APLIKASI ALJABAR MIN-PLUS
DALAM MENGHITUNG NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN
PADA MATRIKS $N \times N$

SKRIPSI

OLEH
MUHAMMAD NASICHUDDIN
NIM. 12610094

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018

APLIKASI ALJABAR MIN-PLUS
DALAM MENGHITNG NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN
PADA MATRIKS $N \times N$

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Muhammad Nasichuddin
NIM. 12610094

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018

APLIKASI ALJABAR MIN-PLUS
DALAM MENGHITNG NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN
PADA MATRIKS $N \times N$

SKRIPSI

Oleh
Muhammad Nasichuddin
NIM. 12610094

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 06 Maret 2017

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Evawati Alisah, M.Pd	Dr. Imam Sujarwo, M.Pd
NIP. 19720604 199903 2 001	NIP. 19630502 198703 1 005

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

APLIKASI ALJABAR MIN-PLUS
DALAM MENGHITUNG NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN
PADA MATRIKS $N \times N$

SKRIPSI

Oleh
Muhammad Nasichuddin
NIM. 12610094

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan untuk Memperoleh Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal 26 April 2017

Penguji Utama	: Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D NIP. 19571005 198203 1 006	....
Ketua Penguji	: Hairur Rahman, M.Si NIP. 19800429 200604 1 003	....
Sekretaris Penguji	: Evawati Alisah, M.Pd NIP. 19720604 199903 2 001	....
Anggota Penguji	: Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd NIP. 19630502 198703 1 005	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	Muhammad Nasichuddin
NIM	:	12610094
Jurusan	:	Matematika
Fakultas	:	Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	:	Aplikasi Aljabar Min-Plus dalam Menghitung Nilai Eigen dan Vektor Eigen pada Matriks $N \times N$

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 06 Maret 2017
… pernyataan,

METERAI TEMPEL
TGL. 20
11C85AFF197502594
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Muhammad Nasichuddin
NIM. 12610094

MOTTO

اَلصَّبْرُيُعِيْنُ عَلى كُلِّ عَمَلٍ

(kesabaran itu menolong segala pekerjaan)

PERSEMBAHAN

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيم

Teriring do’a semoga skripsi ini bermanfaat dan menjadi kesuksesan dunia akhirat, penulis persembahkan skripsi ini untuk:

Ibunda Haniyah dan Ayahanda H. Choirul Anwar tercinta yang tak henti-hentinya dengan ikhlas dan sabar mendoakan, memberi dukungan, motivasi, mendengarkan keluh kesah penulis, dan ridho kepada penulis dalam menuntut ilmu, serta selalu membawa penulis ke jalan yang Allah Ridhoi.

.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Alhamdulillah, segala puja dan puji syukur bagi Allah Swt, atas limpahan rahmat, taufik, hidayah, dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan dengan baik penyusunan skripsi yang berjudul "Aplikasi Aljabar Min-Plus dalam Menghitung Nilai Eigen dan Vektor Eigen pada Matriks $N \times N$".

Shalawat serta salam senantiasa terlimpahkan kepada nabi besar Muhammad Saw, yang telah menuntun umatnya dari zaman yang gelap ke zaman yang terang benderang yakni *ad-Diin al-Islam*.

Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Dalam proses penyusunannya tidak mungkin dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan, bimbingan, serta arahan dari berbagai pihak. Untuk itu penulis menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Evawati Alisah, M.Pd, selaku dosen pembimbing I yang senantiasa memberikan doa, arahan, nasihat, dan motivasi dalam melakukan penelitian, serta pengalaman yang berharga kepada penulis.

5. Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd, selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, arahan, dan berbagai ilmunya kepada penulis.
6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.
7. Orang tua yang selalu memberikan doa, semangat, serta motivasi kepada penulis hingga saat ini.
8. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2012, terutama Febriana Nuzulul Hikmah, dan "Teman-teman seperjuangan Ibnu Abbas Nurul Huda" yang tiada hentinya membantu, mendukung, dan mendoakan dalam mewujudkan cita-cita, terima kasih atas kenangan-kenangan indah yang dirajut bersama dalam menggapai cita-cita.
9. Semua pihak yang secara langsung atau tidak langsung telah ikut memberikan bantuan dalam menyelesaikan skripsi ini.

Akhirnya penulis hanya bisa berharap, di skripsi ini dapat ditemukan sesuatu yang dapat memberikan manfaat dan wawasan yang lebih luas atau bahkan hikmah bagi penulis, pembaca, dan bagi seluruh mahasiswa.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, Maret 2017

Penulis

DAFTAR ISI

BAB III PEMBAHASAN

BAB V PENUTUP

ABSTRAK

Nasichuddin, Muhammad. 2017. **Aplikasi Aljabar Min-Plus dalam Menghitung Nilai Eigen dan Vektor Eigen pada Matriks $\boldsymbol{N \times N}$.** Tugas akhir/skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Evawati Alisah, M.Pd. (II) Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd.

Kata kunci: Aljabar Min-Plus, Nilai Eigen, dan Vektor Eigen.

Matematika merupakan bidang ilmu pengetahuan yang mengalami perkembangan seiring kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi. Salah satu cabang dari matematika yaitu aljabar. Aljabar dikembangkan menjadi Aljabar Min-Plus.

Aljabar Min-Plus didefinisikan $R_{min} = R \cup \{\varepsilon\}$ dengan R adalah himpunan bilangan real dan $\varepsilon = -\infty$ dan $e = 0$ untuk $a, b \in R_{min}$ dengan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ yaitu: $a \oplus b = \min(a, b)$ dan $a \otimes b = a + b$, yang dinotasikan sebagai berikut: $(R_{min}, \oplus, \otimes)$.

Tujuan dari penelitian ini adalah mendiskripsikan prosedur perhitungan dan hasil pada nilai Eigen dan vektor Eigen dalam bentuk umum dengan menggunakan Aljabar Min-Plus pada matriks $n \times n$. Berdasarkan hasil pembahasan prosedur perhitungan dan hasil pada nilai Eigen dan vektor Eigen menggunakan Aljabar Min-Plus pada matriks $n \times n$ adalah menghitung vektor Eigen dengan Aljabar Min-Plus dengan Cara $v = \oplus_{i=1}^{p-q} \left(\lambda^{\oplus(p-q-i)} \otimes x(q+i-1)\right)$ maka diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ f_{31} \\ \vdots \\ f_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ f_{31} \\ \vdots \\ f_{n1} \end{bmatrix}$$

Pada penelitian ini selanjutnya disarankan untuk membahas tentang nilai Eigen dan vektor Eigen dengan menggunakan metode yang lain ataupun menggunakan matriks yang lainnya.

ABSTRACT

Nasichuddin, Muhammad. 2017. **Min-Plus Algebra Application in Calculating Eigen values and Eigen Vectors in Matrix $N \times N$**. The final project / thesis. Department of Mathematics Faculty of Science and Technology, the State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Supervisor: (I) Evawati Alisah, M.Pd. (II) Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd

Keywords: Min-Plus Algebra, Eigen values and Eigen vectors.

Math is an area of science that has developed in line with the progress of science and technology. One branch of mathematics is algebra. Algebra developed into Min-Plus Algebra

Min-Plus Algebra is defined by $R_{min} = R \cup \{\varepsilon\}$ with R is the set of real numbers and $\varepsilon = -\infty$ and $e = 0$ for $a, b \in R_{min}$ with operations $\oplus$ and $\otimes$ are defined as follows: $a \oplus b = \min(a, b)$ and $a \oplus b = \min(a, b)$, which is denoted as follows: $(R_{min}, \oplus, \otimes)$.

The purpose of this study is to describe the calculation procedure and the results of the eigen values and Eigen vectors using Min-Plus Algebra in $n \times n$ matrix. Based on the results of the discussion of the calculation procedure and the results of the Eigen values and Eigen vector using the Min-Plus Algebra in $n \times n$ matrix is calculating the Eigen vectors with Min-Plus Algebra with $v = \oplus_{i=1}^{p-q} \left(\lambda^{\oplus(p-q-i)} \otimes x(q+i-1)\right)$ then obtained as follows:

$$\begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ f_{31} \\ \vdots \\ f_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ f_{31} \\ \vdots \\ f_{n1} \end{bmatrix}$$

In this study, it is further recommended to discuss the Eigen values and Eigen vector by using other methods or using other matrix.

ملخص

ناسيكحالدين، محمد.٢٠١٧. دقيقة بالإضافة إلى تطبيق ا لجبر Min-Plus في حساب معامل التحول ا لخطي وناقلات إيغين في المصفوفة. المشروع النهائي / أطروحة. قسم الرياضيات كلية العلوم والتكنولوجيا، وجامعة ولاية الإسلامية مولانا مالك إبراهيم مالانج.

المشرف: (I) ،إيفاواطعلي ساه, ماجستير (II) الدكتور حسين الإمام سوجروا، ماجستير.

كلمات: الرئيسية الجبر Min-Plus القيم الذاتية والمتجهات الذاتية.

الرياضيات هو مجال العلوم التي تطورت في خط مع تقدم العلم والتكنولوجيا. فرع واحد من الرياضيات هو الجبر. الجبر وضعت في الجبر Min-Plus

الجبر Min-Plus تعريف بـ $R_{min} = R \cup \{\varepsilon\}$ مع R هي مجموعة من الأرقام الحقيقية و $\varepsilon = -\infty$ و $e = 0$ ، عمليات $\oplus a, b \in R_{min}$ و$\otimes$ يتم معها على النحو التالي: $a \oplus b = \min(a, b)$ و $a \oplus b = \min(a, b),$ ، التي تدل على النحو التالي: $(R_{min}, \oplus, \otimes)$.

والغرض من هذه الدراسة هو وصف الإجراء الحساب ونتائج القيم الذاتية والمتجهات الذاتية باستخدام الجبر Min-Plus في المصفوفة $n \times n$. وبناء على نتائج مناقشة إجراء حساب ونتائج القيم الذاتية والمتجهات الذاتية باستخدام مين زائد الجبر Min-Plus في مصفوفة $n \times n$في Min-Plus الحساب المتجهات الذاتية مع الجبر مع ا= v $\bigoplus_{i=1}^{p-q} \left(\lambda^{\oplus(p-q-i)} \otimes x(q+i-1)\right)$ ثم حصل على النحو التالي:

$$\begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ f_{31} \\ \vdots \\ f_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ f_{31} \\ \vdots \\ f_{n1} \end{bmatrix}$$

في هذه الدراسة، فمن المستحسن كذلك لمناقشة القيم الذاتية والمتجهات الذاتية باستخدام طرائق أخرى أو باستخدام مصفوفة أخرى.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan bidang ilmu pengentahuan yang mengalami perkembangan seiring dengan kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi. Dalam kehidupan sehari-hari tidak sedikit permasalahan membutuhkan matematika dalam menyelesaikannya mulai dari masalah sosial, agama dan lainnya. Hal ini yang menjadikan keberadaan matematika sangat penting, sehingga persoalan apapun, mulai dari yang paling sederhana sampai pada persoalan yang rumit akan membutuhkan matematika. Salah satu cabang matematika adalah aljabar.

Matriks merupakan salah satu alat matematis untuk menyelesaikan berbagai masalah dalam bidang keilmuan. Pada beberapa permasalahan, matriks digunakan untuk memodelkan suatu sistem dan sistem tersebut diselesaikan sehingga didapatkan solusinya. Pada bahasan matriks juga diketahui nilai Eigen dan vektor Eigen.

Struktur aljabar yang sudah dikenalkan adalah lapangan (*field*), yaitu grup (*group*) dan gelanggang (*ring*). Pada perkembangannya, struktur aljabar tidak hanya terbatas pada grup dan gelanggang, tetapi ada jenis lain yaitu Aljabar Min-Plus. Aljabar Min-Plus tidak sepenuhnya dikembangkan seperti dalam grup dan gelanggang.

Aljabar Min-Plus memiliki beberapa aplikasi antara lain dalam memodelkan jaringan telekomunikasi, lalu lintas dan *video smoothing*. Sebagai contoh diketahui dua bus transportasi umum berangkat dari terminal keberangkatan yang berbeda tetapi menuju suatu tujuan terminal yang sama.

Sedangkan dari terminal tujuan ini, akan berangkat bus ketiga selisih dari salah satu dari dua bus tersebut tiba. Jika waktu keberangkatan kedua bus tersebut berturut-turut adalah x_1, x_2 dan lama perjalanan berturut-turut adalah a_1, a_2 maka waktu keberangkatan bus ketiga x_3 dapat disajikan sebagai $x_3 = \min(x_1 + a_1, x_2 + a_2)$. Dalam ajabar min-plus persamaan ini dapat disajikan sebagai $x_3 = (x_1 \otimes a_1) \oplus (x_2 \otimes a_2)$ dengan $\oplus$ menyatakan operasi minimum dan $\otimes$ menyatakan operasi penjumlahan. Persamaan tersebut analog dengan persamaan $x_3 = a_1x_1 + a_2x_2$ dalam aljabar linier (Mustofa, 2011:1).

