DEKOMPOSISI SIKLIS MODUL YANG DIBANGUN SECARA HINGGA ATAS DAERAH IDEAL UTAMA

SKRIPSI

OLEH
DIANA AMALIA
NIM. 13610027

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018

DEKOMPOSISI SIKLIS MODUL YANG DIBANGUN SECARA HINGGA ATAS DAERAH IDEAL UTAMA

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Diana Amalia
NIM. 13610027

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018

DEKOMPOSISI SIKLIS MODUL YANG DIBANGUN SECARA HINGGA ATAS DAERAH IDEAL UTAMA

SKRIPSI

Oleh
Diana Amalia
NIM. 13610027

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 15 Juni 2017

Pembimbing I,	Pembimbing II,
H. Wahyu H. Irawan, M.Pd	Abdul Aziz, M.Si
NIP. 197104202000031 003	NIP. 19760318 200604 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

DEKOMPOSISI SIKLIS MODUL YANG DIBANGUN SECARA HINGGA ATAS DAERAH IDEAL UTAMA

SKRIPSI

Oleh
Diana Amalia
NIM. 13610027

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 10 Juli 2017

Penguji Utama	:	Hairur Rahman, M.Si	....
Ketua Penguji	:	Dr. Abdussakir, M.Pd	....
Sekretaris Penguji	:	H. Wahyu H. Irawan, M.Pd	....
Anggota Penguji	:	Abdul Aziz, M.Si	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Diana Amalia

NIM : 13610027

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Dekomposisi Siklis Modul yang Dibangun Secara Hingga Atas Daerah Ideal Utama

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan saya tersebut.

Malang, 10 Juni 2017
Yang membuat pernyataan,

Diana Amalia
NIM. 13610027

MOTO

ٱللَّهُ ٱلصَّمَدُ ٢

“Allah tempat meminta segala sesuatu” (QS. Al-Ikhlash/112:2).

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Kedua orang tua penulis Abdul Salam (Alm) dan Lailatul Mufidah yang telah merawat serta membimbing penulis sejak kecil sehingga dapat menempuh jenjang pendidikan di perguruan tinggi, suami penulis Rizal Kurniawan yang selalu memberikan motivasi dan semangat kepada penulis, serta kedua kakak penulis Muhammad Afif Muhaimin dan Muhammad Nurul Abidin yang memberikan semangat kepada penulis.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Alhamdulillah, segala puji bagi Allah Swt. atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi yang berjudul "Dekomposisi Siklis Modul yang Dibangun Secara Hingga Atas Daerah Ideal Utama" ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bimbingan, arahan, dan motivasi yang telah diberikan oleh berbagai pihak untuk penulis. Oleh karena itu, ucapan terima kasih penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. H. Wahyu H. Irawan, M.Pd, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan arahan dan motivasi kepada penulis.
5. Abdul Aziz, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan arahan kepada penulis dalam penulisan kajian agama yang berkaitan dengan teori dekomposisi modul.
6. Dewi Ismiarti, M.Si, selaku dosen yang telah banyak membantu penulis dalam memahami materi-materi yang berkaitan dengan dekomposisi modul.

7. Kedua orang tua, suami, dan kakak-kakak penulis yang selalu mendoakan keberhasilan penulis.
8. Teman-teman mahasiswa di Jurusan Matematika dan teman-teman di PPTQ Nurul Furqon yang telah banyak memberikan dukungan dan motivasi kepada penulis.

Semoga Allah Swt. melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan pembaca.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, Juni 2017

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL
HALAMAN PENGAJUAN
HALAMAN PERSETUJUAN
HALAMAN PENGESAHAN
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN
HALAMAN MOTO
HALAMAN PERSEMBAHAN
KATA PENGANTAR viii
DAFTAR ISI x
ABSTRAK xii
ABSTRACT xiii
ملخص xiv

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 4
1.3 Tujuan Penelitian 5
1.4 Manfaat Penelitian 5
1.5 Metode Penelitian 5
1.6 Sistematika Penulisan 8

BAB II KAJIAN PUSTAKA

2.1 Pemetaan 10
2.2 Grup 12
2.2 Gelanggang 18
2.3 Daerah Integral dan Daerah Ideal Utama 19
2.4 Modul yang Dibangun Secara Hingga 28
2.5 Modul Bebas 34
2.6 Modul Torsi dan Bebas Torsi 36
2.7 *Annihilator* (Pengenol) dan Orde 36
2.8 Modul Primer dan Siklis 37
2.9 Homomorfisma pada Modul 38
2.10 Modul Hasil Bagi 42
2.11 Jumlah Langsung pada Modul 48

2.12 Hubungan Konsep Bebas dan Bebas Torsi pada Modul Atas Daerah Integral dan Daerah Ideal Utama 56
2.13 Kajian Dekomposisi dalam Islam 73

BAB III PEMBAHASAN

3.1 Dekomposisi Modul yang Dibangun Secara Hingga Atas Daerah Ideal Utama Menjadi Jumlah Langsung Submodul-submodul Siklis 77

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan 97
4.2 Saran 97

DAFTAR RUJUKAN 99

RIWAYAT HIDUP

ABSTRAK

Amalia, Diana. 2018. **Dekomposisi Siklis Modul yang Dibangun Secara Hingga Atas Daerah Ideal Utama**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) H. Wahyu H. Irawan, M.Pd (II) Abdul Aziz, M.Si

Kata kunci: dekomposisi, modul yang dibangun secara hingga, daerah ideal utama, modul bebas, modul torsi, modul primer, modul siklis

Modul merupakan grup abelian terhadap suatu operasi biner, bersama dengan aksi perkalian skalar dari suatu gelanggang sehingga memenuhi sifat-sifat tertentu. Struktur modul bergantung pada jenis gelanggang tumpuannya. Salah satu cara untuk mengetahui sifat dari suatu modul adalah dengan melakukan dekomposisi modul, yaitu menguraikan suatu modul menjadi jumlah langsung submodul-submodul yang lebih sederhana.

Daerah ideal utama adalah daerah integral yang setiap idealnya dibangun oleh satu unsur. Roman (2008:146-150) menyatakan bahwa modul yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama merupakan jumlah langsung dari submodul-submodul siklis. Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui dekomposisi modul yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama menjadi jumlah langsung submodul-submodul siklis. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa modul yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama dapat didekomposisikan menjadi jumlah langsung submodul-submodul siklis melalui beberapa tahap sebagai berikut:

1. Mendekomposisikan modul yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama menjadi jumlah langsung submodul bebas dan submodul torsi yang dibangun secara hingga.
2. Mendekomposisikan modul bebas yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama menjadi jumlah langsung submodul-submodul siklis.
3. Mendekomposisikan modul torsi yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama menjadi jumlah langsung submodul-submodul primer yang dibangun secara hingga.
4. Mendekomposisikan modul primer yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama menjadi jumlah langsung submodul-submodul siklis.

Untuk penelitian selanjutnya, disarankan untuk melakukan penelitian tentang dekomposisi modul dengan gelanggang tumpuan lainnya.

ABSTRACT

Amalia, Diana. 2018. **Cyclic Decomposition of Finitely Generated Module Over A Principal Ideal Domain**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisors: (I) H. Wahyu H. Irawan, M.Pd (II) Abdul Aziz, M.Si

Keywords: decomposition, finitely generated module, principal ideal domain, free module, torsion module, primary module, cyclic module

A module is an abelian group with respect to a binary operation, together with an action of a ring that satisfies certain properties. The structure of module depends on the type of its base ring. One of the way to find out the characteristics of module is by decomposing the module, that is, decomposing a module into direct sum of its simpler submodules.

A principal ideal domain is an integral domain which every ideal is a principal ideal. Roman (2008:146-150) stated that a finitely generated module over a principal ideal domain is direct sum of cyclic submodules. The purpose of this research is to know the decomposition of finitely generated module over a principal ideal domain into direct sum of cyclic submodules. The results of this study indicate that a finitely generated module over a principal ideal domain can be decomposed into direct sum of cyclic submodules by the following steps:

1. Decomposing a finitely generated module over a principal ideal domain into direct sum of finitely generated free and torsion submodules.
2. Decomposing a finitely generated module over a principal ideal domain into direct sum of cyclic submodules.
3. Decomposing a finitely generated torsion module over a principal ideal domain into direct sum of finitely generated primary submodules.
4. Decomposing a finitely generated primary module into direct sum of cyclic submodules.

For further research, it is suggested to do a research about decomposition of a module over another base ring.

ملخص

أماليا، ديانا. 2018. **التحلل الدوري من فضاء حلقي بشكل محدود على *Principal Ideal Domain***. بحث الجامعي. شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف: (١) الحاج وحيو هينكي إيراوان الماجستير (٢) عبدالعزيز الما جستير

الكلمات الرئيسية: التحلل، فضاء حلقي بشكل محدود، *principal ideal domain*، فضاء حلقي *free*، فضاء حلقي *torsion*، فضاء حلقي *primary*، فضاء حلقي *cyclic*

فضاء حلقي هو زمرة *abelian* فيما يتعلق بعملية ثنائية، مع عملية الضرب من الحاقة حتى تحقق عددا من الشروط. بنية من فضاء حلقي تعتمد على نوع من *base ring*. طريقة واحدةلمعرفة بنية من فضاء حلقي هو بمتحللة فضاء حلقي، هو متحللة فضاء حلقي إلى *direct sum* من أصعر اقسام فضاء حلق.

principal ideal domain هو *integral domain* التي كل *ideal* يبنى من عنصر واحد. أعلن (٢٠٠٨:١٤٥-١٥٠) رومان انّ فضاء حلقي بشكل محدود على *principal ideal domain* هو *direct sum* من اقسام فضاء حلقي *cyclic*. والعرض من هذاالبحث هو لمعرف تحلل فضاء حلقي بشكل محدود على *principal ideal domain* إلى *direct sum* من اقسام فضاء حلقي *cyclic*. وتشير نتائج هذاالبحث انّ فضاء حلقي بشكل محدود على *principal ideal domain* يمكن أن تتحلل إلى *direct sum* من اقسام فضاء حلقي *cyclic* من خلال المراحلة التّالية:

١ . متحللة فضاء حلقي بشكل محدود على *principal ideal domain* إلى *direct sum* من قسم فضاء حلقي *free* بشكل محدود و قسم فضاء حلقي *torsion* بشكل محدود.

٢ . متحللة فضاء حلقي *free* بشكل محدود على *principal ideal domain* إلى *direct sum* من اقسام فضاء حلقي *cyclic*.

٣ . متحللة فضاء حلقي *torsion* بشكل محدود على *principal ideal domain* إلى *direct sum* من اقسام فضاء حلقي *primary*.

٤ . متحللة فضاء حلقي *primary* بشكل محدود على *principal ideal domain* إلى *direct sum* من اقسام فضاء حلقي *cyclic*.

لمزيد من البحث، يقترح إجراء بحث حول تحلل فضاء حلقي على *base ring* الآخر.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Suatu himpunan merupakan kumpulan objek-objek yang terdefinisi dengan baik. Suatu himpunan G disusun oleh unsur-unsur, dan jika a adalah salah satu dari unsur-unsurnya, maka dapat dinotasikan dengan $a \in G$ (Fraleigh dan Katz, 2003:1).

Suatu relasi (atau suatu relasi biner) pada suatu himpunan tak kosong G merupakan suatu himpunan tak kosong R yang terdiri dari pasangan-pasangan terurut (x, y) dari unsur-unsur x dan y di G. Suatu relasi R pada suatu himpunan tak kosong G merupakan suatu relasi ekuivalen jika untuk sebarang x, y, z di G berlaku: 1) $(x, x) \in R$ untuk semua $x \in G$ (sifat refleksif), 2) jika $(x, y) \in R$, maka $(y, x) \in R$ (sifat simetris), dan 3) jika $(x, y) \in R$ dan $(y, z) \in R$, maka $(x, z) \in R$ (Gilbert dan Gilbert, 2009:55).

Suatu operasi biner pada suatu himpunan tak kosong G merupakan suatu pemetaan f dari $G \times G$ ke G (Gilbert dan Gilbert, 2009:30). Dengan demikian, suatu operasi pada suatu himpunan tak kosong G, dinotasikan dengan $*$, disebut operasi biner jika dan hanya jika $*$ memetakan setiap pasangan terurut $(a, b) \in G$ ke G.

Struktur aljabar atau sistem aljabar merupakan suatu himpunan tak kosong dengan paling sedikit satu relasi ekuivalen (persamaan) dan satu atau lebih operasi biner yang didefinisikan (Gilbert dan Gilbert, 2009:137). Telah dikenal beberapa macam struktur aljabar yang dapat dikelompokkan dalam beberapa tipe. Pertama, struktur aljabar berupa satu himpunan bersama satu operasi, misalnya grup, semi grup, monoid, dan grupoid. Kedua, struktur aljabar berupa satu himpunan bersama lebih dari satu operasi, misalnya gelanggang, lapangan, dan daerah integral. Selain kedua tipe struktur aljabar tersebut, terdapat tipe struktur aljabar lain yang melibatkan dua himpunan bersama lebih dari satu operasi, misalnya ruang vektor dan modul.

Suatu himpunan tak kosong G bersama dengan suatu operasi biner $*$ disebut grup jika operasi $*$ bersifat asosiatif di G dan G memuat unsur identitas serta invers setiap unsur terhadap operasi $*$. Jika operasi $*$ bersifat komutatif di G, maka G disebut grup abelian (Adkins dan Weintraub, 1992:1). Selanjutnya, jika pada G diberi satu operasi biner lagi, dinotasikan dengan $\#$, yang bersifat asosiatif dan distributif terhadap operasi $*$, maka G disebut gelanggang (Adkins dan Weintraub, 1992:49).

Gelanggang dapat diklasifikasikan menjadi beberapa jenis. Di antara jenis-jenis gelanggang tersebut adalah gelanggang dengan unsur kesatuan, gelanggang komutatif, lapangan, dan daerah integral. Gelanggang dengan unsur kesatuan merupakan gelanggang yang mempunyai unsur identitas terhadap operasi $\#$. Jika operasi # bersifat komutatif pada gelanggang tersebut, maka gelanggang tersebut merupakan gelanggang komutatif. Lapangan merupakan gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan yang setiap unsur taknolnya memiliki invers terhadap operasi $\#$. Sedangkan daerah integral merupakan gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan yang tidak mempunyai unsur pembagi nol. Suatu unsur taknol a dari suatu gelanggang R disebut pembagi nol jika ada unsur taknol b di R

sedemikian sehingga hasil operasi # antara a dan b adalah unsur identitas terhadap operasi $*$ (Adkins dan Weintraub, 1992:49-50).

Modul merupakan grup abelian terhadap suatu operasi bersama dengan aksi perkalian skalar dari suatu gelanggang (disebut gelanggang tumpuan) sehingga memenuhi sifat-sifat tertentu (Adkins dan Weintraub, 1992:107). Modul dapat dipandang sebagai perumuman dari ruang vektor. Hal ini dikarenakan skalar pada ruang vektor yang diambil dari lapangan dapat diperumum menjadi sebarang gelanggang. Modul juga dapat dipandang sebagai perumuman gelanggang, karena setiap gelanggang adalah modul atas dirinya sendiri (Ismiarti, dkk, 2016:1).

Sebagai perumuman dari ruang vektor, sifat-sifat ruang vektor tidak selalu berlaku pada modul. Sifat-sifat ruang vektor yang tidak berlaku pada modul antara lain, ruang vektor taknol selalu memiliki basis, namun modul taknol tidak selalu memiliki basis. Selain itu, setiap subruang dari ruang vektor selalu memiliki komplemen, namun submodul dari suatu modul tidak selalu memiliki komplemen (Ismiarti, dkk, 2016:1).

Struktur modul dipengaruhi oleh jenis gelanggang tumpuannya. Salah satu cara untuk mengetahui sifat dari suatu modul adalah dengan menguraikan modul menjadi jumlah langsung submodul-submodul yang lebih sederhana. Penguraian modul menjadi jumlah langsung submodul-submodulnya dikenal sebagai dekomposisi modul (Ismiarti, 2014:1).

Al-Quranul Karim adalah mukjizat Islam yang kekal dan mukjizatnya selalu diperkuat oleh kemajuan ilmu pengetahuan (Mudzakir, 2015:1). Salah satu contoh kemajuan ilmu pengetahuan yang memperkuat mukjizat al-Quran adalah adanya dekomposisi. Secara bahasa, kata dekomposisi berarti penguraian (Al-

Barry dan Yacub, 2003:123). Pada umumnya dekomposisi dilakukan untuk membagi suatu kumpulan objek menjadi beberapa kelompok berdasarkan sifat khusus objek tersebut. Sebagai contoh, pada hari kiamat manusia akan terbagi menjadi 3 kelompok sebagaimana Allah Swt. berfirman di dalam surat al-Waqi'ah ayat 7, yaitu:

وَكُنتُمۡ أَزۡوَٰجٗا ثَلَٰثَةٗ ٧

Artinya: *"Dan kamu menjadi tiga golongan"* (QS. al-Waqi'ah/56:7).

Daerah ideal utama adalah daerah integral yang setiap idealnya dibangun oleh satu unsur. Roman (2008:146-150) menyatakan bahwa modul yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama merupakan jumlah langsung dari submodul-submodul siklis. Hal ini melatarbelakangi penelitian tentang dekomposisi modul yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama.

Pembahasan dalam penelitian ini merupakan hasil kajian pustaka dari beberapa sumber. Pustaka yang menjadi rujukan utama dalam penelitian ini adalah *Advanced Linear Algebra* yang ditulis oleh Steven Roman (2008). Namun demikian, alur penulisan, cara pandang, pembuktian sifat-sifat, dan penyajian hasil dalam skripsi ini disesuaikan dengan tujuan di atas dan menjadikannya tulisan yang utuh.

1.2 Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana dekomposisi modul yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama menjadi jumlah langsung submodul-submodul siklis?

1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah, maka tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui dekomposisi modul yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama menjadi jumlah langsung submodul-submodul siklis.

1.4 Manfaat Penelitian

Sesuai dengan tujuan penelitian, maka manfaat penelitian ini dibedakan berdasarkan kepentingan beberapa pihak, yaitu:

1. Bagi Penulis

   Sebagai tambahan pengetahuan dan wawasan khususnya pengetahuan mengenai dekomposisi modul yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama.

2. Bagi Mahasiswa

   Sebagai tambahan pengetahuan dan wawasan dalam keilmuan matematika terutama dalam teori modul atas daerah ideal utama.

3. Bagi Lembaga

   Sebagai tambahan bahan literatur untuk dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya tentang pembelajaran teori modul.

1.5 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah penelitian kepustakaan (*library research*). Adapun langkah-langkah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Merumuskan masalah.

2. Mencari sumber pustaka berupa buku-buku untuk memperoleh informasi yang lebih tentang:
   a. definisi hasil kali kartesius, pemetaan, surjektif, injektif, dan bijektif,
   b. definisi operasi biner,
   c. definisi grup,
   d. proposisi invers ganda pada grup,
   e. definisi subgrup dan teorema kondisi-kondisi bagi subgrup,
   f. definisi gelanggang, gelanggang komutatif, dan gelanggang dengan unsur kesatuan,
   g. definisi subgelanggang,
   h. definisi pembagi nol dan daerah integral,
   i. definisi unit, unsur prima, dan unsur tak tereduksi,
   j. definisi daerah faktorisasi tunggal,
   k. definisi faktor persekutuan terbesar,
   l. definisi subgelanggang ideal, ideal utama, dan daerah ideal utama,
   m. teorema dua unsur yang saling prima,
   n. definisi modul,
   o. definisi dan teorema submodul,
   p. definisi himpunan pembangun,
   q. definisi modul yang dibangun secara hingga,
   r. definisi himpunan bebas linier, basis, dan modul bebas,
   s. definisi unsur torsi, modul bebas torsi, dan modul torsi,
   t. definisi *annihilator* dan orde,
   u. definisi modul primer dan modul siklis,

v. definisi homomorfisma pada modul,

w. definisi modul hasil bagi, dan

x. definisi dan teorema jumlah langsung pada modul,

3. Melakukan kajian tentang dekomposisi modul yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama dengan langkah-langkah sebagai berikut:

   a. melakukan kajian hubungan antara konsep bebas dan bebas torsi pada modul atas daerah integral dan daerah ideal utama,

   b. memilih teorema-teorema pada dekomposisi modul yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama, yaitu:

      1) modul yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama merupakan jumlah langsung dari submodul bebas yang dibangun secara hingga dan submodul torsi yang dibangun secara hingga,

      2) modul torsi yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama merupakan jumlah langsung dari submodul-submodul primer, dan

      3) modul primer yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama merupakan jumlah langsung dari submodul-submodul siklis,

   c. membuktikan teorema pertama pada dekomposisi modul yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama menurut cara pandang penulis,

   d. membuat proposisi bahwa modul bebas yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama merupakan jumlah langsung dari submodul-submodul siklis,

   e. membuktikan proposisi bahwa modul bebas yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama merupakan jumlah langsung dari submodul-submodul siklis,

f. membuktikan teorema kedua pada dekomposisi modul yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama menurut cara pandang penulis, dan
g. membuktikan teorema ketiga pada dekomposisi modul yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama menurut cara pandang penulis.

4. Membuat kesimpulan.
5. Menulis laporan penelitian.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan diberikan oleh penulis agar penulisan skripsi ini lebih mudah dipahami. Penulisan penelitian ini dibagi menjadi empat bab dan masing-masing diuraikan sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Bab ini berisi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan skripsi ini.

Bab II Kajian Pustaka

Bab ini berisi teori-teori yang mendukung dalam pembahasan penelitian ini. Teori-teori tersebut terdiri dari definisi, teorema, proposisi, contoh yang berkaitan dengan pemetaan, grup, gelanggang, daerah ideal utama, modul yang dibangun secara hingga, modul bebas, modul torsi, modul primer, modul siklis, jumlah langsung pada modul, serta kajian hubungan antara konsep bebas dan bebas torsi pada modul atas daerah integral dan daerah ideal utama. Adapun pada bagian akhir bab ini berisi kajian dekomposisi dalam Islam.

Bab III Pembahasan

Bab ini berisi penjelasan tentang bagaimana modul yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama dapat didekomposisikan menjadi jumlah langsung submodul-submodul siklis.

Bab IV Penutup

Bab ini berisi kesimpulan dari kajian dekomposisi modul yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama menjadi jumlah langsung submodul-submodul siklis dan berisi saran-saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

Bab ini berisi konsep-konsep yang diperlukan sebagai landasan pembahasan pada bab selanjutnya. Adapun konsep-konsep dasar tersebut adalah pemetaan, grup, gelanggang, dan modul.

2.1 Pemetaan

Definisi 2.1

Pada dua himpunan tak kosong A dan B, hasil kali kartesius $A \times B$ adalah himpunan dari semua pasangan terurut (a, b) dari unsur-unsur $a \in A$ dan $b \in B$, yaitu

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B\}$$

(Gilbert dan Gilbert, 2009:13).

Contoh 2.2

Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{a, b\}$, maka berdasarkan Definisi 2.1 diperoleh

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

dan

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}.$$

Definisi 2.3

Misalkan A dan B adalah himpunan tak kosong. Subhimpunan f dari $A \times B$ adalah suatu pemetaan dari A ke B jika dan hanya jika untuk setiap $a \in A$ terdapat secara tunggal (satu dan hanya satu) unsur $b \in B$ sehingga $(a, b) \in f$. Jika f adalah pemetaan dan pasangan terurut (a, b) berada di

f, maka dapat ditulis $b = f(a)$ dan b disebut bayangan a oleh f (Gilbert dan Gilbert, 2009:13).

Untuk menguji bahwa suatu pengaitan adalah suatu pemetaan, maka diasumsikan bahwa $a_1 = a_2$ dan dibuktikan bahwa $f(a_1) = f(a_2)$ (Gallian, 2013:21).

Contoh 2.4

1. Pada Contoh 2.2, subhimpunan $f = \{(1, a), (2, a), (2, b), (3, a)\}$ bukan pemetaan karena untuk $2 \in A$ terdapat $a, b \in B$ sehingga $(2, a), (2, b) \in f$.
2. Pengaitan $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ yang didefinisikan dengan $f(a) = 2a$ adalah suatu pemetaan karena untuk sebarang $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ dengan $a_1 = a_2$ diperoleh

$$a_1 = a_2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2a_1 = 2a_2$$

$$\Leftrightarrow f(a_1) = f(a_2).$$

Definisi 2.5

Suatu pemetaan f dari himpunan A disebut satu-satu (injektif) jika untuk setiap $a_1, a_2 \in A$, $f(a_1) = f(a_2)$ berlaku $a_1 = a_2$ (Gallian, 2013:21).

Contoh 2.6

Pemetaan $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ yang didefinisikan dengan $f(a) = 2a$ adalah injektif karena untuk sebarang $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ dengan $\varphi(a_1) = \varphi(a_2)$ diperoleh

$$2a_1 = 2a_2$$

$$\Leftrightarrow a_1 = a_2.$$

Definisi 2.7

Suatu pemetaan f dari himpunan A ke himpunan B disebut onto (surjektif) jika setiap unsur di B adalah bayangan dari paling sedikit satu unsur di A.

