ANALISIS UJI VALIDASI MODEL MATEMATIKA VIBRASI DAWAI PADA ALAT MUSIK SASANDO

SKRIPSI

OLEH
NURUL ANGGRAENI HIDAYATI
NIM. 14610002

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018

ANALISIS UJI VALIDASI MODEL MATEMATIKA VIBRASI DAWAI PADA ALAT MUSIK SASANDO

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Nurul Anggraeni Hidayati
NIM. 14610002

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018

ANALISIS UJI VALIDASI MODEL MATEMATIKA VIBRASI DAWAI PADA ALAT MUSIK SASANDO

SKRIPSI

Oleh
Nurul Anggraeni Hidayati
NIM. 14610002

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 6 Juli 2018

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si	Juhari, M.Si
NIP. 19770521 200501 2 004	NIP.19840209 20160801 1 005

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

ANALISIS UJI VALIDASI MODEL MATEMATIKA VIBRASI DAWAI PADA ALAT MUSIK SASANDO

SKRIPSI

Oleh
Nurul Anggraeni Hidayati
NIM. 14610002

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
Dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 16 Juli 2018

Penguji Utama	: Hairur Rahman, M.Si	....
Ketua Penguji	: Mohammad Jamhuri, M.Si	....
Sekretaris Penguji	: Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si	....
Anggota Penguji	: Juhari, M.Si	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	Nurul Anggraeni Hidayati
NIM	:	14610002
Jurusan	:	Matematika
Fakultas	:	Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	:	Analisis Uji Validasi Model Matematika Vibrasi Dawai Pada Alat Musik Sasando

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 6 Juli 2018
Yang membuat pernyataan

METERAI TEMPEL
TGL. 20
3FE90AFF170147874
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Nurul Anggraeni Hidayati
NIM. 14610002

MOTO

If you tell the truth, you don’t have to remember anything

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Bapakku Suriyanto dan Ibuku Arlina, serta Adikku Fahriza Dimas Bayu Andrian dan Novan Dimas Bayu Andrian yang selalu mendukung, mendoakan dan menyemangati, terima kasih.

Ibu Ari Kusumastuti dan Bapak Juhari, terima kasih atas bimbingannya.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Alhamdulillah, segala puji bagi Allah Swt yang telah melimpahkan kenikmatan yang tidak terhitung kepada penulis, sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi dengan judul "Analisis Validasi Model Matematika Getaran Dawai Pada Alat Musik Sasando" ini dengan baik.

Shalawat serta salam semoga tetap terlimpahkan kepada junjungan kita nabi besar Muhammad Saw, yang telah menuntun umat Islam dari jaman jahiliyyah menuju jaman yang terang benderang yakni *Addinul Islam*.

Skripsi ini penulis susun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar sarjana matematika di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Dengan ini penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. Abdul Haris, M.Ag., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D selaku dosen wali yang telah memberikan arahan dan bimbingan sejak semester awal.
5. Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si sebagai dosen pembimbing skripsi yang senantiasa memberikan arahan, pembelajaran, saran dan kritik yang membangun, serta motivasi dalam melakukan penelitian skripsi ini.

6. Juhari, M.Si sebagai dosen pembimbing skripsi bidang agama yang senantiasa memberikan arahan, pembelajaran, saran dan kritik yang membangun, serta motivasi dalam melakukan penelitian skripsi ini.
7. Bapak Suriyanto dan Ibu Arlina, orang tua luar biasa yang telah memberikan segalanya yang penulis butuhkan dan pengorbanannya tidak bisa penulis ungkapkan dengan kata-kata.
8. Segenap dosen Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah mentransferkan ilmunya dengan baik dan membimbing dengan sabar.
9. Teman-teman di Jurusan Matematika khususnya angkatan 2014 kelas A; Dian Maulidiya Sari, Dewi Zumrotul Nafisa, Nur Azlindah, Farah R. Rosadi serta kawan-kawan lain yang tidak bisa saya sebutkan satu-persatu, terimakasih atas segala motivasi, doa, pengorbanan dan waktu yang sudah kita habiskan bersama-sama.
10. Kawan-kawan PKL di BPKAD Kabupaten Jombang; Siti Mariam Oktia Marliana, Nurul Faqiyyatur Rokhmah, Sholihatin Hanifah dan Ridho Sholehurrohman, terimakasih atas motivasi, doa dan semangat yang telah diberikan. Tetap semangat dan semoga sukses.
11. Sahabatku Rohmatul Ummah, Siti Anisatus, Shofhatul Alfi Nahdliyah dan Badrotul Fuadah yang selalu memberikan semangat dan nasehat.
12. Segenap civitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
13. Semua pihak yang telah memberikan bantuan dalam proses penyelesaian penelitian skripsi ini secara langsung maupun tidak.

Dalam penulisan laporan hasil penelitian atau skripsi ini, penulis menyadari terdapat banyak kekurangan. Oleh karena itu penulis berharap pembaca memaklumi. Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat seperti yang penulis harapkan. Terimakasih.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 6 Juli 2018

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL

HALAMAN PENGAJUAN

HALAMAN PERSETUJUAN

HALAMAN PENGESAHAN

HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

HALAMAN MOTO

HALAMAN PERSEMBAHAN

KATA PENGANTAR viii

DAFTAR ISI xi

DAFTAR TABEL xiii

DAFTAR GAMBAR xiv

ABSTRAK xv

ABSTRACT xvii

ملخص xvii

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 5
1.3 Tujuan Penelitian 5
1.4 Manfaat Penelitian 5
1.5 Sistematika Penulisan 6

BAB II KAJIAN PUSTAKA

2.1 Kajian Model Vibrasi Dawai Sasando 7
2.2 Kajian Model Vibrasi Dawai Gitar Akustik 19
2.3 Solusi Analitik PDP dengan Metode Pemisahan Variabel 21
2.4 Deret *Fourier* 32
2.5 Kajian al-Quran 34

BAB III METODE PENELITIAN

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Hasil 38
4.1.1 Solusi Analitik Model Matematika Vibrasi Dawai Sasando 38
4.1.2 Analisis Profil Grafik Solusi Model Vibrasi Dawai Sasando 94
4.2 Pembahasan 96
4.2.1 Solusi Model Matematika Vibrasi Dawai 96
4.2.2 Analisis Validasi Model Matematika Vibrasi Dawai Sasando.. 100
4.2.3 Analisis Validasi dalam Pandangan Islam 102

BAB V PENUTUP

5.1 Kesimpulan.. 106
5.2 Saran 107

DAFTAR RUJUKAN 108

LAMPIRAN-LAMPIRAN

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Kategori Persamaan Diferensial Parsial 11

Tabel 4.1 Simpangan Dawai Sasando dan Dawai Akustik $d = 0.16$...........100

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Segmen Dawai diantara x dan $x + \Delta x$ 14

Gambar 2.2 Kondisi awal dawai Sasando ketika dipetik 17

Gambar 2.3 Kondisi dawai Sasando setelah dipetik.................................... 18

Gambar 2.4 Kondisi dawai Sasando setelah dipetik pada d......................... 18

Gambar 4.1 Grafik 3 Dimensi Solusi Model Vibrasi Dawai Sasando 94

Gambar 4.2 Grafik 2 Dimensi Solusi Model Vibrasi Dawai Sasando 94

Gambar 4.3 Grafik 3 Dimensi Solusi Model Vibrasi Dawai Akustik 95

Gambar 4.4 Grafik 2 Dimensi Solusi Model Vibrasi Dawai Akustik 95

Gambar 4.5 Profil Grafik Kasus 1 96

Gambar 4.6 Profil Grafik Kasus 2 97

Gambar 4.7 Profil Grafik Kasus 3 98

Gambar 4.8 Vibrasi Dawai Akustik dalam 3 Detik..................................... 99

Gambar 4.9 Selisih Simpangan Vibrasi Dawai Sasando dan Dawai Akustik... 101

Gambar 4.10 Perbandingan Vibrasi Dawai Sasando dan Dawai Akustik $n = 1$... 101

Gambar 4.11 Perbandingan Vibrasi Dawai Sasando dan Dawai Akustik $n = 2$... 102

Gambar 4.12 Perbandingan Vibrasi Dawai Sasando dan Dawai Akustik $n = 3$... 102

ABSTRAK

Hidayati, Nurul Anggraeni. 2018. **Analisis Uji Validasi Model Matematika Vibrasi Dawai pada Alat Musik Sasando.** Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si. (II) Juhari, M.Si.

Kata Kunci: Validasi, Model Matematika, Parsial, Vibrasi Dawai, Sasando

Model matematika dalam penelitian ini merupakan hasil penelitian sebelumnya yakni analisis konstruksi model matematika gerak dawai pada alat musik Sasando yang berbentuk persamaan diferensial parsial linier orde dua dengan variabel terikat simpangan dawai u dan variabel bebas keadaan x dan waktu t. Parameter yang terdapat dalam model antara lain konstanta peredam k_d, kecepatan elastisitas c, dan panjang dawai l. Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui validitas model dengan menentukan solusi analitik model dengan metode pemisahan variabel.

Terdapat 3 solusi analitik dari 3 kasus yang terjadi berdasarkan nilai parameter. Kasus 1 terjadi ketika ${k_d}^2 > 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)$. Berdasarkan hasil simulasi, dawai menghasilkan seperempat gelombang dalam waktu 3 detik. Artinya vibrasi dawai berfrekuensi 0.083 Hz. Pada kasus ini simpangan dawainya langsung kembali ke posisi 0 atau diam setelah bervibrasi menghasilkan seperempat gelombang. Kasus 2 terjadi ketika ${k_d}^2 = 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)$. Dawai menghasilkan 3.5 gelombang dalam waktu 3 detik yang berarti frekuensinya 1.67 Hz. Pada kasus 2, simpangan dawai terjauh (amplitudo) berkurang drastis sampai kembali ke posisi diam. Kasus 3 terjadi ketika ${k_d}^2 < 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)$. Dawai menghasilkan frekuensi yang paling besar yakni 2.83 Hz, dengan jumlah gelombang 7.5 dalam waktu 3 detik. Simpangan dawai pada kasus 3 berkurang secara berkala dan akhirnya kembali ke posisi diam pada suatu waktu tertentu.

Selanjutnya dilakukan analisis profil grafik secara grafis yakni grafik 2 dimensi serta secara numeris terhadap simpangan dawai Sasando. Beberapa profil grafik yang dianalisis adalah profil grafik dengan $n = 1,2$ dan 3 dan analisis numeris yang dilakukan adalah simpangan dawai u dengan $n = 1,2,3,4$ dan 5. Hasil analisis menunjukkan model vibrasi dawai Sasando mendekati sistem nyata. Berdasarkan pertimbangan hasil analisis model yang disebutkan sebelumnya, maka model matematika vibrasi dawai pada alat musik Sasando dinyatakan valid. Dalam rangka melengkapi penelitian ini, diharapkan peneliti selanjutnya dapat melakukan analisis profil grafik pada kasus 1 dan 2 serta kasus lain yang mungkin muncul dengan nilai parameter yang lebih bervariasi.

ABSTRACT

Hidayati, Nurul Anggraeni. 2018. **Validation Analysis of The String Vibration Model on Sasando Musical Instrument.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Islamic State University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si. (II) Juhari, M.Si.

Key Words: Validation, Mathematical Model, Partial, String Vibration, Sasando

Mathematical model in this research is the result of previous research that is construction analysis of string vibration on Sasando musical instrument expressed as a second-order linear partial differential equation with u denote the vertical displacement experienced by the string at the point x at time t. The constant coefficient k_d is the damping constant, c is elasticity rate, and l is the length of the string. The purpose of this research is to determine the validity of the model by determining the analytical solution using a method known as separation variable.

There are three analytical solutions from three cases based on constant coefficient value. Case 1 occurs when ${k_d}^2 > 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)$. Based on the simulation, the string produces a quarter wave within 3 seconds. This means the vibration wavelength 0.083 Hz. In this case the vertical displacement of the string is back to quiescent after vibrating to produce a quarter wave. Case 2 occurs when ${k_d}^2 = 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)$. The string produces 3.5 waves within 3 seconds, means the vibration wavelength is 1.67 Hz. In this case, the farthest vertical displacement (amplitude) become smaller drastically and back to quiescent. Case 3 occurs when ${k_d}^2 < 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)$. The vibration wavelength of the string is 2.83 Hz, with 7.5 waves within 3 seconds. The vertical displacement decreases periodically and back to quiescent at a certain time.

The next step is analyzing graphical vibration profile graphically by 2-dimensional graph and numerically by vertical displacements value. Based on graphical analysis some of the graph profiles are graph profiles with $n = 1,2$ and 3 and numerical analysis the vertical displacement u with $n = 1,2,3,4$ and 5, the mathematical model of string vibration on Sasando almost like real system. The consideration of the results analysis of the model were mentioned before, the mathematical model of vibration of the string on Sasando musical instrument is valid. Then for further research it is suggested to perform a graph profile analysis on cases 1 and 2 and other cases that may arise with more varied parameter values.

ملخص

هدايتي، نور الأنغريني. 2018. **تحليل اختبار صلاحية النموذج الرياضي فى اهتزاز السلك فى آلة موسيقية ساساندو**. بحث جامعي. شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. تحت الإشراف: (1) أري كوسماستوتي الماجستير. (2) جوهاري الماجستير.

الكلمات الرئيسية: صلاحية، النموذج الرياضي، جزئي،سلاسل الاهتزاز، ساساندو.

إن النموذج الرياضي فى هذا البحث هو النتيجة من البحث السابق، وهو تحليل بناء النموذج الرياضي فى حركة السلك فى ساساندو على شكل معادلة تفاضلية جزئية خطية من الدرجة ثانية مع متغير تابع بزواية سلك u ومتغير حرية لحالة x و وقت t. وتشتمل المعلومة الموجودة فى النموذج على ثوابت مبهم وk_d ، وسرعة مرونة c ، وطيل السلك l. والغرض من هذا البحث هو تحديد صلاحية النموذج من خلال تحديد نموذج الحل التحليلي باستخدام طريقة فصل المتغير.

هناك ثلثة الحلول التحليلي من ثلاثة أحوال بناء على قيمة المعلومة. يحدث الحال الأول عندما $k_d{}^2 > 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)$. وبناء على نتيجة المحاكاة، ينتج السلك الربع من موجة في 3 ثوانٍ. وهذا يعني أن الطول الموجي للاهتزاز 0.083 هرتز. في هذه الحالة، تنفجر زواية السلك عائدًا إلى وضع 0 أو الصمت بعد الاهتزاز لإنتاج ربع من موجة. ويحدث الحال الثاني عندما $k_d{}^2 = 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)$. ينتج السلك 3.5 موجة من 3 ثوان، وهذا يعنى أن الطول الموجي للاهتزاز 1.67 هرتز. في الحالة الثانية، يتم تقليل الطول الموجي (السعة) بشكل كبير حتى تعود إلى الوضع الثابت. ويحدث الحال الثالث عندما $k_d{}^2 < 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)$. ينتج السلك أكبر تردد تحت قيمة 2.83 هرتز، مع عدد الموجات 7.5 في 3 ثوان. يتم تقليل السلك في الحالة الثالثة بشكل دوري ثم العودة في النهاية إلى وضع ثابت في وقت معين.

وعلاوة على ذلك، يتم تحليل الرسوم البيانية، وهو روسم ثنائية الأبعاد بشكل عددي على زواية سلك ساساندو. وبعض الرسومات التى تم تحليلها هي الرسومات مع $(n = 1,2,3)$. والتحليل العددي الذى تم تحليله هو زواية السلك u مع $(n = 1,2,3,4,5)$. يظهر التحليل أن نموذج الاهتزاز لسلك ساساندو يقترب النظام الحقيقي. واستناداً إلى النظر في نتيجة تحليل النموذج المذكورة، فإن النموذج الرياضي لاهتزاز السلك على آلة موسيقية ساساندو صالح. ومن أجل إكمال هذا

البحث، من المأمول أن يتمكن الباحث الأتي من إجراء التحليل الرسم البياني في الحالتين الأول الثاني والحالات الأخرى التي قد تنشأ مع قيم معلمات أكثر تنوعًا.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Penelitian sebelumnya dilakukan oleh Kusumastuti, dkk (2017) yang melakukan konstruksi model matematika vibrasi dawai pada alat musik tradisional Sasando. Konstruksi model dilakukan dengan pendekatan secara teoritik yaitu dengan memperhatikan hukum-hukum fisika yang berlaku dalam masalah vibrasi dawai, seperti Hukum Hooke dan hukum-hukum Newton. Proses konstruksi model matematika vibrasi dawai sasando memanfaatkan persamaan *Lagrange*.

Model matematika vibrasi dawai pada Sasando dikonstruksi dengan asumsi-asumsi berikut: (1) dawai Sasando merupakan dawai yang lentur sempurna, (2) vibrasi dapat kembali pada posisi setimbangnya pada suatu waktu, (3) vibrasi berupa gelombang bolak-balik, (4) simpangan vibrasi pada dawai bergantung pada keadaan x dan waktu t, (5) saat dawai diam berlaku hukum Newton I dan saat bervibrasi berlaku hukum Newton II, dan (6) gaya tegangan lebih besar dari gaya gravitasi, (7) terjadi gaya gesek antara dawai dengan udara, (8) penampang dawai sangat kecil sehingga volume dawai sebanding dengan panjang dawai, (9) dawai sasando bersifat homogen, dan (10) dawai sasando elastis sempurna.

Model matematika vibrasi dawai Sasando berbentuk persamaan diferensial parsial orde dua. Persamaan tersebut mengandung dua variabel bebas yaitu x yang menyatakan keadaan dan t yang menyatakan waktu serta beberapa variabel terikat yaitu besar simpangan dawai (u) serta turunan-turunannya.

Variabel terikat dari turunan u antara lain: (1) besar sudut yang dibentuk dawai $\frac{\partial u}{\partial x} = \theta$, (2) kecepatan dawai berosilasi $\frac{\partial u}{\partial t} = v$, (3) percepatan dawai berosilasi $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, dan (4) koefisien garis singgung $\tan\theta$. Model matematika vibrasi dawai pada Sasando juga memuat beberapa parameter yang terlibat, antara lain: panjang dawai l, luas penampang dawai A, massa dawai m, konstanta pegas k_p, koefisien bentuk k_b, modulus elastisitas E, koefisien viskositas η, kecepatan elastisitas c dan konstanta peredam k_d.

Sebelum diimplementasikan, suatu model hasil konstruksi harus dilakukan uji validasi berdasarkan kaidah-kaidah teori yang ada. Uji validasi dilakukan untuk melakukan verifikasi atas keabsahan model. Model yang valid adalah model yang memberikan interpretasi hasil yang mendekati sistem nyata. Jika model tidak memenuhi syarat validasi, maka model tersebut harus diperbaiki dan diformulasikan ulang.

Allah Swt berfirman yang terdapat dalam QS. al-Hujurat:6 yaitu:

يَا أَيُّهَا الَّذِينَ آمَنُوا إِنْ جَاءَكُمْ فَاسِقٌ بِنَبَإٍ فَتَبَيَّنُوا أَنْ تُصِيبُوا قَوْمًا بِجَهَالَةٍ فَتُصْبِحُوا عَلَى مَا فَعَلْتُمْ نَادِمِينَ

Artinya: *"Wahai orang-orang yang beriman! Jika seseorang yang fasik datang kepadamu membawa suatu berita, maka telitilah kebenarannya, agar kamu tidak mencelakakan suatu kaum karena kebodohan(kecerobohan), yang akhirnya kamu menyesali perbuatanmu itu."*

Dalam tafsir Al-Maraghi menyebutkan apabila datang seorang fasik dengan membawa suatu berita, maka hendaknya jangan langsung dipercaya. Melainkan harus diperiksa kejelasan utusan itu dan berusaha untuk mengetahui hal yang sebenarnya. Karena orang yang tidak peduli melakukan kefasikan dan berbuat dusta serta tidak menjaga diri dari kedustaan, tidak dapat dipercaya. Hal itu perlu dilakukan agar tidak menyebabkan sekelompok orang merugi dan teraniaya.

Ayat di atas menjelaskan bahwa orang yang beriman harus meneliti kebenaran suatu berita yang dibawa kepadanya, agar tidak mencelakakan orang lain akibat kebodohan atau kecerobohannya tersebut. Sunnatullah yang termuat dalam QS. al-Hujurat:6 ini analog dengan pokok pembahasan yang akan dibahas dalam penelitian ini. Model matematika vibrasi dawai pada Sasando hasil konstruksi penelitian sebelumnya merupakan sebuah berita yang dapat memberikan peran penting dalam ilmu terapan, jika model tersebut benar valid. Apabila uji validasi belum dilakukan maka penelitian lanjutan untuk mendalami model tersebut akan sia-sia dilakukan. Oleh karena itu, sebagai salah satu wujud aplikasi dengan merujuk QS. al-Hujurat:6 maka uji validasi model matematika vibrasi dawai Sasando menjadi penting untuk dilakukan dengan menyelidiki kebenaran model agar tidak mencelakakan atau merugikan orang lain yang hendak mempelajari model tersebut lebih dalam.

Uji validasi model yang dikonstruksi pada penelitian Kusumastuti, dkk (2017) adalah dengan melakukan simulasi untuk menampilkan profil grafik model tanpa menganalisis profil grafik tersebut. Uji validasi yang dilakukan ini belum cukup untuk menunjukkan kevalidan model. Oleh karena itu perlu dilakukan uji validasi lanjutan untuk melengkapi upaya validasi model.

Uji validasi model yang dilakukan dalam penelitian ini adalah dengan menentukan solusi analitik model. Urgensi dari solusi analitik sebagai validator adalah untuk mengetahui simpangan dawai u setiap x dan t yang berbeda serta mendapatkan profil grafik solusi. Dengan mengetahui bentuk dan hasil proses analisis profil grafik, dapat digunakan sebagai landasan untuk menentukan kevalidan model

Solusi analitik dari model matematika vibrasi dawai Sasando diperoleh dengan perhitungan secara matematis menggunakan metode pemisahan variabel. Metode ini memisahkan variabel dalam PDP sehingga dihasilkan beberapa PDB tergantung pada banyak variabel bebasnya. Selanjutnya masing-masing PDB diselesaikan dengan memanfaatkan variabel pemisah. Dalam kasus model vibrasi dawai Sasando ini didapatkan dua solusi $X(x)$ dan $T(t)$, sehingga dapat diperoleh solusi umum $u(x,t)$ dimana $u(x,t) = X(x)T(t)$. Selanjutnya untuk mendapatkan solusi khusus, diperlukan nilai awal $f(x)$ dan mengaplikasikan deret *Fourier*. Solusi khusus kemudian disimulasikan sehingga didapatkan profil grafik model. Selanjutnya profil grafik dianalisis untuk menentukan validitas model.

Penelitian ini merujuk nilai awal $f(x)$ dalam kasus vibrasi dawai gitar akustik oleh Gulla (2011). Dalam hal ini meskipun nilai awal yang digunakan sama dengan penelitian Gulla, namun model serta analisis profil grafik oleh Gulla (2011) yang disajikan dalam penelitian hanya digunakan sebagai rujukan dan bukan sebagai pembanding.

Berdasarkan paparan di atas, maka penelitian ini akan difokuskan pada menentukan solusi model matematika vibrasi dawai pada alat musik Sasando dan menganalisis hasil simulasinya dalam rangka uji validasi model matematika vibrasi dawai pada Sasando.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana solusi analitik model matematika untuk masalah vibrasi dawai pada alat musik Sasando?
2. Bagaimana analisis profil grafik model matematika vibrasi dawai Sasando?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan diadakannya penelitian ini adalah:

1. Untuk mengetahui bentuk solusi analitik model matematika vibrasi dawai pada alat musik Sasando.
2. Untuk mengetahui analisis profil grafik model matematika vibrasi dawai pada alat musik Sasando.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dalam penelitian analisis validasi model matematika vibrasi dawai pada alat musik Sasando adalah:

1. Dengan mengetahui solusi analitik model matematika vibrasi dawai pada alat musik Sasando, maka didapatkan profil grafik model.
2. Dengan mengetahui analisis profil grafik maka dapat menentukan validitas model matematika vibrasi dawai pada alat musik Sasando.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam penelitian ini terdiri dari empat bagian, yaitu:

Bab I Pendahuluan

Bab ini memuat latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bab ini menyajikan kajian-kajian kepustakaan yang menjadi landasan dan dasar teori dalam pembahasan terkait solusi analitik persamaan diferensial parsial gelombang yang disesuaikan dengan model matematika vibrasi dawai pada alat musik Sasando.

