

**SOLUSI NUMERIK MODEL GERAK OSILASI VERTIKAL DAN
TORSIONAL UNTUK MASALAH JEMBATAN GANTUNG**

SKRIPSI

**OLEH
HENDRIK WIDYA PERMATA
NIM. 12610006**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018**

**SOLUSI NUMERIK MODEL GERAK OSILASI VERTIKAL DAN
TORSIONAL UNTUK MASALAH JEMBATAN GANTUNG**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
Hendrik Widya Permata
NIM. 12610006**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018**

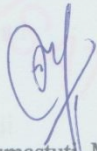
**SOLUSI NUMERIK MODEL GERAK OSILASI VERTIKAL DAN
TORSIONAL UNTUK MASALAH JEMBATAN GANTUNG**

SKRIPSI

Oleh
Hendrik Widya Permata
NIM. 12610006

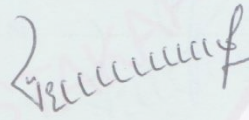
Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 26 April 2018

Pembimbing I,



Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si
NIP. 19770521 200501 2 004

Pembimbing II,



Evawati Alisah, M.Pd
NIP. 19720604 199903 2 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

**SOLUSI NUMERIK MODEL GERAK OSILASI VERTIKAL DAN
TORSIONAL UNTUK MASALAH JEMBATAN GANTUNG**

SKRIPSI

Oleh
Hendrik Widya Permata
NIM. 12610006

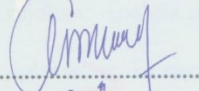
Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal 31 Mei 2018

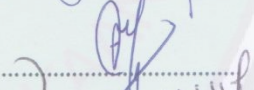
Penguji Utama : Abdul Aziz, M.Si



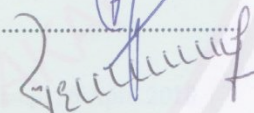
Ketua Penguji : Mohammad Jamhuri, M.Si



Sekretaris Penguji : Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si



Anggota Penguji : Evawati Alisah, M.Pd



Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Hendrik Widya Permata

NIM : 12610006

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Solusi Numerik Model Gerak Osilasi Vertikal dan Torsional
untuk Masalah Jembatan Gantung.

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 26 April 2018

Yang membuat pernyataan,



Hendrik Widya Permata
NIM. 12610006

MOTO

وَقُلْ أَعْمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُمْ وَرَسُولُهُ وَالْمُؤْمِنُونَ وَسَتُرَدُّونَ إِلَىٰ عِلْمِ الْغَيْبِ وَالشَّهَادَةِ فَيُنَبِّئُكُمْ بِمَا كُنْتُمْ تَعْمَلُونَ ١٠٥

“Dan Katakanlah: "Bekerjalah kamu, maka Allah dan Rasul-Nya serta orang-orang mukmin akan melihat pekerjaanmu itu, dan kamu akan dikembalikan kepada (Allah) Yang Mengetahui akan yang ghaib dan yang nyata, lalu diberitakan-Nya kepada kamu apa yang telah kamu kerjakan”

(QS. At-Tawbah/9:105)

“Saya tidak bangga dengan keberhasilan yang tidak saya rencanakan sebagaimana saya tidak akan menyesal atas kegagalan yang terjadi di ujung usaha maksimal”

(Harun Al Rasyid)

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda Suwito, ibunda Robingaton, kakak tersayang Ratih Witikasari dan
Vindra Dian Permata, serta sahabat yang selalu memberikan semangat yang
berarti bagi penulis



KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Alhamdulillah, segala puja dan puji syukur bagi Allah Swt atas limpahan rahmat, taufik, hidayah, dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan dengan baik penyusunan skripsi yang berjudul “Solusi Numerik Model Gerak Osilasi Vertikal dan Torsional untuk Masalah Jembatan Gantung”.

Shalawat serta salam semoga tetap terlimpahkan kepada Nabi Muhammad Saw, yang telah menuntun umatnya dari zaman yang gelap ke zaman yang terang benderang yakni agama Islam.

Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Dalam proses penyusunannya tidak mungkin dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan, bimbingan, serta arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Abdul Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang senantiasa memberikan doa, arahan, nasihat, motivasi dalam melakukan penelitian, serta pengalaman yang berharga kepada penulis.

5. Evawati Alisah, M.Pd, selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, arahan, dan berbagai ilmunya kepada penulis.
6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.
7. Bapak dan ibu yang selalu memberikan doa, semangat, serta motivasi kepada penulis.
8. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2012, terima kasih atas kenangan-kenangan indah yang dirajut bersama dalam menggapai cita-cita.
9. Semua pihak yang secara langsung atau tidak langsung telah ikut memberikan bantuan dalam menyelesaikan skripsi ini.

Akhirnya penulis hanya bisa berharap, dibalik skripsi ini dapat ditemukan sesuatu yang dapat memberikan manfaat dan wawasan yang lebih luas atau bahkan hikmah bagi penulis, pembaca, dan bagi seluruh mahasiswa.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 19 April 2018

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL

HALAMAN PENGAJUAN

HALAMAN PERSETUJUAN

HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

HALAMAN MOTO

HALAMAN PERSEMBAHAN

KATA PENGANTAR viii

DAFTAR ISI x

DAFTAR TABEL xii

DAFTAR GAMBAR xiii

ABSTRAK xix

ABSTRACT xx

ملخص xxi

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Tujuan Penelitian	4
1.4 Batasan Masalah	5
1.5 Manfaat Penelitian	5
1.6 Metode Penelitian	6
1.7 Sistematika Penulisan	7

BAB II KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial Biasa	9
2.2 Persamaan Diferensial Biasa Orde Dua	10
2.3 Sistem Persamaan Diferensial	11
2.4 Interpolasi Polinomial Lagrange	13
2.5 Interpolasi Polinimoal Newton-Gregory	16
2.6 Metode Runge-Kutta	21
2.7 Metode Adams-Bashforth-Moulton	23
2.8 Model Gerak Osilasi Vertikal dan Gerak Torsional pada Jembatan Gantung	31
2.8.1 Perpanjangan Sisi Kabel pada Jembatan Gantung	31
2.8.2 Asal Mula Model Gerak Osilasi Vertikal dan Gerak Torsional pada Jembatan Gantung	33

2.9 Fenomena Alam dalam Al-Quran	37
BAB III PEMBAHASAN	
3.1 Analisis Model Gerak Osilasi Vertikal dan Torsional	39
3.2 Pengembangan Metode Adams-Bashforth-Moulton	41
3.3 Penyelesaian Numerik Model Gerak Osilasi Vertikal dan Torsional	56
3.3.1 Penyelesaian Numerik dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat	63
3.3.2 Penyelesaian Numerik dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima	68
3.3.3 Penyelesaian Numerik dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam	75
3.4 Simulasi Numerik Model Gerak Osilasi Vertikal dan Torsional	83
3.4.1 Simulasi Numerik dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat	84
3.4.2 Simulasi Numerik dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima	97
3.4.3 Simulasi Numerik dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam	110
3.4.4 Perbandingan Hasil Numerik	123
3.5 Kajian Agama	139
BAB IV PENUTUP	
4.1 Kesimpulan	142
4.2 Saran	147
DAFTAR RUJUKAN	148
RIWAYAT HIDUP	

DAFTAR TABEL

Tabel 3.1	Parameter Model Gerak Osilasi Vertikal dan Torsi	83
Tabel 3.2	Hasil Solusi Numerik Model Gerak Osilasi Vertikal Simulasi Pertama dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat ...	87
Tabel 3.3	Hasil Solusi Numerik Model Gerak Osilasi Vertikal Simulasi Kedua dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat	91
Tabel 3.4	Hasil Solusi Numerik Model Gerak Osilasi Vertikal Simulasi Ketiga dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat	95
Tabel 3.5	Hasil Solusi Numerik Model Gerak Osilasi Vertikal Simulasi Pertama dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima ...	100
Tabel 3.6	Hasil Solusi Numerik Model Gerak Osilasi Vertikal Simulasi Kedua dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima	104
Tabel 3.7	Hasil Solusi Numerik Model Gerak Osilasi Vertikal Simulasi Ketiga dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima	108
Tabel 3.8	Hasil Solusi Numerik Model Gerak Osilasi Vertikal Simulasi Pertama dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam ..	113
Tabel 3.9	Hasil Solusi Numerik Model Gerak Osilasi Vertikal Simulasi Kedua dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam	117
Tabel 3.10	Hasil Solusi Numerik Model Gerak Osilasi Vertikal Simulasi Ketiga dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam	121
Tabel 3.11	Hasil Perbandingan Simulasi Model Gerak Osilasi Vertikal dan Torsional dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton	136

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Interpolasi $y(x_i)$	13
Gambar 2.2	Polinomial $\delta_i(x)$	15
Gambar 2.3	Diskrit $f[x, y(x)]$	24
Gambar 2.4	Diskrit $y(x)$	25
Gambar 2.5	Model Sederhana Jembatan Gantung	31
Gambar 2.6	Sebuah Penampang Horizontal Jembatan Gantung.....	32
Gambar 2.7	Batang yang Mewakili Penampang Jembatan	34
Gambar 3.1	Galat Relatif $y_1(t)$ pada Kasus Pertama dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat	85
Gambar 3.2	Galat Relatif $y_2(t)$ pada Kasus Pertama dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat	85
Gambar 3.3	Solusi Numerik $y_1(t)$ pada Kasus Pertama dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat	85
Gambar 3.4	Solusi Numerik $y_2(t)$ pada Kasus Pertama dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat	85
Gambar 3.5	Galat Relatif $\theta_1(t)$ pada Kasus Pertama dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat	86
Gambar 3.6	Galat Relatif $\theta_2(t)$ pada Kasus Pertama dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat	86
Gambar 3.7	Solusi Numerik $\theta_1(t)$ pada Kasus Pertama dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat	86
Gambar 3.8	Solusi Numerik $\theta_2(t)$ pada Kasus Pertama dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat	86
Gambar 3.9	Galat Relatif $y_1(t)$ pada Kasus Kedua dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat	89

Gambar 3.10	Galat Relatif $y_2(t)$ pada Kasus Kedua dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat	89
Gambar 3.11	Solusi Numerik $y_1(t)$ pada Kasus Kedua dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat	89
Gambar 3.12	Solusi Numerik $y_2(t)$ pada Kasus Kedua dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat	89
Gambar 3.13	Galat Relatif $\theta_1(t)$ pada Kasus Kedua dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat	90
Gambar 3.14	Galat Relatif $\theta_2(t)$ pada Kasus Kedua dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat	90
Gambar 3.15	Solusi Numerik $\theta_1(t)$ pada Kasus Kedua dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat	90
Gambar 3.16	Solusi Numerik $\theta_2(t)$ pada Kasus Kedua dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat	90
Gambar 3.17	Galat Relatif $y_1(t)$ pada Kasus Ketiga dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat	93
Gambar 3.18	Galat Relatif $y_2(t)$ pada Kasus Ketiga dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat	93
Gambar 3.19	Solusi Numerik $y_1(t)$ pada Kasus Ketiga dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat	93
Gambar 3.20	Solusi Numerik $y_2(t)$ pada Kasus Ketiga dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat	93
Gambar 3.21	Galat Relatif $\theta_1(t)$ pada Kasus Ketiga dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat	94
Gambar 3.22	Galat Relatif $\theta_2(t)$ pada Kasus Ketiga dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat	94
Gambar 3.23	Solusi Numerik $\theta_1(t)$ pada Kasus Ketiga dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat	94
Gambar 3.24	Solusi Numerik $\theta_2(t)$ pada Kasus Ketiga dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat	94
Gambar 3.25	Galat Relatif $y_1(t)$ pada Kasus Pertama dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima	98

Gambar 3.26	Galat Relatif $y_2(t)$ pada Kasus Pertama dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima	98
Gambar 3.27	Solusi Numerik $y_1(t)$ pada Kasus Pertama dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima	98
Gambar 3.28	Solusi Numerik $y_2(t)$ pada Kasus Pertama dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima	98
Gambar 3.29	Galat Relatif $\theta_1(t)$ pada Kasus Pertama dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima	99
Gambar 3.30	Galat Relatif $\theta_2(t)$ pada Kasus Pertama dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima	99
Gambar 3.31	Solusi Numerik $\theta_1(t)$ pada Kasus Pertama dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima	99
Gambar 3.32	Solusi Numerik $\theta_2(t)$ pada Kasus Pertama dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima	99
Gambar 3.33	Galat Relatif $y_1(t)$ pada Kasus Kedua dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima	102
Gambar 3.34	Galat Relatif $y_2(t)$ pada Kasus Kedua dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima	102
Gambar 3.35	Solusi Numerik $y_1(t)$ pada Kasus Kedua dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima	102
Gambar 3.36	Solusi Numerik $y_2(t)$ pada Kasus Kedua dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima	102
Gambar 3.37	Galat Relatif $\theta_1(t)$ pada Kasus Kedua dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima	103
Gambar 3.38	Galat Relatif $\theta_2(t)$ pada Kasus Kedua dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima	103
Gambar 3.39	Solusi Numerik $\theta_1(t)$ pada Kasus Kedua dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima	103
Gambar 3.40	Solusi Numerik $\theta_2(t)$ pada Kasus Kedua dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima	103
Gambar 3.41	Galat Relatif $y_1(t)$ pada Kasus Ketiga dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima	106

Gambar 3.42	Galat Relatif $y_2(t)$ pada Kasus Ketiga dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima	106
Gambar 3.43	Solusi Numerik $y_1(t)$ pada Kasus Ketiga dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima	106
Gambar 3.44	Solusi Numerik $y_2(t)$ pada Kasus Ketiga dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima	106
Gambar 3.45	Galat Relatif $\theta_1(t)$ pada Kasus Ketiga dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima	107
Gambar 3.46	Galat Relatif $\theta_2(t)$ pada Kasus Ketiga dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima	107
Gambar 3.47	Solusi Numerik $\theta_1(t)$ pada Kasus Ketiga dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima	107
Gambar 3.48	Solusi Numerik $\theta_2(t)$ pada Kasus Ketiga dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima	107
Gambar 3.49	Galat Relatif $y_1(t)$ pada Kasus Pertama dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam	111
Gambar 3.50	Galat Relatif $y_2(t)$ pada Kasus Pertama dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam	111
Gambar 3.51	Solusi Numerik $y_1(t)$ pada Kasus Pertama dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam	111
Gambar 3.52	Solusi Numerik $y_2(t)$ pada Kasus Pertama dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam	111
Gambar 3.53	Galat Relatif $\theta_1(t)$ pada Kasus Pertama dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam	112
Gambar 3.54	Galat Relatif $\theta_2(t)$ pada Kasus Pertama dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam	112
Gambar 3.55	Solusi Numerik $\theta_1(t)$ pada Kasus Pertama dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam	112
Gambar 3.56	Solusi Numerik $\theta_2(t)$ pada Kasus Pertama dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam	112
Gambar 3.57	Galat Relatif $y_1(t)$ pada Kasus Kedua dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam	115

Gambar 3.58	Galat Relatif $y_2(t)$ pada Kasus Kedua dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam	115
Gambar 3.59	Solusi Numerik $y_1(t)$ pada Kasus Kedua dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam	115
Gambar 3.60	Solusi Numerik $y_2(t)$ pada Kasus Kedua dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam	115
Gambar 3.61	Galat Relatif $\theta_1(t)$ pada Kasus Kedua dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam	116
Gambar 3.62	Galat Relatif $\theta_2(t)$ pada Kasus Kedua dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam	116
Gambar 3.63	Solusi Numerik $\theta_1(t)$ pada Kasus Kedua dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam	116
Gambar 3.64	Solusi Numerik $\theta_2(t)$ pada Kasus Kedua dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam	116
Gambar 3.65	Galat Relatif $y_1(t)$ pada Kasus Ketiga dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam	119
Gambar 3.66	Galat Relatif $y_2(t)$ pada Kasus Ketiga dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam	119
Gambar 3. 67	Solusi Numerik $y_1(t)$ pada Kasus Ketiga dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam	119
Gambar 3.68	Solusi Numerik $y_2(t)$ pada Kasus Ketiga dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam	119
Gambar 3.69	Galat Relatif $\theta_1(t)$ pada Kasus Ketiga dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam	120
Gambar 3.70	Galat Relatif $\theta_2(t)$ pada Kasus Ketiga dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam	120
Gambar 3.71	Solusi Numerik $\theta_1(t)$ pada Kasus Ketiga dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam	120
Gambar 3.72	Solusi Numerik $\theta_2(t)$ pada Kasus Ketiga dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam	120
Gambar 3.73	Solusi Numerik Model Gerak Osilasi Vertikal dengan nilai awal $y(0) = 14$, $\dot{y}(0) = 0$, $\theta(0) = 1,2$, dan $\dot{\theta}(0) = 0$	123

Gambar 3.74	Solusi Numerik Model Torsional dengan nilai awal $y(0) = 14$, $\dot{y}(0) = 0$, $\theta(0) = 1, 2$, dan $\dot{\theta}(0) = 0$	123
Gambar 3.75	Galat Relatif Metode Adams-Bashforth-Moulton pada Model Gerak Osilasi Vertikal saat Nilai Awal $y(0) = 14$, $\dot{y}(0) = 0$, $\theta(0) = 1, 2$, dan $\dot{\theta}(0) = 0$	125
Gambar 3.76	Galat Relatif Metode Adams-Bashforth-Moulton pada Model Torsional saat Nilai Awal $y(0) = 14$, $\dot{y}(0) = 0$, $\theta(0) = 1, 2$, dan $\dot{\theta}(0) = 0$	126
Gambar 3.77	Solusi Numerik Model Gerak Osilasi Vertikal dengan Nilai Awal $y(0) = 6$, $\dot{y}(0) = 0$, $\theta(0) = 1, 2$, dan $\dot{\theta}(0) = 0$	127
Gambar 3.78	Solusi Numerik Model Torsional dengan Nilai Awal $y(0) = 6$, $\dot{y}(0) = 0$, $\theta(0) = 1, 2$, dan $\dot{\theta}(0) = 0$	127
Gambar 3.79	Galat Relatif Metode Adams-Bashforth-Moulton pada Model Gerak Osilasi Vertikal saat Nilai Awal $y(0) = 6$, $\dot{y}(0) = 0$, $\theta(0) = 1, 2$, dan $\dot{\theta}(0) = 0$	129
Gambar 3.80	Galat Relatif Metode Adams-Bashforth-Moulton pada Model Torsional saat Nilai Awal $y(0) = 6$, $\dot{y}(0) = 0$, $\theta(0) = 1, 2$, dan $\dot{\theta}(0) = 0$	130
Gambar 3.81	Solusi Numerik Model Gerak Osilasi Vertikal dengan Nilai Awal $y(0) = -0,5$, $\dot{y}(0) = 0$, $\theta(0) = 0,5$, dan $\dot{\theta}(0) = 0$	131
Gambar 3.82	Solusi Numerik Model Torsional dengan Nilai Awal $y(0) = -0,5$, $\dot{y}(0) = 0$, $\theta(0) = 0,5$, dan $\dot{\theta}(0) = 0$	131
Gambar 3.83	Galat Relatif Metode Adams-Bashforth-Moulton pada Model Gerak Osilasi Vertikal saat Nilai Awal $y(0) = -0,5$, $\dot{y}(0) = 0$, $\theta(0) = 0,5$, dan $\dot{\theta}(0) = 0$	133
Gambar 3.84	Galat Relatif Metode Adams-Bashforth-Moulton pada Model Torsional saat Nilai Awal $y(0) = -0,5$, $\dot{y}(0) = 0$, $\theta(0) = 0,5$, dan $\dot{\theta}(0) = 0$	134

ABSTRAK

Permata, Hendrik Widya. 2018. **Solusi Numerik Model Gerak Osilasi Vertikal dan Torsional untuk Masalah Jembatan Gantung**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si. (II) Evawati Alisah, M.Pd.

Kata kunci: solusi numerik, sistem persamaan diferensial biasa, gerak osilasi vertikal, gerak torsional, metode Adams-Bashforth-Moulton

Model gerak osilasi vertikal dan torsional merupakan model yang menggambarkan gerak osilasi vertikal dan gerak torsional pada batang yang digantung. Gerak osilasi vertikal merupakan gerak naik turun suatu benda yang terjadi terus berulang, dan kemudian pada waktu tertentu akan berhenti atau mengalami redaman. Gerak torsional merupakan getaran sudut dari suatu objek yang mengalami rotasi. Model gerak osilasi dan torsional pada dasarnya merupakan sistem persamaan diferensial orde dua.

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui solusi numerik model gerak osilasi vertikal dan torsional menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat, lima, dan enam. Model gerak osilasi vertikal dan torsional terlebih dahulu diselesaikan menggunakan metode Runge-Kutta-Fehlberg orde lima untuk mendapatkan solusi awal kemudian model tersebut diselesaikan menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat, lima dan enam. Hasil solusi numerik setiap metode Adams-Bashforth-Moulton selanjutnya diuji dengan galat relatif.

Hasil simulasi numerik model gerak osilasi vertikal dan torsi diperoleh persamaan dan perbedaan dari hasil numerik menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat, lima dan enam. Persamaan pada solusi numerik model gerak osilasi vertikal dan torsional menunjukkan bahwa gerak osilasi vertikal dan gerak torsional pada waktu tertentu akan menuju pada titik kesetimbangan atau disebut dengan gerak harmonik teredam. Perbedaan pada solusi numerik model gerak osilasi vertikal dan torsional menunjukkan bahwa perubahan galat relatif akan lebih cepat mendekati nilai nol tergantung dari tingginya orde pada metode Adams-Bashforth-Moulton. Semakin tinggi orde pada metode Adams-Bashforth-Moulton maka akan lebih cepat galat relatif model gerak osilasi vertikal dan torsional menuju nilai nol dan sebaliknya. Bagi peneliti selanjutnya diharapkan dapat menemukan solusi analitik dari model gerak osilasi vertikal dan torsional.

ABSTRACT

Permata, Hendrik Widya. 2018. **Numerical Solutions of Vertical Oscillation and Torsional Motion Models for Suspension Bridge Problem**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si. (II) Evawati Alisah, M.Pd.

Keywords: numerical solution, ordinary differential equation system, vertical oscillation motion, torsional motion, Adams-Bashforth-Moulton method

Vertical oscillations and torsional motion models are models that illustrate vertical oscillations and torsional motions on the hanging rods. The vertical oscillation motion is a continuously up and down movement, and then at a certain time it will stop or re-attenuate. Torsional motion is the angular vibration from the things that are going to rotate. The oscillation and torsional motion models are essentially a system of second-order differential equations.

The purpose of this research is to know the solution of numerical model of vertical oscillation and torsional motions using Adams-Bashforth-Moulton method of order four, five, and six. The models of vertical oscillation and torsional motions were first done using the five-order Runge-Kutta-Fehlberg method to obtain an initial solution and then that model were finished using Adams-Bashforth-Moulton model of the order of four, five, and six. The results of numerical solutions of each Adam-Bashforth method were examined by relative error.

Numerical simulation results of motion models of vertical and torsional oscillations obtained the similarity and the difference numerical results using the Adams-Bashforth-Moulton method of order four, five and six. The similarity in numerical solutions of vertical oscillations and torsional motions models indicate that the motions of vertical oscillation and torsional motion in a certain time will lead to the balance point called damped harmonic motion. The difference in numerical solutions of vertical oscillations and torsional motion models show that relative error changing will be faster to come closely in zero score depending on the order high rate on the Adams-Bashforth-Moulton method. The higher the order in the Adams-Bashforth-Moulton method, the faster the relative error of the vertical oscillation and torsional motion models to the value of zero and vice versa. For the next researchers, it is hoped to be able to find the analytical solution of vertical oscillation and torsional motion models.

ملخص

برماتا، هندريك ويديا. ٢٠١٨، الحل العددي من نموذج الحركة التذبذب العمودي والالتوائي للبحث جسر معلق. بحث جامعي. شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعة الحكومية الإسلامية مولانا مالك إبراهيم مالنج. المشرف: (١) آري كسمستوي، التربية الماجستير، العلم الماجستير، (٢) إيفاواي عليسح، العلم الماجستير.

الكلمات الرئيسية: الحل العددي، نظام المعادلة التفاضلية العادية، الحركة التذبذب العمودي، الحركة التذبذب الالتوائي، طريقة *Adams-Bashforth-Moulton*

نموذج الحركة التذبذب العمودي والالتوائي هو نموذج يصور حركة التذبذب العمودي والحركة الالتوائية على قضيب التعليق، وحركة التذبذب العمودية هي حركة صعودا ونزولا ومتكرر، ثم في وقت معين سوف يتوقف أو يختبر التخمين، فالحركة الالتوائية هي الاهتزاز الزاوي لجسم يخضع لعملية الدوران التذبذب والحركة الالتوائية هو في الأساس نظام المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية. الغرض من هذا البحث هو معرفة الحل العددي لنموذج الحركة للتذبذب العمودي والالتوائي باستخدام طريقة *Adams-Bashforth-Moulton* بالترتيب أربع وخمس وست. ثم حلّ نموذج حركة التذبذب الرأسي والالتوائي أولاً باستخدام طريقة *Runge-Kutta-Fehlberg* ذات الخمس أغراض للحصول على حل أولي، ثم حلّ النموذج باستخدام الطريقة *Adams-Bashforth-Moulton* بالترتيب أربع وخمس وست. نتيجة الحل العددي لكل طريقة *Adams-Bashforth-Moulton* ثم اختبر مع الخطأ النسبي.

نتيجة محاكاة عددية لنموذج الحركة للتذبذب العمودي وعزم الدوران الناتج عن المعادلة والفرق من نتيجة عددية باستخدام طريقة *Adams-Bashforth-Moulton* بالترتيب أربع وخمس وست. تشير المعادلات في الحلول العددية لنماذج الحركة للتذبذبات العمودي والتوائية إلى أن حركة التذبذب العمودي والحركة الالتوائية في أي وقت معين ستؤدي إلى نقطة التوازن أو تدعى الحركة التوافقية المخيبة. يشير الاختلاف في الحل العددي لنماذج حركة التذبذب العمودي والتوائية إلى أن تغيير الخطأ النسبي سيكون أسرع بالقرب من القيمة الصفرية اعتماداً على ارتفاع الطلب على طريقة

Adams-Bashforth-Moulton. كلما ارتفع ترتيب طريقة Adams-Bashforth-Moulton كلما ازداد الخطأ النسبي لنموذج حركة التذبذب العمودي والتوائلية إلى قيمة الصفر والعكس بالعكس. للباحث التالي من المتوقع أن يجد الحل التحليلي لنموذج الحركة من التذبذب العمودي والتوائي.



BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika memberikan peran penting terhadap kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi dari tahun ke tahun. Salah satunya pada pemodelan matematika, karena hampir semua kejadian-kejadian dan fenomena di muka bumi ini dapat diformulasikan ke dalam matematika. Allah Swt berfirman di dalam al-Quran surat Ghafir/40:54, yaitu:

هُدًى وَذِكْرَىٰ لِأُولِي الْأَلْبَابِ ۖ

“Untuk menjadi petunjuk dan peringatan bagi orang-orang yang berfikir” QS. Ghafir/40:54

Allah Swt. berfirman di dalam al-Quran surat al-Jathiyah/45:13, yaitu:

وَسَخَّرَ لَكُم مَّا فِي السَّمُوتِ وَمَا فِي الْأَرْضِ جَمِيعًا مِّنْهُ إِنَّ فِي ذَٰلِكَ لَآيَاتٍ لِّقَوْمٍ يَتَفَكَّرُونَ ۝١٣

“Dan Dia telah menundukkan untukmu apa yang di langit dan apa yang di bumi semuanya, (sebagai rahmat) daripada-Nya. Sesungguhnya pada yang demikian itu benar-benar terdapat tanda-tanda (kekuasaan Allah) bagi kaum yang berfikir” QS. al-Jathiyah/45:13

Dari ayat di atas dapat disimpulkan bahwa sesungguhnya Allah memberikan nikmat kepada manusia berupa akal yang membuat manusia menjadi makhluk ciptan Allah yang sempurna. Maka dari situlah manusia harus mempergunakan akal mereka sebaik-baiknya untuk berfikir atas masalah yang terjadi di muka bumi ini.

Permasalahan yang dikaji adalah masalah getaran pada objek benda-benda yang bergetar, salah satu contohnya adalah getaran pada jembatan gantung. Permasalahan getaran jembatan gantung yang banyak diperbincangkan peneliti dimulai ketika runtuhnya jembatan Tacoma Narrow. Salah satu peneliti yakni

McKenna mengungkapkan bahwa penyebab runtuhnya jembatan Tacoma Narrow karena adanya keberadaan kabel vertikal yang menahan pergerakan rentang tengah jembatan ke bawah karena terhuyung. Sehingga pada tahun 1999, McKenna mengkontruksi sebuah model matematika terhadap jembatan gantung Tacoma Narrow. Kemudian pada tahun 2012, Kwofie menggunakan model McKenna (1999) yang diterapkan pada jembatan Adomi. Model tersebut menceritakan masalah getaran yang terjadi pada penampang jembatan yang berupa gerak osilasi vertikal dan torsional (Kwofie, 2012).

Gerak osilasi merupakan suatu getaran yang terjadi secara berulang dalam selang waktu dan pada lintasan yang sama. Dimana suatu getaran yang mengalami gerak osilasi lama-kelamaan akan menuju pada titik kesetimbanganya. Sedangkan suatu gerak yang mengakibatkan suatu objek berputar pada sumbu poros disebut dengan gerak rotasi, dengan besaran yang bekerja pada suatu benda yang mengalami rotasi disebut dengan gerak torsional. Persamaan gerak osilasi dan torsional dinyatakan sebagai persamaan diferensial biasa yang bergantung pada waktu t (Giancoli, 2009). Selanjutnya model ini dapat dinyatakan sebagai sistem yang bersifat linier atau nonlinier.