Dengan kata lain, $f : A \to B$ adalah surjektif jika dan hanya jika untuk setiap b di B terdapat paling sedikit satu a di A sehingga $f(a) = b$ (Gallian, 2013:22).

Contoh 2.8

Pemetaan $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ yang didefinisikan dengan $f(a) = a + 1$ adalah surjektif karena untuk sebarang $b \in \mathbb{Z}$ terdapat $b - 1 \in \mathbb{Z}$ sehingga $f(b-1) = (b-1) + 1 = b$.

Definisi 2.9

Misalkan $f : A \to B$. Pemetaan f disebut bijektif jika dan hanya jika f surjektif dan injektif (Gilbert dan Gilbert, 2009:18).

Contoh 2.10

Pemetaan $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ yang didefinisikan pada Contoh 2.8 merupakan bijektif karena f surjektif (sebagaimana pada Contoh 2.8) dan injektif, yaitu untuk sebarang $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ dengan $\varphi(a_1) = \varphi(a_2)$ diperoleh

$$a_1 + 1 = a_2 + 1$$
$$\Leftrightarrow \quad a_1 = a_2.$$

2.2 Grup

Definisi 2.11

Operasi biner pada himpunan tak kosong A adalah pemetaan f dari $A \times A$ ke A (Gilbert dan Gilbert, 2009:30).

Pada Definisi 2.11, pemetaan f memasangkan setiap pasangan terurut $(a,\ b)$ di $A \times A$ ke tepat satu unsur $f(a,\ b) \in A$. Selanjutnya, jika $*$ merupakan operasi biner yang didefinisikan pada himpunan tak kosong A, maka notasi $*(a,\ b)$ dapat diganti dengan $a * b$ (Gilbert dan Gilbert, 2009:30).

Contoh 2.12

1. Operasi $*$ pada himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ yang didefinisikan dengan $a * b = a + b - 1$ untuk setiap $(a,\ b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ adalah operasi biner karena untuk setiap $(a_1,\ b_1), (a_2,\ b_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dengan $(a_1,\ b_1) = (a_2,\ b_2)$ berlaku $*(a_1,\ b_1) = *(a_2,\ b_2)$ dan untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$ berlaku $*(a,\ b) \in \mathbb{Z}$.
2. Operasi $+$ pada himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ untuk setiap $(a,\ b) \in A \times A$ bukan merupakan operasi biner karena terdapat $(2, 5) \in A \times A$ sedemikian sehingga $2 + 5 = 7 \notin A$.

Definisi 2.13

(1) Grup adalah pasangan terurut $(G,\ *)$ dengan G adalah suatu himpunan dan $*$ adalah suatu operasi biner pada G yang memenuhi aksioma-aksioma berikut:

a. $(a * b) * c = a * (b * c)$, untuk semua $a, b, c \in G$, yaitu $*$ bersifat asosiatif di G.

b. Terdapat suatu unsur e di G, disebut unsur identitas dari G, sehingga untuk semua $a \in G$ diperoleh $a * e = e * a = a$.

c. Untuk setiap $a \in G$ terdapat unsur a^{-1} di G, disebut invers dari a, sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

(2) Grup $(G,\ *)$ disebut abelian (atau komutatif) jika $a * b = b * a$ untuk semua $a, b \in G$. (Dummit dan Foote, 2004:17).

Contoh 2.14

1. $(\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup abelian karena penjumlahan adalah operasi biner di $\mathbb{Z}$, operasi penjumlahan bersifat asosiatif di $\mathbb{Z}$, terdapat $0 \in \mathbb{Z}$ sebagai unsur identitas di $\mathbb{Z}$ terhadap operasi penjumlahan, setiap unsur a di $\mathbb{Z}$ memiliki invers terhadap operasi penjumlahan, yaitu $(-a)$, dan operasi penjumlahan bersifat komutatif di $\mathbb{Z}$.
2. $\{\mathbb{Z} - \{0\}, +\}$ bukan merupakan grup karena $\mathbb{Z} - \{0\}$ tidak memuat unsur identitas terhadap operasi penjumlahan.
3. $\{\mathbb{Z}, \times\}$ bukan merupakan grup karena tidak semua unsur di $\mathbb{Z}$ memiliki invers terhadap operasi perkalian, sebagai contoh, tidak terdapat $b \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $2 \times b = b \times 2 = 1$.
4. $\{\mathbb{Z}^n, +\}$ dengan

$$\mathbb{Z}^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, \dots, n\}$$

dan operasi penjumlahan komponen demi komponen pada $\mathbb{Z}^n$ didefinisikan dengan

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

untuk setiap $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{Z}^n$ merupakan grup abelian karena penjumlahan adalah operasi biner di $\mathbb{Z}^n$, operasi penjumlahan bersifat asosiatif di $\mathbb{Z}^n$, terdapat $(0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^n$ sebagai unsur identitasi di $\mathbb{Z}^n$ terhadap operasi penjumlahan, setiap $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ di $\mathbb{Z}^n$ memiliki invers terhadap operasi penjumlahan, yaitu $(-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$, dan operasi penjumlahan bersifat komutatif di $\mathbb{Z}^n$, yaitu untuk setiap $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{Z}^n$ berlaku

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n) + (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Proposisi 2.15

Misalkan $(G, *)$ adalah suatu grup, maka $(a^{-1})^{-1} = a$ untuk setiap $a \in G$ (Dummit dan Foote, 2004:18).

Bukti :

Misalkan $(G, *)$ adalah suatu grup, $a \in G$, dan e adalah unsur identitas di G.

Karena $a \in G$ maka $a^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$. Lebih lanjut, $a^{-1} \in G$, maka terdapat $(a^{-1})^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $a^{-1} * (a^{-1})^{-1} = e$. Akibatnya

$$
\begin{aligned}
& a * a^{-1} &&= e \\
\Leftrightarrow\quad & (a * a^{-1}) * (a^{-1})^{-1} &&= e * (a^{-1})^{-1} \\
\Leftrightarrow\quad & a * (a^{-1} * (a^{-1})^{-1}) &&= (a^{-1})^{-1} \\
\Leftrightarrow\quad & a * e &&= (a^{-1})^{-1} \\
\Leftrightarrow\quad & a &&= (a^{-1})^{-1}
\end{aligned}
$$

Definisi 2.16

Misalkan $(G, *)$ adalah suatu grup. Suatu subhimpunan H dari G disebut subgrup dari G jika H membentuk grup bersama dengan operasi biner $*$ yang terdefinisi di G (Gilbert dan Gilbert, 2009:152).

Contoh 2.17

Pandang $(\mathbb{Q}, +)$ dengan $\mathbb{Q}$ adalah himpunan bilangan rasional sebagai suatu grup. $(\mathbb{Z}, +)$ merupakan subgrup dari $(\mathbb{Q}, +)$ karena $\mathbb{Z}$ adalah subhimpunan dari himpunan $\mathbb{Q}$ dan $(\mathbb{Z}, +)$ membentuk grup.

Teorema 2.18

Misalkan $(G, *)$ adalah suatu grup. Suatu subhimpunan H dari grup G adalah suatu subgrup dari G jika dan hanya jika

1. H himpunan tak kosong, dan
2. $a, b \in H$ berakibat $a * b^{-1} \in H$. (Gilbert dan Gilbert, 2009:154).

Bukti :

Misalkan $(G, *)$ adalah suatu grup, H adalah suatu subhimpunan dari G, dan $a, b \in H$.

Untuk membuktian Teorema 2.18, akan dibuktikan bahwa: 1) jika H adalah subgrup dari G, maka H himpunan tak kosong dan $a, b \in H$ berakibat $a * b^{-1} \in H$, dan 2) jika H himpunan tak kosong dan $a, b \in H$ berakibat $a * b^{-1} \in H$, maka H adalah subgrup dari G.

1) Asumsikan bahwa H adalah subgrup dari G.
   a) Karena H adalah subgrup dari G, maka (berdasarkan Definisi 2.13 bagian 2) terdapat unsur identitas $e \in H$. Hal ini berarti bahwa H tak kosong.
   b) Karena H adalah subgrup dari G, maka untuk setiap $b \in H$ terdapat $b^{-1} \in H$ sedemikian sehingga $b * b^{-1} = b^{-1} * b = e$. Selanjutnya karena $a \in H$ dan $b^{-1} \in H$, maka $a * b^{-1} \in H$.

   Berdasarkan a) dan b), diperoleh bahwa H himpunan tak kosong dan $a, b \in H$ berakibat $a * b^{-1} \in H$

2) Asumsikan bahwa H himpunan tak kosong dan $a, b \in H$ berakibat $a * b^{-1} \in H$.

Untuk menunjukkan bahwa H adalah subgrup dari G, akan ditunjukkan bahwa: a) H memuat unsur identitas terhadap operasi $*$, b) H memuat invers setiap unsur terhadap operasi $*$, c) $*$ merupakan operasi biner di H, dan d) operasi $*$ bersifat asosiatif di H.

a) Perhatikan bahwa setidaknya terdapat $a \in H$ dan kondisi 2 pada Teorema 2.18 terpenuhi sehingga $a * a^{-1} = e \in H$. Hal ini berarti bahwa H memuat unsur identitas terhadap operasi $*$.

b) Karena untuk sebarang $a \in H$, terdapat $e \in H$ dan $a \in H$ sehingga $e * a^{-1} = a^{-1} \in H$, maka H memuat invers setiap unsur terhadap operasi $*$.

c) Misalkan $a \in H$ dan $b \in H$. Karena H memuat invers setiap unsur terhadap operasi $*$, maka $b^{-1} \in H$. Akibatnya,

$$a * (b^{-1})^{-1} = a * b \in H.$$

Karena untuk sebarang $a, b \in H$ berlaku $a * b \in H$ maka operasi $*$ bersifat tertutup di H. Dengan demikian $*$ adalah operasi biner di H.

d) Karena operasi $*$ bersifat asosiatif di G dan H adalah subhimpunan dari G, maka operasi $*$ bersifat asosiatif di H.

Berdasarkan a), b), c), dan d), diperoleh bahwa jika H himpunan tak kosong dan $a, b \in H$ berakibat $a * b^{-1} \in H$, maka H adalah subgrup dari G.

Berdasarkan 1) dan 2), Teorema 2.18 terbukti.

2.2 Gelanggang

Definisi 2.19

(1) Gelanggang R adalah suatu himpunan bersama dua operasi biner $+$ dan $\times$ (disebut penjumlahan dan perkalian) yang memenuhi aksioma-aksioma berikut:

a. $(R, +)$ adalah suatu grup abelian.

b. $\times$ bersifat asosiatif : $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$, untuk semua $a, b, c \in R$.

c. Hukum distributif berlaku di R: untuk semua $a, b, c \in R$

$(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$ dan

$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$.

(2) Gelanggang R disebut gelanggang komutatif jika operasi perkaliannya bersifat komutatif.

(3) Gelanggang R disebut gelanggang dengan unsur kesatuan (memuat 1) jika $1 \in R$ dan $1 \times a = a \times 1 = a$, untuk setiap $a \in R$.

(Dummit dan Foote, 2004:223).

Himpunan tak kosong R yang membentuk gelanggang bersama dua operasi biner $+$ dan $\times$ dilambangkan dengan $(R, +, \times)$.

Contoh 2.20

1. Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ bersama dengan operasi penjumlahan dan perkalian biasa merupakan gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan.
2. Himpunan bilangan genap $2\mathbb{Z}$ bersama dengan operasi penjumlahan dan perkalian biasa merupakan gelanggang komutatif tanpa unsur kesatuan.
3. Himpunan matriks berordo 2×2 yang entri-entrinya bilangan bulat

$$M_2[\mathbb{Z}] = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}\right\}$$

merupakan gelanggang tak komutatif dengan unsur kesatuan $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Definisi 2.21

Suatu subhimpunan S dari gelanggang R adalah subgelanggang dari R jika S merupakan gelanggang terhadap operasi yang sama di R (Gallian, 2013:248).

Contoh 2.22

1. Untuk setiap bilangan bulat positif n, himpunan

$$n\mathbb{Z} = \{na \mid a \in \mathbb{Z}\}$$

merupakan subgelanggang dari gelanggang bilangan bulat $\mathbb{Z}$.

2. Himpunan

$$S = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}\right\}$$

merupakan subgelanggang dari gelanggang $M_2[\mathbb{Z}]$.

2.3 Daerah Integral dan Daerah Ideal Utama

Pada bahasan selanjutnya, unsur kesatuan pada gelanggang dengan unsur kesatuan yang dimaksud adalah $1 \neq 0$.

Definisi 2.23

Misalkan $(R, +, \times)$ adalah suatu gelanggang. Unsur taknol a di R disebut pembagi nol jika terdapat unsur taknol b di R sedemikian sehingga $a \times b = 0$ atau $b \times a = 0$ (Dummit dan Foote, 2004:226).

Contoh 2.24

Perhatikan gelanggang

$$\mathbb{Z}^2 = \{(a,\ \ b) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

yang operasi penjumlahan dan perkaliannya didefinisikan dengan

$$(a,\ \ b) + (c,\ \ d) = (a + c,\ \ b + d)$$

dan

$$(a,\ \ b) \times (c,\ \ d) = (a \times c,\ \ b \times d)$$

untuk semua $(a,\ \ b), (c,\ \ d) \in \mathbb{Z}^2$.

Pada gelanggang $\mathbb{Z}^2$, unsur $(1,\ 0)$ merupakan pembagi nol karena terdapat $(0,\ 1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga berlaku $(1,\ 0) \times (0,\ 1) = (0, 0)$.

Definisi 2.25

Suatu gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan disebut daerah integral jika tidak memiliki pembagi nol (Dummit dan Foote, 2004:228).

Dengan demikian, pada daerah integral, operasi perkalian yang menghasilkan 0 hanya dipenuhi ketika salah satu faktornya adalah 0, yaitu $a \times b = 0$ hanya ketika $a = 0$ atau $b = 0$ (Gallian, 2013:255). Dengan kata lain, misalkan $(R,\ +,\ \times)$ adalah suatu gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan. Gelanggang R disebut daerah integral jika $a \neq 0$ dan $b \neq 0$, maka $ab \neq 0$ untuk setiap $a, b \in R$.

Contoh 2.26

1. Gelanggang bilangan bulat $\mathbb{Z}$ merupakan daerah integral karena tidak memiliki pembagi nol, yaitu untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$ berlaku jika $a \neq 0$ dan $b \neq 0$, maka $a \times b \neq 0$.
2. Gelanggang

   $$\mathbb{Z}^2 = \{(a,\ \ b) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

   bukan daerah integral karena memiliki pembagi nol.

Definisi 2.27

Misalkan $(R, +, \times)$ adalah suatu daerah integral. Untuk $r, s \in R$, r dikatakan membagi s (ditulis $r|s$) jika ada $x \in R$ sedemikian sehingga $s = x \times r$ (Roman, 2008:147).

Contoh 2.28

Gelanggang bilangan bulat modulo 7

$$\mathbb{Z}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

sebagai daerah integral. Unsur 2 pada $\mathbb{Z}_7$ membagi 6 karena terdapat $3 \in \mathbb{Z}_7$ sedemikian sehingga $6 = 3 \times 2$.

Definisi 2.29

Misalkan $(R, +, \times)$ adalah daerah integral.

1. Suatu unsur di R yang mempunyai invers terhadap perkalian disebut unit. Jadi, $u \in R$ adalah unit jika $u \times v = 1$ untuk suatu $v \in R$.
2. Unsur $a, b \in R$ dikatakan berasosiasi (dinotasikan dengan $a \backsim b$) jika terdapat unit u sehingga $a = u \times b$.
3. Suatu unsur taknol $p \in R$ yang bukan unit disebut prima jika
$$p|(a \times b) \text{ maka } p|a \text{ atau } p|b.$$
4. Suatu unsur taknol $r \in R$ disebut tak tereduksi jika
$$r = a \times b \text{ maka } a \text{ atau } b \text{ adalah unit.}$$

(Roman, 2008:26).

Contoh 2.30

1. Pada gelanggang bilangan bulat $\mathbb{Z}$, unsur 1 dan -1 merupakan unit karena $1, -1 \in \mathbb{Z}$ mempunyai invers terhadap perkalian, yaitu terdapat $1 \in \mathbb{Z}$ sehingga $1 \times 1 = 1$ dan terdapat $-1 \in \mathbb{Z}$ sehingga $-1 \times -1 = 1$.

2. Pada gelanggang bilangan bulat $\mathbb{Z}$, unsur -2 berasosiasi dengan 2 karena terdapat unit $-1 \in \mathbb{Z}$ sehingga $-2 = -1 \times 2$.
3. Pada gelanggang $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, unsur 3 bukan merupakan prima karena 3 membagi $(2+\sqrt{-5}) \times (2-\sqrt{-5})$ tetapi 3 tidak membagi $(2+\sqrt{-5})$ dan $(2-\sqrt{-5})$.
4. Pada gelanggang bilangan bulat $\mathbb{Z}$, unsur -3 tak tereduksi karena $-3 = 1 \times -3$ dan 1 adalah unit dari $\mathbb{Z}$.

Definisi 2.31

Suatu daerah integral $(R, +, \times)$ dikatakan daerah faktorisasi tunggal jika R memenuhi sifat-sifat faktorisasi berikut:

1. Setiap unsur taknol $r \in R$ yang bukan unit dapat ditulis sebagai perkalian dari sejumlah unsur-unsur berhingga yang tak tereduksi, yaitu $r = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n$.
2. Faktorisasi menjadi unsur-unsur tak tereduksi adalah tunggal, yaitu jika $r = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n$ dan $r = q_1 \times q_2 \times \dots \times q_m$, maka $m = n$ dan setelah faktor-faktor disesuaikan, diperoleh $p_i \backsim q_i$.

(Roman, 2008:28).

Contoh 2.32

Gelanggang bilangan bulat $\mathbb{Z}$ merupakan daerah faktorisasi tunggal karena setiap $n \in \mathbb{Z}$ selain $0, 1$, dan -1 dapat dinyatakan sebagai hasil kali unsur-unsur tak tereduksi secara tunggal.

Definisi 2.33

Misalkan $(R, +, \times)$ adalah daerah integral dan A adalah subhimpunan dari R yang memuat paling sedikit satu unsur taknol. Unsur $d \in R$ disebut faktor persekutuan terbesar dari A jika

1. $d|a$ untuk semua $a \in A$, dan
2. Jika $r \in R$ dan $r|a$ untuk semua $a \in A$, maka $r|d$.

Jika 1 adalah faktor persekutuan terbesar dari A, maka unsur-unsur di himpunan A dikatakan saling prima (Adkins dan Weintraub, 1992:81).

Contoh 2.34

Pada gelanggang bilangan bulat $\mathbb{Z}$, dapat diambil subhimpunan $\{6, 9, 12\}$ dari $\mathbb{Z}$. Misalkan $\{6, 9, 12\} = A$. Perhatikan bahwa

1) faktor dari 6 adalah $\pm 1, \pm 2, \pm 3$, dan ± 6,
2) faktor dari 9 adalah $\pm 1, \pm 3$, dan ± 9, dan
3) faktor dari 12 adalah $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6$, dan ± 12.

Dengan demikian, faktor persekutuan dari A adalah ± 1 dan ± 3. Adapun faktor persekutuan terbesar dari A adalah 3 karena

1) $3|a$ untuk semua $a \in A$, dan
2) untuk $\pm 1, -3 \in \mathbb{Z}$,
   a) $-1|a$ untuk semua $a \in A$ dan $-1|3$,
   b) $1|a$ untuk semua $a \in A$ dan $1|3$, dan
   c) $-3|a$ untuk semua $a \in A$ dan $-3|3$.

Definisi 2.35

Misalkan $(R, +, \times)$ adalah gelanggang, I adalah subhimpunan dari R, dan $r \in R$.

(1) $rI = \{r \times a \mid a \in I\}$ dan $Ir = \{a \times r \mid a \in I\}$.

(2) Subhimpunan I dari R disebut ideal kiri dari R jika

(i) I adalah subgelanggang dari R.

(ii) I tertutup terhadap perkalian kiri oleh unsur di R, yaitu $rI \subseteq I$ untuk semua $r \in R$.

I adalah ideal kanan jika (i) terpenuhi dan (ii) digantikan

(iii) I tertutup terhadap perkalian kanan oleh unsur di R, yaitu $Ir \subseteq I$ untuk semua $r \in R$.

(3) Suatu subhimpunan yang merupakan ideal kiri dan ideal kanan disebut ideal dari R.

(Dummit dan Foote, 2004:242).

Berdasarkan Definisi 2.35, misalkan $(R, +, \times)$ adalah suatu gelanggang dan I adalah subhimpunan dari R. I disebut ideal dari R jika: 1) I subgelanggang dari R, dan 2) untuk $a \in I$ berlaku $r \times a \in I$ dan $a \times r \in I$ untuk setiap $r \in R$.

Contoh 2.36

Untuk setiap bilangan bulat positif n, himpunan

$$n\mathbb{Z} = \{n \times a \mid a \in \mathbb{Z}\}$$

merupakan ideal dari $\mathbb{Z}$ karena $n\mathbb{Z}$ merupakan subgelanggang dari $\mathbb{Z}$ dan $n\mathbb{Z}$ merupakan ideal kiri dan ideal kanan dari R. Untuk menunjukkan bahwa $n\mathbb{Z}$ merupakan ideal kiri dan ideal kanan dari $\mathbb{Z}$, misalkan $x \in n\mathbb{Z}$ dan $m \in \mathbb{Z}$. Karena $x \in n\mathbb{Z}$, maka $x = n \times k$ dengan $k \in \mathbb{Z}$ dan diperoleh

$$x \times m = m \times x = m \times (n \times k) = n \times (m \times k) \in \mathbb{Z}$$

Definisi 2.37

Misalkan $(R, +, \times)$ adalah gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan.

Jika a adalah suatu unsur tertentu di R, maka ideal

$$\langle a \rangle = \{a \times r \,|r \in R\},$$

yang terdiri dari semua perkalian a dengan unsur r di R, disebut ideal utama yang dibangun oleh a di R (Gilbert dan Gilbert, 2009:296).

Berdasarkan Definisi 2.37, suatu ideal dari suatu gelanggang $(R, +, \times)$ disebut ideal utama yang dibangun oleh suatu unsur a di R jika semua unsur di R dapat dinyatakan sebagai perkalian dari a dengan suatu unsur di R, yaitu untuk semua $s \in R$, $s = a \times r$ untuk suatu $r \in R$.

Contoh 2.38

Pada gelanggang bilangan bulat $\mathbb{Z}$, himpunan

$$2\mathbb{Z} = \{2 \times a \,|a \in \mathbb{Z}\}$$

merupakan ideal utama yang dibangun oleh 2 karena $2\mathbb{Z}$ merupakan ideal dari $\mathbb{Z}$ dan untuk setiap $n \in 2\mathbb{Z}$, $n = 2 \times a$ untuk suatu $a \in \mathbb{Z}$.

Definisi 2.39

Daerah ideal utama adalah daerah integral yang setiap idealnya merupakan ideal utama (Dummit dan Foote, 2004:279).

Dengan menggabungkan Definisi 2.37 dan Definisi 2.39, dapat disimpulkan bahwa daerah ideal utama merupakan daerah integral yang setiap idealnya dibangun oleh satu unsur.

Contoh 2.40

Gelanggang bilangan bulat $\mathbb{Z}$ merupakan daerah ideal utama karena ideal dari $\mathbb{Z}$ berbentuk $n\mathbb{Z} = \{na|a \in \mathbb{Z}\}$ dan untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$, $n\mathbb{Z}$ dibangun oleh satu unsur, yaitu $n\mathbb{Z} = \langle n \rangle$.

Teorema 2.41

Misalkan $(R, +, \times)$ adalah daerah ideal utama.

Unsur-unsur $a, b \in R$ adalah saling prima, yaitu tidak memiliki faktor-faktor bukan unit yang sama, jika dan hanya jika terdapat $r, s \in R$ sedemikian sehingga

$$r \times a + s \times b = 1$$

(Roman, 2008:27).

Bukti :

Misalkan $(R, +, \times)$ adalah daerah ideal utama dan $a, b \in R$.

$(\Leftarrow)$ Andaikan a dan b tidak saling prima. Hal ini berarti bahwa setidaknya a dan b memiliki satu faktor bukan unit yang sama. Misalkan $c \neq 1$ adalah faktor persekutuan terbesar dari a dan b. Karena c adalah faktor dari a dan b, maka terdapat $x \in R$ dan $y \in R$ sehingga $a = c \times x$ dan $b = c \times y$.

Selanjutnya, misalkan $r, s \in R$. Akibatnya,

$$\begin{aligned} r \times a + s \times b &= r \times (c \times x) + s \times (c \times y) \\ &= (r \times c) \times x + (s \times c) \times y \\ &= (c \times r) \times x + (c \times s) \times y \\ &= c \times (r \times x) + c \times (s \times y) \\ &= c \times (r \times x + s \times y) \neq 1 \end{aligned}$$

Hal ini kontradiksi dengan $r \times a + s \times b = 1$. Dengan demikian, haruslah a dan b saling prima.