Bab III Metode Penelitian

Bab ini menguraikan alur penelitian dan langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini.

Bab IV Hasil dan Pembahasan

Bab ini menguraikan perolehan solusi analitik dan simulasi untuk mendapatkan profil grafik model, serta menganalisis profil grafik tersebut untuk menentukan validitas model matematika vibrasi dawai pada alat musik Sasando.

Bab V Penutup

Bab ini berisi kesimpulan dalam penelitian ini serta saran untuk penelitian berikutnya yang berkaitan dengan penelitian ini.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Kajian Model Vibrasi Dawai Sasando

Dalam penelitian Kusumastuti, dkk (2017) telah dijabarkan proses konstruksi sehingga terbentuk model matematika vibrasi dawai Sasando sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_d \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{2.1}$$

Model matematika vibrasi dawai Sasando berbentuk persamaan yang mengandung turunan terhadap dua variabel bebas, yakni keadaan (x) dan waktu (t). Hal ini menunjukkan bahwa variabel terikat u merupakan suatu fungsi yang tergantung pada x dan t, atau dapat dituliskan $u(x,t)$. Turunan parsial u terhadap x adalah suatu fungsi yang dinyatakan oleh $D_x u$, yang nilai fungsinya di setiap titik (x,t) dalam domain u diberikan oleh

$$D_x u(x,t) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, t) - u(x,t)}{\Delta x} \tag{2.2}$$

apabila limit ini ada. Dengan cara yang serupa, turunan parsial u terhadap t dinyatakan oleh $D_t u$, yang nilai fungsinya di setiap titik (x,t) dalam domain u diberikan oleh

$$D_t u(x,t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{u(x, t+\Delta t) - u(x,t)}{\Delta t} \tag{2.3}$$

apabila limit ada.

Proses pencarian turunan parsial disebut pendiferensialan parsial. $D_x u$ menyatakan fungsi yang merupakan turunan parsial u terhadap variabel x. Dan $D_x u(x,t)$ menyatakan nilai fungsi $D_x u$ di titik (x,t). Notasi secara *Leibnitz* untuk $D_x u$ adalah $\frac{\partial u}{\partial x}$, dan untuk $D_x u(x,t)$ adalah $\frac{\partial}{\partial x} u(x,t)$. Dengan cara yang serupa, notasi *Leibnitz* untuk $D_t u$ adalah $\frac{\partial u}{\partial t}$, dan untuk $D_t u(x,t)$ adalah $\frac{\partial}{\partial t} u(x,t)$. Sehingga (2.1) dapat dituliskan dalam bentuk lain, yakni:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) - \left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) + k_d \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = 0 \qquad (2.4)$$

Setiawan (2006) menyebutkan bahwa persamaan yang melibatkan turunan parsial dari fungsi sembarang yang terdiri dari dua atau lebih variabel disebut persamaan diferensial parsial (PDP). Persamaan (2.1) terdiri dari tiga suku. Suku pertama merupakan turunan parsial kedua fungsi u terhadap t, suku kedua merupakan turunan parsial kedua fungsi u terhadap x dikalikan dengan parameter-parameter $\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}$, dan suku ketiga merupakan turunan parsial fungsi u terhadap t dikalikan dengan parameter k_d. Oleh karena itu dapat dikatakan bahwa persamaan (2.1) adalah persamaan diferensial parsial.

PDP banyak digunakan dalam permasalahan fisika yang kompleks, seperti dalam fluida dan mekanika cairan (dinamika, elastisitas), perpindahan panas, elektromagnetik, mekanika kuantum dan sebagainya. Variabel bebas yang terlibat biasanya adalah waktu dan satu atau lebih koordinat ruang (Kreyzig, 1991).
Beberapa hal penting berkaitan PDP yang perlu diketahui adalah:

1. Orde

Brio, dkk (2010) menyatakan bahwa orde turunan tertinggi mendefinisikan orde sistem PDP. Persamaan (2.1) memiliki orde turunan tertinggi 2, yaitu terhadap x dan terhadap t. Demikian jelas bahwa model matematika vibrasi dawai Sasando merupakan PDP orde 2.

2. Jumlah variabel

Jumlah variabel dari PDP adalah jumlah variabel bebasnya. Berdasarkan pernyataan tersebut, maka (2.1) merupakan PDP orde 2 dengan 2 variabel.

3. PDP linier dan nonlinier

Misalkan terdapat persamaan $\mathcal{L}u = 0$, dimana $\mathcal{L}$ adalah operator. Artinya, apabila v merupakan fungsi sembarang, maka $\mathcal{L}v$ adalah fungsi baru. Untuk lebih mudahnya, $\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial x}$ adalah operator yang menjadikan fungsi v menjadi turunan parsial v_x. Selanjutnya definisi dari linieritas adalah:

$$\mathcal{L}(u+v) = \mathcal{L}u + \mathcal{L}v \quad \mathcal{L}(cu) = c\mathcal{L}u \tag{2.5}$$

Untuk setiap fungsi u dan v dan konstanta c (Strauss, 2008).

Coleman (2013) menyajikan dalam bentuk yang menggabungkan kedua sifat yang disebutkan sebelumnya, dikatakan bahwa $\mathcal{L}$ linier jika dan hanya jika

$$\mathcal{L}(c_1 u + c_2 v) = c_1 \mathcal{L}u + c_2 \mathcal{L}v \tag{2.6}$$

Selanjutnya, untuk mengetahui linieritas (2.1) maka (2.1) dituliskan dalam bentuk sebagai berikut:

$$\mathcal{L}(u) = u_{tt} - \left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)u_{xx} + k_d u_t = 0 \tag{2.7}$$

Sehingga

$$\mathcal{L}(c_1 u + c_2 v) = (c_1 u + c_2 v)_{tt} - \left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)(c_1 u + c_2 v)_{xx} + k_d (c_1 u + c_2 v)_t$$

$$= c_1 u_{tt} + c_2 v_{tt} - \left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right) c_1 u_{xx}$$

$$- \left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right) c_2 v_{xx} + k_d c_1 u_t + k_d c_2 v_t$$

$$= c_1 u_{tt} - \left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right) c_1 u_{xx} + k_d c_1 u_t + c_2 v_{tt}$$

$$- \left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right) c_2 v_{xx} + k_d c_2 v_t$$

$$= c_1 \left(u_{tt} - \left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right) u_{xx} + k_d u_t\right)$$

$$+ c_2 \left(v_{tt} - \left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right) v_{xx} + k_d v_t\right)$$

$$= c_1 \mathcal{L}(u) + c_2 \mathcal{L}(v) \tag{2.8}$$

Oleh karena itu, jelas bahwa (2.1) merupakan PDP linier.

4. PDP homogen dan nonhomogen

Untuk PDP linier $\mathcal{L}(u) = f$, jika $f \equiv 0$ maka PDP tersebut dikatakan homogen. Selain itu, PDP dikatakan nonhomogen. Selanjutnya persamaan persamaan (2.7) jelas menunjukkan bahwa (2.1) homogen.

5. Kategorisasi PDP linier

Bentuk umum dari PDP adalah:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D = 0 \tag{2.9}$$

Dengan A, B dan C adalah fungsi dari x dan y, sedangkan D adalah fungsi dari $x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$. Bergantung dari nilai koefisien A, B, C maka PDP dapat diklasifikasikan menjadi tiga bentuk berikut: (Setiawan, 2006)

Tabel 2.1 Kategori Persamaan Diferensial Parsial

Contoh		Kategori
Persamaan Laplace $$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0$$	$B^2-4AC<0$ $0^2-4(1)(1)=-4<0$	PDP Eliptik
Persamaan Konduksi Panas $$k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{\partial T}{\partial t}$$	$B^2-4AC=0$ $0^2-4(k)(0)=0$	PDP Parabolik
Persamaan Gelombang $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$	$B^2-4AC>0$ $0^2-4(1)\left(-\frac{1}{c^2}\right)=\frac{4}{c^2}>0$	PDP Hiperbolik

Triatmodjo (2002) menyebutkan bahwa persamaan parabolik biasanya merupakan yang tergantung pada waktu (tidak permanen). Penyelesaian persamaan tersebut memerlukan kondisi awal dan batas. Sedang persamaan eliptik biasanya berhubungan dengan masalah keseimbangan atau kondisi permanen (tidak bergantung waktu), dan penyelesaiannya memerlukan kondisi batas di sekeliling daerah tinjauan. Persamaan hiperbolik biasanya berhubungan dengan getaran, atau permasalahan dimana terjadi ketidakkontinuan (*discontinue*) dalam waktu seperti gelombang kejut yang terjadi ketidakkontinuan dalam kecepatan, tekanan dan rapat massa. Penyelesaian dari persamaan hiperbolik mirip dengan penyelesaian pada persamaan parabolik, yaitu menentukan nilai u untuk nilai x dan t yang diberikan.

Untuk menentukan klasifikasi dari (2.1) maka akan terlebih dahulu dituliskan dalam bentuk umum. Berikut ini merupakan bentuk umum dari PDP (2.1).

$$-\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+0\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+0\frac{\partial u}{\partial x}+k_d\frac{\partial u}{\partial t}+0\,u=0 \qquad (2.10)$$

Sehingga diketahui

$$A = -\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right) \qquad\qquad B = 0 \qquad\qquad C = 1$$

$$B^2 - 4AC = 0^2 - 4\left(-\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right)k_d$$

$$= \left(2c^2 - 8\frac{c^2}{l}\right)k_d \tag{2.11}$$

Perlu diketahui, bahwa terdapat beberapa parameter yang terlibat dalam proses konstruksi model (2.1). Parameter-parameter tersebut antara lain:

1. Panjang dawai Sasando (l), merupakan jarak antara dua buah ujung dawai Sasando.
2. Luas penampang dawai Sasando (A) sangatlah kecil, sehingga volume dawai sebanding dengan panjang dawai akibatnya massa jenis linier dawai (ρ) didefinisikan sebagai massa (m) per satuan panjang dawai (l).
3. Massa dawai Sasando (m) adalah suatu besaran yang menyatakan kekuatan dawai Sasando dalam satuan kg. Massa dawai Sasando (m) didefinisikan sebagai perkalian antara massa jenis dawai (ρ) dan satuan panjang dawai (l).
4. Modulus elastisitas dawai Sasando (E), merupakan konstanta yang menyatakan tingkat keelastisan atau kelenturan dawai Sasando yang berbahan nilon dengan satuan N/m^2. Diasumsikan bahwa besar modulus elastisitas dawai Sasando yang berbahan nilon adalah $5 \times 10^9\ N/m^2$.
5. Konstanta pegas (k_p), merupakan konstanta yang menyatakan ukuran kekakuan dari dawai Sasando yang berbahan nilon. Konstanta ini memiliki nilai sebesar $k_p = \frac{E}{l}$ dengan satuanya adalah N/m.

6. Konstanta k_b yang menyatakan koefisien bentuk dawai yang bergesekan dengan udara. Konstanta k_b memiliki nilai sebesar $k_b = 6\pi r$, dengan r adalah jari-jari dawai.
7. Koefisien viskositas (η), merupakan besaran yang menunjukkan tingkat kekentalan fluida atau zat alir. Jenis fluida atau zat alir yang dipertimbangkan adalah udara yang memiliki koefisien viskositas sebesar $0{,}000018\ Ns/m^2$.
8. Kecepatan elastisitas (c) yang didefinisikan sebagai akar kuadrat dari modulus elastisitas (E) per massa jenis dawai (ρ), dengan satuannya adalah m/s.
9. Konstanta peredam k_d yang mempengaruhi kecepatan dawai selama dawai berosilasi.

Berdasarkan asumsi nomor 1, maka dapat dipastikan bahwa

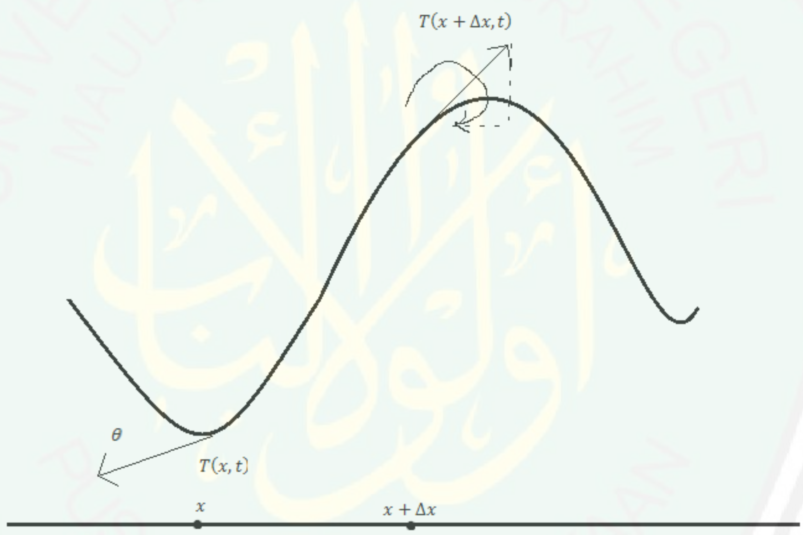
$$62k_d\frac{c^2}{35} > 0 \tag{2.12}$$

Perlu diketahui, bahwa nilai parameter c tidak mungkin bernilai negatif, begitu pula dengan k_d. Sehingga nilai dari $B^2 - 4AC > 0$ dan persamaan (2.1) dikategorikan ke dalam PDP hiperbolik.

Rujukan yang mendukung penjelasan mengenai persamaan gelombang adalah penjelasan O'Neil (2014) yang menjelaskan bahwa persamaan gelombang yang dihasilkan oleh dawai termasuk salah satu bentuk PDP. Bayangkan sebuah dawai (dawai gitar, kawat, kabel telepon, atau sejenisnya) yang membentang di antara dua titik. Vibrasi dari dawai akan dideskripsikan jika dawai tersebut terikat pada kedua ujungnya, pergerakannya dikarenakan sesuatu yang dilakukan dengan cara tertentu dan dilepaskan dengan kecepatan yang diberikan.

Tempatkan sumbu x di sepanjang dawai yang dibentangkan dari 0 sampai L, dan asumsikan bahwa setiap partikel dari dawai hanya bergerak vertikal pada sebuah bidang. Sebuah fungsi $u(x,t)$ dicari sehingga pada sebarang waktu $t \geq 0$, grafik dari fungsi $u = u(x,t)$ menunjukkan posisi atau bentuk dawai pada waktu tersebut. Sehingga potret dari gerakan dawai dapat diketahui.

Dimulai dengan kasus sederhana dengan mengabaikan efek redaman, seperti gesekan udara dan berat dawai. Diberikan $\boldsymbol{T}(x,t)$ merupakan tegangan dawai pada titik x dan waktu t, dan diasumsikan bahwa ini bertindak secara tangen pada dawai. Besar dari vektor ini adalah $\|\boldsymbol{T}(x,t)\| = T(x,t)$. Asumsikan juga bahwa massa, ρ, persatuan panjang adalah konstan.



Gambar 2.1 Segmen Dawai diantara x dan x + Δx

Hukum gerak kedua Newton diterapkan ke segmen dawai diantara x dan $x + \Delta x$. Ini menyatakan bahwa gaya berat pada segmen karena tegangan sama dengan percepatan pusat massa segmen kali massa segmen. Ini adalah persamaan vector, berarti bahwa komponen horizontal dan komponen vertikal pada kedua sisi dapat dicocokkan. Komponen vertikal yang ditunjukkan pada Gambar 2.1 memberikan aproksimasi berikut

$$T(x+\Delta x,t)\sin(\theta+\Delta\theta) - T(x,t)\sin(\theta) = \rho(\Delta x)u_{tt}(\bar{x},t), \qquad (2.13)$$

dimana $\bar{x}$ adalah pusat massa dari segmen. Maka

$$\frac{T(x+\Delta x,t)\sin(\theta+\Delta\theta)-T(x,t)\sin(\theta)}{\Delta x}=\rho u_{tt}(\bar{x},t) \tag{2.14}$$

Komponen vertikal, $v(x,t)$, dari tegangan adalah

$$v(x,t)=T(x,t)\sin(\theta) \tag{2.15}$$

Maka

$$\frac{v(x+\Delta x,t)-v(x,t)}{\Delta x}=\rho u_{tt}(\bar{x},t) \tag{2.16}$$

Diberikan $\Delta x \to 0$. Maka $\bar{x} \to x$, dan hasil dari persamaan (2.16) adalah

$$v_x=\rho u_{tt} \tag{2.17}$$

Komponen horizontal dari tegangan adalah

$$h(x,t)=T(x,t)\cos(\theta) \tag{2.18}$$

Tetapi

$$v(x,t)=h(x,t)\tan(\theta)=h(x,t)u_x \tag{2.19}$$

sehingga

$$v_x=(hu_x)_x=\rho u_{tt} \tag{2.20}$$

Dengan asumsi komponen horizontal dari tegangan pada seluruh segmen dawai adalah nol:

$$h(x+\Delta x,t)-h(x,t)=0 \tag{2.21}$$

Oleh karena itu, $h(x,t)$ adalah hampiran dari x, dan

$$(hu_x)_x=hu_{xx} \tag{2.22}$$

Maka

$$hu_{xx} = \rho u_{tt} \tag{2.23}$$

Atau, pada bentuk yang lebih umum,

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \tag{2.24}$$

dimana $c^2 = h/\rho$. Persamaan (2.24) adalah persamaan gelombang satu dimensi (dimensi satu ruang).

Jika istilah pemaksaan disertakan untuk memungkinkan gaya lain bekerja pada dawai, maka persamaan gelombang yang bisa terbentuk adalah

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + P(x,t) \tag{2.25}$$

Seperti pada persamaan panas, persamaan gelombang akan dicoba untuk dicari solusi yang memenuhi kondisi awal dan kondisi batas yang menentukan posisi dawai pada waktu $t = 0$, dan kekuatan yang mengatur vibrasi dawai.

Kondisi batas pada kedua ujung dari dawai yang terikat adalah

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \ \forall t > 0 \tag{2.26}$$

Terdapat variasi dari kondisi batas tersebut. Misalnya, jika pada ujungnya terjadi gerakan, dengan posisinya pada waktu t diberikan sebagai fungsi dari t, maka

$$u(0,t) = \alpha(t), u(L,t) = \beta(t) \ \forall t > 0 \tag{2.27}$$

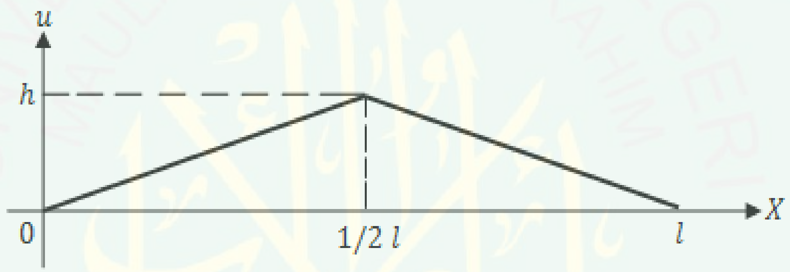
untuk sebarang fungsi $\alpha(t)$ dan $\beta(t)$ yang diberikan.

Kondisi awal memiliki bentuk

$$u(x,0) = \varphi(\mathrm{x}) \text{ dan } u_t(x,0) = \psi(x) \text{ untuk } 0 < x < L \tag{2.28}$$

ditentukan posisi awal dan kecepatan pada dawai. Persamaan (2.25) dengan kondisi awal (2.28) dan kondisi batas (2.26) atau (2.27) disebut masalah nilai awal dan batas untuk persamaan gelombang.

Berdasarkan penjelasan tersebut, maka model (2.1) perlu dilakukan analisis kondisi awal dan kondisi batasnya. Pada penelitian Kusumastuti, dkk (2017) ketika dawai sasando dipetik pada posisi $\frac{1}{2}l$ dengan simpangan sebesah h dari posisi kesetimbangan dawai maka bentuk dawai akan menjadi seperti gambar di bawah ini:



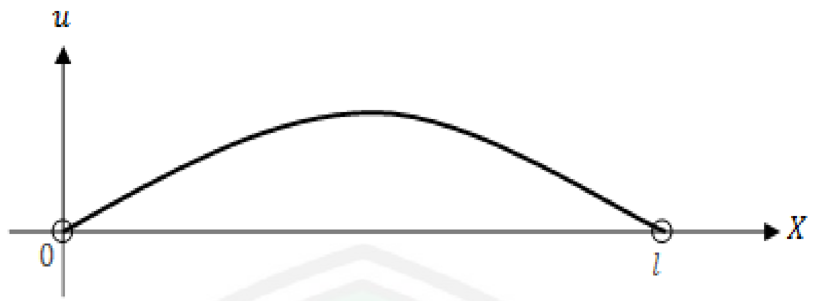
Gambar 2.2 Kondisi awal dawai Sasando ketika dipetik

Bentuk awal dawai yakni pada $t = 0$ ketika dawai dipetik didefinisikan sebagai suatu fungsi $f(x)$ dan mula-mula dawai adalah diam (tidak mempunyai kecepatan), sehingga kondisi awal dawai ditentukan sebagai berikut:

$$u(x,0) = f(x) \text{ untuk setiap } 0 < x < l \tag{2.29}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,0) = 0 \text{ untuk setiap } 0 < x < l \tag{2.30}$$

Selanjutnya adalah kondisi batas dari dawai Sasando. Dawai sasando memiliki panjang berhingga yakni dari $x = 0$ sampai dengan $x = l$, yang jika digambarkan sebagai berikut:



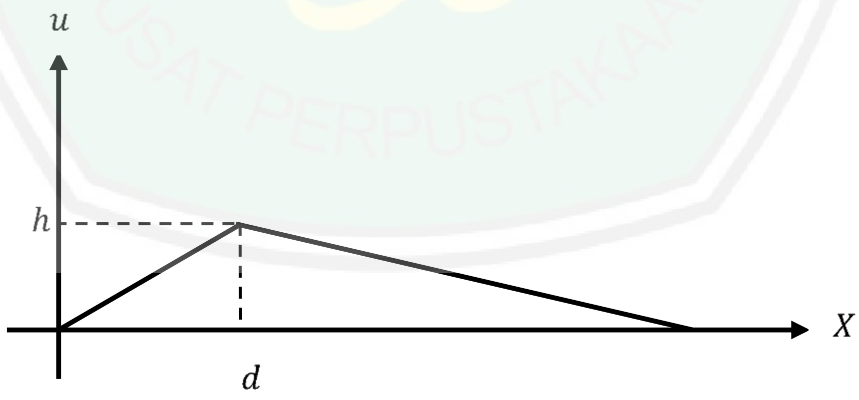
Gambar 2.3 Kondisi dawai Sasando setelah dipetik

Kedua ujung dawai terikat pada $x = 0$ dan $x = l$ sehingga simpangan yang terjadi pada kedua ujung dawai sama dengan nol. Maka dapat dikatakan bahwa dawai memiliki dua kondisi batas yakni sebagai berikut:

$$u(0, t) = 0 \text{ untuk setiap } t > 0 \tag{2.31}$$

$$u(l, t) = 0 \text{ untuk setiap } t > 0 \tag{2.32}$$

Pada penelitian ini posisi dawai Sasando yang dipetik tidak terbatas pada posisis $\frac{1}{2}l$. Posisi dawai Sasando yang dipetik disesuaikan seperti pada penelitian Gulla (2011) yakni didefinisikan sebagai d yang digambarkan pada gambar berikut:



Gambar 2.4 Kondisi dawai Sasando setelah dipetik pada d

Bentuk awal dawai pada $t = 0$ ketika dawa dipetik didefinisikan sebagai fungsi $f(x)$ dan kondisi dawai mula-mula adalah diam. Berikut ini merupakan pendefinisian fungsi $f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{hx}{d}, & 0 \leq x \leq d \\ \dfrac{h(l-x)}{l-d}, & d \leq x \leq l \end{cases}$$

2.2 Kajian Model Vibrasi Dawai Gulla (2011)

Dalam penelitian Gulla (2011) telah dijabarkan proses konstruksi sehingga terbentuk model matematika vibrasi dawai akustik sebagai berikut:

$$\left(\frac{\mathrm{T}}{\mu}\right)\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \tag{2.33}$$

Serupa dengan model matematika vibrasi dawai Sasando, model (2.33) juga berbentuk persamaan yang mengandung turunan terhadap dua variabel bebas, yakni keadaan (x) dan waktu (t). Hal ini menunjukkan bahwa variabel terikat $\bar{u}$ merupakan suatu fungsi yang tergantung pada x dan t, atau dapat dituliskan $\bar{u}(x,t)$. Persamaan (2.33) dapat dituliskan dalam bentuk lain, yakni:

$$\left(\frac{\mathrm{T}}{\mu}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\bar{u}(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{u}(x,t) = 0 \tag{2.34}$$

Persamaan (2.34) terdiri dari dua suku. Suku pertama merupakan turunan parsial kedua fungsi $\bar{u}$ terhadap x dikalikan dengan parameter-parameter $\frac{\mathrm{T}}{\mu}$, suku kedua merupakan turunan parsial kedua fungsi $\bar{u}$ terhadap t. Oleh karena itu dapat dikatakan bahwa persamaan (2.34) adalah persamaan diferensial parsial.