Selanjutnya model ini diselesaikan secara numerik. Menurut Munir (2010) penyelesaian numerik persamaan diferensial biasa terdiri dari dua metode yaitu metode satu langkah dan metode multi-langkah. Pada metode satu langkah, untuk mendapatkan taksiran nilai $y(t_{n+1})$ membutuhkan satu nilai taksiran sebelumnya yaitu $y(t_n)$ dalam proses perhitungannya. Dalam metode satu-langkah terdiri dari berbagai macam metode yaitu metode Euler, metode Heun, dan metode Runge-Kutta. Sedangkan pada metode multi-langkah, untuk mendapatkan nilai taksiran

$y(t_{n+1})$ membutuhkan beberapa nilai taksiran sebelumnya yaitu $y(t_n)$, $y(t_{n-1})$, $y(t_{n-2})$,... dalam proses perhitungannya. Yang termasuk dalam metode multi-langkah adalah metode prediktor-korektor. Metode prediktor-korektor merupakan metode yang menaksir nilai $y(t_{n+1})$ dari $y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, \dots$ dalam persamaan prediktor dan kemudian menggunakan persamaan korektor untuk memperbaiki nilai y_{n+1} dari prediktor. Metode prediktor-korektor pada dasarnya terdiri dari metode Adams-Bashforth-Moulton, metode Milne-Simpson, dan metode Hamming.

Penelitian ini merujuk pada penelitian-penelitian sebelumnya di antaranya oleh Kwofie (2012) yang membahas penyelesaian numerik dengan Runge Kutta pada masalah gerak osilasi vertikal dan torsional jembatan gantung yang mengasumsi bahwa kabel tidak pernah kehilangan tegangan. Anista (2015) membahas tentang analisis dinamik pergerakan osilasi vertikal pada model jembatan gantung yang mengasumsi bahwa kabel tidak pernah kehilangan tegangan. Mufid (2015) membahas tentang analisis dinamik pergerakan torsional pada jembatan gantung yang mengasumsi bahwa kabel tidak pernah kehilangan tegangan. Nurhayati (2015) membahas tentang penyelesaian numerik dengan Adams Bashforth Moulton pada pergerakan osilasi vertikal dan torsional jembatan gantung yang mengasumsi bahwa kabel tidak pernah kehilangan tegangan. Sedangkan pada penelitian ini, peneliti melakukan analisis perbandingan solusi numerik dengan metode Adams-Basforth-Moulton orde empat, metode Adams-Basforth-Moulton orde lima, dan metode Adams-Basforth-Moulton orde enam pada pergerakan osilasi vertikal dan torsional jembatan gantung. Manfaat yang

dapat diambil dari penelitian ini, yaitu dapat melihat perilaku gerak osilasi vertikal dan torsional yang dihasilkan oleh jembatan gantung.

Berdasarkan uraian tersebut maka penulis mengangkat judul “Solusi Numerik Model Gerak Osilasi Vertikal dan Torsional untuk Masalah Jembatan Gantung” sebagai judul pada skripsi ini.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka diberikan rumusan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana penyelesaian metode Adams-Bashforth-Moulton pada model gerak osilasi vertikal dan torsional jembatan gantung?
2. Bagaimana simulasi metode Adams-Bashforth-Moulton pada model gerak osilasi vertikal dan torsional jembatan gantung dengan berbagai nilai awal?
3. Bagaimana perbandingan simulasi metode Adams-Bashforth-Moulton pada model gerak osilasi vertikal dan torsional jembatan gantung dengan berbagai nilai awal?

1.3 Tujuan Penelitian

Dalam rumusan masalah di atas, maka tujuan dalam penelitian ini adalah:

1. Untuk mengetahui penyelesaian metode Adams-Bashforth-Moulton pada model gerak osilasi vertikal dan torsional jembatan gantung.
2. Untuk mengetahui simulasi metode Adams-Bashforth-Moulton pada model gerak osilasi vertikal dan torsional jembatan gantung dengan berbagai nilai awal.

3. Untuk mengetahui perbandingan simulasi metode Adams-Bashforth-Moulton pada model gerak osilasi vertikal dan torsional jembatan gantung dengan berbagai nilai awal

1.4 Batasan Masalah

Batasan masalah untuk penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Model gerak osilasi vertikal dan torsional yang akan dicari solusinya menggunakan model Kwofie (2012), dimana gerak osilasi vertikal dan torsional dipengaruhi gaya perpanjangan atau ketegangan kabel kanan dan kiri yang dinyatakan berturut-turut sebagai berikut:

$$-K(y - l \sin \theta)^+ = \begin{cases} -K(y - l \sin \theta) & \text{jika } y - l \sin \theta \geq 0 \\ 0 & \text{jika } y - l \sin \theta < 0 \end{cases}$$

dan

$$-K(y + l \sin \theta)^+ = \begin{cases} -K(y + l \sin \theta) & \text{jika } y + l \sin \theta \geq 0 \\ 0 & \text{jika } y + l \sin \theta < 0 \end{cases}$$

dengan $(y \pm l \sin \theta)^+ = \max(y \pm l \sin \theta, 0)$.

2. Metode numerik yang digunakan adalah metode Adams-Basforth-Moulton orde empat, lima, dan enam.

1.5 Manfaat Penelitian

Dalam tujuan penelitian di atas, maka manfaat penelitian ini adalah

1. Menambah pengetahuan tentang penerapan metode Adams-Bashforth-Moulton dalam penyelesaian numerik pada model matematika terhadap gerak osilasi vertikal dan gerak torsional pada jembatan gantung.

2. Memberikan pemahaman perilaku gerak osilasi vertikal dan torsional pada jembatan gantung terhadap kasus-kasus yang terjadi.
3. Hasil simulasi dari perilaku model gerak osilasi vertikal dan torsional pada jembatan gantung dapat dijadikan dasar bagi penelitian selanjutnya.

1.6 Metode Penelitian

Berdasarkan uraian di atas, maka metode yang penulis gunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur. Adapun langkah-langkah dalam penelitian ini sebagai berikut:

1. Penyelesaian numerik dengan langkah-langkah sebagai berikut:
 - a. Mereduksi sistem persamaan diferensial orde dua menjadi sistem persamaan diferensial orde satu.
 - b. Menentukan solusi awal menggunakan metode Runge-Kutta- Fehlberg orde lima.
 - c. Menentukan solusi numerik menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat, metode Adams-Bashforth-Moulton orde lima, dan metode Adams-Bashforth-Moulton orde enam.
 - d. Menentukan galat relatif dari solusi numerik metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat, metode Adams-Bashforth-Moulton orde lima, dan metode Adams-Bashforth-Moulton orde enam.
2. Simulasi numerik dengan langkah-langkah sebagai berikut:
 - a. Memasukan nilai parameter-parameter pada model gerak osilasi vertikal dan torsional.
 - b. Memisalkan nilai awal pada model gerak osilasi vertikal dan torsional.

3. Perbandingan simulasi numerik dengan langkah-langkah sebagai berikut:
 - a. Membandingkan solusi numerik dan galat relatif metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat, metode Adams-Bashforth-Moulton orde lima, dan metode Adams-Bashforth-Moulton orde enam pada model gerak osilasi vertikal dan torsional.
 - b. Interpretasi grafik solusi numerik dan grafik galat relatif pada model gerak osilasi vertikal dan torsional.
 - c. Membuat kesimpulan.

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam laporan penelitian ini terdiri dari empat bagian, yaitu:

Bab I Pendahuluan

Pada bagian ini berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Pada bagian ini terdiri atas konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan serta yang berhubungan dengan penelitian. Dalam bagian ini akan berisi tentang dasar-dasar teori terkait model matematika gerak osilasi vertikal dan gerak torsional pada jembatan gantung, serta menentukan parameter yang mempengaruhi pergerakannya.

Bab III Pembahasan

Pada bagian ini membahas masalah proses dari gerak osilasi vertikal dan gerak torsional, serta menentukan parameter yang mempengaruhi pergerakannya tersebut, dengan mencari solusi numerik dari sistem persamaan tersebut.

Bab IV Penutup

Pada bagian ini berisi hasil dari pembahasan berupa kesimpulan penelitian serta saran-saran untuk pembaca dan peneliti selanjutnya.



BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial biasa adalah suatu persamaan yang mengandung satu atau beberapa turunan dari fungsi yang tidak diketahui. Bentuk implisit persamaan diferensial biasa bergantung waktu t adalah

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \dots, \frac{d^kx}{dt^k}\right) = 0.$$

Persamaan tersebut merupakan persamaan diferensial biasa berorde n (Teschl, 2012). Selain persamaan diferensial berorde terdapat istilah yang sering digunakan dalam persamaan diferensial biasa yaitu linier dan nonlinier. Persamaan diferensial biasa dikatakan linier jika semua suku-suku variabel terikat dan turunan-turunannya dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dengan koefisien-koefisien yang bebas dari variabel terikat (Hidayat, 2006 dalam Hanifah, 2013). Secara umum bentuk persamaan diferensial biasa linier adalah

$$a_n(t) \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1(t) \frac{dx}{dt} + a_0(t) x = f(t) \quad (2.1)$$

dengan $a_n \neq 0$, $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ disebut koefisien persamaan diferensial. Fungsi $f(t)$ disebut input atau unsur tak homogen. Jika $f(t)$ disebut *input*, maka solusi dari persamaan diferensial $x(t)$ biasanya disebut *output*. Jika ruas sebelah kanan $f(t)$ bernilai nol untuk semua nilai t dalam interval yang ditinjau, maka persamaan ini dikatakan homogen, sebaliknya dikatakan tak homogen. Contoh persamaan diferensial biasa linier adalah

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -0.01 \frac{dy}{dt} + 10$$

yang merupakan persamaan diferensial biasa linier tak homogen orde dua.

Sedangkan jika persamaan diferensial biasa tidak dapat dinyatakan dalam bentuk umum persamaan diferensial biasa linier, yaitu pada persamaan (2.1), maka persamaan diferensial tersebut adalah persamaan diferensial biasa nonlinier.

Contoh persamaan diferensial biasa nonlinier

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -3\cos\theta\sin\theta - 0.01\frac{d\theta}{dt} + 0.05\sin(1.3t)$$

yang merupakan persamaan diferensial biasa nonlinier tak homogen orde dua (Hidayat, 2006 dalam Putri, 2013).

2.2 Persamaan Diferensial Biasa Orde Dua

Persamaan diferensial biasa orde dua mempunyai bentuk umum (Boyce & DiPrima, 1997):

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right), \quad (2.2)$$

dengan f adalah fungsi yang diberikan. Persamaan (2.2) dikatakan linier jika fungsi f adalah

$$f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right) = g(t) - p(t)\frac{dy}{dt} = q(t)y, \quad (2.3)$$

Jika f adalah linier di y dan y' . Dengan p, q , dan g adalah fungsi khusus dari variabel bebas t tetapi tidak tergantung pada y . Dalam hal ini biasanya persamaan (2.2) ditulis

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \quad (2.4)$$

dengan menunjukkan diferensial terhadap t . Alih-alih persamaan (2.4), sering terlihat persamaan

$$P(t)y'' + Q(t)y' + R(t)y = G(t), \quad (2.5)$$

tentu saja, jika $P(t) \neq 0$, dengan membagi persamaan (2.5) dengan $P(t)$ maka akan menyerupai persamaan (2.4) dengan

$$p(t) = \frac{Q(t)}{P(t)}, \quad q(t) = \frac{R(t)}{P(t)}, \quad g(t) = \frac{G(t)}{P(t)}. \quad (2.6)$$

Dalam membahas persamaan (2.4), akan dibatasi dengan p, q , dan g adalah fungsi-fungsi kontinu pada suatu interval waktu. Hal yang sangat berbeda solusi persamaan diferensial orde dua disyaratkan dengan dua kondisi awal yang harus dipenuhi yaitu:

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0, \quad (2.7)$$

dengan y_0 dan y'_0 adalah berupa angka. Persamaan diferensial biasa linier dikatakan homogen jika $g(t)$ pada persamaan (2.4) dan $G(t)$ pada persamaan (2.5) adalah nol untuk setiap t . Jika tidak, persamaan dikatakan tak homogen (Boyce & DiPrima, 1997).

2.3 Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial adalah suatu sistem yang memuat n sebuah persamaan, dengan n sebuah fungsi yang tidak diketahui dan n merupakan bilangan bulat positif lebih besar sama dengan dua. Antara persamaan diferensial yang satu dengan yang lain saling keterkaitan dan konsisten (Putri, 2013).

Misal diberikan himpunan variabel $x_1, x_2, \dots, x_n$ masing-masing tergantung pada variabel independen (t) , sehingga $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t)$. Misalkan bahwa dinamika variabel dihubungkan dengan rumus persamaan diferensial

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= g_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= g_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= g_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n).\end{aligned}\tag{2.8}$$

Persamaan di atas disebut sistem persamaan diferensial. Di sisi kiri adalah turunan $x_i(t)$ terhadap t . Di sisi kanan masing-masing persamaan adalah fungsi g_i yang tergantung pada variabel $x_1, x_2, \dots, x_n$ dan t untuk $i = 1, 2, \dots, n$ (Neushauser, 2004).

Jika masing-masing fungsi $g_1, \dots, g_n$ pada persamaan (2.57) adalah fungsi linier dari variabel tergantung $x_1, \dots, x_n$, maka sistem persamaan dikatakan linier. Sistem yang paling umum dari n persamaan linier orde pertama memiliki bentuk:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + \dots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + \dots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t).\end{aligned}\tag{2.9}$$

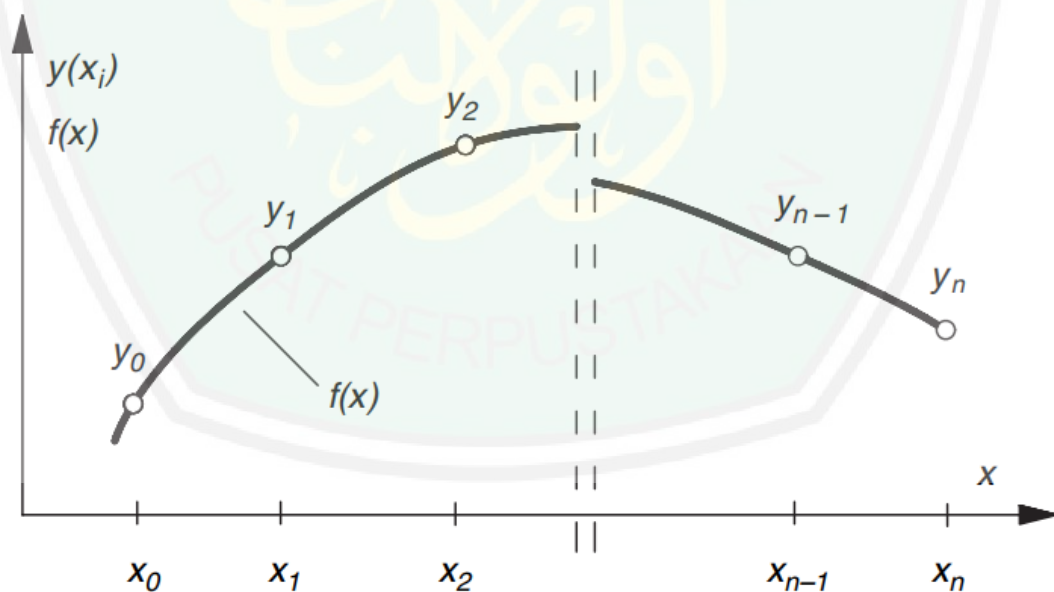
Jika masing-masing fungsi $f_1, \dots, f_n$ adalah identik nol maka sistem persamaan (2.58) dikatakan homogen, jika tidak dikatakan tak homogen (Braun, 1993).

2.4 Interpolasi Polinomial Lagrange

Permasalahan dari interpolasi oleh *power* polinomial berada dalam penemuan sebuah polinomial $P(x)$ derajat tidak lebih besar dari n yang mana untuk nilai yang diberikan x_i dengan $i = 1, 2, 3, \dots, n$, menunjukkan nilai yang sama seperti aproksimasi fungsi $y_i = y(x_i)$. Berikut sebuah pembuktian matematika bahwa hanya ada satu polinomial.

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_ix^i \quad (2.10)$$

memiliki $n+1$ koefisien $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. Dalam urutan untuk menentukan mereka akan merumuskan $(n+1)$ kondisi yang dinyatakan layak. Menurut gagasan dari interpolasi gambar di bawah ini (Rosłonec, 2008):



Gambar 2.1 Interpolasi $y(x_i)$

Ada beberapa kondisi diantaranya:

$$\begin{aligned}
 y_0 &= P_n(x_0) = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \cdots + a_nx_0^n \\
 y_1 &= P_n(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \cdots + a_nx_1^n \\
 y_2 &= P_n(x_2) = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_2^n \\
 &\vdots \\
 y_n &= P_n(x_n) = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \cdots + a_nx_n^n.
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Sistem persamaan (2.11) dapat ditulis dalam bentuk matriks menjadi:

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_0^1 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1^1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2^1 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n^1 & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}. \tag{2.12}$$

Sistem persamaan (2.12) linier dengan memenuhi koefisien yang tidak diketahui $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ dan memiliki solusi yang *unique*, karena determinan matrik dari koefisien (disebut determinan *Vandermonde*) tidak bisa sama dengan nol. Sistem persamaan (2.12) dapat diselesaikan menggunakan metode eliminasi Gauss, metode eliminasi Gauss-Jordan, metode dekomposisi LU matriks, metode invers matriks, metode iterasi langsung, metode Jacobi dan metode Gauss-Seidel. Dalam banyak kasus sistem persamaan diformulasikan seperti satu cara dapat menjadi kondisi yang tidak cocok dan karena suatu akibat terjadi eror perhitungan. Oleh karena itu, kegunaan suatu polinomial dimungkinkan dalam cara tersebut mungkin terkadang diragukan. Akibatnya adalah bahaya yang khusus saat berhadapan dengan polinomial berderajat n . Itu dapat dihilangkan saat menggunakan algoritma untuk menentukan interpolasi polinomial dikenalkan oleh Lagrange. Interpolasi Lagrange diterapkan untuk mendapatkan fungsi polinomial $P_n(x) \equiv L_n(x)$ derajat tidak lebih besar dari n , yang pada titik interpolasi

$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ mengambil nilai yang sama dengan fungsi interpolasi $y_i = y(x_i)$, yaitu:

$$L_n(x_i) = y_i = y(x_i) \quad \text{untuk } i = 0, 1, 2, 3, \dots, n. \quad (2.13)$$

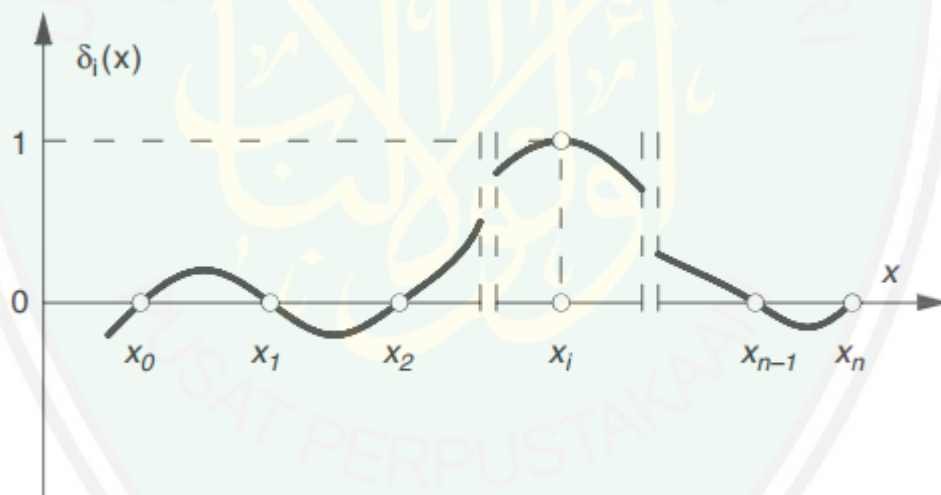
Memenuhi syarat

$$\delta_i(x_j) = 0 \quad \text{untuk } j \neq i$$

atau

$$\delta_i(x_j) = 1 \quad \text{untuk } j = i \quad (2.14)$$

dengan $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$. Contoh dari polinomial $\delta_i(x)$ ditunjukkan pada gambar berikut (Rosłonec, 2008):



Gambar 2.2 Polinomial $\delta_i(x)$

Syarat (2.14) dapat dinyatakan dengan simbol Kronecker. Polinomial $\delta_i(x)$ sama dengan nol untuk $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$, dan karena itu dapat ditulis sebagai berikut:

$$\delta_i(x) = c_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j) \quad (2.15)$$

dengan c_i adalah koefisien tertentu. Koefisien tersebut dapat dengan mudah ditemukan dari relasi (2.15) dan (2.14) tepatnya $\delta_i(x_j) = 1$. Setelah substitusi yang tidak rumit diperoleh:

$$c_i = \frac{1}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_{n-1})(x_i - x_n)} \quad (2.16)$$

dengan mensubstitusikan persamaan (2.16) ke rumus (2.15) didapatkan:

$$\delta_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_{n-1})(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_{n-1})(x_i - x_n)}. \quad (2.17)$$

Interpolasi polinomial Lagrange didefinisikan sebagai kombinasi linear dari polinomial (2.17), dimana semua koefisien sama dengan nilai-nilai yang sesuai dari fungsi interpolasi, yaitu:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \delta_i(x) \quad (2.18)$$

(Rosłonec, 2008).

2.5 Interpolasi Polinimoal Newton-Gregory

Interpolasi polinomial Newton-Gregory fungsi $y_i = y(x_i)$ pada titik $(n+1)$ memiliki bentuk (Rosłonec, 2008):

$$\begin{aligned} N_n(x) = & a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ & + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1}). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Koefisien a_i untuk $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$, dari polinomial tersebut dapat ditentukan sistem persamaan $(n+1)$ yang ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
a_0 &= y_0 \\
a_0 + a_1(x_1 - x_0) &= y_1 \\
a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) &= y_2 \\
&\vdots \\
a_0 + a_1(x_n - x_0) + a_2(x_n - x_0)(x_n - x_1) + \dots \\
+ a_n(x_n - x_0)(x_n - x_1)(x_n - x_2) \dots (x_n - x_{n-1}) &= y_n.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Matriks **A** dari koefisien sistem persamaan (2.20) memiliki bentuk segitiga, yang membuat solusi sistem tersebut jauh lebih mudah. Tahap kedua, dengan metode eliminasi Gauss maka persamaan (2.20) dapat ditulis menjadi:

$$\begin{aligned}
a_0 &= y_0 \\
a_1 &= \frac{1}{(x_1 - x_0)}[y_1 - a_0] \\
a_2 &= \frac{1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}[y_2 - a_0 - a_1(x_2 - x_0)] \\
a_3 &= \frac{1}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}[y_3 - a_0 - a_1(x_3 - x_0) - a_2(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)] \\
&\vdots \\
a_m &= \frac{1}{\prod_{i=0}^{m-1}(x_m - x_i)} \left\{ y_m - a_0 - \sum_{k=1}^{m-1} \left[a_k \prod_{j=0}^{k-1} (x_m - x_j) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Rumus rekursif yang berikut menggambarkan relasi umum persamaan (2.21) untuk $2 \leq m \leq n$. Masalah menghitung koefisien a_m dapat disederhanakan, jika titik interpolasi $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ sama-sama ditempatkan oleh langkah (Rośłonec, 2008)

$$h = x_{i+1} - x_i. \tag{2.22}$$

Menerapkan relasi (2.22) ke persamaan (2.20) didapatkan:

$$\begin{aligned}
y_0 &= a_0 \\
y_1 &= a_0 + a_1 h \\
y_2 &= a_0 + a_1(2h) + a_2(2h)h \\
&\vdots \\
y_n &= a_0 + a_1(nh) + a_2(nh)(n-1)h + a_3(nh)(n-1)h(n-2)h + \dots + a_n(n!)h^n.
\end{aligned}
\tag{2.23}$$

Koefisien berikut merupakan solusi dari sistem persamaan (2.23)

$$\begin{aligned}
a_0 &= y_0 \\
a_1 &= \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{h} \\
a_2 &= \frac{1}{2h^2} [(y_2 - y_1) - (y_1 - y_0)] = \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2} \\
&\dots
\end{aligned}$$

Koefisien a_m untuk $m = 1, 2, 3, \dots, n$, dapat ditulis dalam bentuk umum berikut:

$$a_m = \frac{\Delta^m y_0}{(m!)h^m} \tag{2.24}$$

dengan $\Delta^m y_0$ adalah *finite difference* ke m . Nilai dari *finite difference* digunakan untuk perhitungan koefisien a_m dapat dievaluasi sesuai dengan algoritma multi-langkah berikut (Rostonic, 2008):

1. *Difference* pertama, $m = 1$

$$\begin{aligned}
\Delta y_0 &= y_1 - y_0 \\
\Delta y_1 &= y_2 - y_1 \\
&\vdots \\
\Delta y_{n-1} &= y_n - y_{n-1}
\end{aligned}$$

2. *Difference* kedua, $m = 2$

$$\begin{aligned}
\Delta^2 y_0 &= \Delta y_1 - \Delta y_0 \\
\Delta^2 y_1 &= \Delta y_2 - \Delta y_1 \\
&\vdots \\
\Delta^2 y_{n-2} &= \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2}
\end{aligned}$$

3. *Difference* ketiga, $m = 3$

$$\begin{aligned}
\Delta^3 y_0 &= \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 \\
\Delta^3 y_1 &= \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 \\
&\vdots \\
\Delta^3 y_{n-3} &= \Delta^2 y_{n-2} - \Delta^2 y_{n-3}
\end{aligned}$$

4. *Difference* ke- m

$$\begin{aligned}
\Delta^m y_0 &= \Delta^{m-1} y_1 - \Delta^{m-1} y_0 \\
\Delta^m y_1 &= \Delta^{m-1} y_2 - \Delta^{m-1} y_1 \\
&\vdots \\
\Delta^m y_{n-m} &= \Delta^{m-1} y_{n+1-m} - \Delta^{m-1} y_{n-m}
\end{aligned}$$

Finite difference dari urutan acak $1 \leq m \leq n$ dapat dinyatakan secara langsung dengan menggunakan nilai-nilai y_i dari fungsi interpolasi.

$$\Delta^m y_0 = y_m - m y_{m-1} + \frac{m(m-1)}{2!} y_{m-2} + \cdots + (-1)^m y_0. \quad (2.25)$$

Rumus (2.25) dapat digeneralisasikan untuk *finite difference* yang dihitung pada titik x_i

$$\Delta^m y_i = y_{m+i} - m y_{m+i-1} + \frac{m(m-1)}{2!} y_{m+i-2} + \cdots + (-1)^m y_i. \quad (2.26)$$

Setelah itu relasi (2.24) disubstitusikan pada polinomial (2.19), maka diperoleh bentuk standar interpolasi polinomial Newton-Gregory, yaitu:

$$\begin{aligned}
 N(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{(2!)h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots \\
 + \frac{\Delta^n y_0}{(n!)h^n}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{n-1}).
 \end{aligned}
 \tag{2.27}$$

Dengan memasukkan variabel baru

$$t = \frac{x - x_0}{h} \tag{2.28}$$

yang mana,

$$x = x_0 + th, \quad \frac{x - x_1}{h} = \frac{x - x_0 - h}{h} = t - 1, \quad \frac{x - x_2}{h} = t - 2, \dots, \frac{x - x_{n-1}}{h} = t - n + 1$$

polinomial (2.27) dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned}
 N(x_0 + th) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \dots \\
 + \frac{t(t-1)(t-2)\dots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0.
 \end{aligned}
 \tag{2.29}$$

Polinomial (2.29) dapat digunakan untuk interpolasi fungsi $y_i = y(x_i)$ di seluruh interval $[x_0, x_n]$. Untuk keperluan komputasi presisi, bagaimanapun dianjurkan untuk mengurangi interval interpolasi ke $[x_0, x_1]$ untuk memastikan bahwa $t < 1$. Untuk nilai *different* dari variabel x , seperti misalnya $x_i < x < x_{i+1}$, maka harus mengambil x_i bukan x_0 . Dalam hal ini, untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$ polinomial interpolasi ini memiliki bentuk (Rośloniec, 2008):

$$\begin{aligned}
 N(x_i + th) = y_i + t\Delta y_i + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_i + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_i + \dots \\
 + \frac{t(t-1)(t-2)\dots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_i
 \end{aligned}
 \tag{2.30}$$

yang dalam literatur dikenal sebagai interpolasi polinomial Newton-Gregory maju.

Polinomial (2.30) digunakan terutama untuk menentukan nilai-nilai fungsi yang

diberikan, terletak di *left-half* interval interpolasi $[x_0, x_n]$. Pembeneran fakta ini dapat dijelaskan dengan cara berikut. *Finite difference* $\Delta^m y_i$ dihitung berdasarkan nilai $y_i, y_{i+1}, y_{i+2}, y_{i+3}, \dots, y_{i+n}$ ketika $i+m \leq n$. Untuk i mendekati n , *finite difference* orde tertinggi tidak dihitung. Sebagai contoh, jika $i = n-3$ polinomial (2.30) hanya berisi *difference* $\Delta y_i, \Delta^2 y_i$, dan $\Delta^3 y_i$. Ketika titik-titik yang terletak di *right-half* interval interpolasi $[x_0, x_n]$ yang bersangkutan, dianjurkan untuk menggunakan polinomial.

$$N(x_n + th) = y_i + t\Delta y_{i-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{i-2} + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\Delta^3 y_{i-3} + \dots + \frac{t(t+1)(t+2)\dots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0 \quad (2.31)$$

didefinisikan untuk

$$t = \frac{x - x_n}{h} \leq 0. \quad (2.32)$$

polinomial (2.31) disebut interpolasi polinomial Newton-Gregory mundur (Rosłonec, 2008).

2.6 Metode Runge-Kutta

Metode Runge-Kutta mencapai ketepatan pendekatan deret Taylor tanpa memerlukan perhitungan turunan yang lebih tinggi. Ada banyak variasi tapi semua bisa diganti dalam bentuk umum dari $y_{i+1} = y_i + \phi h$ menjadi (Chapra & Canale, 2010):

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h \quad (2.33)$$

dengan $\phi(x_i, y_i, h)$ adalah fungsi *increment*, yang dapat diartikan sebagai kemiringan representatif pada interval. Fungsi *increment* dapat ditulis dalam bentuk umum sebagai:

$$\phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + a_n k_n \quad (2.34)$$

dengan $a_1, a_2, \dots, a_n$ adalah konstanta dan $k_1, k_2, \dots, k_n$ adalah

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) \\ k_3 &= f(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h) \\ &\vdots \\ k_n &= f(x_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,1} k_1 h + q_{n-1,2} k_2 h + \dots + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h) \end{aligned}$$

dengan p_i dan q_{ij} adalah konstanta. Perhatikan bahwa $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ adalah berhubungan rekurensi. Artinya, k_1 muncul dalam persamaan k_2 , k_2 muncul dalam persamaan k_3 , dan seterusnya sampai ke persamaan k_n . Karena setiap k adalah evaluasi fungsional.