$(\Rightarrow)$ Perhatikan ideal utama yang dibangun oleh $a, b \in R$. Misalkan $\langle a, b \rangle$ dibangun oleh x, yaitu $\langle a, b \rangle = \langle x \rangle$. Karena $\langle a, b \rangle = \langle x \rangle$ maka $x|a$ dan

$x|b$. Selanjutnya, karena a dan b saling prima, maka faktor persekutuan terbesar dari a dan b adalah 1. Lebih lanjut, berdasarkan Definisi 2.33, karena $x|a$ dan $x|b$, maka $x|1$. Hal ini berarti bahwa $1 = z \times x$ untuk suatu $z \in R$. Dengan demikian x adalah unit di R. Selanjutnya, karena x adalah unit, maka x membangun setiap unsur di R, yaitu $\langle x \rangle = R$. Akibatnya, $\langle a, b \rangle = R$. Lebih lanjut, karena $1 \in \langle a, b \rangle$, maka terdapat $r, s \in R$ sedemikian sehingga $r \times a + s \times b = 1$.

Dengan demikian, terbukti bahwa pada daerah ideal utama R, $a, b \in R$ saling prima jika dan hanya jika terdapat $r, s \in R$ sedemikian sehingga $r \times a + s \times b = 1$.

Corollary 2.42

Misalkan $(R, +, \times)$ adalah daerah ideal utama.

Jika unsur-unsur $p_1, p_2, \dots, p_n \in R$ adalah saling prima, maka terdapat $a_1, a_2, \dots, a_n \in R$ sedemikian sehingga

$$a_1 \times p_1 + a_2 \times p_2 + \cdots + a_n \times p_n = 1.$$

Bukti :

Misalkan $(R, +, \times)$ adalah daerah ideal utama.

Perhatikan ideal utama yang dibangun oleh $p_1, p_2, \dots, p_n \in R$. Misalkan $\langle p_1, p_2, \dots, p_n \rangle$ dibangun oleh x, yaitu $\langle p_1, p_2, \dots, p_n \rangle = \langle x \rangle$. Karena $\langle p_1, p_2, \dots, p_n \rangle = \langle x \rangle$, maka $x|p_i$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$. Selanjutnya, karena $p_1, p_2, \dots, p_n \in R$ saling prima, maka faktor persekutuan terbesar dari $p_1, p_2, \dots, p_n$ adalah 1. Lebih lanjut, berdasarkan Definisi 2.23, karena untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$ $x|p_i$, maka $x|1$. Hal ini berarti bahwa $1 = y \times x$ untuk suatu $y \in R$. Dengan demikian x adalah unit di R.

Selanjutnya, karena x adalah unit, maka x membangun setiap unsur di R, yaitu $\langle x\rangle = R$. Akibatnya, $\langle p_1,\ p_2, \dots,\ p_n\rangle = R$. Lebih lanjut, karena $1 \in \langle p_1,\ p_2, \dots,\ p_n\rangle$, maka terdapat $r, s \in R$ sedemikian sehingga

$$a_1 \times p_1 + a_2 \times p_2 + \cdots + a_n \times p_n = 1.$$

Dengan demikian, terbukti bahwa pada daerah ideal utama R, Jika unsur-unsur $p_1,\ p_2, \dots,\ p_n \in R$ adalah saling prima, maka terdapat $a_1,\ a_2, \dots,\ a_n \in R$ sedemikian sehingga

$$a_1 \times p_1 + a_2 \times p_2 + \cdots + a_n \times p_n = 1.$$

2.4 Modul yang Dibangun Secara Hingga

Definisi 2.43

Misalkan $(R,\ +,\ \times)$ adalah suatu gelanggang (tidak perlu komutatif ataupun memuat unsur kesatuan). R-modul kiri atau modul kiri atas R adalah himpunan M bersama dengan:

(1) operasi biner $+$ pada M dan $(M,\ +)$ membentuk grup abelian, dan

(2) aksi dari R pada M (yaitu suatu pemetaan $R \times M \to M$) dinotasikan dengan $r \cdot m$, untuk semua $r \in R$ dan untuk semua $m \in M$ yang memenuhi

(a) $(r + s) \cdot m = r \cdot m + s \cdot m$, untuk semua $r, s \in R$, $m \in M$,

(b) $(r \times s) \cdot m = r \cdot (s \cdot m)$, untuk semua $r, s \in R$, $m \in M$, dan

(c) $r \cdot (m + n) = r \cdot m + r \cdot n$, untuk semua $r \in R$, $m, n \in M$.

Jika gelanggang R memiliki 1, diberikan aksioma tambahan

(d) $1 \cdot m = m$, untuk semua $m \in M$.

(Dummit dan Foote, 2004:337).

Istilah “kiri” dalam Definisi 2.43 di atas mengindikasikan bahwa unsur gelanggang muncul di sebelah kiri. R-modul “kanan” dapat didefinisikan secara analog (Dummit dan Foote, 2004:337). Namun dalam penelitian ini, istilah modul akan berarti modul kiri atas gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan.

Contoh 2.44

Himpunan $\mathbb{Z}^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{Z}, i = 1,2, \dots n\}$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar yang didefinisikan sebagai berikut

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

dan

$$r \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n) = (r \times a_1, r \times a_2, \dots, r \times a_n)$$

untuk setiap $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{Z}^n$ dan $r \in \mathbb{Z}$ merupakan modul atas bilangan bulat $\mathbb{Z}$ karena $\mathbb{Z}^n$ merupakan grup abelian (sebagaimana telah disebutkan pada Contoh 2.14 bagian 4) dan operasi perkalian skalar dari $\mathbb{Z}$ pada $\mathbb{Z}^n$ memenuhi aksioma perkalian skalar pada modul sebagaimana Definisi 2.43 bagian (2), yaitu untuk $r, s \in R$ dan $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ maka

1) $$\begin{aligned} (r+s) \cdot a &= (r+s) \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n) \\ &= \big((r+s) \times a_1, (r+s) \times a_2, \dots, (r+s) \times a_n\big) \\ &= \big((r \times a_1 + s \times a_1), (r \times a_2 + s \times a_2), \dots, (r \times a_n + s \times a_n)\big) \\ &= (r \times a_1, r \times a_2, \dots, r \times a_n) + (s \times a_1, s \times a_2, \dots, s \times a_n) \\ &= r \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n) + s \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n) \\ &= r \cdot a + s \cdot a \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} (r \times s) \cdot a &= (r \times s) \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n) \\ &= ((r \times s) \times a_1, (r \times s) \times a_2, \dots, (r \times s) \times a_n) \end{aligned}$$

$= \big(r \times (s \times a_1), r \times (s \times a_2), \dots, r \times (s \times a_n)\big)$

$= r \cdot (s \times a_1, s \times a_2, \dots, s \times a_n)$

$= r \cdot \big(s \cdot (a_1,\ a_2, \dots,\ a_n)\big)$

$= r \cdot (s \cdot a)$

3) $r \cdot (a + b) \quad = r \cdot \big((a_1,\ a_2, \dots,\ a_n) + (b_1,\ b_2, \dots,\ b_n)\big)$

$= r \cdot (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2, \dots,\ a_n + b_n)$

$= (r \times (a_1 + b_1), r \times (a_2 + b_2), \dots, r \times (a_n + b_n))$

$= \big((r \times a_1 + r \times b_1), (r \times a_2 + r \times b_2), \dots, (r \times a_n + r \times b_n)\big)$

$= (r \times a_1, r \times a_2, \dots, r \times a_n) + (r \times b_1, r \times b_2, \dots, r \times b_n)$

$= r \cdot (a_1,\ a_2, \dots,\ a_n) + r \cdot (b_1,\ b_2, \dots,\ b_n)$

$= r \cdot a + r \cdot b$

4) $1 \cdot a \quad = 1 \cdot (a_1,\ a_2, \dots,\ a_n)$

$= (1 \times a_1, 1 \times a_2, \dots, 1 \times a_n)$

$= (a_1,\ a_2, \dots,\ a_n)$

$= a$

Definisi 2.45

Misalkan $(R,\ +,\ \times)$ adalah suatu gelanggang dan M adalah suatu R-modul. R-submodul dari M adalah subgrup N dari M yang tertutup terhadap perkalian skalar dengan unsur-unsur gelanggang, yaitu $r \cdot n \in N$, untuk semua $r \in R$ dan $n \in N$ (Dummit dan Foote, 2004:337).

Dengan demikian, misalkan N adalah subhimpunan tak kosong dari R-modul M. Himpunan N adalah submodul M jika dan hanya jika untuk setiap $m, n \in N$ dan $r \in R$ berlaku $m - n \in N$ dan $r \cdot n \in N$ (Ismiarti, dkk, 2016:19-20).

Contoh 2.46

Pada $\mathbb{Z}$ sebagai $\mathbb{Z}$-modul, himpunan $n\mathbb{Z} = \{n \times a | a \in \mathbb{Z}\}$ merupakan submodul dari $\mathbb{Z}$ karena $n\mathbb{Z}$ merupakan subgrup dari $\mathbb{Z}$ dan operasi perkalian skalar tertutup di $n\mathbb{Z}$, yaitu misalkan $r \in \mathbb{Z}$ dan $x \in n\mathbb{Z}$ dengan $x = n \times a$ untuk suatu $a \in \mathbb{Z}$ diperoleh

$$r \times x = r \times (n \times a) = (r \times n) \times a = (n \times r) \times a = n \times (r \times a) \in n\mathbb{Z}.$$

Teorema 2.47

Suatu subhimpunan tak kosong S dari suatu R-modul M adalah suatu submodul jika hanya jika S tertutup terhadap kombinasi linier, yaitu jika $r, s \in R, u, v \in S$, maka $r \cdot u + s \cdot v \in S$ (Roman, 2008:112).

Bukti :

Misalkan $(R, +, \times)$ adalah gelanggang dengan unsur kesatuan, M adalah R-modul, S adalah subhimpunan tak kosong dari M, $r, s \in R$, dan $u, v \in S$.

Akan ditunjukkan bahwa pernyataan $r \cdot u + s \cdot v \in S$ ekuivalen dengan pernyataan $u - v \in S$ dan $r \cdot u \in S$, yaitu $r \cdot u + s \cdot v \in S$ jika dan hanya jika $u - v \in S$ dan $r \cdot u \in S$.

Adapun untuk menunjukkan bahwa $r \cdot u + s \cdot v \in S$ jika dan hanya jika $u - v \in S$ dan $r \cdot u \in S$, akan ditunjukkan bahwa: (1) jika $r \cdot u + s \cdot v \in S$, maka $u - v \in S$ dan $r \cdot u \in S$, dan (2) jika $u - v \in S$ dan $r \cdot u \in S$, maka $r \cdot u + s \cdot v \in S$.

(1) Asumsikan bahwa S adalah subhimpunan dari M dan $r \cdot u + s \cdot v \in S$. Perhatikan bahwa R adalah gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan. Pilih $r = 1$.

Pandang R sebagai grup. Karena R merupakan grup dan $1 \in R$, maka terdapat $-1 \in R$ invers dari $1 \in R$ terhadap operasi penjumlahan. Pilih $s = -1$. Akibatnya,

$$r \cdot u + s \cdot v \in S \Leftrightarrow 1 \cdot u + (-1) \cdot v \in S \Leftrightarrow u - v \in R.$$

Selanjutnya, pandang R sebagai grup. Karena R merupakan grup, maka terdapat $0 \in R$ sebagai unsur identitas terhadap operasi penjumlahan. Pilih $s = 0$. Akibatnya,

$$r \cdot u + s \cdot v \in S \Leftrightarrow r \cdot u + 0 \cdot v \in S \Leftrightarrow r \cdot u \in S.$$

Dengan demikian, terbukti bahwa jika $r \cdot u + s \cdot v \in S$, maka $u - v \in S$ dan $r \cdot u \in S$. Hal ini berarti bahwa S adalah submodul dari M.

(2) Asumsikan bahwa S submodul dari M, $u - v \in S$, dan $r \cdot u \in S$.

Perhatikan bahwa jika $s \in R$, maka $-s \in R$. Akibatnya $-s \cdot v \in S$. Menggunakan asumsi bahwa $u - v \in S$ dan $r \cdot u \in S$ diperoleh

$$r \cdot u - (-s \cdot v) \in S \Leftrightarrow r \cdot u + s \cdot v \in S$$

Dengan demikian, terbukti bahwa jika $u - v \in S$ dan $r \cdot u \in S$ maka $r \cdot u + s \cdot v \in S$.

Berdasarkan (1) dan (2), terbukti bahwa pernyataan $r \cdot u + s \cdot v \in S$ ekuivalen dengan pernyataan $u - v \in S$ dan $r \cdot u \in S$.

Contoh 248

Himpunan

$$2\mathbb{Z}^n = \{(2a_1, 2a_2, \dots, 2a_n) \mid a_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, \dots, n\}$$

adalah submodul $\mathbb{Z}^n$ karena $2\mathbb{Z}^n$ adalah subhimpunan tak kosong dari $\mathbb{Z}^n$, yaitu terdapat $(0, 0, \dots, 0) \in 2\mathbb{Z}^n$, dan $2\mathbb{Z}^n$ tertutup terhadap kombinasi linier. Untuk menunjukkan bahwa $2\mathbb{Z}^n$ tertutup terhadap kombinasi linier, misalkan $r, s \in \mathbb{Z}^n$ dan $u, v \in 2\mathbb{Z}^n$.

Tulis $u = (2u_1, 2u_2, \dots, 2u_n)$, $v = (2v_1, 2v_2, \dots, 2v_n)$, dengan $u_1,\ u_2, \dots,\ u_n, v_1,\ v_2 \dots,\ v_n \in \mathbb{Z}^n$, dan diperoleh

$$\begin{aligned} r \cdot u + s \cdot v &= r \cdot (2u_1, 2u_2, \dots, 2u_n) + s \cdot (2v_1, 2v_2, \dots, 2v_n) \\ &= \big(r(2u_1), r(2u_2), \dots, r(2u_n)\big) + \\ &\quad \big(s(2v_1), s(2v_2), \dots, s(2v_n)\big) \\ &= \big(2(ru_1), 2(ru_2), \dots, 2(ru_n)\big) + \\ &\quad \big(2(sv_1), 2(sv_2), \dots, 2(sv_n)\big) \\ &= \big(2(ru_1 + sv_1), 2(ru_2 + sv_2), \dots, 2(ru_n + sv_n)\big) \in 2\mathbb{Z}^n. \end{aligned}$$

Definisi 2.49

Misalkan M adalah suatu R-modul. Submodul yang direntang (atau dibangun) oleh subhimpunan S dari suatu modul M adalah himpunan dari semua kombinasi linier unsur-unsur di S:

$$\langle\langle S \rangle\rangle = \{r_1 \cdot v_1 + r_2 \cdot v_2 + \cdots + r_n \cdot v_n | r_i \in R, v_i \in S, n \geq 1\}$$

Suatu subhimpunan $S \subseteq M$ dikatakan merentang atau membangun M jika $M = \langle\langle S \rangle\rangle$ (Roman, 2008:112).

Contoh 2.50

Pandang himpunan

$$M_2[\mathbb{Z}] = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \mid a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{Z} \right\}$$

sebagai $\mathbb{Z}$-modul. Subhimpunan $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ dari $M_2[\mathbb{Z}]$ merupakan salah satu pembangun dari $M_2[\mathbb{Z}]$ karena $\langle\langle S \rangle\rangle \subseteq M_2[\mathbb{Z}]$ dan $M_2[\mathbb{Z}] \subseteq \langle\langle S \rangle\rangle$. Jelas bahwa $\langle\langle S \rangle\rangle \subseteq M_2[\mathbb{Z}]$. Adapun untuk menunjukkan bahwa

$M_2[\mathbb{Z}] \subseteq \langle\langle S\rangle\rangle$, misalkan $x \in M_2[\mathbb{Z}]$. Karena $x \in M_2[\mathbb{Z}]$, maka $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$, dengan $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$. Akibatnya, x dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier unsur-unsur di S, yaitu

$$x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \langle\langle S\rangle\rangle.$$

Definisi 2.51

R-modul M dikatakan dibangun secara hingga jika $M = \langle\langle S\rangle\rangle$ untuk suatu himpunan berhingga S dari M (Adkins dan Weintraub, 1992:115).

$M_2[\mathbb{Z}]$ adalah contoh modul yang dibangun secara hingga.

2.5 Modul Bebas

Definisi 2.52

Suatu subhimpunan S dari suatu R-modul M adalah bebas linier jika untuk sebarang $v_1,\ v_2, \dots,\ v_n \in S$ yang berbeda dan $r_1,\ r_2, \dots,\ r_n \in R$, dengan $r_1 \cdot v_1 + r_2 \cdot v_2 \dots + r_n \cdot v_n = 0$ diperoleh $r_i = 0$ untuk semua i.

Suatu himpunan S yang tidak bebas linier disebut bergantung linier (Roman, 2008:114).

Contoh 2.53

Pandang $\mathbb{Z}^2 = \{(a_1,\ a_2) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{Z}\}$ sebagai $\mathbb{Z}$-modul.

1. Himpunan $\{(1,0),(0,1)\}$ pada $\mathbb{Z}^2$ adalah bebas linier di $\mathbb{Z}^2$ karena untuk sebarang $r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$ dengan $r_1(1,0) + r_2(0,1) = (0,0)$ diperoleh $r_1 = r_2 = 0$.
2. Himpunan $\{(2,0),(3,0)\}$ adalah bergantung linier di $\mathbb{Z}^2$ karena terdapat $-3{,}2 \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $-3(2,0) + 2(3,0) = (0,0)$.

Definisi 2.54

Misalkan M adalah suatu R-modul. Suatu subhimpunan $\mathcal{B}$ dari M adalah basis jika $\mathcal{B}$ bebas linier dan membangun M. Suatu R-modul M dikatakan bebas jika $M = \{0\}$ atau M mempunyai basis (Roman, 2008:116).

Contoh 2.55

Pada $M_2[\mathbb{Z}]$ sebagai $\mathbb{Z}$-modul, subhimpunan

$$S = \left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right\}$$

dari $M_2[\mathbb{Z}]$ merupakan salah satu basis dari $M_2[\mathbb{Z}]$ karena S membangun $M_2[\mathbb{Z}]$ dan S bebas linier. Pada contoh 2.50 telah ditunjukkan bahwa S membangun $M_2[\mathbb{Z}]$. Selanjutnya, untuk menunjukkan bahwa S bebas linier, misalkan $r_1, r_2, r_3, r_4 \in \mathbb{Z}$ dengan $r_1\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} + r_2\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix} + r_3\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix} + r_4\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$. Dengan demikian, diperoleh $\begin{bmatrix}r_1 & r_2\\r_3 & r_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$, yaitu $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 0$.

Definisi 2.56

Misalkan R adalah gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan dan M adalah R-modul. Rank $\mathrm{rk}(M)$ dari modul bebas taknol M adalah banyaknya unsur dari basis modul M. Rank dari modul trivial $\{0\}$ adalah 0 (Roman, 2008:129).

Contoh 2.57

Pada $M_2[\mathbb{Z}]$ sebagai $\mathbb{Z}$-modul, $\mathrm{rk}(M_2[\mathbb{Z}]) = 4$.

2.6 Modul Torsi dan Bebas Torsi

Definisi 2.58

Misalkan M adalah suatu R-modul. Suatu unsur taknol $v \in M$ dengan $r \cdot v = 0$ untuk suatu unsur taknol $r \in R$ disebut unsur torsi dari M. Suatu modul yang tidak memiliki unsur torsi taknol disebut modul bebas torsi. Jika semua unsur di M adalah unsur torsi, maka M adalah modul torsi. Himpunan unsur-unsur torsi di M, bersama dengan unsur nol, dinotasikan dengan M_{tor} (Roman, 2008:115).

Contoh 2.59

Pandang $\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ sebagai $\mathbb{Z}$-modul. $\mathbb{Z}_5$ adalah modul torsi karena setiap unsur taknol di $\mathbb{Z}_5$ adalah unsur torsi, yaitu untuk setiap unsur taknol $v \in \mathbb{Z}_5$, terdapat $5 \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $5v = 0$.

2.7 *Annihilator* (Pengenol) dan Orde

Definisi 2.60

Misalkan M adalah suatu R-modul. *Annihilator* dari suatu unsur $v \in M$ adalah

$$ann(v) = \{r \in R \mid r \cdot v = 0\}$$

dan *annihilator* dari suatu submodul N dari M adalah

$$ann(N) = \left\{r \in R \mid r \cdot N = \{0\}\right\}$$

dengan $r \cdot N = \{r \cdot v \mid v \in N\}$ (Roman, 2008:115).

Contoh 2.61

1. Jika diberikan $\mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ sebagai $\mathbb{Z}$-modul, maka diperoleh

   $ann(\mathbb{Z}_6) = \{r \in R \mid r \cdot m = 0, \forall m \in \mathbb{Z}_6\}$, yaitu

$$ann(\mathbb{Z}_6) = \{0, \pm 6, \pm 12, \dots.\} = 6\mathbb{Z}.$$

2. Jika diberikan $\mathbb{Z}_9 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ sebagai $\mathbb{Z}$-modul, maka diperoleh $ann(\mathbb{Z}_9) = \{r \in R \mid r \cdot m = 0, \forall m \in \mathbb{Z}_9\}$, yaitu

$$ann(\mathbb{Z}_9) = \{0, \pm 9, \pm 18, \dots.\} = 9\mathbb{Z}.$$

Definisi 2.62

Misalkan R adalah daerah ideal utama dan M adalah suatu R-modul.

1. Jika N adalah suatu submodul dari M, maka sebarang pembangun dari $ann(N)$ disebut orde dari N.
2. Orde dari suatu unsur $v \in M$ adalah orde dari submodul $\langle\langle v \rangle\rangle$.

(Roman, 2008:139).

Berdasarkan Definisi 2.62 bagian 1 dapat diketahui bahwa r adalah orde dari N jika dan hanya jika $\langle r \rangle = ann(N)$.

Contoh 2.63

1. Orde dari $\mathbb{Z}_6$ sebagai $\mathbb{Z}$-modul adalah 6 karena $ann(\mathbb{Z}_6)$ dapat dibangun dari unsur 6 di $\mathbb{Z}$, yaitu $\langle 6 \rangle = ann(\mathbb{Z}_6)$.
2. Orde dari $\mathbb{Z}_9$ sebagai $\mathbb{Z}$-modul adalah 9 karena $ann(\mathbb{Z}_9)$ dapat dibangun dari unsur 9 di $\mathbb{Z}$, yaitu $\langle 9 \rangle = ann(\mathbb{Z}_9)$.

2.8 Modul Primer dan Siklis

Definisi 2.64

Misalkan p adalah unsur prima di R. Suatu R-modul dikatakan p-primer (atau hanya primer) jika ordernya adalah suatu perpangkatan dari p (Roman, 2008:147).

Contoh 2.65

Pandang $\mathbb{Z}_9$ sebagai $\mathbb{Z}$-modul. $\mathbb{Z}_9$ merupakan modul primer karena orde dari $\mathbb{Z}_9$ merupakan perpangkatan dari suatu unsur prima di $\mathbb{Z}$, yaitu $9 = 3^2$.

Definisi 2.66

R-modul M dikatakan siklis jika $M = \langle\langle m\rangle\rangle$ untuk suatu unsur $m \in M$ (Adkins dan Weintraub, 1992:115).

Contoh 2.67

$2\mathbb{Z}$ sebagai $\mathbb{Z}$-modul merupakan modul siklis karena setiap unsur di $2\mathbb{Z}$ dapat dibangun dari unsur 2 di $2\mathbb{Z}$, yaitu $2\mathbb{Z} = \langle\langle 2\rangle\rangle$.

Definisi 2.68

Misalkan M adalah suatu R-modul. Suatu submodul yang berbentuk

$$\langle\langle v\rangle\rangle = R \cdot v = \{r \cdot v \mid r \in R\}$$

untuk $v \in M$ disebut submodul siklis yang dibangun oleh v (Roman, 2008:113).

Contoh 2.69

Pada $\mathbb{Z}$ sebagai $\mathbb{Z}$-modul, $2\mathbb{Z}$ merupakan submodul siklis dari $\mathbb{Z}$ yang dibangun oleh 2.

2.9 Homomorfisma pada Modul

Definisi 2.70

Misalkan R adalah suatu gelanggang dan misalkan M dan N adalah R-modul. Suatu pemetaan $\varphi : M \to N$ adalah homomorfisma modul jika memenuhi syarat berikut:

1. $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, untuk semua $x, y \in M$ dan

2. $\varphi(r \cdot x) = r \cdot \varphi(x)$, untuk semua $x \in M$ dan $r \in R$.

(Dummit dan Foote, 2004:345).