Menentukan nilai Eigen dan vektor Eigen matriks dapat dilakukan dalam aljabar biasa atau dilakukan dalam Aljabar Min-Plus. Pada Al-Qur'an terdapat ayat yang menjelaskan bahwa dengan cara yang berbeda dan keadaan yang berbeda tetapi tetap mengarah pada tujuan yang sama. Hal ini terdapat dalam surat Al-Baqarah ayat 150, yang berbunyi sebagai berikut:

وَمِنۡ حَيۡثُ خَرَجۡتَ فَوَلِّ وَجۡهَكَ شَطۡرَ ٱلۡمَسۡجِدِ ٱلۡحَرَامِۚ وَحَيۡثُ مَا كُنتُمۡ فَوَلُّواْ وُجُوهَكُمۡ شَطۡرَهُۥ لِئَلَّا يَكُونَ لِلنَّاسِ عَلَيۡكُمۡ حُجَّةٌ إِلَّا ٱلَّذِينَ ظَلَمُواْ مِنۡهُمۡ فَلَا تَخۡشَوۡهُمۡ وَٱخۡشَوۡنِي وَلِأُتِمَّ نِعۡمَتِي عَلَيۡكُمۡ وَلَعَلَّكُمۡ تَهۡتَدُونَ ١٥٠

Artinya:

"Dan dari mana saja kamu (keluar), maka palingkanlah wajahmu kearah masjidil Haram. dan dimana saja kamu (sekalian) beada, maka palingkanlah wajahmu kearahnya, agar tidak ada hujjah bagi manusia atas kamu, kecuali orang-orang yang zalim diantara mereka. Maka janganlah kamu takut kepada mereka dan takutlah kepada-Ku (saja). Dan agar Ku-sempurnakan nikmat-Ku atasmu, dan supaya kamu mendapat petunjuk" (Q.S. Al-Baqarah:150).

Surat al-Baqarah ayat 150 tersebut berkaitan dengan permasalahan yang dapat diselesaikan dengan menggunakan berbagai cara atau metode yang berbeda. Dari ayat tersebut terdapat arti yang berbunyi *"...dari mana saja kamu (keluar), maka palingkanlah wajahmu ke arah Masjidil Haram...".* Penggalan arti tersebut menjelaskan bahwa dengan cara yang berbeda ataupun jalan yang berbeda tetapi tetap terjudu pada tujuan yang sama.

Dalam mencari hubungan antara variable-variabel, baik di dalam aljabar maupun di dalam ilmu lainnya sering dipecahkan suatu persoalan yang terdiri atas lebih dari dua persamaan. Bahkan di suatu negara yang maju terutama di dalam penggunaan alat berhitung otomatis yang modern tidak jarang di dalam menemukan mode ekonominya harus memecahkan suatu persamaan yang terdiri dari puluhan persamaan dengan ratusan variabel-variabel yang harus dicari nilainya.

Dalam Aljabar sering terhubung dengan matriks, begitu juga dengan aljabar pada min-plus, karena matriks pada dasarnya memberikan kemudahan di dalam pembuatan analisis-analisis yang mencakup hubungan antara variabel-variabel (Anonim, 2009: 5).

Pada penelitian ini, dibahas mengenai nilai Eigen dan vektor Eigen di dalam Aljabar Min-Plus dengan menggunakan matriks $n \times n$. Penulis merumuskan penelitian ini dengan judul "Prosedur Perhitungan Nilai Eigen dan Vektor Eigen dengan Menggunakan Aljabar Min-Plus dengan Matriks $n \times n$.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah pada penelitian ini adalah bagaimana prosedur perhitungan nilai Eigen dan vektor Eigen dengan menggunakan Aljabar Min-Plus pada matriks $n \times n$?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah mendeskripsikan prosedur perhitungan dan hasil pada nilai Eigen dan vektor Eigen dengan menggunakan Aljabar Min-Plus pada matriks $n \times n$.

1.4 Manfaat Penelitian

Hasil penelitian ini diharapkan bermanfaat untuk dapat mendeskripsikan prosedur perhitungan dan hasil pada nilai Eigen dan vektor Eigen dengan menggunakan Aljabar Min-Plus pada matriks $n \times n$. Sebagai bahan pembelajaran dan pengetahuan mengenai Aljabar Min-Plus khususnya memperluas kajian perhitungan nilai Eigen dan vektor Eigen menggunakan Aljabar Min-Plus dan diharapkan dapat menjadikan rujukan penelitian yang akan datang.

1.5 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kepustakan atau kajian pustaka, yakni melakukan penelitian untuk memperoleh data-data dan informasi-informasi serta objek-objek yang digunakan dalam pembahasan masalah tersebut.

Adapun langkah-langkah analisis yang digunakan oleh peneliti sebagai berikut:

1. Menentukan matriks vektor yang hendak akan dihitung nilai Eigen dan vektor Eigen.
2. Menghitung determinan matriks vektor dengan menggunakan aljabar min-plus.

3. Menghitung nilai Eigen dengan menggunakan aljabar min-plus.
4. Menghitung vektor Eigen dengan menggunakan aljabar min-plus.
5. Analisis dan interpretasikan.
6. Menggeneralisasi prosedur perhitungan nilai Eigen dan vektor Eigen dengan menggunakan Aljabar Min-Plus pada matriks $n \times n$.

Masing-masing langkah dilakukan pada matriks persegi dengan contoh bilangan dan dalam bentuk umum. Sebelum digeneralisasi menjadi matriks $n \times n$ dikerjakan untuk ukuran 2×2 dan 3×3.

1.6 Sistematika Penulisan

Pada penyusunan penelitian ini perlu dibuat langkah-langkah yang sistematis guna memudahkan dalam memahami makna setiap bab yang ada. Secara umum penulisan penelitian ini terdiri dari empat bab.

Bab I Pendahuluan

Bab ini membahas mengenai latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bab ini membahas tentang teori-teori yang mendasari penulisan skripsi ini atau lebih dikenal dengan kajian pustaka. Adapun teori-teori yang termuat di dalamnya adalah matriks, vektor, nilai Eigen dan vektor Eigen, Aljabar Min-Plus dan permasalahan manusia dan solusinya dalam tinjauan agama.

Bab III Pembahasan

Bab ini membahas tentang prosedur perhitungan nilai Eigen dan vektor Eigen dengan menggunakan Aljabar Min-Plus pada matriks $n \times n$ dan berkaitan penyelesaian permasalahan manusia dengan hasil penelitian.

Bab IV Penutup

Bab ini membahas tentang kesimpulan dari materi yang telah dibahas pada bab sebelumnya dan saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Kajian Tentang Matriks

2.1.1 Definisi Matriks

Suatu matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks (Anton, 2000: 22).

Matriks adalah suatu kumpulan angka-angka (sering disebut elemen-elemen) yang disusun menurut baris dan kolom sehingga berbentuk empat persegi panjang, yang panjangnya dan lebarnya ditunjukkan oleh banyaknya kolom-kolom dan baris-baris (Supranto, 2003: 3).

Suatu matriks $\boldsymbol{A}$ terdiri m baris dan n kolom, maka matriks dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\boldsymbol{A}_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}],\ i = 1, 2, \cdots, m \text{ dan } j = 1, 2, \cdots, n$$

Bilangan-bilangan a_{ij} disebut elemen-elemen dari matriks $\boldsymbol{A}$ berukuran $m \times n$ dengan $i = 1, 2, \cdots, m$ dan $j = 1, 2, \cdots, n$ dan m, n adalah bilangan asli. Susunan unsur horizontal dinamakan baris atau vektor baris sedangkan susunan unsur vertikal dinamakan kolom atau vektor kolom dari matriks $\boldsymbol{A}$ (Supranto, 2003: 4).

Definisi 2.1:

Dua matriks didefinisikan sama jika keduanya mempunyai ukuran baris dan kolom yang sama dan unsur-unsur yang berpadanan sama (Anton, 2004: 8).

Pada notasi matriks $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ dan $\boldsymbol{B} = [b_{ij}]$ mempunyai ukuran sama, maka $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ jika dan hanya jika $a_{ij} = b_{ij}$ untuk semua i dan j.

Contoh 2.1 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Pada contoh 2.1 terlihat bahwa matriks $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{B}$ sama secara ukuran baris dan kolom dan unsur-unsurnya.

Definisi 2.2:

Misalkan $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{B}$ adalah matriks-matriks berukuran sama, maka jumlah $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ adalah matriks diperoleh dengan menambahkan unsur-unsur matriks $\boldsymbol{A}$ dengan unsur-unsur matriks $\boldsymbol{B}$ yang berpadanan. $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangkan unsur matriks $\boldsymbol{A}$ dengan unsur-unsur matriks $\boldsymbol{B}$ yang berpadanan. Matriks-matriks berukuran berbeda tidak dapat ditambahkan atau dikurangkan (Anton, 2004: 28).

Contoh 2.2**:**

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Maka $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 10 \\ 12 & 4 & 5 \\ 17 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.3:

Misalkan $\boldsymbol{A}$ adalah sebarang matriks dan c adalah sebarang skalar, maka hasil kali $c\boldsymbol{A}$ adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan setiap unsur $\boldsymbol{A}$ dengan c (Anton, 2004: 29).

Contoh 2.3**:**

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 6 & 4 & 6 \\ 8 & 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } c = \frac{1}{2}$$

Maka $c\boldsymbol{A} = \frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 6 & 4 & 6 \\ 8 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Definisi 2.4:

Misalkan $\boldsymbol{A}$ adalah unsur suatu matriks $m \times r$ dan $\boldsymbol{B}$ adalah suatu matriks $r \times n$, maka hasil kali matriks $\boldsymbol{AB}$ adalah matriks $m \times n$ yang unsur-unsurnya didefinisikan sebagai berikut: untuk mencari unsur dalam baris i dan kolom j dari matriks $\boldsymbol{AB}$, pilih baris i dari matriks $\boldsymbol{A}$ dan kolom j dari matriks $\boldsymbol{B}$, kalikan unsur-unsurnya yang berpadanan dari baris dan kolom secara bersama-sama dan kemudian jumlahkan hasil kalinya (Anton, 2004: 30).

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Maka $\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 & 3 \cdot 4 + 1 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \\ 5 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 5 \cdot 4 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 8 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 8 \cdot 4 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 16 \\ 6 & 20 \\ 12 & 33 \end{bmatrix}$$

2.1.2 Macam-macam Matriks

Matriks bujur sangkar adalah suatu matriks di mana banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom $(m = n)$. Apabila matriks $\boldsymbol{A}$ disebut matriks bujur sangkar orde n (Arifin, 2000: 8).

Contoh 2.4

Misal $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

Maka $\boldsymbol{A}$ adalah matriks bujur sangkar dengan ordo 2×2 dengan unsur bilangan real.

Suatu matriks $\boldsymbol{A}$ dengan banyak baris n dan banyak kolom n disebut matriks bujur sangkar orde n (*square matrix of orde n*) dan elemen a_{11}, $a_{22}, \cdots, a_{nn}$ merupakan diagonal utama matriks $\boldsymbol{A}$ (Anton & Rorres, 2004: 28).

Definisi 2.5:

Matriks identitas atau matriks satuan, dinotasikan dengan $\boldsymbol{I}_n$ atau $\boldsymbol{I}$, adalah matriks bujur sangkar dengan elemen 1 pada diagonal utamanya dan elemen nol pada bagian lainnya. Matriks identitas mirip dengan skalar 1 sehingga di dalam sebarang matriks bujur sangkar $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{AI} = \boldsymbol{IA} = \boldsymbol{A}$ (Arifin, 2000: 8).

Contoh 2.5:

Misal $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Maka $\boldsymbol{A}$ merupakan matriks identitas karena diagonal utamanya 1 dan lainnya 0.

Matriks diagonal adalah suatu matriks bujur sangkar yang semua elemen luar diagonal utamanya mempunyai nilai 0 dan paling tidak satu elemen pada diagonal uatama tidak 0 untuk semua $1 \leq i \leq n$.

Contoh 2.6:

Misal $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Maka $\boldsymbol{D}$ merupakan matriks diagonal karena unsur pada diagonal utamanya tidak semuanya 0.

Skalar adalah suatu bilangan konstan. Jika k suatu skalar dan $\boldsymbol{I}$ suatu matriks identitas, maka hasil kali $k\boldsymbol{I}$ dinamakan matriks skalar (Arifin, 2000: 10).

Contoh 2.7:

Misal $k = 4$ dan $\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Maka $k\boldsymbol{I} = 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

Defenisi 2.6:

Permutasi bilangan bulat $\{1, 2, \cdots, n\}$ adalah susunan bilangan menurut aturan tanpa adanya penghilangan atau pengulungan (Anton, 2004: 90).

Definisi 2.7:

Suatu permutasi dikatakan genap jika total banyaknya inversi adalah bilangan genap dan dikatakan ganjil total banyaknya inversi adalah bilangan ganjil (Anton, 2004: 92).

Definisi 2.8:

Suatu hasil kali elementer dari suatu matriks $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ adalah hasil kali dari n entri dari $\boldsymbol{A}$, yang tidak satupun berasal dari baris atau kolom yang sama (Anton, 2004: 92).