Berbagai jenis metode Runge-Kutta dapat dirancang dengan menggunakan berbagai jenis istilah dalam fungsi *increment* sebagaimana ditentukan oleh n . Galat perlangkah metode Runge-Kutta orde- n adalah $O(h^{n+1})$ dan galat longgakan metode Runge-Kutta orde- n adalah $O(h^n)$ (Chapra & Canale, 2010).

Metode Runge-Kutta dengan lebih banyak evaluasi fungsi telah dirancang dengan hasil tambahan digunakan untuk estimasi kesalahan. Metode Runge-Kutta-Fehlberg orde lima menggunakan enam evaluasi fungsi derivatif. Bentuk umum metode Runge-Kutta-Fehlberg orde lima adalah

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{16}{135} k_1 + \frac{6656}{12825} k_3 + \frac{28561}{58430} k_4 - \frac{9}{50} k_5 + \frac{2}{55} k_6 \right) \quad (2.35)$$

dengan,

$$\begin{aligned}
 k_1 &= hf(x_i, y_i) \\
 k_2 &= hf\left(x_i + \frac{1}{4}h, y_i + \frac{1}{4}k_1\right) \\
 k_3 &= hf\left(x_i + \frac{3}{8}h, y_i + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2\right) \\
 k_4 &= hf\left(x_i + \frac{12}{13}h, y_i + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3\right) \\
 k_5 &= hf\left(x_i + h, y_i + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{854}{4104}k_4\right) \\
 k_6 &= hf\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5\right).
 \end{aligned}$$

Galat perlangkah metode Runge-Kutta-Fehlberg orde lima adalah $O(h^6)$ (Burden & Faires, 2010).

2.7 Metode Adams-Bashforth-Moulton

Dalam kasus semua metode satu langkah bahwa nilai $y_{n+1} = y(x_{n+1})$ dari fungsi yang ditentukan dihitung berdasarkan hanya satu nilai $y_n = y(x_n)$ dan dihitung selama perulangan. Dalam metode multi-langkah yang digunakan tidak hanya nilai $y_n = y(x_n)$ tetapi juga $y_{n-k+1} = y(x_{n-k+1}), y_{n-k+2} = y(x_{n-k+2}), y_{n-k+3} = y(x_{n-k+3}), \dots, y_n = y(x_n)$ dengan jumlah langkah $k = 1, 2, 3, \dots$, juga menentukan orde metode. Untuk menentukan ekspresi integral yang merupakan landasan teoritis dari semua metode multi-langkah, dengan mempertimbangkan persamaan diferensial orde pertama berikut (Rosłonec, 2008):

$$\frac{dy(x)}{dx} = f[x, y(x)] \quad (2.36)$$

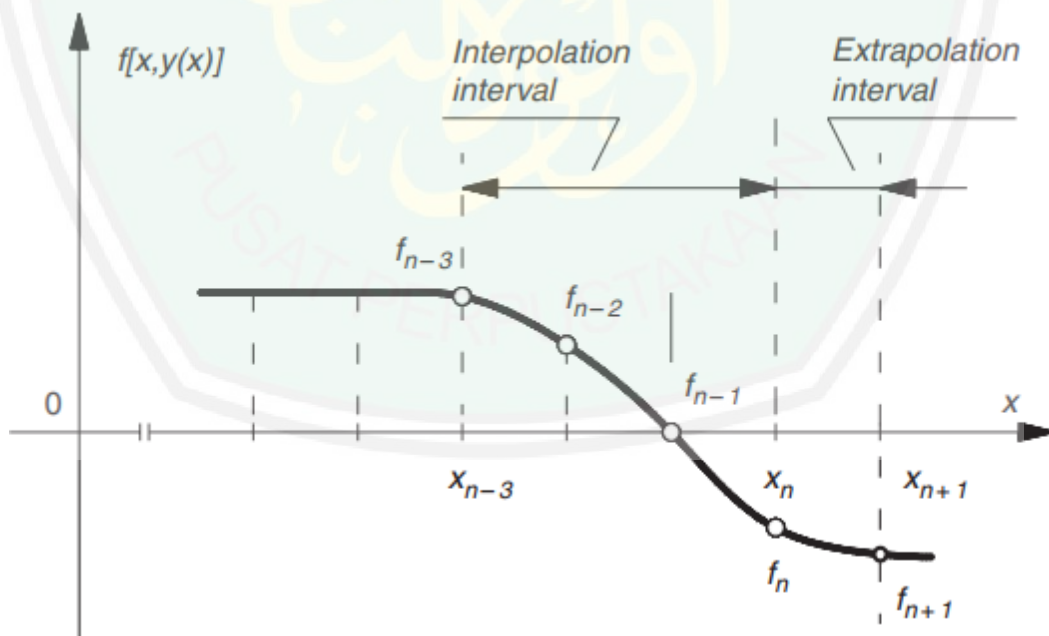
dengan integrasi kedua sisi dengan interval dari x_n ke x_{n+1} . Integrasi sisi kiri persamaan (2.36) yang didapatkan adalah

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dy(x)}{dx} dx = y(x_{n+1}) - y(x_n) \approx y_{n+1} - y_n. \quad (2.37)$$

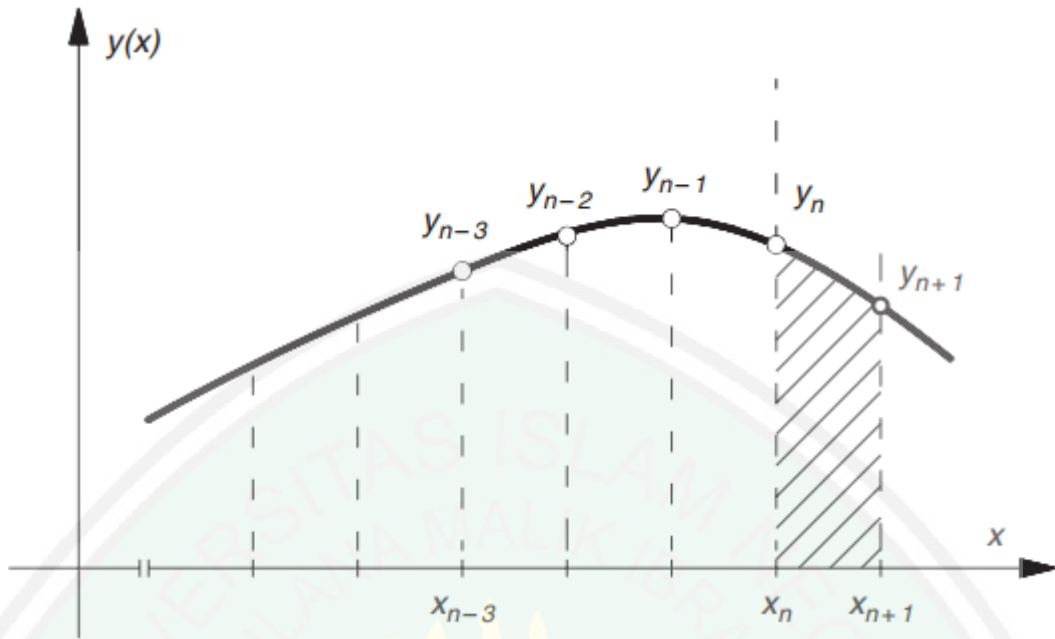
Dalam kasus metode k -langkah, nilai-nilai diskrit dari fungsi yang merupakan sisi kanan persamaan (2.36) adalah

$$\begin{aligned} f_{n-k+1} &= f(x_{n-k+1}, y_{n-k+1}) \\ f_{n-k+2} &= f(x_{n-k+2}, y_{n-k+2}) \\ f_{n-k+3} &= f(x_{n-k+3}, y_{n-k+3}) \\ &\vdots \\ f_n &= f(x_n, y_n). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Nilai-nilai diskrit diwakili oleh titik-titik terkait yang ditentukan pada gambar di bawah (Rosłonec, 2008)



Gambar 2.3 Diskrit $f[x, y(x)]$



Gambar 2.4 Diskrit $y(x)$

Untuk mengintegrasikan fungsi diskrit yang merupakan sisi kanan persamaan (2.36), harus diinterpolasi terlebih dahulu atau didekati selama interval $[x_{n-k+1}, x_n]$.

Atas dasar nilai (2.38), interpolasi polinomial $P_{k-1}(x)$ derajat $(k-1)$ terbentuk paling sering untuk tujuan tersebut. Selanjutnya, polinomial tersebut digunakan untuk mengekstrapolasi (memprediksi) fungsi $f[x, y(x)]$ selama interval $[x_n, x_{n+1}]$, menghasilkan

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f[x, y(x)] dx \approx \int_{x_n}^{x_{n+1}} P_{k-1}(x) dx. \quad (2.39)$$

Perbandingan integral (2.37) dan (2.39) memberikan ekspresi umum berikut:

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} P_{k-1}(x) dx \quad (2.40)$$

membuat dasar teoritis untuk kelompok metode multi-langkah, yang disebut secara umum metode Adams. Dalam kasus ketika $k = 1$, lihat relasi (2.40) berurusan dengan metode Adams yang paling sederhana, yang identik dengan metode Euler

satu langkah. Dalam prakteknya, metode empat langkah ($k = 4$) memastikan akurasi yang sebanding dengan yang diperoleh saat menggunakan metode Runge–Kutta orde empat (RK 4). Dalam hal ini akan lebih mudah untuk menggunakan derajat ketiga interpolasi polinomial Newton-Gregory (lihat bagian 2.5) diperluas sehubungan dengan x_n .

$$P_{4-1}(x) \equiv N_3(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + a_3(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}). \quad (2.41)$$

Asumsikan bahwa integrasi numerik persamaan (2.36) dilakukan dengan langkah konstan h . Maka diperoleh $x_{n-1} = x_n - h$, $x_{n-2} = x_n - 2h$, dan $x_{n-3} = x_n - 3h$. Polinomial (2.41) mengambil pada titik $x_n, x_{n-1} = x_n - h, x_{n-2} = x_n - 2h$, dan $x_{n-3} = x_n - 3h$ maka nilai-nilai (2.41) sebagai berikut (Rośloniec, 2008):

$$\begin{aligned} P_3(x_n) &= f_n = a_0 \\ P_3(x_{n-1}) &= f_{n-1} = a_0 + a_1(-h) \\ P_3(x_{n-2}) &= f_{n-2} = a_0 + a_1(-2h) + a_2(-2h)(-h) \\ P_3(x_{n-3}) &= f_{n-3} = a_0 + a_1(-3h) + a_2(-3h)(-2h) + a_3(-3h)(-2h)(-h). \end{aligned}$$

Nilai-nilai tersebut memungkinkan dalam mengevaluasi koefisien polinomial a_0, a_1, a_2 , dan a_3 dari rumus:

$$\begin{aligned} a_0 &= f_n \\ a_1 &= \frac{f_n - f_{n-1}}{h} = \frac{\Delta f_n}{h} \\ a_2 &= \frac{f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2}}{2h^2} = \frac{\Delta^2 f_n}{2h^2} \\ a_3 &= \frac{f_n - 3f_{n-1} + 3f_{n-2} - f_{n-3}}{6h^3} = \frac{\Delta^3 f_n}{6h^3}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Oleh karena itu, dengan menggunakan relasi (2.42) dan memperkenalkan variabel baru $t = x - x_n$, interpolasi polinomial dapat ditulis sebagai (Rośloniec, 2008):

$$\begin{aligned}
P_3(x) &= f_n + \frac{\Delta f_n}{h}t + \frac{\Delta^2 f_n}{2h^2}t(t+h) + \frac{\Delta^3 f_n}{6h^3}t(t+h)(t+2h) \\
&= f_n + \frac{\Delta f_n}{h}t + \frac{\Delta^2 f_n}{2h^2}(t^2+th) + \frac{\Delta^3 f_n}{6h^3}(t^2+3ht^2+2h^2t). \quad (2.43)
\end{aligned}$$

Perubahan variabel x dalam interval $x_n \leq x \leq x_{n+1} = x_n + h$ sesuai dengan variasi variabel t dalam interval $0 \leq t \leq h$. Hal tersebut menyiratkan bahwa polinomial (2.43) harus diintegrasikan dengan interval $[0, h]$. Integrasi tersebut menghasilkan rumus:

$$\begin{aligned}
\int_0^h P_3(x) dt &= \int_0^h \left[f_n + \frac{\Delta f_n}{h}t + \frac{\Delta^2 f_n}{2h^2}(t^2+th) + \frac{\Delta^3 f_n}{6h^3}(t^2+3ht^2+2h^2t) \right] dt \\
&= f_n h + \frac{h}{2} \Delta f_n + \frac{5h}{12} \Delta^2 f_n + \frac{3h}{8} \Delta^3 f_n \quad (2.44)
\end{aligned}$$

yang mendefinisikan kenaikan Δy . Setelah memasukkan integral (2.44) ke (2.40), maka diperoleh rumus ekstrapolasi berikut:

$$y_{n+1} = y_n + h \left(f_n + \frac{1}{2} \Delta f_n + \frac{5}{12} \Delta^2 f_n + \frac{3}{8} \Delta^3 f_n \right) \quad (2.45)$$

untuk metode Adams empat langkah. *Finite differences* muncul dalam rumus terakhir $\Delta f_n, \Delta^2 f_n$, dan $\Delta^3 f_n$ terkait dengan nilai-nilai f_n, f_{n-1}, f_{n-2} , dan f_{n-3} dengan cara berikut, lihat juga relasi (2.42)

$$\begin{aligned}
\Delta f_n &= f_n - f_{n-1} \\
\Delta^2 f_n &= f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2} \\
\Delta^3 f_n &= f_n - 3f_{n-1} + 3f_{n-2} - f_{n-3}. \quad (2.46)
\end{aligned}$$

Mensubstitusikan pernyataan (2.46) pada rumus (2.45), maka diperoleh

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} &= y_n + h \left[f_n + \frac{1}{2}(f_n - f_{n-1}) + \frac{5}{12}(f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2}) + \frac{3}{8}(f_n - 3f_{n-1} + 3f_{n-2} - f_{n-3}) \right] \\
 &= y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}).
 \end{aligned}
 \tag{2.47}$$

Rumus (2.47) setara dengan (2.45), disebut rumus ekstrapolasi eksplisit dari Adams empat langkah atau metode Adams–Bashforth. Itu dijabarkan pada tahun 1855 oleh Adams atas permintaan dari artileri Inggris yang terkenal Bashforth. Adams menguraikan metode ini menggunakan polinomial Lagrange derajat ketiga untuk interpolasi fungsi $f[x, y(x)]$. Kesetaraan relasi (2.45) dan (2.47) terbukti di atas bukan tidak disengaja. Ini berhubungan langsung dari fakta bahwa polinomial Newton-Gregory dan Lagrange yang digunakan untuk interpolasi fungsi $f[x, y(x)]$ adalah identik. Interpolasi polinomial identitas tersebut dapat dikonfirmasi secara bergantian dengan menggunakan teorema Weierstrass yang sesuai (Rosłonec, 2008).

Nilai-nilai f_n, f_{n-1}, f_{n-2} , dan f_{n-3} ditentukan pada Gambar 2.3, sesuai dengan rumus (2.47) untuk menentukan nilai aproksimasi $y_{n+1} = y(x_{n+1})$ dari yang diinginkan fungsi. Pada saat yang sama, nilai fungsi $f_{n+1} = f[x_{n+1}, y_{n+1}]$ dihitung. Nilai-nilai $y_{n+1} = y(x_{n+1})$ dan $f_{n+1} = f[x_{n+1}, y_{n+1}]$ ditemukan dengan cara generalisasi metode Adams-Bashforth yang dibahas di atas dengan menambahkan tahap koreksi secara berturut-turut, aproksimasi yang lebih akurat dari $y_{n+1} = y(x_{n+1})$ dievaluasi, yaitu:

$$y_{n+1}^{(1)}, y_{n+1}^{(2)}, y_{n+1}^{(3)}, y_{n+1}^{(4)}, \dots \tag{2.48}$$

Untuk menjelaskan esensi dari tahap ini, dengan menemukan interpolasi polinomial Lagrange orde ketiga fungsi $f[x, y(x)]$ pada titik (x_{n-2}, f_{n-2}) , (x_{n-1}, f_{n-1}) , (x_n, f_n) , dan pada titik yang baru ditentukan (x_{n+1}, f_{n+1}) . Dalam kasus ketika, $x_{n-2} = x_n - 2h$, $x_{n-1} = x_n - h$, dan $x_{n+1} = x_n + h$ interpolasi polinomial mengambil bentuk:

$$\begin{aligned} L_3(x) = & f_{n-2} \frac{(x - x_n + h)(x - x_n)(x - x_n - h)}{-6h^3} \\ & + f_{n-1} \frac{(x - x_n + 2h)(x - x_n)(x - x_n - h)}{2h^3} \\ & + f_n \frac{(x - x_n + 2h)(x - x_n + h)(x - x_n - h)}{-2h^3} \\ & + f_{n+1} \frac{(x - x_n + 2h)(x - x_n + h)(x - x_n)}{6h^3}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Setelah pengenalan variabel tambahan $t = x - x_n$, polinomial (2.49) dapat ditulis dalam bentuk yang lebih mudah untuk integrasi lebih lanjut:

$$\begin{aligned} L_3(t) = & f_{n-2} \frac{t^3 - th^2}{-6h^3} + f_{n-1} \frac{t^3 + ht^2 - 2h^2t}{2h^3} + f_n \frac{t^3 + 2ht^2 - h^2t - 2h^3}{-2h^3} \\ & + f_{n+1} \frac{t^3 + 3ht^2 + 2h^2t}{6h^3}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Nilai yang lebih akurat $y_{n+1} = y(x_{n+1})$ dapat ditemukan dengan menggunakan rumus yang mirip dengan pernyataan (2.40) dimana polinomial $P_{k-1}(x)$ ditukar dengan polinomial lain yaitu oleh (2.50). Menurut aturan koreksi yang dibahas di atas, maka dapat menulis rumus umum berikut untuk mengevaluasi aproksimasi yang berurutan dari $y_{n+1} = y(x_{n+1})$:

$$\begin{aligned}
y_{n+1}^{(i+1)} &= y_n + \int_0^h L_3(t) dt = y_n + \frac{f_{n-2}}{-6h^3} \left(\frac{1}{4}h^4 - \frac{1}{2}h^2h^2 \right) \\
&\quad + \frac{f_{n-1}}{2h^3} \left(\frac{1}{4}h^4 + \frac{1}{3}hh^3 - h^2h^2 \right) \\
&\quad + \frac{f_n}{-2h^3} \left(\frac{1}{4}h^4 + \frac{2}{3}hh^3 - \frac{1}{2}h^2h^2 - 2h^3h \right) \\
&\quad + \frac{f_{n+1}}{-6h^3} \left(\frac{1}{4}h^4 + hh^3 + h^2h^2 \right) \\
&= y_n + \frac{h}{24} \left[f_{n-2} - 5f_{n-1} + 19f_n + 9f_{n+1} \left(y_{n+1}^{(i)} \right) \right] \quad (2.51)
\end{aligned}$$

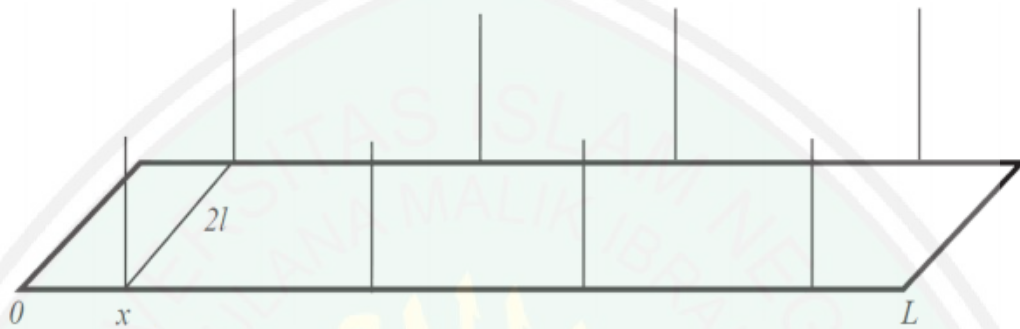
dengan $i = 0, 1, 2, 3, \dots$. Rumus (2.51) disebut rumus koreksi Adams-Moulton implisit. Kata implisit berarti bahwa perhitungan pendekatan $(i+1)$ yang berurutan dari y_{n+1} ditentukan menggunakan nilai f_{n+1} bergantung pada aproksimasi y_{n+1} yang ditentukan pada iterasi sebelumnya i . Proses koreksi dilanjutkan secara berulang sampai kondisi berikut dipenuhi:

$$\frac{|y_{n+1}^{(i+1)} - y_{n+1}^{(i)}|}{|y_{n+1}^{(i+1)}|} \leq \varepsilon \quad (2.52)$$

dengan ε adalah angka kecil yang positif dan *arbitrary*. Ketika kondisi (2.52) lebih besar dari ε maka nilai $y_{n+1}^{(i+1)}$ diterima sebagai y_{n+1} . Secara alami, nilai yang dievaluasi y_{n+1} digunakan pada langkah berikutnya $(n+2)$ yang bertujuan untuk menemukan nilai $y_{n+2} = y(x_{n+2})$ dengan menggunakan prosedur dua tahap yang sama, dimana $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Prediktor (2.47) dan korektor (2.51) merupakan landasan teori untuk prediksi dua tahap dan metode koreksi, yang disebut metode Adams-Boshforth-Moulton (Rośloniec, 2008).

2.8 Model Gerak Osilasi Vertikal dan Gerak Torsional pada Jembatan Gantung

Pengembangan persamaan diferensial pada osilasi vertikal dan torsional di bagian horizontal rentang tengah jembatan dengan panjang L dan lebar $2l$ yang tergantung pada kabel seperti pada gambar di bawah ini (Kwofie, 2012)

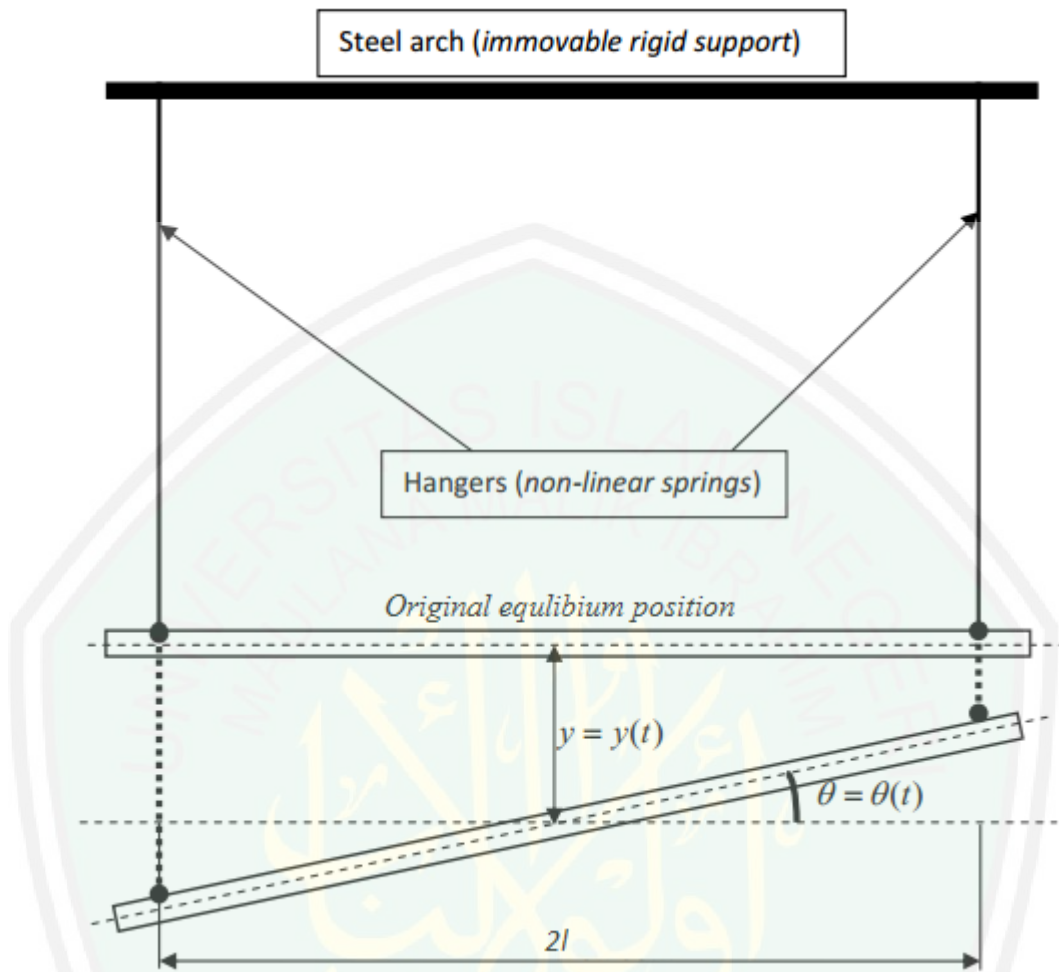


Gambar 2.5 Model Sederhana Jembatan Gantung

Untuk model gerak horizontal penampang batang, menganggap panjang batang $2l$ dan massa m yang tergantung pada kabel. Misal $y(t)$ didefinisikan jarak ke bawah pada pusat gravitasi dari batang yang mengurangi kekuatan. $\theta(t)$ didefinisikan sudut batang horizontal saat waktu t (lihat Gambar 2.6).

3.8.1 Perpanjangan Sisi Kabel pada Jembatan Gantung

Diasumsikan bahwa kabel tidak mengalami tegangan, tapi mengalami pemajangan menurut hukum Hooke dengan konstanta *spring* K , energi yang digunakan kabel sebanding perpajangan kabel dengan konstanta K . Pada Gambar di bawah ini (Rosłonec, 2008):



Gambar 2.6 Sebuah Penampang Horizontal Jembatan Gantung

memperlihatkan bahwa perpanjangan sisi kanan kabel adalah $(y - l \sin \theta)$,

karenanya gaya yang diberikan oleh kabel kanan adalah

$$-K(y - l \sin \theta)^+ = \begin{cases} -K(y - l \sin \theta) & \text{jika } y - l \sin \theta \geq 0 \\ 0 & \text{jika } y - l \sin \theta < 0 \end{cases} \quad (2.53)$$

Demikian pula gaya yang diberikan oleh kabel kiri

$$-K(y + l \sin \theta)^+ = \begin{cases} -K(y + l \sin \theta) & \text{jika } y + l \sin \theta \geq 0 \\ 0 & \text{jika } y + l \sin \theta < 0 \end{cases} \quad (2.54)$$

dengan $(y \pm l \sin \theta)^+ = \max(y \pm l \sin \theta, 0)$.

3.8.2 Asal Mula Model Gerak Osilasi Vertikal dan Gerak Torsional pada Jembatan Gantung

Asal mula model jembatan gantung adalah sebagai berikut, Energi Potensial ($E.P$) dari pegas dengan kostanta pegas k dan jarak x dari titik kesetimbangan diperoleh

$$E.P = \int kx dx = \frac{1}{2} kx^2. \quad (2.55)$$

Dengan demikian total energi potensial ($E.P_T$) dari kabel kanan dan kiri (Gambar 2.6) diperoleh

$$E.P_T = \frac{1}{2} K \left(\left((y - l \sin \theta)^+ \right)^2 + \left((y + l \sin \theta)^+ \right)^2 \right). \quad (2.56)$$

Energi potensial $E.P_R$ karena berat batang dengan massa m berpindah ke bawah dari kesetimbangan dengan jarak y diperoleh

$$E.P_R = -mgy \quad (2.57)$$

dengan g adalah percepatan gravitasi. Oleh karena itu total energi potensial model $E.P_M$ diperoleh

$$E.P_M = \frac{1}{2} K \left(\left((y - l \sin \theta)^+ \right)^2 + \left((y + l \sin \theta)^+ \right)^2 \right) - mgy. \quad (2.58)$$

Sekarang untuk menentukan energi kinetik model $E.K_M$. Untuk gerak vertikal osilasi energi kinetik $E.K_R$ pusat massa batang diperoleh

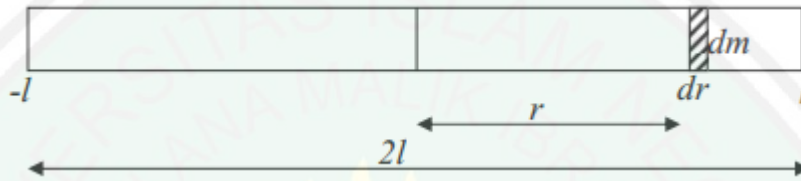
$$E.K_R = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 \quad (2.59)$$

dengan $\dot{y}$ adalah kecepatan massa pusat batang. Rumus untuk menentukan energi kinetik $E.K_T$ pusat massa batang karena adanya gerak torsional osilasi (rotasi) berasal dari prinsip pertama

$$E.K_T = \frac{1}{6} ml^2 \dot{\theta}^2 \quad (2.60)$$

dengan $\dot{\theta}$ adalah kecepatan sudut.