1. Orde

Persamaan (2.34) memiliki orde turunan tertinggi 2, yaitu terhadap x dan terhadap t. Demikian jelas bahwa model matematika vibrasi dawai akustik merupakan PDP orde 2.

2. Jumlah variabel

Persamaan (2.34) merupakan PDP orde 2 dengan 2 variabel, karena variabel bebasnya ada 2 yakni x dan t.

3. PDP linier dan nonlinier

Selanjutnya, untuk mengetahui linieritas (2.34) maka (2.34) dituliskan dalam bentuk sebagai berikut:

$$\mathcal{L}(\bar{u}) = \frac{\mathrm{T}}{\mu}\bar{u}_{xx} - \bar{u}_{tt} = 0 \tag{2.35}$$

Sehingga

$$\mathcal{L}(c_1\bar{u} + c_2 v) = \frac{\mathrm{T}}{\mu}(c_1\bar{u} + c_2 v)_{xx} - (c_1\bar{u} + c_2 v)_{tt}$$

$$= \frac{\mathrm{T}}{\mu}c_1\bar{u}_{xx} + \frac{\mathrm{T}}{\mu}c_2 v_{xx} - c_1\bar{u}_{tt} - c_2 v_{tt}$$

$$= \frac{\mathrm{T}}{\mu}c_1\bar{u}_{xx} - c_1\bar{u}_{tt} + \frac{\mathrm{T}}{\mu}c_2 v_{xx} - c_2 v_{tt}$$

$$= c_1\left(\frac{\mathrm{T}}{\mu}\bar{u}_{xx} - \bar{u}_{tt}\right) + c_2\left(\frac{\mathrm{T}}{\mu}v_{xx} - v_{tt}\right)$$

$$= c_1\mathcal{L}(\bar{u}) + c_2\mathcal{L}(v) \tag{2.36}$$

Oleh karena itu, jelas bahwa (2.33) merupakan PDP linier.

4. PDP homogen dan nonhomogen

Untuk PDP linier $\mathcal{L}(\bar{u}) = f$, jika $f \equiv 0$ maka PDP tersebut dikatakan homogen. Selain itu, PDP dikatakan nonhomogen. Selanjutnya persamaan persamaan (2.33) jelas menunjukkan bahwa (2.33) homogen.

5. Klasifikasi PDP linier

Untuk menentukan klasifikasi dari (2.33) maka akan terlebih dahulu dituliskan dalam bentuk umum. Berikut ini bentuk umum dari PDP (2.33).

$$\left(\frac{\mathrm{T}}{\mu}\right)\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x^2}+0\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x\partial t}-\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}+0\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}+0\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}+0\,\bar{u}(x,t)=0 \qquad (2.37)$$

Sehingga diketahui

$$A=\left(\frac{\mathrm{T}}{\mu}\right) \qquad B=0 \qquad C=-1$$

$$B^2-4AC=0^2-4\left(\frac{\mathrm{T}}{\mu}\right)(-1)$$

$$=4\frac{\mathrm{T}}{\mu}$$

Perlu diketahui, bahwa terdapat beberapa parameter yang terlibat dalam model (2.33). Parameter-parameter tersebut antara lain:

1. Tegangan dawai akustik (T).
2. Massa persatuan panjang dawai akustik (μ).

Perlu diketahui, bahwa nilai parameter T dan μ tidak mungkin bernilai negatif. Sehingga nilai dari $B^2-4AC>0$ dan persamaan (2.33) dikategorikan ke dalam PDP hiperbolik.

Gulla (2011) telah melakukan penyelesaian terhadap model matematika vibrasi dawai akustik yang dinyatakan dalam persamaan (2.38).

$$\bar{u}(x,t)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\left(\cos\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)\sqrt{\frac{\mathrm{T}}{\mu}}t\right)\right) \qquad (2.38)$$

2.3 Solusi Analitik PDP dengan Metode Pemisahan Variabel

Solusi analitik atau selesaian analitik dari suatu persamaan diferensial adalah suatu fungsi tanpa turunan-turunan yang memenuhi persamaan tersebut (Soehardjo, 1996). Dalam penyelesaian suatu persamaan diferensial dikenal solusi umum dan solusi khusus. Solusi umum adalah solusi yang terdiri dari sejumlah fungsi bebas yang jumlahnya sesuai dengan orde persamaan diferensial yang diselesaikan. Sedangkan solusi khusus adalah solusi yang didapatkan dari solusi umum dengan memasukkan nilai awal atau pilihan khusus dalam fungsi bebas. Dengan mendapatkan solusi analitik, maka nilai dari variabel terikat akan didapatkan dengan mensusbtitusikan nilai dari variabel-variabel bebas.

Metode pemisahan variabel dapat digunakan untuk mencari solusi dari persamaan diferensial parsial linier orde tinggi dengan beberapa keistimewaan. Bentuk umum dari persamaan diferensial parsial yang dapat diselesaikan dengan menggunakan metode pemisahan variabel adalah sebagai berikut:

$$a_0 z + a_1 \frac{\partial z}{\partial x} + a_2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \cdots + a_n \frac{\partial^n z}{\partial x^n} + b_0 z + b_1 \frac{\partial z}{\partial y} + b_2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \cdots$$
$$+ b_n \frac{\partial^n z}{\partial y^n} + c_0 z + c_1 \frac{\partial z}{\partial t} + c_2 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \cdots + c_n \frac{\partial^n z}{\partial c^n} = 0 \qquad (2.39)$$

Dengan keistimewaan yang dimaksud sebagai berikut:

a. Tidak terdapat derivatif parsial terhadap lebih dari satu variabel bebas
b. $a_i; i = 1,2,3, \dots, n$ merupakan koefisien dari turunan parsial terhadap x merupakan fungsi dari x saja atau konstanta.
c. $b; i = 1,2,3, \dots, n$ merupakan koefisien dari turunan parsial terhadap y merupakan fungsi dari y saja atau konstanta.
d. $c_i; i = 1,2,3, \dots, n$ merupakan koefisien dari turunan parsial terhadap t merupakan fungsi dari t saja atau konstanta.

Dapat dilihat bahwa contoh persamaan diferensial parsial (2.39) merupakan persamaan diferensial parsial linier dengan tiga variabel bebas yakni x, y dan t

serta satu variabel terikat yakni z. Penyelesaian dari persamaan diferensial parsial (2.39) dapat dimisalkan sebagai berikut:

$$z(z, y, t) = X(x)Y(y)T(t) \tag{2.40}$$

Merupakan hasil dari operasi tiga fungsi, yang masing-masing bergantung hanya pada satu variabel x, y dan t. Dengan mendiferensialkan (2.40), didapatkan

$$\begin{aligned} &\frac{\partial z}{\partial x} = X'YT \qquad &&\frac{\partial z}{\partial y} = XY'T \qquad &&\frac{\partial z}{\partial t} = XY\dot{T} \\ &\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = X''YT \qquad &&\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = XY''T \qquad &&\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = XY\ddot{T} \end{aligned} \tag{2.41}$$

Jika (2.41) disubstitusikan ke (2.39) maka didapatkan

$$\begin{aligned} a_0XYT + a_1X'YT + a_2X''YT + \cdots + a_nX^{(n)}YT + b_0XYT + b_1XY'T \\ + b_2XY''T + \cdots + b_nXY^{(n)}T + c_0XYT + c_1XYT' \\ + c_2XYT'' + \cdots + c_nXYT^{(n)} = 0 \end{aligned} \tag{2.42}$$

Kedua ruas dibagi dengan XYT, maka diperoleh

$$\begin{aligned} a_0 + a_1\frac{X'}{X} + a_2\frac{X''}{X} + \cdots + a_n\frac{X^{(n)}}{X} + b_0 + b_1\frac{Y'}{Y} + b_2\frac{Y''}{Y} + \cdots \\ + b_n\frac{Y^{(n)}}{Y} + c_0 + c_1\frac{T'}{T} + c_2\frac{T''}{T} + \cdots + c_n\frac{T^{(n)}}{T} = 0 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} X' = \tfrac{dX}{dx};\ X'' = \tfrac{d^2X}{dx^2};\ \dots;\ X^{(n)} = \tfrac{d^{(n)}X}{dx^n} \\ Y' = \tfrac{dY}{dy};\ Y'' = \tfrac{d^2Y}{dy^2};\ \dots;\ Y^{(n)} = \tfrac{d^{(n)}Y}{dy^n} \\ T' = \tfrac{dT}{dt};\ T'' = \tfrac{d^2T}{dt^2};\ \dots;\ T^{(n)} = \tfrac{d^{(n)}T}{dt^n} \end{aligned} \tag{2.44}$$

Dengan mendiferensialkan (2.43) berturut-turut terhadap x, y dan t dan menyederhanakannya maka akan didapatkan:

$$\frac{d}{dx}\left(a_0 + a_1\frac{X'}{X} + a_2\frac{X''}{X} + \cdots + a_n\frac{X^{(n)}}{X}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dy}\left(b_0 + b_1\frac{Y'}{Y} + b_2\frac{Y''}{Y} + \cdots + b_n\frac{Y^{(n)}}{Y}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(c_0 + c_1\frac{T'}{T} + c_2\frac{T''}{T} + \cdots + c_n\frac{T^{(n)}}{T}\right) = 0 \qquad (2.45)$$

Dengan pemisalan berikut

$$a_0 + a_1\frac{X'}{X} + a_2\frac{X''}{X} + \cdots + a_n\frac{X^{(n)}}{X} = k_1$$

$$b_0 + b_1\frac{Y'}{Y} + b_2\frac{Y''}{Y} + \cdots + b_n\frac{Y^{(n)}}{Y} = k_2$$

$$c_0 + c_1\frac{T'}{T} + c_2\frac{T''}{T} + \cdots + c_n\frac{T^{(n)}}{T} = k_3 \qquad (2.46)$$

Dimana k_1, k_2 dan k_3 adalah sebarang konstanta maka (2.46) menjadi

$$k_1 + k_2 + k_3 = 0 \qquad (2.47)$$

Maka jelas bahwa (2.46) merupakan sistem persamaan diferensial biasa yang ekivalen dengan persamaan diferensial parsial (2.39).

Misalkan solusi dari sistem (2.46) berturut-turut adalah sebagai berikut:

$$X_i(x, k_1); i = 1,2, \dots, n$$

$$Y_i(y, k_2); i = 1,2, \dots, m$$

$$T_i(t, k_3); i = 1,2, \dots, k \qquad (2.48)$$

Maka berdasarkan (2.40) dan (2.48), solusi umum dari persamaan diferensial parsial (2.40) adalah:

$$z(x, y, t) = \sum_{i=1}^{n} X_i(x, k_1) \sum_{i=1}^{m} Y_i(y, k_2) \sum_{i=1}^{k} T_i(t, k_3) \qquad (2.49)$$

Penjelasan di atas merupakan penjelasan mengenai solusi persamaan diferensial parsial yang umum dengan menggunakan metode pemisahan variabel. Persamaan diferensial parsial sendiri diklasifikasikan menjadi beberapa jenis, sehingga agar lebih jelas maka berikut ini akan dijabarkan mengenai klasifikasi persamaan diferensial parsial dan solusi persamaan diferensial parsial gelombang yang diklasifikasikan dalam persamaan diferensial parsial hiperbolik menggunakan metode pemisahan variabel.

Dalam penjabaran berikut, persamaan yang digunakan adalah persamaan diferensial parsial dengan dua variabel bebas dan satu variabel terikat. Jika diberikan suatu fungsi u yang bergantung pada x dan y, maka turunan parsial u terhadap x pada sembarang titik (x, y) didefinisikan sebagai:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} \tag{2.50}$$

Secara sama, turunan parsial dari u terhadap y didefinisikan sebagai:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta y} \tag{2.51}$$

Misal diberikan persamaan gelombang satu dimensi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.52}$$

Dimana $u(x, t)$ adalah defleksi dawai. Untuk mengetahui bagaimana dawai bergerak, persamaan tersebut harus dicari solusinya; lebih tepatnya menentukan solusi u dari persamaan (2.52) yang memenuhi kondisi yang ditentukan dalam suatu sistem. Karena dawai terikat pada dua ujungnya $x = 0$ dan $x = l$, maka didapatkan dua kondisi batas:

$$u(0, t) = 0, u(L, t) = 0, \forall t \tag{2.53}$$

Rumus dari gerak dawai bergantung pada defleksi awal (defleksi pada saat $t = 0$) dan pada kecepatan awal (kecepatan pada saat $t = 0$). Defleksi awal didenotasikan dengan $f(x)$ dan kecepatan dengan $g(x)$, maka didapatkan dua kondisi awal berikut:

$$u(x,0) = f(x) \tag{2.54}$$

Dan

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x) \tag{2.55}$$

Dari sini, harus dicari solusi dari (2.52) yang memenuhi kondisi (2.53)-(2.55). Berikut ini merupakan tahapan untuk mencari solusi:

Tahap pertama. Dengan menggunakan metode pemisahan variabel atau metode *product*, akan dilakukan manipulasi untuk mendapatkan dua persamaan diferensial biasa.

Tahap kedua. Menentukan solusi dari dua persamaan yang dihasilkan pada tahapan pertama yang memenuhi kondisi batas.

Tahap ketiga. Menggunakan deret *Fourier*, solusi digubah untuk mendapatkan solusi dari (2.52) yang juga memenuhi sebarang kondisi awal yang diberikan.

Dalam metode pemisahan variabel, untuk menentukan solusi dari persamaan gelombang (2.52), anggap solusi dengan formasi berikut:

$$u(x,t) = F(x)G(t) \tag{2.56}$$

Merupakan hasil dari operasi dua fungsi, yang masing-masing bergantung hanya pada satu variabel x dan t. Dengan mendiferensialkan (2.56), didapatkan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F\ddot{G} \qquad \text{dan} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''G \tag{2.57}$$

Dimana dot menunjukkan turunan terhadap t dan aksen menunjukkan turunan terhadap x. Dengan mensubstitusikan (2.57) pada (2.52)

$$F\ddot{G} = c^2 F''G \tag{2.58}$$

Kedua ruas (2.58) dibagi dengan c^2FG, didapat

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G} = \frac{F''}{F} \tag{2.59}$$

Kedua ruas pada persamaan (2.59) dapat dinyatakan sebagai suatu konstan. Memang pada ruas kiri hanya bergantung pada t dan ruas kanan hanya bergantung pada x, dan jika x dan t merupakan variabel, maka berturut-turut hanya merubah t atau x hanya akan berpengaruh pada ruas kiri atau ruas kanan saja, tanpa mengubah ruas lain. Sehingga,

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G} = \frac{F''}{F} = k \tag{2.60}$$

Hasil ini merupakan dua persamaan diferensial biasa, yaitu:

$$F'' - kF = 0 \tag{2.61}$$

Dan

$$\ddot{G} - c^2kG = 0 \tag{2.62}$$

k adalah sebarang.

Akan ditentukan solusi F dan G dari dua persamaan diferensial biasa, sehingga $u = FG$ yang memenuhi kondisi batas (2.54).

$$u(0,t) = F(0)G(t) = 0, u(L,t) = F(L)G(t) = 0, \forall t \tag{2.63}$$

Penyelesaian (2.61)

Jika $G \equiv 0$, maka $u \equiv 0$, yang mana tidak ada yang menarik. Demikian $G \not\equiv 0$ maka

$$F(0) = 0, F(L) = 0 \tag{2.64}$$

Untuk $k = 0$ solusi umum dari (2.61) adalah $F = ax + b$, dan dari (2.63) diperoleh $a = b = 0$. Sebab itu $F = 0$, sehingga $u \equiv 0$. Untuk $k = \mu^2$ positif maka solusi umum dari (2.61) adalah

$$F = Ae^{k\mu} + Be^{-k\mu} \tag{2.65}$$

Dan dari (2.63) diketahui bahwa $F \equiv 0$, seperti sebelumnya. Oleh karena itu kemungkinan memilih k negatif, ditinggalkan, seperti $k = -p^2$. Maka persamaan (2.61) menjadi

$$F'' + p^2 F = 0 \tag{2.66}$$

Solusi umum dari (2.66) adalah

$$F(x) = A\cos px + B\sin px \tag{2.67}$$

Dari solusi umum (2.67) dan persamaan (2.63) maka

$$F(0) = A = 0 \text{ dan maka } F(L) = B\sin pL = 0 \tag{2.68}$$

Harus mengambil $B \neq 0$ karena sebaliknya $F \equiv 0$. Oleh karena itu $\sin pL = 0$. Maka

$$pL = n\pi, \text{ sehingga } p = \frac{n\pi}{L}, \forall n \in \mathbb{Z} \tag{2.69}$$

Pilih $B = 1$, dengan demikian didapatkan banyak solusi $F(x) = F_n(x)$, dimana

$$F_n(x) = \sin\frac{n\pi}{L}x, n = (1,2,..) \tag{2.70}$$

Solusi ini memenuhi (2.63). [Untuk bilangan bulat negatif n didapatkan solusi yang sama, dengan tanda minus, sebab $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

Penyelesaian (2.62). Konstan k dibatasi pada nilai $k = -p^2 = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, hasil dari (2.69). Untuk k yang demikian, maka persamaan (2.62) menjadi

$$\ddot{G} + \lambda_n^2 G = 0 \text{ dimana } \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$$

Jadi solusi umumnya adalah

$$G_n(t) = B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t \qquad (2.71)$$

Oleh karena itu, fungsi $u_n(x,t) = F_n(x)G_n(t)$ dituliskan sebagai berikut

$$u_n(x,t) = (B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{L} x,\ n = 1,2, \ldots \qquad (2.72)$$

Persamaan (2.72) Merupakan solusi dari (2.52), yang memenuhi kondisi batas (2.53). Fungsi ini disebut sebagai *Eigenfunction*, atau fungsi karakteristik, dan nilai $\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$ disebut nilai *Eigenvalues*, atau nilai karakteristik dari vibrasi dawai. Himpunan $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$ disebut *spectrum* (Kreyzig, 1991).

Teorema superposisi atau prinsip linearitas menyatakan jika u_1 dan u_2 adalah sembarang solusi dari PDP linier homogen pada *region* R, maka

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 \qquad (2.73)$$

dimana c_1 dan c_2 adalah sembarang konstanta, adalah juga merupakan solusi di region R. Prinsip superposisi dapat digunakan untuk menunjukkan bahwa $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_M$ merupakan solusi dari masalah tersebut, sehingga kombinasi linier dari solusi tersebut juga solusi

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 + \cdots + u_M u_M = \sum_{n=1}^{M} c_n u_n \qquad (2.74)$$

dengan c_n adalah sembarang konstanta.

Sekarang karena (2.52) adalah linier dan homogen, maka berdasarkan teorema superposisi bahwa jumlah dari banyak (tapi terbatas) solusi u_n adalah solusi dari (2.52). Sehingga

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{M}(B_n\cos\lambda_n t+B_n^*\sin\lambda_n t)\sin\frac{n\pi}{L}x \tag{2.75}$$

Persamaan (2.75) menunjukkan bahwa solusi ini memenuhi kondisi awal (2.54). Dari (2.75) dan (2.54) diketahui

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{M}B_n\ \sin\frac{n\pi}{L}x=f(x) \tag{2.76}$$

Dengan memilih B_n maka $u(x,0)$ menjadi deret *Fourier* sinus dari $f(x)$. Sehingga

$$B_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \tag{2.77}$$

Persamaan (2.75) juga menunjukkan bahwa solusi ini memenuhi kondisi batas (2.55). Yaitu dengan menurunkan (2.53) terhadap t.

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}&=\left[\sum_{n=1}^{M}(-B_n\lambda_n\sin\lambda_n t+B_n^*\lambda_n\cos\lambda_n t)\sin\frac{n\pi}{L}x\right]_{t=0}\\&=\sum_{n=1}^{M}B_n^*\lambda_n\cos\lambda_n t\sin\frac{n\pi}{L}x=g(x)\end{aligned} \tag{2.78}$$

Dengan memilih B_n^* sehingga untuk $t=0$ maka derifatif $\partial u/\partial t$ menjadi deret *Fourier* sinus dari $g(x)$. Sehingga

$$B_n^*\lambda_n=\frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \tag{2.79}$$

atau karena $\lambda_n=cn\pi/L$, maka

$$B_n^*=\frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \tag{2.80}$$

Demikian menunjukkan bahwa $u(x,t)$ yang ditunjukkan pada (2.75) dengan koefisien (2.77) dan (2.80) adalah solusi dari (2.52) yang memenuhi kondisi batas (2.53), serta nilai awal (2.54) dan (2.55). Barisan yang dihasilkan (2.75) konvergen dan diperoleh dengan mendiferensialkan (2.75) sebanyak dua kali terhadap x dan terhadap t sehingga akan didapat jumlah atau sum dari $\partial^2 u/\partial x^2$ dan $\partial^2 u/\partial t^2$ yang keduanya kontinu.

Diketahui bahwa solusi (2.75) adalah bentuk formal yang asli, namun perlu dilakukan penetapan atau penyusunan kembali terhadap bentuk persamaan tersebut. Diasumsikan bahwa kecepatan awal $g(x) = 0$ untuk merujuk pada peristiwa yang sederhana. Maka $B_n^* = 0$ dan (2.75) bereduksi menjadi

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{M} (B_n \cos \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{L} x \qquad (2.81)$$

Dalam hal ini, memungkinkan untuk dilakukan penjumlahan deret untuk menuliskan hasil pada sebuah bentuk berhingga. Untuk tujuan ini digunakan formula sebagai berikut:

$$\cos \frac{cn\pi}{L} t \sin \frac{n\pi}{L} x = \frac{1}{2}\left[\sin\left\{\frac{n\pi}{L}(x - ct)\right\} + \sin\left\{\frac{n\pi}{L}(x + ct)\right\}\right] \qquad (2.82)$$

Akibatnya, persamaan (2.81) dapat dituliskan dalam bentuk

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{M} B_n \sin\left\{\frac{n\pi}{L}(x - ct)\right\} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{M} B_n \sin\left\{\frac{n\pi}{L}(x + ct)\right\} \qquad (2.83)$$

Kedua deret tersebut diperoleh dengan mensubstitusikan $x - ct$ dan $x + ct$ secra berturut-turut, untuk variabel x pada deret *Fourier* sinus (2.76) untuk $f(x)$. Sehingga

$$u(x) = \frac{1}{2}[f^*(x - ct) + f^*(x + ct)] \qquad (2.84)$$

Dimana f^* adalah ekstensi periodic ganjil dari f dengan periode $2L$. Karena defleksi awal $f(x)$ kontinu pada interval $0 \le x \le L$ dan bernilai 0 pada titik akhir atau ujung, maka mengikuti bentuk (2.84) bahwa $u(x,t)$ adalah fungsi kontinu dari variabel bebas x dan t dengan sebarang nilai variabel. Dengan mendiferensialkan (2.84) akan menunjukkan bahwa $u(x,t)$ memang benar solusi dari (2.52). (Haberman, 2013)

2.4 Deret *Fourier*

Deret *Fourier* adalah fungsi f yang didefinisikan pada interval $(-p,p)$ yang diberikan pada

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \sin\frac{n\pi x}{p} + b_n \cos\frac{n\pi x}{p}\right) \quad (2.85)$$

dimana

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right)dx$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right)dx \quad (2.86)$$

Kondisi kekonvergenan deret *Fourier*, jika diberikan f dan f' kontinu pada interval $(-p,p)$. Maka untuk semua x pada interval $(-p,p)$, deret *Fourier* dari f konvergen pada titik kontinuitas. Pada sebuah titik pada diskontinuitas deret *Fourier* konverge ke rata-rata

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} \quad (2.87)$$

Dimana $f(x+)$ adalah limit kanan, dan $f(x-)$ adalah limit kiri dari f pada x (Zill, 2013).