Contoh 2.11:

Buatlah daftar semua hasil kali elementer dari matriks berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Karena setiap hasil kali elementer memiliki dua faktor dan karena setiap faktor berasal dari basis yang berbeda, maka hasil kali elementer dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut : $a_{1\_}a_{2\_}$ di mana titik-titik kosong menunjukkan nomor kolom. Karena tidak ada dua faktor dalam hasil kali tersebut yang berasal dari kolom yang sama, maka nomor kolom haruslah $\underline{1}$ $\underline{2}$ atau $\underline{2}$ $\underline{1}$. Jadi hasil kali elementer hanyalah $a_{11}a_{22}$ dan $a_{12}a_{21}$.

Definisi 2.9:

Jika $\boldsymbol{A}$ adalah matriks bujur sangkar, maka minor dari a_{ij} dinyatakan sebagai $\boldsymbol{M}_{ij}$ dan didefinisikan sebagai determinan dari sub-matriks yang tetap setelah baris ke-i dan kolom ke-j dicoret dari $\boldsymbol{A}$. Bilangan $(-1)^{i+j}(\boldsymbol{M}_{ij})$ dinyatakan oleh $\boldsymbol{C}_{ij}$ dan dinamakan kofaktor entri dari a_{ij} (Anton, 1997: 77).

Contoh 2.12:

Jika diketahui matriks $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Minor dari entri a_{11} adalah $\boldsymbol{M}_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 3 - 5 = -2$$

Kofaktor dari a_{11} adalah $\boldsymbol{C}_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = M_{11} = -2$

Definisi 2.10:

Jika $\boldsymbol{A}$ adalah sebarang matriks $n \times n$ dan C_{ij} kofaktor a_{ij}, maka matriks

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{m3} & C_{m2} & \cdots & C_{mn} \end{bmatrix}$$

Dinamakan matriks kofaktor dari $\boldsymbol{A}$. Transpos matriks $\boldsymbol{C}$ dinamakan adjoin $\boldsymbol{A}$ yang dinyatakan dengan $adj(\boldsymbol{A})$ (Anton, 1997: 81).

2.1.3 Invers Matriks

Definisi 2.11:

Misalkan $\boldsymbol{A}$ merupakan matriks bujur sangkar deng n baris dan n kolom dan $\boldsymbol{I_n}$ suatu matriks identitas. Apabila ada matriks bujur sangkar $\boldsymbol{A^{-1}}$ sedemikian sehingga, berlaku hubungan sebagai berikut: $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A^{-1}} = \boldsymbol{A^{-1}A} = \boldsymbol{I_n}$, maka $\boldsymbol{A^{-1}}$ disebut matriks invers dari $\boldsymbol{A}$ (Arifin, 2000: 130).

Teorema 2.1:

Matriks yang *invertible* hanya memiliki satu invers (Anton, 2004: 47).

Bukti:

Jika $\boldsymbol{B}$ dan $\boldsymbol{C}$ kedua-duanya adalah invers dari matriks $\boldsymbol{A}$,

Maka $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$, karena $\boldsymbol{B}$ adalah invers dari $\boldsymbol{A}$,

Maka $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$, dengan mengalikan kedua ruas di sisi kanannya dengan $\boldsymbol{C}$ diperoleh $(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{IC} = \boldsymbol{C}$, tetapi $(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{BI} = \boldsymbol{B}$, sehingga $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}$.

Pernyataan berikut mengenai invers dari matriks yang *invertible*. Jika $\boldsymbol{A}$ *invertible*, maka inversnya akan dinyatakan dengan simbol $\boldsymbol{A^{-1}}$.

Terbukti $\boldsymbol{AA^{-1}} = \boldsymbol{I}$ dan $\boldsymbol{A^{-1}A} = \boldsymbol{I}$.

2.2 Kajian Tentang Vektor

2.2.1 Definisi Vektor

Matriks yang hanya memiliki satu baris atau satu kolom menjadi perhatian khusus karena matriks tersebut digunakan untuk menyatakan penyelesaian dari sistem linier. Suatu penyelesaian dari sistem dengan m persamaan linier dalam n peubah adalah suatu vektor.

Definisi 2.11:

Matriks yang terdiri dari suatu kolom adalah matriks $m \times 1$, disebut suatu vektor kolom dan ditulis:

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

(Weber, 1999: 168).

Notasi u_j berupa bilangan real, merupakan komponen vektor. u_j adalah komponen ke-j dari vektor $\boldsymbol{u}$. Vektor kolom $\boldsymbol{A}$ mempunyai m baris dikatakan suatu vektor berkomponen m atau vektor berdimensi m (Weber, 1999:169).

Contoh 2.13:

$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$ adalah vektor berdimensi 4.

Definisi 2.12:

Suatu matriks yang berisi satu baris adalah matriks $1 \times n$, disebut suatu vektor baris dan ditulis: $\boldsymbol{v} = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ (Webber, 1999: 169).

Contoh 2.14:

$\boldsymbol{v} = [2, -5, 1]$ adalah vektor berdimensi 3.

Definisi 2.13:

Jika $\boldsymbol{u} = [u_1, u_2, \dots, u_n]$ dan $\boldsymbol{v} = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ adalah sebarang vektor pada R^n, maka hasil kali dalam Euclidis $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ didefinisikan dengan $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$ (Anton, 1997: 133).

2.2.2 Operasi Vektor

Penjumlahan dua vektor menghasilkan sebuah vektor pula. Vektor $\boldsymbol{A}$ ditambah dengan vektor $\boldsymbol{B}$ adalah sebuah vektor $\boldsymbol{C}$ yang mempunyai arah dari pangkal vektor $\boldsymbol{A}$ dan berakhir di ujung vektor $\boldsymbol{B}$. Pengurangan dua buah vektor $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{B}$ sama dengan vektor $\boldsymbol{A}$ ditambah dengan kebalikan vektor $\boldsymbol{B}$. Dalam penjumlahan dua vektor atau lebih, berlaku hukum komutatif $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$ (Imam, 2008: 64).

Bila sebuah vektor dikalikan dengan bilangan skalar, maka hasil yang didapat adalah:

1. Bila skalar adalah positif, maka hasil vektor searah dengan vektornya. Bila skalar adalah negatif, maka hasil vektor berlawanan dengan arah vektor semula.
2. Besar vektor adalah perkalian antara skalar dengan besar vektor yang dikalikan.
3. Berlaku hukum distributif $a(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=a\boldsymbol{B}+a\boldsymbol{C}$ (Imam, 2008: 64).

2.3 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Jika $\boldsymbol{A}$ adalah suatu matriks $n \times n$ dan $\boldsymbol{x}$ adalah suatu vektor pada R^n, maka biasanya tidak ada hubungan geometris umum antara vektor $\boldsymbol{x}$ dan vektor $\boldsymbol{Ax}$. Akan tetapi, seringkali ada vektor-vektor $\boldsymbol{x}$ tertentu sedemikian sehingga $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{Ax}$ merupakan penggandaan satu sama lain. Vektor-vektor tersebut terdapat dalam getaran, sistem elektrik, genetik, reaksi kimia, mekanika kuantum, tekanan mekanis, ekonomi, dan geometri (Anton, 2004: 99).

Definisi 2.14:

Misalkan $\boldsymbol{A}$ adalah suatu matriks $n \times n$. Skalar λ disebut suatu nilai Eigen atau nilai karakteristik dari $\boldsymbol{A}$ jika terdapat suatu vektor nol x sehingga $\boldsymbol{A}x = \lambda x$. Vektor x disebut vektor Eigen dari $\boldsymbol{A}$ yang berpadanan dengan a(Anton, 2004: 99).

Contoh 2.15:

Vektor $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen dari $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$

Yang bersesuaian dengan nilai eigen ë $= 3$ karena

$$\boldsymbol{Ax} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3x$$

Nilai eigen matriks $\boldsymbol{A}$ yang berukuran $n \times n$ dengan $\boldsymbol{A}x = \lambda x$ ditulis kembali sebagai berikut: $\boldsymbol{Ax} = \lambda \boldsymbol{Ix}$ atau secara ekuivalen $\lambda x = 0$.

Supaya λ menjadi nilai Eigen, maka harus ada selesaian tak nol dari persamaan di atas. Persamaan akan mempunyai selesaian tak nol jika hanya jika: $\det(\boldsymbol{aI} - \boldsymbol{A}) = 0$, $\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0$ dinamakan *persamaan karakteristik* **A**. Skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai Eigen dari $\boldsymbol{A}$. Bila diperluas, maka $\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$ adalah polinom λ yang dinamakan *polinom karakteristik* dari $\boldsymbol{A}$.

$\boldsymbol{A}x = \lambda x$ adalah suatu persamaan yang banyak ditemukan pada aplikasi aljabar linier. Jika persamaan tersebut mempunyai selesaian tak nol x, maka λ disebut sebagai nilai Eigen dari $\boldsymbol{A}$ dan x disebut vektor Eigen yang dimiliki λ.

Setelah nilai Eigen dan vektor Eigen suatu matriks $\boldsymbol{A}$ didapatkan, maka dengan mudah dicari nilai Eigen dan vektor Eigen dari sebarang pangkat bilangan bulat positif dari $\boldsymbol{A}$, misalkan jika λ adalah suatu nilai Eigen dari $\boldsymbol{A}$ dan x adalah vektor Eigen yang berpadanan, maka

$$\boldsymbol{A}^2x = A(Ax) = A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda(\lambda x) = \lambda^2 x$$

yang ditunjukkan bahwa λ^2 adalah suatu nilai Eigen dari $\boldsymbol{A^2}$ dari x adalah vektor Eigen yang berpadanan.

Setelah nilai Eigen dari matriks ditemukan, maka vektor Eigen yang berkaitan dengan nilai Eigen tersebut dapat diperoleh dengan menyelesaikan himpunan persamaan homogen yang sesuai. Berkaitan dengan setiap nilai Eigen λ_i yang berbeda, maka terdapat vektor Eigen x_i yang tak nol. Vektor Eigen merupakan solusi dari persamaan homogen yang dapat diperoleh dengan mensubstitusi nilai λ_i ke dalam persamaan berikut: $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})x_i = 0$ (Gere dan William, 1987: 128).

2.4 Kajian Tentang Aljabar Min-Plus

2.4.1 Definisi Aljabar Min-plus

Notasi R_{min} merupakan himpunan $R \cup \{x\}$, dimana R adalah anggota bilangan real, didefinisikan $x \coloneqq +\infty$ dan $e \coloneqq 0$ untuk $a, b \in R_{min}$ didefinisikan operasi $\oplus$ dan $\otimes$. $a \oplus b \coloneqq \min(a, b)$ dan $a \otimes b \coloneqq a + b$ (Mustofa, 2011: 2).

Himpunan R_{min} dengan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ disebut aljabat min-plus dan dinotasikan dengan

$$R_{min} = (R_{min}, \oplus, \otimes)$$

Seperti dalam aljabar konvensional, dalam hal urutan pengoperasian jika tanda kurung tidak ditulis, operasi $\otimes$ mempunyai prioritas yang lebih besar dari pada operasi $\oplus$.

Contoh 2.16:

$$\mathbf{2 \otimes -5 \oplus 3 \otimes 2}$$

$$\mathbf{(2 \otimes -5) \oplus (3 \otimes 2)}$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}(\mathbf{2} \otimes -\mathbf{5}) \oplus (\mathbf{3} \otimes \mathbf{2}) &= (\mathbf{2} + (-\mathbf{5})) \oplus (\mathbf{3} + \mathbf{2}) \\ &= \min(\mathbf{2} + (-\mathbf{5})), (\mathbf{3} + \mathbf{2}) \\ &= \min(-5{,}5) \\ &= -5\end{aligned}$$

Sedangkan

$$\begin{aligned}\mathbf{2} \otimes (-\mathbf{5} \oplus \mathbf{3}) \otimes \mathbf{2} &= \mathbf{2} + (-\mathbf{5} \oplus \mathbf{3}) + \mathbf{2} \\ &= \mathbf{2} + \boldsymbol{min}(-\mathbf{5}, \mathbf{3}) + \mathbf{2} \\ &= \mathbf{4} + (-\mathbf{5}) \\ &= -\mathbf{1}\end{aligned}$$

Perluasan operasi untuk [+∞]

Contoh 2.17:

$9 \oplus 2 = \min(9{,}2) = 2$

$å \oplus 2 = min(+\infty, 2) = 2$

$å \otimes 2 = min(+\infty) + 2 = (+\infty) = å$

$å \oplus 9 = \min(0{,}9) = 0 = å$

2.4.2 Notasi pada Aljabar Min-plus

Untuk menentukan analogi dengan kalkulus konvensional, “min” dinotasikan $\oplus$ dan $+$ dinotasikan $\otimes$.

Contoh 2.18:

Notasi R_{min}	Notasi Konvensional	$=$
$2 \oplus 5$	$\min(2{,}5)$	2
$3 \oplus 4 \oplus 5 \oplus 6 \oplus 7$	$\min(3{,}4{,}5{,}6{,}7)$	3

Notasi konvensional $(a + b)$ berarti penjumlahan a dan b, tanda "$+$" dinotasikan dengan $\otimes$ maka dinotasikan R_{min} menjadi $a \otimes b$

Contoh 2.19:

Notasi R_{min}	Notasi Konvensional	$=$
$2 \otimes 5$	$2 + 5$	7
$3 \otimes 4 \otimes 5 \otimes 6 \otimes 7$	$3 + 4 + 5 + 6 + 7$	25

Digunakan å dan e, elemen netral dari $\oplus$ dan $\otimes$ masing-masing adalah $+\infty$ dan 0.