Contoh 2.71

Pandang $\mathbb{Z}$ dan $\mathbb{Z}[x]$ sebagai $\mathbb{Z}$-modul. Pemetaan $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}[x]$ yang didefinisikan dengan $\varphi(a) = ax^2$ merupakan suatu homomorfisma modul karena untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$ dan $r \in \mathbb{Z}$ berlaku

1. $\varphi(a + b) = (a + b)x^2 = ax^2 + bx^2 = \varphi(a) + \varphi(b)$ dan
2. $\varphi(ra) = (ra)x^2 = r(ax^2) = r\varphi(a)$.

Definisi 2.72

Misalkan M dan N adalah R-modul dan $\varphi : M \rightarrow N$ adalah suatu R-homomorfisma. *Kernel* dan bayangan dari φ didefinisikan sebagai berikut:

$$\ker(\varphi) = \{m \in M \mid \varphi(m) = 0\} \text{ dan}$$

$$\operatorname{im}(\varphi) = \{\varphi(m) | m \in M\}$$

(Roman, 2008:117).

Contoh 2.73

Pada Contoh 2.71, $\ker(\varphi) = \{0\}$ dan $\operatorname{im}(\varphi) = \{ax^2 | a \in \mathbb{Z}\}$.

Teorema 2.74

Jika M dan N adalah R-modul dan $\varphi : M \rightarrow N$ adalah suatu R-homomorfisma, maka $\ker(\varphi)$ adalah submodul dari M (Roman, 2008:117).

Bukti :

Misalkan M dan N adalah R-modul dan $\varphi : M \rightarrow N$ adalah suatu R-homomorfisma. Akan ditunjukkan bahwa: 1) $\ker(\varphi)$ adalah subhimpunan tak kosong dari M dan 2) untuk sebarang $x, y \in \ker(\varphi)$ dan $r, s \in R$ diperoleh $r \cdot x + s \cdot y \in \ker(\varphi)$.

1) Pilih $0 \in M$. Perhatikan bahwa $\varphi(0) = 0$. Akibatnya, $0 \in \ker(\varphi)$. Hal ini berarti bahwa $\ker(\varphi)$ tak kosong.

   Selanjutnya, karena untuk sebarang $x \in \ker(\varphi)$ diperoleh $x \in M$, maka $\ker(\varphi) \subseteq M$.

2) Misalkan $x, y \in \ker(\varphi)$ dan $r, s \in R$. Hal ini berarti bahwa $x, y \in M$ dan $\varphi(x) = \varphi(y) = 0$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\varphi(r \cdot x + s \cdot y) &= \varphi(r \cdot x) + \varphi(s \cdot y)\\ &= r \cdot \varphi(x) + s \cdot \varphi(y)\\ &= r \cdot 0 + s \cdot 0\end{aligned}$$

   Karena $\varphi(r \cdot x + s \cdot y)$, maka $r \cdot x + s \cdot y \in \ker(\varphi)$.

Berdasarkan 1) dan 2) diperoleh bahwa $\ker(\varphi)$ submodul M.

Definisi 2.75

Misalkan M dan N adalah R-modul dan fungsi $\varphi : M \to N$ adalah suatu R-homomorfisma. Suatu R-monomorfisma adalah R-homomorfisma yang injektif (Roman, 2008:117).

Contoh 2.76

Pandang $\mathbb{Z}$ sebagai $\mathbb{Z}$-modul. Pemetaan $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ yang didefinisikan dengan $\varphi(a) = 2a$ merupakan $\mathbb{Z}$-monomorfisma karena:

1) φ merupakan $\mathbb{Z}$-homomorfisma, yaitu untuk semua $a, b \in \mathbb{Z}$ dan $r \in \mathbb{Z}$ berlaku:
   a) $\varphi(a + b) = 2(a + b) = 2a + 2b = \varphi(a) + \varphi(b)$, dan
   b) $\varphi(ra) = 2(ra) = (2r)a = (r2)a = r(2a) = r\varphi(a)$
2) Berdasarkan Contoh 2.6, φ injektif.

Definisi 2.77

Misalkan M dan N adalah R-modul dan fungsi $\varphi : M \rightarrow N$ adalah suatu R-homomorfisma. Suatu R-epimorfisma adalah R-homomorfisma yang surjektif (Roman, 2008:117).

Contoh 2.78

Pandang $\mathbb{Z}$ sebagai $\mathbb{Z}$-modul. Pemetaan $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ yang didefinisikan dengan $\varphi(a) = -a$ merupakan suatu R-epimorfisma karena φ merupakan suatu R-homomorfisma yang surjektif, yaitu untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$ dan $r \in R$ berlaku

1. $\varphi(a + b) = -(a + b) = -a + (-b) = \varphi(a) + \varphi(b)$,
2. $\varphi(ra) = -(ra) = r(-a) = r\varphi(a)$, dan
3. Untuk setiap $b \in \mathbb{Z}$ terdapat $(-b) \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $\varphi(-b) = -(-b) = b$.

Definisi 2.79

Misalkan R adalah suatu gelanggang dan misalkan M dan N adalah R-modul. Suatu homomorfisma modul adalah isomorfisma jika φ bersifat injektif dan surjektif. M dan N dikatakan isomorfik dan dinotasikan dengan $M \cong N$ jika terdapat isomorfisma $\varphi : M \rightarrow N$ (Dummit dan Foote, 2004:345).

Contoh 2.80

Pandang $\mathbb{Z}$ sebagai $\mathbb{Z}$-modul. Pemetaan $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ yang didefinisikan dengan $\varphi(a) = -a$ merupakan $\mathbb{Z}$-isomorfisma karena:

1) φ merupakan suatu R-homomorfisma yang surjektif sebagaimana pada Contoh 2.78, dan

2) φ bersifat injektif, yaitu untuk semua $a, b \in \mathbb{Z}$ dengan $\varphi(a) = \varphi(b)$ diperoleh

$-a = -b$

$\Leftrightarrow a = b$

2.10 Modul Hasil Bagi

Teorema 2.81

Misalkan M adalah R-modul dan S adalah submodul dari M. Himpunan koset-koset

$$M/S = \{v + S \mid v \in M\}$$

bersama operasi penjumlahan

$$(u + S) + (v + S) = (u + v) + S$$

dan perkalian skalar

$$r \cdot (u + S) = r \cdot u + S$$

untuk setiap $r \in R$ dan $u + S, v + S \in M/S$ adalah R-modul (Roman, 2008:119).

Bukti :

Misalkan R adalah gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan M adalah R-modul dan S adalah submodul dari M. Untuk membuktikan bahwa M/S adalah R-modul, akan ditunjukkan bahwa: 1) $(M/S, +)$ adalah grup abelian dan 2) operasi perkalian skalar dari R pada M/S memenuhi aksioma perkalian skalar pada modul sebagaimana Definisi 2.43 bagian (2).

1) Untuk menunjukkan bahwa $(M/S, +)$ adalah grup abelian, akan ditunjukkan bahwa: a) $+$ merupakan operasi biner di M/S, b) operasi $+$

bersifat asosiatif di M/S, c) M/S memuat unsur identitas terhadap operasi $+$, d) M/S memuat invers setiap unsur terhadap operasi $+$, dan e) operasi $+$ bersifat komutatif di M/S.

a) Misalkan $u+S, v+S \in M/S$. Berdasarkan definisi operasi $+$ pada M/S, diperoleh $(u+S)+(v+S)=(u+v)+S$. Karena $u+v \in M$, maka $(u+v)+S \in M/S$. Akibatnya, diperoleh $(u+S)+(v+S) \in M/S$. Karena untuk sebarang $u+S, v+S \in M/S$ diperoleh $(u+S)+(v+S) \in M/S$, maka operasi $+$ bersifat tertutup di M/S. Dengan demikian, $+$ merupakan operasi biner di M/S.

b) Misalkan $u+S, v+S, w+S \in M/S$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\big((u+S)+(v+S)\big)+(w+S) &= \big((u+v)+S\big)+(w+S) \\
&= \big((u+v)+v\big)+S \\
&= \big(u+(v+w)\big)+S \\
&= (u+S)+\big((v+w)+S\big) \\
&= (u+S)+\big((v+S)+(w+S)\big)
\end{aligned}$$

Karena untuk sebarang $u+S, v+S, w+S \in M/S$ diperoleh $\big((u+S)+(v+S)\big)+(w+S)=(u+S)+\big((v+S)+(w+S)\big)$, maka operasi $+$ bersifat asosiatif di M/S.

c) Karena terdapat $0+S \in M/S$ sehingga untuk semua $v+S \in M/S$ berlaku $(v+S)+(0+S)=(0+S)+(v+S)=v+S$, maka M/S memuat unsur identitas terhadap operasi $+$.

d) Karena untuk setiap $v+S \in M/S$ terdapat $-v+S \in M/S$ sehingga $(v+S)+(-v+S)=(-v+S)+(v+S)=0+S$, maka M/S memuat invers setiap unsur terhadap operasi $+$.

e) Misalkan $u+S, v+S \in M/S$. Perhatikan bahwa

$$
\begin{aligned}
(u+S)+(v+S) &= (u+v)+S \\
&= (v+u)+S \\
&= (v+S)+(u+S)
\end{aligned}
$$

Karena untuk sebarang $u+S, v+S \in M/S$ diperoleh $(u+S)+(v+S)=(v+S)+(u+S)$, maka operasi $+$ bersifat komutatif di M/S.

Berdasarkan a), b), c), d), dan e), maka $(M/S, +)$ adalah grup abelian.

2) Misalkan $u+S, v+S \in M/S$ dan $r, s \in R$. Perhatikan bahwa

a)
$$
\begin{aligned}
(r+s)\cdot(u+S) &= \big((r+s)\cdot u\big)+S \\
&= (r\cdot u+s\cdot u)+S \\
&= \big((r\cdot u)+S\big)+\big((s\cdot u)+S\big) \\
&= \big(r\cdot(u+S)\big)+\big(s\cdot(u+S)\big)
\end{aligned}
$$

b)
$$
\begin{aligned}
(r\times s)\cdot(u+S) &= \big((r\times s)\cdot u\big)+S \\
&= \big(r\cdot(s\cdot u)\big)+S \\
&= r\cdot\big((s\cdot u)+S\big) \\
&= r\cdot\big(s\cdot(u+S)\big)
\end{aligned}
$$

c)
$$
\begin{aligned}
r\cdot\big((u+S)+(v+S)\big) &= r\cdot\big((u+v)+S\big) \\
&= \big(r\cdot(u+v)\big)+S \\
&= (r\cdot u+r\cdot v)+S
\end{aligned}
$$

$$= \big((r \cdot u) + S\big) + \big((r \cdot v) + S\big)$$

$$= \big(r \cdot (u + S)\big) + \big(r \cdot (v + S)\big)$$

d) $1 \cdot (u + S) = (1 \cdot u) + S$

$$= u + S$$

Berdasarkan a), b), c), dan d), maka operasi perkalian skalar dari R pada M/S memenuhi aksioma perkalian skalar pada modul.

Berdasarkan 1) dan 2) diperoleh bahwa M/S adalah R-modul.

Definisi 2.82

Misalkan M adalah R-modul dan S adalah submodul dari M. Himpunan koset-koset M/S disebut modul hasil bagi dari M oleh S (Roman, 2008:119).

Contoh 2.83

Pada $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}$-modul dapat dipilih submodul $4\mathbb{Z}$ dan dibentuk himpunan koset-koset $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{0 + 4\mathbb{Z}, 1 + 4\mathbb{Z}, 2 + 4\mathbb{Z}, 3 + 4\mathbb{Z}\}$. Himpunan $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ yang operasi penjumlahan dan perkalian skalarnya didefinisikan dengan

$$(a + 4\mathbb{Z}) + (b + 4\mathbb{Z}) = (a + b) + 4\mathbb{Z}$$

dan

$$r(a + 4\mathbb{Z}) = ra + 4\mathbb{Z}$$

untuk setiap $r \in \mathbb{Z}$ dan $a + 4\mathbb{Z}, b + 4\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ merupakan modul hasil bagi dari $\mathbb{Z}$ oleh $4\mathbb{Z}$.

Teorema 2.84

Misalkan M dan N adalah R-modul.

Jika pemetaan $\varphi : M \to N$ adalah suatu R-homomorfisma, maka $M/\ker(\varphi) \cong \mathrm{im}(\varphi)$.

Bukti :

Misalkan M dan N adalah R-modul dan $\varphi : M \to N$ adalah suatu R-homomorfisma. Untuk membuktikan bahwa $M/\ker(\varphi) \cong \operatorname{im}(\varphi)$, akan ditunjukkan bahwa: 1) $\ker(\varphi)$ adalah submodul M dan 2) terdapat R-isomorfisma $\varphi' : M/\ker(\varphi) \to \operatorname{im}(\varphi)$.

1) Berdasarkan Teorema 2.74 diperoleh bahwa $\ker(\varphi)$ adalah submodul M.
2) Misalkan $\varphi' : M/\ker(\varphi) \to \operatorname{im}(\varphi)$ adalah suatu pengaitan yang didefinisikan dengan $\varphi'\big(x + \ker(\varphi)\big) = \varphi(x)$, untuk setiap $x + \ker(\varphi) \in M/\ker(\varphi)$. Untuk menunjukkan bahwa φ' adalah suatu R-isomorfisma, akan ditunjukkan bahwa: a) φ' adalah suatu pemetaan, b) φ' adalah suatu R-homomorfisma, c) φ' injektif, dan d) φ' surjektif.
   a) Misalkan $x + \ker(\varphi), y + \ker(\varphi) \in M/\ker(\varphi)$ dengan $x + \ker(\varphi) = y + \ker(\varphi)$.

      Karena $x + \ker(\varphi) = y + \ker(\varphi)$ dan $\ker(\varphi)$ adalah submodul M, maka $x - y \in \ker(\varphi)$. Hal ini berarti bahwa $x - y \in M$ dan $\varphi(x - y) = 0$. Karena φ adalah suatu R-homomorfisma, maka diperoleh $\varphi(x) - \varphi(y) = 0$. Akibatnya, diperoleh $\varphi(x) = \varphi(y)$. Selanjutnya, berdasarkan definisi pengaitan φ', diperoleh $\varphi'\big(x + \ker(\varphi)\big) = \varphi'\big(y + \ker(\varphi)\big)$.

      Karena untuk sebarang $x + \ker(\varphi), y + \ker(\varphi) \in M/\ker(\varphi)$ dengan $x + \ker(\varphi) = y + \ker(\varphi)$ diperoleh $\varphi'\big(x + \ker(\varphi)\big) = \varphi'\big(y + \ker(\varphi)\big)$, maka φ' adalah suatu pemetaan.
   b) Misalkan $x + \ker(\varphi), y + \ker(\varphi) \in M/\ker(\varphi)$ dan $r \in R$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\varphi'\big(x+\ker(\varphi)+y+\ker(\varphi)\big) &= \varphi'\big((x+\mathrm{y})+\ker(\varphi)\big)\\ &= \varphi(x+y)\\ &= \varphi(x)+\varphi(y)\\ &= \varphi'\big(x+\ker(\varphi)\big)+\\ &\quad\ \varphi'\big(y+\ker(\varphi)\big)\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\varphi'\Big(r\cdot\big(x+\ker(\varphi)\big)\Big) &= \varphi'\big(r\cdot x+\ker(\varphi)\big)\\ &= \varphi(r\cdot x)\\ &= r\cdot\varphi(x)\\ &= r\cdot\varphi'\big(x+\ker(\varphi)\big)\end{aligned}$$

Karena untuk sebarang $x+\ker(\varphi), y+\ker(\varphi)\in M/\ker(\varphi)$ dan $r\in R$ diperoleh

$$\begin{aligned}\varphi'\big(x+\ker(\varphi)+y+\ker(\varphi)\big) &= \varphi'\big(x+\ker(\varphi)\big)+\\ &\quad\ \varphi'\big(y+\ker(\varphi)\big)\end{aligned}$$

dan $\varphi'\Big(r\cdot\big(x+\ker(\varphi)\big)\Big)=r\cdot\varphi'\big(x+\ker(\varphi)\big)$, maka φ' adalah suatu R-homomorfisma.

c) Misalkan $x+\ker(\varphi), y+\ker(\varphi)\in M/\ker(\varphi)$ dengan $\varphi'\big(x+\ker(\varphi)\big)=\varphi'\big(y+\ker(\varphi)\big)$. Berdasarkan definisi pemetaan φ' diperoleh $\varphi(x)=\varphi(y)$. Perhatikan bahwa

$$\varphi(x)=\varphi(y)\Leftrightarrow\varphi(x)-\varphi(y)=0\Leftrightarrow\varphi(x-y)=0.$$

Hal ini berarti bahwa $x-y\in\ker(\varphi)$. Karena $\ker(\varphi)$ adalah submodul dari M, maka diperoleh $x+\ker(\varphi)=y+\ker(\varphi)$.

Karena untuk sebarang $x + \ker(\varphi), y + \ker(\varphi) \in M/\ker(\varphi)$ dengan $\varphi'\big(x + \ker(\varphi)\big) = \varphi'\big(y + \ker(\varphi)\big)$ diperoleh $x + \ker(\varphi) = y + \ker(\varphi)$, maka φ' injektif.

d) Misalkan $b \in \operatorname{im}(\varphi)$. Dengan demikian, terdapat $a \in M$ sehingga $\varphi(a) = b$. Karena $a \in M$, maka $a + \ker(\varphi) \in M/\ker(\varphi)$. Akibatnya, $\varphi'\big(a + \ker(\varphi)\big) = \varphi(a) = b$.

Karena untuk sebarang $b \in \operatorname{im}(\varphi)$ terdapat $a + \ker(\varphi)$ sehingga $\varphi'\big(a + \ker(\varphi)\big) = b$, maka φ' surjektif.

Berdasarkan a), b), c), dan d) diperoleh bahwa pengaitan $\varphi' : M/\ker(\varphi) \to \operatorname{im}(\varphi)$ adalah suatu R-isomorfisma.

Berdasarkan 1) dan 2) terbukti bahwa jika pemetaan $\varphi : M \to N$ adalah suatu R-homomorfisma, maka $M/\ker(\varphi) \cong \operatorname{im}(\varphi)$.

2.11 Jumlah Langsung pada Modul

Definisi 2.85

Suatu R-modul M adalah jumlah langsung (eksternal) dari suatu kumpulan dari submodul-submodul $\mathcal{F} = \{S_i \mid i \in I\}$ di M, ditulis

$$M = \bigoplus \mathcal{F} \text{ atau } M = \bigoplus_{i \in I} S_i$$

jika hal-hal berikut terpenuhi:

1. (*Join of the family*) M adalah jumlah (join) dari kumpulan $\mathcal{F}$, yaitu:

$$M = \sum_{i \in I} S_i$$

2. (*Independence of the family*) Untuk setiap $i \in I$,

$$S_i \cap \left(\sum_{j \neq i \in I} S_j \right) = \{0\}$$

(Roman, 2008:119-120).

Dalam kasus ini, setiap S_i disebut suku langsung dari M. Jika $\mathcal{F} = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ suatu kumpulan yang berhingga, jumlah langsung biasa ditulis $M = S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots \oplus S_n$. Selanjutnya, jika $M = S \oplus T$, maka S disebut terkomplemen dan T disebut komplemen dari S di M (Roman, 2008:120).

Contoh 2.86

Pandang $\mathbb{Z}^3 = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\}$ sebagai $\mathbb{Z}$-modul. $\mathbb{Z}^3$ adalah jumlah langsung dari submodul-submodul

$S_1 = \{(a, 0, 0) \mid a \in \mathbb{Z}\}$,

$S_2 = \{(0, b, 0) \mid b \in \mathbb{Z}\}$, dan

$S_3 = \{(0, 0, c) \mid c \in \mathbb{Z}\}$

karena $\mathbb{Z}^3 = S_1 + S_2 + S_3$, yaitu $\mathbb{Z}^3 \subseteq S_1 + S_2 + S_3$ dan $S_1 + S_2 + S_3 \subseteq \mathbb{Z}^3$, dan untuk setiap $i = 1,2,3$ berlaku $S_i \cap \left(\sum_{j \neq i \in I} S_j\right) = \{0\}$. Jelas bahwa $S_1 + S_2 + S_3 \subseteq \mathbb{Z}^3$. Untuk menunjukkan $\mathbb{Z}^3 \subseteq S_1 + S_2 + S_3$, misalkan $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ dengan $x, y, z \in \mathbb{Z}$. Perhatikan bahwa $(x, y, z) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z) \in \mathbb{Z}^3$. Adapun untuk menunjukkan $S_1 \cap S_2 + S_3 = \{0\}$, misalkan $x \in S_1 \cap S_2 + S_3$. Hal ini berarti bahwa $x \in S_1$ dan $S_2 + S_3$. Untuk $x \in S_1$, tulis $x = (a, 0, 0)$, dengan $a \in \mathbb{Z}$. Untuk $x \in S_2 + S_3$, tulis $x = (0, b, c)$, dengan $b, c \in \mathbb{Z}$. Akibatnya, $(a, 0, 0) = (0, b, c)$ dan diperoleh $a = b = c = 0$. Dengan cara yang sama diperoleh $S_2 \cap S_1 + S_3 = \{0\}$ dan $S_3 \cap S_1 + S_2 = \{0\}$.

Teorema 2.87

Misalkan M adalah R-modul dan $\mathcal{F} = \{S_i \mid i \in I\}$ adalah kumpulan dari submodul-submodul yang berbeda dari M. Pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen:

1) Untuk setiap $i \in I$,

$$S_i \cap \left(\sum_{j \neq i} S_j \right) = \{0\}$$

2) Unsur nol tidak bisa ditulis sebagai jumlah dari unsur-unsur taknol dari submodul-submodul yang berbeda di $\mathcal{F}$.

3) Setiap unsur taknol $v \in M$ hanya dapat dituliskan secara tunggal sebagai penjumlahan unsur-unsur di submodul-submodul yang berbeda di $\mathcal{F}$, yaitu jika

$$v = s_1 + s_2 + \cdots + s_n$$

dengan $s_i \in S_i$ dan jika

$$v = t_1 + t_2 + \cdots + t_m$$

dengan $t_i \in S_i$, maka $m = n$ dan $s_i = t_i$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$.

(Roman, 2008:120).

Bukti :

Misalkan M adalah R-modul dan $\mathcal{F} = \{S_i \mid i \in I\}$ adalah kumpulan dari submodul-submodul yang berbeda dari M.

1) ⇒2) Misalkan untuk setiap $i \in I$ berlaku $S_i \cap \left(\sum_{j \neq i} S_j \right) = \{0\}$. Andaikan 2) tidak berlaku, yaitu

$$0 = s_{j_1} + \cdots + s_{j_n}$$

dengan s_{j_i} adalah unsur-unsur taknol dari submodul-submodul yang berbeda S_{j_i}. Dengan mengambil $n > 1$, maka diperoleh $-s_{j_1} = s_{j_2} + \cdots + s_{j_n}$. Hal ini berarti bahwa dengan mengambil $s_{j_1} \neq 0$ untuk $i = 2, \dots, n$ berlaku $\sum_{i=2}^{n} s_{j_1} \neq 0$. Hal ini kontradiksi dengan $S_i \cap \left(\sum_{j\neq i} S_j\right) = \{0\}$. Dengan demikian, haruslah $0 \neq s_{j_1} + \cdots + s_{j_n}$.

2) ⇒3) Misalkan 2) dipenuhi dan unsur taknol $v \in M$ dapat dituliskan ke dalam bentuk

$$v = s_1 + s_2 \dots + s_n \text{ dan } v = t_1 + t_2 \dots + t_m$$

dengan s_i berada pada submodul-submodul berbeda di $\mathcal{F}$ dan demikian pula dengan t_i. Dengan demikian, diperoleh

$$0 = s_1 + s_2 \dots + s_n - t_1 - t_2 - \cdots - t_m.$$

Dengan mengelompokkan suku-suku dari submodul-submodul yang sama, diperoleh

$$0 = \left(s_{i_1} - t_{i_1}\right) + \cdots + \left(s_{i_k} - t_{i_k}\right) + \cdots + \left(s_{i_n} - t_{i_m}\right).$$

Akibatnya, dari 2) diperoleh $n = m = k$ dan $s_{i_u} = t_{i_u}$ untuk semua $u = 1, 2, \dots, k$.

3) ⇒1) Misalkan 3) dipenuhi dan $v \in S_i \cap \left(\sum_{j\neq i} S_j\right)$. Andaikan $v \neq 0$. Karena $v \in S_i \cap \left(\sum_{j\neq i} S_j\right)$, maka $v \in S_i$ dan $v \in \sum_{j\neq i} S_j$. Untuk $v \in S_i$, tulis $v = s_i$. Sedangkan untuk $v \in \sum_{j\neq i} S_j$, tulis

$$v = s_1 + s_2 + \cdots + s_{i-1} + s_{i+1} + \cdots + s_n$$

dengan $0 \neq s_j \in S_j$ untuk semua $j = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n$. Dengan demikian, diperoleh

$$v = 0 + 0 + \cdots + 0 + s_i + 0 + \cdots + 0$$

dan

$$v = s_1 + s_2 + \cdots + s_{i-1} + 0 + s_{i+1} + \cdots + s_n$$

dengan s_i dan s_j taknol. Hal ini kontradiksi dengan 3) karena dari 3) diperoleh bahwa $s_i = s_j = 0$. Dengan demikian, haruslah $v = 0$. Karena untuk sebarang $v \in S_i \cap \left(\sum_{j \neq i} S_j\right)$ diperoleh $v = 0$, maka $S_i \cap \left(\sum_{j \neq i} S_j\right) = \{0\}$.