Fungsi dibedakan menjadi dua, yakni fungsi ganjil dan fungsi genap. Suatu fungsi dikatakan fungsi genap apabila

$$f(-x) = f(x) \tag{2.88}$$

sedangkan fungsi yang dikatakan fungsi ganjil apabila

$$f(-x) = -f(x) \tag{2.89}$$

Berikut adalah sifat-sifat dari teorema mengenai fungsi genap dan fungsi ganjil.

a. Hasil kali dari dua fungsi genap adalah fungsi genap.

b. Hasil kali dari dua fungsi ganjil adalah fungsi genap.

c. Hasil kali dari fungsi genap dan fungsi ganjil adalah fungsi ganjil.

d. Jumlah (beda) dari dua fungsi genap adalah fungsi genap.

e. Jumlah (beda) dari dua fungsi ganjil adalah fungsi ganjil.

f. Jika f genap, maka $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\ dx$

g. Jika f ganjil, maka $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

Deret *Fourier* yang diperlukan dalam penelitian ini adalah deret *Fourier* sinus dan kosinus. Deret *Fourier* dari fungsi genap f didefinisikan pada interval $(-p, p)$ adalah deret kosinus

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{p}\right) \tag{2.90}$$

Dimana

$$a_0 = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\ dx$$

$$a_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\ \cos\frac{n\pi x}{p}\ dx \tag{2.91}$$

Deret Fourier dari fungsi ganjil f didefinisikan pada interval $(-p, p)$ adalah deret sinus

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n \sin\frac{n\pi x}{p}\right) \tag{2.92}$$

Dimana

$$b_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\ \sin\frac{n\pi x}{p}\ dx \tag{2.93}$$

2.5 Kajian al-Quran

Secara teori, perlu dilakukan penyelesaian secara analitik terhadap model untuk dapat mengetahui perilaku model secara keseluruhan. Solusi dari model dapat diketahui dengan melakukan perhitungan secara matematis dan menghasilkan fungsi bergantung variabel bebas x dan t. Untuk mendapatkan solusi dari model terdapat beberapa langkah yang harus dilalui.

Gambaran untuk menemukan solusi model merupakan salah satu contoh fenomena dalam dunia nyata yang merefleksikan kehidupan manusia. Setiap manusia pasti memiliki permasalahan yang berbeda-beda dalam kehidupannya. Setiap permasalahan yang ada, akan selalu ada solusinya selagi kita tetap mau berusaha. Sebagai seorang manusia yang sedang dilanda masalah QS. al-Insyirah:5 dapat dijadikan sebagai motivasi dalam menyelesaikan suatu permasalahan.

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا

Artinya: *"Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan."*

Tafsir dari ayat ini menurut Imam al-Baghawi, Imam al_ma'iny dan Syeikh Muhyiddin ad-Darwisy yang menyimpulkan dari struktur gaya bahasa ayat tersebut dengan sebuah kaidah kebahasaaan, "*Isim nakirah* jika disebut dua kali maka yang kedua tidaklah sama dengan yang pertama. Namun, jika *isim makrifat* disebut dua kali maka yang kedua sama dengan yang pertama"

Dengan kaidah tafsir tersebut, maka bisa ditarik kesimpulan bahwa setiap satu kesulitan terdapat dua kemudahan. Setidaknya bisa berupa solusi yang terbaik, atau pahala kebaikan. Sebagaimana Rasulullah Saw ketika mendakwahkan Islam. Pada awal kemunculan Islam, orang Islam dipaksa murtad, ditindas, dihina, difitnah, diboikot, dan didzalimi dengan berbagai cara. Namun akhirnya Allah menolong sesuai dengan janji-Nya. Rasulullah dan para sahabat berhasil mendirikan negara Islam di Madinah. Selain itu, kota Mekkah berhasil ditakhlukkan.

Oleh karena itu, meskipun permasalahan yang ada dirasa sangat sulit, yakini bahwa dibalik kesulitan itu akan selalu ada kemudahan yang menyertai. Perlu pula diketahui oleh setiap manusia, bahwa tidaklah Allah Swt menetapkan suatu takdir melainkan di balik takdir itu terdapat hikmah, baik yang diketahui maupun tidak diketahui. Setiap solusi dari suatu permasalahan yang kita perjuangkan, akan selalu ada kemudahan bagi manusia. Entah berupa solusi yang bisa menyelesaikan permasalahan tersebut, atau pahala kebaikan atas usaha atau perjuangan manusia untuk mendapatkan solusi dari permasalahannya. Manusia hanya perlu meyakini dan terus berusaha dengan sabar serta senantiasa belajar dari setiap permasalahan yang ada, sehingga menjadikannya manusia yang lebih baik lagi.

BAB III

METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode kepustakaan, dengan melakukan eksplorasi terhadap beberapa buku, jurnal, dan referensi lain yang bersangkutan dengan analisis validasi maupun model matematika vibrasi dawai yang berupa PDP dan solusinya dengan menggunakan metode pemisahan variabel. Secara umum langkah-langkah yang akan dilakukan dalam penelitian ini akan diuraikan sebagai berikut:

1. Menentukan solusi umum model vibrasi dawai Sasando

   Alur dalam menentukan solusi umum model vibrasi dawai sasando yang berupa PDP adalah sebagai berikut:

   a. Menerapkan metode pemisahan variabel terhadap PDP vibrasi dawai Sasando sehingga didapatkan dua persamaan yang hanya mengandung satu variabel $X(x)$ saja dan $T(t)$ saja.

   b. Menyelesaikan persamaan yang mengandung variabel $X(x)$ saja dengan melakukan pemisalan persamaan tersebut ekivalen dengan suatu konstanta (k) yang sama dengan persamaan $T(t)$.

   c. Mendapatkan solusi persamaan yang mengandung variabel $X(x)$ saja yang memenuhi kondisi batas sekaligus mendapatkan suatu persamaan yang ekivalen dengan k dari hasil penyelesaian $X(x)$.

   d. Menyelesaikan persamaan yang mengandung variabel $T(t)$ saja dengan mensubstitusikan nilai k yang didapat dari langkah c.

   e. Mendapatkan solusi persamaan yang mengandung $T(t)$ saja.

f. Mendapatkan solusi umum dari model vibrasi dawai Sasando $u(x,t)$ dimana $u(x,t) = X(x)T(t)$.

g. Mendapatkan solusi khusus dari model vibrasi dawai Sasando $u(x,t)$ dengan menggunakan nilai awal.

h. Mengecek keabsahan solusi $u(x,t)$ terhadap model vibrasi dawai Sasando.

2. Menganalisis profil grafik model matematika vibrasi dawai pada Sasando.

Alur dalam melakukan simulasi MATLAB untuk memunculkan profil grafik dan menganalisis profil grafik model vibrasi dawai Sasando adalah sebagai berikut:

a. Memasukkan nilai parameter model vibrasi dawai Sasando dan vibrasi dawai gitar akustik.

b. Memasukkan solusi model vibrasi dawai Sasando dan vibrasi dawai gitar akustik.

c. Melakukan *ploting* dengan menggunakan fungsi for pada MATLAB dengan menjalankan nilai x dan t untuk memunculkan nilai u dan membangkitkan plot profil grafik u dan $\bar{u}$ menggunakan fungsi plot.

d. Menganalisis profil grafik model vibrasi dawai Sasando dengan mengubah nilai parameter yang bervariasi.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Hasil

4.1.1 Solusi Analitik Model Matematika Vibrasi Dawai Sasando

Pandang model matematika vibrasi dawai Sasando berikut:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_d \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{4.1}$$

Dengan kondisi awal

$$u(x,0) = f(x) \qquad \text{dan} \qquad \frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = 0 \tag{4.2}$$

dan dengan kondisi batas

$$u(0,t) = 0 \qquad \text{dan} \qquad u(l,t) = 0 \tag{4.3}$$

Dimisalkan bentuk solusi adalah

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{4.4}$$

Substitusi $u(x,t)$ dari persamaan (4.4) pada kondisi batas $x = 0$, diperoleh

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0 \tag{4.5}$$

Jika persamaan (4.5) dipenuhi dengan memilih $T(t) = 0$ untuk semua t, maka $u(x,t) = 0$ untuk semua x dan t. Hal ini tidak dapat diterima, karena dalam hal ini $u(x,t)$ tidak akan memenuhi kondisi awal (4.2) kecuali $f(x) = 0$ untuk semua x. Oleh karena itu persamaan (4.5) dipenuhi dengan

$$X(0) = 0 \tag{4.6}$$

Dengan alur yang serupa, kondisi batas pada $x = l$ mensyaratkan bahwa

$$x(l) = 0 \tag{4.7}$$

Selanjutnya akan dicari solusi analitik dari model vibrasi dawai Sasando (4.1) dengan menggunakan metode pemisahan variabel. Berdasarkan persamaan (4.4) dapat dinyatakan

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= X'(x)T(t) & & \frac{\partial u}{\partial t} = X(x)\dot{T}(t) \\ & & \text{dan} & \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= X''(x)T(t) & & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X(x)\ddot{T}(t) \end{aligned} \tag{4.8}$$

dan persamaan (4.1) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$X(x)\ddot{T}(x) - \left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)X''(x)T(t) + k_d\left(X(x)\dot{T}(t)\right) = 0$$

yakni

$$\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} - \left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\frac{X''(x)}{X(x)} + k_d\frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = 0$$

selanjutnya diperoleh

$$\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} + k_d\frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = \left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\frac{X''(x)}{X(x)}$$

sehingga

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} + \frac{k_d}{\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}\frac{\dot{T}(t)}{T(t)} \tag{4.9}$$

Langkah penting untuk menunjukkan bahwa kedua ruas harus sama adalah dengan menyatakan kedua ruas (4.9) dengan suatu konstan yang sama, dalam hal ini dipilih $-k$ sehingga didapatkan

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -k$$

Dimana $-k$ disebut konstanta pemisah yang tidak nol. Menyelesaikan persamaan

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -k \tag{4.10}$$

$$X''(x) = -kX(x)$$

$$X''(x) + kX(x) = 0 \tag{4.11}$$

➢ Kasus I; $\forall k < 0$ ambil $k = -\lambda^2$ dimana λ riil. Demikian persamaan (4.11) menjadi $X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0$, sehingga persamaan karakteristiknya

$$m^2 - \lambda^2 = 0 \tag{4.12}$$

Yakni $m^2 = \lambda^2$, sehingga $m_{1,2} = \pm\lambda$. Artinya $m_1 \neq m_2$ (akar *real* dan berbeda).

Misal akar karakteristik dari (4.11) merupakan bilangan *real* dan berbeda, maka $X_1(x) = e^{m_1 x}$ dan $X_2(x) = e^{m_2 x}$ merupakan solusi bebas linier dari persamaan diferensial tersebut, dengan $m_1 = \lambda$ dan $m_2 = -\lambda$. Maka solusi umumnya berbentuk

$$X(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x} \tag{4.13}$$

Dengan menggunakan kondisi batas (4.6) didapatkan

$$X(0) = C_1 e^{\lambda 0} + C_2 e^{-\lambda 0} = 0$$

$$C_1 e^0 + C_2 e^0 = 0$$

$$C_1 + C_2 = 0$$

$$C_1 = -C_2 \tag{4.14}$$

akibatnya solusi (4.13) menjadi

$$X(x) = -C_2 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}$$

Selanjutnya dengan menggunakan kondisi batas (4.7) didapatkan

$$X(l) = -C_2 e^{\lambda l} + C_2 e^{-\lambda l} = 0$$

yakni

$$C_2\left(-e^{\lambda l}+e^{-\lambda l}\right)=0 \tag{4.15}$$

Jika dan hanya jika setidaknya salah satu $C_2=0$ atau $-e^{\lambda l}+e^{-\lambda l}=0$. Jika $C_2=0$, berdasarkan (4.14) maka $C_1=0$

Maka solusi khusus (4.11) dari kasus I adalah

$$X(x)\equiv 0$$

Sehingga solusi dari (4.1) yang didapat

$$u(x,t)=0\,T(t)\equiv 0$$

Tidak ada solusi nontrivial sehingga tidak mungkin dipilih $C_2=0$, haruslah $-e^{\lambda l}+e^{-\lambda l}=0$

$$-e^{\lambda l}+\frac{1}{e^{\lambda l}}=0$$

$$\frac{-e^{2\lambda l}+1}{e^{\lambda l}}=0$$

$$-e^{2\lambda l}+1=0\left(e^{\lambda l}\right)$$

$$-e^{2\lambda l}+1=0$$

$$-e^{2\lambda l}=-1$$

$$e^{2\lambda l}=1$$

$$e^{2\lambda l}=e^{0}$$

maka

$$2\lambda l=0, \qquad \forall\lambda,l\neq 0$$

Telah disebutkan di awal bahwa l adalah panjang dawai Sasando, sehingga tidak mungkin l bernilai nol, dan sesuai asumsi di awal menyatakan bahwa $k<0$ dimana $k=-\lambda^2$ maka λ tidak mungkin nol. Demikian karena λ dan l tidak nol, artinya tidak mungkin terjadi $e^{2\lambda l}=1$, sehingga tidak ada solusi nontrivial.

➢ Kasus II; $k = 0$. Demikian persamaan (4.11) menjadi $X''(x) = 0$, sehingga persamaan karakteristiknya

$$m^2 = 0 \tag{4.16}$$

Apabila akar karakteristik (4.11) *real* dan kembar yakni $m_1 = m_2 = 0$, maka solusi umumnya adalah

$$X(x) = C_1 + xC_2 \tag{4.17}$$

Dengan menggunakan kondisi batas (4.6) didapatkan

$$X(0) = C_1 + 0C_2 = 0$$

$$C_1 = 0$$

Akibatnya solusi (4.17) menjadi

$$X(x) = xC_2$$

selanjutnya menggunakan kondisi batas (4.7) diperoleh

$$X(l) = lC_2$$

$$lC_2 = 0, \quad \forall l \neq 0$$

haruslah

$$C_2 = 0$$

Maka solusi khusus (4.11) dari kasus II adalah

$$X(x) \equiv 0$$

Sehingga didapatkan solusi untuk (4.1)

$$u(x,t) = 0\,T(t) \equiv 0$$

Demikian pada kasus ini tidak ada solusi nontrivial.

➢ Kasus III; $\forall k > 0$ ambil $k = \lambda^2$ dimana λ riil. Demikian persamaan (4.11) menjadi $X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$, sehingga persamaan karakteristiknya

$$m^2 + \lambda^2 = 0 \tag{4.18}$$

Yakni $m^2 = -\lambda^2$, sehingga $m_{1,2} = \pm i\lambda$. Artinya m_1, m_2 kompleks.

Apabila akar karakteristik dari (4.11) kompleks, yakni $m_1 = i\lambda$ dan $m_2 = -i\lambda$. Maka solusi umumnya berbentuk

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x \tag{4.19}$$

Dengan menggunakan kondisi batas (4.6) didapatkan

$$X(0) = C_1 \cos \lambda 0 + C_2 \sin \lambda 0 = 0$$

$$C_1 \cos \lambda 0 + C_2 \sin \lambda 0 = 0$$

$$C_1 + 0 = 0$$

$$C_1 = 0$$

Akibatnya solusi (4.19) menjadi

$$X(x) = C_2 \sin \lambda x \tag{4.20}$$

Selanjutnya menggunakan kondisi batas (4.7) diperoleh

$$X(l) = C_2 \sin \lambda l = 0$$

$$C_2 \sin \lambda l = 0$$

haruslah

$$C_2 \sin \lambda l = 0 \tag{4.21}$$

Jika dan hanya jika salah satu $C_2 = 0$ atau $\sin \lambda l = 0$. Jika $C_2 = 0$, maka solusi (4.11) dari kasus III adalah

$$X(x) \equiv 0$$

Sehingga didapat solusi (4.11) adalah

$$u(x,t) = 0\, T(t) \equiv 0$$

Tidak ada solusi nontrivial sehingga tidak mungkin dipilih $C_2 = 0$, haruslah $\sin \lambda l = 0$

Artinya $\lambda l = \arcsin 0$ sehingga $\lambda l = n\pi, \qquad \forall n = 1,2,\dots$

$$\lambda = \frac{n\pi}{l} \qquad\qquad \forall l \neq 0, n = 1,2,\dots \tag{4.22}$$

Jadi solusi (4.11) berdasarkan (4.20) dan (4.22) adalah

$$X_n(x) = C_2 \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \tag{4.23}$$

Demikian didapatkan solusi untuk persamaan (4.11). Selanjutkan akan dilakukan penyelesaian persamaan bergantung t dengan menggunakan k yang didapat yakni pada persamaan (4.22).

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} + \frac{k_d}{\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}\frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = -k \tag{4.24}$$

Ingat berdasarkan persamaan (4.22) dan pemisalan kasus 3 bahwa $k = \lambda^2$ maka

$$k = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$$

Maka persamaan (4.24) adalah sebagai berikut:

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} + \frac{k_d}{\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}\frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$$

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)T(t)}\left(\ddot{T}(t) + k_d\dot{T}(t)\right) = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$$

$$\left(\ddot{T}(t) + k_d\dot{T}(t)\right) = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)T(t)$$

$$\ddot{T}(t) + k_d\dot{T}(t) + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)T(t) = 0 \tag{4.25}$$

Persamaan karakteristik persamaan (4.25) adalah

$$p^2 + k_d p + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right) = 0 \tag{4.26}$$

Dengan menggunakan formula abc, dimana

$$a = 1 \qquad b = k_d \qquad c = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)$$

Maka

$$p_{1,2} = \frac{-k_d \pm \sqrt{{k_d}^2 - 4(1)\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}}{2(1)}$$

Kasus 1; Jika ${k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right) > 0$ artinya ${k_d}^2 > 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)$, maka akar-akar dari persamaan karakteristik (4.26) adalah akar riil dan berbeda. Yakni:

$$p_1 = \frac{-k_d + \sqrt{{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}$$

$$p_2 = \frac{-k_d - \sqrt{{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}$$

Sehingga didapatkan solusi umum (4.25) adalah

$$T_n(t) = C_3 e^{\frac{-k_d + \sqrt{{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t} + C_4 e^{\frac{-k_d - \sqrt{{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t} \qquad (4.27)$$

$$T_n(t) = C_3 e^{-\frac{k_d}{2}t + \frac{\sqrt{{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t} + C_4 e^{-\frac{k_d}{2}t - \frac{\sqrt{{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t}$$

$$T_n(t) = C_3 e^{-\frac{k_d}{2}t}\, e^{\frac{\sqrt{{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t} + C_4 e^{-\frac{k_d}{2}t}\, e^{-\frac{\sqrt{{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t}$$

$$T_n(t) = e^{-\frac{k_d}{2}t}\left(C_3 e^{\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t} + C_4 e^{-\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t}\right)$$

Selanjutnya persamaan (4.27) dirubah dalam bentuk fungsi hiperbolik sehingga didapatkan alternatif bentuk solusi umum adalah

$$T_n(t) = e^{-\frac{k_d}{2}t}\left(C_3 \cosh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right) + C_4 \sinh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right)\right) \quad (4.28)$$

Berdasarkan (4.23) dan (4.28) maka solusi umum model matematika vibrasi dawai Sasando kasus 1 adalah

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$$

$$u_n(x,t) = C_2 \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(e^{-\frac{k_d}{2}t}\left(C_3 \cosh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right) + C_4 \sinh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right)\right)\right)$$

$$u_n(x,t) = e^{-\frac{k_d}{2}t}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(C_2C_3 \cosh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right) + C_2C_4 \sinh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right)\right)$$

$u_n(x,t)$

$$= e^{-\frac{k_d}{2}t}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(A_n\cosh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right)\right.$$

$$\left.+B_n\sinh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right)\right) \tag{4.29}$$

Dengan $A_n = C_2C_3$ dan $B_n = C_2C_4$

Berdasarkan prinsip superposisi bahwa kombinasi linier dari suatu persamaan diferensial yang linier dan homogen adalah juga merupakan solusi. Sehingga solusi $u(x,t)$ kasus 1 dapat juga dituliskan sebagai berikut:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{k_d}{2}t}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(A_n\cosh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right)\right.$$

$$\left.+B_n\sinh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right)\right)$$

Selanjutnya akan dicari nilai A_n dan B_n dengan kondisi awal (4.2).

$$u_n(x,0) = e^{-\frac{k_d}{2}0}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(A_n\cosh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}0\right)\right.$$

$$\left.+B_n\sinh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}0\right)\right) = f(x)$$

$$e^0\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\ (A_n\cosh(0)+B_n\sinh(0)) = f(x)$$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)(A_n+0) = f(x)$$

$$A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = f(x)$$

$$f(x) = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \tag{4.30}$$

Berdasarkan definisi deret Fourier sinus, diperoleh:

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx$$

dengan $f(x)$ didefinisikan sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{hx}{d}, & 0 \leq x \leq d \\ \dfrac{h(l-x)}{l-d}, & d \leq x \leq l \end{cases} \tag{4.31}$$

dengan h adalah besar simpangan yang terjadi. Selanjutnya berdasarkan persamaan (4.30) dan (4.31) dapat dinyatakan

$$A_n = \frac{2}{l}\left(\int_0^d \frac{hx}{d}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx + \int_d^l \left(\frac{h(l-x)}{l-d}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx\right) \tag{4.32}$$

Persamaan (4.32) akan diselesaikan dengan integral parsial dari suku pertama sebagai berikut:

$$\int_0^d \frac{hx}{d}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx = \left(\frac{hx}{d}\left(-\frac{l}{n\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right)\Bigg|_0^d - \int_0^d \left(-\frac{l}{n\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\frac{h}{d}dx$$

$$= \left(\left(-\frac{hlx}{n\pi d}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right)\Bigg|_0^d - \int_0^d \left(-\frac{hl}{n\pi d}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx$$

$$= \left(\left(-\frac{hlx}{n\pi d}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right)\Bigg|_0^d$$

$$-\left(\left(\left(-\frac{hl}{n\pi d}\right)\left(\frac{l}{n\pi}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right)_0^d - \int_0^d \left(\frac{l}{n\pi}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)(0)\,dx\right)$$

$$= \left(\left(-\frac{hlx}{n\pi d}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right)\Bigg|_0^d - \left(\left(\left(\left(-\frac{hl^2}{n^2\pi^2 d}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right)\Bigg|_0^d - 0\right)$$

$$= \left(\left(-\frac{hlx}{n\pi d}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right)\Bigg|_0^d - \left(\left(-\frac{hl^2}{n^2\pi^2 d}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right)\Bigg|_0^d$$

$$= \left(\left(-\frac{hld}{n\pi d}\right)\cos\left(\frac{n\pi d}{l}\right) - \left(-\frac{hl(0)}{n\pi d}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}(0)\right)\right)$$

$$- \left(\left(-\frac{hl^2}{n^2\pi^2 d}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right) - \left(-\frac{hl^2}{n^2\pi^2 d}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}(0)\right)\right)$$

$$= \left(\left(-\frac{hld}{n\pi d}\right)\cos\left(\frac{n\pi d}{l}\right) - 0\right) - \left(\left(-\frac{hl^2}{n^2\pi^2 d}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right) - 0\right)$$

$$= \left(\left(-\frac{hld}{n\pi d}\right)\cos\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\right) - \left(\left(-\frac{hl^2}{n^2\pi^2 d}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\right)$$

$$= \left(-\frac{hl}{n\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi d}{l}\right) + \left(\frac{hl^2}{n^2\pi^2 d}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right) \tag{4.33}$$