Contoh 2.20:

Notasi R_{min}	Notasi Konvensional	$=$
$2 \oplus$ å	$\min(2, +\infty)$	2
$2 \otimes$ å	$+\infty + 2$	$+\infty$
$e \otimes 3$	$0 + 3$	3

2.4.3 Sifat-Sifat Aljabar Min-Plus

Sifat-sifat aljabar min-plus disertai contoh pada tiap-tiap sifatnya R_{min} dengan operasi $\oplus$ $(R_{min}, \oplus)$, memenuhi sifat sebagai berikut:

Lemma 2.4.1

R_{min} memiliki sifat assosiatif pada operasi $\oplus$: $\forall x, y, z \in R_{min}: x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ (mustofa, 2011:3).

Bukti:

$\forall x, y, z \in R_{min}$

$x \oplus (y \oplus z) = x \oplus \min(y, z)$ (definisi 2.16)

$= \min(x, \min(y, z))$

$= \min(x, y, z)$

$= \min(\min(x, y), z)$

$= \min(x, y) \oplus z$

$= (x \oplus y) \oplus z$

Jadi, $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$

Contoh 2.21:

$1 \oplus (2 \oplus 3) = 1 \oplus \min(2, 3)$

$= \min(\min(1, 2, 3))$

$= \min(1,2) \oplus 3$

$= (1 \oplus 2) \oplus 3$

Jadi, $1 \oplus (2 \oplus 3) = (1 \oplus 2) \oplus 3$

Lemma 2.4.2

Terdapat elemen identitas terhadap $\oplus$: $\forall x \in R_{min} \exists \varepsilon \in R_{min}$ sehingga $x \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus x = x$ (mustofa, 2011: 3).

Bukti:

$\forall x \in R_{min} \exists \varepsilon \in R_{min}$

$x \oplus \varepsilon = \min(x, +\infty) = x$

$\varepsilon \oplus x = \min(+\infty, x) = x$

Jadi, $x \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus x = x$

Contoh 2.22:

$$3 \oplus \varepsilon = \min(3, +\infty)$$

$$= \min(+\infty, 3) = 3$$

Jadi, $3 \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus 3 = 3$

Lemma 2.4.3

Idempotent terhadap operasi $\oplus$:

$\forall x \in R_{min}: x \oplus x = x$ (Mustofa, 2011: 3).

Bukti:

$$\forall x \in R_{min}$$

$$x \oplus x = \min(x, x) = x$$

Contoh 2.23:

$$2 \oplus 2 = \min(2, 2) = 2$$

Jadi, $2 \oplus 2 = 2$

Dapat dikatakan bahwa R_{min} dengan operasi $\oplus$ membentuk semi-grup komutatif dengan elemen identitas ε, karena memiliki sifat asosiatif, dan komutatif terhadap operasi $\oplus$, dapat disebut juga dengan monoid karena semi-grup memiliki elemen identitas terhadap operasi $\oplus$.

Selanjutnya R_{min} dengan operasi $\otimes$ $(R_{min}, \otimes)$, memenuhi sifat sebagai berikut:

Lemma 2.4.4

Bersifat asosiatif di R_{min}: $\forall x, y, z \in R_{min}: x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$ (Mustofa, 2011: 3).

Bukti:

$\forall x, y, z \in R_{min}$

$x \otimes (y \otimes z) = x + (y + z)$ (definisi 2.17)

$= (x + y) + z$ sifat Assosiatif

$= (x \otimes y) \otimes z$

Contoh 2.24:

$5 \otimes (2 \otimes 1) = 5 + (2 + 1)$

$= (5 + 2) + 1$

$= (5 \otimes 2) \otimes 1$

Jadi, $5 \otimes (2 \otimes 1) = (5 \otimes 2) \otimes 1$

Lemma 2.4.5

Bersifat komutatif di R_{min}: $\forall x, y \in R_{min}: x \otimes y = y \otimes x$ (Mustofa, 2011:3).

Bukti:

$\forall x, y \in R_{min}$

$x \otimes y = x + y$

$= y + x$ sifat komutatif

$= y \otimes x$

Jadi, $x \otimes y = y \otimes x$

Contoh: 2.25:

$5 \otimes 4 = 5 + 4 = 4 + 5 = 4 \otimes 5$

Jadi, $5 \otimes 4 = 4 \otimes 5$

Lemma 2.4.6

Terdapat elemen identitas terhadap $\otimes$, misal e adalah identitas terhadap operasi $\otimes$

$$\forall x \in R_{min}: x \otimes e = e \otimes x = e \text{ (Mustofa, 2011: 3).}$$

Bukti:

$\forall x \in R_{min}$

$x \otimes e = x + 0 = x$

$e \otimes x = 0 + x = x$

Jadi, $x \otimes e = e \otimes x = x$

Contoh 2.25:

$2 \otimes e = 2 + 0 = 0 + 2 = e \otimes 2 = 2$

Jadi, $2 \otimes e = e \otimes 2 = 2$

Lemma 2.4.7

Elemen netral bersifat menyerap terhadap operasi: $\forall x \in R_{min}: x \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes x = x$ (Mustofa, 2011: 3).

Bukti:

$\forall x \in R_{min}$

$x \otimes \varepsilon \ = x \otimes +\infty$ sifat perluasan operasi $+\infty$

$= +\infty$

$= \varepsilon$

$\varepsilon \otimes x \ = +\infty \otimes x = +\infty = \varepsilon$

Jadi, $x \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes x = x$

Contoh 2.26:

$$3 \otimes å = 3 + (+\infty) = +\infty + 3 = å \otimes 3$$

Jadi, $3 \otimes å = å \otimes 3 = å$

R_{min} dengan operasi $\otimes$ $(R_{min}, \otimes)$, merupakan semi-grup dengan elemen identitas *e* karena operasi $\otimes$ besifat asosiatif dan komutatif. Membentuk grup abelian karena operasi $\otimes$ bersifat asosiatif, komutatif, terdapat elemen identitas di R_{min} dan ada invers terhadap operasi $\otimes$ $(R_{min}, \otimes)$ juga memiliki elemen interval yang bersifat menyerap terhadap operasi $\otimes$.

R_{min} dengan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ $(R_{min}, \oplus, \otimes)$, memiliki sifat distributif seperti berikut ini:

Teorema 2.2

Distributif operasi $\otimes$ terhadap operasi $\oplus$: $\forall x, y, z \in R_{min}: (x \otimes y) \otimes z = (x \otimes z) \oplus (y \otimes z)$ dan $\forall x, y, z \in R_{min}: x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$ (Mustofa, 2011: 3).

Bukti:

$\forall x, y, z \in R_{min}$

$$\begin{aligned}(x \oplus y) \otimes z &= \min(x, y) + z \\ &= \min(x + z, y + z) \\ &= \min(x \otimes z, y \otimes z)\end{aligned}$$

Dan

$\forall x, y, z \in R_{min}$

$$\begin{aligned}x \otimes (y \oplus z) &= x + \min(y, z) \\ &= \min(x + y, x + z) \\ &= \min(x \otimes y, x \otimes z)\end{aligned}$$

$$= (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$$

Jadi, $x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$

Contoh 2.27:

$$1 \otimes (2 \oplus 3) \quad = (2 \oplus 1) + 3$$

$$= \min(2, 1) + 3$$

$$= \min(2 + 3, 1 + 3)$$

$$= (2 + 3) \oplus (1 + 3)$$

$$= (2 \otimes 3) \oplus (1 \otimes 3)$$

Jadi, $(2 \oplus 1) + 3 = (2 \otimes 3) \oplus (1 \otimes 3)$

Dan

$$1 \otimes (2 \oplus 3) = 1 + (2 \oplus 3)$$

$$= 1 + \min(2, 3)$$

$$= \min(1 + 2, 1 + 3)$$

$$= (1 + 2) \oplus (1 + 3)$$

$$= (1 \otimes 2) \oplus (1 \otimes 3)$$

Jadi, $1 \otimes (2 \oplus 3) = (1 \otimes 2) \oplus (1 \otimes 3)$

Berdasarkan sifat-sifat di atas, maka $(R_{min}, \oplus, \otimes)$ disebut semi-ring, karena $(R_{min}, \oplus)$ membentuk semi-grup komutatif dengan elemen netral yang bersifat menyerap terhadap operasi $\oplus$ $(R_{min}, \otimes)$ membentuk semi-grup dengan elemen identitas $e(R_{min}, \otimes)$ juga memiliki elemen netral yang bersifat menyerap terhadap operasi $\otimes$, dan yang terakhir $(R_{min}, \oplus, \otimes)$ membentuk sifat distributif operasi $\otimes$ terhadap operasi $\oplus$. Sebagai Contoh Diberikan $R_{min} = R \cup \{x\}$ dengan

R adalah himpunan semua bilangan real dan $x = +\infty$. Pada R_{min} didefinisikan operasi berikut:

$$\forall a, b \in R_{min}, a \oplus b = \min(a, b) \text{ dan } a \otimes b = a + b.$$

Misalkan $2 \oplus 1 \coloneqq \min(2,1) = 1; -3 \otimes 4 \coloneqq -3 + 4 = 1$.

$(R_{min}, \oplus, \otimes)$ merupakan semi-ring dengan elemen netral $x = +\infty$ dan elemen identitas $e = 0$, karena untuk setiap $a, b, c \in R_{min}$ berlaku:

1. $(R_{min}, \oplus)$ merupakan semi-grup komutatif dengan elemen netral x.

   $a \oplus b = \min(a, b) = \min(b, a) = b \oplus a$

   $(a \oplus b) \oplus c = \min(\min(a, b), c) = \min(a, b, c) = \min(a, \min(b, c))$

   $= a \oplus (b \oplus c)$

   $a \oplus å = \min(a, +\infty) = 0$

   $a \oplus a = \min(a, a) = a.$

2. $(R_{min}, \otimes)$ merupakan semi-grup dengan elemen identitas e

   $(a \otimes b) \otimes c = (a + b) + c = a + (b + c) = a \otimes (b \otimes c)$

   $a \otimes b = a + b = b + a = b \otimes a$

   $a \otimes b = a + b = 0$, di mana $b = -a \in R_{min}$, jadi, $a + (-a) = 0$

3. Elemen netral x besifat menyerap terhadap operasi $\otimes$

   $$a \otimes x = a + (+\infty) = +\infty = (+\infty) + a = x \otimes a$$

4. $(R_{min}, \oplus, \otimes)$ memiliki sifat distributif $\otimes$ terhadap $\oplus$

   $(a \oplus b) \otimes c = \min(a, b) + c = \min(a + c, a + b)$

   $= (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$

   $a \otimes (b \oplus c) = a + \min(b, c) = \min(a + b, a + c)$

   $= (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$

Semi-ring $(S,\oplus,\otimes)$ dikatakan semi-ring komutatif jika operasi $\otimes$ bersifat idempotent, yaitu $\forall x, y \in S, x \otimes y$. Semi ring $(S,\oplus,\otimes)$ Dikatakan semi ring idempoten jika $\oplus$ bersifat idempoten, yaitu $\forall a \in S, a \oplus a = a$.

2.5 Puasa dalam Tinjauan Agama

Dalam surat al-Baqarah dijelaskan orang beriman sangat mencintai Allah, sehingga apa yang dilakukan selalu perintah Allah dan menjahui apa yang dilarang dan jika melakukan dosa maka ketakutan karena Allah dan neraka Allah yang dirasakan dan seolah-olah melihat siksa dihari kiamat. Allah Swt berfirman dalam surat al-Baqarah ayat 183 dan 184, yang berbunyi:

يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ كُتِبَ عَلَيۡكُمُ ٱلصِّيَامُ كَمَا كُتِبَ عَلَى ٱلَّذِينَ مِن قَبۡلِكُمۡ لَعَلَّكُمۡ تَتَّقُونَ
١٨٣ أَيَّامٗا مَّعۡدُودَٰتٖۚ فَمَن كَانَ مِنكُم مَّرِيضًا أَوۡ عَلَىٰ سَفَرٖ فَعِدَّةٞ مِّنۡ أَيَّامٍ أُخَرَۚ وَعَلَى
ٱلَّذِينَ يُطِيقُونَهُۥ فِدۡيَةٞ طَعَامُ مِسۡكِينٖۖ فَمَن تَطَوَّعَ خَيۡرٗا فَهُوَ خَيۡرٞ لَّهُۥۚ وَأَن تَصُومُواْ
خَيۡرٞ لَّكُمۡ إِن كُنتُمۡ تَعۡلَمُونَ ١٨٤

Artinya: "Hai orang-orang yang beriman, diwajibkan atas kamu berpuasa sebagaimana diwajibkan atas orang-orang sebelum kamu agar bertakwa, (yaitu) dalam beberapa hari yang tertentu. Maka barangsiapa diantara kamu ada yang sakit atau dalam perjalanan (lalu ia berbuka), maka (wajiblah baginya berpuasa) sebanyak hari yang ditinggalkan itu pada hari-hari lain. Dan wajib bagi orang-orang yang berat menjalankannya (jika mereka tidak berpuasa) membayar fidyah, (yaitu): memberi makan seorang miskin. Barangsiapa yang dengan kerelaan hati mengerjakan kebajikan, maka itulah yang lebih baik baginya. Dan berpuasa lebih baik bagimu jika kamu mengetahui" (Q.S. al-Baqarah: 183-184).