Untuk membuktikan rumus $E.K_T$ anggap bagian kecil dari batang dengan massa dm pada jarak r dari pusat batang seperti gambar di bawah ini (Kwofie, 2012):



Gambar 2.7 Batang yang Mewakili Penampang Jembatan

Energi kinetik $E.K_{dm}$ massa dm diperoleh

$$E.K_{dm} = \frac{1}{2} dm (r\dot{\theta})^2 \quad (2.61)$$

dengan $r\dot{\theta}$ adalah kecepatan linier v dari bagian sangat kecil dm , massa batang m , dan panjang $2l$ sehingga diperoleh

$$dm = \frac{m}{2l} dr. \quad (2.62)$$

Substitusi persamaan (2.62) ke persamaan (2.61) dan mengintegrasikan dengan batas $[-l, l]$ diperoleh

$$E.K_T = \frac{m\dot{\theta}^2}{4l} \int_{-l}^l r^2 dr = \frac{1}{6} ml^2 \dot{\theta}^2. \quad (2.63)$$

Rumus total energi kinetik dari model diperoleh

$$E.K_M = E.K_R + E.K_T. \quad (2.64)$$

Substitusikan persamaan (2.59) dan (2.60) ke persamaan (2.64) diperoleh total energi kinetik,

$$E.K_M = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2. \quad (2.65)$$

Selanjutnya dengan rumus Lagrange L untuk persamaan (2.58) dan (2.65) diperoleh

$$L = E.K_M - E.P_M$$

atau

$$L = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}K\left(\left((y-l\sin\theta)^+\right)^2 + \left((y+l\sin\theta)^+\right)^2\right) + mgy, \quad (2.66)$$

menurut prinsip *least action*, gerak balok mematuhi persamaan Euler Lagrange yaitu

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (2.67)$$

dan

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0. \quad (2.68)$$

Dengan mengevaluasi turunan yang diperlukan persamaan Euler Lagrange, penurunan persamaan (2.66) terhadap $\dot{\theta}$ diperoleh

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{ml^2\dot{\theta}}{3}, \quad (2.69)$$

selanjutnya persamaan (2.69) diturunkan terhadap t maka diperoleh

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{ml^2\ddot{\theta}}{3}, \quad (2.70)$$

kemudian persamaan (2.66) diturunkan terhadap θ diperoleh

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = Kl \cos \theta \left[(y-l\sin\theta)^+ - (y+l\sin\theta)^+ \right]. \quad (2.71)$$

Sehingga dengan mensubstitusikan persamaan (2.70) dan (2.71) ke persamaan (2.67) diperoleh bentuk berikut

$$\frac{ml^2\ddot{\theta}}{3} = Kl \cos \theta \left[(y - l \sin \theta)^+ - (y + l \sin \theta)^+ \right] \quad (2.72)$$

demikian pula untuk persamaan (3.68), dengan menurunkan persamaan (2.66) terhadap $\dot{y}$ diperoleh

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad (2.73)$$

selanjutnya persamaan (2.73) diturunkan terhadap t maka diperoleh

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = m\ddot{y}, \quad (2.74)$$

kemudian persamaan (2.66) diturunkan terhadap y diperoleh

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -K \left[(y - l \sin \theta)^+ - (y + l \sin \theta)^+ \right] + mg. \quad (2.75)$$

Sehingga dengan mensubstitusikan persamaan (2.74) dan (2.75) ke persamaan (2.68) diperoleh bentuk berikut

$$m\ddot{y} = -K \left[(y - l \sin \theta)^+ - (y + l \sin \theta)^+ \right] + mg. \quad (2.76)$$

Dengan menyederhanakan dan menambahkan syarat redaman $\delta_1 \dot{\theta}$ dan $\delta_2 \dot{y}$ untuk persamaan (2.72) dan (2.76), dan faktor eksternal $f(t)$ ke persamaan (2.72), sehingga mendapatkan sistem persamaan diferensial orde dua berpasangan yaitu

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= -\frac{K}{m} \left[(y - l \sin \theta)^+ - (y + l \sin \theta)^+ \right] - \delta_2 \dot{y} + g \\ \ddot{\theta} &= \frac{3K}{ml} \cos \theta \left[(y - l \sin \theta)^+ - (y + l \sin \theta)^+ \right] - \delta_1 \dot{\theta} + f(t). \end{aligned} \quad (2.77)$$

Selanjutnya persamaan (3.77) didefinisikan sebagai model gerak osilasi vertikal dan gerak torsional (Kwofie, 2012).

2.9 Fenomena Alam dalam Al-Quran

Dalam al-Quran sesungguhnya banyak menjelaskan masalah fenomena-fenomena yang terjadi di muka bumi ini. Salah satunya masalah kerusakan bumi akibat manusia itu sendiri. Allah Swt berfirman dalam al-Quran surat al-Baqarah/2:11, yaitu

وَإِذَا قِيلَ لَهُمْ لَا تُفْسِدُوا فِي الْأَرْضِ قَالُوا إِنَّمَا نَحْنُ مُصْلِحُونَ ۝

"Dan bila dikatakan kepada mereka: "Janganlah kamu membuat kerusakan di muka bumi". Mereka menjawab: "Sesungguhnya kami orang-orang yang mengadakan perbaikan" (QS. al-Baqarah/2:11).

Menurut As-Sa'di (1999) menafsirkan bahwa "bumi dan penampakan bahwa mereka menyatukan antara perbuatan merusak di muka bumi itu bukanlah suatu tindakan pengrusakan akan tetapi hal itu adalah perbaikan, sebagai suatu hal permutarbalikan fakta dan penyatuan antara perbuatan batil dan dengan keyakinan bahwa hal itu benar".

Bahwa sesungguhnya manusia harus menyadari bahwa perbuatan mereka merusak di muka bumi merupakan tindakan yang buruk, maka dari situlah manusia harus berfikir untuk memperbaiki apa yang mereka lakukan. Karena kerusakan yang terjadi merupakan ketidakseimbangannya dengan kondisi bumi ini, maka manusia harus berfikir agar perbuatan mereka sesuai dengan kondisi di bumi. Allah Swt berfirman dalam al-Quran surat Ali Imran/3:190, yaitu

إِنَّ فِي خَلْقِ السَّمُوتِ وَالْأَرْضِ وَاخْتِلَافِ اللَّيْلِ وَالنَّهَارِ لَآيَاتٍ لِّأُولِي الْأَلْبَابِ ۝

“Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, dan silih bergantinya malam dan siang terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal” (QS. Ali Imran/3:190)

Menurut Al-Jazairi (2007) menafsirkan bahwa “Yakni mereka memikirkan keberadaan langit dan bumi, pembentukkannya, tentang keindahan dan keberasan penciptaannya serta segala sesuatu makhluk yang ditempatkan oleh Allah di dalamnya”.

Salah satu kejadian tanpa mempertimbangkan suatu kondisi di bumi pasti akan mengalami kehancuran, salah satunya robohnya jembatan Tacoma. Tetapi hal tersebut pasti akan memberikan pelajaran bagi manusia, karena sesungguhnya Allah memberikan petunjuk agar dalam kejadian tersebut tidak terulang kembali. Allah Swt berfirman dalam al-Quran surat Ali Imran/3:8, yaitu:

رَبَّنَا لَا تُزِغْ قُلُوبَنَا بَعْدَ إِذْ هَدَيْتَنَا وَهَبْ لَنَا مِنْ لَدُنْكَ رَحْمَةً إِنَّكَ أَنْتَ الْوَهَّابُ ۝

“(Mereka berdoa): “Ya Tuhan kami, janganlah Engkau jadikan hati kami condong kepada kesesatan sesudah Engkau beri petunjuk kepada kami, dan karuniakanlah kepada kami rahmat dari sisi Engkau; karena sesungguhnya Engkau-lah Maha Pemberi (karunia)” (QS. Ali Imran/3:8).

Menurut As-Sa’di (1999) menafsirkan bahwa “bahwasanya Allah Swt menyebutkan tentang orang-orang yang ilmunya mendalam dimana mereka berdoa kepadaNya agar Allah tidak menjadikan hati-hati mereka condong setelah dia memberikan petunjuk kepada mereka”. Dalam hal ini Allah memberikan petunjuk kepada manusia untuk melakukan tindakan sesuai dengan kehendak-Nya, karena suatu masalah pasti memiliki jalan keluar.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Analisis Model Gerak Osilasi Vertikal dan Torsional

Model matematika pada skripsi ini merupakan model yang menggambarkan rentang penampang jembatan yang terdiri atas dua model, yaitu model gerak osilasi vertikal dan torsional. Penelitian ini merujuk pada jurnal Kwofie (2012) yang mengemukakan bahwa model gerak osilasi vertikal dan torsional adalah:

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) = -\frac{K}{m} \left[\left(y(t) - l \sin(\theta(t)) \right)^+ + \left(y(t) + l \sin(\theta(t)) \right)^+ \right] - \delta_2 \dot{y}(t) + g \\ \ddot{\theta}(t) = \frac{3K}{ml} \cos(\theta(t)) \left[\left(y(t) - l \sin(\theta(t)) \right)^+ - \left(y(t) + l \sin(\theta(t)) \right)^+ \right] - \delta_1 \dot{\theta}(t) + f(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

dengan $y(t)$ merupakan jarak ke bawah pada pusat gravitasi dari batang yang dapat mengurangi kekuatan. Sistem dinamik dari sudut batang dengan bidang horizontal pada waktu t dinyatakan sebagai $\theta(t)$. K adalah konstanta *spring*, m adalah massa batang, l adalah setengah dari lebar rentang (*span*), δ_1 dan δ_2 adalah parameter/nilai redaman, $f(t)$ adalah fungsi eksternal pada waktu t dimana diasumsikan sebagai sinusoidal dengan konstanta α dari $f(t) = \alpha \sin(\mu t)$ dan g adalah gaya gravitasi. Selanjutnya dengan gaya ketegangan kabel kanan yang diberikan sebagai berikut:

$$-K \left(y(t) - l \sin(\theta(t)) \right)^+ = \begin{cases} -K \left(y(t) - l \sin(\theta(t)) \right) & \text{jika } y(t) - l \sin(\theta(t)) \geq 0 \\ 0 & \text{jika } y(t) - l \sin(\theta(t)) < 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

dengan $(y(t) - l \sin(\theta(t)))^+ = \max\{y(t) - l \sin(\theta(t)), 0\}$.

Demikian pula, gaya ketegangan kabel di kiri yaitu

$$-K(y(t) + l \sin(\theta(t)))^+ = \begin{cases} -K(y(t) + l \sin(\theta(t))) & \text{jika } y(t) + l \sin(\theta(t)) \geq 0 \\ 0 & \text{jika } y(t) + l \sin(\theta(t)) < 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

dengan $(y(t) + l \sin(\theta(t)))^+ = \max\{y(t) + l \sin(\theta(t)), 0\}$.

Model gerak osilasi vertikal dan torsional merupakan sistem persamaan diferensial biasa orde dua. Pada dasarnya sistem persamaan diferensial biasa orde dua dapat direduksi menjadi sistem persamaan diferensial biasa orde satu. Karena penyelesaian metode Adams-Bashforth-Moulton sebagai prediktor-korektor berupa sistem persamaan diferensial biasa orde satu.

Sehingga dengan memisalkan

$$y_1(t) = y(t), y_2(t) = \dot{y}(t), \theta_1(t) = \theta(t), \text{ dan } \theta_2(t) = \dot{\theta}(t) \quad (3.4)$$

dan turunan (3.4) terhadap t yaitu:

$$\dot{y}_1(t) = y_2(t), \dot{y}_2(t) = \ddot{y}(t), \dot{\theta}_1(t) = \theta_2(t), \text{ dan } \dot{\theta}_2(t) = \ddot{\theta}(t). \quad (3.5)$$

Maka model gerak osilasi vertikal dan torsional dapat ditulis menjadi:

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) = -\frac{K}{m} \left[(y_1(t) - l \sin(\theta_1(t)))^+ + (y_1(t) + l \sin(\theta_1(t)))^+ \right] - \delta_2 y_2(t) + g \\ \dot{\theta}_1(t) = \theta_2(t) \\ \dot{\theta}_2(t) = \frac{3K}{ml} \cos(\theta_1(t)) \left[(y_1(t) - l \sin(\theta_1(t)))^+ - (y_1(t) + l \sin(\theta_1(t)))^+ \right] - \delta_1 \theta_2(t) + f(t) \end{cases} \quad (3.6)$$

dengan y_1 merupakan jarak batang jembatan gantung, y_2 merupakan kecepatan perubahan jarak batang, θ_1 merupakan besarnya sudut batang, dan θ_2 merupakan

kecepatan perubahan sudut batang. Selanjutnya, karena $f(t) = \alpha \sin(\mu t)$ mengakibatkan model (3.6) menjadi:

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = p(t, y_1, y_2, \theta_1, \theta_2) = y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) = q(t, y_1, y_2, \theta_1, \theta_2) = -\frac{K}{m} \left[(y_1(t) - l \sin(\theta_1(t)))^+ + (y_1(t) + l \sin(\theta_1(t)))^+ \right] \\ \quad - \delta_2 y_2(t) + g \\ \dot{\theta}_1(t) = r(t, y_1, y_2, \theta_1, \theta_2) = \theta_2(t) \\ \dot{\theta}_2(t) = s(t, y_1, y_2, \theta_1, \theta_2) = \frac{3K}{ml} \cos(\theta_1(t)) \left[(y_1(t) - l \sin(\theta_1(t)))^+ \right. \\ \quad \left. - (y_1(t) + l \sin(\theta_1(t)))^+ \right] - \delta_1 \theta_2(t) + \alpha \sin(\mu t). \end{cases} \quad (3.7)$$

3.2 Pengembangan Metode Adams-Bashforth-Moulton

Pengembangan metode Adams-Bashforth-Moulton yang digunakan adalah orde empat, lima, dan enam. Untuk metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat telah ditunjukkan pada persamaan (2.47) dan (2.51) yaitu:

$$y_{n+1}^{(i)} = y_n + \frac{h}{24} (55 f_n - 59 f_{n-1} + 37 f_{n-2} - 9 f_{n-3}) \quad (3.8)$$

sebagai prediktor dan

$$y_{n+1}^{(i+1)} = y_n + \frac{h}{24} \left[f_{n-2} - 5 f_{n-1} + 19 f_n + 9 f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(i)}) \right] \quad (3.9)$$

sebagai korektor. Sedangkan untuk pengembangan metode Adams-Bashforth-Moulton orde lima dan enam adalah sebagai berikut:

3.2.1 Metode Adams-Bahforth-Moulton Orde Lima

Untuk menentukan metode Adams-Bahforth-Moulton orde lima terdiri dari dua tahap yaitu tahap menentukan bentuk eksplisit Adams-Bashforth orde lima dan bentuk implisit Adams-Moulton orde lima. Pada tahap pertama

menentukan bentuk eksplisit menggunakan $k = 5$, serta berdasarkan bentuk umum metode Adams (2.40) maka diperoleh bentuk umum metode Adams orde lima yaitu:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} P_{5-1}(x) dx \\ &= y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} P_4(x) dx. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Dalam hal ini $P_4(x)$ akan lebih mudah menggunakan intersi polinomial Newton-Gregory derajat keempat yaitu:

$$\begin{aligned} P_4(x) \equiv N_4 &= a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + a_3(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) \\ &\quad + a_4(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2})(x - x_{n-3}). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Kemudian, asumsikan bahwa integral numerik persamaan (3.11) dilakukan dengan langkah kontanta h maka diperoleh $x_{n-1} = x_n - h$, $x_{n-2} = x_n - 2h$, $x_{n-3} = x_n - 3h$, dan $x_{n-4} = x_n - 4h$. Selanjutnya dengan mengambil titik $x_n, x_{n-1} = x_n - h$, $x_{n-2} = x_n - 2h$, $x_{n-3} = x_n - 3h$, dan $x_{n-4} = x_n - 4h$, mengakibatkan nilai-nilai persamaan (3.11) adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} P_4(x_n) &= f_n = a_0 \\ P_4(x_{n-1}) &= f_{n-1} = a_0 + a_1(-h) \\ P_4(x_{n-2}) &= f_{n-2} = a_0 + a_1(-2h) + a_2(-2h)(-h) \\ P_4(x_{n-3}) &= f_{n-3} = a_0 + a_1(-3h) + a_2(-3h)(-2h) + a_3(-3h)(-2h)(-h) \\ P_4(x_{n-4}) &= f_{n-4} = a_0 + a_1(-4h) + a_2(-4h)(-3h) + a_3(-4h)(-3h)(-2h) \\ &\quad + a_4(-4h)(-3h)(-2h)(-h). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Sehingga nilai-nilai koefisien a_0, a_1, a_2, a_3 , dan a_4 pada sistem persamaan (3.12) adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
a_0 &= f_n \\
a_1 &= \frac{f_n - f_{n-1}}{h} = \frac{\Delta f_n}{h} \\
a_2 &= \frac{f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2}}{2h^2} = \frac{\Delta^2 f_n}{2h^2} \\
a_3 &= \frac{f_n - 3f_{n-1} + 3f_{n-2} - f_{n-3}}{6h^3} = \frac{\Delta^3 f_n}{6h^3} \\
a_4 &= \frac{f_n - 4f_{n-1} + 6f_{n-2} - 4f_{n-3} + f_{n-4}}{24h^4} = \frac{\Delta^4 f_n}{24h^4}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Selanjutnya sistem persamaan (3.13) disubstitusikan pada persamaan (3.11) menjadi:

$$\begin{aligned}
P_4(x) &= f_n + \frac{\Delta f}{h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 f}{2h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \frac{\Delta^3 f}{6h^3}(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) \\
&\quad + \frac{\Delta^4 f}{24h^4}(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2})(x - x_{n-3})
\end{aligned} \tag{3.14}$$

dan dengan mengasumsikan variabel $t = x - x_n$, maka interpolasi polinomial persamaan (3.14) dapat ditulis menjadi:

$$\begin{aligned}
P_4(x) &= f_n + \frac{\Delta f}{h}t + \frac{\Delta^2 f}{2h^2}t(t+h) + \frac{\Delta^3 f}{6h^3}t(t+h)(t+2h) + \frac{\Delta^4 f}{24h^4}t(t+h)(t+2h) \\
&\quad (t+3h) \\
&= f_n + \frac{\Delta f}{h}t + \frac{\Delta^2 f}{2h^2}(t^2 + th) + \frac{\Delta^3 f}{6h^3}(t^3 + 3ht^2 + 2h^2t) \\
&\quad + \frac{\Delta^4 f}{24h^4}(t^4 + 6ht^3 + 11h^2t^2 + 6h^3t).
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Kemudian persamaan (3.15) disubstitusikan pada persamaan (3.10) menjadi:

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left[f_n + \frac{\Delta f}{h} t + \frac{\Delta^2 f}{2h^2} (t^2 + th) + \frac{\Delta^3 f}{6h^3} (t^3 + 3ht^2 + 2h^2 t) + \frac{\Delta^4 f}{24h^4} (t^4 + 6ht^3 + 11h^2 t^2 + 6h^3 t) \right] dx. \quad (3.16)$$

Karena perubahan variabel x dalam interval $x_n \leq x \leq x_{n+1} = x_n + h$ sama dengan variansi variabel t dalam interval $0 \leq t \leq h$. Maka hasil integral persamaan (3.16) dapat ditulis menjadi:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \int_0^h \left[f_n + \frac{\Delta f}{h} t + \frac{\Delta^2 f}{2h^2} (t^2 + th) + \frac{\Delta^3 f}{6h^3} (t^3 + 3ht^2 + 2h^2 t) + \frac{\Delta^4 f}{24h^4} (t^4 + 6ht^3 + 11h^2 t^2 + 6h^3 t) \right] dt \\ &= y_n + \int_0^h f_n dt + \int_0^h \frac{\Delta f_n}{h} t dt + \int_0^h \frac{\Delta^2 f_n}{2h^2} (t^2 + th) dt + \int_0^h \frac{\Delta^3 f_n}{6h^3} (t^3 + 3ht^2 + 2h^2 t) dt \\ &\quad + \int_0^h \frac{\Delta^4 f_n}{24h^4} (t^4 + 6ht^3 + 11h^2 t^2 + 6h^3 t) dt \\ &= y_n + (f_n h) + \frac{\Delta f_n}{h} \left(\frac{1}{2} h^2 \right) + \frac{\Delta^2 f_n}{2h^2} \left(\frac{1}{3} h^3 + \frac{1}{2} h^2 h \right) + \frac{\Delta^3 f_n}{6h^3} \left(\frac{1}{4} h^4 + hh^3 + h^2 h^2 \right) \\ &\quad + \frac{\Delta^4 f_n}{24h^4} \left(\frac{1}{5} h^5 + \frac{6}{4} hh^4 + \frac{11}{3} h^2 h^3 + \frac{6}{2} h^3 h^2 \right) \\ &= y_n + f_n h + \frac{h}{2} \Delta f_n + \frac{5h}{12} \Delta^2 f_n + \frac{3h}{8} \Delta^3 f_n + \frac{251h}{720} \Delta^4 f_n. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Persamaan (3.17) merupakan rumus ekstrapolasi untuk metode Adams-Bashforth orde lima. Pada persamaan (3.17) terdapat *finite difference* yaitu $\Delta f_n, \Delta^2 f_n, \Delta^3 f_n$, dan $\Delta^4 f_n$ yang berkaitan dengan nilai-nilai $f_n, f_{n-1}, f_{n-2}, f_{n-3}$, dan f_{n-4} . Sehingga berdasarkan sistem persamaan (3.13) nilai-nilai *finite difference* dapat ditulis menjadi:

$$\begin{aligned}
\Delta f_n &= f_n - f_{n-1} \\
\Delta^2 f_n &= f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2} \\
\Delta^3 f_n &= f_n - 3f_{n-1} + 3f_{n-2} - f_{n-3} \\
\Delta^4 f_n &= f_n - 4f_{n-1} + 6f_{n-2} - 4f_{n-3} + f_{n-4}.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Selanjutnya nilai-nilai *finite difference* (3.18) disubstitusikan pada persamaan (3.17) menjadi:

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + f_n h + \frac{h}{2}(f_n - f_{n-1}) + \frac{5h}{12}(f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2}) \\
&\quad + \frac{3h}{8}(f_n - 3f_{n-1} + 3f_{n-2} - f_{n-3}) + \frac{251h}{720}(f_n - 4f_{n-1} + 6f_{n-2} - 4f_{n-3} + f_{n-4}) \\
&= y_n + \frac{h}{720} [720f_n + 360(f_n - f_{n-1}) + 300(f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2}) \\
&\quad + 270(f_n - 3f_{n-1} + 3f_{n-2} - f_{n-3}) + 251(f_n - 4f_{n-1} + 6f_{n-2} - 4f_{n-3} + f_{n-4})] \\
&= y_n + \frac{h}{720} [1901f_n - 2774f_{n-1} + 2616f_{n-2} - 1274f_{n-3} + 251f_{n-4}].
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Persamaan (3.19) merupakan bentuk eksplisit dari metode Adams-Bashforth orde lima.

Tahap kedua menentukan bentuk implisit, berdasarkan bentuk umum metode Adams (2.40) maka diperoleh bentuk umum metode Adams orde lima yaitu:

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} P_{5-1}(x) dx \\
&= y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} P_4(x) dx.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Kemudian nilai $y_{n+1} = y(x_{n+1})$ akan lebih akurat bila ditemukan dengan menggunakan rumus yang sama dengan persamaan (3.20) dimana polinomial $P_4(x)$ diganti menjadi polinomial $L_4(x)$, dengan $L_4(x)$ merupakan interpolasi

polinomial Lagrange. Berdasarkan persamaan (2.18) bentuk interpolasi polinomial Lagrange dengan kasus $x_{n-3} = x_n - 3h, x_{n-2} = x_n - 2h, x_{n-1} = x_n - h$, dan $x_{n+1} = x_n + h$ adalah

$$\begin{aligned}
 L_4(x) &= f_{n-3} \frac{(x - x_n + 2h)(x - x_n + h)(x - x_n)(x - x_n - h)}{(x_n - 3h - x_n + 2h)(x_n - 3h - x_n + h)(x_n - 3h - x_n)(x_n - 3h - x_n - h)} \\
 &+ f_{n-2} \frac{(x - x_n + 3h)(x - x_n + h)(x - x_n)(x - x_n - h)}{(x_n - 2h - x_n + 3h)(x_n - 2h - x_n + h)(x_n - 2h - x_n)(x_n - 2h - x_n - h)} \\
 &+ f_{n-1} \frac{(x - x_n + 3h)(x - x_n + 2h)(x - x_n)(x - x_n - h)}{(x_n - h - x_n + 3h)(x_n - h - x_n + 2h)(x_n - h - x_n)(x_n - h - x_n - h)} \\
 &+ f_n \frac{(x - x_n + 3h)(x - x_n + 2h)(x - x_n + h)(x - x_n - h)}{(x_n - x_n + 3h)(x_n - x_n + 2h)(x_n - x_n + h)(x_n - x_n - h)} \\
 &+ f_{n+1} \frac{(x - x_n + 3h)(x - x_n + 2h)(x - x_n + h)(x - x_n)}{(x_n + h - x_n + 3h)(x_n + h - x_n + 2h)(x_n + h - x_n + h)(x_n + h - x_n)} \\
 &= f_{n-3} \frac{(x - x_n + 2h)(x - x_n + h)(x - x_n)(x - x_n - h)}{24h^4} \\
 &+ f_{n-2} \frac{(x - x_n + 3h)(x - x_n + h)(x - x_n)(x - x_n - h)}{-6h^4} \\
 &+ f_{n-1} \frac{(x - x_n + 3h)(x - x_n + 2h)(x - x_n)(x - x_n - h)}{4h^4} \\
 &+ f_n \frac{(x - x_n + 3h)(x - x_n + 2h)(x - x_n + h)(x - x_n - h)}{-6h^4} \\
 &+ f_{n+1} \frac{(x - x_n + 3h)(x - x_n + 2h)(x - x_n + h)(x - x_n)}{24h^4}.
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Dengan mengganti variabel $t = x - x_n$ maka polinomial (3.21) dapat ditulis dalam bentuk berikut:

$$\begin{aligned}
 L_4(t) &= f_{n-3} \frac{(t + 2h)(t + h)(t)(t - h)}{24h^4} + f_{n-2} \frac{(t + 3h)(t + h)(t)(t - h)}{-6h^4} \\
 &+ f_{n-1} \frac{(t + 3h)(t + 2h)(t)(t - h)}{4h^4} + f_n \frac{(t + 3h)(t + 2h)(t + h)(t - h)}{-6h^4} \\
 &+ f_{n+1} \frac{(t + 3h)(t + 2h)(t + h)(t)}{24h^4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_4(t) = & f_{n-3} \frac{t^4 + 2ht^3 - h^2t^2 - 2h^3t}{24h^4} + f_{n-2} \frac{t^4 + 3ht^3 - h^2t^2 - 3h^3t}{-6h^4} \\
& + f_{n-1} \frac{t^4 + 4ht^3 + h^2t^2 - 6h^3t}{4h^4} + f_n \frac{t^4 + 5ht^3 + 5h^2t^2 - 5h^3t - 6h^4}{-6h^4} \\
& + f_{n+1} \frac{t^4 + 6ht^3 + 11h^2t^2 + 6h^3t}{24h^4}.
\end{aligned} \quad (3.22)$$

Menurut aturan koreksi yang dibahas di atas, maka rumus umum untuk mengevaluasi aproksimasi dari $y_{n+1} = y(x_{n+1})$ adalah

$$\begin{aligned}
y_{n+1}^{(i+1)} = & y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left[f_{n-3} \frac{t^4 + 2ht^3 - h^2t^2 - 2h^3t}{24h^4} + f_{n-2} \frac{t^4 + 3ht^3 - h^2t^2 - 3h^3t}{-6h^4} \right. \\
& + f_{n-1} \frac{t^4 + 4ht^3 + h^2t^2 - 6h^3t}{4h^4} + f_n \frac{t^4 + 5ht^3 + 5h^2t^2 - 5h^3t - 6h^4}{-6h^4} \\
& \left. + f_{n+1} \frac{t^4 + 6ht^3 + 11h^2t^2 + 6h^3t}{24h^4} \right] dx.
\end{aligned} \quad (3.23)$$

Karena perubahan variabel x dalam interval $x_n \leq x \leq x_{n+1} = x_n + h$ sama dengan variansi variabel t dalam interval $0 \leq t \leq h$. Maka hasil integral persamaan (3.16) dapat ditulis menjadi:

$$\begin{aligned}
y_{n+1}^{(i+1)} = & y_n + \int_0^h \left[f_{n-3} \frac{t^4 + 2ht^3 - h^2t^2 - 2h^3t}{24h^4} + f_{n-2} \frac{t^4 + 3ht^3 - h^2t^2 - 3h^3t}{-6h^4} \right. \\
& + f_{n-1} \frac{t^4 + 4ht^3 + h^2t^2 - 6h^3t}{4h^4} + f_n \frac{t^4 + 5ht^3 + 5h^2t^2 - 5h^3t - 6h^4}{-6h^4} \\
& \left. + f_{n+1} \frac{t^4 + 6ht^3 + 11h^2t^2 + 6h^3t}{24h^4} \right] dt \\
= & y_n + \int_0^h f_{n-3} \frac{t^4 + 2ht^3 - h^2t^2 - 2h^3t}{24h^4} dt + \int_0^h f_{n-2} \frac{t^4 + 3ht^3 - h^2t^2 - 3h^3t}{-6h^4} dt \\
& + \int_0^h f_{n-1} \frac{t^4 + 4ht^3 + h^2t^2 - 6h^3t}{4h^4} dt + \int_0^h f_n \frac{t^4 + 5ht^3 + 5h^2t^2 - 5h^3t - 6h^4}{-6h^4} dt \\
& + \int_0^h f_{n+1} \frac{t^4 + 6ht^3 + 11h^2t^2 + 6h^3t}{24h^4} dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= y_n + \frac{f_{n-3}}{24h^4} \left(\frac{1}{5}h^5 + \frac{1}{2}hh^4 - \frac{1}{3}h^2h^3 - h^3h^2 \right) + \frac{f_{n-2}}{-6h^4} \left(\frac{1}{5}h^5 + \frac{3}{4}hh^4 - \frac{1}{3}h^2h^3 - \frac{3}{2}h^3h^2 \right) \\
&\quad + \frac{f_{n-1}}{4h^4} \left(\frac{1}{5}h^5 + hh^4 + \frac{1}{3}h^2h^3 - 3h^3h^2 \right) + \frac{f_n}{-6h^4} \left(\frac{1}{5}h^5 + \frac{5}{4}hh^4 + \frac{5}{3}h^2h^3 - \frac{5}{2}h^3h^2 - 6h^4h \right) \\
&\quad + \frac{f_{n+1}}{24h^4} \left(\frac{1}{5}h^5 + \frac{3}{2}hh^4 + \frac{11}{3}h^2h^3 + 3h^3h^2 \right) \\
y_{n+1}^{(i+1)} &= y_n + \frac{h}{720} \left(-19f_{n-3} + 106f_{n-2} - 264f_{n-1} + 646f_n + 251f_{n+1} \left(y_{n+1}^{(i)} \right) \right)
\end{aligned} \tag{3.24}$$

dengan $i = 0, 1, 2, 3, \dots$. Persamaan (3.24) disebut rumus koreksi Adams-Moulton implisit.