Selanjutnya untuk suku kedua,

$$\int_d^l \left(\frac{h(l-x)}{l-d}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx$$

$$= \left(\left(\frac{h(l-x)}{l-d}\right)\left(-\frac{l}{n\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right)\Bigg|_d^l$$

$$- \int_d^l \left(-\frac{l}{n\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(-\frac{h}{l-d}\right)dx$$

$$= \left(\left(\frac{h(l-x)}{l-d}\right)\left(-\frac{l}{n\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right)\Bigg|_d^l - \int_d^l \left(\frac{hl}{n\pi(l-d)}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx$$

$$= \left(\left(-\frac{hl(l-x)}{n\pi(l-d)} \right) \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \right) \Bigg|_d^l - \left(\left(\frac{hl}{n\pi(l-d)} \right) \left(\frac{l}{n\pi} \right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \right) \Bigg|_d^l$$

$$- \int_d^l \left(\frac{l}{n\pi} \right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) (0) dx$$

$$= \left(\left(-\frac{hl(l-x)}{n\pi(l-d)} \right) \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \right) \Bigg|_d^l - \left(\left(\frac{hl}{n\pi(l-d)} \right) \left(\frac{l}{n\pi} \right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \right) \Bigg|_d^l$$

$$= \left(\left(-\frac{hl(l-x)}{n\pi(l-d)} \right) \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \right) \Bigg|_d^l - \left(\left(\frac{hl^2}{n^2\pi^2(l-d)} \right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \right) \Bigg|_d^l$$

$$= \left(\left(\left(-\frac{hl(l-l)}{n\pi(l-d)} \right) \cos\left(\frac{n\pi}{l}l\right) \right) - \left(\left(-\frac{hl(l-d)}{n\pi(l-d)} \right) \cos\left(\frac{n\pi}{l}d\right) \right) \right)$$

$$- \left(\left(\left(\frac{hl^2}{n^2\pi^2(l-d)} \right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}l\right) \right) \right.$$

$$\left. - \left(\left(\frac{hl^2}{n^2\pi^2(l-d)} \right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}d\right) \right) \right)$$

$$= \left(0 - \left(-\frac{hl}{n\pi} \right) \cos\left(\frac{n\pi d}{l}\right) \right) - \left(\left(\frac{hl^2}{n^2\pi^2(l-d)} \right) \sin(n\pi) \right.$$

$$\left. + \left(\frac{hl^2}{n^2\pi^2(l-d)} \right) \sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right) \right.$$

$$= \left(\frac{hl}{n\pi} \right) \cos\left(\frac{n\pi d}{l}\right) - \left(\left(\frac{hl^2}{n^2\pi^2(l-d)} \right) \sin(n\pi) \right)$$

$$+ \left(\frac{hl^2}{n^2\pi^2(l-d)} \right) \sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right) \qquad (4.34)$$

Jumlah persamaan (4.33) dan (4.34) dengan $\sin n\pi = 0$ adalah

$$A_n = \frac{2}{l}\left(\left(-\frac{hl}{n\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi d}{l}\right) + \left(\frac{hl^2}{n^2\pi^2 d}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right) + \left(\frac{hl}{n\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\right.$$

$$\left. + \left(\frac{hl^2}{n^2\pi^2(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{l}\left(\left(-\frac{hl}{n\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi d}{l}\right) + \left(\frac{hl}{n\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi d}{l}\right) + \left(\frac{hl^2}{n^2\pi^2 d}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\right.$$

$$\left. + \left(\frac{hl^2}{n^2\pi^2(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{l}\left(\left(\frac{hl^2}{n^2\pi^2 d}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right) + \left(\frac{hl^2}{n^2\pi^2(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{l}\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\left(\left(\frac{hl^2}{n^2\pi^2 d}\right) + \left(\frac{hl^2}{n^2\pi^2(l-d)}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{l}\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\left(\frac{hl^2(l-d)}{n^2\pi^2 d(l-d)} + \frac{hl^2 d}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)$$

$$= \frac{2}{l}\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\left(\frac{hl^2(l-d) + hl^2 d}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)$$

$$= \frac{2}{l}\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\left(\frac{hl^3 - hl^2 d + hl^2 d}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)$$

$$= \frac{2}{l}\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\left(\frac{hl^3}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)$$

$$A_n = \left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right) \tag{4.35}$$

Selanjutnya menggunakan kondisi awal kedua, akan dicari nilai B_n sebagai berikut:

$$\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-\frac{k_d}{2}t}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(A_n\cosh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+B_n\sinh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right)\right)\right)=0$$

$$\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t} = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-\frac{k_d}{2}t}\left(A_n\cosh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+B_n\sinh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right)\right)\right)=0$$

$$\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t} = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\left(e^{-\frac{k_d}{2}t}A_n\cosh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+e^{-\frac{k_d}{2}t}B_n\sinh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right)\right)\right)=0$$

$$\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t}$$

$$=\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(A_n e^{-\frac{k_d}{2}t}\cosh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right)\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial t}\left(B_n e^{-\frac{k_d}{2}t}\sinh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right)\right)\right)=0 \qquad (4.36)$$

Berikutnya dengan menggunakan aturan rantai, akan dicari $\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t}$ untuk suku pertama persamaan (4.36) sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(A_n e^{-\frac{k_d}{2}t}\cosh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right)\right)$$

$$=A_n\left(-\frac{k_d}{2}e^{-\frac{k_d}{2}t}\cosh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right)\right.$$

$$\left.+e^{-\frac{k_d}{2}t}\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}\sinh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right)\right) \tag{4.37}$$

Secara analog $\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t}$ untuk suku kedua persamaan (4.36) sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-\frac{k_d}{2}t}B_n\sinh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right)\right)$$

$$=B_n\left(-\frac{k_d}{2}e^{-\frac{k_d}{2}t}\sinh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right)\right.$$

$$\left.+e^{-\frac{k_d}{2}t}\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}\cosh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right)\right) \tag{4.38}$$

Sehingga jumlah persamaan (4.37) dan (4.38) adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t}$$

$$= \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(A_n\left(-\frac{k_d}{2}e^{-\frac{k_d}{2}t}\cosh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+e^{-\frac{k_d}{2}t}\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}\sinh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right)\right)\right.$$

$$+B_n\left(-\frac{k_d}{2}e^{-\frac{k_d}{2}t}\sinh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right)\right.$$

$$\left.\left.+e^{-\frac{k_d}{2}t}\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}\cosh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right)\right)\right)$$

Substitusikan $t=0$ sehingga $\frac{\partial u_n(x,0)}{\partial t}$ adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial u_n(x,0)}{\partial t}$$

$$= \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(A_n\left(-\frac{k_d}{2}e^{-\frac{k_d}{2}0}\cosh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}0\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+e^{-\frac{k_d}{2}0}\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}\sinh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}0\right)\right)\right.$$

$$+B_n\left(-\frac{k_d}{2}e^{-\frac{k_d}{2}0}\sinh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}0\right)\right.$$

$$\left.\left.+e^{-\frac{k_d}{2}0}\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}\cosh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}0\right)\right)\right)=0$$

Sehingga didapatkan

$$\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(A_n\left(-\frac{k_d}{2}e^0\cosh(0)+e^0\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}\sinh(0)\right)\right.$$

$$+B_n\left(-\frac{k_d}{2}e^0\sinh(0)\right.$$

$$\left.\left.+e^0\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}\cosh(0)\right)\right)=0$$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(A_n\left(-\frac{k_d}{2}+0\right)+B_n\left(0+\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}\right)\right)=0$$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(A_n\left(-\frac{k_d}{2}\right)+B_n\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}\right)=0$$

$$\left(A_n\left(-\frac{k_d}{2}\right)+B_n\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}\right)=0$$

$$A_n\frac{k_d}{2}=B_n\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}$$

$$B_n=\frac{A_nk_d}{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}$$

Susbtitusikan A_n dari persamaan (4.35)

$$B_n = \frac{k_d\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)}{\sqrt{{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}} \tag{4.39}$$

Solusi khusus untuk model matematika vibrasi dawai pada Sasando kasus 1 dengan substitusi (4.35) dan (4.39) pada (4.29) sebagai berikut:

$$u(x,t)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{k_d}{2}t}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\cosh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right)\right.$$

$$\left. + \frac{k_d\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)}{\sqrt{{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}}\sinh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right)\right)$$

$$u(x,t)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{k_d}{2}t}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\left(\cosh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right)\right.$$

$$\left. + \frac{k_d}{\sqrt{{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}}\sinh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right)\right) \tag{4.40}$$

Solusi (4.40) menggambarkan gerak dawai pada alat musik Sasando kasus pertama dinyatakan sebagai solusi yang *sahih* jika memenuhi kondisi awal dari dawai Sasando. Kondisi awal dawai yang diberikan adalah:

$$u(x,0) = f(x) \qquad \text{untuk setiap,} \qquad 0 < x < l$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = 0 \qquad \text{untuk setiap,} \qquad 0 < x < l$$

dengan $f(x)$ didefinisikan sebagai berikut:

$$f(x) = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

Selanjutnya mengecek solusi $u(x,t)$ terhadap kondisi awal

- $u(x,0) = f(x)$

$u_n(x,t)$

$$= e^{-\frac{k_d}{2}t} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\left(\cosh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right)\right.$$

$$\left. + \frac{k_d}{\sqrt{{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}}\sinh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right)\right)$$

Substitusikan $t = 0$ sehingga $u_n(x,0)$ adalah sebagai berikut

$u_n(x,0)$

$$= e^{-\frac{k_d}{2}0} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\left(\cosh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}0\right)\right.$$

$$\left. + \frac{k_d}{\sqrt{{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}}\sinh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}0\right)\right)$$

$$u_n(x,0) = e^0 \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\left(\cosh(0)\right.$$

$$\left. + \frac{k_d}{\sqrt{{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}}\sinh(0)\right)$$

$$= \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)(1+0)$$

$$= \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)$$

$$u_n(x,0) = \left(\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\right)\left(\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right)$$

Ingat (4.35) bahwa

$$A_n = \left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)$$

sehingga

$$u_n(x,0) = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = f(x) \tag{4.41}$$

- $\frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = 0$

$u_n(x,t)$

$$= e^{-\frac{k_d}{2}t}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\left(\cosh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right)\right.$$

$$\left. + \frac{k_d}{\sqrt{{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}}\sinh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right)\right)$$

$\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,t)$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-\frac{k_d}{2}t}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\left(\cosh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right)\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{k_d}{\sqrt{{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}}\sinh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right)\right)\right)$$

$\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,t)$

$$= \left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-\frac{k_d}{2}t}\left(\cosh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right)\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{k_d}{\sqrt{{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}}\sinh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right)\right)\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,t)$$

$$= \left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-\frac{k_d}{2}t}\cosh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right)\right.$$

$$\left.+e^{-\frac{k_d}{2}t}\frac{k_d}{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}\sinh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right)\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,t)$$

$$= \left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-\frac{k_d}{2}t}\cosh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right)\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-\frac{k_d}{2}t}\frac{k_d}{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}\sinh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right)\right)\right) \tag{4.42}$$

Dengan menggunakan aturan rantai, akan dicari $\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,t)$ untuk suku pertama persamaan (4.42) sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-\frac{k_d}{2}t}\cosh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right)\right)$$

$$= -\frac{k_d}{2}e^{-\frac{k_d}{2}t}\cosh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right)$$

$$+e^{-\frac{k_d}{2}t}\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}\sinh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right) \tag{4.43}$$

Secara analog $\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,t)$ untuk suku kedua persamaan (4.42) sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-\frac{k_d}{2}t}\frac{k_d}{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}\sinh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right)\right)$$

$$=\frac{k_d}{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}\left(-\frac{k_d}{2}e^{-\frac{k_d}{2}t}\sinh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right)\right.$$

$$\left.+e^{-\frac{k_d}{2}t}\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}\cosh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right)\right) \tag{4.44}$$

Sehingga jumlah dari persamaan (4.43) dan (4.44) adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,t)$$

$$=\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\left(-\frac{k_d}{2}e^{-\frac{k_d}{2}t}\cosh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right)\right.$$

$$+e^{-\frac{k_d}{2}t}\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}\sinh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right)$$

$$+\frac{k_d}{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}\left(-\frac{k_d}{2}e^{-\frac{k_d}{2}t}\sinh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right)\right.$$

$$\left.\left.+e^{-\frac{k_d}{2}t}\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}\cosh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right)\right)\right)$$

Substitusi $t=0$ sehingga $\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,0)$ adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,0)$$

$$=\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\left(-\frac{k_d}{2}e^{-\frac{k_d}{2}0}\cosh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}0\right)\right.$$

$$+e^{-\frac{k_d}{2}0}\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}\sinh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}0\right)$$

$$+\frac{k_d}{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}\left(-\frac{k_d}{2}e^{-\frac{k_d}{2}0}\sinh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}0\right)\right.$$

$$\left.\left.+e^{-\frac{k_d}{2}0}\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}\cosh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}0\right)\right)\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,0)=\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\left(-\frac{k_d}{2}e^0\cosh(0)\right.$$

$$+e^0\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}\sinh(0)$$

$$+\frac{k_d}{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}\left(-\frac{k_d}{2}e^0\sinh(0)\right.$$

$$\left.\left.+e^0\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}\cosh(0)\right)\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,0)=\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\left(-\frac{k_d}{2}+0\right.$$

$$\left.+\frac{k_d}{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}\left(0+\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}\right)\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,0)=\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\left(-\frac{k_d}{2}\right.$$

$$\left.+\frac{k_d}{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}\right)\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,0)=\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\left(-\frac{k_d}{2}+\frac{k_d}{2}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,0)=\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)(0)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,0)=0 \tag{4.45}$$

Demikian berdasarkan (4.41), (4.45) dan hasil perhitungan maple pada lampiran 1 yang menunjukkan bahwa (4.40) memenuhi bentuk awal, maka solusi (4.40) sah sebagai solusi model matematika vibrasi dawai pada alat musik Sasando kasus pertama.

Kasus 2; Jika ${k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)=0$ artinya ${k_d}^2=4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)$, maka $\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)=\frac{{k_d}^2}{4}$ dan $\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)=\left(\frac{k_d l}{2n\pi}\right)^2$ sehingga persamaan (4.25) menjadi

$$\ddot{T}(t)+k_d\dot{T}(t)+\frac{{k_d}^2}{4}T(t)=0 \tag{4.46}$$

dan persamaan (4.1) menjadi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{k_d l}{2n\pi}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_d \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{4.47}$$

Selanjutnya persamaan karakteristik dari (4.46) adalah

$$p^2 + k_d p + \frac{{k_d}^2}{4} = 0 \tag{4.48}$$

Maka akar-akar dari persamaan karakteristik (4.48) adalah kembar, yakni:

$$p_{1,2} = -\frac{k_d}{2}$$

Sehingga didapatkan solusi umum (4.25) adalah

$$T_n(t) = C_3 e^{-\frac{k_d}{2}t} + tC_4 e^{-\frac{k_d}{2}t} \tag{4.49}$$

Berdasarkan (4.23) dan (4.49) maka solusi umum model matematika vibrasi dawai Sasando kasus 2 adalah

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$$

$$u_n(x,t) = C_2 \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(C_3 e^{-\frac{k_d}{2}t} + tC_4 e^{-\frac{k_d}{2}t}\right)$$

$$u_n(x,t) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left((C_2C_3)\left(e^{-\frac{k_d}{2}t}\right) + (C_2C_4)\left(te^{-\frac{k_d}{2}t}\right)\right)$$

$$u_n(x,t) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(\mathrm{A}_n e^{-\frac{k_d}{2}t} + \mathrm{B}_n t e^{-\frac{k_d}{2}t}\right) \tag{4.50}$$

Dengan $\mathrm{A}_n = C_2C_3$ dan $\mathrm{B}_n = C_2C_4$

Berdasarkan prinsip superposisi bahwa kombinasi linier dari suatu persamaan diferensial yang linier dan homogen adalah juga merupakan solusi. Sehingga solusi $u(x,t)$ kasus 2 dapat juga dituliskan sebagai berikut:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(\mathrm{A}_n e^{-\frac{k_d}{2}t} + \mathrm{B}_n t e^{-\frac{k_d}{2}t}\right) \tag{4.51}$$

Selanjutnya akan dicari nilai A_n dengan kondisi awal (4.2).

$$u_n(x,0) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(\mathrm{A}_n e^{-\frac{k_d}{2}0} + \mathrm{B}_n(0)e^{-\frac{k_d}{2}0}\right) = f(x)$$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\ (\mathrm{A}_n e^0 + \mathrm{B}_n(0)e^0) = f(x)$$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)(\mathrm{A}_n) = f(x)$$

$$\mathrm{A}_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = f(x)$$

$$f(x) = \mathrm{A}_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \tag{4.52}$$

Berdasarkan definisi deret Fourier sinus, diperoleh:

$$\mathrm{A}_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx$$

dengan $f(x)$ didefinisikan sebagaimana pada persamaan (4.31).

Selanjutnya berdasarkan persamaan (4.31) dan (4.52) dapat dinyatakan

$$\mathrm{A}_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx$$

$$= \frac{2}{l}\left(\int_0^d \frac{hx}{d}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx\right.$$

$$\left. + \int_d^l \left(\frac{h(l-x)}{l-d}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx\right) \tag{4.53}$$

Persamaan (4.53) akan diselesaikan dengan integral parsial untuk suku pertama sebagai berikut:

$$\int_0^d \frac{hx}{d}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx = \left(\frac{hx}{d}\left(-\frac{l}{n\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right)\Big|_0^d - \int_0^d \left(-\frac{l}{n\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\frac{h}{d}dx$$

$$= \left(\left(-\frac{hlx}{n\pi d}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right)\Bigg|_0^d - \int_0^d \left(-\frac{hl}{n\pi d}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx$$

$$= \left(\left(-\frac{hlx}{n\pi d}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right)\Bigg|_0^d$$

$$- \left(\left(\left(-\frac{hl}{n\pi d}\right)\left(\frac{l}{n\pi}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right)_0^d - \int_0^d \left(\frac{l}{n\pi}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)(0)\,dx\right)$$

$$= \left(\left(-\frac{hlx}{n\pi d}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right)\Bigg|_0^d - \left(\left(\left(-\frac{hl^2}{n^2\pi^2 d}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right)\Bigg|_0^d - 0\right)$$

$$= \left(\left(-\frac{hlx}{n\pi d}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right)\Bigg|_0^d - \left(\left(-\frac{hl^2}{n^2\pi^2 d}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right)\Bigg|_0^d$$

$$= \left(\left(-\frac{hld}{n\pi d}\right)\cos\left(\frac{n\pi d}{l}\right) - \left(-\frac{hl(0)}{n\pi d}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}(0)\right)\right)$$

$$- \left(\left(-\frac{hl^2}{n^2\pi^2 d}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right) - \left(-\frac{hl^2}{n^2\pi^2 d}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}(0)\right)\right)$$

$$= \left(\left(-\frac{hld}{n\pi d}\right)\cos\left(\frac{n\pi d}{l}\right) - 0\right) - \left(\left(-\frac{hl^2}{n^2\pi^2 d}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right) - 0\right)$$

$$= \left(\left(-\frac{hld}{n\pi d}\right)\cos\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\right) - \left(\left(-\frac{hl^2}{n^2\pi^2 d}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\right)$$

$$= \left(-\frac{hl}{n\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi d}{l}\right) + \left(\frac{hl^2}{n^2\pi^2 d}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right) \qquad (4.54)$$

Selanjutnya untuk suku kedua

$$\int_{d}^{l}\left(\frac{h(l-x)}{l-d}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx$$

$$=\left(\left(\frac{h(l-x)}{l-d}\right)\left(-\frac{l}{n\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right)\Bigg|_{d}^{l}$$

$$-\int_{d}^{l}\left(-\frac{l}{n\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(-\frac{h}{l-d}\right)dx$$

$$=\left(\left(\frac{h(l-x)}{l-d}\right)\left(-\frac{l}{n\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right)\Bigg|_{d}^{l}-\int_{d}^{l}\left(\frac{hl}{n\pi(l-d)}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx$$

$$=\left(\left(-\frac{hl(l-x)}{n\pi(l-d)}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right)\Bigg|_{d}^{l}-\left(\left(\frac{hl}{n\pi(l-d)}\right)\left(\frac{l}{n\pi}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right)\Bigg|_{d}^{l}$$

$$-\int_{d}^{l}\left(\frac{l}{n\pi}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)(0)dx$$

$$=\left(\left(-\frac{hl(l-x)}{n\pi(l-d)}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right)\Bigg|_{d}^{l}-\left(\left(\frac{hl}{n\pi(l-d)}\right)\left(\frac{l}{n\pi}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right)\Bigg|_{d}^{l}$$

$$=\left(\left(-\frac{hl(l-x)}{n\pi(l-d)}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right)\Bigg|_{d}^{l}-\left(\left(\frac{hl^2}{n^2\pi^2(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right)\Bigg|_{d}^{l}$$

$$=\left(\left(\left(-\frac{hl(l-l)}{n\pi(l-d)}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}l\right)\right)-\left(\left(-\frac{hl(l-d)}{n\pi(l-d)}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}d\right)\right)\right)$$

$$-\left(\left(\left(\frac{hl^2}{n^2\pi^2(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}l\right)\right)-\left(\left(\frac{hl^2}{n^2\pi^2(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}d\right)\right)\right)$$

$$= \left(0 - \left(-\frac{hl}{n\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\right) - \left(\left(\frac{hl^2}{n^2\pi^2(l-d)}\right)\sin(n\pi)\right.$$

$$\left. + \left(\frac{hl^2}{n^2\pi^2(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{hl}{n\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi d}{l}\right) - \left(\left(\frac{hl^2}{n^2\pi^2(l-d)}\right)\sin(n\pi)\right.$$

$$\left. + \left(\frac{hl^2}{n^2\pi^2(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\right) \tag{4.55}$$

Sehingga jumlah persamaan (4.54) dan (4.55) dengan $\sin n\pi = 0$ adalah

$$A_n = \frac{2}{l}\left(\left(-\frac{hl}{n\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi d}{l}\right) + \left(\frac{hl^2}{n^2\pi^2 d}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right) + \left(\frac{hl}{n\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\right.$$

$$\left. + \left(\frac{hl^2}{n^2\pi^2(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{l}\left(\left(-\frac{hl}{n\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi d}{l}\right) + \left(\frac{hl}{n\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi d}{l}\right) + \left(\frac{hl^2}{n^2\pi^2 d}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\right.$$

$$\left. + \left(\frac{hl^2}{n^2\pi^2(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{l}\left(\left(\frac{hl^2}{n^2\pi^2 d}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right) + \left(\frac{hl^2}{n^2\pi^2(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{l}\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\left(\left(\frac{hl^2}{n^2\pi^2 d}\right) + \left(\frac{hl^2}{n^2\pi^2(l-d)}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{l}\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\left(\frac{hl^2(l-d)}{n^2\pi^2 d(l-d)} + \frac{hl^2 d}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)$$

$$= \frac{2}{l}\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\left(\frac{hl^2(l-d) + hl^2 d}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)$$

$$= \frac{2}{l}\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\left(\frac{hl^3 - hl^2 d + hl^2 d}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)$$

$$= \frac{2}{l}\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\left(\frac{hl^3}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)$$

$$\mathrm{A}_n = \left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right) \tag{4.56}$$

Selanjutnya menggunakan kondisi awal kedua, akan dicari nilai B_n sebagai berikut:

$$\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(\mathrm{A}_n e^{-\frac{k_d}{2}t} + \mathrm{B}_n t e^{-\frac{k_d}{2}t}\right)\right) = 0$$

$$\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t} = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{A}_n e^{-\frac{k_d}{2}t} + \mathrm{B}_n t e^{-\frac{k_d}{2}t}\right) = 0$$

$$\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t} = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(-\frac{k_d}{2}\mathrm{A}_n e^{-\frac{k_d}{2}t} + \left(-\frac{k_d}{2}\mathrm{B}_n\, t\, e^{-\frac{k_d}{2}t} + \mathrm{B}_n\, e^{-\frac{k_d}{2}t}\right)\right) = 0$$