Allah menyerukan kepada orang-orang yang beriman dari umat ini dan memerintahkan mereka untuk berpuasa. Puasa berarti menahan diri dari makan, minum, dan bersetubuh, dengan niat yang tulus karena Allah karena puasa mengandung penyucian, pembersihan, dan penjernihan diri dari kebiasaan-kebiasaan yang jelek dan akhlak tercela.

Allah Ta'ala juga menyebutkan, sebagaimana Dia telah mewajibkan puasa itu kepada mereka, Dia juga telah mewajibkannya kepada orang-orang sebelum mereka, karena itu ada suri teladan bagi mereka dalam hal ini. Maka hendaklah mereka bersungguh-sungguh dalam menjalankan kewajiban ini dengan lebih sempurna daripada yang telah dijalankan oleh orang-orang sebelum mereka. Sebagaimana firman Allah Ta'ala yang *artinya: "Untuk tiap-tiap umat di antara kamu, Kami berikan aturan dan jalan yang terang. Sekiranya Allah menghendaki, niscaya kamu dijadikan-Nya satu umat saja, tetapi Allah hendak mengujimu terhadap pemberian-Nya kepadamu. Maka berlomba-lombalah berbuat kebajikan." (QS. Al-Maa-idah: 48)*

Oleh karena itu dalam surat al-Baqarah ini, Allah berfirman: yaa ayyuHal ladziina aamanuu kutiba 'alaikumush shiyaamu kamaa kutiba 'alal ladziina min qablikum la'allakum tattaquun ("Wahai orang-orang yang beriman, diwajibkan atas kamu berpuasa sebagaimana diwajibkan atas orang-orang sebelummu agar kamu bertakwa.") Karena puasa dapat menyucikan badan dan mempersempit jalan syaitan, maka dalam hadits yang terdapat dalam kitab Shahih al-Bukhari dan Muslim ditegaskan, bahwasanya Rasulullah bersabda: *"Wahai para pemuda, barangsiapa di antara kalian yang sudah mampu untuk menikah maka hendaklah ia menikah. Dan barangsiapa belum mampu, maka hendaldah ia berpuasa karena puasa merupakan penawar baginya."*

Setelah itu Allah menjelaskan waktu puasa. Puasa itu tidak dilakukan setiap hari supaya jiwa manusia ini tidak merasa keberatan sehingga lemah dalam menanggungnya dan menunaikannya. Tetapi puasa itu diwajibkan hanya pada hari-hari tertentu saja. Pada permulaan Islam, puasa dilakukan tiga hari pada setiap bulan. Kemudian hal itu dinasakh (dihapus) dengan puasa satu bulan penuh, yaitu pada bulan Ramadhan, sebagaimana akan diuraikan lebih lanjut.

Diriwayatkan dari Mu'adz, Ibnu Mas'ud, Ibnu Abbas, Atha', Qatadah, dan adh-Dhahhak bin Muzahim, bahwa puasa itu pertama kali dijalankan seperti yang diwajibkan kepada umat-umat sebelumnya, yaitu tiga hari setiap bulannya. Ditambahkan oleh adh-Dhahhak, bahwa pelaksanaan puasa seperti ini masih tetap disyari'atkan pada permulaan Islam sejak Nabi Nuh as. sampai Allah menasakhnya dengan puasa Ramadhan.

Abu Ja'far ar-Razi meriwayatkan dari Ibnu Umar, katanya; Dengan diturunkannya ayat: *kutiba 'alaikumush shiyaamu kamaa kutiba 'alal ladziina min qablikum ("Diwajibkan atas kamu berpuasa sebagaimana diwajibkan atas orang orang sebelummu,")* puasa itu diwajibkan kepada mereka, jika salah seorang di antara mereka mengerjakan shalat isya' kemudian tidur, diharamkan baginya makan, minum, dan (menyetubuhi) istrinya sampai waktu malam lagi seperti itu.

Ibnu Abi Hatim berkata, hal senada juga diriwayatkan dari Ibnu Abbas, Abu al-Aliyah, Abdur Rahman bin Abi Laila, Mujahid, Sa'id bin Jubair, Muqatil bin Hayyan, Rabi' bin Anas, dan Atha' al-Khurasani.

Mengenai firman-Nya: *kutiba 'alal ladziina min qablikum ("Sebagaimana diwajibkan atas orang-orang sebelummu,")* Atha' al-Khurasani meriwayatkan, dari Ibnu Abbas: "Yang dimaksudkan yaitu Ahlul Kitab."

Selanjutnya Allah Ta ala menjelaskan hukum puasa sebagaimana yang berlaku pada permulaan Islam. Dia berfirman: fa man kaana minkum mariidlan au 'alaa safarin fa 'iddatum min ayyaamin ukhara ("Barangsiapa di antara kamu ada yang sakit atau dalam perjalanan [lalu ia berbuka], maka [wajiblah baginya berpuasa] sebanyak hari yang ditinggalkan itu dari hari-hari yang lain.") Artinya, orang yang sakit dan orang yang dalam perjalanan diperbolehkan untuk tidak berpuasa, karena hal itu merupakan kesulitan bagi mereka. Mereka boleh tidak berpuasa tetapi harus mengqadhanya pada hari-hari yang lain. Adapun orang yang sehat dan tidak berpergian tetapi merasa berat berpuasa, baginya ada dua pilihan; berpuasa atau memberikan makan. Jika mau ia boleh berpuasa, atau boleh juga berbuka, tetapi harus memberi makan kepada seorang miskin setiap harinya. Dan jika ia memberikan makan lebih dari seorang pada setiap harinya, maka yang demikian itu lebih baik. Dan berpuasa adalah lebih baik daripada memberi makan. Demikian menurut pendapat Ibnu Masud, Ibnu Abbas, Mujahid, Thawus, Muqatil bin Hayyan, dan ulama salaf lainnya.

Oleh karena itu Allah swt. berfirman: *wa ‘alal ladziina yuthiiquunaHuu fidyatun tha’aamu miskiinin faman tathawwa’a khairan fa Huwa khairul laHu wa an tashuumuu khairul lakum in kuntum ta’lamuun (“Dan wajib bagi orang-orang yang merasa berat menjalankannya [jika mereka tidak berpuasa] untuk membayar fzdyah, [yaitu]: memberi makan seorang miskin. Barangsiapa yang dengan kerelaan hati mengerjakan kebajikan, maka yang demikian itu lebih baik baginya. Dan berpuasa itu lebih baik bagimu jika kamu mengetahui.”)*

Demikian pula yang diriwayatkan Imam al-Bukhari, dari Salamah bin Akwa katanya, ketika turun ayat: *wa ‘alal ladziina yuthiiquunaHuu fidyatun tha’aamu miskiinin (“Dan bagi orang-orang yang merasa berat menjalankannya [jika mereka tidak berpuasa] membayar fidyah, yaitu memberi makan seorang miskin.”)* Ketika itu, bagi siapa yang hendak berbuka (tidak berpuasa), maka membayar fidyah, hingga turun ayat yang berikutnya dan manasakhnya.

Al-Bukhari meriwayatkan dari Atha', bahwa ia pernah mendengar Ibnu Abbas membaca ayat: *wa 'alal ladziina yuthiiquunaHuu fidyatun tha'aamu miskiinin ("Dan bagi orang yang merasa berat menjalankannya [jika mereka tidak berpuasa] membayar fidyah, yaitu memberi makan seorang miskin.")* Kata Ibnu Abbas, "Ayat tersebut tidak dinasakh, karena yang dimaksudkan dalam ayat itu adalah orang tua laki-laki dan perempuan yang tidak mampu menjalankan ibadah puasa, maka ia harus memberikan makan setiap harinya.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Prosedur Perhitungan Nilai Eigen dan Vektor Eigen Menggunakan Aljabar Min-Plus

Pada bab ini akan dibahas mengenai nilai Eigen dan vektor Eigen dalam Aljabar Min-plus menggunakan operasi $\oplus$ menyatakan minimum dan operasi $\otimes$ menyatakan penjumlahan, dalam penelitian ini menggunakan perhitungan Aljabar Min-Plus dengan matriks berordo $n \times n$. Syarat $a_{11} < a_{12} < a_{21} < a_{22} < \cdots < a_{nn}$ diberikan agar kita dapat menentukan operasi minimal dalam menyelesaikan permasalahan. Selanjutnya apabila entri bilangan matriks sudah ditentukan, maka syarat $a_{11} < a_{12} < a_{21} < a_{22} < \cdots < a_{nn}$ diabaikan. Menentukan nilai Eigen dan vektor Eigen dalam Aljabar Min-Plus dalam bentuk umum, dapat ditulis sebagai berikut:

$$\boldsymbol{A}_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \text{ dengan syarat } a_{11} < a_{12} < a_{13} < \cdots < a_{nn}$$

Pengertian nilai eigen dan vektor Eigen yang bersesuaian dari matriks persegi $\boldsymbol{A}$ berukuran $n \times n$ sebagaimana dijumpai dalam aljabar linier biasa juga dijumpai dalam Aljabar Min-Plus, yaitu bila diberikan suatu persamaan:

$$\boldsymbol{A} \otimes x = \lambda \otimes x$$

Dalam hal ini masing-masing vektor $x \in R_{min}^{n}$ dan $\lambda \in R_{min}$ dinamakan vektor Eigen dan nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{A}$ dengan vektor $x \neq (\varepsilon, \varepsilon, \cdots, \varepsilon)^T$. Suatu algoritma untuk memperoleh vektor Eigen dan nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{A} \in R_{min}^{m\times n}$, dilakukan secara berulang kali dalam bentuk persamaan linier.

$$x(k+1) = \boldsymbol{A} \otimes x(k), k = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

Teorema 3.1:

Misalkan $\boldsymbol{A}$ sebuah matriks dengan ordo $n \times n$ dengan sebarang keadaan awal $x(0) \neq \varepsilon$, maka sistem persamaan $x(k+1) = \boldsymbol{A} \otimes x(k), k = 0, 1, 2, 3, \cdots$ memenuhi $x(p) = c \otimes x(q)$ untuk suatu bilangan bulat p dan q dengan $p > q \geq$ 0 dan suatu bilangan real c, maka $\lim_{k\to\infty} \frac{x(k)}{k} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda \end{bmatrix}$, sehingga ë $= \frac{c}{p-q}$, di mana x adalah suatu nilai Eigen dari matris $\boldsymbol{A}$ dengan vektor Eigen diberikan oleh:

$$v = \bigoplus_{i=1}^{p-q} \left(x^{\oplus (p-q-i)} \otimes x(q+i-1) \right)$$

Bab ini dibagi dalam 3 bagian utama. Pada bagian pertama akan ditunjukkan nilai Eigen dan vektor Eigen pada matriks ordo 2×2 dalam Aljabar Min-Plus, pada bagian kedua akan ditunjukkan nilai Eigen dan vektor Eigen pada matriks ordo 3×3 dalam Aljabar Min-Plus, dan pada bagian ketiga akan dilanjutkan dengan nilai Eigen dan vektor Eigen pada matriks dengan ordo $n \times n$ dalam Aljabar Min-Plus.

3.2 Nilai Eigen dan Vektor Eigen pada Matriks dengan Ordo 2×2 dalam Aljabar Min-Plus

a. Dalam bentuk umum

Diberikan matriks dalam bentuk umum $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ dengan syarat $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in I$ dan $a_{11} < a_{12} < a_{21} < a_{22}$

Tentukan nilai Eigen dan vektor Eigen dari matriks $\boldsymbol{C}$ dengan ordo 2×2 dalam aljabar Min-Plus.