Teorema 2.88

Jika S adalah submodul terkomplemen dari M, maka semua komplemen dari S isomorfik dengan M/S (Roman, 2008:121).

Bukti :

Misalkan M adalah R-modul, $M = S \oplus T$, dan $f : M \rightarrow T$ adalah pengaitan yang didefinisikan dengan $f(m) = b$, untuk semua $m = a + b$, $a \in S$, dan $b \in T$. Menggunakan Teorema 2.84, untuk membuktikan bahwa $M/S \cong T$, akan ditunjukkan bahwa: 1) f adalah suatu R-homomorfisma, 2) $T = \text{im}(f)$, dan 3) $S = \ker(f)$.

1) Untuk menunjukkan bahwa f adalah suatu R-homomorfisma, akan ditunjukkan bahwa a) f adalah suatu pemetaan, b) untuk semua $m_1, m_2 \in M$ dan $r \in R$ berlaku $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$ dan $f(r \cdot m_1) = r \cdot f(m_1)$.

   a) Misalkan $m_1, m_2 \in M$ dengan $m_1 = m_2$. Karena $m_1, m_2 \in M$, maka $m_1 = a_1 + b_1$ dan $m_2 = a_2 + b_2$ untuk suatu $a_1, a_2 \in S$ dan $b_1, b_2 \in T$. Akibatnya, diperoleh $a_1 + b_1 = a_2 + b_2$. Berdasarkan Teorema 2.87 diperoleh $a_1 = a_2$ dan $b_1 = b_2$. Perhatikan bahwa $b_1 = b_2 \Leftrightarrow f(m_1) = f(m_2)$.

Karena untuk sebarang $m_1, m_2 \in M$ dengan $m_1 = m_2$ diperoleh $f(m_1) = f(m_2)$, maka f adalah suatu pemetaan.

b) Misalkan $m_1, m_2 \in M$ dan $r \in R$. Karena $m_1, m_2 \in M$, maka $m_1 = a_1 + b_1$ dan $m_2 = a_2 + b_2$ untuk suatu $a_1, a_2 \in S$ dan $b_1, b_2 \in T$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} f(m_1 + m_2) &= f\big((a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)\big) \\ &= \big((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\big) \\ &= b_1 + b_2 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} f(r \cdot m_1) &= f\big(r \cdot (a_1 + b_1)\big) \\ &= f(r \cdot a_1 + r \cdot b_1) \\ &= r \cdot b_1 \\ &= r \cdot f(m_1) \end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh bahwa untuk semua $m_1, m_2 \in M$ dan $r \in R$ berlaku $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$ dan $f(r \cdot m_1) = r \cdot f(m_1)$.

Berdasarkan a) dan b) diperoleh bahwa f adalah suatu R-homomorfisma.

2) Untuk menunjukkan bahwa $T = \text{im}(f)$, akan ditunjukkan bahwa f surjektif.

Misalkan $b \in T$. Karena S adalah submodul dari M, maka $0 \in S$. Selanjutnya, pilih $0 \in S$. Akibatnya, diperoleh $0 + b \in M$. Misalkan $0 + b = m$. Dengan demikian, $f(m) = b$.

Karena untuk sebarang $b \in T$ terdapat $m \in M$ sehingga $f(m) = b$, maka f surjektif.

3) Jelas bahwa $\ker(f) \subseteq S$. Sebaliknya, misalkan $a \in S$. Perhatikan bahwa $f(a) = f(a + 0) = 0$. Dengan demikian diperoleh $a \in \ker(f)$. Karena untuk sebarang $a \in S$ diperoleh $a \in \ker(f)$, maka $S \subseteq \ker(f)$. Lebih lanjut, karena $\ker(f) \subseteq S$ dan $S \subseteq \ker(f)$, maka $S = \ker(f)$.

Berdasarkan 1), 2), dan 3), terbukti bahwa $M/S \cong T$.

Teorema 2.89

Misalkan R adalah gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan dan M adalah R-modul. Jika $\sigma : M \to F$ adalah suatu R-epimorfisma dan F adalah bebas, maka $\ker(\sigma)$ terkomplemen dan

$$M = \ker(\sigma) \oplus N$$

dengan $N \cong F$ (Roman, 2008:132).

Bukti :

Misalkan R adalah gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan, M adalah R-modul, $\sigma : M \to F$ adalah suatu R-epimorfisma dan $F \cong N$ adalah bebas dengan basis B. Dengan demikian, dapat dibuat suatu R-homomorfisma $\delta : F \to M$ yang didefinisikan dengan $\delta(b_i) = a_i$ untuk semua $b_i \in B$ dan jika $x \in F$ dengan $x = \sum_{i=1}^{n} r_i \cdot b_i$, maka $\delta(x) = \sum_{i=1}^{n} r_i \cdot a_i$. Selanjutnya, misalkan $N = \mathrm{im}(\delta)$. Untuk membuktikan bahwa $M = \ker(\sigma) \oplus N$, akan ditunjukkan bahwa: 1) $M = \ker(\sigma) + \mathrm{im}(\delta)$ dan 2) $\ker(\sigma) \cap \mathrm{im}(\delta) = \{0\}$.

1) Karena $\ker(\sigma)$ dan $\operatorname{im}(\delta)$ adalah subhimpunan dari M, maka $\ker(\sigma) + \operatorname{im}(\delta) \subseteq M$. Sebaliknya, misalkan $x \in M$. Tulis $x = x + \delta(\sigma(x)) - \delta(\sigma(x))$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \sigma\left(x - \delta(\sigma(x))\right) &= \sigma(x) - \sigma\left(\delta(\sigma(x))\right) \\ &= \sigma(x) - \sigma\delta(\sigma(x)) \\ &= \sigma(x) - \sigma(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Hal ini berarti bahwa $x - \delta(\sigma(x)) \in \ker(\sigma)$. Karena $\delta(\sigma(x)) \in \operatorname{im}(\delta)$, maka $x \in \ker(\sigma) + \operatorname{im}(\delta)$. Lebih lanjut, karena untuk sebarang $x \in M$ diperoleh $x \in \ker(\sigma) + \operatorname{im}(\delta)$, maka $M \subseteq \ker(\sigma) + \operatorname{im}(\delta)$.

Karena $\ker(\sigma) + \operatorname{im}(\delta) \subseteq M$ dan $M \subseteq \ker(\sigma) + \operatorname{im}(\delta)$, maka $M = \ker(\sigma) + \operatorname{im}(\delta)$.

2) Misalkan $y \in \ker(\sigma) \cap \operatorname{im}(\delta)$. Hal ini berarti bahwa $y \in \ker(\sigma)$ dan $y \in \operatorname{im}(\delta)$. Karena $y \in \ker(\sigma)$, maka $y \in M$ dan $\sigma(y) = 0$. Selanjutnya, karena $y \in \operatorname{im}(\delta)$, maka $y = \delta(a)$, untuk suatu $a \in F$. Dengan demikian, diperoleh $0 = \sigma(y) = \sigma\delta(a) = a$. Karena δ adalah suatu R-homomorfisma, maka $y = \delta(a) = \delta(0) = 0$.

Karena untuk sebarang $y \in \ker(\sigma) \cap \operatorname{im}(\delta)$ diperoleh $y = 0$, maka $\ker(\sigma) \cap \operatorname{im}(\delta) = \{0\}$.

Berdasarkan 1) dan 2), maka terbukti bahwa $M = \ker(\sigma) \oplus N$.

2.12 Hubungan Konsep Bebas dan Bebas Torsi pada Modul Atas Daerah Integral dan Daerah Ideal Utama

Sebelum melakukan kajian tentang dekomposisi modul yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama, penulis terlebih dahulu melakukan kajian tentang hubungan antara modul bebas dan bebas torsi pada modul atas daerah integral dan daerah ideal utama. Jika M adalah daerah integral, maka M_{tor} adalah submodul dari M dan M/M_{tor} adalah bebas torsi. Adapun modul bebas atas daerah integral adalah bebas torsi. Hal tersebut berturut-turut terangkum dalam Proposisi 2.90, 2.91, dan 2.92 sebagai berikut:

Proposisi 2.90

Misalkan M adalah R-modul.

Didefinisikan $M_{tor} = \{v \in M \mid v = 0 \text{ atau } v \text{ unsur torsi }\}$.

Jika R adalah daerah integral, maka M_{tor} adalah submodul dari M.

Bukti :

Misalkan R adalah daerah integral, M adalah R-modul, $r, s \in R$, dan $v, w \in M_{tor}$.

Menggunakan Teorema 2.47, akan ditunjukkan bahwa: 1) M_{tor} subhimpunan tak kosong dari M dan 2) M_{tor} tertutup terhadap kombinasi linier dengan unsur-unsur di R, yaitu $(r \cdot v) + (s \cdot w) \in M_{tor}$.

1) Berdasarkan definisi M_{tor}, jelas bahwa $M_{tor} \subseteq M$.

   Karena terdapat $0 \in M_{tor}$ maka $M_{tor} \neq \emptyset$.

   Dengan demikian, M_{tor} adalah subhimpunan tak kosong dari M.

2) Asumsikan bahwa $v \neq 0$. Dengan demikian, v adalah unsur torsi.

   Hal ini berarti bahwa terdapat $0 \neq \alpha \in R$ sedemikian sehingga

$$\alpha \cdot v = 0.$$

Perhatikan 2 kasus berikut:

i. Kasus $w = 0$

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot \big((r \cdot v) + (s \cdot w)\big) &= \big(\alpha \cdot (r \cdot v)\big) + \big(\alpha \cdot (s \cdot w)\big) \\
&= \big((\alpha \times r) \cdot v\big) + \big((\alpha \times s) \cdot w\big) \\
&= \big((r \times \alpha) \cdot v\big) + 0 \\
&= r \times (\alpha \cdot v) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Karena $\alpha \neq 0$, maka $(r \cdot v) + (s \cdot w) \in M_{tor}$.

ii. Kasus w adalah unsur torsi

Jika w unsur torsi, maka terdapat $0 \neq \beta \in R$ sedemikian sehingga $\beta \cdot w = 0$.

Karena $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, dan R adalah daerah ideal, maka $\alpha \times \beta \neq 0$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
(\alpha \times \beta) \cdot \big((r \cdot v) + (s \cdot w)\big) &= \big((\alpha \times \beta) \cdot (r \cdot v)\big) + \\
&\quad \big((\alpha \times \beta) \cdot (s \cdot w)\big) \\
&= \big((\alpha \times \beta \times r) \cdot v\big) + \big((\alpha \times \beta \times s) \cdot w\big) \\
&= \big((\beta \times r \times \alpha) \cdot v\big) + \big((\alpha \times s \times \beta) \cdot w\big) \\
&= \big((\beta \times r) \cdot (\alpha \cdot v)\big) + \\
&\quad \big((\alpha \times s) \cdot (\beta \cdot w)\big) \\
&= 0 + 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Karena $\alpha \times \beta \neq 0$, maka $(r \cdot v) + (s \cdot w) \in M_{tor}$.

Berdasarkan 1) dan 2), terbukti bahwa M_{tor} adalah submodul dari M.

Proposisi 2.91

Misalkan M adalah R-modul dan didefinisikan

$$M/M_{tor} = \{v + M_{tor} \mid v \in M\}.$$

Jika R adalah daerah integral, maka M/M_{tor} adalah bebas torsi.

Bukti :

Misalkan R adalah daerah integral dan M adalah R-modul.

Akan ditunjukkan bahwa sebarang unsur taknol di M/M_{tor} adalah bukan unsur torsi.

Misalkan $x = v + M_{tor} \in M/M_{tor}$ dengan $x \neq 0 + M_{tor}$.

Karena $x = v + M_{tor}$ dan $x \neq 0 + M_{tor}$, maka $v \notin M_{tor}$.

Selanjutnya misalkan $r \in R$ dengan $r \cdot x = 0 + M_{tor}$. Tulis

$r \cdot x = r \cdot (v + M_{tor}) = 0 + M_{tor}$

$\Leftrightarrow (r \cdot v) + M_{tor} = 0 + M_{tor}$

$\Leftrightarrow r \cdot v \in M_{tor}$.

Karena $r \cdot v \in M_{tor}$, maka $r \cdot v$ dapat dibagi menjadi 2 kasus berikut:

1) Kasus $r \cdot v = 0$

   Karena $v \notin M_{tor}$ maka haruslah $r = 0$.

2) Kasus $r \cdot v$ adalah unsur torsi

   Karena $r \cdot v$ adalah unsur torsi, maka terdapat $0 \neq \alpha \in R$ sedemikian sehingga

   $\alpha \cdot (r \cdot v) = 0$

   $\Leftrightarrow \quad (\alpha \times r) \cdot v = 0$

   Karena $v \notin M_{tor}$, maka $\alpha \times r = 0$. Lebih lanjut, karena $r \in R$, R adalah daerah integral, $\alpha \neq 0$, dan $\alpha \times r = 0$, maka $r = 0$.

Karena untuk setiap unsur taknol $x \in M/M_{tor}$ dengan $r \cdot x = 0 + M_{tor}$, maka M/M_{tor} adalah bebas torsi.

Proposisi 2.92

Misalkan R adalah daerah integral dan M adalah R-modul. Jika M adalah modul bebas maka M adalah bebas torsi.

Bukti :

Misalkan M adalah modul atas daerah integral R dan M adalah modul bebas. Akan ditunjukkan bahwa M adalah bebas torsi.

Karena M adalah modul bebas, maka M dapat dibagi menjadi 2 kasus berikut:

1) Kasus $M = \{0\}$

   Jika $M = \{0\}$ jelas bahwa M bebas torsi.

2) Kasus M mempunyai basis

   Misalkan $\mathcal{B}$ adalah basis dari M, $0 \neq t \in M$, $r \in R$, dan $r \cdot t = 0$.

   Selanjutnya, misalkan t dapat dinyatakan sebagai berikut

$$t = (r_1 \cdot x_1) + \cdots + (r_n \cdot x_n)$$

   Untuk $0 \neq r_i \in R$ dan $x_i \in \mathcal{B}$.

   Akibatnya,

$$\begin{aligned} & r \cdot \big((r_1 \cdot x_1) + \cdots + (r_n \cdot x_n)\big) &= r \cdot t = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & r \cdot (r_1 \cdot x_1) + \cdots + r \cdot (r_n \cdot x_n) &= r \cdot t = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (r \times r_1) \cdot x_1 + \cdots + (r \times r_n) \cdot x_n &= r \cdot t = 0 \end{aligned}$$

   Karena $\mathcal{B}$ bebas linier, maka $r \times r_i = 0$.

Lebih lanjut lagi, karena $r \cdot t = 0$, $r \times r_i = 0$, $r_i \neq 0$, dan R daerah integral, maka haruslah $r = 0$. Hal ini berarti bahwa sebarang unsur taknol di M bukan unsur torsi. Dengan demikian, M bebas torsi.

Berdasarkan kasus 1) dan 2), terbukti bahwa pada modul M atas daerah integral, jika M adalah modul bebas maka M bebas torsi.

Pada Proposisi 2.92 telah dibuktikan bahwa modul bebas atas daerah integral adalah bebas torsi. Sebaliknya, modul bebas torsi atas daerah integral tidak selalu bebas. Namun jika gelanggang tumpuan dari suatu modul merupakan modul yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama, maka berlaku modul yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama adalah bebas jika dan hanya bebas torsi. Hal ini terangkum dalam Teorema 2.93 sebagai berikut:

Teorema 2.93

Suatu modul yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama adalah bebas jika dan hanya jika bebas torsi (Roman, 2008:145).

Bukti :

Misalkan M adalah modul yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama R dan $G = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ adalah pembangun M. Akan ditunjukkan bahwa 1) jika M bebas maka M bebas torsi, dan 2) jika M bebas torsi, maka M bebas.

1) Asumsikan bahwa M adalah modul bebas.

   Karena setiap daerah ideal utama adalah daerah integral, maka berdasarkan Proposisi 2.92 diperoleh bahwa M adalah modul torsi.

2) Asumsikan bahwa M adalah modul bebas torsi dan $G = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ adalah pembangun M.

Perhatikan beberapa kasus berikut:

i. Kasus $n = 1$

Untuk $n = 1$, misalkan $G = \{v\}$ dengan $v \neq 0$.

Misalkan $r \in R$ sedemikian sehingga $r \cdot v = 0$. Karena M bebas torsi, maka haruslah $r = 0$. Hal ini berarti bahwa G adalah bebas linier. Karena G membangun M dan G bebas linier, maka G adalah basis dari M.

Jadi, M adalah modul bebas.

ii. Kasus $n = 2$

Misalkan $G = \{u, v\}$ adalah pembangun dari M dengan $u, v \neq 0$. Jika G bebas linier maka G adalah basis dari M. Karena M mempunyai basis, maka M adalah modul bebas. Adapun jika G tak bebas linier, akan dibuktikan bahwa M isomorfik dengan suatu modul bebas.

Misalkan $s \neq 0$ adalah suatu unsur tertentu di R, dan $\varphi : M \to s \cdot M$ adalah suatu pengaitan yang didefinisikan dengan $\varphi(v) = s \cdot v, v \in M$. Akan ditunjukkan bahwa a) $s \cdot M$ adalah modul bebas, yaitu dengan menunjukkan bahwa $s \cdot M$ adalah submodul dari modul bebas $\langle\langle u \rangle\rangle$, dan b) φ adalah suatu R-isomorfisma.

a) Untuk menunjukkan bahwa $s \cdot M$ adalah submodul dari $\langle\langle u \rangle\rangle$, akan ditunjukkan bahwa i) $s \cdot M$ adalah subhimpunan tak kosong dari $\langle\langle u \rangle\rangle$, dan ii) $s \cdot M$ tertutup terhadap kombinasi linier.

   i) Pilih $0 \in M$. Dengan demikian, terdapat $0 \in s \cdot M$. Hal ini berarti bahwa $s \cdot M$ tak kosong.

Selanjutnya, karena G tidak bebas linier, maka terdapat $r, s \in R$ sedemikian sehingga $r \cdot u = s \cdot v$.

Misalkan $s \cdot \big((a \cdot u) + (b \cdot v)\big) \in s \cdot M$, untuk $a, b \in R$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} s \cdot \big((a \cdot u) + (b \cdot v)\big) &= \big(s \cdot (a \cdot u)\big) + \big(s \cdot (b \cdot v)\big) \\ &= \big((s \times a) \cdot u\big) + \big(b \cdot (s \cdot v)\big) \\ &= \big((s \times a) \cdot u\big) + \big(b \times (r \cdot u)\big) \\ &= \big((s \times a) \cdot u\big) + \big((b \times r) \cdot u\big) \\ &= \big((s \times a) \cdot u\big) + \big((r \times b) \cdot u\big) \\ &= \big((s \times a) + (b \times r)\big) \cdot u \in \langle\langle u \rangle\rangle \end{aligned}$$

Hal ini berarti bahwa $s \cdot M$ adalah subhimpunan tak kosong dari $\langle\langle u \rangle\rangle$.

ii) Misalkan $\alpha, \beta \in R$ dan $c, d \in s \cdot M$. Tulis

$c = s \cdot \big((x_1 \cdot u) + (y_1 \cdot v)\big)$

$d = s \cdot \big((x_2 \cdot u) + (y_2 \cdot v)\big)$

dengan $x_1, x_2, y_1, y_2 \in R$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} (\alpha \cdot c) + (\beta \cdot d) &= \alpha \cdot \Big(s \cdot \big((x_1 \cdot u) + (y_1 \cdot v)\big)\Big) + \\ &\quad \beta \cdot \Big(s \cdot \big((x_2 \cdot u) + (y_2 \cdot v)\big)\Big) \\ &= (\alpha \times s) \cdot \big((x_1 \cdot u) + (y_1 \cdot v)\big) + \\ &\quad (\beta \times s) \times \big((x_2 \cdot u) + (y_2 \cdot v)\big) \\ &= \big((\alpha \times s) \cdot (x_1 \cdot u)\big) + \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\big((\alpha \times s) \cdot (y_1 \cdot v)\big) + \\
&\big((\beta \times s) \cdot (x_2 \cdot u)\big) + \\
&\big((\beta \times s) \cdot (y_2 \cdot v)\big) \\
= &\big((\alpha \times s \times x_1) \cdot u\big) + \\
&\big((\alpha \times s \times y_1) \cdot v\big) + \\
&\big((\beta \times s \times x_2) \cdot u\big) + \\
&\big((\beta \times s \times y_2) \cdot v\big) \\
= &\big((\alpha \times s \times x_1) \cdot u\big) + \\
&\big((\beta \times s \times x_2) \cdot u\big) + \\
&\big((\alpha \times s \times y_1) \cdot v\big) + \\
&\big((\beta \times s \times y_2) \cdot v\big) \\
= &\Big(\big(s \times (\alpha \times x_1)\big) \cdot u\Big) + \\
&\Big(\big(s \times (\beta \times x_2)\big) \cdot u\Big) + \\
&\Big(\big(s \times (\alpha \times y_1)\big) \cdot v\Big) + \\
&\Big(\big(s \times (\beta \times y_2)\big) \cdot v\Big) \\
= &\left(\begin{pmatrix} \big(s \times (\alpha \times x_1)\big) + \\ \big(s \times (\beta \times x_2)\big) \end{pmatrix} \cdot u\right) + \\
&\left(\begin{pmatrix} \big(s \times (\alpha \times y_1)\big) + \\ \big(s \times (\beta \times y_2)\big) \end{pmatrix} \cdot v\right) \\
= &\Big(s \times \big((\alpha \times x_1) + (\beta \times x_2)\big) \cdot u\Big) + \\
&\Big(s \times \big((\alpha \times y_1) + (\beta \times y_2)\big) \cdot v\Big)
\end{aligned}
$$

$$= s \cdot \begin{pmatrix} \left(\left((\alpha \times x_1) + (\beta \times x_2)\right) \cdot u\right) + \\ \left(\left((\alpha \times y_1) + (\beta \times y_2)\right) \cdot v\right) \end{pmatrix}$$

Karena $s \cdot \begin{pmatrix} \left(\left((\alpha \times x_1) + (\beta \times x_2)\right) \cdot u\right) + \\ \left(\left((\alpha \times y_1) + (\beta \times y_2)\right) \cdot v\right) \end{pmatrix} \in s \cdot \langle\langle u, v\rangle\rangle$ dan $s \cdot \langle\langle u, v\rangle\rangle = s \cdot M$, maka diperoleh $(\alpha \cdot c) + (\beta \cdot d) \in s \cdot M$. Hal ini berarti bahwa $s \cdot M$ tertutup terhadap kombinasi linier.

Berdasarkan i) dan ii) terbukti bahwa $s \cdot M$ adalah submodul dari $\langle\langle u\rangle\rangle$. Karena $\langle\langle u\rangle\rangle$ bebas, maka $s \cdot M$ juga bebas.

b) Untuk menunjukkan bahwa φ adalah suatu R-isomorfisma, akan ditunjukkan bahwa i) φ adalah suatu pemetaan, ii) φ adalah suatu R-homomorfisma, iii) φ surjektif, dan iv) φ injektif.

i) Misalkan $u, v \in M$ dengan $u = v$. Akibatnya, $s \cdot u = s \cdot v$. Hal ini berarti bahwa $\varphi(u) = \varphi(v)$.

Karena untuk sebarang $u, v \in M$ dengan $u = v$ diperoleh $\varphi(u) = \varphi(v)$, maka φ adalah suatu pemetaan.

ii) Misalkan $u, v \in M$ dan $r \in R$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \varphi(u+v) &= s \cdot (u+v) \\ &= (s \cdot u) + (s \cdot v) \\ &= \varphi(u) + \varphi(v) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \varphi(r \cdot u) &= s \cdot (r \cdot u) \\ &= (s \times r) \cdot u \end{aligned}$$

$$= (r \times s) \cdot u$$

$$= r \cdot (s \cdot u)$$

$$= r \cdot \varphi(u)$$

Karena untuk sebarang $u, v \in M$ dan $r \in R$ diperoleh bahwa $\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$ dan $\varphi(r \cdot u) = r \cdot \varphi(u)$, maka φ adalah suatu R-homomorfisma.

iii) Misalkan $y \in s \cdot M$. Tulis $y = s \cdot m$, untuk suatu $m \in M$.

Hal ini berarti bahwa terdapat m ∈ M sedemikian sehingga

$$\varphi(m) = s \cdot m = y \in s \cdot M$$

Karena untuk semua $y \in s \cdot M$ terdapat $m \in M$ sedemikian sehingga $\varphi(m) = y$, maka φ surjektif.

iv) Misalkan $m_1, m_2 \in M$ dengan $\varphi(m_1) = \varphi(m_2)$. Tulis

$\varphi(m_1) = s \cdot m_1$

$\varphi(m_2) = s \cdot m_2$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \varphi(m_1) &= \varphi(m_2) \\ \Leftrightarrow \quad s \cdot m_1 &= s \cdot m_2 \\ \Leftrightarrow \quad s \cdot (m_1 - m_2) &= 0 \end{aligned}$$

Karena $s \neq 0$ dan M bebas torsi, maka $m_1 - m_2 = 0$. Akibatnya, $m_1 = m_2$. Lebih lanjut, karena untuk sebarang $m_1, m_2 \in M$ dengan $\varphi(m_1) = \varphi(m_2)$ diperoleh $m_1 = m_2$, maka φ injektif.

