lag dengan *Local Indicator of Spatial Autocorrelation* (LISA)

Pembimbing I : Dr. Sri Harini, M.Si
Pembimbing II : Ari Kusumastuti, M.Si., M.Pd

No.	Tanggal	Hal	Tanda Tangan	
1	18 Januari 2018	Konsultasi Bab I, Bab II, Bab III	1	
2	25 Januari 2018	Konsultasi Bab II, Bab III		2
3	12 Februari 2018	Konsultasi Bab III, Bab IV	3	
4	02 April 2018	Konsultasi Kajian Agama		4
5	02 April 2018	ACC Bab I, Bab II, Bab III, Bab IV	5	
6	05 April 2018	ACC Kajian Agama		6
7	20 Februari 2018	Konsultasi Bab III, Bab IV	7	
8	27 Februari 2018	Konsultasi Bab III, Bab IV		8
9	22 Maret 2018	Konsultasi Bab IV	9	
10	01 April 2018	Konsultasi Bab IV		10
11	04 Mei 2018	Konsultasi Bab IV	11	
12	09 Mei 2018	ACC Kajian Agama		12
13	14 Mei 2018	ACC Bab I, Bab II, Bab III, Bab IV	13	
14	18 Mei 2018	ACC Keseluruhan		14

Malang, 18 Mei 2018
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001