Jawab:

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

dengan keadaan awal $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Dilakukan iterasi dalam persamaan linier sebagai berikut:

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{C} \otimes \boldsymbol{x}(k)$$

1. Iterasi pertama dengan nilai $k = 0$

   $\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{x}(k)$

   $\boldsymbol{x}(0+1) = \boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{x}(0)$

   $\boldsymbol{x}(1) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

   $\boldsymbol{x}(1) = \begin{bmatrix} \min((a_{11}+0),(a_{12}+0)) \\ \min((a_{21}+0),(a_{22}+0)) \end{bmatrix}$

   $\boldsymbol{x}(1) = \begin{bmatrix} \min(a_{11},a_{12}) \\ \min(a_{21},a_{22}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$

2. Iterasi kedua dengan nilai $k = 1$

   $\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{x}(k)$

   $\boldsymbol{x}(1+1) = \boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{x}(1)$

   $\boldsymbol{x}(2) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$

   $\boldsymbol{x}(2) = \begin{bmatrix} \min((a_{11}+a_{11}),(a_{12}+a_{21})) \\ \min((a_{21}+a_{11}),(a_{22}+a_{21})) \end{bmatrix}$

   $\boldsymbol{x}(2) = \begin{bmatrix} \min(c_{11},c_{12}) \\ \min(c_{21},c_{22}) \end{bmatrix}$, dimana $c_{11} < c_{12} < c_{13} < \cdots < c_{nn}$

   $\boldsymbol{x}(2) = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{bmatrix}$

3. Iterasi ketiga dengan nilai $k = 2$

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{C} \otimes \boldsymbol{x}(k)$$

$$\boldsymbol{x}(2+1) = \boldsymbol{C} \otimes \boldsymbol{x}(2)$$

$$\boldsymbol{x}(3) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(3) = \begin{bmatrix} \min((a_{11} + c_{11}), (a_{12} + c_{12})) \\ \min((a_{21} + c_{11}), (a_{22} + c_{12})) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(3) = \begin{bmatrix} \min(b_{11}, b_{12}) \\ \min(b_{21}, b_{22}) \end{bmatrix}, \text{ di mana } b_{11} < b_{12} < b_{13} < \cdots < b_{nn}$$

$$\boldsymbol{x}(3) = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}$$

Didapatkan iterasi sebagai berikut: $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}$

Sehingga $\boldsymbol{x}(p) = \boldsymbol{c} \otimes \boldsymbol{x}(q)$

$$\boldsymbol{x}(a_{11}) = b_{11} \otimes x(c_{11})$$

Maka nilai $p = a_{11}$, $q = c_{11}$ dan $c = b_{11}$ dimana $p > q \geq 0$ dan c bilangan real

$$x = \frac{c}{p-q}$$

$$= \frac{b_{11}}{a_{11} - c_{11}} = \frac{b_{11}}{a_{11}} = h$$

Dan vektor eigen dari matriks $\boldsymbol{C}$ adalah:

$$v = \bigoplus_{i=1}^{p-q} \left(x^{\oplus(p-q-i)} \otimes x(q+i-1)\right)$$

$$= \bigoplus_{i=1}^{a_{11}-c_{11}} \left(h^{\oplus(a_{11}-c_{11}-1)} \otimes x(c_{11}+i-1)\right)$$

$$= \left(h^{\oplus(a_{11}-c_{11}-1)} \otimes x(c_{11}+1-1)\right) \oplus \left(h^{\oplus(a_{11}-c_{11}-2)} \otimes x(c_{11}+2-1)\right)$$

$$= \left(h^{\oplus(a_{11}-1)} \otimes x(c_{11})\right) \oplus \left(h^{\oplus(a_{11}-2)} \otimes x(c_{11}+1)\right), \text{ misalkan } a_{11} = 2$$

$$= \left(h^{\oplus(2-1)} \otimes x(c_{11})\right) \oplus \left(h^{\oplus(2-2)} \otimes x(c_{11}+1)\right)$$

$$= \left(h^{\oplus 1} \otimes x(c_{11})\right) \oplus \left(h^{\oplus 0} \otimes x(c_{11}+1)\right)$$

$$= \left(h \otimes \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}\right) \oplus \left(0 \otimes \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \min(b_{11}, a_{11}) \\ \min(b_{21}, a_{21}) \end{bmatrix}, \text{ di mana } \begin{matrix} b_{11} < a_{11} \\ b_{21} < a_{21} \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}$$

Maka

$$\boldsymbol{C} \otimes x = h \otimes x$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} = h \otimes \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \min((a_{11}+b_{11}), (a_{12}+b_{21})) \\ \min((a_{21}+b_{11}), (a_{22}+b_{21})) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h+b_{11} \\ h+b_{21} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \min(n_{11}, n_{12}) \\ \min(n_{21}, n_{22}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{11} \\ n_{21} \end{bmatrix}, \text{ dimana } \begin{matrix} n_{11} < n_{12} \\ n_{21} < n_{22} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} n_{11} \\ n_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{11} \\ n_{21} \end{bmatrix}$$

Terbukti $\boldsymbol{C} \otimes x = h \otimes x$.

Contoh 2.29

Diberikan matriks $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

Tentukan nilai Eigen dan vektor Eigen dari matriks $\boldsymbol{B}$ dengan ordo 2×2 dalam aljabar Min-Plus.

Jawab:

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

dengan keadaan awal $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Dilakukan iterasi dalam persamaan linier sebagai berikut:

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{x}(k)$$

1. Iterasi pertama dengan nilai $k = 0$

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{B} \oplus \boldsymbol{x}(k)$$

$$\boldsymbol{x}(0+1) = \boldsymbol{B} \oplus \boldsymbol{x}(0)$$

$$\boldsymbol{x}(1) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(1) = \begin{bmatrix} \min((1+0),(4+0)) \\ \min((2+0),(3+0)) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(1) = \begin{bmatrix} \min(1,4) \\ \min(2,3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2. Iterasi kedua dengan nilai $k = 1$

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{B} \oplus \boldsymbol{x}(k)$$

$$\boldsymbol{x}(1+1) = \boldsymbol{B} \oplus \boldsymbol{x}(1)$$

$$\boldsymbol{x}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(2) = \begin{bmatrix} \min((1+1),(4+2)) \\ \min((2+1),(3+2)) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(2) = \begin{bmatrix} \min(2,6) \\ \min(3,5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

3. Iterasi ketiga dengan nilai $k = 2$

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{x}(k)$$

$$\boldsymbol{x}(2+1) = \boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{x}(2)$$

$$\boldsymbol{x}(3) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(3) = \begin{bmatrix} \min((1+2),(4+3)) \\ \min((2+2),(3+3)) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(3) = \begin{bmatrix} \min(3,7) \\ \min(4,6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Didapatkan iterasi sebagai berikut: $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

Sehingga $\boldsymbol{x}(p) = \boldsymbol{c} \otimes \boldsymbol{x}(q)$

$$\boldsymbol{x}(a_{11}) = b_{11} \otimes x(c_{11})$$

Maka nilai $p = 3$, $q = 1$ dan $c = 2$

$$x = \frac{c}{p-q}$$

$$= \frac{2}{3-1} = \frac{2}{2} = 1$$

Dan vektor eigen dari matriks $\boldsymbol{B}$ adalah:

$$v = \bigoplus_{i=1}^{p-q} \left(x^{\oplus(p-q-i)} \otimes x(q+i-1) \right)$$

$$= \bigoplus_{i=1}^{3-1} \left(1^{\oplus(3-1-i)} \otimes x(1+i-1) \right)$$

$$= \left(1^{\oplus(2-1)} \otimes x(1+1-1) \right) \oplus \left(1^{\oplus(2-2)} \otimes x(1+2-1) \right)$$

$$= \left(1^{\oplus 1} \otimes x(1) \right) \oplus \left(1^{\oplus 0} \otimes x(2) \right)$$

$$= \left(1^{\oplus 1} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) \oplus \left(1^{\oplus 0} \otimes \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \left(1 \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) \oplus \left(0 \otimes \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \min(2,2) \\ \min(3,3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Maka

$$\boldsymbol{B} \otimes x = h \otimes x$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 \otimes \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \min((1+2),(4+3)) \\ \min((2+2),(3+3)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 \\ 1+3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \min(3,7) \\ \min(4,6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Terbukti $\boldsymbol{B} \otimes x = h \otimes x$.

3.3 Nilai Eigen dan Vektor Eigen pada Matriks dengan Ordo 3×3 dalam Aljabar Min-Plus

a. Dalam bentuk umum

Diberikan matriks dalam bentuk umum $\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33} \in I$ dan $a_{11} < a_{12} < a_{13} < a_{21} < a_{22} < a_{23} < a_{31} < a_{32} < a_{33}$

Tentukan nilai Eigen dan vektor Eigen dari matriks $\boldsymbol{F}$ dengan ordo 3×3 dalam aljabar Min-Plus.

Jawab:

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Dengan keadaan awal $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Dilakukan iterasi dalam persamaan linier sebagai berikut:

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{F} \otimes \boldsymbol{x}(k)$$

1. Iterasi pertama dengan nilai $k = 0$

   $\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{F} \otimes \boldsymbol{x}(k)$

   $\boldsymbol{x}(0+1) = \boldsymbol{F} \otimes \boldsymbol{x}(0)$

$$\boldsymbol{x}(1) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(1) = \begin{bmatrix} \min\big((a_{11}+0),(a_{12}+0),(a_{13}+0)\big) \\ \min\big((a_{21}+0),(a_{22}+0),(a_{23}+0)\big) \\ \min\big((a_{31}+0),(a_{32}+0),(a_{33}+0)\big) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(1) = \begin{bmatrix} \min(a_{11},a_{12},a_{13}) \\ \min(a_{21},a_{22},a_{23}) \\ \min(a_{31},a_{32},a_{33}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$$

2. Iterasi kedua dengan nilai $k = 1$

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{F} \otimes \boldsymbol{x}(k)$$

$$\boldsymbol{x}(1+1) = \boldsymbol{F} \otimes \boldsymbol{x}(1)$$

$$\boldsymbol{x}(2) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(2) = \begin{bmatrix} \min\big((a_{11}+a_{11}),(a_{12}+a_{21}),(a_{13}+a_{31})\big) \\ \min\big((a_{21}+a_{11}),(a_{22}+a_{21}),(a_{23}+a_{31})\big) \\ \min\big((a_{31}+a_{11}),(a_{32}+a_{21}),(a_{33}+a_{31})\big) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(2) = \begin{bmatrix} \min(c_{11},c_{12},c_{13}) \\ \min(c_{21},c_{22},c_{23}) \\ \min(c_{31},c_{32},c_{33}) \end{bmatrix}, \text{ di mana } c_{11} < c_{12} < c_{13} < \cdots < c_{nn}$$

$$\boldsymbol{x}(2) = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{bmatrix}$$

3. Iterasi ketiga dengan nilai $k = 2$

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{F} \otimes \boldsymbol{x}(k)$$

$$\boldsymbol{x}(2+1) = \boldsymbol{F} \otimes \boldsymbol{x}(2)$$

$$\boldsymbol{x}(3)=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}c_{11}\\c_{21}\\c_{31}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(3)=\begin{bmatrix}\min\big((a_{11}+c_{11}),(a_{12}+c_{21}),(a_{13}+c_{31})\big)\\\min\big((a_{21}+c_{11}),(a_{22}+c_{21}),(a_{23}+c_{31})\big)\\\min\big((a_{31}+c_{11}),(a_{32}+c_{21}),(a_{33}+c_{31})\big)\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(3)=\begin{bmatrix}\min(b_{11},b_{12},b_{13})\\\min(b_{21},b_{22},b_{23})\\\min(b_{31},b_{32},b_{33})\end{bmatrix}, \text{ di mana } b_{11}<b_{12}<b_{13}<\cdots<b_{nn}$$

$$\boldsymbol{x}(3)=\begin{bmatrix}b_{11}\\b_{21}\\b_{31}\end{bmatrix}$$

4. Iterasi keempat dengan nilai $k=3$

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{F}\otimes\boldsymbol{x}(k)$$

$$\boldsymbol{x}(3+1)=\boldsymbol{F}\otimes\boldsymbol{x}(2)$$

$$\boldsymbol{x}(4)=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}b_{11}\\b_{21}\\b_{31}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(4)=\begin{bmatrix}\min\big((a_{11}+b_{11}),(a_{12}+b_{21}),(a_{13}+b_{31})\big)\\\min\big((a_{21}+b_{11}),(a_{22}+b_{21}),(a_{23}+b_{31})\big)\\\min\big((a_{31}+b_{11}),(a_{32}+b_{21}),(a_{33}+b_{31})\big)\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(4)=\begin{bmatrix}\min(d_{11},d_{12},d_{13}\\\min(d_{21},d_{22},d_{23}\\\min(d_{31},d_{32},d_{33}\end{bmatrix}, \text{ di mana } d_{11}<d_{12}<d_{13}<\cdots<d_{nn}$$

$$\boldsymbol{x}(4)=\begin{bmatrix}d_{11}\\d_{21}\\d_{31}\end{bmatrix}$$

Didapatkan iterasi sebagai berikut: $\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}c_{11}\\c_{21}\\c_{31}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}b_{11}\\b_{21}\\b_{31}\end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix}d_{11}\\d_{21}\\d_{31}\end{bmatrix}$

Sehingga $\boldsymbol{x}(p) = \boldsymbol{c} \otimes \boldsymbol{x}(q)$

$$\boldsymbol{x}(a_{11}) = b_{11} \otimes x(c_{11})$$

Maka nilai $p = a_{11}$, $q = c_{11}$ dan $c = b_{11}$ dimana $p > q \geq 0$ dan c bilangan real