Berdasarkan i), ii), iii), dan iv), terbukti bahwa M isomorfik dengan $s \cdot M$.

Berdasarkan a) dan b), terbukti bahwa untuk kasus $n = 2$, jika M adalah modul torsi, maka M adalah bebas.

iii. Untuk suatu n yang berhingga.

Misalkan $G = \{u_1, u_2, \dots, u_k, v_1, v_2 \dots, v_{n-k}\}$ adalah pembangun dari M.

Jika G bebas linier, maka G adalah basis dari M. Karena M mempunyai basis, maka M adalah modul bebas. Adapun jika M tak bebas linier, akan ditunjukkan bahwa M isomorfik dengan suatu modul bebas.

Untuk kasus G tak bebas linier, asumsikan bahwa $S = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ adalah himpunan bebas linier maksimal pada M. Perhatikan bahwa S tak kosong karena himpunan unsur tunggal pada modul bebas torsi adalah bebas linier.

Perhatikan bahwa himpunan $\{u_1, u_2, \dots, u_k, v_1\}$ adalah tak bebas linier. Hal ini berarti bahwa terdapat $0 \neq a_1 \in R$ dan $r_{11}, r_{12}, \dots, r_{1k} \in R$ yang tak semuanya nol sedemikian sehingga

$$a_1 \cdot v_1 + r_{11} \cdot u_1 + r_{12} \cdot u_2 \dots + r_{1k} \cdot u_k = 0.$$

Himpunan $\{u_1, u_2, \dots, u_k, v_2\}$ juga tak bebas linier. Hal ini berarti bahwa terdapat $0 \neq a_2 \in R$ dan $r_{21}, r_{22}, \dots, r_{2k} \in R$ yang tak semuanya nol sedemikian sehingga

$$a_2 \cdot v_2 + r_{21} \cdot u_1 + r_{22} \cdot u_2 \dots + r_{2k} \cdot u_k = 0.$$

Lebih lanjut, perhatikan bahwa bahwa himpunan $\{u_1, u_2, \dots, u_k, v_{n-k}\}$ adalah tak bebas linier. Hal ini berarti bahwa terdapat $0 \neq a_{n-k} \in R$ dan $r_{(n-k)1}, r_{(n-k)2}, \dots, r_{(n-k)k} \in R$ yang tak semuanya nol sedemikian sehingga

$$a_{n-k} \cdot v_{n-k} + r_{(n-k)1} \cdot u_1 + r_{(n-k)2} \cdot u_2 + \cdots + r_{(n-k)k} \cdot u_k = 0.$$

Misalkan $a_1 \times a_2 \times \dots \times a_{n-k} = a$ dan dibentuk suatu pengaitan

$$\varphi : M \to a \cdot M$$

yang didefinisikan sebagai $\varphi(m) = a \cdot m, m \in M$.

Melalui pengaitan φ, akan ditunjukkan bahwa M adalah modul bebas sebagaimana pada kasus $n = 2$. Untuk menunjukkan bahwa M adalah modul bebas, akan ditunjukkan bahwa a) $a \cdot M$ adalah submodul dari suatu modul bebas, yaitu $\langle\langle u_1, u_2, \dots, u_k \rangle\rangle$, dan b) φ adalah suatu R-isomorfisma.

a) Untuk menunjukkan bahwa $a \cdot M$ adalah submodul dari $\langle\langle u_1, u_2, \dots, u_k \rangle\rangle$, akan ditunjukkan bahwa i) $a \cdot M$ adalah subhimpunan tak kosong dari $\langle\langle u_1, u_2, \dots, u_k \rangle\rangle$, dan ii) $a \cdot M$ tertutup terhadap kombinasi linier.

   i) Karena $a_1, a_2, \dots, a_{n-k} \neq 0$ dan R adalah daerah ideal utama, maka $a \neq 0$.

      Pilih $0 \in M$. Dengan demikian, terdapat $0 \in a \cdot M$. Hal ini berarti bahwa $a \cdot M$ tak kosong.

      Selanjutnya, karena $G = \{u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_{n-k}\}$ tidak bebas linier, maka terdapat $r_1, \dots, r_k, s_1, \dots, s_{n-k} \in R$ yang tidak semuanya nol sedemikian sehingga

      $r_1 \cdot u_1 + \cdots + r_k \cdot u_k + s_1 \cdot v_1 + \cdots + s_{n-k} \cdot v_{n-k} \neq 0.$

      Misalkan $x \in a \cdot M$. Tulis

$x = a \cdot (r_1 \cdot u_1 + \cdots + r_k \cdot u_k + s_1 \cdot v_1 + \cdots + s_{n-k} \cdot v_{n-k})$

dengan $r_1, \ldots, r_k, s_1, \ldots, s_{n-k} \in R$.

Perhatikan bahwa

$a_1 \cdot v_1 + r_{11} \cdot u_1 + \cdots + r_{1k} \cdot u_k = 0$

$\Leftrightarrow a_1 \cdot v_1 = -r_{11} \cdot u_1 + \cdots + (-r_{1k} \cdot u_k)$

dan

$$
\begin{aligned}
x &= a \cdot (r_1 \cdot u_1 + \cdots + r_k \cdot u_k + s_1 \cdot v_1 + \cdots + s_{n-k} \cdot v_{n-k}) \\
&= a \cdot (r_1 \cdot u_1) + \cdots + a \cdot (r_k \cdot u_k) + a \cdot (s_1 \cdot v_1) + \cdots + \\
&\quad a \cdot (s_{n-k} \cdot v_{n-k})
\end{aligned}
$$

Selanjutnya, perhatikan bahwa

$$
\begin{aligned}
a \cdot (s_1 \cdot v_1) &= (a_1 \times \ldots \times a_{n-k}) \cdot (s_1 \cdot v_1) \\
&= (a_2 \times \ldots \times a_{n-k} \times a_1) \cdot (s_1 \cdot v_1) \\
&= (a_2 \times \ldots \times a_{n-k} \times a_1 \times s_1) \cdot v_1 \\
&= (a_2 \times \ldots \times a_{n-k} \times s_1 \times a_1) \cdot v_1 \\
&= (a_2 \times \ldots \times a_{n-k} \times s_1) \cdot (a_1 \cdot v_1) \\
&= (a_2 \times \ldots \times a_{n-k} \times s_1) \cdot \\
&\quad \left(-r_{11} \cdot u_1 + \cdots + (-r_{1k} \cdot u_k)\right) \\
&\quad (a_2 \times \ldots \times a_{n-k} \times s_1) \cdot (-r_{11} \cdot u_1) + \cdots + \\
&\quad (a_2 \times \ldots \times a_{n-k} \times s_1) \cdot (-r_{1k} \cdot u_k) \\
&\quad (a_2 \times \ldots \times a_{n-k} \times s_1 \times -r_{11}) \cdot u_1 + \cdots + \\
&\quad (a_2 \times \ldots \times a_{n-k} \times s_1 \times -r_{1k}) \cdot u_k
\end{aligned}
$$

Hal ini berarti bahwa $a \cdot (s_1 \cdot v_1) \in \langle\langle u_1, u_2, \ldots, u_k \rangle\rangle$.

Dengan cara yang sama, akan diperoleh bahwa

$$a \cdot (s_1 \cdot v_1), \ldots, a \cdot (s_{n-k} \cdot v_{n-k}) \in \langle\langle u_1, u_2 \ldots, u_k \rangle\rangle.$$

Akibatnya, diperoleh $x \in \langle\langle u_1, \dots, u_k\rangle\rangle$. Hal ini berarti bahwa $a \cdot M$ adalah subhimpunan tak kosong dari $\langle\langle u_1, \dots, u_k\rangle\rangle$.

ii) Misalkan $\alpha, \beta \in R$ dan $c, x \in a \cdot M$. Tulis

$$c = a \cdot \left(r_{c_1} \cdot u_1 + \cdots + r_{c_k} \cdot u_k + s_{c_1} \cdot v_1 + \cdots + s_{c_{n-k}} \cdot v_{n-k}\right)$$

$$x = a \cdot \begin{pmatrix} r_{x_1} \cdot u_1 + \cdots + r_{x_k} \cdot u_k + s_{x_1} \cdot v_1 \\ + \cdots + s_{x_{n-k}} \cdot v_{n-k} \end{pmatrix}$$

dengan $r_{c_i}, s_{c_j}, r_{x_i}, s_{x_j} \in R$, $i = 1,2, \dots, k$ dan $j = 1,2, \dots, n-k$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot c + \beta \cdot x &= \alpha \cdot \left(a \cdot \begin{pmatrix} r_{c_1} \cdot u_1 + \cdots + r_{c_k} \cdot u_k + \\ s_{c_1} \cdot v_1 + \cdots + s_{c_{n-k}} \cdot v_{n-k} \end{pmatrix}\right) + \\
&\quad \beta \cdot \left(a \cdot \begin{pmatrix} r_{x_1} \cdot u_1 + \cdots + r_{x_k} \cdot u_k + \\ s_{x_1} \cdot v_1 + \cdots + s_{x_{n-k}} \cdot v_{n-k} \end{pmatrix}\right) \\
&= \alpha \cdot \begin{pmatrix} a \cdot (r_{c_1} \cdot u_1) + \cdots + a \cdot (r_{c_k} \cdot u_k) + \\ a \cdot (s_{c_1} \cdot v_1) + \cdots + a \cdot (s_{c_{n-k}} \cdot v_{n-k}) \end{pmatrix} + \\
&\quad \beta \cdot \begin{pmatrix} a \cdot (r_{x_1} \cdot u_1) + \cdots + a \cdot (r_{x_k} \cdot u_k) + \\ a \cdot (s_{x_1} \cdot v_1) + \cdots + a \cdot (s_{x_{n-k}} \cdot v_{n-k}) \end{pmatrix} \\
&= \alpha \times a\left(r_{c_1} \cdot u_1\right) + \cdots + \alpha \times a\left(r_{c_k} \cdot u_k\right) + \\
&\quad \alpha \times a\left(s_{c_1} \cdot v_1\right) + \cdots + \alpha \times a\left(s_{c_{n-k}} \cdot v_{n-k}\right) + \\
&\quad \beta \times a\left(r_{x_1} \cdot u_1\right) + \cdots + \beta \times a\left(r_{x_k} \cdot u_k\right) + \\
&\quad \beta \times a\left(s_{x_1} \cdot v_1\right) + \cdots + \beta \times a\left(s_{x_{n-k}} \cdot v_{n-k}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\alpha \times a \times r_{c_1}\right) \cdot u_1 + \cdots + \\
&\quad \left(\alpha \times a \times r_{c_k}\right) \cdot u_k + \\
&\quad \left(\alpha \times a \times s_{c_1}\right) \cdot v_1 + \cdots + \\
&\quad \left(\alpha \times a \times s_{c_{n-k}}\right) \cdot v_{n-k} + \\
&\quad \left(\beta \times a \times r_{x_1}\right) \cdot u_1 + \cdots + \\
&\quad \left(\beta \times a \times r_{x_k}\right) \cdot u_k + \\
&\quad \left(\beta \times a \times s_{x_1}\right) \cdot v_1 + \cdots + \\
&\quad \left(\beta \times a \times s_{x_{n-k}}\right) \cdot v_{n-k} \\
&= \left(a \times \alpha \times r_{c_1}\right) \cdot u_1 + \cdots + \\
&\quad \left(a \times \alpha \times r_{c_k}\right) \cdot u_k + \\
&\quad \left(a \times \alpha \times s_{c_1}\right) \cdot v_1 + \cdots + \\
&\quad \left(a \times \alpha \times s_{c_{n-k}}\right) \cdot v_{n-k} + \\
&\quad \left(a \times \beta \times r_{x_1}\right) \cdot u_1 + \cdots + \\
&\quad \left(a \times \beta \times r_{x_k}\right) \cdot u_k + \\
&\quad \left(a \times \beta \times s_{x_1}\right) \cdot v_1 + \cdots + \\
&\quad \left(a \times \beta \times s_{x_{n-k}}\right) \cdot v_{n-k} \\
&= \left(a \times \left(\alpha \times r_{c_1}\right)\right) \cdot u_1 + \cdots + \\
&\quad \left(a \times \left(\alpha \times r_{c_k}\right)\right) \cdot u_k + \\
&\quad \left(a \times \left(\alpha \times s_{c_1}\right)\right) \cdot v_1 + \cdots + \\
&\quad \left(a \times \left(\alpha \times s_{c_{n-k}}\right)\right) \cdot v_{n-k} + \\
&\quad \left(a \times \left(\beta \times r_{x_1}\right)\right) \cdot u_1 + \cdots +
\end{aligned}
$$

$$\left(\alpha \times \left(\beta \times r_{x_k}\right)\right) \cdot u_k +$$

$$\left(\alpha \times \left(\beta \times s_{x_1}\right)\right) \cdot v_1 + \cdots +$$

$$\left(\alpha \times \left(\beta \times s_{x_{n-k}}\right)\right) \cdot v_{n-k}$$

$$= \alpha \cdot \begin{pmatrix} \left(\alpha \times r_{c_1}\right) \cdot u_1 + \cdots + \\ \left(\alpha \times r_{c_k}\right) \cdot u_k + \\ \left(\alpha \times s_{c_1}\right) \cdot v_1 + \cdots + \\ \left(\alpha \times s_{c_{n-k}}\right) \cdot v_{n-k} + \\ \left(\beta \times r_{x_1}\right) \cdot u_1 + \cdots + \\ \left(\beta \times r_{x_k}\right) \cdot u_k + \\ \left(\beta \times s_{x_1}\right) \cdot v_1 + \cdots + \\ \left(\beta \times s_{x_{n-k}}\right) \cdot v_{n-k} \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \cdot \begin{pmatrix} \left(\alpha \times r_{c_1} + \beta \times r_{x_1}\right) \cdot u_1 + \cdots + \\ \left(\alpha \times r_{c_k} + \beta \times r_{x_k}\right) \cdot u_k + \\ \left(\alpha \times s_{c_1} + \beta \times s_{x_1}\right) \cdot v_1 + \cdots + \\ \left(\alpha \times s_{c_{n-k}} + \beta \times s_{x_{n-k}}\right) \cdot v_{n-k} \end{pmatrix}$$

Karena $\alpha \cdot \begin{pmatrix} \left(\alpha \times r_{c_1} + \beta \times r_{x_1}\right) \cdot u_1 + \cdots + \\ \left(\alpha \times r_{c_k} + \beta \times r_{x_k}\right) \cdot u_k + \\ \left(\alpha \times s_{c_1} + \beta \times s_{x_1}\right) \cdot v_1 + \cdots + \\ \left(\alpha \times s_{c_{n-k}} + \beta \times s_{x_{n-k}}\right) \cdot v_{n-k} \end{pmatrix} \in \alpha \cdot M$, maka $\alpha \cdot c + \beta \cdot x \in \alpha \cdot M$. Hal ini berarti bahwa $\alpha \cdot M$ tertutup terhadap kombinasi linier.

Berdasarkan i) dan ii), terbukti bahwa $\alpha \cdot M$ adalah submodul dari $\langle\langle u_1, u_2 \dots, u_k\rangle\rangle$. Karena $\langle\langle u_1, u_2, \dots, u_k\rangle\rangle$ adalah modul bebas, maka $\alpha \cdot M$ adalah bebas.

b) Untuk menunjukkan bahwa φ adalah suatu R-isomorfisma, akan ditunjukkan bahwa 1) φ adalah suatu pemetaan, 2) φ adalah suatu R-homomorfisma, 3) φ surjektif, dan 4) φ injektif.

(1)Misalkan $u, v \in M$ dengan $u = v$. Akibatnya, $a \cdot u = a \cdot v$.

Hal ini berarti bahwa $\varphi(u) = \varphi(v)$.

Karena untuk sebarang $u, v \in M$ dengan $u = v$ diperoleh $\varphi(u) = \varphi(v)$, maka φ adalah suatu pemetaan.

(2)Misalkan $u, v \in M$ dan $r \in R$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \varphi(u+v) &= a \cdot (u+v) \\ &= a \cdot u + a \cdot v \\ &= \varphi(u) + \varphi(v) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \varphi(r \cdot u) &= a \cdot (r \cdot u) \\ &= (a \times r) \cdot u \\ &= (r \times a) \cdot u \\ &= r \cdot (a \cdot u) \\ &= r \cdot \varphi(u) \end{aligned}$$

Karena untuk sebarang $u, v \in M$ dan $r \in R$ diperoleh bahwa $\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$ dan $\varphi(r \cdot u) = r \cdot \varphi(u)$, maka φ adalah suatu R-homomorfisma.

(3)Misalkan $y \in a \cdot M$. Tulis $y = a \cdot m$, untuk suatu $m \in M$.

Hal ini berarti bahwa terdapat $m \in M$ sedemikian sehingga $\varphi(m) = a \cdot m = y \in a \cdot M$

Karena untuk semua $y \in a \cdot M$ terdapat $m \in M$ sedemikian sehingga $\varphi(m) = y$, maka φ surjektif.

(4)Misalkan $m_1, m_2 \in M$ dengan $\varphi(m_1) = \varphi(m_2)$.

Tulis

$\varphi(m_1) = a \cdot m_1$

$\varphi(m_2) = a \cdot m_2$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \varphi(m_1) &= \varphi(m_2) \\ \Leftrightarrow \quad a \cdot m_1 &= a \cdot m_2 \\ \Leftrightarrow \quad a \cdot (m_1 - m_2) &= 0 \end{aligned}$$

Karena $a \neq 0$ dan M bebas torsi, maka $m_1 - m_2 = 0$. Akibatnya, $m_1 = m_2$. Lebih lanjut, karena untuk sebarang $m_1, m_2 \in M$ dengan $\varphi(m_1) = \varphi(m_2)$ diperoleh $m_1 = m_2$, maka φ injektif.

Berdasarkan (1), (2), (3), dan (4), terbukti bahwa M isomorfik dengan $a \cdot M$.

Berdasarkan a) dan b), terbukti bahwa untuk kasus n yang berhingga, jika M adalah modul torsi, maka M adalah bebas.

Dengan demikian, berdasarkan kasus i, ii, dan iii, terbukti bahwa jika M adalah modul torsi, maka M bebas.

Berdasarkan 1) dan 2), terbukti bahwa suatu modul yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama adalah bebas jika dan hanya jika bebas torsi.

2.13 Kajian Dekomposisi dalam Islam

Secara bahasa, kata dekomposisi berarti penguraian (Al-Barry dan Yacub, 2003:123). Dekomposisi modul berarti penguraian suatu modul menjadi jumlah langsung submodul-submodul yang lebih sederhana. Secara umum, dekomposisi dilakukan untuk membagi suatu kumpulan objek menjadi beberapa kelompok berdasarkan sifat khusus objek-objek tersebut. Salah satu contoh kajian dekomposisi modul dalam Islam adalah pembagian manusia menjadi beberapa kelompok pada hari kiamat.

Peristiwa tentang terjadinya hari kiamat telah disebutkan beberapa kali di dalam al-Quran. Salah satunya dalam surah al-Waqi'ah. Menurut Al-Jazairi (2009:235), hari kiamat disebut al-Waqi'ah karena hari kiamat pasti terjadi, tidak mungkin tidak. Hari kiamat ditandai dengan ditiupnya sangkakala oleh malaikat Isro'il. Allah Swt. berfirman di dalam al-Quran surat az-Zumar ayat 68-70, yaitu:

وَنُفِخَ فِي ٱلصُّورِ فَصَعِقَ مَن فِي ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَمَن فِي ٱلۡأَرۡضِ إِلَّا مَن شَآءَ ٱللَّهُۖ ثُمَّ نُفِخَ فِيهِ أُخۡرَىٰ فَإِذَا هُمۡ قِيَامٌ يَنظُرُونَ ٦٨ وَأَشۡرَقَتِ ٱلۡأَرۡضُ بِنُورِ رَبِّهَا وَوُضِعَ ٱلۡكِتَٰبُ وَجِاْيٓءَ بِٱلنَّبِيِّـۧنَ وَٱلشُّهَدَآءِ وَقُضِيَ بَيۡنَهُم بِٱلۡحَقِّ وَهُمۡ لَا يُظۡلَمُونَ ٦٩ وَوُفِّيَتۡ كُلُّ نَفۡسٍ مَّا عَمِلَتۡ وَهُوَ أَعۡلَمُ بِمَا يَفۡعَلُونَ ٧٠

Artinya: *"Dan ditiuplah sangkakala, maka matilah siapa yang di langit dan di bumi kecuali siapa yang dikehendaki Allah. Kemudian ditiup sangkakala itu sekali lagi, maka tiba-tiba mereka berdiri menunggu (putusannya masing-masing) (68). Dan terang benderanglah bumi (padang mahsyar) dengan cahaya (keadilan) Tuhannya; dan diberikanlah buku (perhitungan perbuatan masing-masing) dan didatangkanlah para nabi dan saksi-saksi dan diberi keputusan di antara mereka dengan adil, sedang mereka tidak dirugikan (69). Dan disempurnakan bagi tiap-tiap jiwa (balasan) apa yang telah dikerjakannya dan Dia lebih mengetahui apa yang mereka kerjakan (70)."* (QS. az-Zumar/39:68-70).

Allah Swt. berfirman di dalam al-Quran surat al-Waqi'ah ayat 7, yaitu:

وَكُنتُمۡ أَزۡوَٰجٗا ثَلَٰثَةٗ ٧

Artinya: *"Dan kamu menjadi tiga golongan"* (QS. al-Waqi'ah/56:7).

Ayat ke-7 dari surat al-Waqi'ah ini ditafsirkan oleh Al-Jazairi (2009:235) bahwa pada hari kiamat, umat manusia terbagi menjadi tiga golongan. Adapun ketiga golongan yang dimaksud dalam surah al-Waqi'ah ayat 7 telah disebutkan di dalam al-Quran sebagaimana firman Allah Swt. di dalam al-Quran surat al-Waqi’ah ayat 8-10, yaitu:

فَأَصۡحَٰبُ ٱلۡمَيۡمَنَةِ مَآ أَصۡحَٰبُ ٱلۡمَيۡمَنَةِ ٨ وَأَصۡحَٰبُ ٱلۡمَشۡـَٔمَةِ مَآ أَصۡحَٰبُ ٱلۡمَشۡـَٔمَةِ ٩ وَٱلسَّٰبِقُونَ ٱلسَّٰبِقُونَ ١٠

Artinya: *“Yaitu golongan kanan, alangkah mulianya golongan kanan itu (8), dan golongan kiri, alangkah sengsaranya golongan kiri itu (9), dan orang-orang yang paling dahulu (beriman), merekalah yang paling dahulu (masuk surga) (10)”* (QS. al-Waqiah/56:8-10).

Pertama, pada hari kiamat nanti akan ada sekelompok manusia yang disebut golongan kanan. Menurut Junaidi (2010:587), golongan kanan yaitu orang-orang yang kitab catatan amalnya diberikan melalui tangan kanan. Adapun menurut Al-Jazairi (2009:235) kedudukan mereka sangan terhormat karena mereka semua dimasukkan ke dalam surga.

Kedua, pada hari kiamat nanti akan ada sekelompok manusia yang disebut golongan kiri. Menurut Junaidi (2010:588), golongan kiri yaitu mereka yang masing-masing kitab catatan amalnya diberikan kepada mereka pada tangan kiri. Adapun menurut Al-Jazairi (2009:236) kedudukan mereka sangat buruk karena mereka semua akan dimasukkan ke dalam neraka.

Ketiga, pada hari kiamat nanti akan ada sekelompok manusia yang disebut orang-orang yang paling dahulu beriman. Menurut Junaidi (2010:588), orang yang paling dahulu beriman yaitu orang-orang yang paling dahulu terhadap kebaikan. Mereka adalah para nabi. Adapun kedudukan orang-orang yang paling dahulu beriman telah disebutkan dalam surat al-Waqi’ah ayat 11, yaitu أُولَئِكَ الْمُقَرَّبُونَ yang berarti “*mereka itulah yang didekatkan (kepada Allah Swt.)*”. Menurut Al Jazairi (2009:236), ayat tersebut dapat ditafsirkan bahwa mereka itulah orang-orang yang didekatkan kepada Allah Swt. di hari kiamat, karena Allah Swt. akan memasukkan mereka ke surga.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Dekomposisi Modul yang Dibangun Secara Hingga Atas Daerah Ideal Utama Menjadi Jumlah Langsung Submodul-submodul Siklis

Langkah pertama dalam mendekomposisikan modul yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama menjadi jumlah langsung submodul-submodul siklis adalah dengan mendekomposisikan modul tersebut menjadi jumlah langsung submodul bebas dan submodul torsi. Hal ini terangkum dalam Teorema 3.1 sebagai berikut:

Teorema 3.1

Modul yang dibangun secara hingga M atas daerah ideal utama R adalah jumlah langsung dari R-modul bebas yang dibangun secara hingga dan R-modul torsi yang dibangun secara hingga, yaitu

$$M = M_{free} \oplus M_{tor}$$

dengan M_{free} adalah modul bebas yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama dan M_{tor} adalah modul torsi yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama (Roman, 2008:146).