Kemudian substitusikan $t = 0$ sehingga didapatkan $\frac{\partial u_n(x,0)}{\partial t}$ adalah

$$\frac{\partial u_n(x,0)}{\partial t} = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(-\frac{k_d}{2}\mathrm{A}_n e^{-\frac{k_d}{2}0} + \left(-\frac{k_d}{2}\mathrm{B}_n(0)e^{-\frac{k_d}{2}0} + \mathrm{B}_n\, e^{-\frac{k_d}{2}0}\right)\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(-\frac{k_d}{2}\mathrm{A}_n e^0 + \left(-\frac{k_d}{2}\mathrm{B}_n(0)e^0 + \mathrm{B}_n e^0\right)\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(-\frac{k_d}{2}\mathrm{A}_n + \mathrm{B}_n\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(-\frac{k_d}{2}\mathrm{A}_n + \mathrm{B}_n\right) = 0$$

$$-\frac{k_d}{2}\mathrm{A}_n + \mathrm{B}_n = 0$$

$$-\frac{k_d}{2}\mathrm{A}_n = -\mathrm{B}_n$$

$$\mathrm{B}_n = \frac{k_d}{2}\mathrm{A}_n$$

Substitusikan nilai A_n pada (4.51).

$$\mathrm{B}_n = \frac{k_d}{2}\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right) \tag{4.57}$$

Solusi khusus untuk model matematika vibrasi dawai pada Sasando kasus 2 dengan substitusi (4.56) dan (4.57) pada (4.51) sebagai berikut:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(\mathrm{A}_n e^{-\frac{k_d}{2}t} + \mathrm{B}_n t e^{-\frac{k_d}{2}t}\right)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)e^{-\frac{k_d}{2}t}\right.$$
$$\left. + \frac{k_d}{2}\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)te^{-\frac{k_d}{2}t}\right) \tag{4.58}$$

Solusi (4.58) menggambarkan gerak dawai pada alat musik Sasando kasus 2 dinyatakan sebagai solusi yang *sahih* jika memenuhi kondisi awal dari dawai Sasando. Kondisi awal dawai diberikan adalah:

$$u(x,0) = f(x) \qquad \text{untuk setiap,} \qquad 0 < x < l$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = 0 \qquad \text{untuk setiap,} \qquad 0 < x < l$$

dengan $f(x)$ didefinisikan sebagai berikut:

$$f(x) = \mathrm{A}_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

Selanjutnya mengecek solusi $u(x,t)$ terhadap kondisi awal

- $u(x,0) = f(x)$

$$u_n(x,t) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)e^{\frac{-k_d}{2}t}\right.$$
$$\left. + \frac{k_d}{2}\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)te^{\frac{-k_d}{2}t}\right)$$

Substitusikan $t = 0$ sehingga $u_n(x,0)$ adalah sebagai berikut

$$u_n(x,0) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)e^{\frac{-k_d}{2}0}\right.$$

$$\left. + \frac{k_d}{2}\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)(0)e^{\frac{-k_d}{2}0}\right)$$

$$u_n(x,0) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)e^{0} + 0\right)$$

$$= \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\right)$$

$$= \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)$$

$$u_n(x,0) = \left(\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\right)\left(\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right)$$

Ingat (4.56) bahwa

$$\mathrm{A}_n = \left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)$$

sehingga

$$u_n(x,0) = \mathrm{A}_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = f(x) \tag{4.59}$$

- $\frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = 0$

$$u_n(x,t) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)e^{\frac{-k_d}{2}t}\right.$$

$$\left. + \frac{k_d}{2}\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)te^{\frac{-k_d}{2}t}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)e^{\frac{-k_d}{2}t}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{k_d}{2}\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)te^{\frac{-k_d}{2}t}\right)\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,t) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\left(e^{\frac{-k_d}{2}t}+\frac{k_d}{2}te^{\frac{-k_d}{2}t}\right)\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,t) = \left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\left(\frac{-k_d}{2}e^{\frac{-k_d}{2}t}\right.$$

$$\left.+\left(-\frac{k_d^2}{4}te^{\frac{-k_d}{2}t}+\frac{k_d}{2}e^{\frac{-k_d}{2}t}\right)\right)$$

Sehingga

$$\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,t) = \left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\left(\frac{-k_d}{2}e^{\frac{-k_d}{2}t}-\frac{k_d^2}{4}te^{\frac{-k_d}{2}t}\right.$$

$$\left.+\frac{k_d}{2}e^{\frac{-k_d}{2}t}\right)$$

Substitusi $t = 0$ sehingga $\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,0)$ adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,0) = \left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\left(\frac{-k_d}{2}e^{\frac{-k_d}{2}0}\right.$$

$$\left.-\frac{k_d^2}{4}(0)e^{\frac{-k_d}{2}0}+\frac{k_d}{2}e^{\frac{-k_d}{2}0}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,0) = \left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\left(\frac{-k_d}{2}e^0-0+\frac{k_d}{2}e^0\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,0) = \left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\left(\frac{-k_d}{2}+\frac{k_d}{2}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,0) = \left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)(0)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = 0 \tag{4.60}$$

Demikian berdasarkan (4.59), (4.60) dan hasil perhitungan maple pada lampiran 2 yang menunjukkan bahwa (4.58) memenuhi bentuk awal (4.47), maka solusi (4.58) sah model matematika vibrasi dawai pada alat musik Sasando kasus kedua.

Kasus 3; Jika ${k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right) < 0$ artinya ${k_d}^2 < 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)$, maka akar-akar dari persamaan karakteristik (4.26) adalah akar kompleks. Yakni

$$p_{1,2} = \frac{-k_d \pm \sqrt{-\left({k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right)}}{2}$$

$$p_{1,2} = \frac{-k_d \pm i\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2} \tag{4.61}$$

Artinya

$$p_1 = \frac{-k_d + i\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2} \tag{4.62}$$

$$p_2 = \frac{-k_d - i\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2} \tag{4.63}$$

Sehingga didapatkan solusi umum (4.25) adalah

$$T_n(t) = C_3 e^{\frac{-k_d + i\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t} + C_4 e^{\frac{-k_d - i\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t} \tag{4.64}$$

Persamaan (4.64) dilakukan transformasi kutub, sebagai berikut:

$$T_n(t) = C_3 e^{\left(-\frac{k_d}{2}+\frac{i\sqrt{\left|k_d{}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}\right)t} + C_4 e^{\left(-\frac{k_d}{2}-\frac{i\sqrt{\left|k_d{}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}\right)t}$$

$$T_n(t) = C_3 e^{-\frac{k_d}{2}t+\frac{i\sqrt{\left|k_d{}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t} + C_4 e^{-\frac{k_d}{2}t-\frac{i\sqrt{\left|k_d{}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t}$$

$$T_n(t) = C_3 e^{-\frac{k_d}{2}t} e^{i\frac{\sqrt{\left|k_d{}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t} + C_4 e^{-\frac{k_d}{2}t} e^{i\frac{-\sqrt{\left|k_d{}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t}$$

$$T_n(t) = e^{-\frac{k_d}{2}t}\left(C_3 e^{i\frac{\sqrt{\left|k_d{}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t} + C_4 e^{i\frac{-\sqrt{\left|k_d{}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t}\right)$$

$$\begin{aligned}T_n(t) = e^{-\frac{k_d}{2}t}\Bigg(C_3\Bigg(&\cos\left(\frac{\sqrt{\left|k_d{}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\\ &+ i\sin\left(\frac{\sqrt{\left|k_d{}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\Bigg)\\ + C_4\Bigg(&\cos\left(\frac{-\sqrt{\left|k_d{}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\\ &+ i\sin\left(\frac{-\sqrt{\left|k_d{}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\Bigg)\Bigg)\end{aligned}$$

$$T_n(t) = e^{-\frac{k_d}{2}t}\left(C_3\cos\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right.$$

$$+ C_3 i\sin\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)$$

$$+ C_4\cos\left(\frac{-\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)$$

$$\left. + C_4 i\sin\left(\frac{-\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right)$$

$$T_n(t) = e^{-\frac{k_d}{2}t}\left(C_3\cos\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right.$$

$$+ C_3 i\sin\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)$$

$$+ C_4\cos\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)$$

$$\left. - C_4 i\sin\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right)$$

$$T_n(t) = e^{-\frac{k_d}{2}t}\left(C_3\cos\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right.$$

$$+ C_4\cos\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)$$

$$+ C_3 i\sin\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)$$

$$\left. - C_4 i\sin\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right)$$

$$T_n(t) = e^{-\frac{k_d}{2}t}\left((C_3 + C_4)\cos\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right.$$

$$\left. + (C_3 - C_4)i\sin\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right) \qquad (4.65)$$

Sehingga didapatkan solusi umum model matematika vibrasi dawai Sasando (4.1) kasus 3 berdasarkan (4.65) adalah sebagai berikut:

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$$

$$u_n(x,t) = e^{-\frac{k_d}{2}t} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(C_2(C_3 + C_4)\cos\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right) + C_2(C_3 - C_4)i\sin\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right)$$

$$u_n(x,t) = e^{-\frac{k_d}{2}t} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(a_n\cos\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right) + b_n\sin\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right) \tag{4.66}$$

Dengan $a_n = C_2(C_3 + C_4)$ dan $b_n = C_2(C_3 i - C_4 i)$

Berdasarkan prinsip superposisi bahwa kombinasi linier dari suatu persamaan diferensial yang linier dan homogen adalah juga merupakan solusi. Sehingga solusi $u(x,t)$ kasus 3 dapat juga dituliskan sebagai berikut:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{k_d}{2}t} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(a_n\cos\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right) + b_n\sin\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right) \tag{4.67}$$

Selanjutnya akan dicari nilai a_n dan b_n dengan kondisi awal (4.2).

$$u_n(x,0) = e^{-\frac{k_d}{2}0}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(a_n\cos\frac{\sqrt{\left|k_d^{\,2}-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}0\right.$$

$$\left.+\,b_n\sin\frac{\sqrt{\left|k_d^{\,2}-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}0\right) = f(x)$$

$$e^0\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\,(a_n\cos 0 + b_n\sin 0) = f(x)$$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)(a_n) = f(x)$$

$$a_n\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = f(x)$$

$$f(x) = a_n\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \tag{4.68}$$

Berdasarkan definisi deret Fourier sinus, diperoleh:

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx$$

dengan $f(x)$ didefinisikan sebagaimana pada persamaan (4.31). Selanjutnya berdasarkan persamaan (4.31) dan (4.68) dapat dinyatakan

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx$$

$$= \frac{2}{l}\left(\int_0^d \frac{hx}{d}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx\right.$$

$$\left.+\int_d^l\left(\frac{h(l-x)}{l-d}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx\right) \tag{4.69}$$

Persamaan (4.69) akan diselesaikan dengan integral parsial untuk suku pertama sebagai berikut:

$$\int_0^d \frac{hx}{d}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx = \left(\frac{hx}{d}\left(-\frac{l}{n\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right)\Bigg|_0^d - \int_0^d \left(-\frac{l}{n\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\frac{h}{d}dx$$

$$= \left(\left(-\frac{hlx}{n\pi d}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right)\Bigg|_0^d - \int_0^d \left(-\frac{hl}{n\pi d}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx$$

$$= \left(\left(-\frac{hlx}{n\pi d}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right)\Bigg|_0^d$$

$$- \left(\left(\left(-\frac{hl}{n\pi d}\right)\left(\frac{l}{n\pi}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right)_0^d - \int_0^d \left(\frac{l}{n\pi}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)(0)\,dx\right)$$

$$= \left(\left(-\frac{hlx}{n\pi d}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right)\Bigg|_0^d - \left(\left(\left(-\frac{hl^2}{n^2\pi^2 d}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right)\Bigg|_0^d - 0\right)$$

$$= \left(\left(-\frac{hlx}{n\pi d}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right)\Bigg|_0^d - \left(\left(-\frac{hl^2}{n^2\pi^2 d}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right)\Bigg|_0^d$$

$$= \left(\left(-\frac{hld}{n\pi d}\right)\cos\left(\frac{n\pi d}{l}\right) - \left(-\frac{hl(0)}{n\pi d}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}(0)\right)\right)$$

$$- \left(\left(-\frac{hl^2}{n^2\pi^2 d}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right) - \left(-\frac{hl^2}{n^2\pi^2 d}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}(0)\right)\right)$$

$$= \left(\left(-\frac{hld}{n\pi d}\right)\cos\left(\frac{n\pi d}{l}\right) - 0\right) - \left(\left(-\frac{hl^2}{n^2\pi^2 d}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right) - 0\right)$$

$$= \left(\left(-\frac{hld}{n\pi d}\right)\cos\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\right) - \left(\left(-\frac{hl^2}{n^2\pi^2 d}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\right)$$

$$= \left(-\frac{hl}{n\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi d}{l}\right) + \left(\frac{hl^2}{n^2\pi^2 d}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right) \tag{4.70}$$

Selanjutnya untuk suku kedua,

$$\int_d^l \left(\frac{h(l-x)}{l-d}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx$$

$$= \left(\left(\frac{h(l-x)}{l-d}\right)\left(-\frac{l}{n\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right)\Bigg|_d^l$$

$$- \int_d^l \left(-\frac{l}{n\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(-\frac{h}{l-d}\right) dx$$

$$= \left(\left(\frac{h(l-x)}{l-d}\right)\left(-\frac{l}{n\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right)\Bigg|_d^l - \int_d^l \left(\frac{hl}{n\pi(l-d)}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx$$

$$= \left(\left(-\frac{hl(l-x)}{n\pi(l-d)}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right)\Bigg|_d^l - \left(\left(\frac{hl}{n\pi(l-d)}\right)\left(\frac{l}{n\pi}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right)\Bigg|_d^l$$

$$- \int_d^l \left(\frac{l}{n\pi}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)(0) dx$$

$$= \left(\left(-\frac{hl(l-x)}{n\pi(l-d)}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right)\Bigg|_d^l - \left(\left(\frac{hl}{n\pi(l-d)}\right)\left(\frac{l}{n\pi}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right)\Bigg|_d^l$$

$$= \left(\left(-\frac{hl(l-x)}{n\pi(l-d)}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right)\Bigg|_d^l - \left(\left(\frac{hl^2}{n^2\pi^2(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right)\Bigg|_d^l$$

$$= \left(\left(\left(-\frac{hl(l-l)}{n\pi(l-d)}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}l\right)\right) - \left(\left(-\frac{hl(l-d)}{n\pi(l-d)}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}d\right)\right)\right)$$

$$- \left(\left(\left(\frac{hl^2}{n^2\pi^2(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}l\right)\right)\right.$$

$$\left. - \left(\left(\frac{hl^2}{n^2\pi^2(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}d\right)\right)\right)$$

$$= \left(0 - \left(-\frac{hl}{n\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\right) - \left(\left(\frac{hl^2}{n^2\pi^2(l-d)}\right)\sin(n\pi)\right.$$

$$\left. + \left(\frac{hl^2}{n^2\pi^2(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{hl}{n\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi d}{l}\right) - \left(\left(\frac{hl^2}{n^2\pi^2(l-d)}\right)\sin(n\pi)\right.$$

$$\left. + \left(\frac{hl^2}{n^2\pi^2(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\right) \qquad (4.71)$$

Sehingga jumlah dari persamaan (4.70) dan (4.71) dengan $\sin n\pi = 0$ adalah

$$a_n = \frac{2}{l}\left(\left(-\frac{hl}{n\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi d}{l}\right) + \left(\frac{hl^2}{n^2\pi^2 d}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right) + \left(\frac{hl}{n\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\right.$$

$$\left. + \left(\frac{hl^2}{n^2\pi^2(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{l}\left(\left(-\frac{hl}{n\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi d}{l}\right) + \left(\frac{hl}{n\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi d}{l}\right) + \left(\frac{hl^2}{n^2\pi^2 d}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\right.$$

$$\left. + \left(\frac{hl^2}{n^2\pi^2(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{l}\left(\left(\frac{hl^2}{n^2\pi^2 d}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right) + \left(\frac{hl^2}{n^2\pi^2(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{l}\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\left(\left(\frac{hl^2}{n^2\pi^2 d}\right) + \left(\frac{hl^2}{n^2\pi^2(l-d)}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{l}\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\left(\frac{hl^2(l-d)}{n^2\pi^2 d(l-d)} + \frac{hl^2 d}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)$$

$$= \frac{2}{l}\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\left(\frac{hl^2(l-d) + hl^2 d}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)$$

$$= \frac{2}{l}\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\left(\frac{hl^3 - hl^2 d + hl^2 d}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)$$

$$= \frac{2}{l} \sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\left(\frac{hl^3}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)$$

$$a_n = \left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right) \sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right) \tag{4.72}$$

Selanjutnya menggunakan kondisi awal kedua, akan dicari nilai b_n sebagai berikut:

$$\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-\frac{k_d}{2}t} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(a_n \cos\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right.\right.$$

$$\left.\left. + b_n \sin\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right)\right) = 0$$

$$\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) a_n e^{-\frac{k_d}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right.$$

$$\left. + b_n e^{-\frac{k_d}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right) = 0$$

$$\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t} = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \frac{\partial}{\partial t}\left(a_n e^{-\frac{k_d}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right.$$

$$\left. + b_n e^{-\frac{k_d}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right) = 0$$

$$\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t}$$

$$= \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(a_n e^{-\frac{k_d}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right)\right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial t}\left(b_n e^{-\frac{k_d}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right)\right) \qquad (4.73)$$

Berikutnya dengan menggunakan aturan rantai, akan dicari $\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t}$ untuk suku pertama persamaan (4.73) sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(a_n e^{-\frac{k_d}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right)$$

$$= -a_n\frac{k_d}{2}e^{-\frac{k_d}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)$$

$$+ a_n e^{-\frac{k_d}{2}t}\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}\left(-\sin\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(a_n e^{-\frac{k_d}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right)$$

$$= a_n\left(-\frac{k_d}{2}\right)e^{-\frac{k_d}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)$$

$$- a_n e^{-\frac{k_d}{2}t}\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}\right)t \qquad (4.74)$$

Secara analog $\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t}$ untuk suku kedua persamaan (4.73) sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(b_n e^{-\frac{k_d}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right)$$

$$=-b_n\frac{k_d}{2}e^{-\frac{k_d}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)$$

$$+b_n e^{-\frac{k_d}{2}t}\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(b_n e^{-\frac{k_d}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right)$$

$$=b_n\left(-\frac{k_d}{2}\right)e^{-\frac{k_d}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)$$

$$+b_n e^{-\frac{k_d}{2}t}\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right) \quad (4.75)$$

Sehingga jumlah persamaan (4.74) dan (4.75) adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t}$$

$$= \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(\left(a_n\left(-\frac{k_d}{2}\right)e^{-\frac{k_d}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right.\right.$$

$$\left.-a_n e^{-\frac{k_d}{2}t}\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right)$$

$$+\left(b_n\left(-\frac{k_d}{2}\right)e^{-\frac{k_d}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right.$$

$$\left.\left.+b_n e^{-\frac{k_d}{2}t}\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right)\right)$$

Substitusikan $t=0$ sehingga $\frac{\partial u_n(x,0)}{\partial t}$ adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial u_n(x,0)}{\partial t}$$

$$= \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(\left(a_n\left(-\frac{k_d}{2}\right)e^{-\frac{k_d}{2}0}\cos\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}0\right)\right.\right.$$

$$\left.-a_n e^{-\frac{k_d}{2}0}\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}0\right)\right)$$

$$+\left(b_n\left(-\frac{k_d}{2}\right)e^{-\frac{k_d}{2}0}\sin\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}0\right)\right.$$

$$\left.\left.+b_n e^{-\frac{k_d}{2}0}\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}0\right)\right)\right)=0$$

Sehingga didapatkan

$$\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(\left(a_n\left(-\frac{k_d}{2}\right)e^0\cos(0)\ -a_n e^0\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}\sin(0)\right)\right.$$

$$\left.+\left(b_n\left(-\frac{k_d}{2}\right)e^0\sin(0)\ +b_n e^0\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}\cos(0)\right)\right)$$

$$=0$$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(\left(a_n\left(-\frac{k_d}{2}\right)(1)(1)-a_n(1)\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}(0)\right)\right.$$

$$\left.+\left(b_n\left(-\frac{k_d}{2}\right)(1)(0)+b_n(1)\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}(1)\right)\right)=0$$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(\left(a_n\left(-\frac{k_d}{2}\right)-0\right)+\left(0+b_n\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}\right)\right)=0$$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(a_n\left(-\frac{k_d}{2}\right)+b_n\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}\right)=0$$

$$a_n\left(-\frac{k_d}{2}\right)+b_n\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}=0$$

$$a_n\left(\frac{k_d}{2}\right)=b_n\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}$$

$$b_n=\frac{a_n\left(\frac{k_d}{2}\right)}{\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}}$$

$$b_n = a_n\left(\frac{k_d}{2}\right)\frac{2}{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}$$

$$b_n = \frac{a_n k_d}{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}$$

Dengan mensubstitusikan a_n yang telah didapatkan sebelumnya, didapatkan

$$b_n = \frac{\left(\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\right)k_d}{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}} \tag{4.76}$$

Solusi khusus untuk model matematika vibrasi dawai pada Sasando kasus 3 dengan substitusi (4.72) dan (4.76) pada (4.67) sebagai berikut:

$$u(x,t)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)e^{-\frac{k_d}{2}t}\left(\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right.$$

$$\left. + \frac{\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)k_d}{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}\sin\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right)$$

$$u(x,t)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)e^{-\frac{k_d}{2}t}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right.$$

$$\left. + \frac{k_d}{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}\sin\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right) \tag{4.77}$$

Solusi (4.77) menggambarkan gerak dawai pada alat musik Sasando kasus 3 dinyatakan sebagai solusi yang *sahih* jika memenuhi kondisi awal dari dawai Sasando. Kondisi awal dawai yang diberikan adalah:

$$u(x,0) = f(x) \qquad \text{untuk setiap,} \qquad 0 < x < l$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,0) = 0 \qquad \text{untuk setiap,} \qquad 0 < x < l$$

dengan $f(x)$ didefinisikan sebagai berikut:

$$f(x) = a_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

Selanjutnya mengecek solusi $u(x,t)$ terhadap kondisi awal

- $u(x,0) = f(x)$

$u_n(x,t)$

$$= \left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right) e^{-\frac{k_d}{2}t} \left(\cos\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2} t\right)\right.$$

$$\left. + \frac{k_d}{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}} \sin\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2} t\right)\right)$$

Substitusikan $t = 0$ sehingga $u_n(x,0)$ adalah sebagai berikut

$u_n(x,0)$

$$= \left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right) e^{-\frac{k_d}{2}0} \left(\cos\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2} (0)\right)\right.$$

$$\left. + \frac{k_d}{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}} \sin\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2} (0)\right)\right)$$

$$u_n(x,0) = \left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right) e^0 \left(\cos(0)\right.$$

$$\left. + \frac{k_d}{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}} \sin(0)\right)$$

$$= \left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)(1)\ (1+0)$$

$$= \left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)$$

$$u_n(x,0) = \left(\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\right)\left(\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right)$$

Ingat (4.72) bahwa

$$a_n = \left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)$$

sehingga

$$u(x,0) = a_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \ = f(x) \qquad (4.78)$$

- $\frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = 0$

$u_n(x,t)$

$$= \left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)e^{-\frac{k_d}{2}t}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right.$$

$$\left.+\frac{k_d}{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}\sin\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right)$$

$\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,t)$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)e^{-\frac{k_d}{2}t}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{k_d}{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}\sin\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right)\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,t)$$

$$=\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-\frac{k_d}{2}t}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{k_d}{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}\sin\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right)\right)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,t)$$

$$=\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-\frac{k_d}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right.$$

$$\left.+e^{-\frac{k_d}{2}t}\frac{k_d}{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}\sin\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,t)$$

$$=\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-\frac{k_d}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-\frac{k_d}{2}t}\frac{k_d}{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}\sin\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right)\right) \tag{4.79}$$