$x = \frac{c}{p-q}$

$= \frac{b_{11}}{a_{11}-c_{11}} = \frac{b_{11}}{a_{11}} = y$

Dan vektor Eigen dari matriks $\boldsymbol{F}$ adalah:

$$v = \bigoplus_{i=1}^{p-q} \left(x^{\oplus(p-q-i)} \otimes x(q+i-1)\right)$$

$$= \bigoplus_{i=1}^{a_{11}-c_{11}} \left(y^{\oplus(a_{11}-c_{11}-1)} \otimes x(c_{11}+i-1)\right)$$

$$= \left(y^{\oplus(a_{11}-c_{11}-1)} \otimes x(c_{11}+1-1)\right) \oplus \left(y^{\oplus(a_{11}-c_{11}-2)} \otimes x(c_{11}+2-1)\right)$$

$$= \left(y^{\oplus(a_{11}-1)} \otimes x(c_{11})\right) \oplus \left(y^{\oplus(a_{11}-2)} \otimes x(c_{11}+1)\right), \text{ misalkan } a_{11} = 2$$

$$= \left(y^{\oplus(2-1)} \otimes x(c_{11})\right) \oplus \left(y^{\oplus(2-2)} \otimes x(c_{11}+1)\right)$$

$$= \left(y^{\oplus 1} \otimes x(c_{11})\right) \oplus \left(y^{\oplus 0} \otimes x(c_{11}+1)\right)$$

$$= \left(y \otimes \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \\ d_{31} \end{bmatrix}\right) \oplus \left(0 \otimes \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \\ d_{31} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \min(d_{11}, c_{11}) \\ \min(d_{21}, c_{21}) \\ \min(d_{31}, c_{31}) \end{bmatrix}, \text{ dimana } \begin{matrix} d_{11} < c_{11} \\ d_{21} < c_{21} \\ d_{31} < c_{31} \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \\ d_{31} \end{bmatrix}$$

Maka

$$\boldsymbol{F} \otimes x = h \otimes x$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \\ d_{31} \end{bmatrix} = y \otimes \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \\ d_{31} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \min\left((a_{11}+d_{11}),(a_{12}+d_{21}),(a_{13}+d_{31})\right) \\ \min\left((a_{21}+d_{11}),(a_{22}+d_{21}),(a_{23}+d_{31})\right) \\ \min\left((a_{31}+d_{11}),(a_{32}+d_{21}),(a_{33}+d_{31})\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y+d_{11} \\ y+d_{21} \\ y+d_{31} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \min(m_{11},m_{12},m_{13} \\ \min(m_{21},m_{22},m_{23} \\ \min(m_{31},m_{32},m_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ m_{31} \end{bmatrix}, \text{ dimana } \begin{matrix} m_{11} < m_{12} < m_{13} \\ m_{21} < m_{22} < m_{23} \\ m_{31} < m_{32} < m_{33} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ m_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ m_{31} \end{bmatrix}$$

Terbukti $\boldsymbol{F} \otimes x = h \otimes x$.

Contoh 2.30

Diberikan matriks $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Tentukan nilai Eigen dan vektor Eigen dari matriks $\boldsymbol{D}$ dengan ordo 3×3 dalam aljabar Min-Plus.

Jawab:

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Dengan keadaan awal $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Dilakukan iterasi dalam persamaan linier sebagai berikut:

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{D} \otimes \boldsymbol{x}(k)$$

1. Iterasi pertama dengan nilai $k = 0$

   $\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{D} \otimes \boldsymbol{x}(k)$

   $\boldsymbol{x}(0+1) = \boldsymbol{D} \otimes \boldsymbol{x}(0)$

$$\boldsymbol{x}(1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(1) = \begin{bmatrix} \min\big((1+0),(2+0),(1+0)\big) \\ \min\big((1+0),(1+0),(2+0)\big) \\ \min\big((3+0),(2+0),(1+0)\big) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(1) = \begin{bmatrix} \min(1,2,1) \\ \min(1,1,2) \\ \min(3,2,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Iterasi kedua dengan nilai $k = 1$

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{D} \otimes \boldsymbol{x}(k)$$

$$\boldsymbol{x}(1+1) = \boldsymbol{D} \otimes \boldsymbol{x}(1)$$

$$\boldsymbol{x}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(2) = \begin{bmatrix} \min\big((1+2),(2+1),(1+1)\big) \\ \min\big((1+1),(1+1),(2+1)\big) \\ \min\big((3+1),(2+1),(1+1)\big) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(2) = \begin{bmatrix} \min(3,3,2) \\ \min(2,2,3) \\ \min(4,3,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

3. Iterasi ketiga dengan nilai $k = 2$

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{D} \otimes \boldsymbol{x}(k)$$

$$\boldsymbol{x}(2+1) = \boldsymbol{D} \otimes \boldsymbol{x}(2)$$

$$\boldsymbol{x}(3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(3) = \begin{bmatrix} \min\big((1+2),(2+2),(1+2)\big) \\ \min\big((1+2),(1+2),(2+2)\big) \\ \min\big((3+2),(2+2),(1+2)\big) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(3) = \begin{bmatrix} \min(3,4,3) \\ \min(3,3,4) \\ \min(5,4,3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

4. Iterasi keempat dengan nilai $k = 3$

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{D} \otimes \boldsymbol{x}(k)$$

$$\boldsymbol{x}(3+1) = \boldsymbol{D} \otimes \boldsymbol{x}(3)$$

$$\boldsymbol{x}(4) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(4) = \begin{bmatrix} \min\big((1+3),(2+3),(1+3)\big) \\ \min\big((1+3),(1+3),(2+3)\big) \\ \min\big((3+3),(2+3),(1+3)\big) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(4) = \begin{bmatrix} \min(4,5,4) \\ \min(4,4,5) \\ \min(6,5,4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Didapatkan iterasi sebagai berikut: $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$

Sehingga $\boldsymbol{x}(p) = \boldsymbol{c} \otimes \boldsymbol{x}(q)$

$$\boldsymbol{x}(a_{11}) = b_{11} \otimes x(c_{11})$$

Maka nilai $p = 2$, $q = 0$ dan $c = 2$

$$x = \frac{c}{p-q}$$

$$= \frac{2}{2-0} = \frac{2}{2} = 1$$

Dan vektor Eigen dari matriks $\boldsymbol{D}$ adalah:

$$v = \oplus_{i=1}^{p-q} \left(x^{\oplus(p-q-i)} \otimes x(q+i-1) \right)$$

$$= \oplus_{i=1}^{2-0} \left(1^{\oplus(2-0-i)} \otimes x(0+i-1) \right)$$

$$= \left(1^{\oplus(2-1)} \otimes x(0+1-1) \right) \oplus \left(1^{\oplus(2-2)} \otimes x(0+2-1) \right)$$

$$= \left(1^{\oplus 1} \otimes x(0)\right) \oplus \left(1^{\oplus 0} \otimes x(1)\right)$$

$$= \left(1^{\oplus 1} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \oplus \left(1^{\oplus 0} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \left(1 \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \oplus \left(0 \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \min(1,1) \\ \min(1,1) \\ \min(1,1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Maka

$$\boldsymbol{D} \otimes x = h \otimes x$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \min\left((1+1),(2+1),(1+1)\right) \\ \min\left((1+1),(1+1),(2+1)\right) \\ \min\left((3+1),(2+1),(1+1)\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 \\ 1+1 \\ 1+1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \min(2,3,2) \\ \min(2,2,3) \\ \min(4,3,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Terbukti $\boldsymbol{D} \otimes x = h \otimes x$.

3.4 Nilai Eigen dan Vektor Eigen pada Matriks dengan Ordo $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$ dalam Aljabar Min-Plus

Diberikan suatu matriks dalam bentuk umum

$$\boldsymbol{A}_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{2n}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{3n}, a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, a_{nn} \in I$ dan $a_{11} < a_{12} < a_{13} < a_{1n} < a_{21} < a_{22} < a_{23} < a_{2n} < a_{31} < a_{32} < a_{33} < a_{3n} < a_{n1} < a_{n2} < a_{n3} < a_{nn}$

Tentukan nilai Eigen dan vektor Eigen dari matriks $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ dengan ordo $n \times n$ dalam aljabar Min-Plus.

Jawab:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Dengan keadaan awal $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

Dilakukan iterasi dalam persamaan linier sebagai berikut:

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{x}(k)$$

1. Iterasi pertama dengan nilai $k = 0$

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{x}(k)$$

$$\boldsymbol{x}(0+1) = \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{x}(0)$$

$$\boldsymbol{x}(1) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(1)=\begin{bmatrix} min & ((a_{11}+0), & (a_{12}+0) & (a_{13}+0) & \cdots & (a_{1n}+0)) \\ min & ((a_{21}+0) & (a_{22}+0) & (a_{23}+0) & \cdots & (a_{2n}+0)) \\ min & ((a_{31}+0) & (a_{32}+0) & (a_{33}+0) & \cdots & (a_{3n}+0)) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ min & ((a_{n1}+0) & (a_{n2}+0) & (a_{n3}+0) & \cdots & (a_{nn}+0)) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(1)=\begin{bmatrix} \min\big((a_{11},a_{12},a_{13},\dots,a_{1n})\big) \\ \min\big((a_{21},a_{22},a_{23},\dots,a_{2n})\big) \\ \min\big((a_{31},a_{32},a_{33},\dots,a_{3n})\big) \\ \vdots \\ \min\big((a_{n1},a_{n2},a_{n3},\dots,a_{nn})\big) \end{bmatrix}, \text{ dimana, } \begin{matrix} a_{11}<a_{12}<a_{13}<\cdots<a_{1n} \\ a_{21}<a_{22}<\ a_{23}<\cdots<a_{2n} \\ a_{31}<a_{32}<a_{33}<\cdots<a_{3n} \\ a_{n1}<a_{n2}<a_{n3}<\cdots<a_{nn} \end{matrix}$$

$$\boldsymbol{x}(1)=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$$

2. Iterasi kedua dengan nilai $k=1$

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{x}(k)$$

$$\boldsymbol{x}(1+1)=\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{x}(1)$$

$$\boldsymbol{x}(2)=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(2)=$$

$$\begin{bmatrix} min & ((a_{11}+a_{11}), & (a_{12}+a_{21}) & (a_{13}+a_{31}) & \cdots & (a_{1n}+a_{n1})) \\ min & ((a_{21}+a_{11}) & (a_{22}+a_{21}) & (a_{23}+a_{31}) & \cdots & (a_{2n}+a_{n1})) \\ min & ((a_{31}+a_{11}) & (a_{32}+a_{21}) & (a_{33}+a_{31}) & \cdots & (a_{3n}+a_{n1})) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ min & ((a_{n1}+a_{11}) & (a_{n2}+a_{21}) & (a_{n3}+a_{31}) & \cdots & (a_{nn}+a_{n1})) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(2)=\begin{bmatrix} \min\big((b_{11},b_{12},b_{13},\dots,b_{1n})\big) \\ \min\big((b_{21},b_{22},b_{23},\dots,b_{2n})\big) \\ \min\big((b_{31},b_{32},b_{33},\dots,b_{3n})\big) \\ \vdots \\ \min\big((b_{n1},b_{n2},b_{n3},\dots,b_{nn})\big) \end{bmatrix} \text{ dimana, } \begin{matrix} b_{11}<b_{12}<b_{13}<\cdots<b_{1n} \\ b_{21}<b_{22}<\ b_{23}<\ \dots<b_{2n} \\ b_{31}<b_{32}<b_{33}<\cdots<b_{3n} \\ b_{n1}<b_{n2}<b_{n3}<\cdots<b_{nn} \end{matrix}$$

$$\boldsymbol{x}(2) = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}$$

3. Iterasi ketiga dengan nilai $k = n$

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{x}(k)$$

$$\boldsymbol{x}(n+1) = \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{x}(n)$$

$$\boldsymbol{x}(n+1) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(n+1) =$$

$$\begin{bmatrix} min & ((a_{11}+a_{1n}), & (a_{12}+a_{2n}) & (a_{13}+a_{3n}) & \cdots & (a_{1n}+a_{nn})) \\ min & ((a_{21}+a_{1n}) & (a_{22}+a_{2n}) & (a_{23}+a_{3n}) & \cdots & (a_{2n}+a_{nn})) \\ min & ((a_{31}+a_{1n}) & (a_{32}+a_{2n}) & (a_{33}+a_{3n}) & \cdots & (a_{3n}+a_{nn})) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ min & ((a_{n1}+a_{1n}) & (a_{n2}+a_{2n}) & (a_{n3}+a_{3n}) & \cdots & (a_{nn}+a_{nn})) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(n+1) = \begin{bmatrix} \min((c_{11}, c_{12}, c_{13}, \dots, c_{1n})) \\ \min((c_{21}, c_{22}, c_{23}, \dots, c_{2n})) \\ \min((c_{31}, c_{32}, c_{33}, \dots, c_{3n})) \\ \vdots \\ \min((c_{n1}, c_{n2}, c_{n3}, \dots, c_{nn})) \end{bmatrix}$$

di mana, $\begin{matrix} c_{11} < c_{12} < c_{13} < \cdots < c_{1n} \\ c_{21} < c_{22} < c_{23} < \dots < c_{2n} \\ c_{31} < c_{32} < c_{33} < \cdots < c_{3n} \\ c_{n1} < c_{n2} < c_{n3} < \cdots < c_{nn} \end{matrix}$

$$\boldsymbol{x}(n+1) = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{bmatrix}$$

Didapatkan iterasi sebagai berikut: $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{bmatrix}$