Bukti :

Misalkan M adalah modul yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama R dan $\sigma : M \to M/M_{tor}$ adalah suatu pengaitan yang didefinisikan sebagai $\sigma(v) = v + M_{tor}$ untuk semua $v \in M$.

Menggunakan Teorema 2.89, untuk membuktikan bahwa M merupakan jumlah langsung dari M_{tor} dan suatu modul bebas yang unsur-unsur di basisnya merupakan wakil dari unsur-unsur di basis M/M_{tor}, akan ditunjukkan bahwa: 1) M_{tor} adalah submodul dari M dan M_{tor} dibangun secara hingga, 2) M/M_{tor} adalah modul bebas yang dibangun secara hingga, 3) σ merupakan suatu R-epimorfisma, dan 4) $M_{tor} = \ker(\sigma)$.

1) Berdasarkan Proposisi 2.90, diperoleh bahwa M_{tor} adalah submodul dari M. Lebih lanjut, karena M dibangun secara hingga, maka M_{tor} dibangun secara hingga. Dengan demikian, M_{tor} adalah submodul dari M dan M_{tor} dibangun secara hingga.
2) Berdasarkan Teorema 2.93, untuk menunjukkan bahwa M/M_{tor} adalah modul bebas yang dibangun secara hingga, akan ditunjukkan bahwa: a) M/M_{tor} bebas torsi, dan b) M/M_{tor} dibangun secara hingga.
   a) Berdasarkan Proposisi 2.91, diperoleh bahwa M/M_{tor} adalah bebas torsi.
   b) Perhatikan bahwa M dibangun secara hingga.

      Misalkan $G = \{m_1, m_2, \dots, m_k\}$ adalah pembangun dari M. Akan ditunjukkan bahwa M/M_{tor} dibangun secara hingga, yaitu

      $$M/M_{tor} = \langle\langle m_1 + M_{tor}, m_2 + M_{tor}, \dots, m_k + M_{tor}\rangle\rangle,$$

      dengan $m_1, m_2, \dots, m_k \in G$.

      Misalkan $x \in M/M_{tor}$. Hal ini berarti bahwa x dapat dituliskan sebagai $x = m + M_{tor}$ dengan $m \in M$. Perhatikan karena M dibangun oleh G, maka untuk setiap $m \in M$, m dapat dituliskan sebagai $m = r_1 \cdot m_1 + r_2 \cdot m_2 + \dots + r_k \cdot m_k$,

      dimana $r_1, r_2, \dots, r_k \in R$ dan $m_1, m_2, \dots, m_k \in G$. Dengan demikian,

      $$x = (r_1 \cdot m_1 + r_2 \cdot m_2 + \dots + r_k \cdot m_k) + M_{tor}$$

$$= (r_1 \cdot m_1 + M_{tor}) + (r_2 \cdot m_2 + M_{tor}) + \cdots + (r_k \cdot m_k + M_{tor})$$

$$= r_1 \cdot (m_1 + M_{tor}) + r_2 \cdot (m_2 + M_{tor}) + \cdots + r_k \cdot (m_k + M_{tor})$$

$$\in \langle\langle m_1 + M_{tor}, m_2 + M_{tor}, \dots, m_k + M_{tor}\rangle\rangle$$

Karena untuk sebarang $x \in M/M_{tor}$ diperoleh

$$x \in \langle\langle m_1 + M_{tor}, m_2 + M_{tor}, \dots, m_k + M_{tor}\rangle\rangle,$$

maka $M/M_{tor} \subseteq \langle\langle m_1 + M_{tor}, m_2 + M_{tor}, \dots, m_k + M_{tor}\rangle\rangle$.

Selanjutnya,

misalkan $y \in \langle\langle m_1 + M_{tor}, m_2 + M_{tor}, \dots, m_k + M_{tor}\rangle\rangle$. Tulis

$$y = s_1 \cdot (m_1 + M_{tor}) + s_2 \cdot (m_2 + M_{tor}) + \cdots + s_k \cdot (m_k + M_{tor}),$$

dengan $s_1, s_2, \dots, s_k \in R$. Perhatikan bahwa

$$y = s_1 \cdot (m_1 + M_{tor}) + s_2 \cdot (m_2 + M_{tor}) + \cdots + s_k \cdot (m_k + M_{tor})$$

$$= (s_1 \cdot m_1) + M_{tor} + (s_2 \cdot m_2) + M_{tor} + \cdots + (s_k \cdot m_k) + M_{tor}$$

$$= (s_1 \cdot m_1 + s_2 \cdot m_2 + \cdots + s_k \cdot m_k) + M_{tor} \in M/M_{tor}$$

Karena untuk sebarang

$$y \in \langle\langle m_1 + M_{tor}, m_2 + M_{tor}, \dots, m_k + M_{tor}\rangle\rangle$$

diperoleh $y \in M/M_{tor}$, maka

$$\langle\langle m_1 + M_{tor}, m_2 + M_{tor}, \dots, m_k + M_{tor}\rangle\rangle \subseteq M/M_{tor}.$$

Karena $M/M_{tor} \subseteq \langle\langle m_1 + M_{tor}, m_2 + M_{tor}, \dots, m_k + M_{tor}\rangle\rangle$ dan $\langle\langle m_1 + M_{tor}, m_2 + M_{tor}, \dots, m_k + M_{tor}\rangle\rangle \subseteq M/M_{tor}$, maka

$$M/M_{tor} = \langle\langle m_1 + M_{tor}, m_2 + M_{tor}, \dots, m_k + M_{tor}\rangle\rangle$$

Hal ini berarti bahwa M/M_{tor} dibangun secara hingga.

Berdasarkan a) dan b), maka terbukti bahwa M/M_{tor} adalah modul bebas yang dibangun secara hingga.

3) Untuk menunjukkan bahwa σ adalah suatu R-epimorfisma, akan ditunjukkan bahwa: (a) σ adalah suatu pemetaan, (b) σ adalah suatu R-homomorfisma, dan (c) σ adalah surjektif.

(a) Misalkan $m_1, m_2 \in M$ dengan $m_1 = m_2$.

Perhatikan bahwa $m_1 + M_{tor} = m_2 + M_{tor}$. Akibatnya, $\sigma(m_1) = \sigma(m_2)$.

Karena untuk sebarang $m_1, m_2 \in M$ dengan $m_1 = m_2$ diperoleh $\sigma(m_1) = \sigma(m_2)$, maka σ adalah suatu pemetaan.

(b) Misalkan $m_1, m_2 \in M$ dan $r \in R$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\sigma(m_1 + m_2) &= (m_1 + m_2) + M_{tor} \\
&= (m_1 + M_{tor}) + (m_2 + M_{tor}) \\
&= \sigma(m_1) + \sigma(m_2)
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
\sigma(r \cdot m_1) &= (r \cdot m_1) + M_{tor} \\
&= r \cdot (m_1 + M_{tor}) \\
&= r \cdot \sigma(m_1)
\end{aligned}$$

Karena untuk sebarang $m_1, m_2 \in M$ dan $r \in R$ diperoleh $\sigma(m_1 + m_2) = \sigma(m_1) + \sigma(m_2)$ dan $\sigma(r \cdot m_1) = r \cdot \sigma(m_1)$, maka σ adalah suatu R-homomorfisma.

(c) Misalkan $x \in M/M_{tor}$.

Tulis $x = m + M_{tor}$, untuk suatu $m \in M$. Hal ini berarti bahwa untuk $x \in M/M_{tor}$ terdapat $m \in M$ sedemikian sehingga $\sigma(m) = m + M_{tor} = x$.

Karena untuk semua $x \in M/M_{tor}$ terdapat $m \in M$ sedemikian sehingga $\sigma(m) = x$, maka σ adalah surjektif.

Berdasarkan (a), (b), dan (c), diperoleh bahwa σ adalah suatu R-epimorfisma.

4) Misalkan $x \in M_{tor}$.

Berdasarkan definisi pemetaan σ, diperoleh bahwa

$$\sigma(x) = x + M_{tor}.$$

Karena $x \in M_{tor}$, maka $x + M_{tor}$ dapat dituliskan sebagai

$$x + M_{tor} = 0 + M_{tor}.$$

Akibatnya, $\sigma(x) = 0 + M_{tor}$. Hal ini berarti bahwa $x \in \ker(\sigma)$. Karena untuk sebarang $x \in M_{tor}$ diperoleh $x \in \ker(\sigma)$, maka $M_{tor} \subseteq \ker(\sigma)$.

Selanjutnya, misalkan $y \in \ker(\sigma)$. Hal ini berarti bahwa $y \in M$ sedemikian sehingga $\sigma(y) = 0 + M_{tor}$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} & \sigma(y) && = 0 + M_{tor} \\ \Leftrightarrow\ & y + M_{tor} && = 0 + M_{tor} \\ \Leftrightarrow\ & y \in M_{tor} && \end{aligned}$$

Karena untuk sebarang $x \in \ker(\sigma)$ diperoleh $x \in M_{tor}$, maka $\ker(\sigma) \subseteq M_{tor}$.

Lebih lanjut, karena $M_{tor} \subseteq \ker(\sigma)$ dan $\ker(\sigma) \subseteq M_{tor}$, maka $M_{tor} = \ker(\sigma)$.

Berdasarkan 1), 2), 3), dan 4), terbukti bahwa

$$M = M_{tor} \oplus F$$

dengan F adalah suatu modul bebas yang isomorfik dengan M/M_{tor}. Dengan demikian, modul yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama M merupakan jumlah langsung dari suatu modul bebas yang dibangun secara hingga dan modul torsi yang dibangun secara hingga.

Perhatikan bahwa bagian M_{tor} pada Teorema 3.1 tunggal karena M_{tor} merupakan himpunan semua unsur torsi di M bersama dengan $0 \in M$. Selanjutnya, berdasarkan Teorema 2.88 diperoleh bahwa jika $M = M_{tor} \oplus F_1$ dimana F_1 merupakan suatu submodul bebas dari M, maka $F_1 \cong M/M_{tor}$. Demikian juga jika $M = M_{tor} \oplus F$ dengan F merupakan suatu submodul bebas dari M, maka $F \cong M/M_{tor}$. Akibatnya, kita peroleh $F_1 \cong F$. Hal ini berarti bahwa bagian bebas pada Teorema 3.1 tunggal terhadap isomorfisma.

Langkah kedua dalam mendekomposisikan modul yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama menjadi jumlah langsung submodul-submodul siklis adalah dengan mendekomposisikan modul bebas menjadi jumlah langsung submodul-submodul siklis. Hal ini terangkum dalam Proposisi 3.2 sebagai berikut:

Proposisi 3.2

Misalkan M_{free} adalah modul bebas yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama maka

$$M_{free} = \langle\langle b_1 \rangle\rangle \oplus \langle\langle b_2 \rangle\rangle \oplus \dots \oplus \langle\langle b_k \rangle\rangle$$

dengan $\{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ adalah basis dari M_{free}.

Bukti :

Misalkan R adalah daerah ideal utama, M_{free} adalah modul bebas yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama R, dan $\{b_1, b_2, \dots, b_k\}$

adalah basis dari M_{free}. Perhatikan bahwa untuk setiap $i = 1,2, \ldots, k$, $\langle\langle b_i \rangle\rangle$ merupakan submodul dari M yang dibangun oleh b_i. Untuk membuktikan bahwa $M_{free} = \langle\langle b_1 \rangle\rangle \oplus \langle\langle b_2 \rangle\rangle \oplus \ldots \oplus \langle\langle b_k \rangle\rangle$, akan ditunjukkan bahwa 1) $M_{free} = \langle\langle b_1 \rangle\rangle + \langle\langle b_2 \rangle\rangle + \cdots + \langle\langle b_k \rangle\rangle$, dan 2) untuk setiap $i = 1,2, \ldots, k$, $\langle\langle b_i \rangle\rangle \cap \sum_{j \neq i} \langle\langle b_j \rangle\rangle = \{0\}$

1) Misalkan $x \in M_{free}$.

   Karena M_{free} dibangun oleh $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$, maka x dapat dituliskan sebagai $x = r_1 \cdot b_1 + r_2 \cdot b_2 + \cdots + r_k \cdot b_k$ dengan $r_1, r_2, \ldots, r_k \in R$. Akibatnya, $x \in \langle\langle b_1 \rangle\rangle + \langle\langle b_2 \rangle\rangle + \cdots + \langle\langle b_k \rangle\rangle$. Karena untuk sebarang $x \in M_{free}$ diperoleh $x \in \langle\langle b_1 \rangle\rangle + \langle\langle b_2 \rangle\rangle + \cdots + \langle\langle b_k \rangle\rangle$, maka

   $$M_{free} \subseteq \langle\langle b_1 \rangle\rangle + \langle\langle b_2 \rangle\rangle + \cdots + \langle\langle b_k \rangle\rangle.$$

   Selanjutnya, misalkan $y \in \langle\langle b_1 \rangle\rangle + \langle\langle b_2 \rangle\rangle + \cdots + \langle\langle b_k \rangle\rangle$.

   Karena untuk $i = 1,2, \ldots, k$, $\langle\langle b_i \rangle\rangle$ adalah submodul dari M_{free}, maka $\langle\langle b_i \rangle\rangle$ subhimpunan dari M_{free}. Dengan demikian diperoleh

   $$y \in \langle\langle b_1 \rangle\rangle + \langle\langle b_2 \rangle\rangle + \cdots + \langle\langle b_k \rangle\rangle \subseteq M_{free}.$$

   Akibatnya, $y \in M_{free}$.

   Karena untuk sebarang $x \in \langle\langle b_1 \rangle\rangle + \langle\langle b_2 \rangle\rangle + \cdots + \langle\langle b_k \rangle\rangle$ diperoleh $x \in M_{free}$, maka $\langle\langle b_1 \rangle\rangle + \cdots + \langle\langle b_k \rangle\rangle \subseteq M_{free}$.

   Lebih lanjut, karena $M_{free} \subseteq \langle\langle b_1 \rangle\rangle + \langle\langle b_2 \rangle\rangle + \cdots + \langle\langle b_k \rangle\rangle$ dan $\langle\langle b_1 \rangle\rangle + \cdots + \langle\langle b_k \rangle\rangle \subseteq M_{free}$, maka $M_{free} = \langle\langle b_1 \rangle\rangle + \cdots + \langle\langle b_k \rangle\rangle$.

2) Misalkan $x \in \langle\langle b_i \rangle\rangle \cap \sum_{j \neq i} \langle\langle b_j \rangle\rangle$. Hal ini berarti bahwa $x \in \langle\langle b_i \rangle\rangle$ dan $x \in \sum_{j \neq i} \langle\langle b_j \rangle\rangle$.

Untuk $x \in \langle\langle b_i \rangle\rangle$, tulis $x = r \cdot b_i$ dengan $r \in R$. Sedangkan untuk $x \in \sum_{j \neq i} \langle\langle b_j \rangle\rangle$, tulis

$$x = s_1 \cdot b_1 + \cdots + s_{i-1} \cdot b_{i-1} + s_{i+1} \cdot b_{i+1} + \cdots + s_k \cdot b_k$$

dengan $s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_k \in R$. Dengan demikian kita peroleh

$s_1 \cdot b_1 + \cdots + s_{i-1} \cdot b_{i-1} + s_{i+1} \cdot b_{i+1} + \cdots + s_k \cdot b_k = r \cdot b_i$

$\Leftrightarrow s_1 \cdot b_1 + \cdots + s_{i-1} \cdot b_{i-1} - r \cdot b_i + s_{i+1} \cdot b_{i+1} + \cdots + s_k \cdot b_k = 0$

Karena $\{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ bebas linier, maka

$$r = s_1 = \cdots = s_{i-1} = s_i = s_{i+1} = \cdots = s_k = 0$$

Akibatnya, $x = 0$. Hal ini berarti bahwa untuk setiap $i = 1,2, \dots, k$, $\langle\langle b_i \rangle\rangle \cap \sum_{j \neq i} \langle\langle b_j \rangle\rangle = \{0\}$.

Berdasarkan 1) dan 2), terbukti bahwa modul bebas yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama dapat didekomposisikan menjadi jumlah langsung submodul-submodul siklis melalui unsur-unsur di basisnya.

Langkah ketiga dalam mendekomposisikan modul yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama menjadi jumlah langsung submodul-submodul siklis adalah dengan mendekomposisikan modul torsi menjadi jumlah langsung submodul-submodul primer. Hal ini terangkum dalam Teorema 3.3 sebagai berikut:

Teorema 3.3

Misalkan M adalah modul torsi atas daerah ideal utama R berorde

$$\mu = p_1^{e_1} \times p_2^{e_2} \times \dots \times p_n^{e_n}$$

dengan p_i adalah unsur prima di R yang tidak saling sekawan, maka

$$M = M_{p_1} \oplus M_{p_2} \oplus \dots \oplus M_{p_n}$$

dengan

$$M_{p_i} = \frac{\mu}{p_i^{e_i}} \cdot M = \left\{v \in M \mid p_i^{e_i} \cdot v = 0\right\}$$

adalah submodul primer berorde $p_i^{e_i}$ (Roman, 2008:147).

Bukti :

Misalkan $\frac{\mu}{p_i^{e_i}} = \mu_i$ dan didefinisikan suatu himpunan

$$\mu_i \cdot M = \{\mu_i \cdot v \mid v \in M\}$$

Untuk membuktikan bahwa $M = M_{p_1} \oplus M_{p_2} \oplus \dots \oplus M_{p_n}$ melalui himpunan $\mu_i \cdot M$, akan ditunjukkan bahwa: 1) $\mu_i \cdot M$ adalah submodul dari M, 2) M_{p_i} adalah submodul dari M, 3) $M = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot M$, dan 4) $\mu_i \cdot M \cap \sum_{j \neq i} \mu_j \cdot M = \{0\}$.

1) Untuk menunjukkan bahwa $\mu_i \cdot M$ adalah submodul dari M, akan ditunjukkan bahwa: a) $\mu_i \cdot M$ adalah subhimpunan tak kosong dari M, dan b) $\mu_i \cdot M$ tertutup terhadap kombinasi linier.

   a) Karena terdapat $0 \in M$ sedemikian sehingga $0 = \mu_i \cdot 0$, maka $0 \in \mu_i \cdot M$. Hal ini berarti bahwa $\mu_i \cdot M$ tak kosong.

      Selanjutnya, misalkan $x \in \mu_i \cdot M$.

      Tulis $x = \mu_i \cdot v$, untuk suatu $v \in M$. Karena $\mu_i \in R$ dan $v \in M$, maka $x = \mu_i \cdot v \in M$. Hal ini berarti bahwa $\mu_i \cdot M \subseteq M$.

      Dengan demikian, $\mu_i \cdot M$ adalah subhimpunan tak kosong dari M.

   b) Misalkan $r, s \in R$ dan $x, y \in \mu_i \cdot M$. Tulis

      $x = \mu_i \cdot v_1$dan $y = \mu_i \cdot v_2$, dengan $v_1, v_2 \in M$.

      Perhatikan bahwa

      $$r \cdot x + s \cdot y \quad = r \cdot (\mu_i \cdot v_1) + s \cdot (\mu_i \cdot v_2)$$

$$= (r \times \mu_i) \cdot v_1 + (s \times \mu_i) \cdot v_2$$

$$= (\mu_i \times r) \cdot v_1 + (\mu_i \times s) \cdot v_2$$

$$= \mu_i \cdot (r \cdot v_1) + \mu_i \cdot (s \cdot v_2)$$

$$= \mu_i \cdot (r \cdot v_1 + s \cdot v_2) \in \mu_i \cdot M$$

Hal ini berarti $\mu_i \cdot M$ tertutup terhadap kombinasi linier.

Berdasarkan a) dan b), maka terbukti bahwa $\mu_i \cdot M$ adalah submodul dari M.

2) Untuk menunjukkan bahwa $M_{p_i} = \mu_i \cdot M$, akan ditunjukkan bahwa: a) $\mu_i \cdot M \subseteq M_{p_i}$, dan b) $M_{p_i} \subseteq \mu_i \cdot M$.

a) Misalkan $x \in p_i^{e_i} \cdot (\mu_i \cdot M)$. Tulis $x = p_i^{e_i} \cdot (\mu_i \cdot v)$, untuk suatu $v \in M$. Perhatikan bahwa

$$x = p_i^{e_i} \cdot (\mu_i \cdot v) = \left(p_i^{e_i} \times \mu_i\right) \cdot v \in \left(p_i^{e_i} \times \mu_i\right) \cdot M.$$

Hal ini berarti bahwa $p_i^{e_i} \cdot (\mu_i \cdot M) \subseteq \left(p_i^{e_i} \times \mu_i\right) \cdot M$. Sebaliknya, misalkan $y \in \left(p_i^{e_i} \times \mu_i\right) \cdot M$. Tulis $y = \left(p_i^{e_i} \times \mu_i\right) \cdot m$, untuk suatu $m \in M$. Perhatikan bahwa

$$y = \left(p_i^{e_i} \times \mu_i\right) \cdot m = p_i^{e_i} \cdot (\mu_i \cdot m) \in p_i^{e_i} \cdot (\mu_i \cdot M).$$

Hal ini berarti bahwa $\left(p_i^{e_i} \times \mu_i\right) \cdot M \subseteq p_i^{e_i} \cdot (\mu_i \cdot M)$. Karena $p_i^{e_i} \cdot (\mu_i \cdot M) \subseteq \left(p_i^{e_i} \times \mu_i\right) \cdot M$ dan $\left(p_i^{e_i} \times \mu_i\right) \cdot M \subseteq p_i^{e_i} \cdot (\mu_i \cdot M)$, maka $p_i^{e_i} \cdot (\mu_i \cdot M) = \left(p_i^{e_i} \times \mu_i\right) \cdot M$.

Perhatikan bahwa

$$p_i^{e_i} \cdot (\mu_i \cdot M) = \left(p_i^{e_i} \cdot \mu_i\right) \cdot M = \mu \cdot M$$

Karena μ adalah orde dari M, yaitu $\langle\mu\rangle = ann(M)$, maka $\mu \cdot m = 0$, untuk semua $m \in M$. Hal ini berarti bahwa $\mu \cdot M = \{0\}$. Dengan demikian, $\mu_i \cdot M \subseteq M_{p_i}$.

b) Misalkan $x \in M_{p_i}$. Tulis $x = 1 \cdot x$. Perhatikan bahwa untuk setiap $i = 1,2, \dots, n$, μ_i dan $p_i^{e_i}$ saling relatif prima, yaitu

untuk $i = 1$, $\mu_1 = p_2^{e_2} \times \dots \times p_n^{e_n}$,

untuk $i = 2$, $\mu_2 = p_1^{e_1} \times \dots \times p_n^{e_n}$,

dan sampai untuk suatu n, $\mu_n = p_1^{e_1} \times \dots \times p_{n-1}^{e_{n-1}}$.

Karena μ_i dan $p_i^{e_i}$ adalah relatif prima, maka berdasarkan Teorema 2.41 terdapat $a, b \in R$ sedemikian sehingga

$$a \cdot \mu_i + b \cdot p_i^{e_i} = 1$$

Dengan demikian,

$$\begin{aligned} x &= 1 \cdot x \\ &= \left(a \times \mu_i + b \times p_i^{e_i}\right) \cdot x \\ &= (a \times \mu_i) \cdot x + \left(b \times p_i^{e_i}\right) \cdot x \\ &= (\mu_i \cdot a) \cdot x + b \cdot \left(p_i^{e_i}\right) \cdot x \\ &= \mu_i \cdot (a \cdot x) \in \mu_i \cdot M \end{aligned}$$

Karena untuk sebarang $x \in M_{p_i}$ diperoleh $x \in \mu_i \cdot M$, maka $M_{p_i} \subseteq \mu_i \cdot M$.

Berdasarkan a) dan b), terbukti bahwa $M_{p_i} = \mu_i \cdot M$

3) Misalkan $x \in M$. Tulis $x = 1 \cdot x$. Perhatikan bahwa $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ adalah relatif prima, yaitu

$\mu_1 = \frac{\mu}{p_1^{e_1}} = p_2^{e_2} \times \dots \times p_n^{e_n}$,

$\mu_2 = \frac{\mu}{p_2^{e_2}} = p_1^{e_1} \times \dots \times p_n^{e_n}$,

demikian juga sampai n diperoleh

$\mu_n = \frac{\mu}{p_n^{e_{n2}}} = p_1^{e_1} \times \dots \times p_{n-1}^{e_{n-1}}$.