Berdasarkan tahap satu dan tahap dua maka bentuk umum metode Adams-Bashforth-Moulton orde lima adalah sebagai berikut:

$$y_{n+1}^{(i)} = y_n + \frac{h}{720} [1901f_n - 2774f_{n-1} + 2616f_{n-2} - 1274f_{n-3} + 251f_{n-4}] \tag{3.25}$$

sebagai prediktor dan

$$y_{n+1}^{(i+1)} = y_n + \frac{h}{720} \left(-19f_{n-3} + 106f_{n-2} - 264f_{n-1} + 646f_n + 251f \left(x_{n+1}, y_{n+1}^{(i)} \right) \right) \tag{3.26}$$

sebagai korektor.

3.2.2 Metode Adams-Bahforth-Moulton Orde Enam

Untuk menentukan metode Adams-Bahforth-Moulton orde enam terdiri dari dua tahap yaitu tahap menentukan bentuk eksplisit Adams-Bashforth orde enam dan bentuk implisit Adams-Moulton orde enam. Pada tahap pertama menentukan bentuk eksplisit menggunakan $k = 6$, serta berdasarkan bentuk umum metode Adams (2.40) maka diperoleh bentuk umum metode Adams orde enam yaitu:

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} P_{6-1}(x) dx \\
&= y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} P_5(x) dx.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Dalam hal ini $P_5(x)$ akan lebih mudah menggunakan intersi polinomial Newton-

Gregory derajat kelima yaitu:

$$\begin{aligned}
P_5(x) \equiv N_5 &= a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + a_3(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) \\
&\quad + a_4(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2})(x - x_{n-3}) + a_5(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) \\
&\quad (x - x_{n-3})(x - x_{n-4}).
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Kemudian, asumsikan bahwa integral numerik persamaan (3.28) dilakukan dengan

langkah kontanta h maka diperoleh $x_{n-1} = x_n - h, x_{n-2} = x_n - 2h,$

$x_{n-3} = x_n - 3h, x_{n-4} = x_n - 4h,$ dan $x_{n-5} = x_n - 5h$. Selanjutnya dengan mengambil

titik $x_n, x_{n-1} = x_n - h, x_{n-2} = x_n - 2h, x_{n-3} = x_n - 3h, x_{n-4} = x_n - 4h,$ dan

$x_{n-5} = x_n - 5h,$ mengakibatkan nilai-nilai persamaan (3.28) adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
P_5(x_n) &= f_n = a_0 \\
P_5(x_{n-1}) &= f_{n-1} = a_0 + a_1(-h) \\
P_5(x_{n-2}) &= f_{n-2} = a_0 + a_1(-2h) + a_2(-2h)(-h) \\
P_5(x_{n-3}) &= f_{n-3} = a_0 + a_1(-3h) + a_2(-3h)(-2h) + a_3(-3h)(-2h)(-h) \\
P_5(x_{n-4}) &= f_{n-4} = a_0 + a_1(-4h) + a_2(-4h)(-3h) + a_3(-4h)(-3h)(-2h) \\
&\quad + a_4(-4h)(-3h)(-2h)(-h) \\
P_5(x_{n-5}) &= f_{n-5} = a_0 + a_1(-5h) + a_2(-5h)(-4h) + a_3(-5h)(-4h)(-3h) \\
&\quad + a_4(-5h)(-4h)(-3h)(-2h) + a_5(-5h)(-4h)(-3h)(-2h)(-h).
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Sehingga nilai-nilai koefisien $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4,$ dan a_5 pada sistem persamaan (3.29)

adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
a_0 &= f_n \\
a_1 &= \frac{f_n - f_{n-1}}{h} = \frac{\Delta f_n}{h} \\
a_2 &= \frac{f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2}}{2h^2} = \frac{\Delta^2 f_n}{2h^2} \\
a_3 &= \frac{f_n - 3f_{n-1} + 3f_{n-2} - f_{n-3}}{6h^3} = \frac{\Delta^3 f_n}{6h^3} \\
a_4 &= \frac{f_n - 4f_{n-1} + 6f_{n-2} - 4f_{n-3} + f_{n-4}}{24h^4} = \frac{\Delta^4 f_n}{24h^4} \\
a_5 &= \frac{f_n - 5f_{n-1} + 10f_{n-2} - 10f_{n-3} + 5f_{n-4} - f_{n-5}}{120h^5} = \frac{\Delta^5 f_n}{120h^5}
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Selanjutnya sistem persamaan (3.30) disubstitusikan pada persamaan (3.28)

menjadi:

$$\begin{aligned}
P_4(x) &= f_n + \frac{\Delta f}{h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 f}{2h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \frac{\Delta^3 f}{6h^3}(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) \\
&\quad + \frac{\Delta^4 f}{24h^4}(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2})(x - x_{n-3}) + \frac{\Delta^5 f}{120h^5}(x - x_n)(x - x_{n-1}) \\
&\quad (x - x_{n-2})(x - x_{n-3})(x - x_{n-4}).
\end{aligned} \tag{3.31}$$

dan dengan mengasumsikan variabel $t = x - x_n$, maka interpolasi polinomial persamaan (3.14) dapat ditulis menjadi:

$$\begin{aligned}
P_5(t) &= f_n + \frac{\Delta f}{h}t + \frac{\Delta^2 f}{2h^2}t(t+h) + \frac{\Delta^3 f}{6h^3}t(t+h)(t+2h) + \frac{\Delta^4 f}{24h^4}t(t+h)(t+2h) \\
&\quad (t+3h) + \frac{\Delta^5 f}{120h^5}t(t+h)(t+2h)(t+3h)(t+4h) \\
&= f_n + \frac{\Delta f}{h}t + \frac{\Delta^2 f}{2h^2}(t^2 + th) + \frac{\Delta^3 f}{6h^3}(t^3 + 3ht^2 + 2h^2t) + \frac{\Delta^4 f}{24h^4}(t^4 + 6ht^3 \\
&\quad + 11h^2t^2 + 6h^3t) + \frac{\Delta^5 f}{120h^5}(t^5 + 10ht^4 + 35h^2t^3 + 50h^3t^2 + 24h^4t).
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Kemudian persamaan (3.32) disubstitusikan pada persamaan (3.10) menjadi:

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left[f_n + \frac{\Delta f}{h} t + \frac{\Delta^2 f}{2h^2} (t^2 + th) + \frac{\Delta^3 f}{6h^3} (t^3 + 3ht^2 + 2h^2t) + \frac{\Delta^4 f}{24h^4} (t^4 + 6ht^3 + 11h^2t^2 + 6h^3t) + \frac{\Delta^5 f}{120h^5} (t^5 + 10ht^4 + 35h^2t^3 + 50h^3t^2 + 24h^4t) \right] dx. \quad (3.33)$$

Karena perubahan variabel x dalam interval $x_n \leq x \leq x_{n+1} = x_n + h$ sama dengan variansi variabel t dalam interval $0 \leq t \leq h$. Maka hasil integral persamaan (3.16) dapat ditulis menjadi:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \int_0^h \left[f_n + \frac{\Delta f}{h} t + \frac{\Delta^2 f}{2h^2} (t^2 + th) + \frac{\Delta^3 f}{6h^3} (t^3 + 3ht^2 + 2h^2t) + \frac{\Delta^4 f}{24h^4} (t^4 + 6ht^3 + 11h^2t^2 + 6h^3t) + \frac{\Delta^5 f}{120h^5} (t^5 + 10ht^4 + 35h^2t^3 + 50h^3t^2 + 24h^4t) \right] dt \\ &= y_n + \int_0^h f_n dt + \int_0^h \frac{\Delta f}{h} t dt + \int_0^h \frac{\Delta^2 f}{2h^2} (t^2 + th) dt + \int_0^h \frac{\Delta^3 f}{6h^3} (t^3 + 3ht^2 + 2h^2t) dt \\ &\quad + \int_0^h \frac{\Delta^4 f}{24h^4} (t^4 + 6ht^3 + 11h^2t^2 + 6h^3t) dt + \int_0^h \frac{\Delta^5 f}{120h^5} (t^5 + 10ht^4 + 35h^2t^3 + 50h^3t^2 + 24h^4t) dt \\ &= y_n + (f_n h) + \frac{\Delta f_n}{h} \left(\frac{1}{2} h^2 \right) + \frac{\Delta^2 f_n}{2h^2} \left(\frac{1}{3} h^3 + \frac{1}{2} h^2 h \right) + \frac{\Delta^3 f_n}{6h^3} \left(\frac{1}{4} h^4 + hh^3 + h^2 h^2 \right) \\ &\quad + \frac{\Delta^4 f_n}{24h^4} \left(\frac{1}{5} h^5 + \frac{6}{4} hh^4 + \frac{11}{3} h^2 h^3 + \frac{6}{2} h^3 h^2 \right) + \frac{\Delta^5 f_n}{120h^5} \left(\frac{1}{6} h^6 + 2ht^5 + \frac{35}{4} h^2 t^4 + \frac{50}{3} h^3 h^3 + 12h^4 h^2 \right) \\ &= y_n + f_n h + \frac{h}{2} \Delta f_n + \frac{5h}{12} \Delta^2 f_n + \frac{3h}{8} \Delta^3 f_n + \frac{251h}{720} \Delta^4 f_n + \frac{472h}{1440} \Delta^5 f_n. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Persamaan (3.34) merupakan rumus ekstrapolasi untuk metode Adams-Bashforth orde enam. Pada persamaan (3.34) terdapat *finite difference* yaitu $\Delta f_n, \Delta^2 f_n, \Delta^3 f_n, \Delta^4 f_n$, dan $\Delta^5 f_n$ yang berkaitan dengan nilai-nilai f_n, f_{n-1} ,

f_{n-2} , f_{n-3} , f_{n-4} , dan f_{n-5} . Sehingga berdasarkan sistem persamaan (3.30) nilai-nilai

finite difference dapat ditulis menjadi:

$$\begin{aligned}\Delta f_n &= f_n - f_{n-1} \\ \Delta^2 f_n &= f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2} \\ \Delta^3 f_n &= f_n - 3f_{n-1} + 3f_{n-2} - f_{n-3} \\ \Delta^4 f_n &= f_n - 4f_{n-1} + 6f_{n-2} - 4f_{n-3} + f_{n-4} \\ \Delta^5 f_n &= f_n - 5f_{n-1} + 10f_{n-2} - 10f_{n-3} + 5f_{n-4} - f_{n-5}.\end{aligned}\tag{3.35}$$

Selanjutnya nilai-nilai *finite difference* (3.35) disubstitusikan pada persamaan (3.34) menjadi:

$$\begin{aligned}y_{n+1} &= y_n + f_n h + \frac{h}{2}(f_n - f_{n-1}) + \frac{5h}{12}(f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2}) \\ &\quad + \frac{3h}{8}(f_n - 3f_{n-1} + 3f_{n-2} - f_{n-3}) + \frac{251h}{720}(f_n - 4f_{n-1} + 6f_{n-2} - 4f_{n-3} + f_{n-4}) \\ &\quad + \frac{472h}{1440}(f_n - 5f_{n-1} + 10f_{n-2} - 10f_{n-3} + 5f_{n-4} - f_{n-5}) \\ &= y_n + \frac{h}{1440} [1440f_n + 720(f_n - f_{n-1}) + 600(f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2}) \\ &\quad + 540(f_n - 3f_{n-1} + 3f_{n-2} - f_{n-3}) + 502(f_n - 4f_{n-1} + 6f_{n-2} - 4f_{n-3} + f_{n-4}) \\ &\quad + 472(f_n - 5f_{n-1} + 10f_{n-2} - 10f_{n-3} + 5f_{n-4} - f_{n-5})] \\ &= y_n + \frac{h}{1440} [4274f_n - 7908f_{n-1} + 9952f_{n-2} - 7268f_{n-3} + 2862f_{n-4} - 472f_{n-5}].\end{aligned}\tag{3.36}$$

Persamaan (3.36) merupakan bentuk eksplisit dari metode Adams-Bashforth orde enam.

Tahap kedua menentukan bentuk implisit, berdasarkan bentuk umum metode Adams (2.40) maka diperoleh bentuk umum metode Adams orde enam yaitu:

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} P_{6-1}(x) dx \\
&= y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} P_5(x) dx.
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Kemudian nilai $y_{n+1} = y(x_{n+1})$ akan lebih akurat bila ditemukan dengan menggunakan rumus yang sama dengan persamaan (3.20) dimana polinomial $P_5(x)$ diganti menjadi polinomial $L_5(x)$, dengan $L_5(x)$ merupakan interpolasi polinomial Lagrange. Berdasarkan persamaan (2.18) bentuk interpolasi polinomial Lagrange dengan kasus $x_{n-4} = x_n - 4h, x_{n-3} = x_n - 3h, x_{n-2} = x_n - 2h, x_{n-1} = x_n - h$, dan $x_{n+1} = x_n + h$ adalah

$$\begin{aligned}
L_5(x) &= f_{n-4} \frac{(x - x_n + 3h)(x - x_n + 2h)(x - x_n + h)(x - x_n)}{(x_n - 4h - x_n + 3h)(x_n - 4h - x_n + 2h)(x_n - 4h - x_n + h)(x_n - 4h - x_n)} \\
&\quad \frac{(x - x_n - h)}{(x_n - 4h - x_n - h)} + f_{n-3} \frac{(x - x_n + 4h)(x - x_n + 2h)(x - x_n + h)}{(x_n - 3h - x_n + 4h)(x_n - 3h - x_n + 2h)} \\
&\quad \frac{(x - x_n)(x - x_n - h)}{(x_n - 3h - x_n + h)(x_n - 3h - x_n)(x_n - 3h - x_n - h)} + f_{n-2} \frac{(x - x_n + 4h)}{(x_n - 2h - x_n + 4h)} \\
&\quad \frac{(x - x_n + 3h)(x - x_n + h)(x - x_n)(x - x_n - h)}{(x_n - 2h - x_n + 3h)(x_n - 2h - x_n + h)(x_n - 2h - x_n)(x_n - 2h - x_n - h)} \\
&\quad + f_{n-1} \frac{(x - x_n + 4h)(x - x_n + 3h)(x - x_n + 2h)(x - x_n)}{(x_n - h - x_n + 4h)(x_n - h - x_n + 3h)(x_n - h - x_n + 2h)(x_n - h - x_n)} \\
&\quad \frac{(x - x_n - h)}{(x_n - h - x_n - h)} + f_n \frac{(x - x_n + 4h)(x - x_n + 3h)(x - x_n + 2h)(x - x_n + h)}{(x_n - x_n + 4h)(x_n - x_n + 3h)(x_n - x_n + 2h)(x_n - x_n + h)} \\
&\quad \frac{(x - x_n - h)}{(x_n - x_n - h)} + f_{n+1} \frac{(x - x_n + 4h)(x - x_n + 3h)(x - x_n + 2h)(x - x_n + h)}{(x_n + h - x_n + 4h)(x_n + h - x_n + 3h)(x_n + h - x_n + 2h)} \\
&\quad \frac{(x - x_n)}{(x_n + h - x_n + h)(x_n + h - x_n)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_5(x) = & f_{n-4} \frac{(x-x_n+3h)(x-x_n+2h)(x-x_n+h)(x-x_n)(x-x_n-h)}{-120h^5} \\
& + f_{n-3} \frac{(x-x_n+4h)(x-x_n+2h)(x-x_n+h)(x-x_n)(x-x_n-h)}{24h^5} \\
& + f_{n-2} \frac{(x-x_n+4h)(x-x_n+3h)(x-x_n+h)(x-x_n)(x-x_n-h)}{-12h^5} \\
& + f_{n-1} \frac{(x-x_n+4h)(x-x_n+3h)(x-x_n+2h)(x-x_n)(x-x_n-h)}{12h^5} \\
& + f_n \frac{(x-x_n+4h)(x-x_n+3h)(x-x_n+2h)(x-x_n+h)(x-x_n-h)}{-24h^5} \\
& + f_{n+1} \frac{(x-x_n+4h)(x-x_n+3h)(x-x_n+2h)(x-x_n+h)(x-x_n)}{120h^5}.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Dengan mengganti variabel $t = x - x_n$ maka polinomial (3.21) dapat ditulis dalam bentuk berikut:

$$\begin{aligned}
L_5(t) = & f_{n-4} \frac{(t+3h)(t+2h)(t+h)(t)(t-h)}{-120h^5} + f_{n-3} \frac{(t+4h)(t+2h)(t+h)(t)(t-h)}{24h^5} \\
& + f_{n-2} \frac{(t+4h)(t+3h)(t+h)(t)(t-h)}{-12h^5} + f_{n-1} \frac{(t+4h)(t+3h)(t+2h)(t)(t-h)}{12h^5} \\
& + f_n \frac{(t+4h)(t+3h)(t+2h)(t+h)(t-h)}{-24h^5} \\
& + f_{n+1} \frac{(t+4h)(t+3h)(t+2h)(t+h)(t)}{120h^5} \\
= & f_{n-4} \frac{t^5 + 5ht^4 + 5h^2t^3 - 5h^3t^2 - 6h^4t}{-120h^5} + f_{n-3} \frac{t^5 + 6ht^4 + 7h^2t^3 - 6h^3t^2 - 8h^4t}{24h^5} \\
& + f_{n-2} \frac{t^5 + 7ht^4 + 11h^2t^3 - 7h^3t^2 - 12h^4t}{-12h^5} + f_{n-1} \frac{t^5 + 8ht^4 + 17h^2t^3 - 2h^3t^2 - 24h^4t}{12h^5} \\
& + f_n \frac{t^5 + 9ht^4 + 25h^2t^3 + 15h^3t^2 - 26h^4t - 24h^5}{-24h^5} \\
& + f_{n+1} \frac{t^5 + 10ht^4 + 35h^2t^3 + 50h^3t^2 + 24h^4t}{120h^5}.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Menurut aturan koreksi yang dibahas di atas, maka rumus umum untuk mengevaluasi aproksimasi dari $y_{n+1} = y(x_{n+1})$ adalah

$$\begin{aligned}
 y_{n+1}^{(i+1)} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} & \left[f_{n-4} \frac{t^5 + 5ht^4 + 5h^2t^3 - 5h^3t^2 - 6h^4t}{-120h^5} + f_{n-3} \frac{t^5 + 6ht^4 + 7h^2t^3 - 6h^3t^2 - 8h^4t}{24h^5} \right. \\
 & + f_{n-2} \frac{t^5 + 7ht^4 + 11h^2t^3 - 7h^3t^2 - 12h^4t}{-12h^5} + f_{n-1} \frac{t^5 + 8ht^4 + 17h^2t^3 - 2h^3t^2 - 24h^4t}{12h^5} \\
 & + f_n \frac{t^5 + 9ht^4 + 25h^2t^3 + 15h^3t^2 - 26h^4t - 24h^5}{-24h^5} \\
 & \left. + f_{n+1} \frac{t^5 + 10ht^4 + 35h^2t^3 + 50h^3t^2 + 24h^4t}{120h^5} \right] dx.
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

Karena perubahan variabel x dalam interval $x_n \leq x \leq x_{n+1} = x_n + h$ sama dengan variansi variabel t dalam interval $0 \leq t \leq h$. Maka hasil integral persamaan (3.40) dapat ditulis menjadi:

$$\begin{aligned}
 y_{n+1}^{(i+1)} = y_n + \int_0^h & \left[f_{n-4} \frac{t^5 + 5ht^4 + 5h^2t^3 - 5h^3t^2 - 6h^4t}{-120h^5} + f_{n-3} \frac{t^5 + 6ht^4 + 7h^2t^3 - 6h^3t^2 - 8h^4t}{24h^5} \right. \\
 & + f_{n-2} \frac{t^5 + 7ht^4 + 11h^2t^3 - 7h^3t^2 - 12h^4t}{-12h^5} + f_{n-1} \frac{t^5 + 8ht^4 + 17h^2t^3 - 2h^3t^2 - 24h^4t}{12h^5} \\
 & + f_n \frac{t^5 + 9ht^4 + 25h^2t^3 + 15h^3t^2 - 26h^4t - 24h^5}{-24h^5} \\
 & \left. + f_{n+1} \frac{t^5 + 10ht^4 + 35h^2t^3 + 50h^3t^2 + 24h^4t}{120h^5} \right] dt \\
 = y_n + \frac{f_{n-4}}{-120h^5} & \left(\frac{1}{6}h^6 + hh^5 + \frac{5}{4}h^2h^4 - \frac{5}{3}h^3h^3 - 3h^4h^2 \right) \\
 & + \frac{f_{n-3}}{24h^5} \left(\frac{1}{6}h^6 + \frac{6}{5}hh^5 + \frac{7}{4}h^2h^4 - 2h^3h^3 - 4h^4h^2 \right) \\
 & + \frac{f_{n-2}}{-12h^5} \left(\frac{1}{6}h^6 + \frac{7}{5}hh^5 + \frac{11}{4}h^2h^4 - \frac{7}{3}h^3h^3 - 6h^4h^2 \right) \\
 & + \frac{f_{n-1}}{12h^5} \left(\frac{1}{6}h^6 + \frac{8}{5}hh^5 + \frac{17}{4}h^2h^4 - \frac{2}{3}h^3h^3 - 12h^4h^2 \right) \\
 & + \frac{f_n}{-24h^5} \left(\frac{1}{6}h^6 + \frac{9}{5}hh^5 + \frac{25}{4}h^2h^4 + 5h^3h^3 - 13h^4h^2 - 24h^5h \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{f_{n+1}}{120h^5} \left(\frac{1}{6}h^6 + 2hh^5 + \frac{35}{4}h^2h^4 + \frac{50}{3}h^3h^3 + 12h^4h^2 \right) \\
y_{n+1}^{(i+1)} &= y_n + \frac{h}{1440} \left[27f_{n-4} - 173f_{n-3} + 482f_{n-2} - 798f_{n-1} + 1427f_n + 475f_{n+1} \left(y_{n+1}^{(i)} \right) \right].
\end{aligned}
\tag{3.41}$$

dengan $i = 0, 1, 2, 3, \dots$. Persamaan (3.41) disebut rumus koreksi Adams-Moulton implisit.

Berdasarkan tahap satu dan tahap dua maka bentuk umum metode Adams-Bashforth-Moulton orde enam adalah sebagai berikut:

$$y_{n+1}^{(i)} = y_n + \frac{h}{1440} \left[4274f_n - 7908f_{n-1} + 9952f_{n-2} - 7268f_{n-3} + 2862f_{n-4} - 472f_{n-5} \right]
\tag{3.42}$$

sebagai prediktor dan

$$y_{n+1}^{(i+1)} = y_n + \frac{h}{1440} \left[27f_{n-4} - 173f_{n-3} + 482f_{n-2} - 798f_{n-1} + 1427f_n + 475f \left(x_{n+1}, y_{n+1}^{(i)} \right) \right]
\tag{3.43}$$

sebagai korektor.

3.3 Penyelesaian Numerik Model Gerak Osilasi Vertikal dan Torsional

Penjelasan mengenai langkah-langkah penyelesaian numerik model gerak osilasi vertikal dan torsional menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton dibahas pada subbab ini. Pada subbab 3.2 telah diperoleh bentuk umum metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat, lima dan enam. Penyelesaian metode Adams-Bashforth-Moulton pada penelitian ini dilakukan dengan iterasi n . Iterasi $n = 0, \dots, N-2$ dengan N merupakan besaran orde pada metode Adams-Bashforth-Moulton, dilakukan menggunakan metode Runge-Kutta-Fehlberg orde

lima. Kemudian interaksi $n = N - 1, N, N + 1, \dots$, dilakukan menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat, lima dan enam. Sehingga penyelesaian numerik terdiri dari dua tahap. Tahap pertama penyelesaian numerik model gerak osilasi vertikal dan torsional (3.7) dengan metode Runge-Kutta-Fehlberg orde lima adalah

$$\begin{aligned}
 y_{1(n+1)} &= y_{1(n)} + \left(\frac{16}{135} k_1 + \frac{6656}{12825} k_3 + \frac{28561}{56430} k_4 - \frac{9}{50} k_5 + \frac{2}{55} k_6 \right) \\
 y_{2(n+1)} &= y_{2(n)} + \left(\frac{16}{135} l_1 + \frac{6656}{12825} l_3 + \frac{28561}{56430} l_4 - \frac{9}{50} l_5 + \frac{2}{55} l_6 \right) \\
 \theta_{1(n+1)} &= \theta_{1(n)} + \left(\frac{16}{135} m_1 + \frac{6656}{12825} m_3 + \frac{28561}{56430} m_4 - \frac{9}{50} m_5 + \frac{2}{55} m_6 \right) \\
 \theta_{2(n+1)} &= \theta_{2(n)} + \left(\frac{16}{135} n_1 + \frac{6656}{12825} n_3 + \frac{28561}{56430} n_4 - \frac{9}{50} n_5 + \frac{2}{55} n_6 \right)
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