Sehingga $\boldsymbol{x}(p) = \boldsymbol{c} \otimes \boldsymbol{x}(q)$

$$\boldsymbol{x}(a_{11}) = b_{11} \otimes x(c_{11})$$

Maka nilai $p = a_{11}$, $q = c_{11}$ dan $c = b_{11}$ di mana $p > q \geq 0$ dan c bilangan real

$$x = \frac{c}{p-q}$$

$$= \frac{b_{11}}{a_{11}-c_{11}} = \frac{b_{11}}{a_{11}} = d$$

Dan vektor Eigen dari matriks $\boldsymbol{A}$ adalah:

$$v = \bigoplus_{i=1}^{p-q} \left(x^{\oplus(p-q-i)} \otimes x(q+i-1)\right)$$

$$= \bigoplus_{i=1}^{a_{11}-c_{11}} \left(d^{\oplus(a_{11}-c_{11}-1)} \otimes x(c_{11}+i-1)\right)$$

$$= \left(d^{\oplus(a_{11}-c_{11}-1)} \otimes x(c_{11}+1-1)\right) \oplus \left(d^{\oplus(a_{11}-c_{11}-2)} \otimes x(c_{11}+2-1)\right)$$

$$= \left(d^{\oplus(a_{11}-1)} \otimes x(c_{11})\right) \oplus \left(d^{\oplus(a_{11}-2)} \otimes x(c_{11}+1)\right), \text{ misalkan } a_{11} = 2$$

$$= \left(d^{\oplus(2-1)} \otimes x(c_{11})\right) \oplus \left(d^{\oplus(2-2)} \otimes x(c_{11}+1)\right)$$

$$= \left(d^{\oplus 1} \otimes x(c_{11})\right) \oplus \left(d^{\oplus 0} \otimes x(c_{11}+1)\right)$$

$$= \left(d \otimes \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}\right) \oplus \left(0 \otimes \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \min(a_{11},\ c_{11}) \\ \min(a_{21},\ c_{21}) \\ \min(a_{31},\ c_{31}) \\ \vdots \\ \min(a_{n1},\ c_{n1}) \end{bmatrix}, \text{ dimana } \begin{matrix} a_{11} < c_{11} \\ a_{21} < c_{21} \\ a_{31} < c_{31} \\ \vdots \\ a_{n1} < c_{n1} \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$$

Maka

$$\boldsymbol{A} \otimes x = h \otimes x$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} = d \otimes \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} min & ((a_{11}+a_{11}), & (a_{12}+a_{21}) & (a_{13}+a_{31}) & \cdots & (a_{1n}+a_{n1})) \\ min & ((a_{21}+a_{11}) & (a_{22}+a_{21}) & (a_{23}+a_{31}) & \cdots & (a_{2n}+a_{n1})) \\ min & ((a_{31}+a_{11}) & (a_{32}+a_{21}) & (a_{33}+a_{31}) & \cdots & (a_{3n}+a_{n1})) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ min & ((a_{n1}+a_{11}) & (a_{n2}+a_{21}) & (a_{n3}+a_{31}) & \cdots & (a_{nn}+a_{n1})) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} d+a_{11} \\ d+a_{21} \\ d+a_{31} \\ \vdots \\ d+a_{n1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \min\left((f_{11}, f_{12}, f_{13}, \dots, f_{1n})\right) \\ \min\left((f_{21}, f_{22}, f_{23}, \dots, f_{2n})\right) \\ \min\left((f_{31}, f_{32}, f_{33}, \dots, f_{3n})\right) \\ \vdots \\ \min\left((f_{n1}, f_{n2}, f_{n3}, \dots, f_{nn})\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ f_{31} \\ \vdots \\ f_{n1} \end{bmatrix}, \text{ di mana } \begin{matrix} f_{11} < f_{12} < f_{13} < \cdots < f_{1n} \\ f_{21} < f_{22} < f_{23} < \dots < f_{2n} \\ f_{31} < f_{32} < f_{33} < \cdots < f_{3n} \\ f_{n1} < f_{n2} < f_{n3} < \cdots < f_{nn} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ f_{31} \\ \vdots \\ f_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ f_{31} \\ \vdots \\ f_{n1} \end{bmatrix}$$

Terbukti $\boldsymbol{A} \otimes x = h \otimes x$.

3.5 Meminimalkan Perintah Buruk dalam Tinjauan Al-Qur'an

Puasa merupakan tempat penggemblengan diri bagi orang yang menjalankannya untuk membentuk akhlak mulia, akhlak ketakwaan, kebajikan, kebaikan, kepedulian, tolong-menolong, kasih sayang, kecintaan, kesabaran, dan akhlak mulia lainnya yang dibangun oleh puasa pada diri orang yang menjalankannya.

Puasa dapat membentuk muraqabah (rasa selalu berada dalam pengawasan Allah) bagi pelakunya. Bagi dirinya ada satu penjaga umum yang selalu mengawasi dirinya agar tidak ada sesuatu pun yang bersumber dari dirinya yang bertentangan dengan syari'at. Dialah yang membinanya dari dalam sehingga darinya muncul amal-amal lahiriah yang tunduk pada pengawasan ini. Tak terkecuali dengan ibadah puasa Ramadhan. Setiap kita diminta untuk meniti hari-hari puasa dengan penuh ketelitian. Menjaganya dari segala onak yang justru akan memporakporandakan pahala puasa kita. Rasulullah SAW telah mengingatkan: *" Betapa banyak orang yang berpuasa, tapi tidak mendapatkan dari puasanya kecuali hanya rasa lapar. Dan betapa banyak orang yang sholat malam, tapi tidak mendapatkan dari sholatnya kecuali hanya begadang " (HR Ibnu Majah)*

Ini artinya, hari-hari puasa kita haruslah penuh kehati-hatian. Menjaga lisan, pandangan dan anggota badan lainnya dari kemaksiatan. Sungguh berat, tapi tiga puluh hari latihan seharusnya akan membuat kita melangkah lebih ringan dalam hal ihsan pada bulan-bulan selanjutnya. Bahkan semestinya, perilaku ihsan ini memang menjadi branding kaum muslimin dalam setiap amalnya.

Pada surat al-Baqarah ayat 183-184, Allah Swt menyebutkan kewajiban puasa bagi orang mukmin. Allah Swt mengabarkan bahwa puasa itu hanya pada hari-hari yang tertentu atau sedikit sekali dan sangat mudah. Kemudian Allah Swt memudahkan puasa itu dengan kemudahan lainnya. Allah berfirman: *"Maka barang siapa di antara kamu ada yang sakit atau dalam perjalanan (lalu ia berbuka), maka (wajiblah baginya berpuasa) sebanyak hari yang ditinggalkan itu pada hari-hari* *lain".* Pada umumnya hal itu karena adanya kesulitan sehingga Allah Swt memberikan kemudahan baginya untuk berbuka. Allah Swt memerintahkan kepada orang mukmin agar mengganti puasanya itu pada hari-hari lain apabila penyakitnya telah sembuh atau berakhirnya perjalanan dan adanya istirahat, dalam firman-Nya: *"Dan wajib bagi orang-orang yang berat menjalankannya (jika mereka tidak berpuasa)",* maksud dari firman tersebut yaitu jika mereka tidak mampu berpuasa Allah Swt memberikan kemudahan yang lain, yaitu membayar fidyah dari setiap hari yang mereka batalkan atau memberi makan seorang miskin.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Aljabar Min-Plus adalah $R_{min} = R \cup \{\varepsilon\}$ dengan R adalah himpunan bilangan real dan $\varepsilon = -\infty$ dan $e = 0$ untuk $a, b \in R_{min}$ didefinisikan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ yaitu: $a \oplus b = \min(a, b)$ dan $a \otimes b = a + b$, yang dinotasikan sebagai berikut: $(R_{min}, \oplus, \otimes)$. Dari hasil pembahasan pada bab sebelumnya, kesimpulan yang diperoleh yaitu Menghitung vektor eigen dengan Aljabar Min-Plus dengan cara $v = \oplus_{i=1}^{p-q} \left(\text{ë}^{\oplus(p-q-i)} \otimes x(q+i-1)\right)$ maka diperoleh prosedur perhitungan dan hasil pada nilai Eigen dan vektor Eigen dengan menggunakan Aljabar Min-Plus pada matriks $n \times n$ sebagai berikut:

a. Menentukan Matriks $n \times n$ dengan n bilangan bulat positif

b. Menghitung determinan matriks dengan Aljabar Min-Plus dengan cara $\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{x}(k)$ maka diperoleh iterasi sebagai berikut:

$$\boldsymbol{x}(1) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}(2) = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}(n+1) = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{bmatrix}$$

c. syarat $a_{11} < a_{12} < a_{13} < \cdots < a_{nn}$ hanya digunakan secara teoritis karena untuk menentukan pilihan dalam operasi minimal dalam bentuk umum. Apabila dalam bentuk bilangan tertentu, syarat tersebut dapat diabaikan.

d. Banyaknya iterasi untuk matriks ordo $n \times n$ adalah $n + 2$.

e. Iterasi terakhir $(n + 2)$ menghasilkan nilai Eigen

f. Menghitung vektor Eigen dengan Aljabar Min-Plus dengan cara $v = \bigoplus_{i=1}^{p-q} \left(\ddot{e}^{\oplus(p-q-i)} \otimes x(q+i-1) \right)$ maka diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ f_{31} \\ \vdots \\ f_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ f_{31} \\ \vdots \\ f_{n1} \end{bmatrix}$$

4.2 Saran

Bagi penelitian selanjutnya, disarankan untuk mencari nilai Eigen dan vektor Eigen dengan menggunakan Aljabar pengembangan lainnya misalnya menggunakan Aljabar Max-Plus, Aljabar K, Aljabar BCI dan lainnya. Matriks selanjutnya yang dicari nilai Eigen dan vektor Eigen dengan Aljabar Min-Plus dapat dengan entri interval, matriks entrinya matriks maupun matriks entrinya bilangan kompleks.

DAFTAR PUSTAKA

Anonim. 2009. *http://kolom-biografi.Blogspot. Com/biografi al-khawarizmi.html* (diunduh pada tanggal 25 oktober 2016).

Anton, H.. 1997. *Aljabar Linier Elementer*. Jakarta: Erlangga.

Anton, H.. 2000. *Elementary linier Algebra*. Terjemahan Hari Suminto. Batam: interaksara

Anton, H.. 2004. *Aljabar Linier Elementer*. Jakarta: Erlangga.

Anton, H. dan Rorres, C.. 2004. *Aljabar Linier Elementer Versi Aplikasi Edisi Kedelapan Jilid 1*. Jakarta Erlangga.

Arifin, A.. 2000. *Aljabar*. Bandung: Penerbit ITB.

Gere, J. dan William, W.. 1987. *Aljabar Matriks untuk Para Insinyur*. Jakarta Erlangga.

Mustofa. 2011. *Sistem Persamaan Linier Pada Aljabar Min-Plus*. Yogyakarta Universitas Negeri Yogyakarta.

Supranto, M. A.. 2003. *Pengantar Matrix*. Jakarta: PT. Rineka Cipta.

Tazi, Imam. 2008. *Matematika Untuk Sains dan Teknik*. Malang: UIN-Malang Press

Weber, J. E.. 1999. *Analisis Matematika Penerapan Bisnis dan Ekonomi*. Jakarta Erlangga.

RIWAYAT HIDUP

Muhammad Nasichuddin dilahirkan di Pasuruan pada tanggal 09 Agustus 1994, biasa dipanggil Nasich, berasal dari Pasuruan, anak pertama dari pasangan Bapak H. Choirul Anwar dan Ibu Haniyah. Pendidikan dasar ditempuh di MI Nogosari Pandaan yang ditamatkan pada tahun 2006.

Pada tahun yang sama penulis melanjutkan pendidikan menengah pertama di SMP Islam 01 Al-Ma'arif Singosari, Malang. Pada tahun 2009 penulis menamatkan pendidikannya, kemudian melanjutkan pendidikan menengah atas di MA 01 Al-Ma'arif Singosari, Malang dan menamatkan pendidikan tersebut pada tahun 2012. Pendidikan berikutnya penulis tempuh di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang melalui jalur Mandiri dengan mengambil Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Muhammad Nasichuddin
NIM : 12610094
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Aplikasi Aljabar Min-Plus dalam Menghitung Nilai Eigen dan Vektor Eigen pada Matriks $N \times N$
Pembimbing I : Evawati Alisah, M.Pd
Pembimbing II : Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd

No.	Tanggal	Materi Konsultasi	Tanda Tangan
1.	01 November 2016	Konsultasi Agama Bab I dan II	1.
2.	01 November 2016	Konsultasi bab I dan II	2.
3.	08 November 2016	Revisi Agama Bab I dan II	3.
4.	08 November 2016	ACC Bab I dan II	4.
5.	08 November 2016	ACC Kajian Agama Bab I dan II	5.
6.	28 Februari 2017	Konsultasi Bab III dan IV	6.
7.	01 Maret 2017	Revisi Bab III dan IV	7.
8.	02 Maret 2017	ACC bab III dan IV	8.
9.	10 Desember 2016	ACC Bab I, II, III, dan IV	9.
10.	11 Desember 2016	Konsultasi Agama Bab III	10.
11.	12 Desember 2016	ACC Keseluruhan Kajian Agama	11.

Malang, 25 November 2017
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19751006 200312 1 001