Karena $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ saling relatif prima, maka berdasarkan Corollary 2.42, terdapat $a_1, a_2, \dots, a_n \in R$ sedemikian sehingga

$$a_1 \times \mu_1 + a_2 \times \mu_2 + \dots + a_n \times \mu_n = 1.$$

Dengan demikian,

$$\begin{aligned} x &= 1 \cdot x \\ &= (a_1 \times \mu_1 + a_2 \times \mu_2 + \dots + a_n \times \mu_n) \cdot x \\ &= (a_1 \times \mu_1) \cdot x + (a_2 \times \mu_2) \cdot x + \dots + (a_n \times \mu_n) \cdot x \\ &= (\mu_1 \times a_1) \cdot x + (\mu_2 \times a_2) \cdot x + \dots + (\mu_n \times a_n) \cdot x \\ &= \mu_1 \cdot (a_1 \cdot x) + \mu_2 \cdot (a_2 \cdot x) + \dots + \mu_n \cdot (a_n \times x) \end{aligned}$$

Karena $x = \mu_1 \cdot (a_1 \cdot x) + \mu_2 \cdot (a_2 \cdot x) + \dots + \mu_n \cdot (a_n \times x)$ dan $\mu_1 \cdot (a_1 \cdot x) + \dots + \mu_n \cdot (a_n \times x) \in \mu_1 \cdot M + \dots + \mu_n \cdot M = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot M$, maka $x \in \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot M$. Lebih lanjut, karena untuk sebarang $x \in M$ diperoleh $x \in \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot M$, maka $M \subseteq \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot M$.

Selanjutnya, misalkan $y \in \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot M$. Tulis $y = \mu_1 \cdot m_1 + \mu_2 \cdot m_2 + \dots + \mu_n \cdot m_n$, dengan $m_1, m_2, \dots, m_n \in M$. Karena untuk setiap $i = 1,2, \dots, n$ $\mu_i \in R$ dan $m_i \in M$, maka $\mu_i \cdot m_i \in M$. Akibatnya, $y = \mu_1 \cdot m_1 + \mu_2 \cdot m_2 + \dots + \mu_n \cdot m_n \in M$. Karena untuk sebaran $x \in \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot M$ diperoleh $x \in M$, maka $\sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot M \subseteq M$.

Lebih lanjut, karena $M \subseteq \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot M$ dan $\sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot M \subseteq M$, maka $M = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot M$.

4) Misalkan $x \in \mu_i \cdot M \cap \sum_{j \neq i} \mu_j \cdot M$. Hal ini berarti bahwa $x \in \mu_i \cdot M$ dan $x \in \sum_{j \neq i} \mu_j \cdot M$.

Untuk $x \in \mu_i \cdot M = M_{p_i}$, tulis $x = \mu_i \cdot v_i$, dengan $v_i \in M_{p_i}$. Sedangkan untuk $x \in \sum_{j \neq i} \mu_j \cdot M = \sum_{j \neq i} M_{p_j}$ =, tulis

$x = \mu_1 \cdot v_1 + \cdots + \mu_{i-1} \cdot v_{i-1} + \mu_{i+1} \cdot v_{i+1} + \cdots + \mu_n \cdot v_n$,

dengan $v_j \in M_{p_j}$.

Dengan demikian,

$\mu_1 \cdot v_1 + \cdots + \mu_{i-1} \cdot v_{i-1} + \mu_{i+1} \cdot v_{i+1} + \cdots + \mu_n \cdot v_n = \mu_i \cdot v_i$

Perhatikan bahwa

$\mu_1 \cdot v_1 + \cdots + \mu_{i-1} \cdot v_{i-1} + \mu_{i+1} \cdot v_{i+1} + \cdots + \mu_n \cdot v_n = \mu_i \cdot v_i$

$\Leftrightarrow \mu_1 \cdot (\mu_1 \cdot v_1 + \cdots + \mu_{i-1} \cdot v_{i-1} + \mu_{i+1} \cdot v_{i+1} + \cdots + \mu_n \cdot v_n)$

$= \mu_1 \cdot (\mu_i \cdot v_i)$

$\Leftrightarrow \mu_1 \cdot (\mu_1 \cdot v_1) + \cdots + \mu_1 \cdot (\mu_{i-1} \cdot v_{i-1}) + \mu_1 \cdot (\mu_{i+1} \cdot v_{i+1}) + \cdots +$

$\mu_1 \cdot (\mu_n \cdot v_n) = \mu_1 \cdot (\mu_i \cdot v_i)$

Karena $\mu_1 = p_2^{e_2} \times \ldots \times p_{i-1}^{i-1} \times p_i^{e_i} \times p_{i+1}^{e_{i+1}} \times p_n^{e_n}$ mengnolkan $\mu_2 \cdot v_2, \ldots, \mu_{i-1} \cdot v_{i-1}, \mu_i \cdot v_i, \mu_{i+1} \cdot v_{i+1}, \ldots, \mu_n \cdot v_n$, maka diperoleh $\mu_1 \cdot (\mu_1 \cdot v_1) = 0$. Hal ini berarti bahwa $\mu_1 \in \langle p_1^{e_1} \rangle$. Tulis $\mu_1 = r \times p_1^{e_1}$, untuk suatu $r \in R$. Akibatnya,

$\mu_1 \cdot v_1 = (r \times p_1^{e_1}) \cdot v_1 = r \cdot (p_1^{e_1} \cdot v_1) = 0$.

Dengan cara yang sama, akan diperoleh

$$\mu_2 \cdot v_2 = \cdots = \mu_{i-1} \cdot v_{i-1} = \mu_i \cdot v_i = \mu_{i+1} \cdot v_{i+1} = \cdots = \mu_n \cdot v_n = 0.$$

Hal ini berarti bahwa $x = 0$. Dengan demikian,

$$\mu_i \cdot M \cap \sum_{j \neq i} \mu_j \cdot M = \{0\}.$$

Berdasarkan 1), 2), 3), dan 4), terbukti bahwa modul torsi yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama dapat didekomposisikan menjadi jumlah langsung submodul-submodul primer.

Langkah terakhir dalam mendekomposisikan modul yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama menjadi jumlah langsung submodul-submodul siklis adalah dengan mendekomposisikan modul primer menjadi jumlah langsung submodul-submodul siklis. Hal ini terangkum dalam Teorema 3.4 sebagai berikut:

Teorema 3.4

Misalkan M adalah modul torsi primer yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama berorde p^e, dengan p unsur prima di R dan $e \in Z^+$, maka M adalah jumlah langsung

$$M = \langle\langle v_1 \rangle\rangle \oplus \langle\langle v_1 \rangle\rangle \oplus \ldots \oplus \langle\langle v_n \rangle\rangle$$

dari submodul-submodul siklis dengan *annihilator* $ann(\langle\langle v_i \rangle\rangle) = \langle p^{e_i} \rangle$, yang dapat disusun dalam orde naik

$$ann(\langle\langle v_1 \rangle\rangle) \subseteq ann(\langle\langle v_2 \rangle\rangle) \subseteq \cdots \subseteq ann(\langle\langle v_n \rangle\rangle)$$

atau ekuivalen

$$e = e_1 \geq e_2 \geq \cdots \geq e_n$$

(Roman, 2008:149).

Bukti :

Misalkan M adalah modul primer yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama R berorde p^e, dimana p prima dan $e \in \mathbb{Z}^+$. Untuk membuktikan bahwa M adalah jumlah langsung dari submodul-submodul siklis, yaitu $M = \langle\langle v_1 \rangle\rangle \oplus \langle\langle v_2 \rangle\rangle \oplus \ldots \oplus \langle\langle v_n \rangle\rangle$ dengan $ann(\langle\langle v_i \rangle\rangle) = \langle p^{e_i} \rangle$, akan ditunjukkan bahwa: 1) unsur-unsur di M berorde p^k, dengan $k \in \mathbb{Z}^+$ dan $k \geq e$, 2) setiap submodul dari modul primer yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama adalah primer, 3) terdapat $v \in M$ berorde p^e, dan 4) dengan induksi, akan ditunjukkan bahwa $M = \langle\langle v_1 \rangle\rangle \oplus S_k$, dimana $v_1 \in M$ dan S adalah submodul primer dari M.

1) Jelas bahwa $ann(v) \subseteq \langle p^k \rangle$.

   Selanjutnya, misalkan $v \in M$. Karena M berorde p^e, maka $ann(M) = \langle p^e \rangle$. Hal ini berarti bahwa unsur-unsur di M dinolkan oleh $\langle p^e \rangle$. Lebih lanjut, jika $v \in M$, maka v dinolkan oleh $\langle p^k \rangle$ dimana $k \geq e$. Hal ini berarti bahwa $\langle p^k \rangle \subseteq ann(v)$. Karena $ann(v) \subseteq \langle p^e \rangle$ dan $\langle p^k \rangle \subseteq ann(v)$, maka $ann(v) = \langle p^k \rangle$. Hal ini berarti bahwa orde dari suatu $v \in M$ adalah p^k. Karena untuk sebarang $v \in M$ berorde p^k, maka unsur-unsur di M berorde p^k.

2) Jelas bahwa $ann(S) \subseteq \langle p^k \rangle$.

   Selanjutnya, misalkan S adalah submodul dari modul primer M yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama R. Karena S submodul dari M, maka $S \subseteq M$. Lebih lanjut, karena $v \in M$ dinolkan oleh p^k, maka unsur-unsur di S juga dinolkan oleh p^k. Hal ini berarti bahwa $\langle p^k \rangle \subseteq ann(S)$. Karena $ann(S) \subseteq \langle p^k \rangle$ dan $\langle p^k \rangle \subseteq ann(S)$, maka $ann(S) = \langle p^k \rangle$. Hal ini berarti bahwa orde dari S adalah p^k. Karena orde dari S adalah perpangkatan dari suatu unsur prima, maka S adalah modul primer.

3) Andaikan tidak terdapat $v \in M$ berorde p^e. Hal ini berarti bahwa $ann(v) = \langle p^k \rangle$ dengan $k > e$. Akibatnya, $p^e \cdot v \neq 0$, untuk suatu $v \in M$. Hal ini kontradiksi dengan orde M adalah p^e. Dengan demikian haruslah terdapat $v \in M$ berorde p^e.

4) Pilih v_1 yang berorde p^e. Perhatikan bahwa $\langle\langle v_1 \rangle\rangle$ adalah submodul dari M.

   Jelas bahwa $\langle\langle v_1 \rangle\rangle \cap \{0\}$ ada. Misalkan $M_1 = \langle\langle v_1 \rangle\rangle \cap \{0\}$.

   Asumsikan bahwa ada $S_k < M$ sehingga $\langle\langle v_1 \rangle\rangle + S_k$ adalah jumlah langsung. Misalkan $M_k = \langle\langle v_1 \rangle\rangle \oplus S_k$.

   Akan dicari $S_{k+1} > S_k$ sehingga $\langle\langle v_1 \rangle\rangle + S_{k+1}$ adalah jumlah langsung.

   Misalkan $M_{k+1} = \langle\langle v_1 \rangle\rangle \oplus S_{k+1}$ dan $S_{k+1} = \langle\langle S_k, u - \alpha \cdot v_1 \rangle\rangle$, dengan $u \in M \backslash M_k$. Dengan demikian, akan ditentukan α sedemikian sehingga $\langle\langle v_1 \rangle\rangle + S_{k+1}$ adalah jumlah langsung, yaitu $\langle\langle v_1 \rangle\rangle \cap S_{k+1} = \{0\}$.

   Misalkan $x \in \langle\langle v_1 \rangle\rangle \cap S_{k+1}$. Untuk $x \in \langle\langle v_1 \rangle\rangle$, tulis $x = a \cdot v_1$ dengan $a \in R$. Untuk $x \in S_{k+1}$, tulis $x = s + b \cdot (u - \alpha \cdot v_1)$ dengan $s \in S_k$ dan $b \in R$.

   Akibatnya,

   $$a \cdot v_1 = s + b \cdot (u - \alpha \cdot v_1)$$

   Selanjutnya, akan ditentukan $\alpha \in R$ sedemikian sehingga $b \cdot (u - \alpha \cdot v_1) \in S_k$.

   Perhatikan bahwa

$$a \cdot v_1 = s + b \cdot (u - \alpha \cdot v_1)$$

$$\Leftrightarrow \quad a \cdot v_1 = s + b \cdot u - b \cdot (\alpha \cdot v_1)$$

$$\Leftrightarrow \quad a \cdot v_1 = s + b \cdot u - (b \times \alpha) \cdot v_1$$

$$\Leftrightarrow \quad a \cdot v_1 + (b \times \alpha) \cdot v_1 - s = b \cdot u$$

$$\Leftrightarrow \quad \big(a + (b \times \alpha)\big) \cdot v_1 - s = b \cdot u$$

Karena $(a + b \times \alpha) \cdot v_1 - s \in \langle\langle v_1 \rangle\rangle \oplus S_k = M_k$, maka $b \cdot u \in M_k$.

Misalkan $\mathcal{I} = \{r \in R \mid r \cdot u \in M_k\}$. Perhatikan bahwa $\mathcal{I}$ adalah ideal utama.

Karena $p^e \cdot u = 0 \in M_k$, maka $p^e \in \mathcal{I}$. Selain itu, karena $\mathcal{I}$ adalah utama, maka $\mathcal{I} = \langle p^f \rangle$ dengan $f \leq e$.

Selanjutnya, karena $b \cdot u \in M_k$, maka $b \in \mathcal{I}$. Akibatnya, $b = \beta \times p^f$ untuk suatu $\beta \in R$.

Perhatikan bahwa $p^f \cdot u \in M_k = \langle\langle v_1 \rangle\rangle \oplus S_k$. Tulis $p^f \cdot u = a_2 \cdot v_1 + t$, dimana $a_2 \in R$ dan $t \in S_k$.

Dengan demikian,

$$\begin{aligned} b \cdot u &= (\beta \times p^f) \cdot u = \beta \cdot (p^f \cdot u) = \beta \cdot (a_2 \cdot v_1 + t) \\ &= \beta \cdot (a_2 \cdot v_1) + \beta \cdot t \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa

$$p^f \cdot u = a_2 \cdot v_1 + t$$

$$\Leftrightarrow \quad p^{e-f} \cdot (p^f \cdot u) = p^{e-f} \cdot (a_2 \cdot v_1 + t)$$

$$\Leftrightarrow \quad (p^{e-f} \times p^f) \cdot u = p^{e-f} \cdot (a_2 \cdot v_1) + p^{e-f} \cdot t$$

$$\Leftrightarrow \quad p^e \cdot u = p^{e-f} \cdot (a_2 \cdot v_1) + p^{e-f} \cdot t$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = (p^{e-f} \times a_2) \cdot v_1 + p^{e-f} \cdot t \in \langle\langle v_1 \rangle\rangle \oplus S_k$$

Karena $(p^{e-f} \times a_2) \cdot v_1 + p^{e-f} \cdot t = 0$ dan $\langle\langle v_1 \rangle\rangle \cap S_k = \{0\}$, maka

$(p^{e-f} \times a_2) \cdot v_1 = 0$. Hal ini berarti bahwa $p^{e-f} \times a_2 \in \langle\langle p^e \rangle\rangle$. Tulis $p^{e-f} \times a_2 = c_1 \times p^e$ untuk suatu $c_1 \in R$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} & p^{e-f} \times a_2 &= c_1 \times p^e \\ \Leftrightarrow \quad & p^f \times p^{e-f} \times a_2 &= p^f \times c_1 \times p^e \\ \Leftrightarrow \quad & p^e \times a_2 &= p^f \times c_1 \times p^e \\ \Leftrightarrow \quad & a_2 &= p^f \times c_1 \end{aligned}$$

Hal ini berarti bahwa $p^f | a_2$. Lebih lanjut, karena $p^f | a_2$, maka terdapat $\delta \in R$ sedemikian sehingga $a_2 = \delta \times p^f$.

Selanjutnya, diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} & b \cdot u &= \beta \cdot (a_2 \cdot v_1) + \beta \cdot t \\ \Leftrightarrow \quad & b \cdot u &= (\beta \times a_2) \cdot v_1 + \beta \cdot t \\ \Leftrightarrow \quad & b \cdot u &= (a_2 \times \beta) \cdot v_1 + \beta \cdot t \\ \Leftrightarrow \quad & b \cdot u &= a_2 \cdot (\beta \cdot v_1) + \beta \cdot t \\ \Leftrightarrow \quad & b \cdot u &= \delta \times p^f \cdot (\beta \cdot v_1) + \beta \cdot t \\ \Leftrightarrow \quad & b \cdot u &= (\delta \times p^f \times \beta) \cdot v_1 + \beta \cdot t \\ \Leftrightarrow \quad & b \cdot u &= (\delta \times \beta \times p^f) \cdot v_1 + \beta \cdot t \\ \Leftrightarrow \quad & b \cdot u &= (\delta \times b) \cdot v_1 + \beta \cdot t \\ \Leftrightarrow \quad & b \cdot u &= (b \times \delta) \cdot v_1 + \beta \cdot t \\ \Leftrightarrow \quad & b \cdot u &= b \cdot (\delta \cdot v_1) + \beta \cdot t \\ \Leftrightarrow \quad & b \cdot u - b \cdot (\delta \cdot v_1) &= \beta \cdot t \\ \Leftrightarrow \quad & b \cdot (u - \delta \cdot v_1) &= \beta \cdot t \end{aligned}$$

Dengan demikian, pilih $\alpha = \delta$. Dengan cara yang sama, dapat ditunjukkan bahwa terdapat submodul primer S dari S_{k+1} sedemikian sehingga $S_{k+1} = \langle\langle v_2 \rangle\rangle \oplus S$ dengan orde v_2 sama dengan orde S_{k+1}. Perhatikan bahwa dekomposisi $M = \langle\langle v_1 \rangle\rangle \oplus \ldots \oplus \langle\langle v_n \rangle\rangle \oplus S_k$ dapat berlanjut jika $S_n \neq \{0\}$. Tetapi karena M adalah Modul Noether, maka rantai naik submodul

$$\langle\langle v_1 \rangle\rangle \subseteq \langle\langle v_1 \rangle\rangle \oplus \langle\langle v_2 \rangle\rangle \subseteq \cdots$$

harus berhenti. Hal ini berarti bahwa terdapat bilangan bulat n sehingga pada akhirnya $S_n = \{0\}$.

Berdasarkan 1), 2), 3), dan 4), terbukti bahwa modul torsi primer yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama adalah jumlah langsung dari submodul-submodul siklis.

Sebagaimana telah disebutkan pada subbab 2.13 bahwa pengelompokan manusia pada hari kiamat merupakan salah satu contoh kajian dekomposisi yang berkaitan dengan Islam. Allah Swt. berfirman di dalam al-Quran surat al-Waqi’ah ayat 7-10, yaitu:

وَكُنتُمۡ أَزۡوَٰجٗا ثَلَٰثَةٗ ٧ فَأَصۡحَٰبُ ٱلۡمَيۡمَنَةِ مَآ أَصۡحَٰبُ ٱلۡمَيۡمَنَةِ ٨ وَأَصۡحَٰبُ ٱلۡمَشۡـَٔمَةِ
مَآ أَصۡحَٰبُ ٱلۡمَشۡـَٔمَةِ ٩ وَٱلسَّٰبِقُونَ ٱلسَّٰبِقُونَ ١٠

Artinya: *“Dan kamu menjadi tiga golongan (7). Yaitu golongan kanan, alangkah mulianya golongan kanan itu (8), dan golongan kiri, alangkah sengsaranya golongan kiri itu (9), dan orang-orang yang paling dahulu (beriman), merekalah yang paling dahulu (masuk surga) (10)”* (QS. al-Waqiah/56:7-10).

Berdasarkan surat al-Waqi’ah ayat 7-10 tersebut, dapat diketahui bahwa pada hari kiamat, Allah Swt. membagi manusia menjadi 3 golongan. Golongan-golongan tersebut adalah:

1. Golongan kanan, yaitu orang-orang yang menerima catatan amalnya melalui tangan kanan,

2. Golongan kiri, yaitu orang-orang yang menerima catatan amalnya melalui tangan kiri, dan
3. Orang-orang yang paling dahulu beriman, yaitu orang-orang yang selalu bersegera dalam mengerjakan kebaikan.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Modul yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama dapat didekomposisikan menjadi jumlah langsung submodul-submodul siklis melalui langkah-langkah sebagai berikut:

1 Mendekomposisikan modul yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama menjadi jumlah langsung submodul bebas dan submodul torsi yang dibangun secara hingga.

2 Mendekomposisikan modul bebas yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama menjadi jumlah langsung submodul-submodul siklis.

3 Mendekomposisikan modul torsi yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama menjadi jumlah langsung submodul-submodul primer yang dibangun secara hingga.

4 Mendekomposisikan modul primer yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama menjadi jumlah langsung submodul-submodul siklis.

4.2 Saran

Pada penelitian ini, penulis telah melakukan dekomposisi modul yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama. Lebih lanjut, penulis menyarankan kepada peneliti selanjutnya untuk melakukan penelitian tentang dekomposisi modul dengan gelanggang tumpuan yang berbeda, misalkan daerah Dedekind, dan lain-lain. Dengan demikian, pada penelitian selanjutnya diharapkan peneliti dan para pembaca dapat mengetahui sifat-sifat dekomposisi modul dengan gelanggang tumpuan yang berbeda-beda dan mengetahui perbedaan masing-masing dekomposisi tersebut.

DAFTAR RUJUKAN

Adkins, W.A dan Weintraub, S.H. 1992. *Algebra: An Approach via Module Theory*. New York: Springer-Verlag.

Al-Barry, M.D. dan Yacub, L.L. 2003. *Kamus Induk Istilah Ilmiah.* Surabaya: Target Press.

Al-Jazairi, S.A. 2009. *Tafsir Al-Qur'an Al-Aisar (Jilid 7)*. Jakarta: Darus Sunnah Press.

Dummit, D.S dan Foote, R.M. 2004. *Abstract Algebra*. New York: John Wiley and Sons, Inc.

Fraleigh, J.B. dan Katz, V.J. 2003. *A First Course in Abstract Algebra*. Boston: Addison-Wesley.

Gallian, J.A. 2013. *Contemporary Abstract Algebra*. Boston: Nelson Education, Ltd.

Gilbert, L. dan Gilbert, J. 2009. *Elements of Modern Algebra*. Belmont: Nelson Education, Ltd.

Ismiarti, D. 2014. *Dekomposisi Modul yang Dibangun Secara Hingga Atas Daerah Dedekind*. Tesis tidak dipublikasikan. Bandung: Institut Teknologi Bandung.

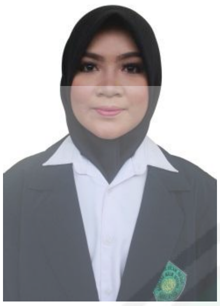
Ismiarti, D., Amalia, D. dan Al-Imani, S.Q. 2016. *Karakterisasi Submodul Terkomplemen dari Modul Bebas yang Dibangun Secara Hingga Atas Daerah Dedekind*. Laporan Penelitian Dosen Bersama Mahasiswa tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Junaidi, N. 2010. *Tafsir Jalalain Jilid 3*. Surabaya: Percetakan Fithrah.

Mudzakir. 2015. *Studi Ilmu-Ilmu Qur'an*. Bogor: Pustaka Litera Antarnusa.

Roman, S. 2008. *Advanced Linear Algebra*. New York: Springer.

RIWAYAT HIDUP



Diana Amalia dilahirkan di Sidoarjo pada tanggal 25 September 1995, anak ketiga dari empat bersaudara, pasangan bapak Abdul Salam (Alm) dan ibu Lailatul Mufidah. Pendidikan dasarnya ditempuh di MI Darussalam Banjarasri yang ditamatkan pada tahun 2007.

Pada tahun yang sama dia melanjutkan pendidikan menengah pertama di SMP Negeri 2 Tanggulangin dan lulus pada tahun 2010. Pada tahun 2010, dia melanjutkan pendidikan menengah atas di MAN Sidoarjo dan lulus pada tahun 2013. Pendidikan berikutnya dia tempuh di Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang setelah diterima melalui jalur SPMB-PTAIN Prestasi. Dia tercatat sebagai salah satu mahasiswa penerima beasiswa bidikmisi angkatan 2013.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Diana Amalia
NIM : 13610027
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Dekomposisi Siklis Modul yang Dibangun Secara Hingga Atas Daerah Ideal Utama
Pembimbing I : H. Wahyu H. Irawan, M.Pd
Pembimbing II : Abdul Aziz, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	23 Februari 2017	Konsultasi Bab I, II, dan III	1.
2.	13 Maret 2017	Konsultasi Agama Bab I	2.
3.	31 Maret 2017	ACC Agama Bab I dan Konsultasi Agama BAB II	3.
4.	7 April 2017	ACC Bab I, Bab II, dan Bab III	4.
5.	11 April 2017	ACC Agama Bab II	5.
6.	14 Juni 2017	Konsultasi Kesimpulan	6.
7.	14 Juni 2017	Konsultasi Keseluruhan	7.
8.	14 Juni 2017	Konsultasi Agama Bab III	8.
9.	14 Juni 2017	ACC Agama Bab III	9.
10.	14 Juni 2017	ACC Keseluruhan Kajian Agama	10.
11.	14 Juni 2017	ACC Keseluruhan	11.

Malang, 14 Juni 2017
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001