dengan,

$$\begin{aligned}
 k_1 &= hp(t_{(n)}, y_{1(n)}, y_{2(n)}, \theta_{1(n)}, \theta_{2(n)}) \\
 &= hy_{2(n)} \\
 l_1 &= hq(t_{(n)}, y_{1(n)}, y_{2(n)}, \theta_{1(n)}, \theta_{2(n)}) \\
 &= h \left\{ -\frac{K}{m} \left[\left(y_{1(n)} - l \sin(\theta_{1(n)}) \right)^+ + \left(y_{1(n)} + l \sin(\theta_{1(n)}) \right)^+ \right] - \delta_2 y_{2(n)} + g \right\} \\
 m_1 &= hr(t_{(n)}, y_{1(n)}, y_{2(n)}, \theta_{1(n)}, \theta_{2(n)}) \\
 &= h\theta_{2(n)} \\
 n_1 &= hs(t_{(n)}, y_{1(n)}, y_{2(n)}, \theta_{1(n)}, \theta_{2(n)}) \\
 &= h \left\{ \frac{3K}{ml} \cos(\theta_{1(n)}) \left[\left(y_{1(n)} - l \sin(\theta_{1(n)}) \right)^+ - \left(y_{1(n)} + l \sin(\theta_{1(n)}) \right)^+ \right] - \delta_1 \theta_{2(n)} \right. \\
 &\quad \left. + \alpha \sin(\mu t_{(n)}) \right\} \\
 k_2 &= hp\left(t_{(n)} + \frac{1}{4}h, y_{1(n)} + \frac{1}{4}k_1, y_{2(n)} + \frac{1}{4}l_1, \theta_{1(n)} + \frac{1}{4}m_1, \theta_{2(n)} + \frac{1}{4}n_1\right) \\
 &= h\left(y_{2(n)} + \frac{1}{4}k_1\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_2 &= hq \left(t_{(n)} + \frac{1}{4}h, y_{1(n)} + \frac{1}{4}k_1, y_{2(n)} + \frac{1}{4}l_1, \theta_{1(n)} + \frac{1}{4}m_1, \theta_{2(n)} + \frac{1}{4}n_1 \right) \\
&= h \left\{ -\frac{K}{m} \left[\left(\left(y_{1(n)} + \frac{1}{4}k_1 \right) - l \sin \left(\theta_{1(n)} + \frac{1}{4}m_1 \right) \right)^+ \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\left(y_{1(n)} + \frac{1}{4}k_1 \right) + l \sin \left(\theta_{1(n)} + \frac{1}{4}m_1 \right) \right)^+ \right] - \delta_2 \left(y_{2(n)} + \frac{1}{4}l_1 \right) + g \right\} \\
m_2 &= hr \left(t_{(n)} + \frac{1}{4}h, y_{1(n)} + \frac{1}{4}k_1, y_{2(n)} + \frac{1}{4}l_1, \theta_{1(n)} + \frac{1}{4}m_1, \theta_{2(n)} + \frac{1}{4}n_1 \right) \\
&= h \left(\theta_{2(n)} + \frac{1}{4}n_1 \right) \\
n_2 &= hs \left(t_{(n)} + \frac{1}{4}h, y_{1(n)} + \frac{1}{4}k_1, y_{2(n)} + \frac{1}{4}l_1, \theta_{1(n)} + \frac{1}{4}m_1, \theta_{2(n)} + \frac{1}{4}n_1 \right) \\
&= h \left\{ \frac{3K}{ml} \cos \left(\theta_{1(n)} + \frac{1}{4}m_1 \right) \left[\left(\left(y_{1(n)} + \frac{1}{4}k_1 \right) - l \sin \left(\theta_{1(n)} + \frac{1}{4}m_1 \right) \right)^+ \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left(\left(y_{1(n)} + \frac{1}{4}k_1 \right) + l \sin \left(\theta_{1(n)} + \frac{1}{4}m_1 \right) \right)^+ \right] - \delta_1 \left(\theta_{2(n)} + \frac{1}{4}n_1 \right) \right. \\
&\quad \left. + \alpha \sin \left(\mu \left(t_{(n)} + \frac{1}{4}h \right) \right) \right\} \\
k_3 &= hp \left(t_{(n)} + \frac{3}{8}h, y_{1(n)} + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2, y_{2(n)} + \frac{3}{32}l_1 + \frac{9}{32}l_2, \theta_{1(n)} + \frac{3}{32}m_1 + \frac{9}{32}m_2, \right. \\
&\quad \left. \theta_{2(n)} + \frac{3}{32}n_1 + \frac{9}{32}n_2 \right) \\
&= h \left\{ y_{2(n)} + \frac{3}{32}l_1 + \frac{9}{32}l_2 \right\} \\
l_3 &= hq \left(t_{(n)} + \frac{3}{8}h, y_{1(n)} + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2, y_{2(n)} + \frac{3}{32}l_1 + \frac{9}{32}l_2, \theta_{1(n)} + \frac{3}{32}m_1 + \frac{9}{32}m_2, \right. \\
&\quad \left. \theta_{2(n)} + \frac{3}{32}n_1 + \frac{9}{32}n_2 \right) \\
&= h \left\{ -\frac{K}{m} \left[\left(\left(y_{1(n)} + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2 \right) - l \sin \left(\theta_{1(n)} + \frac{3}{32}m_1 + \frac{9}{32}m_2 \right) \right)^+ \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\left(y_{1(n)} + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2 \right) + l \sin \left(\theta_{1(n)} + \frac{3}{32}m_1 + \frac{9}{32}m_2 \right) \right)^+ \right] \right. \\
&\quad \left. - \delta_2 \left(y_{2(n)} + \frac{3}{32}l_1 + \frac{9}{32}l_2 \right) + g \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_3 &= hr \left(t_{(n)} + \frac{3}{8}h, y_{1(n)} + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2, y_{2(n)} + \frac{3}{32}l_1 + \frac{9}{32}l_2, \theta_{1(n)} + \frac{3}{32}m_1 + \frac{9}{32}m_2, \right. \\
&\quad \left. \theta_{2(n)} + \frac{3}{32}n_1 + \frac{9}{32}n_2 \right) \\
&= h \left\{ \theta_{2(n)} + \frac{3}{32}n_1 + \frac{9}{32}n_2 \right\} \\
n_3 &= hs \left(t_{(n)} + \frac{3}{8}h, y_{1(n)} + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2, y_{2(n)} + \frac{3}{32}l_1 + \frac{9}{32}l_2, \theta_{1(n)} + \frac{3}{32}m_1 + \frac{9}{32}m_2, \right. \\
&\quad \left. \theta_{2(n)} + \frac{3}{32}n_1 + \frac{9}{32}n_2 \right) \\
&= h \left\{ \frac{3K}{ml} \cos \left(\theta_{1(n)} + \frac{3}{32}m_1 + \frac{9}{32}m_2 \right) \left[\left(\left(y_{1(n)} + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2 \right) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - l \sin \left(\theta_{1(n)} + \frac{3}{32}m_1 + \frac{9}{32}m_2 \right) \right) \right]^+ - \left(\left(y_{1(n)} + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2 \right) \right. \\
&\quad \left. + l \sin \left(\theta_{1(n)} + \frac{3}{32}m_1 + \frac{9}{32}m_2 \right) \right) \right]^+ - \delta_1 \left(\theta_{2(n)} + \frac{3}{32}n_1 + \frac{9}{32}n_2 \right) \\
&\quad \left. + \alpha \sin \left(\mu \left(t_{(n)} + \frac{3}{8}h \right) \right) \right\} \\
k_4 &= hp \left(t_{(n)} + \frac{12}{13}h, y_{1(n)} + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3, y_{2(n)} + \frac{1932}{2197}l_1 - \frac{7200}{2197}l_2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{7296}{2197}l_3, \theta_{1(n)} + \frac{1932}{2197}m_1 - \frac{7200}{2197}m_2 + \frac{7296}{2197}m_3, \theta_{2(n)} + \frac{1932}{2197}n_1 \right. \\
&\quad \left. - \frac{7200}{2197}n_2 + \frac{7296}{2197}n_3 \right) \\
&= h \left\{ y_{2(n)} + \frac{1932}{2197}l_1 - \frac{7200}{2197}l_2 + \frac{7296}{2197}l_3 \right\} \\
l_4 &= hq \left(t_{(n)} + \frac{12}{13}h, y_{1(n)} + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3, y_{2(n)} + \frac{1932}{2197}l_1 - \frac{7200}{2197}l_2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{7296}{2197}l_3, \theta_{1(n)} + \frac{1932}{2197}m_1 - \frac{7200}{2197}m_2 + \frac{7296}{2197}m_3, \theta_{2(n)} + \frac{1932}{2197}n_1 \right. \\
&\quad \left. - \frac{7200}{2197}n_2 + \frac{7296}{2197}n_3 \right) \\
&= h \left\{ -\frac{K}{m} \left[\left(\left(y_{1(n)} + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3 \right) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - l \sin \left(\theta_{1(n)} + \frac{1932}{2197}m_1 - \frac{7200}{2197}m_2 + \frac{7296}{2197}m_3 \right) \right) \right]^+ + \left(\left(y_{1(n)} + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 \right. \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{7296}{2197} k_3 \Big) + l \sin \left(\theta_{1(n)} + \frac{1932}{2197} m_1 - \frac{7200}{2197} m_2 + \frac{7296}{2197} m_3 \right) \Big) \Big)^+ \Big] \\
& - \delta_2 \left(y_{2(n)} + \frac{1932}{2197} l_1 - \frac{7200}{2197} l_2 + \frac{7296}{2197} l_3 \right) + g \Big\} \\
m_4 = & hr \left(t_{(n)} + \frac{12}{13} h, y_{1(n)} + \frac{1932}{2197} k_1 - \frac{7200}{2197} k_2 + \frac{7296}{2197} k_3, y_{2(n)} + \frac{1932}{2197} l_1 - \frac{7200}{2197} l_2 \right. \\
& + \frac{7296}{2197} l_3, \theta_{1(n)} + \frac{1932}{2197} m_1 - \frac{7200}{2197} m_2 + \frac{7296}{2197} m_3, \theta_{2(n)} + \frac{1932}{2197} n_1 \\
& \left. - \frac{7200}{2197} n_2 + \frac{7296}{2197} n_3 \right) \\
= & h \left\{ \theta_{2(n)} + \frac{1932}{2197} n_1 - \frac{7200}{2197} n_2 + \frac{7296}{2197} n_3 \right\} \\
n_4 = & hs \left(t_{(n)} + \frac{12}{13} h, y_{1(n)} + \frac{1932}{2197} k_1 - \frac{7200}{2197} k_2 + \frac{7296}{2197} k_3, y_{2(n)} + \frac{1932}{2197} l_1 - \frac{7200}{2197} l_2 \right. \\
& + \frac{7296}{2197} l_3, \theta_{1(n)} + \frac{1932}{2197} m_1 - \frac{7200}{2197} m_2 + \frac{7296}{2197} m_3, \theta_{2(n)} + \frac{1932}{2197} n_1 \\
& \left. - \frac{7200}{2197} n_2 + \frac{7296}{2197} n_3 \right) \\
= & h \left\{ \frac{3K}{ml} \cos \left(\theta_{1(n)} + \frac{1932}{2197} m_1 - \frac{7200}{2197} m_2 + \frac{7296}{2197} m_3 \right) \right. \\
& \left[\left(\left(y_{1(n)} + \frac{1932}{2197} k_1 - \frac{7200}{2197} k_2 + \frac{7296}{2197} k_3 \right) - l \sin \left(\theta_{1(n)} + \frac{1932}{2197} m_1 - \frac{7200}{2197} m_2 + \frac{7296}{2197} m_3 \right) \right)^+ \right. \\
& \left. - \left(\left(y_{1(n)} + \frac{1932}{2197} k_1 - \frac{7200}{2197} k_2 + \frac{7296}{2197} k_3 \right) + l \sin \left(\theta_{1(n)} + \frac{1932}{2197} m_1 - \frac{7200}{2197} m_2 + \frac{7296}{2197} m_3 \right) \right)^+ \right] \\
& \left. - \delta_1 \left(\theta_{2(n)} + \frac{1932}{2197} n_1 - \frac{7200}{2197} n_2 + \frac{7296}{2197} n_3 \right) + \alpha \sin \left(\mu \left(t_{(n)} + \frac{12}{13} h \right) \right) \right\} \\
k_5 = & hp \left(t_{(n)} + h, y_{1(n)} + \frac{439}{216} k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513} k_3 - \frac{854}{4104} k_4, y_{2(n)} + \frac{439}{216} l_1 - 8l_2 \right. \\
& + \frac{3680}{513} l - \frac{854}{4104} l_4, \theta_{1(n)} + \frac{439}{216} m_1 - 8m_2 + \frac{3680}{513} m_3 - \frac{854}{4104} m_4, \theta_{2(n)} + \frac{439}{216} n_1 \\
& \left. - 8n_2 + \frac{3680}{513} n_3 - \frac{854}{4104} n_4 \right) \\
= & h \left\{ y_{2(n)} + \frac{439}{216} l_1 - 8l_2 + \frac{3680}{513} l_3 - \frac{854}{4104} l_4 \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_5 &= hq \left(t_{(n)} + h, y_{1(n)} + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{854}{4104}k_4, y_{2(n)} + \frac{439}{216}l_1 - 8l_2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{3680}{513}l_3 - \frac{854}{4104}l_4, \theta_{1(n)} + \frac{439}{216}m_1 - 8m_2 + \frac{3680}{513}m_3 - \frac{854}{4104}m_4, \theta_{2(n)} + \frac{439}{216}n_1 \right. \\
&\quad \left. - 8n_2 + \frac{3680}{513}n_3 - \frac{854}{4104}n_4 \right) \\
&= h \left\{ -\frac{K}{m} \left[\left(\left(y_{1(n)} + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{854}{4104}k_4 \right) - l \sin \left(\theta_{1(n)} + \frac{439}{216}m_1 \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - 8m_2 + \frac{3680}{513}m_3 - \frac{854}{4104}m_4 \right) \right) \right]^+ + \left(\left(y_{1(n)} + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{854}{4104}k_4 \right) \right. \\
&\quad \left. + l \sin \left(\theta_{1(n)} + \frac{439}{216}m_1 - 8m_2 + \frac{3680}{513}m_3 - \frac{854}{4104}m_4 \right) \right) \right]^+ \left. - \delta_2 \left(y_{2(n)} + \frac{439}{216}l_1 - 8l_2 \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{3680}{513}l_3 - \frac{854}{4104}l_4 \right) + g \right\} \\
m_5 &= hr \left(t_{(n)} + h, y_{1(n)} + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{854}{4104}k_4, y_{2(n)} + \frac{439}{216}l_1 - 8l_2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{3680}{513}l_3 - \frac{854}{4104}l_4, \theta_{1(n)} + \frac{439}{216}m_1 - 8m_2 + \frac{3680}{513}m_3 - \frac{854}{4104}m_4, \theta_{2(n)} + \frac{439}{216}n_1 \right. \\
&\quad \left. - 8n_2 + \frac{3680}{513}n_3 - \frac{854}{4104}n_4 \right) \\
&= h \left\{ \theta_{2(n)} + \frac{439}{216}n_1 - 8n_2 + \frac{3680}{513}n_3 - \frac{854}{4104}n_4 \right\} \\
n_5 &= hs \left(t_{(n)} + h, y_{1(n)} + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{854}{4104}k_4, y_{2(n)} + \frac{439}{216}l_1 - 8l_2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{3680}{513}l_3 - \frac{854}{4104}l_4, \theta_{1(n)} + \frac{439}{216}m_1 - 8m_2 + \frac{3680}{513}m_3 - \frac{854}{4104}m_4, \theta_{2(n)} + \frac{439}{216}n_1 \right. \\
&\quad \left. - 8n_2 + \frac{3680}{513}n_3 - \frac{854}{4104}n_4 \right) \\
&= h \left\{ \frac{3K}{ml} \cos \left(\theta_{1(n)} + \frac{439}{216}m_1 - 8m_2 + \frac{3680}{513}m_3 - \frac{854}{4104}m_4 \right) \left[\left(\left(y_{1(n)} + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 \right. \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{854}{4104}k_4 \right) - l \sin \left(\theta_{1(n)} + \frac{439}{216}m_1 - 8m_2 + \frac{3680}{513}m_3 - \frac{854}{4104}m_4 \right) \right) \right]^+ \right. \\
&\quad \left. - \left(\left(y_{1(n)} + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{854}{4104}k_4 \right) + l \sin \left(\theta_{1(n)} + \frac{439}{216}m_1 - 8m_2 \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \frac{3680}{513}m_3 - \frac{854}{4104}m_4 \right) \right) \right]^+ \right. \left. - \delta_1 \left(\theta_{2(n)} + \frac{439}{216}n_1 - 8n_2 + \frac{3680}{513}n_3 - \frac{854}{4104}n_4 \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \alpha \sin\left(\mu\left(t_{(n)} + h\right)\right)\Big\} \\
k_6 &= hp\left(t_{(n)} + \frac{1}{2}h, y_{1(n)} - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5, y_{2(n)} - \frac{8}{27}l_1 + 2l_2 \right. \\
& \quad \left. - \frac{3544}{2565}l_3 + \frac{1859}{4104}l_4 - \frac{11}{40}l_5, \theta_{1(n)} - \frac{8}{27}m_1 + 2m_2 - \frac{3544}{2565}m_3 + \frac{1859}{4104}m_4 - \frac{11}{40}m_5 \right. \\
& \quad \left. , \theta_{2(n)} - \frac{8}{27}n_1 + 2n_2 - \frac{3544}{2565}n_3 + \frac{1859}{4104}n_4 - \frac{11}{40}n_5\right) \\
&= h\left\{y_{2(n)} - \frac{8}{27}l_1 + 2l_2 - \frac{3544}{2565}l_3 + \frac{1859}{4104}l_4 - \frac{11}{40}l_5\right\} \\
l_6 &= hq\left(t_{(n)} + \frac{1}{2}h, y_{1(n)} - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5, y_{2(n)} - \frac{8}{27}l_1 + 2l_2 \right. \\
& \quad \left. - \frac{3544}{2565}l_3 + \frac{1859}{4104}l_4 - \frac{11}{40}l_5, \theta_{1(n)} - \frac{8}{27}m_1 + 2m_2 - \frac{3544}{2565}m_3 + \frac{1859}{4104}m_4 - \frac{11}{40}m_5 \right. \\
& \quad \left. , \theta_{2(n)} - \frac{8}{27}n_1 + 2n_2 - \frac{3544}{2565}n_3 + \frac{1859}{4104}n_4 - \frac{11}{40}n_5\right) \\
&= h\left\{-\frac{K}{m}\left[\left(\left(y_{1(n)} - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5\right) - l \sin\left(\theta_{1(n)} - \frac{8}{27}m_1 + 2m_2 - \frac{3544}{2565}m_3 + \frac{1859}{4104}m_4 - \frac{11}{40}m_5\right)\right)^+ \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(\left(y_{1(n)} - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5\right) + l \sin\left(\theta_{1(n)} - \frac{8}{27}m_1 + 2m_2 - \frac{3544}{2565}m_3 + \frac{1859}{4104}m_4 - \frac{11}{40}m_5\right)\right)^+\right] \right. \\
& \quad \left. - \delta_2\left(y_{2(n)} - \frac{8}{27}l_1 + 2l_2 - \frac{3544}{2565}l_3 + \frac{1859}{4104}l_4 - \frac{11}{40}l_5\right) + g\right\} \\
m_6 &= hr\left(t_{(n)} + \frac{1}{2}h, y_{1(n)} - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5, y_{2(n)} - \frac{8}{27}l_1 + 2l_2 \right. \\
& \quad \left. - \frac{3544}{2565}l_3 + \frac{1859}{4104}l_4 - \frac{11}{40}l_5, \theta_{1(n)} - \frac{8}{27}m_1 + 2m_2 - \frac{3544}{2565}m_3 + \frac{1859}{4104}m_4 - \frac{11}{40}m_5 \right. \\
& \quad \left. , \theta_{2(n)} - \frac{8}{27}n_1 + 2n_2 - \frac{3544}{2565}n_3 + \frac{1859}{4104}n_4 - \frac{11}{40}n_5\right) \\
&= h\left\{\theta_{2(n)} - \frac{8}{27}n_1 + 2n_2 - \frac{3544}{2565}n_3 + \frac{1859}{4104}n_4 - \frac{11}{40}n_5\right\} \\
n_6 &= hs\left(t_{(n)} + \frac{1}{2}h, y_{1(n)} - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5, y_{2(n)} - \frac{8}{27}l_1 + 2l_2 \right. \\
& \quad \left. - \frac{3544}{2565}l_3 + \frac{1859}{4104}l_4 - \frac{11}{40}l_5, \theta_{1(n)} - \frac{8}{27}m_1 + 2m_2 - \frac{3544}{2565}m_3 + \frac{1859}{4104}m_4 - \frac{11}{40}m_5 \right. \\
& \quad \left. , \theta_{2(n)} - \frac{8}{27}n_1 + 2n_2 - \frac{3544}{2565}n_3 + \frac{1859}{4104}n_4 - \frac{11}{40}n_5\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n_6 = h \left\{ \frac{3K}{ml} \cos \left(\theta_{1(n)} - \frac{8}{27} m_1 + 2m_2 - \frac{3544}{2565} m_3 + \frac{1859}{4104} m_4 - \frac{11}{40} m_5 \right) \right. & \left[\left(\left(y_{1(n)} - \frac{8}{27} k_1 \right. \right. \right. \\
& + 2k_2 - \frac{3544}{2565} k_3 + \frac{1859}{4104} k_4 - \frac{11}{40} k_5 \left. \right) - l \sin \left(\theta_{1(n)} - \frac{8}{27} m_1 + 2m_2 - \frac{3544}{2565} m_3 \right. \\
& + \frac{1859}{4104} m_4 - \frac{11}{40} m_5 \left. \right) \left. \right]^+ - \left[\left(\left(y_{1(n)} - \frac{8}{27} k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565} k_3 + \frac{1859}{4104} k_4 - \frac{11}{40} k_5 \right) \right. \right. \\
& + l \sin \left(\theta_{1(n)} - \frac{8}{27} m_1 + 2m_2 - \frac{3544}{2565} m_3 + \frac{1859}{4104} m_4 - \frac{11}{40} m_5 \right) \left. \right]^+ \left. \right] \\
& - \delta_1 \left(\theta_{2(n)} - \frac{8}{27} n_1 + 2n_2 - \frac{3544}{2565} n_3 + \frac{1859}{4104} n_4 - \frac{11}{40} n_5 \right) + \alpha \sin \left(\mu \left(t_{(n)} + \frac{1}{2} h \right) \right) \left. \right\}.
\end{aligned}$$

Tahap kedua penyelesaian numerik model gerak osilasi vertikal dan torsional (3.7) dengan metode Adams-Bashforth-Moulton terdiri dari tiga jenis, yaitu:

3.3.1 Penyelesaian Numerik dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat

Penyelesaian numerik model gerak osilasi vertikal dan torsional (3.7) menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat terdiri dari beberapa langkah, yaitu:

Langkah 1: Memberikan nilai awal model gerak osilasi vertikal dan torsional.

Misalkan nilai awal untuk model gerak osilasi vertikal dan torsional (3.7) adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
y_1(0) &= y_{1(0)} \\
y_2(0) &= y_{2(0)} \\
\theta_1(0) &= \theta_{1(0)} \\
\theta_2(0) &= \theta_{2(0)}
\end{aligned} \tag{3.45}$$

dengan ukuran langkah h tetap dan $t_{n+1} = t_n + h$.

Langkah 2: Menghitung solusi awal model gerak osilasi vertikal dan torsional.

Pada langkah ini menghitung solusi awal $y_{1(1)}, y_{2(1)}, \theta_{1(1)}, \theta_{2(1)}, y_{1(2)}, y_{2(2)}, \theta_{1(2)}, \theta_{2(2)}, y_{1(3)}, y_{2(3)}, \theta_{1(3)},$ dan $\theta_{2(3)}$ pada sistem persamaan (3.7) menggunakan metode Runge-Kutta-Fehlberg orde lima (3.44).

Langkah 3: Menghitung nilai-nilai $p_n, p_{n-1}, p_{n-2}, p_{n-3}, q_n, q_{n-1}, q_{n-2}, q_{n-3}, r_n, r_{n-1}, r_{n-2}, r_{n-3}, s_n, s_{n-1}, s_{n-2},$ dan s_{n-3}

Setelah memperoleh nilai-nilai solusi awal, maka berdasarkan sistem persamaan (3.7) diperoleh

$$\begin{aligned}
 p_{(n-3)} &= p(t_{(n-3)}, y_{1(n-3)}, y_{2(n-3)}, \theta_{1(n-3)}, \theta_{2(n-3)}) = y_{2(n-3)} \\
 p_{(n-2)} &= p(t_{(n-2)}, y_{1(n-2)}, y_{2(n-2)}, \theta_{1(n-2)}, \theta_{2(n-2)}) = y_{2(n-2)} \\
 p_{(n-1)} &= p(t_{(n-1)}, y_{1(n-1)}, y_{2(n-1)}, \theta_{1(n-1)}, \theta_{2(n-1)}) = y_{2(n-1)} \\
 p_{(n)} &= p(t_{(n)}, y_{1(n)}, y_{2(n)}, \theta_{1(n)}, \theta_{2(n)}) = y_{2(n)} \\
 q_{(n-3)} &= q(t_{(n-3)}, y_{1(n-3)}, y_{2(n-3)}, \theta_{1(n-3)}, \theta_{2(n-3)}) \\
 &= -\frac{K}{m} \left[\left(y_{1(n-3)} - l \sin(\theta_{1(n-3)}) \right)^+ + \left(y_{1(n-3)} + l \sin(\theta_{1(n-3)}) \right)^+ \right] - \delta_2 y_{2(n-3)} + g \\
 q_{(n-2)} &= q(t_{(n-2)}, y_{1(n-2)}, y_{2(n-2)}, \theta_{1(n-2)}, \theta_{2(n-2)}) \\
 &= -\frac{K}{m} \left[\left(y_{1(n-2)} - l \sin(\theta_{1(n-2)}) \right)^+ + \left(y_{1(n-2)} + l \sin(\theta_{1(n-2)}) \right)^+ \right] - \delta_2 y_{2(n-2)} + g \\
 q_{(n-1)} &= q(t_{(n-1)}, y_{1(n-1)}, y_{2(n-1)}, \theta_{1(n-1)}, \theta_{2(n-1)}) \\
 &= -\frac{K}{m} \left[\left(y_{1(n-1)} - l \sin(\theta_{1(n-1)}) \right)^+ + \left(y_{1(n-1)} + l \sin(\theta_{1(n-1)}) \right)^+ \right] - \delta_2 y_{2(n-1)} + g \\
 q_{(n)} &= q(t_{(n)}, y_{1(n)}, y_{2(n)}, \theta_{1(n)}, \theta_{2(n)}) \\
 &= -\frac{K}{m} \left[\left(y_{1(n)} - l \sin(\theta_{1(n)}) \right)^+ + \left(y_{1(n)} + l \sin(\theta_{1(n)}) \right)^+ \right] - \delta_2 y_{2(n)} + g \\
 r_{(n-3)} &= r(t_{(n-3)}, y_{1(n-3)}, y_{2(n-3)}, \theta_{1(n-3)}, \theta_{2(n-3)}) = \theta_{2(n-3)} \\
 r_{(n-2)} &= r(t_{(n-2)}, y_{1(n-2)}, y_{2(n-2)}, \theta_{1(n-2)}, \theta_{2(n-2)}) = \theta_{2(n-2)} \\
 r_{(n-1)} &= r(t_{(n-1)}, y_{1(n-1)}, y_{2(n-1)}, \theta_{1(n-1)}, \theta_{2(n-1)}) = \theta_{2(n-1)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{(n)} &= r(t_{(n)}, y_{1(n)}, y_{2(n)}, \theta_{1(n)}, \theta_{2(n)}) = \theta_{2(n)} \\
s_{(n-3)} &= s(t_{(n-3)}, y_{1(n-3)}, y_{2(n-3)}, \theta_{1(n-3)}, \theta_{2(n-3)}) \\
&= \frac{3K}{ml} \cos(\theta_{1(n-3)}) \left[\left(y_{1(n-3)} - l \sin(\theta_{1(n-3)}) \right)^+ - \left(y_{1(n-3)} + l \sin(\theta_{1(n-3)}) \right)^+ \right] - \delta_1 \theta_{2(n-3)} \\
&\quad + \alpha \sin(\mu t_{(n-3)}) \\
s_{(n-2)} &= s(t_{(n-2)}, y_{1(n-2)}, y_{2(n-2)}, \theta_{1(n-2)}, \theta_{2(n-2)}) \\
&= \frac{3K}{ml} \cos(\theta_{1(n-2)}) \left[\left(y_{1(n-2)} - l \sin(\theta_{1(n-2)}) \right)^+ - \left(y_{1(n-2)} + l \sin(\theta_{1(n-2)}) \right)^+ \right] - \delta_1 \theta_{2(n-2)} \\
&\quad + \alpha \sin(\mu t_{(n-2)}) \\
s_{(n-1)} &= s(t_{(n-1)}, y_{1(n-1)}, y_{2(n-1)}, \theta_{1(n-1)}, \theta_{2(n-1)}) \\
&= \frac{3K}{ml} \cos(\theta_{1(n-1)}) \left[\left(y_{1(n-1)} - l \sin(\theta_{1(n-1)}) \right)^+ - \left(y_{1(n-1)} + l \sin(\theta_{1(n-1)}) \right)^+ \right] - \delta_1 \theta_{2(n-1)} \\
&\quad + \alpha \sin(\mu t_{(n-1)}) \\
s_{(n)} &= s(t_{(n)}, y_{1(n)}, y_{2(n)}, \theta_{1(n)}, \theta_{2(n)}) \\
&= \frac{3K}{ml} \cos(\theta_{1(n)}) \left[\left(y_{1(n)} - l \sin(\theta_{1(n)}) \right)^+ - \left(y_{1(n)} + l \sin(\theta_{1(n)}) \right)^+ \right] - \delta_1 \theta_{2(n)} \\
&\quad + \alpha \sin(\mu t_{(n)})
\end{aligned} \tag{3.46}$$

dengan $n = 3, 4, 5, \dots$

Langkah 4: Menghitung solusi numerik dengan metode Adams-Bashforth

Berdasarkan sistem persamaan (3.46) dan metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat sebagai prediktor (3.8), maka metode Adams-Bashforth orde empat untuk model gerak osilasi vertikal dan torsional adalah

$$\begin{aligned}
y_{1(n+1)}^{(i)} &= y_{1(n)} + \frac{h}{24} (55p_n - 59p_{n-1} + 37p_{n-2} - 9p_{n-3}) \\
&= y_{1(n)} + \frac{h}{24} (55y_{2(n)} - 59y_{2(n-1)} + 37y_{2(n-2)} - 9y_{2(n-3)})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_{2(n+1)}^{(i)} &= y_{2(n)} + \frac{h}{24} (55q_n - 59q_{n-1} + 37q_{n-2} - 9q_{n-3}) \\
&= y_{2(n)} + \frac{h}{24} \left\{ 55 \left(-\frac{K}{m} \left[\left(y_{1(n)} - l \sin(\theta_{1(n)}) \right)^+ + \left(y_{1(n)} + l \sin(\theta_{1(n)}) \right)^+ \right] - \delta_2 y_{2(n)} \right) \right. \\
&\quad - 59 \left(-\frac{K}{m} \left[\left(y_{1(n-1)} - l \sin(\theta_{1(n-1)}) \right)^+ + \left(y_{1(n-1)} + l \sin(\theta_{1(n-1)}) \right)^+ \right] - \delta_2 y_{2(n-1)} \right) \\
&\quad + 37 \left(-\frac{K}{m} \left[\left(y_{1(n-2)} - l \sin(\theta_{1(n-2)}) \right)^+ + \left(y_{1(n-2)} + l \sin(\theta_{1(n-2)}) \right)^+ \right] - \delta_2 y_{2(n-2)} \right) \\
&\quad \left. - 9 \left(-\frac{K}{m} \left[\left(y_{1(n-3)} - l \sin(\theta_{1(n-3)}) \right)^+ + \left(y_{1(n-3)} + l \sin(\theta_{1(n-3)}) \right)^+ \right] - \delta_2 y_{2(n-3)} \right) + 24g \right\} \\
\theta_{1(n+1)}^{(i)} &= \theta_{1(n)} + \frac{h}{24} (55r_n - 59r_{n-1} + 37r_{n-2} - 9r_{n-3}) \\
&= \theta_{1(n)} + \frac{h}{24} (55\theta_{2(n)} - 59\theta_{2(n-1)} + 37\theta_{2(n-2)} - 9\theta_{2(n-3)}) \\
\theta_{2(n+1)}^{(i)} &= \theta_{2(n)} + \frac{h}{24} (55s_n - 59s_{n-1} + 37s_{n-2} - 9s_{n-3}) \\
&= \theta_{2(n)} + \frac{h}{24} \left\{ 55 \left(\frac{3K}{ml} \cos(\theta_{1(n)}) \left[\left(y_{1(n)} - l \sin(\theta_{1(n)}) \right)^+ - \left(y_{1(n)} + l \sin(\theta_{1(n)}) \right)^+ \right] \right. \right. \\
&\quad - \delta_1 \theta_{2(n)} + \alpha \sin(\mu t_{(n)}) \Big) - 59 \left(\frac{3K}{ml} \cos(\theta_{1(n-1)}) \left[\left(y_{1(n-1)} - l \sin(\theta_{1(n-1)}) \right)^+ \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left(y_{1(n-1)} + l \sin(\theta_{1(n-1)}) \right)^+ \right] - \delta_1 \theta_{2(n-1)} + \alpha \sin(\mu t_{(n-1)}) \right) + 37 \left(\frac{3K}{ml} \cos(\theta_{1(n-2)}) \right. \\
&\quad \left. \left[\left(y_{1(n-2)} - l \sin(\theta_{1(n-2)}) \right)^+ - \left(y_{1(n-2)} + l \sin(\theta_{1(n-2)}) \right)^+ \right] - \delta_1 \theta_{2(n-2)} + \alpha \sin(\mu t_{(n-2)}) \right) \\
&\quad \left. - 9 \left(\frac{3K}{ml} \cos(\theta_{1(n-3)}) \left[\left(y_{1(n-3)} - l \sin(\theta_{1(n-3)}) \right)^+ - \left(y_{1(n-3)} + l \sin(\theta_{1(n-3)}) \right)^+ \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \delta_1 \theta_{2(n-3)} + \alpha \sin(\mu t_{(n-3)}) \right) \right\}
\end{aligned} \tag{3.47}$$

dengan $n = 3, 4, 5, \dots$

Langkah 5: Menghitung solusi numerik dengan metode Adams-Moulton

Berdasarkan sistem persamaan (3.46), metode Adams-Bashforth orde empat (3.47), dan metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat sebagai korektor