Dengan menggunakan aturan rantai, akan dicari $\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,t)$ untuk suku pertama persamaan (4.79) sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-\frac{k_d}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right)$$

$$=-\frac{k_d}{2}e^{-\frac{k_d}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)$$

$$+e^{-\frac{k_d}{2}t}\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}\left(-\sin\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-\frac{k_d}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right)$$

$$=-\frac{k_d}{2}e^{-\frac{k_d}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)$$

$$-e^{-\frac{k_d}{2}t}\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right) \tag{4.80}$$

Secara analog $\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,t)$ untuk suku kedua persamaan (4.42) sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-\frac{k_d}{2}t}\frac{k_d}{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}\sin\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right)$$

$$=-\frac{k_d}{2}\frac{k_d}{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}e^{-\frac{k_d}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)$$

$$+e^{-\frac{k_d}{2}t}\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}\,k_d}{2\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-\frac{k_d}{2}t}\frac{k_d}{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}\sin\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right)$$

$$=-\frac{k_d}{2}\frac{k_d}{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}e^{-\frac{k_d}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)$$

$$+e^{-\frac{k_d}{2}t}\frac{k_d}{2}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right) \tag{4.81}$$

Sehingga jumlah dari persamaan (4.80) dan (4.81) adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,t)$$

$$=\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\right)\left(\left(-\frac{k_d}{2}e^{-\frac{k_d}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right.\right.$$

$$\left.-e^{-\frac{k_d}{2}t}\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right)$$

$$+\left(-\frac{k_d}{2}\frac{k_d}{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}e^{-\frac{k_d}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right.$$

$$\left.\left.+e^{-\frac{k_d}{2}t}\frac{k_d}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right)\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,t)$$

$$= \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\right)\left(-\frac{k_d}{2}e^{-\frac{k_d}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right.$$

$$-e^{-\frac{k_d}{2}t}\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)$$

$$-\frac{k_d}{2}\frac{k_d}{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}e^{-\frac{k_d}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)$$

$$\left.+e^{-\frac{k_d}{2}t}\frac{k_d}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right)$$

Substitusi $t = 0$ sehingga $\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,0)$ adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,0)$$

$$= \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\right)\left(-\frac{k_d}{2}e^{-\frac{k_d}{2}0}\cos\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}0\right)\right.$$

$$-e^{-\frac{k_d}{2}0}\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}0\right)$$

$$-\frac{k_d}{2}\frac{k_d}{2\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}e^{-\frac{k_d}{2}0}\sin\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}0\right)$$

$$\left.+e^{-\frac{k_d}{2}0}\frac{k_d}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2-4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2+2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}0\right)\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,0) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\right)\left(-\frac{k_d}{2}e^0\cos 0\right.$$

$$- e^0\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}\sin 0$$

$$\left.-\frac{k_d}{2}\frac{k_d}{2\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}e^0\sin 0 + e^0\frac{k_d}{2}\cos 0\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,0) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\right)\left(-\frac{k_d}{2}(1)(1)\right.$$

$$-(1)\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}(0)$$

$$\left.-\frac{k_d}{2}\frac{k_d}{2\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}(1)(0) + (1)\frac{k_d}{2}(1)\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,0) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\right)\left(-\frac{k_d}{2} - 0 + 0 + \frac{k_d}{2}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,0) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\right)\left(-\frac{k_d}{2} + \frac{k_d}{2}\right)$$

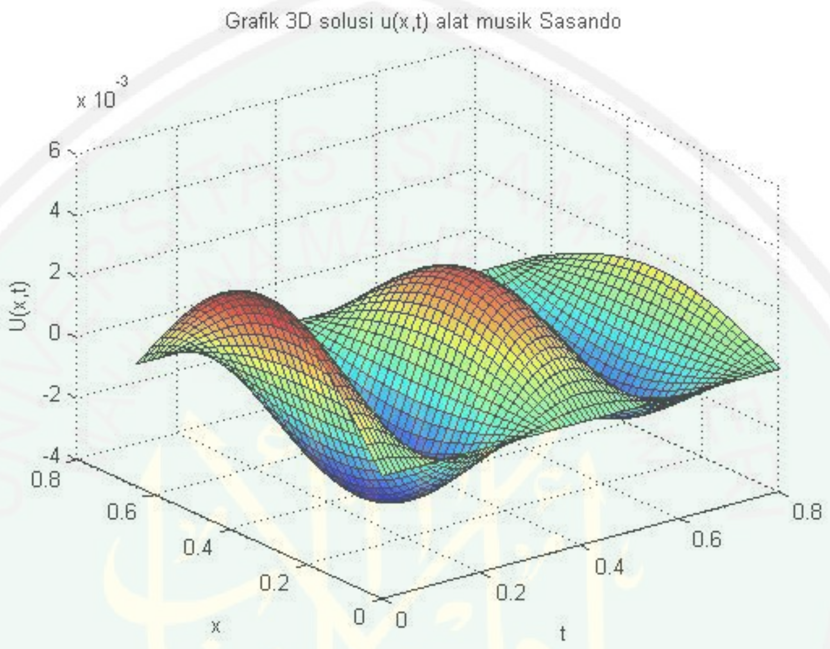
$$\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,0) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\right)(0)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = 0 \tag{4.82}$$

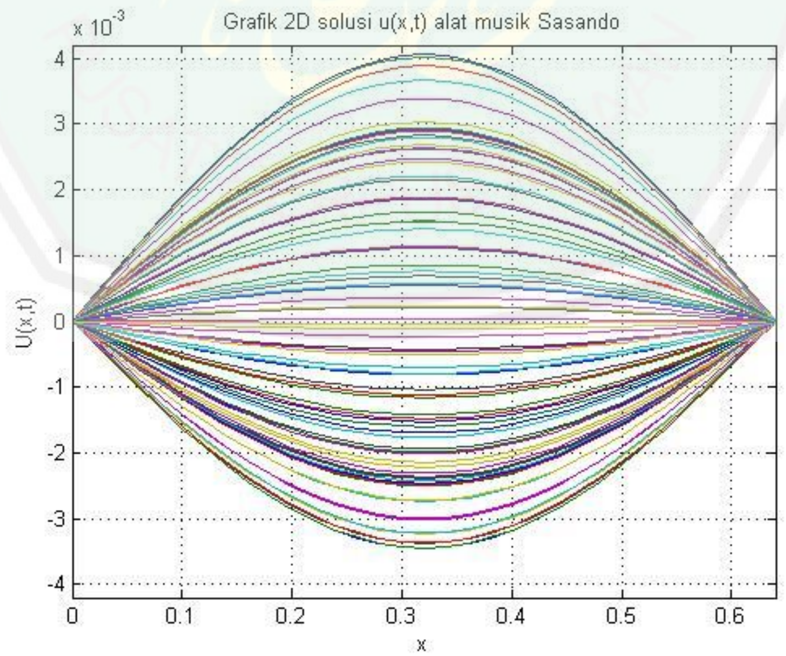
Demikian berdasarkan (4.78) dan (4.82) maka solusi (4.77) sah sebagai solusi model matematika vibrasi dawai pada alat musik Sasando kasus ketiga.

4.1.2 Analisis Profil Grafik Solusi Model Vibrasi Dawai Sasando

Berikut ini merupakan hasil simulasi solusi model matematika vibrasi dawai pada alat musik Sasando dengan nilai $k_d = 1.5$ dan $c = 1$ berdasarkan asumsi yang digunakan saat konstruksi model.

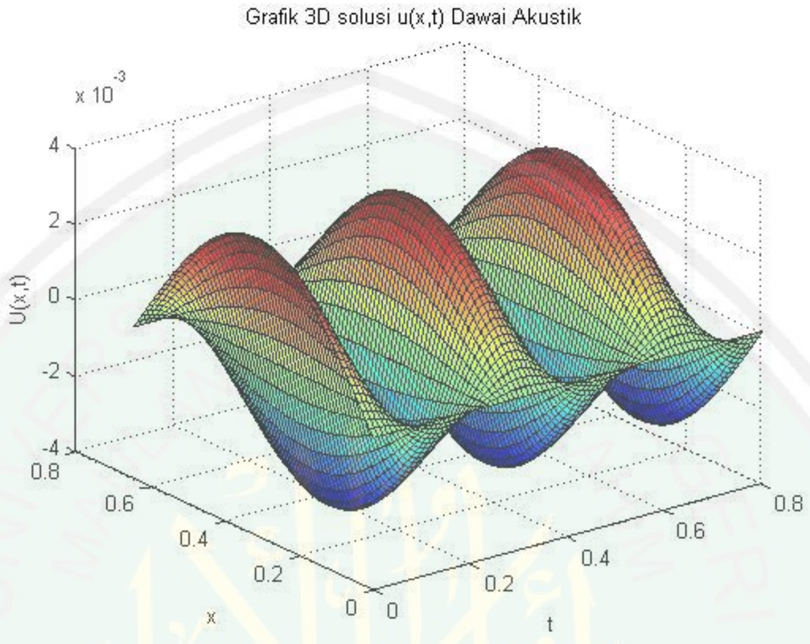


Gambar 4.1 Grafik 3 Dimensi Solusi Model Vibrasi Dawai Sasando

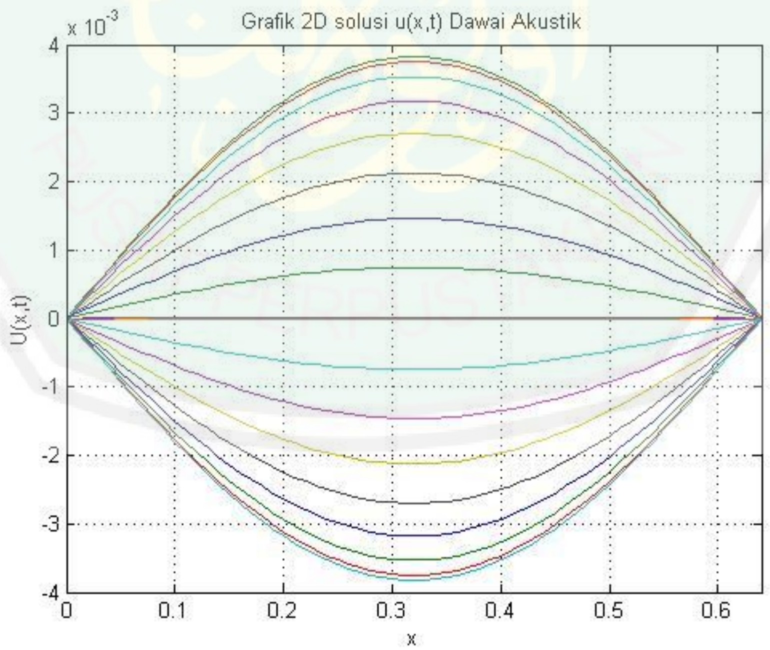


Gambar 4.2 Grafik 2 Dimensi Solusi Model Vibrasi Dawai Sasando

Sebagai rujukan, disajikan pula grafik solusi model vibrasi dawai akustik oleh Gulla (2011).



Gambar 4.3 Grafik 3 Dimensi Solusi Model Vibrasi Dawai Akustik



Gambar 4.4 Grafik 2 Dimensi Solusi Model Vibrasi Dawai Akustik

4.2 Pembahasan

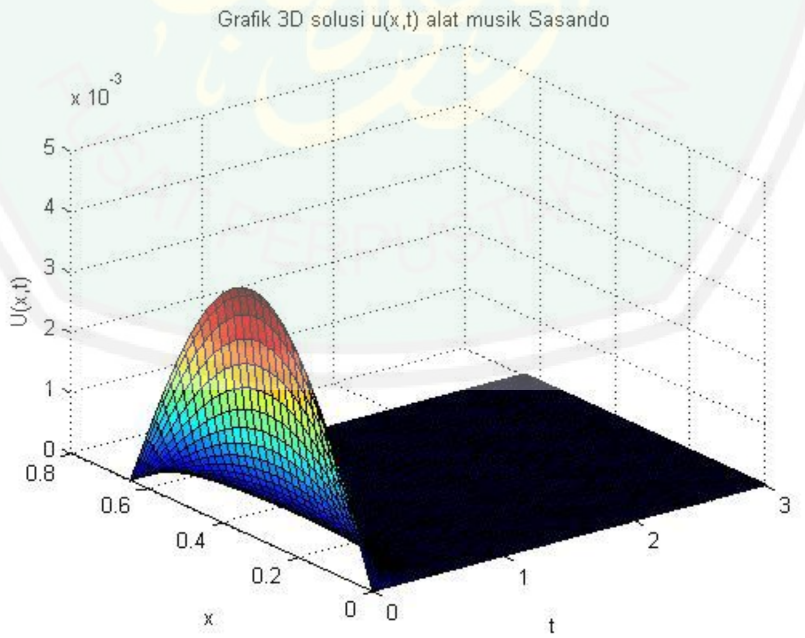
4.2.1 Solusi Model Matematika Vibrasi Dawai

Telah diketahui terdapat 3 solusi khusus dari model matematika vibrasi dawai pada alat musik Sasando, yaitu:

Kasus 1; ${k_d}^2 > 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{k_d}{2}t} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\left(\cosh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right) + \frac{k_d}{\sqrt{{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}}\sinh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right)\right)$$

Selanjutnya dipilih nilai parameter $k_d = 29.5$, $c = 1$ dan $l = 0.64$ yang memenuhi kasus 1, yaitu ${k_d}^2 > 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)$. Berikut ini merupakan grafik solusi yang dihasilkan MATLAB dari kasus 1 dengan nilai parameter yang telah dipilih.



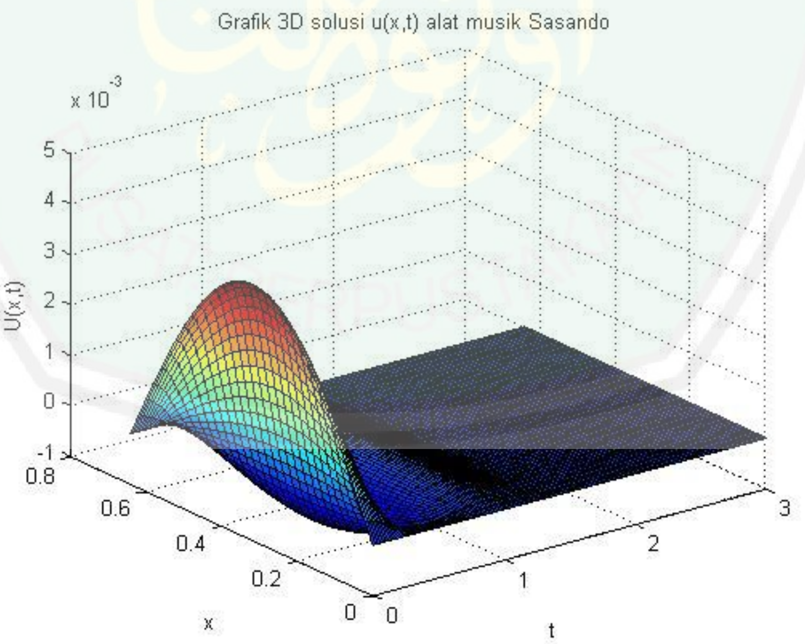
Gambar 4.5 Grafik Solusi Kasus 1

Dari hasil profil grafik solusi kasus 1 tersebut, dalam waktu 3 detik pertama dawai menghasilkan seperempat gelombang yakni satu puncak dan tidak mengalami vibrasi lagi setelahnya sehingga frekuensi vibrasi dawai sangat kecil yakni sekitar $0.083\ Hz$.

Kasus 2; ${k_d}^2 = 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)e^{-\frac{k_d}{2}t} + \frac{k_d}{2}\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)te^{-\frac{k_d}{2}t}\right)$$

Selanjutnya dipilih nilai parameter $k_d = 6.283185310, c = 0.5$ dan $l = 0.64$ yang memenuhi kasus 2, yaitu ${k_d}^2 = 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)$. Berikut ini merupakan grafik solusi keluaran MATLAB dari kasus 2 dengan nilai parameter yang telah dipilih.



Gambar 4.6 Grafik Solusi Kasus 2

Dari hasil profil grafik solusi kasus 2 tersebut, dalam waktu 3 detik pertama dawai menghasilkan 3.5 gelombang yakni 4 puncak dan 3 lembah.

Artinya frekuensi vibrasi dawai adalah $1.67\ Hz$. Selain itu, amplitudo yang juga sangat kecil yakni sekitar 10^{-25}.

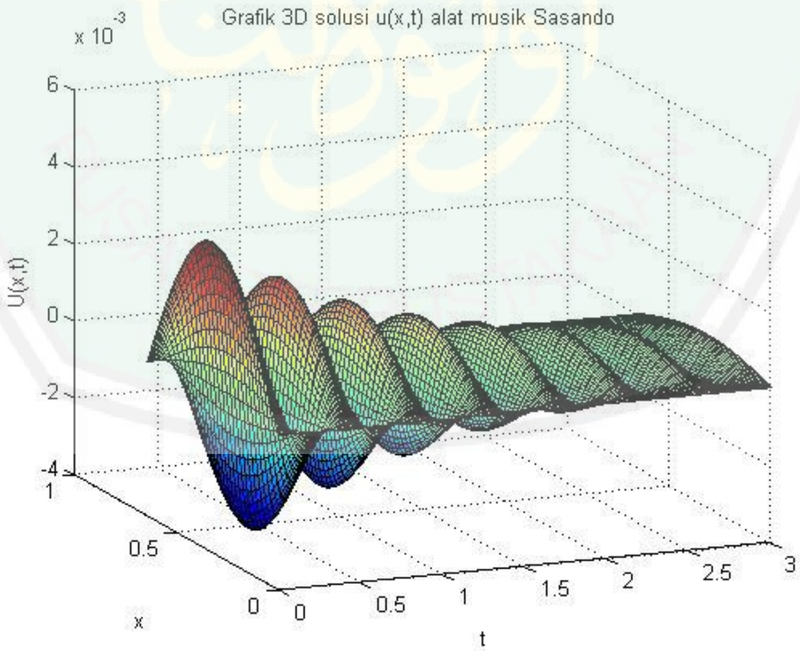
Kasus 3; ${k_d}^2 < 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)$

$$u(x,t)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)e^{-\frac{k_d}{2}t}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right.$$

$$\left. + \frac{k_d}{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}\sin\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right)$$

Selanjutnya dipilih nilai parameter $k_d = 1.5, c = 1$ dan $l = 0.64$ yang memenuhi kasus 3, yaitu ${k_d}^2 < 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)$. Berikut ini merupakan grafik solusi yang dihasilkan MATLAB dari kasus 3 dengan nilai parameter yang telah dipilih.



Gambar 4.7 Grafik Solusi Kasus 3

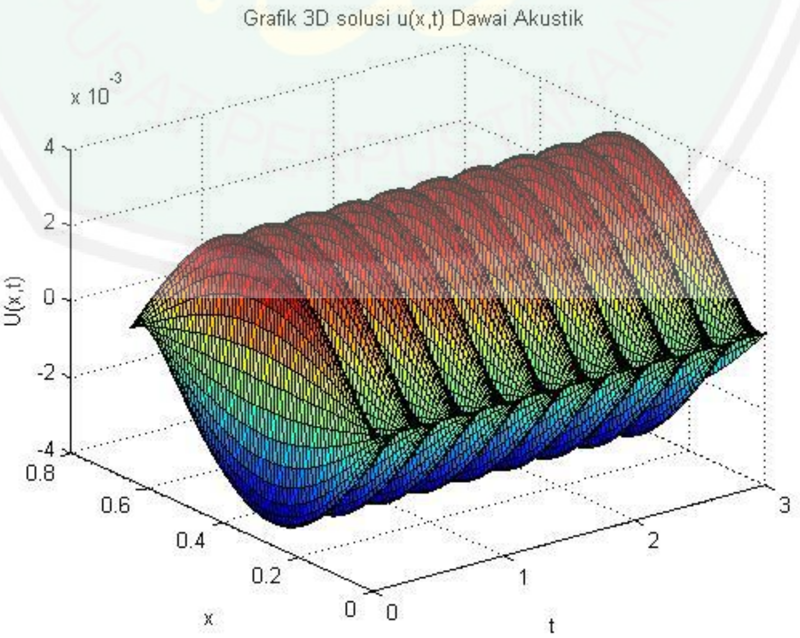
Dari hasil profil grafik kasus 3 tersebut, terlihat jelas bahwa amplitudo gelombang vibrasi dawai Sasando semakin kecil seiring dengan berjalannya waktu

t sampai akhirnya akan berhenti atau kembali kepada keadaan diam. Hasil visualisasi ini menggambarkan keadaan riil dari vibrasi dawai alat musik Sasando, dimana dawai Sasando yang dipetik akan bervibrasi sementara dan akan berhenti setelah berjalan beberapa detik.

Ditinjau dari jumlah gelombangnya, dalam waktu 3 detik pertama dawai Sasando menghasilkan 7,5 gelombang yakni 8 puncak dan 7 lembah, artinya frekuensi vibrasi dawai adalah 2.83 Hz. Dari 3 kasus yang ada, frekuensi yang dihasilkan dari kasus 3 merupakan frekuensi yang paling besar.

Selanjutnya disajikan solusi khusus model matematika vibrasi dawai berdasarkan penelitian Gulla (2011) dan hasil simulasi grafik solusi dengan bantuan MATLAB dengan $c = 4, l = 0.64$ dan $d = 0.16$ berikut ini:

$$\bar{u}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)} \right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right) \left(\cos\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right) \sqrt{\frac{\mathrm{T}}{\mu}}\, t \right) \right)$$



Gambar 4.8 Vibrasi Dawai Akustik dalam 3 Detik

Ditinjau dari jumlah gelombangnya, dalam waktu 3 detik pertama dawai menghasilkan 9.5 gelombang yakni 10 puncak dan 9 lembah, artinya frekuensi vibrasi dawai adalah 3.16 Hz. Profil grafik dawai Sasando yang paling mendekati profil grafik Gulla (2011) dengan selisih frekuensi paling kecil adalah kasus 3. Oleh karena itu penulis memilih kasus 3 untuk mewakili masalah vibrasi dawai Sasando. Selain itu, dari kasus 3 dihasilkan profil grafik yang paling sesuai dengan kasus nyata.

4.2.2 Analisis Validasi Model Matematika Vibrasi Dawai Sasando

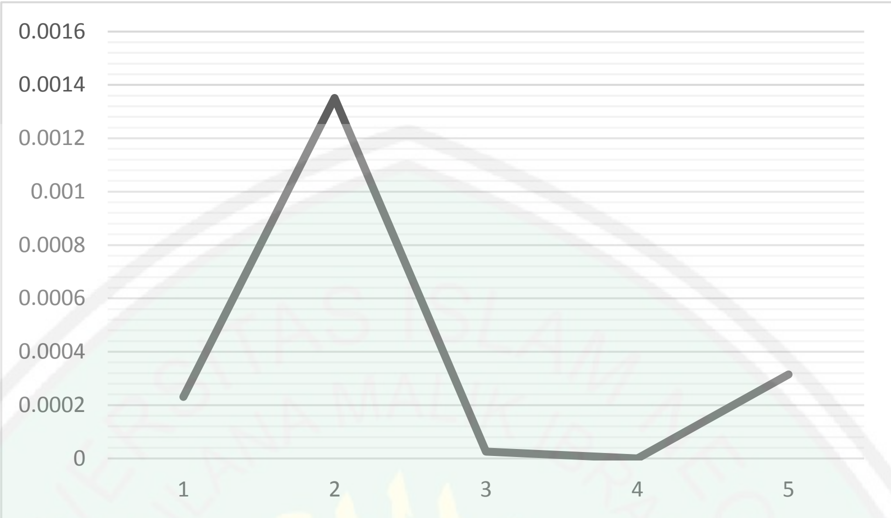
Selanjutnya akan dilakukan analisis validasi model matematika vibrasi dawai Sasando dengan memperhatikan beberapa hal berdasarkan profil grafik. Dapat dilihat dari Gambar 4.7 dan Gambar 4.8 terlihat jelas perbedaan bahwa dalam waktu yang sama, terdapat perbedaan jumlah vibrasi dawai. Dalam waktu 3 detik dawai akustik melakukan vibrasi sebanyak 10 puncak dan 9 lembah yang berarti frekuensi 3.16 Hz sedangkan dawai Sasando melakukan vibrasi sebanyak 8 puncak dan 7 lembah yang berarti frekuensi 2.83 Hz. Selisih frekuensi dari vibrasi kedua dawai tersebut cukup kecil yakni 0.29 Hz.