(3.9), maka metode Adams-Moulton orde empat untuk model gerak osilasi vertikal dan torsional adalah

$$\begin{aligned}
 y_{1(n+1)}^{(i+1)} &= y_{1(n)} + \frac{h}{24} \left(p_{n-2} - 5p_{n-1} + 19p_n + 9p \left(t_{(n+1)}, y_{1(n+1)}^{(i)}, y_{2(n+1)}^{(i)}, \theta_{1(n+1)}^{(i)}, \theta_{2(n+1)}^{(i)} \right) \right) \\
 &= y_{1(n)} + \frac{h}{24} \left(y_{2(n-2)} - 5y_{2(n-1)} + 19y_{2(n)} + 9y_{2(n+1)}^{(i)} \right) \\
 y_{2(n+1)}^{(i+1)} &= y_{2(n)} + \frac{h}{24} \left(q_{n-2} - 5q_{n-1} + 19q_n + 9q \left(t_{(n+1)}, y_{1(n+1)}^{(i)}, y_{2(n+1)}^{(i)}, \theta_{1(n+1)}^{(i)}, \theta_{2(n+1)}^{(i)} \right) \right) \\
 &= y_{2(n)} + \frac{h}{24} \left(\left[-\frac{K}{m} \left[\left(y_{1(n-2)} - l \sin \left(\theta_{1(n-2)} \right) \right)^+ + \left(y_{1(n-2)} + l \sin \left(\theta_{1(n-2)} \right) \right)^+ \right] - \delta_2 y_{2(n-2)} + g \right] \right. \\
 &\quad - 5 \left[-\frac{K}{m} \left[\left(y_{1(n-1)} - l \sin \left(\theta_{1(n-1)} \right) \right)^+ + \left(y_{1(n-1)} + l \sin \left(\theta_{1(n-1)} \right) \right)^+ \right] - \delta_2 y_{2(n-1)} + g \right] \\
 &\quad + 19 \left[-\frac{K}{m} \left[\left(y_{1(n)} - l \sin \left(\theta_{1(n)} \right) \right)^+ + \left(y_{1(n)} + l \sin \left(\theta_{1(n)} \right) \right)^+ \right] - \delta_2 y_{2(n)} + g \right] \\
 &\quad \left. + 9 \left[-\frac{K}{m} \left[\left(y_{1(n+1)}^{(i)} - l \sin \left(\theta_{1(n+1)}^{(i)} \right) \right)^+ + \left(y_{1(n+1)}^{(i)} + l \sin \left(\theta_{1(n+1)}^{(i)} \right) \right)^+ \right] - \delta_2 y_{2(n+1)}^{(i)} + g \right] \right) \\
 \theta_{1(n+1)}^{(i+1)} &= \theta_{1(n)} + \frac{h}{24} \left(r_{n-2} - 5r_{n-1} + 19r_n + 9r \left(t_{(n+1)}, y_{1(n+1)}^{(i)}, y_{2(n+1)}^{(i)}, \theta_{1(n+1)}^{(i)}, \theta_{2(n+1)}^{(i)} \right) \right) \\
 &= \theta_{1(n)} + \frac{h}{24} \left(\theta_{2(n-2)} - 5\theta_{2(n-1)} + 19\theta_{2(n)} + 9\theta_{2(n+1)}^{(i)} \right) \\
 \theta_{2(n+1)}^{(i+1)} &= \theta_{2(n)} + \frac{h}{24} \left(s_{n-2} - 5s_{n-1} + 19s_n + 9s \left(t_{(n+1)}, y_{1(n+1)}^{(i)}, y_{2(n+1)}^{(i)}, \theta_{1(n+1)}^{(i)}, \theta_{2(n+1)}^{(i)} \right) \right) \\
 &= \theta_{2(n)} + \frac{h}{24} \left(\left[\left(\frac{3K}{ml} \cos \left(\theta_{1(n-2)} \right) \right) \left[\left(y_{1(n-2)} - l \sin \left(\theta_{1(n-2)} \right) \right)^+ - \left(y_{1(n-2)} + l \sin \left(\theta_{1(n-2)} \right) \right)^+ \right] \right. \right. \\
 &\quad - \delta_1 \theta_{2(n-2)} + \alpha \sin \left(\mu t_{(n-2)} \right) \left. \right] - 5 \left[\left(\frac{3K}{ml} \cos \left(\theta_{1(n-1)} \right) \right) \left[\left(y_{1(n-1)} - l \sin \left(\theta_{1(n-1)} \right) \right)^+ \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \left(y_{1(n-1)} + l \sin \left(\theta_{1(n-1)} \right) \right)^+ \right] - \delta_1 \theta_{2(n-1)} + \alpha \sin \left(\mu t_{(n-1)} \right) \right] + 19 \left[\left(\frac{3K}{ml} \cos \left(\theta_{1(n)} \right) \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left[\left(y_{1(n)} - l \sin \left(\theta_{1(n)} \right) \right)^+ - \left(y_{1(n)} + l \sin \left(\theta_{1(n)} \right) \right)^+ \right] - \delta_1 \theta_{2(n)} + \alpha \sin \left(\mu t_{(n)} \right) \right] \\
 &\quad + 9 \left[\left(\frac{3K}{ml} \cos \left(\theta_{1(n+1)}^{(i)} \right) \right) \left[\left(y_{1(n+1)}^{(i)} - l \sin \left(\theta_{1(n+1)}^{(i)} \right) \right)^+ - \left(y_{1(n+1)}^{(i)} + l \sin \left(\theta_{1(n+1)}^{(i)} \right) \right)^+ \right] \right. \\
 &\quad \left. \left. - \delta_1 \theta_{2(n+1)}^{(i)} + \alpha \sin \left(\mu t_{(n+1)} \right) \right] \right) \right)
 \end{aligned}
 \tag{3.48}$$

dengan $n = 3, 4, 5, \dots$. Dan iterasi berhenti ketika kondisi

$$\begin{aligned} \frac{|y_{1(n+1)}^{(i+1)} - y_{1(n+1)}^{(i)}|}{|y_{1(n+1)}^{(i+1)}|} &\leq \varepsilon, \\ \frac{|y_{2(n+1)}^{(i+1)} - y_{2(n+1)}^{(i)}|}{|y_{2(n+1)}^{(i+1)}|} &\leq \varepsilon, \\ \frac{|\theta_{1(n+1)}^{(i+1)} - \theta_{1(n+1)}^{(i)}|}{|\theta_{1(n+1)}^{(i+1)}|} &\leq \varepsilon, \end{aligned}$$

dan

$$\frac{|\theta_{2(n+1)}^{(i+1)} - \theta_{2(n+1)}^{(i)}|}{|\theta_{2(n+1)}^{(i+1)}|} \leq \varepsilon \quad (3.49)$$

dengan $i = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ dan ε merupakan kriteria pemberhentian. Jika kondisi (3.49) tidak terpenuhi maka nilai $y_{1(n+1)}^{(i+1)}$, $y_{2(n+1)}^{(i+1)}$, $\theta_{1(n+1)}^{(i+1)}$, dan $\theta_{2(n+1)}^{(i+1)}$ diterima sebagai $y_{1(n+1)}$, $y_{2(n+1)}$, $\theta_{1(n+1)}$ dan $\theta_{2(n+1)}$. Dan secara alami, nilai yang dievaluasi $y_{1(n+1)}$, $y_{2(n+1)}$, $\theta_{1(n+1)}$ dan $\theta_{2(n+1)}$ digunakan pada langkah berikutnya $(n+2)$ yang bertujuan untuk menemukan nilai $y_{1(n+2)} = y_1(t_{n+2})$, $y_{2(n+2)} = y_2(t_{n+2})$, $\theta_{1(n+2)} = \theta_1(t_{n+2})$, dan $\theta_{2(n+2)} = \theta_2(t_{n+2})$ dengan melalui langkah 3. Dan jika kondisi (3.49) terpenuhi maka iterasi berhenti dan perhitungan hasil solusi numerik berhenti pada iterasi sebelumnya.

3.3.2 Penyelesaian Numerik dengan Metode Adas-Bashforth-Moulton Orde Lima

Penyelesaian numerik model gerak osilasi vertikal dan torsional (3.7) menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde lima terdiri dari beberapa langkah, yaitu:

Langkah 1: Memberikan nilai awal model gerak osilasi vertikal dan torsional.

Misalkan nilai awal untuk model gerak osilasi vertikal dan torsional (3.7) adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} y_1(0) &= y_{1(0)} \\ y_2(0) &= y_{2(0)} \\ \theta_1(0) &= \theta_{1(0)} \\ \theta_2(0) &= \theta_{2(0)} \end{aligned} \quad (3.50)$$

dengan ukuran langkah h tetap dan $t_{n+1} = t_n + h$.

Langkah 2: Menghitung solusi awal model gerak osilasi vertikal dan torsional.

Pada langkah ini menghitung solusi awal $y_{1(1)}, y_{2(1)}, \theta_{1(1)}, \theta_{2(1)}, y_{1(2)}, y_{2(2)}, \theta_{1(2)}, \theta_{2(2)}, y_{1(3)}, y_{2(3)}, \theta_{1(3)}, \theta_{2(3)}, y_{1(4)}, y_{2(4)}, \theta_{1(4)},$ dan $\theta_{2(4)}$ pada sistem persamaan (3.7) menggunakan metode Runge-Kutta-Fehlberg orde lima (3.44).

Langkah 3: Menghitung nilai-nilai $p_n, p_{n-1}, p_{n-2}, p_{n-3}, p_{n-4}, q_n, q_{n-1}, q_{n-2}, q_{n-3}, q_{n-4}, r_n, r_{n-1}, r_{n-2}, r_{n-3}, r_{n-4}, s_n, s_{n-1}, s_{n-2}, s_{n-3},$ dan s_{n-4} .

Setelah memperoleh nilai-nilai solusi awal, maka berdasarkan sistem persamaan (3.7) diperoleh

$$\begin{aligned} p_{(n-4)} &= p(t_{(n-4)}, y_{1(n-4)}, y_{2(n-4)}, \theta_{1(n-4)}, \theta_{2(n-4)}) \\ &= y_{2(n-4)} \\ p_{(n-3)} &= p(t_{(n-3)}, y_{1(n-3)}, y_{2(n-3)}, \theta_{1(n-3)}, \theta_{2(n-3)}) \\ &= y_{2(n-3)} \\ p_{(n-2)} &= p(t_{(n-2)}, y_{1(n-2)}, y_{2(n-2)}, \theta_{1(n-2)}, \theta_{2(n-2)}) \\ &= y_{2(n-2)} \\ p_{(n-1)} &= p(t_{(n-1)}, y_{1(n-1)}, y_{2(n-1)}, \theta_{1(n-1)}, \theta_{2(n-1)}) \\ &= y_{2(n-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{(n)} &= p(t_{(n)}, y_{1(n)}, y_{2(n)}, \theta_{1(n)}, \theta_{2(n)}) \\
&= y_{2(n)} \\
q_{(n-4)} &= q(t_{(n-4)}, y_{1(n-4)}, y_{2(n-4)}, \theta_{1(n-4)}, \theta_{2(n-4)}) \\
&= -\frac{K}{m} \left[\left(y_{1(n-4)} - l \sin(\theta_{1(n-4)}) \right)^+ + \left(y_{1(n-4)} + l \sin(\theta_{1(n-4)}) \right)^+ \right] - \delta_2 y_{2(n-4)} + g \\
q_{(n-3)} &= q(t_{(n-3)}, y_{1(n-3)}, y_{2(n-3)}, \theta_{1(n-3)}, \theta_{2(n-3)}) \\
&= -\frac{K}{m} \left[\left(y_{1(n-3)} - l \sin(\theta_{1(n-3)}) \right)^+ + \left(y_{1(n-3)} + l \sin(\theta_{1(n-3)}) \right)^+ \right] - \delta_2 y_{2(n-3)} + g \\
q_{(n-2)} &= q(t_{(n-2)}, y_{1(n-2)}, y_{2(n-2)}, \theta_{1(n-2)}, \theta_{2(n-2)}) \\
&= -\frac{K}{m} \left[\left(y_{1(n-2)} - l \sin(\theta_{1(n-2)}) \right)^+ + \left(y_{1(n-2)} + l \sin(\theta_{1(n-2)}) \right)^+ \right] - \delta_2 y_{2(n-2)} + g \\
q_{(n-1)} &= q(t_{(n-1)}, y_{1(n-1)}, y_{2(n-1)}, \theta_{1(n-1)}, \theta_{2(n-1)}) \\
&= -\frac{K}{m} \left[\left(y_{1(n-1)} - l \sin(\theta_{1(n-1)}) \right)^+ + \left(y_{1(n-1)} + l \sin(\theta_{1(n-1)}) \right)^+ \right] - \delta_2 y_{2(n-1)} + g \\
q_{(n)} &= q(t_{(n)}, y_{1(n)}, y_{2(n)}, \theta_{1(n)}, \theta_{2(n)}) \\
&= -\frac{K}{m} \left[\left(y_{1(n)} - l \sin(\theta_{1(n)}) \right)^+ + \left(y_{1(n)} + l \sin(\theta_{1(n)}) \right)^+ \right] - \delta_2 y_{2(n)} + g \\
r_{(n-4)} &= r(t_{(n-4)}, y_{1(n-4)}, y_{2(n-4)}, \theta_{1(n-4)}, \theta_{2(n-4)}) \\
&= \theta_{2(n-4)} \\
r_{(n-3)} &= r(t_{(n-3)}, y_{1(n-3)}, y_{2(n-3)}, \theta_{1(n-3)}, \theta_{2(n-3)}) \\
&= \theta_{2(n-3)} \\
r_{(n-2)} &= r(t_{(n-2)}, y_{1(n-2)}, y_{2(n-2)}, \theta_{1(n-2)}, \theta_{2(n-2)}) \\
&= \theta_{2(n-2)} \\
r_{(n-1)} &= r(t_{(n-1)}, y_{1(n-1)}, y_{2(n-1)}, \theta_{1(n-1)}, \theta_{2(n-1)}) \\
&= \theta_{2(n-1)} \\
r_{(n)} &= r(t_{(n)}, y_{1(n)}, y_{2(n)}, \theta_{1(n)}, \theta_{2(n)}) \\
&= \theta_{2(n)} \\
s_{(n-4)} &= s(t_{(n-4)}, y_{1(n-4)}, y_{2(n-4)}, \theta_{1(n-4)}, \theta_{2(n-4)}) \\
&= \frac{3K}{ml} \cos(\theta_{1(n-4)}) \left[\left(y_{1(n-4)} - l \sin(\theta_{1(n-4)}) \right)^+ - \left(y_{1(n-4)} + l \sin(\theta_{1(n-4)}) \right)^+ \right] - \delta_1 \theta_{2(n-4)} \\
&\quad + \alpha \sin(\mu t_{(n-4)})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{(n-3)} &= s(t_{(n-3)}, y_{1(n-3)}, y_{2(n-3)}, \theta_{1(n-3)}, \theta_{2(n-3)}) \\
&= \frac{3K}{ml} \cos(\theta_{1(n-3)}) \left[\left(y_{1(n-3)} - l \sin(\theta_{1(n-3)}) \right)^+ - \left(y_{1(n-3)} + l \sin(\theta_{1(n-3)}) \right)^+ \right] - \delta_1 \theta_{2(n-3)} \\
&\quad + \alpha \sin(\mu t_{(n-3)}) \\
s_{(n-2)} &= s(t_{(n-2)}, y_{1(n-2)}, y_{2(n-2)}, \theta_{1(n-2)}, \theta_{2(n-2)}) \\
&= \frac{3K}{ml} \cos(\theta_{1(n-2)}) \left[\left(y_{1(n-2)} - l \sin(\theta_{1(n-2)}) \right)^+ - \left(y_{1(n-2)} + l \sin(\theta_{1(n-2)}) \right)^+ \right] - \delta_1 \theta_{2(n-2)} \\
&\quad + \alpha \sin(\mu t_{(n-2)}) \\
s_{(n-1)} &= s(t_{(n-1)}, y_{1(n-1)}, y_{2(n-1)}, \theta_{1(n-1)}, \theta_{2(n-1)}) \\
&= \frac{3K}{ml} \cos(\theta_{1(n-1)}) \left[\left(y_{1(n-1)} - l \sin(\theta_{1(n-1)}) \right)^+ - \left(y_{1(n-1)} + l \sin(\theta_{1(n-1)}) \right)^+ \right] - \delta_1 \theta_{2(n-1)} \\
&\quad + \alpha \sin(\mu t_{(n-1)}) \\
s_{(n)} &= s(t_{(n)}, y_{1(n)}, y_{2(n)}, \theta_{1(n)}, \theta_{2(n)}) \\
&= \frac{3K}{ml} \cos(\theta_{1(n)}) \left[\left(y_{1(n)} - l \sin(\theta_{1(n)}) \right)^+ - \left(y_{1(n)} + l \sin(\theta_{1(n)}) \right)^+ \right] - \delta_1 \theta_{2(n)} \\
&\quad + \alpha \sin(\mu t_{(n)})
\end{aligned} \tag{3.51}$$

dengan $n = 4, 5, 6, \dots$

Langkah 4: Menghitung solusi numerik dengan metode Adams-Bashforth

Berdasarkan sistem persamaan (3.51) dan metode Adams-Bashforth-Moulton orde lima sebagai prediktor (3.25), maka metode Adams-Bashforth orde lima untuk model gerak osilasi vertikal dan torsional adalah

$$\begin{aligned}
y_{1(n+1)}^{(i)} &= y_{1(n+1)} + \frac{h}{720} (1901p_n - 2774p_{n-1} + 2616p_{n-2} - 1274p_{n-3} + 251p_{n-4}) \\
&= y_{1(n+1)} + \frac{h}{720} (1901y_{2(n)} - 2774y_{2(n-1)} + 2616y_{2(n-2)} - 1274y_{2(n-3)} \\
&\quad + 251y_{2(n-4)})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_{2(n+1)}^{(i)} &= y_{2(n+1)} + \frac{h}{720} (1901q_n - 2774q_{n-1} + 2616q_{n-2} - 1274q_{n-3} + 251q_{n-4}) \\
&= y_{2(n+1)} + \frac{h}{720} \left\{ 1901 \left(-\frac{K}{m} \left[\left(y_{1(n)} - l \sin(\theta_{1(n)}) \right)^+ + \left(y_{1(n)} + l \sin(\theta_{1(n)}) \right)^+ \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \delta_2 y_{2(n)} \right) - 2774 \left(-\frac{K}{m} \left[\left(y_{1(n-1)} - l \sin(\theta_{1(n-1)}) \right)^+ + \left(y_{1(n-1)} + l \sin(\theta_{1(n-1)}) \right)^+ \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \delta_2 y_{2(n-1)} \right) + 2616 \left(-\frac{K}{m} \left[\left(y_{1(n-2)} - l \sin(\theta_{1(n-2)}) \right)^+ + \left(y_{1(n-2)} + l \sin(\theta_{1(n-2)}) \right)^+ \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \delta_2 y_{2(n-2)} \right) - 1274 \left(-\frac{K}{m} \left[\left(y_{1(n-3)} - l \sin(\theta_{1(n-3)}) \right)^+ + \left(y_{1(n-3)} + l \sin(\theta_{1(n-3)}) \right)^+ \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \delta_2 y_{2(n-3)} \right) + 251 \left(-\frac{K}{m} \left[\left(y_{1(n-4)} - l \sin(\theta_{1(n-4)}) \right)^+ + \left(y_{1(n-4)} + l \sin(\theta_{1(n-4)}) \right)^+ \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \delta_2 y_{2(n-4)} \right) + 720g \right\} \\
\theta_{1(n+1)}^{(i)} &= \theta_{1(n+1)} + \frac{h}{720} (1901r_n - 2774r_{n-1} + 2616r_{n-2} - 1274r_{n-3} + 251r_{n-4}) \\
&= \theta_{1(n+1)} + \frac{h}{720} (1901\theta_{2(n)} - 2774\theta_{2(n-1)} + 2616\theta_{2(n-2)} - 1274\theta_{2(n-3)} + 251\theta_{2(n-4)}) \\
\theta_{2(n+1)}^{(i)} &= \theta_{2(n+1)} + \frac{h}{720} (1901s_n - 2774s_{n-1} + 2616s_{n-2} - 1274s_{n-3} + 251s_{n-4}) \\
&= \theta_{2(n+1)} + \frac{h}{720} \left\{ 1901 \left(\frac{3K}{ml} \cos(\theta_{1(n)}) \left[\left(y_{1(n)} - l \sin(\theta_{1(n)}) \right)^+ - \left(y_{1(n)} + l \sin(\theta_{1(n)}) \right)^+ \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \delta_1 \theta_{2(n)} + \alpha \sin(\mu t_{(n)}) \right) - 2774 \left(\frac{3K}{ml} \cos(\theta_{1(n-1)}) \left[\left(y_{1(n-1)} - l \sin(\theta_{1(n-1)}) \right)^+ \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left(y_{1(n-1)} + l \sin(\theta_{1(n-1)}) \right)^+ \right] - \delta_1 \theta_{2(n-1)} + \alpha \sin(\mu t_{(n-1)}) \right) + 2616 \left(\frac{3K}{ml} \cos(\theta_{1(n-2)}) \right. \\
&\quad \left. \left[\left(y_{1(n-2)} - l \sin(\theta_{1(n-2)}) \right)^+ - \left(y_{1(n-2)} + l \sin(\theta_{1(n-2)}) \right)^+ \right] - \delta_1 \theta_{2(n-2)} + \alpha \sin(\mu t_{(n-2)}) \right) \\
&\quad \left. - 1274 \left(\frac{3K}{ml} \cos(\theta_{1(n-3)}) \left[\left(y_{1(n-3)} - l \sin(\theta_{1(n-3)}) \right)^+ - \left(y_{1(n-3)} + l \sin(\theta_{1(n-3)}) \right)^+ \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \delta_1 \theta_{2(n-3)} + \alpha \sin(\mu t_{(n-3)}) \right) + 215 \left(\frac{3K}{ml} \cos(\theta_{1(n-4)}) \left[\left(y_{1(n-4)} - l \sin(\theta_{1(n-4)}) \right)^+ \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left(y_{1(n-4)} + l \sin(\theta_{1(n-4)}) \right)^+ \right] - \delta_1 \theta_{2(n-4)} + \alpha \sin(\mu t_{(n-4)}) \right) \right\}
\end{aligned}$$

(3.52)

dengan $n = 4, 5, 6, \dots$

Langkah 5: Menghitung solusi numerik dengan metode Adams-Moulton

Berdasarkan sistem persamaan (3.51), metode Adams-Bashforth orde lima (3.52), dan metode Adams-Bashforth-Moulton orde lima sebagai korektor (3.26), maka metode Adams-Moulton orde lima untuk model gerak osilasi vertikal dan torsional adalah

$$\begin{aligned}
 y_{1(n+1)}^{(i+1)} &= y_{1(n)} + \frac{h}{720} \left(-19p_{n-3} + 106p_{n-2} - 264p_{n-1} + 646p_n + 251p \left(t_{n+1}, y_{1(n+1)}^{(i)}, y_{2(n+1)}^{(i)}, \theta_{1(n+1)}^{(i)}, \theta_{2(n+1)}^{(i)} \right) \right) \\
 &= y_{1(n)} + \frac{h}{720} \left(-19y_{2(n-3)} + 106y_{2(n-2)} - 264y_{2(n-1)} + 646y_{2(n)} + 251y_{2(n+1)}^{(i)} \right) \\
 y_{2(n+1)}^{(i+1)} &= y_{2(n)} + \frac{h}{720} \left(-19q_{n-3} + 106q_{n-2} - 264q_{n-1} + 646q_n + 251q \left(t_{n+1}, y_{1(n+1)}^{(i)}, y_{2(n+1)}^{(i)}, \theta_{1(n+1)}^{(i)}, \theta_{2(n+1)}^{(i)} \right) \right) \\
 &= y_{2(n)} + \frac{h}{720} \left\{ -19 \left(-\frac{K}{m} \left[\left(y_{1(n-3)} - l \sin(\theta_{1(n-3)}) \right)^+ + \left(y_{1(n-3)} + l \sin(\theta_{1(n-3)}) \right)^+ \right] \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \delta_2 y_{2(n-3)} \right) + 106 \left(-\frac{K}{m} \left[\left(y_{1(n-2)} - l \sin(\theta_{1(n-2)}) \right)^+ + \left(y_{1(n-2)} + l \sin(\theta_{1(n-2)}) \right)^+ \right] \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \delta_2 y_{2(n-2)} \right) - 264 \left(-\frac{K}{m} \left[\left(y_{1(n-1)} - l \sin(\theta_{1(n-1)}) \right)^+ + \left(y_{1(n-1)} + l \sin(\theta_{1(n-1)}) \right)^+ \right] \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \delta_2 y_{2(n-1)} \right) + 646 \left(-\frac{K}{m} \left[\left(y_{1(n)} - l \sin(\theta_{1(n)}) \right)^+ + \left(y_{1(n)} + l \sin(\theta_{1(n)}) \right)^+ \right] \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \delta_2 y_{2(n)} \right) + 251 \left(-\frac{K}{m} \left[\left(y_{1(n+1)}^{(i)} - l \sin(\theta_{1(n+1)}^{(i)}) \right)^+ + \left(y_{1(n+1)}^{(i)} + l \sin(\theta_{1(n+1)}^{(i)}) \right)^+ \right] \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \delta_2 y_{2(n+1)}^{(i)} \right) + 720g \right\} \\
 \theta_{1(n+1)}^{(i+1)} &= \theta_{1(n)} + \frac{h}{720} \left(-19r_{n-3} + 106r_{n-2} - 264r_{n-1} + 646r_n + 251r \left(t_{n+1}, y_{1(n+1)}^{(i)}, y_{2(n+1)}^{(i)}, \theta_{1(n+1)}^{(i)}, \theta_{2(n+1)}^{(i)} \right) \right) \\
 &= \theta_{1(n)} + \frac{h}{720} \left(-19\theta_{2(n-3)} + 106\theta_{2(n-2)} - 264\theta_{2(n-1)} + 646\theta_{2(n)} + 251\theta_{2(n+1)}^{(i)} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_{2(n+1)}^{(i+1)} &= \theta_{2(n)} + \frac{h}{720} \left(-19s_{n-3} + 106s_{n-2} - 264s_{n-1} + 646s_n + 251s \left(t_{n+1}, y_{1(n+1)}^{(i)}, y_{2(n+1)}^{(i)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. , \theta_{1(n+1)}^{(i)}, \theta_{2(n+1)}^{(i)} \right) \right) \\
&= \theta_{2(n)} + \frac{h}{720} \left\{ -19 \left(\frac{3K}{ml} \cos(\theta_{1(n-3)}) \left[\left(y_{1(n-3)} - l \sin(\theta_{1(n-3)}) \right)^+ \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left(y_{1(n-3)} + l \sin(\theta_{1(n-3)}) \right)^+ \right] - \delta_1 \theta_{2(n-3)} + \alpha \sin(\mu t_{(n-3)}) \right) + 106 \left(\frac{3K}{ml} \cos(\theta_{1(n-2)}) \right. \\
&\quad \left. \left[\left(y_{1(n-2)} - l \sin(\theta_{1(n-2)}) \right)^+ - \left(y_{1(n-2)} + l \sin(\theta_{1(n-2)}) \right)^+ \right] - \delta_1 \theta_{2(n-2)} + \alpha \sin(\mu t_{(n-2)}) \right) \\
&\quad - 264 \left(\frac{3K}{ml} \cos(\theta_{1(n-1)}) \left[\left(y_{1(n-1)} - l \sin(\theta_{1(n-1)}) \right)^+ - \left(y_{1(n-1)} + l \sin(\theta_{1(n-1)}) \right)^+ \right] \right. \\
&\quad \left. - \delta_1 \theta_{2(n-1)} + \alpha \sin(\mu t_{(n-1)}) \right) + 646 \left(\frac{3K}{ml} \cos(\theta_{1(n)}) \left[\left(y_{1(n)} - l \sin(\theta_{1(n)}) \right)^+ \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left(y_{1(n)} + l \sin(\theta_{1(n)}) \right)^+ \right] - \delta_1 \theta_{2(n)} + \alpha \sin(\mu t_{(n)}) \right) + 251 \left(\frac{3K}{ml} \cos(\theta_{1(n+1)}^{(i)}) \right. \\
&\quad \left. \left[\left(y_{1(n+1)}^{(i)} - l \sin(\theta_{1(n+1)}^{(i)}) \right)^+ - \left(y_{1(n+1)}^{(i)} + l \sin(\theta_{1(n+1)}^{(i)}) \right)^+ \right] - \delta_1 \theta_{2(n+1)}^{(i)} + \alpha \sin(\mu t_{(n+1)}) \right) \right\}
\end{aligned} \tag{3.53}$$

dengan $n = 3, 4, 5, \dots$. Dan iterasi berhenti ketika kondisi

$$\begin{aligned}
\frac{|y_{1(n+1)}^{(i+1)} - y_{1(n+1)}^{(i)}|}{|y_{1(n+1)}^{(i+1)}|} &\leq \varepsilon, \\
\frac{|y_{2(n+1)}^{(i+1)} - y_{2(n+1)}^{(i)}|}{|y_{2(n+1)}^{(i+1)}|} &\leq \varepsilon, \\
\frac{|\theta_{1(n+1)}^{(i+1)} - \theta_{1(n+1)}^{(i)}|}{|\theta_{1(n+1)}^{(i+1)}|} &\leq \varepsilon,
\end{aligned}$$

dan

$$\frac{|\theta_{2(n+1)}^{(i+1)} - \theta_{2(n+1)}^{(i)}|}{|\theta_{2(n+1)}^{(i+1)}|} \leq \varepsilon \tag{3.54}$$

dengan $i = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ dan ε merupakan kriteria pemberhentian. Jika kondisi (3.54) tidak terpenuhi maka nilai $y_{1(n+1)}^{(i+1)}$, $y_{2(n+1)}^{(i+1)}$, $\theta_{1(n+1)}^{(i+1)}$, dan $\theta_{2(n+1)}^{(i+1)}$ diterima sebagai $y_{1(n+1)}$, $y_{2(n+1)}$, $\theta_{1(n+1)}$ dan $\theta_{2(n+1)}$. Dan secara alami, nilai yang dievaluasi $y_{1(n+1)}$, $y_{2(n+1)}$, $\theta_{1(n+1)}$ dan $\theta_{2(n+1)}$ digunakan pada langkah berikutnya $(n+2)$ yang bertujuan untuk menemukan nilai $y_{1(n+2)} = y_1(t_{n+2})$, $y_{2(n+2)} = y_2(t_{n+2})$, $\theta_{1(n+2)} = \theta_1(t_{n+2})$, dan $\theta_{2(n+2)} = \theta_2(t_{n+2})$ dengan melalui langkah 3. Dan jika kondisi (3.54) terpenuhi maka iterasi berhenti dan perhitungan hasil solusi numerik berhenti pada iterasi sebelumnya.