Selanjutnya dilakukan analisis beda simpangan vibrasi dawai Sasando dan dawai akustik dengan $d = 0.16$. Data simpangan vibrasi dawai akustik berdasarkan penelitian Gulla, dan simpangan vibrasi dawai Sasando dengan $d = 0.16$ disajikan dalam tabel berikut:

Tabel 4.1 Simpangan Vibrasi Dawai Sasando dan Dawai Akustik dengan $d = 0.16$

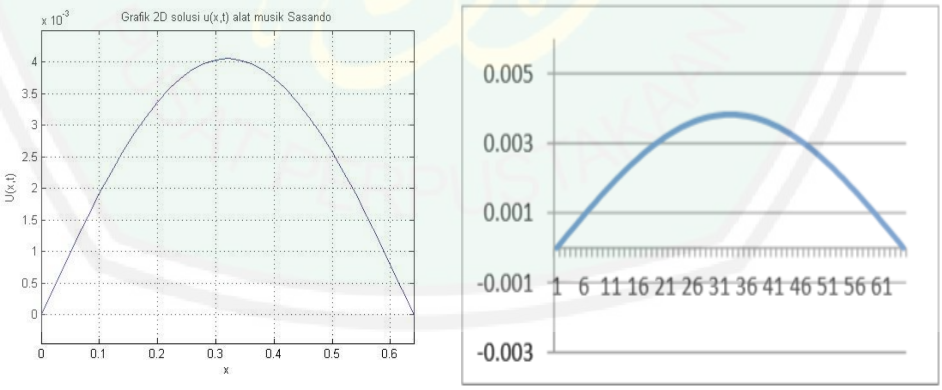
n	Amplitudo Dawai Akustik	Amplitudo Sasando	Selisih
1	3.821×10^{-3}	4.052×10^{-3}	0.231×10^{-3}
2	1.351×10^{-3}	1.519×10^{-35}	1.351×10^{-3}
3	4.246×10^{-4}	4.503×10^{-4}	0.257×10^{-4}
4	4.138×10^{-20}	1.519×10^{-35}	4.138×10^{-20}
5	-1.528×10^{-4}	1.621×10^{-4}	3.149×10^{-4}

Selisih simpangan dawai disajikan dalam diagram garis berikut:

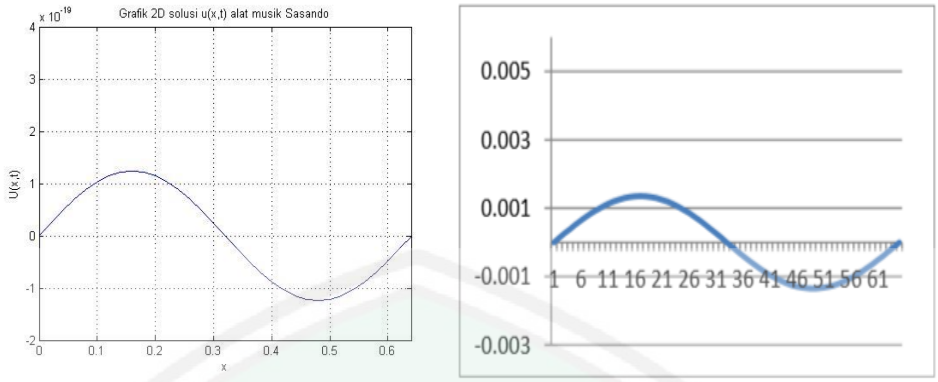


Gambar 4.9 Selisih Simpangan Dawai Sasando dan Dawai Akustik

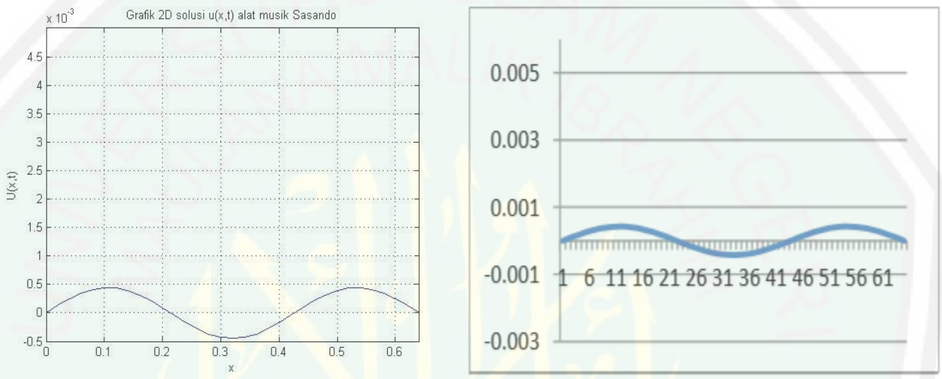
Selisih simpangan dawai Sasando dan dawai akustik paling besar yakni pada $n = 2$ dan $n = 5$. Meskipun begitu, grafik vibrasi dawai Sasando dan dawai akustik untuk setiap n cenderung sama. Berikut ini merupakan grafik vibrasi dawai akustik dan Sasando berturut-turut dengan $n = 1{,}2$ dan 3



Gambar 4.10 Perbandingan Vibrasi Dawai Sasando dan Dawai Akustik $n = 1$



Gambar 4.11 Perbandingan Vibrasi Dawai Sasando dan Dawai Akustik $n = 2$



Gambar 4.12 Perbandingan Vibrasi Dawai Sasando dan Dawai Akustik $n = 3$

Berdasarkan hasil analisis profil grafik Sasando yang telah dilakukan baik secara grafis maupun secara numeris (simpangannya), cukup untuk menyatakan bahwa model matematika vibrasi dawai pada alat musik Sasando sudah valid.

4.2.3 Analisis Validasi dalam Pandangan Islam

Uji validasi model matematika gerak dawai Sasando ini dilakukan untuk mengetahui kesesuaian gerak dawai pada Sasando secara nyata dengan yang ditunjukkan oleh model. Apabila perilaku model sesuai dengan perilaku gerak dawai dalam sistem nyata, maka model dapat dikatakan valid. Sebaliknya jika perilaku model tidak sesuai dengan sistem nyata, maka model harus dilakukan *upgrading*. Yakni dengan merevisi ulang, meninjau ulang atau bahkan melakukan rekonstruksi dengan lebih teliti sampai didapatkan model yang sesuai dengan sistem nyata atau memenuhi syarat validasi.

Konsep validasi model matematika dalam bidang apapun, khususnya model matematika vibrasi dawai Sasando yang telah dijelaskan pada paragraf pertama merefleksikan hukum Allah Swt yang termuat dalam QS.an-Nisa:94 berikut:

يَا أَيُّهَا الَّذِينَ آمَنُوا إِذَا ضَرَبْتُمْ فِي سَبِيلِ اللَّهِ فَتَبَيَّنُوا وَلَا تَقُولُوا لِمَنْ أَلْقَىٰ
ۚ إِلَيْكُمُ السَّلَامَ لَسْتَ مُؤْمِنًا تَبْتَغُونَ عَرَضَ الْحَيَاةِ الدُّنْيَا فَعِنْدَ اللَّهِ مَغَانِمُ كَثِيرَةٌ
كَذَٰلِكَ كُنْتُمْ مِنْ قَبْلُ فَمَنَّ اللَّهُ عَلَيْكُمْ فَتَبَيَّنُوا ۚ إِنَّ اللَّهَ كَانَ بِمَا تَعْمَلُونَ خَبِيرًا

Artinya: "*Wahai orang-orang yang beriman! Apabila kamu pergi (berperang) di jalan Allah, maka telitilah (carilah keterangan) dan janganlah kamu mengatakan kepada orang yang mengucapkan "salam" kepadamu, "Kamu bukan seorang yang beriman" (lalu kamu membunuhnya), dengan maksud mencari harta benda kehidupan dunia, padahal di sisi Allah ada harta yang banyak. Begitu jugalah keadaan kamu dahulu, lalu Allah memberikan nikmat-Nya kepadamu, maka telitilah. Sesungguhnya Allah Maha teliti terhadap apa yang kamu kerjakan."*

Dalam Tafsir Ibnu Katsir, sebab turunnya ayat ini seperti yang diriwayatkan Al-Bukhari dari Ibnu 'Abbas, bahwa terdapat seorang laki-laki yang membawa *ghanimah* nya, lalu ia berjumpa dengan kaum muslimin dan mengucapkan salam. Akan tetapi mereka (kaum muslimin) tetap membunuhnya dan mengambil *ghanimah* nya. Hal ini terjadi karena mereka (kaum muslimin) lebih menyukai harta benda kehidupan dunia yang membawa mereka untuk membunuh orang yang mengucapkan salam dan menampakkan keimanannya. Sebagaimana yang juga pernah mereka lakukan dulu, yakni menyembunyikan keimanan mereka dari kaumnya. Mereka menuduh dia berpura-pura dan menyembunyikan jati diri, untuk memperoleh kehidupan dunia. Sesungguhnya apa yang di sisi Allah berupa rizki yang halal, lebih baik dari pada *ghanimah.*

Dalam akhir ayat ini, potongan kalimat yang berarti *"Lalu Allah menganugerahkan nikmat-Nya atasmu."* Artinya Allah menerima taubat mereka.

Dan *"Maka telitilah."* adalah penguat kalimat di awal untuk meneliti (mencari keterangan) dan berpikir mengenai kebenaran sesuatu sebelum bertindak. Dan yang terakhir adalah *"Sesungguhnya Allah Maha mengetahui apa yang kamu kerjakan."* Menurut Sa'id bin Jubair, kalimat ini adalah penegasan dan ancaman agar kaum muslimin lebih berhati-hati dalam bertindak.

Poin penting yang terkandung dalam ayat tersebut adalah bahwa manusia wajib meneliti segala sesuatu dengan baik, sebelum mengambil keputusan untuk menyikapi sesuatu tersebut. Seperti halnya dengan model matematika vibrasi dawai Sasando ini hendaknya diteliti kebenarannya terlebih dahulu sehingga dapat diketahui dengan jelas apakah model ini dapat digunakan atau tidak.

Seperti halnya penutup dalam QS.an-Nisa:94, yang berisi peringatan dan ancaman kepada kaum muslimin untuk lebih berhati-hati dalam meneliti kebenaran sesuatu, QS.an-Nur:15 juga menyuarakan pokok yang sama. Berikut ayat tersebut:

إِذْ تَلَقَّوْنَهُ بِأَلْسِنَتِكُمْ وَتَقُولُونَ بِأَفْوَاهِكُمْ مَا لَيْسَ لَكُمْ بِهِ عِلْمٌ وَتَحْسَبُونَهُ هَيِّنًا وَهُوَ عِنْدَ اللَّهِ عَظِيمٌ

Artinya: *"(Ingatlah) di waktu kamu menerima berita bohong itu dari mulut ke mulut dan kamu katakan dengan mulutmu apa yang tidak kamu ketahui sedikit juga, dan kamu menganggapnya suatu yang ringan saja. Padahal dia pada sisi Allah adalah besar."*

Tafsir menurut Mujahid dan Sa'id bin Jubair dalam Tafsir Ibnu Katsir, maksudnya adalah ketika seorang menyampaikan dari mulut ke mulut dengan mengatakan 'Aku telah mendengarnya dari si *Fulan*, atau si *Fulan* telah berkata begini', sebagian orang akan menyampaikannya demikian. Sedang seorang tersebut mengatakan apa yang tidak benar-benar diketahuinya. Seorang itu melontarkan tuduhan yang berat. Mereka mengira tuduhan itu ringan dan mudah, namun sungguh suatu perkara yang sangat besar di sisi Allah menyampaikan berita bohong yang tidak diketahui kebenarannya. Dalam sebuah hadits *ash-Shahihain* disebutkan:

"Sesungguhnya seseorang mengucapkan sebuah kalimat yang mendatangkan kemarahan Allah sedang ia tidak menyadari akibatnya, sehingga membuatnya tersungkur ke dalam api Neraka lebih jauh dari pada jarak antara langit dan bumi."

Oleh karena itu, uji validasi menjadi hal yang sangat penting dalam mengkonfirmasi kebenaran berita, dalam hal ini model matematika vibrasi dawai Sasando. Apabila model ini tidak dilakukan analisis validasi, maka akan menyebabkan hal yang tidak baik. Dalam rangka untuk mengetahui kevalidan model matematika, tentunya terdapat banyak jalan yang dapat dilakukan. Seperti yang sudah diketahui, dalam penelitian ini uji validasi dilakukan dengan menganalisis profil grafik model vibrasi dawai Sasando. Cara ini sah dilakukan, poin pentingnya adalah dengan cara ini dapat diketahui model matematika vibrasi dawai Sasando valid atau tidak.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada bab sebelumnya, diperoleh beberapa kesimpulan mengenai analisis validasi model matematika vibrasi dawai pada Sasando, yaitu:

1. Terdapat 3 solusi khusus model matematika vibrasi dawai pada Sasando. Masing-masing solusi didapatkan berdasarkan kasus dengan nilai parameter yang berbeda dalam model matematika vibrasi dawai pada alat musik Sasando. Solusi khusus dari masing-masing kasus yang ada adalah sebagai berikut:

Kasus 1; ${k_d}^2 > 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)$

$u(x,t)$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{k_d}{2}t} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)\left(\cosh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right)\right.$$

$$\left. + \frac{k_d}{\sqrt{{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}} \sinh\left(\frac{\sqrt{{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}}{2}t\right)\right)$$

Kasus 2; ${k_d}^2 = 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)e^{-\frac{k_d}{2}t}\right.$$

$$\left. + \frac{k_d}{2}\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)te^{-\frac{k_d}{2}t}\right)$$

Kasus 3; ${k_d}^2 < 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)$

$$u(x,t)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)e^{-\frac{k_d}{2}t}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right.$$

$$\left. + \frac{k_d}{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}\sin\left(\frac{\sqrt{\left|{k_d}^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)\right|}}{2}t\right)\right)$$

2. Berdasarkan analisis profil grafik vibrasi dawai pada Sasando baik secara grafis maupun numeris, mendukung validitas model sehingga model matematika vibrasi dawai pada alat musik Sasando dinyatakan valid.

5.2 Saran

Dalam penelitian ini, uji analisis profil grafik hanya dilakukan pada profil grafik kasus 3 untuk mewakili kasus yang lain. Analisis profil grafik kasus 1 dan 2 serta kasus lain yang mungkin muncul dengan nilai parameter yang lebih bervariasi juga perlu dilakukan sehingga diharapkan peneliti selanjutnya dapat melanjutkan penelitian ini.

DAFTAR RUJUKAN

Brio, M., Zakharian, A.R., dan Webb, G.M. 2010. *Numerical Time-Dependent Partial Differential Equations for Scientists and Engineers.* USA: ELSEVIER

Coleman, M.P. 2013. *An Introduction to Partial Differential Equations with MATLAB®*. Boca Raton: CRC Press

Gulla, Jan. "Modelling the Wave Motion of a Guitar String", Essay tidak dipublikasikan, 2011.

Haberman, Richard. 2013. *Applied Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems*. Canada: Pearson

Iswanto, R.J. 2012. Pemodelan Matematika Aplikasi dan Terapannya. Yogyakarta: Graha Ilmu

Kreyszig, Erwin. 1991. *Matematika Teknik Lanjutan Jilid 1 Edisi Terjemahan*. Jakarta: Penerbit Erlangga

Kusumastuti, Ari. "Analisis Konstruksi Model Matematika Gerak Dawai Pada Alat Musik Sasando", Jurnal tidak dipublikasikan, 2017.

O'Neil, P.V., 2014. *Beginning Partial Differential Equations*. USA: John Wiley & Sons, Inc

Pagalay, Usman. 2009. *Mathematical Modelling.* Malang: UIN Malang Press

Setiawan, Agus. 2006. *Pengantar Metode Numerik.* Yogyakarta: Andi

Soehardjo. 1996. *Matematika IV*. Diktat ITS

Strauss, W.A. 2008. *Partial Differential Equations; an Introduction.* USA: John Wiley & Sons, Inc

Triatmodjo, Bambang. 2002. *Metode Numerik, Dilengkapi dengan Program Komputer*. Depok: Beta Offset

Zill, D.G. & Wright, W.S. 2013. *Differential Equations with Boundary-Value Problems 8th edition.* Canada: Brooks/Cole, Cengange Learning

LAMPIRAN

Lampiran 1: Skrip Maple Solusi (4.40) memenuhi bentuk awal (4.1)

$$restart : an := \left(\frac{2\cdot h\cdot l^2}{n^2\cdot \mathrm{Pi}\cdot d\cdot (l-d)}\right)\cdot \sin\left(\frac{n\cdot \mathrm{Pi}\cdot d}{l}\right) :$$

$$bn := \frac{kd\cdot\left(\frac{2\cdot h\cdot l^2}{n^2\cdot \mathrm{Pi}\cdot d\cdot (l-d)}\right)\cdot \sin\left(\frac{n\cdot \mathrm{Pi}\cdot d}{l}\right)}{\mathrm{sqrt}\left(kd^2-4\left(\frac{n\cdot \mathrm{Pi}}{l}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot c^2+\frac{2\cdot c^2}{l}\right)\right)} :$$

$$u := \sin\left(\frac{n\,\pi\,x}{l}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}kd\,t}\left(an\cdot\cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{kd^2-\frac{4\,n^2\,\pi^2\left(\frac{1}{2}\,c^2+\frac{2\,c^2}{l}\right)}{l^2}}\;t\right)+bn\right.$$
$$\left.\cdot\sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{kd^2-\frac{4\,n^2\,\pi^2\left(\frac{1}{2}\,c^2+\frac{2\,c^2}{l}\right)}{l^2}}\;t\right)\right) :$$

$$diff(u,t,t)-\left(\frac{1}{2}\cdot c^2+\frac{2\cdot c^2}{l}\right)\cdot diff(u,x,x)+kd\cdot(diff(u,t)) :$$

$$simplify(\%)$$

$$0$$

Lampiran 2: Skrip Maple Solusi (4.58) memenuhi bentuk awal (4.47)

$$restart : an := \left(\frac{2\cdot h\cdot l^2}{n^2\cdot \mathrm{Pi}\cdot d\cdot (l-d)}\right)\cdot \sin\left(\frac{n\cdot \mathrm{Pi}\cdot d}{l}\right) :$$

$$bn := \frac{kd}{2}\cdot\left(\frac{2\cdot h\cdot l^2}{n^2\cdot \mathrm{Pi}\cdot d\cdot (l-d)}\right)\cdot \sin\left(\frac{n\cdot \mathrm{Pi}\cdot d}{l}\right) :$$

$$u := \sin\left(\frac{n\,\pi\,x}{l}\right)\left(an\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\,kd\,t} + bn\cdot t\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\,kd\,t}\right) :$$

$$diff(u, t, t) - \frac{\frac{kd^2}{4}}{\left(\frac{n\cdot \mathrm{Pi}}{l}\right)^2}\cdot diff(u, x, x) + kd\cdot (diff(u, t)) :$$

$$simplify(\%)$$

$$0$$

Lampiran 3: Skrip MATLAB Grafik Solusi Model Vibrasi Dawai Sasando

```
clc,clear;
h=0.005;
d=0.32;
c=1;
l=0.64;
kd=1.5;
x=0:0.02:0.64;
t=0:0.02:3;
% solusi persamaan metode karakteristik
U=zeros(length(x), length(t));
for j=1:length(t)
    for i=1:length(x)
        for n=1
            if (kd^2<(((n)^2)*pi^2/l)^2*(1/2*c^2+2*c^2/l))
                U(i,j)=(2*h*l^2/((n)^2*pi^2*d*(l-
d)))*sin((n)*pi*d/l)*sin((n)*pi*x(i)/l)*exp(-
kd/2*t(j))*(cos(sqrt((abs(kd^2-
(((n)^2)*pi^2/l)^2*(1/2*c^2+2*c^2/l)))))/2*t(j))+kd/sqrt((abs(kd^2-
(((n)^2)*pi^2/l)^2*(1/2*c^2+2*c^2/l))))*sin(sqrt((abs(kd^2-
(((n)^2)*pi^2/l)^2*(1/2*c^2+2*c^2/l)))))/2*t(j)));
            else if (kd^2==((n^2)*pi^2/l)^2*(1/2*c^2+2*c^2/l))
              U(i,j)=sin((n)*pi*x(i)/l)*(2*h*l^2/((n)^2*pi^2*d*(l-
d)))*sin((n)*pi*d/l)*exp(-
kd/2*t(j))+kd/2*((2*h*l^2/((n)^2*pi^2*d*(l-
d)))*sin((n)*pi*d/l)*t(j)*exp(-kd/2*t(j)));
                else
              U(i,j)=(2*h*l^2/((n)^2*pi^2*d*(l-
d)))*sin((n)*pi*d/l)*sin((n)*pi*x(i)/l)*exp(-
kd/2*t(j))*(cosh(sqrt((kd^2-
(((n)^2)*pi^2/l)^2*(1/2*c^2+2*c^2/l)))/2*t(j))+kd/sqrt((kd^2-
(((n)^2)*pi^2/l)^2*(1/2*c^2+2*c^2/l)))*sinh(sqrt((kd^2-
(((n)^2)*pi^2/l)^2*(1/2*c^2+2*c^2/l)))/2*t(j)));
                end
            end
        end
    end
end
% menampilkan grafik (1) solusi persamaan
figure(3)
plot (x,U,'-')
xlim([0 0.64])
ylim([-0.004 0.004])
title ('Grafik 2D solusi u(x,t) alat musik Sasando')
xlabel('x')
ylabel('U(x,t)')
colormap jet
grid on
% menyimpan gambar
print('gambar_1','-dpng')

% menampilkan grafik (2) solusi persamaan
figure(4)
surf(t,x,U)
title('Grafik 3D solusi u(x,t) alat musik Sasando')
xlabel('t')
ylabel('x')
```

```
zlabel('U(x,t)')
colormap jet
print('gambar_2','-dpng')
```

Lampiran 4: Skrip MATLAB Grafik Solusi Model Vibrasi Dawai Akustik

```
clc,clear;
h=0.005;
m=0.16;
c=4;
l=0.64;
x=0:0.01:0.64;
t=0:0.01:3;
% solusi persamaan metode karakteristik
U=zeros(length(x), length(t));
for j=1:length(t)
    for i=2:length(x)
        for n=1
            U(i,j)=(2*h*l^2)/(pi^2*n^2*m*(l-
m))*sin(n*pi*m/l)*sin(n*pi*x(i)/l)*cos(c*n*pi*t(j)/l);
        end
    end
end
% menampilkan grafik (1) solusi persamaan
figure(1)
plot (x,U,'-')
xlim([0 0.64])
ylim([-0.004 0.004])
title ('Grafik 2D solusi u(x,t) Dawai Akustik')
xlabel('x')
ylabel('U(x,t)')
grid on
% menyimpan gambar
print('gambar_1','-dpng')

% menampilkan grafik (2) solusi persamaan
figure(2)
surf(t,x,U)
title('Grafik 3D solusi u(x,t) Dawai Akustik')
xlabel('t')
ylabel('x')
zlabel('U(x,t)')
print('gambar_2','-dpng')
```

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Nurul Anggraeni Hidayati
NIM : 14610002
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Analisis Uji Validasi Model Matematika Vibrasi Dawai pada Alat Musik Sasando
Pembimbing I : Ari Kusumastuti, M.Pd.,M.Si
Pembimbing II : Juhari, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan	
1	4 April 2018	Konsultasi Agama Bab I	1.	
2	6 April 2018	Konsultasi Bab I dan II		2.
3	6 April 2018	Konsultasi Bab III	3.	
4	3 Mei 2018	Konsultasi Bab IV		4.
5	4 Mei 2018	Konsultasi Agama Bab II	5.	
6	16 Mei 2018	Konsultasi Bab IV		6.
7	21 Mei 2018	Konsultasi Bab IV	7.	
8	24 Mei 2018	Konsultasi Agama Bab IV		8.
9	30 Mei 2018	Konsultasi Bab IV	9.	
10	3 Juli 2018	Konsultasi Keseluruhan		10.
11	4 Juli 2018	Konsultasi Agama Keseluruhan	11.	

Malang, 6 Juli 2018
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 2003 12 1 001