3.3.3 Penyelesaian Numerik dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam

Penyelesaian model gerak osilasi vertikal dan torsional (3.7) menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde enam terdiri dari beberapa langkah, yaitu:

Langkah 1: Memberikan nilai awal model gerak osilasi vertikal dan torsional.

Misalkan nilai awal untuk model gerak osilasi vertikal dan torsional (3.7) adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} y_1(0) &= y_{1(0)} \\ y_2(0) &= y_{2(0)} \\ \theta_1(0) &= \theta_{1(0)} \\ \theta_2(0) &= \theta_{2(0)} \end{aligned} \tag{3.55}$$

dengan ukuran langkah h tetap dan $t_{n+1} = t_n + h$.

Langkah 2: Menghitung solusi awal model gerak osilasi vertikal dan torsional.

Pada langkah ini menghitung solusi awal $y_{1(1)}$, $y_{2(1)}$, $\theta_{1(1)}$, $\theta_{2(1)}$, $y_{1(2)}$, $y_{2(2)}$, $\theta_{1(2)}$, $\theta_{2(2)}$, $y_{1(3)}$, $y_{2(3)}$, $\theta_{1(3)}$, $\theta_{2(3)}$, $y_{1(4)}$, $y_{2(4)}$, $\theta_{1(4)}$, $\theta_{2(4)}$, $y_{1(5)}$, $y_{2(5)}$, $\theta_{1(5)}$,

dan $\theta_{2(5)}$ pada sistem persamaan (3.7) menggunakan metode Runge-Kutta-Fehlberg orde lima (3.44).

Langkah 3: Menghitung nilai-nilai $p_n, p_{n-1}, p_{n-2}, p_{n-3}, p_{n-4}, p_{n-5}, q_n, q_{n-1}, q_{n-2}, q_{n-3}, q_{n-4}, q_{n-5}, r_n, r_{n-1}, r_{n-2}, r_{n-3}, r_{n-4}, r_{n-5}, s_n, s_{n-1}, s_{n-2}, s_{n-3}, s_{n-4},$ dan s_{n-5} .

Setelah memperoleh nilai-nilai solusi awal, maka berdasarkan sistem persamaan (3.7) diperoleh

$$\begin{aligned}
 p_{(n-5)} &= p(t_{(n-5)}, y_{1(n-5)}, y_{2(n-5)}, \theta_{1(n-5)}, \theta_{2(n-5)}) \\
 &= y_{2(n-5)} \\
 p_{(n-4)} &= p(t_{(n-4)}, y_{1(n-4)}, y_{2(n-4)}, \theta_{1(n-4)}, \theta_{2(n-4)}) \\
 &= y_{2(n-4)} \\
 p_{(n-3)} &= p(t_{(n-3)}, y_{1(n-3)}, y_{2(n-3)}, \theta_{1(n-3)}, \theta_{2(n-3)}) \\
 &= y_{2(n-3)} \\
 p_{(n-2)} &= p(t_{(n-2)}, y_{1(n-2)}, y_{2(n-2)}, \theta_{1(n-2)}, \theta_{2(n-2)}) \\
 &= y_{2(n-2)} \\
 p_{(n-1)} &= p(t_{(n-1)}, y_{1(n-1)}, y_{2(n-1)}, \theta_{1(n-1)}, \theta_{2(n-1)}) \\
 &= y_{2(n-1)} \\
 p_{(n)} &= p(t_{(n)}, y_{1(n)}, y_{2(n)}, \theta_{1(n)}, \theta_{2(n)}) \\
 &= y_{2(n)} \\
 q_{(n-5)} &= q(t_{(n-5)}, y_{1(n-5)}, y_{2(n-5)}, \theta_{1(n-5)}, \theta_{2(n-5)}) \\
 &= -\frac{K}{m} \left[\left(y_{1(n-5)} - l \sin(\theta_{1(n-5)}) \right)^+ + \left(y_{1(n-5)} + l \sin(\theta_{1(n-5)}) \right)^+ \right] - \delta_2 y_{2(n-5)} + g \\
 q_{(n-4)} &= q(t_{(n-4)}, y_{1(n-4)}, y_{2(n-4)}, \theta_{1(n-4)}, \theta_{2(n-4)}) \\
 &= -\frac{K}{m} \left[\left(y_{1(n-4)} - l \sin(\theta_{1(n-4)}) \right)^+ + \left(y_{1(n-4)} + l \sin(\theta_{1(n-4)}) \right)^+ \right] - \delta_2 y_{2(n-4)} + g
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_{(n-3)} &= q(t_{(n-3)}, y_{1(n-3)}, y_{2(n-3)}, \theta_{1(n-3)}, \theta_{2(n-3)}) \\
 &= -\frac{K}{m} \left[\left(y_{1(n-3)} - l \sin(\theta_{1(n-3)}) \right)^+ + \left(y_{1(n-3)} + l \sin(\theta_{1(n-3)}) \right)^+ \right] - \delta_2 y_{2(n-3)} + g
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_{(n-2)} &= q(t_{(n-2)}, y_{1(n-2)}, y_{2(n-2)}, \theta_{1(n-2)}, \theta_{2(n-2)}) \\
 &= -\frac{K}{m} \left[\left(y_{1(n-2)} - l \sin(\theta_{1(n-2)}) \right)^+ + \left(y_{1(n-2)} + l \sin(\theta_{1(n-2)}) \right)^+ \right] - \delta_2 y_{2(n-2)} + g
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_{(n-1)} &= q(t_{(n-1)}, y_{1(n-1)}, y_{2(n-1)}, \theta_{1(n-1)}, \theta_{2(n-1)}) \\
 &= -\frac{K}{m} \left[\left(y_{1(n-1)} - l \sin(\theta_{1(n-1)}) \right)^+ + \left(y_{1(n-1)} + l \sin(\theta_{1(n-1)}) \right)^+ \right] - \delta_2 y_{2(n-1)} + g
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_{(n)} &= q(t_{(n)}, y_{1(n)}, y_{2(n)}, \theta_{1(n)}, \theta_{2(n)}) \\
 &= -\frac{K}{m} \left[\left(y_{1(n)} - l \sin(\theta_{1(n)}) \right)^+ + \left(y_{1(n)} + l \sin(\theta_{1(n)}) \right)^+ \right] - \delta_2 y_{2(n)} + g
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r_{(n-5)} &= r(t_{(n-5)}, y_{1(n-5)}, y_{2(n-5)}, \theta_{1(n-5)}, \theta_{2(n-5)}) \\
 &= \theta_{2(n-5)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r_{(n-4)} &= r(t_{(n-4)}, y_{1(n-4)}, y_{2(n-4)}, \theta_{1(n-4)}, \theta_{2(n-4)}) \\
 &= \theta_{2(n-4)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r_{(n-3)} &= r(t_{(n-3)}, y_{1(n-3)}, y_{2(n-3)}, \theta_{1(n-3)}, \theta_{2(n-3)}) \\
 &= \theta_{2(n-3)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r_{(n-2)} &= r(t_{(n-2)}, y_{1(n-2)}, y_{2(n-2)}, \theta_{1(n-2)}, \theta_{2(n-2)}) \\
 &= \theta_{2(n-2)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r_{(n-1)} &= r(t_{(n-1)}, y_{1(n-1)}, y_{2(n-1)}, \theta_{1(n-1)}, \theta_{2(n-1)}) \\
 &= \theta_{2(n-1)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r_{(n)} &= r(t_{(n)}, y_{1(n)}, y_{2(n)}, \theta_{1(n)}, \theta_{2(n)}) \\
 &= \theta_{2(n)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 s_{(n-5)} &= s(t_{(n-5)}, y_{1(n-5)}, y_{2(n-5)}, \theta_{1(n-5)}, \theta_{2(n-5)}) \\
 &= \frac{3K}{ml} \cos(\theta_{1(n-5)}) \left[\left(y_{1(n-5)} - l \sin(\theta_{1(n-5)}) \right)^+ - \left(y_{1(n-5)} + l \sin(\theta_{1(n-5)}) \right)^+ \right] - \delta_1 \theta_{2(n-5)} \\
 &\quad + \alpha \sin(\mu t_{(n-5)})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 s_{(n-4)} &= s(t_{(n-4)}, y_{1(n-4)}, y_{2(n-4)}, \theta_{1(n-4)}, \theta_{2(n-4)}) \\
 &= \frac{3K}{ml} \cos(\theta_{1(n-4)}) \left[\left(y_{1(n-4)} - l \sin(\theta_{1(n-4)}) \right)^+ - \left(y_{1(n-4)} + l \sin(\theta_{1(n-4)}) \right)^+ \right] - \delta_1 \theta_{2(n-4)} \\
 &\quad + \alpha \sin(\mu t_{(n-4)})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{(n-3)} &= s(t_{(n-3)}, y_{1(n-3)}, y_{2(n-3)}, \theta_{1(n-3)}, \theta_{2(n-3)}) \\
&= \frac{3K}{ml} \cos(\theta_{1(n-3)}) \left[\left(y_{1(n-3)} - l \sin(\theta_{1(n-3)}) \right)^+ - \left(y_{1(n-3)} + l \sin(\theta_{1(n-3)}) \right)^+ \right] - \delta_1 \theta_{2(n-3)} \\
&\quad + \alpha \sin(\mu t_{(n-3)}) \\
s_{(n-2)} &= s(t_{(n-2)}, y_{1(n-2)}, y_{2(n-2)}, \theta_{1(n-2)}, \theta_{2(n-2)}) \\
&= \frac{3K}{ml} \cos(\theta_{1(n-2)}) \left[\left(y_{1(n-2)} - l \sin(\theta_{1(n-2)}) \right)^+ - \left(y_{1(n-2)} + l \sin(\theta_{1(n-2)}) \right)^+ \right] - \delta_1 \theta_{2(n-2)} \\
&\quad + \alpha \sin(\mu t_{(n-2)}) \\
s_{(n-1)} &= s(t_{(n-1)}, y_{1(n-1)}, y_{2(n-1)}, \theta_{1(n-1)}, \theta_{2(n-1)}) \\
&= \frac{3K}{ml} \cos(\theta_{1(n-1)}) \left[\left(y_{1(n-1)} - l \sin(\theta_{1(n-1)}) \right)^+ - \left(y_{1(n-1)} + l \sin(\theta_{1(n-1)}) \right)^+ \right] - \delta_1 \theta_{2(n-1)} \\
&\quad + \alpha \sin(\mu t_{(n-1)}) \\
s_{(n)} &= s(t_{(n)}, y_{1(n)}, y_{2(n)}, \theta_{1(n)}, \theta_{2(n)}) \\
&= \frac{3K}{ml} \cos(\theta_{1(n)}) \left[\left(y_{1(n)} - l \sin(\theta_{1(n)}) \right)^+ - \left(y_{1(n)} + l \sin(\theta_{1(n)}) \right)^+ \right] - \delta_1 \theta_{2(n)} \\
&\quad + \alpha \sin(\mu t_{(n)})
\end{aligned} \tag{3.56}$$

dengan $n = 5, 6, 7, \dots$

Langkah 4: Menghitung solusi numerik dengan metode Adams-Bashforth

Berdasarkan sistem persamaan (3.56) dan metode Adams-Bashforth-Moulton orde lima sebagai prediktor (3.42), maka metode Adams-Bashforth orde enam untuk model gerak osilasi vertikal dan torsional adalah

$$\begin{aligned}
y_{1(n+1)}^{(i)} &= y_{1(n)} + \frac{h}{1440} (4274p_n - 7908p_{n-1} + 9952p_{n-2} - 7268p_{n-3} + 2862p_{n-4} - 472p_{n-5}) \\
&= y_{1(n)} + \frac{h}{1440} (4274y_{2(n)} - 7908y_{2(n-1)} + 9952y_{2(n-2)} - 7268y_{2(n-3)} \\
&\quad + 2862y_{2(n-4)} - 472y_{2(n-5)}) \\
y_{2(n+1)}^{(i)} &= y_{2(n)} + \frac{h}{1440} (4274q_n - 7908q_{n-1} + 9952q_{n-2} - 7268q_{n-3} + 2862q_{n-4} - 472q_{n-5}) \\
&= y_{2(n)} + \frac{h}{1440} \left\{ 4274 \left(-\frac{K}{m} \left[\left(y_{1(n)} - l \sin(\theta_{1(n)}) \right)^+ + \left(y_{1(n)} + l \sin(\theta_{1(n)}) \right)^+ \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \delta_2 y_{2(n)} \right) - 7908 \left(-\frac{K}{m} \left[\left(y_{1(n-1)} - l \sin(\theta_{1(n-1)}) \right)^+ + \left(y_{1(n-1)} + l \sin(\theta_{1(n-1)}) \right)^+ \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \delta_2 y_{2(n-1)} \right) + 9952 \left(-\frac{K}{m} \left[\left(y_{1(n-2)} - l \sin(\theta_{1(n-2)}) \right)^+ + \left(y_{1(n-2)} + l \sin(\theta_{1(n-2)}) \right)^+ \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \delta_2 y_{2(n-2)} \right) - 7268 \left(-\frac{K}{m} \left[\left(y_{1(n-3)} - l \sin(\theta_{1(n-3)}) \right)^+ + \left(y_{1(n-3)} + l \sin(\theta_{1(n-3)}) \right)^+ \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \delta_2 y_{2(n-3)} \right) + 2862 \left(-\frac{K}{m} \left[\left(y_{1(n-4)} - l \sin(\theta_{1(n-4)}) \right)^+ + \left(y_{1(n-4)} + l \sin(\theta_{1(n-4)}) \right)^+ \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \delta_2 y_{2(n-4)} \right) - 472 \left(-\frac{K}{m} \left[\left(y_{1(n-5)} - l \sin(\theta_{1(n-5)}) \right)^+ + \left(y_{1(n-5)} + l \sin(\theta_{1(n-5)}) \right)^+ \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \delta_2 y_{2(n-5)} \right) + 1440g \right\} \\
\theta_{1(n+1)}^{(i)} &= \theta_{1(n)} + \frac{h}{1440} (4274r_n - 7908r_{n-1} + 9952r_{n-2} - 7268r_{n-3} + 2862r_{n-4} - 472r_{n-5}) \\
&= \theta_{1(n)} + \frac{h}{1440} (4274\theta_{2(n)} - 7908\theta_{2(n-1)} + 9952\theta_{2(n-2)} - 7268\theta_{2(n-3)} \\
&\quad + 2862\theta_{2(n-4)} - 472\theta_{2(n-5)})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_{2(n+1)}^{(i)} &= \theta_{2(n)} + \frac{h}{1440} (4274s_n - 7908s_{n-1} + 9952s_{n-2} - 7268s_{n-3} + 2862s_{n-4} - 472s_{n-5}) \\
\theta_{2(n+1)}^{(i)} &= \theta_{2(n)} + \frac{h}{1440} \left\{ 4274 \left(\frac{3K}{ml} \cos(\theta_{1(n)}) \left[\left(y_{1(n)} - l \sin(\theta_{1(n)}) \right)^+ - \left(y_{1(n)} + l \sin(\theta_{1(n)}) \right)^+ \right] \right. \right. \\
&\quad - \delta_1 \theta_{2(n)} + \alpha \sin(\mu t_{(n)}) \Big) - 7908 \left(\frac{3K}{ml} \cos(\theta_{1(n-1)}) \left[\left(y_{1(n-1)} - l \sin(\theta_{1(n-1)}) \right)^+ \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left(y_{1(n-1)} + l \sin(\theta_{1(n-1)}) \right)^+ \right] - \delta_1 \theta_{2(n-1)} + \alpha \sin(\mu t_{(n-1)}) \right) + 9952 \left(\frac{3K}{ml} \cos(\theta_{1(n-2)}) \right. \\
&\quad \left. \left[\left(y_{1(n-2)} - l \sin(\theta_{1(n-2)}) \right)^+ - \left(y_{1(n-2)} + l \sin(\theta_{1(n-2)}) \right)^+ \right] - \delta_1 \theta_{2(n-2)} + \alpha \sin(\mu t_{(n-2)}) \right) \\
&\quad - 7268 \left(\frac{3K}{ml} \cos(\theta_{1(n-3)}) \left[\left(y_{1(n-3)} - l \sin(\theta_{1(n-3)}) \right)^+ - \left(y_{1(n-3)} + l \sin(\theta_{1(n-3)}) \right)^+ \right] \right. \\
&\quad \left. - \delta_1 \theta_{2(n-3)} + \alpha \sin(\mu t_{(n-3)}) \right) + 2862 \left(\frac{3K}{ml} \cos(\theta_{1(n-4)}) \left[\left(y_{1(n-4)} - l \sin(\theta_{1(n-4)}) \right)^+ \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left(y_{1(n-4)} + l \sin(\theta_{1(n-4)}) \right)^+ \right] - \delta_1 \theta_{2(n-4)} + \alpha \sin(\mu t_{(n-4)}) \right) - 472 \left(\frac{3K}{ml} \cos(\theta_{1(n-5)}) \right. \\
&\quad \left. \left[\left(y_{1(n-5)} - l \sin(\theta_{1(n-5)}) \right)^+ - \left(y_{1(n-5)} + l \sin(\theta_{1(n-5)}) \right)^+ \right] - \delta_1 \theta_{2(n-5)} + \alpha \sin(\mu t_{(n-5)}) \right) \Big\}
\end{aligned} \tag{3.57}$$

dengan $n = 5, 6, 7, \dots$

Langkah 5: Menghitung solusi numerik dengan metode Adams-Moulton

Berdasarkan sistem persamaan (3.56), metode Adams-Bashforth orde enam (3.57), dan metode Adams-Bashforth-Moulton orde enam sebagai korektor (3.43), maka metode Adams-Moulton orde enam untuk model gerak osilasi vertikal dan torsional adalah

$$\begin{aligned}
y_{1(n+1)}^{(i+1)} &= y_{1(n)} + \frac{h}{1440} (27p_{n-4} - 173p_{n-3} + 482p_{n-2} - 798p_{n-1} + 1427p_n + 475p(t_{n+1} \\
&\quad , y_{1(n+1)}^{(i)}, y_{2(n+1)}^{(i)}, \theta_{1(n+1)}^{(i)}, \theta_{2(n+1)}^{(i)})) \\
&= y_{1(n)} + \frac{h}{1440} (27y_{2(n-4)} - 173y_{2(n-3)} + 482y_{2(n-2)} - 798y_{2(n-1)} + 1427y_{2(n)} \\
&\quad + 475y_{2(n+1)}^{(i)})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_{2(n+1)}^{(i+1)} &= y_{2(n)} + \frac{h}{1440} (27q_{n-4} - 173q_{n-3} + 482q_{n-2} - 798q_{n-1} + 1427q_n + 475q(t_{n+1} \\
&\quad , y_{1(n+1)}^{(i)}, y_{2(n+1)}^{(i)}, \theta_{1(n+1)}^{(i)}, \theta_{2(n+1)}^{(i)})) \\
&= y_{2(n)} + \frac{h}{1440} \left\{ 27 \left(-\frac{K}{m} \left[\left(y_{1(n-4)} - l \sin(\theta_{1(n-4)}) \right)^+ + \left(y_{1(n-4)} + l \sin(\theta_{1(n-4)}) \right)^+ \right] \right. \right. \\
&\quad - \delta_2 y_{2(n-4)} - 173 \left(-\frac{K}{m} \left[\left(y_{1(n-3)} - l \sin(\theta_{1(n-3)}) \right)^+ + \left(y_{1(n-3)} + l \sin(\theta_{1(n-3)}) \right)^+ \right] \right. \\
&\quad - \delta_2 y_{2(n-3)} + 482 \left(-\frac{K}{m} \left[\left(y_{1(n-2)} - l \sin(\theta_{1(n-2)}) \right)^+ + \left(y_{1(n-2)} + l \sin(\theta_{1(n-2)}) \right)^+ \right] \right. \\
&\quad - \delta_2 y_{2(n-2)} - 798 \left(-\frac{K}{m} \left[\left(y_{1(n-1)} - l \sin(\theta_{1(n-1)}) \right)^+ + \left(y_{1(n-1)} + l \sin(\theta_{1(n-1)}) \right)^+ \right] \right. \\
&\quad - \delta_2 y_{2(n-1)} + 1427 \left(-\frac{K}{m} \left[\left(y_{1(n)} - l \sin(\theta_{1(n)}) \right)^+ + \left(y_{1(n)} + l \sin(\theta_{1(n)}) \right)^+ \right] - \delta_2 y_{2(n)} \right. \\
&\quad + 475 \left(-\frac{K}{m} \left[\left(y_{1(n+1)}^{(i)} - l \sin(\theta_{1(n+1)}^{(i)}) \right)^+ + \left(y_{1(n+1)}^{(i)} + l \sin(\theta_{1(n+1)}^{(i)}) \right)^+ \right] - \delta_2 y_{2(n+1)}^{(i)} \right) \\
&\quad \left. \left. + 1440g \right\} \\
\theta_{1(n+1)}^{(i+1)} &= \theta_{1(n)} + \frac{h}{1440} (27r_{n-4} - 173r_{n-3} + 482r_{n-2} - 798r_{n-1} + 1427r_n + 475r(t_{n+1} \\
&\quad , y_{1(n+1)}^{(i)}, y_{2(n+1)}^{(i)}, \theta_{1(n+1)}^{(i)}, \theta_{2(n+1)}^{(i)})) \\
&= \theta_{1(n)} + \frac{h}{1440} (27\theta_{2(n-4)} - 173\theta_{2(n-3)} + 482\theta_{2(n-2)} - 798\theta_{2(n-1)} + 1427\theta_{2(n)} \\
&\quad + 475\theta_{2(n+1)}^{(i)}) \\
\theta_{2(n+1)}^{(i+1)} &= \theta_{2(n)} + \frac{h}{1440} (27r_{n-4} - 173r_{n-3} + 482r_{n-2} - 798r_{n-1} + 1427r_n + 475r(t_{n+1} \\
&\quad , y_{1(n+1)}^{(i)}, y_{2(n+1)}^{(i)}, \theta_{1(n+1)}^{(i)}, \theta_{2(n+1)}^{(i)})) \\
&= \theta_{2(n)} + \frac{h}{1440} \left\{ 27 \left(\frac{3K}{ml} \cos(\theta_{1(n-4)}) \left[\left(y_{1(n-4)} - l \sin(\theta_{1(n-4)}) \right)^+ \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left(y_{1(n-4)} + l \sin(\theta_{1(n-4)}) \right)^+ \right] - \delta_1 \theta_{2(n-4)} + \alpha \sin(\mu t_{(n-4)}) \right) - 173 \left(\frac{3K}{ml} \cos(\theta_{1(n-3)}) \right. \\
&\quad \left. \left[\left(y_{1(n-3)} - l \sin(\theta_{1(n-3)}) \right)^+ - \left(y_{1(n-3)} + l \sin(\theta_{1(n-3)}) \right)^+ \right] - \delta_1 \theta_{2(n-3)} + \alpha \sin(\mu t_{(n-3)}) \right) \\
&\quad \left. + 482 \left(\frac{3K}{ml} \cos(\theta_{1(n-2)}) \left[\left(y_{1(n-2)} - l \sin(\theta_{1(n-2)}) \right)^+ - \left(y_{1(n-2)} + l \sin(\theta_{1(n-2)}) \right)^+ \right] \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\delta_1 \theta_{2(n-2)} + \alpha \sin(\mu t_{(n-2)}) - 798 \left(\frac{3K}{ml} \cos(\theta_{1(n-1)}) \right) \left[\left(y_{1(n-1)} - l \sin(\theta_{1(n-1)}) \right)^+ \right. \\
& \left. - \left(y_{1(n-1)} + l \sin(\theta_{1(n-1)}) \right)^+ \right] - \delta_1 \theta_{2(n-1)} + \alpha \sin(\mu t_{(n-1)}) + 1427 \left(\frac{3K}{ml} \cos(\theta_{1(n)}) \right) \\
& \left[\left(y_{1(n)} - l \sin(\theta_{1(n)}) \right)^+ - \left(y_{1(n)} + l \sin(\theta_{1(n)}) \right)^+ \right] - \delta_1 \theta_{2(n)} + \alpha \sin(\mu t_{(n)}) \\
& + 475 \left(\frac{3K}{ml} \cos(\theta_{1(n+1)}^{(i)}) \right) \left[\left(y_{1(n+1)}^{(i)} - l \sin(\theta_{1(n+1)}^{(i)}) \right)^+ - \left(y_{1(n+1)}^{(i)} + l \sin(\theta_{1(n+1)}^{(i)}) \right)^+ \right] \\
& \left. - \delta_1 \theta_{2(n+1)}^{(i)} + \alpha \sin(\mu t_{(n+1)}) \right\}
\end{aligned} \tag{3.58}$$

dengan $n = 3, 4, 5, \dots$. Dan iterasi berhenti ketika kondisi

$$\begin{aligned}
& \frac{|y_{1(n+1)}^{(i+1)} - y_{1(n+1)}^{(i)}|}{|y_{1(n+1)}^{(i+1)}|} \leq \varepsilon, \\
& \frac{|y_{2(n+1)}^{(i+1)} - y_{2(n+1)}^{(i)}|}{|y_{2(n+1)}^{(i+1)}|} \leq \varepsilon, \\
& \frac{|\theta_{1(n+1)}^{(i+1)} - \theta_{1(n+1)}^{(i)}|}{|\theta_{1(n+1)}^{(i+1)}|} \leq \varepsilon,
\end{aligned}$$

dan

$$\frac{|\theta_{2(n+1)}^{(i+1)} - \theta_{2(n+1)}^{(i)}|}{|\theta_{2(n+1)}^{(i+1)}|} \leq \varepsilon \tag{3.59}$$

dengan $i = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ dan ε merupakan kriteria pemberhentian. Jika kondisi

(3.59) tidak terpenuhi maka nilai $y_{1(n+1)}^{(i+1)}$, $y_{2(n+1)}^{(i+1)}$, $\theta_{1(n+1)}^{(i+1)}$, dan $\theta_{2(n+1)}^{(i+1)}$ diterima sebagai

$y_{1(n+1)}$, $y_{2(n+1)}$, $\theta_{1(n+1)}$ dan $\theta_{2(n+1)}$. Dan secara alami, nilai yang dievaluasi $y_{1(n+1)}$, $y_{2(n+1)}$, $\theta_{1(n+1)}$ dan $\theta_{2(n+1)}$ digunakan pada langkah berikutnya $(n+2)$ yang bertujuan untuk menemukan nilai $y_{1(n+2)} = y_1(t_{n+2})$, $y_{2(n+2)} = y_2(t_{n+2})$, $\theta_{1(n+2)} = \theta_1(t_{n+2})$, dan

$\theta_{2(n+2)} = \theta_2(t_{n+2})$ dengan melalui langkah 3. Dan jika kondisi (3.59) terpenuhi maka iterasi berhenti dan perhitungan hasil solusi numerik berhenti pada iterasi sebelumnya.

3.4 Simulasi Numerik Model Gerak Osilasi Vertikal dan Torsional

Simulasi mengenai hasil numerik pada model gerak osilasi vertikal dan torsional dibahas pada subbab ini. Untuk simulasi numerik model gerak osilasi vertikal dan torsional menggunakan nilai parameter sebagai berikut (Kwofie, 2012):

Tabel 3.1 Parameter Model Gerak Osilasi Vertikal dan Torsi

Parameter	Nilai	Parameter	Nilai
m	3000 kg	l	$6,705 \text{ m}$
K	6000 kg/ms^2	g	10 m/s^2
δ_1	$0,01$	α	$0,05$
δ_2	$0,01$	μ	$1,3$

Berdasarkan parameter Tabel 3.1, maka model gerak osilasi vertikal dan torsional (3.7) dapat ditulis menjadi:

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = p(t, y_1, y_2, \theta_1, \theta_2) = y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) = q(t, y_1, y_2, \theta_1, \theta_2) = -2 \left[\left(y_1(t) - 6,705 \sin(\theta_1(t)) \right)^+ + \left(y_1(t) + 6,705 \sin(\theta_1(t)) \right)^+ \right] - 0,01 y_2(t) + 10 \\ \dot{\theta}_1(t) = r(t, y_1, y_2, \theta_1, \theta_2) = \theta_2(t) \\ \dot{\theta}_2(t) = s(t, y_1, y_2, \theta_1, \theta_2) = \frac{6}{6,705} \cos(\theta_1(t)) \left[\left(y_1(t) - 6,705 \sin(\theta_1(t)) \right)^+ - \left(y_1(t) + 6,705 \sin(\theta_1(t)) \right)^+ \right] - 0,01 \theta_2(t) + 0,05 \sin(1,3t) \end{cases} \quad (3.60)$$

dengan $\left(y_1(t) \pm 6,705 \sin(\theta_1(t)) \right)^+ = \max\left(y_1(t) \pm 6,705 \sin(\theta_1(t)), 0 \right)$. Dalam penelitian ini model gerak osilasi vertikal dan torsional akan disimulasikan tiga metode Adams-Bashforth-Moulton sebagai berikut:

3.4.1 Simulasi Numerik dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat

Simulasi Numerik pada model gerak osilasi vertikal dan torsional menggunakan 3 kasus nilai awal. Kasus pertama dengan memberikan nilai awal model gerak osilasi vertikal dan torsional (3.60), yaitu (Kwofie, 2012):

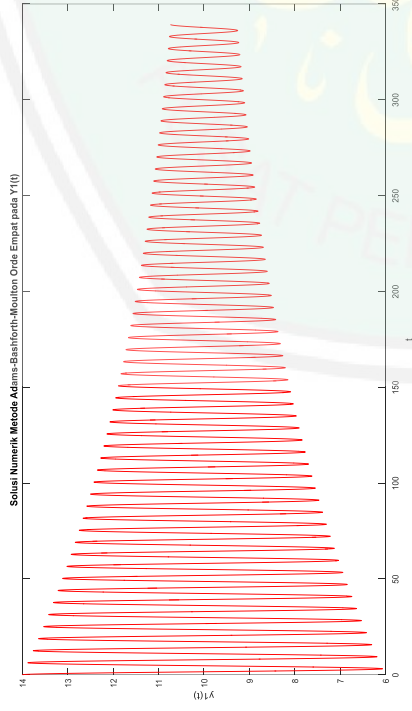
$$y_1(0) = y_{1(0)} = 14$$

$$y_2(0) = y_{2(0)} = 0$$

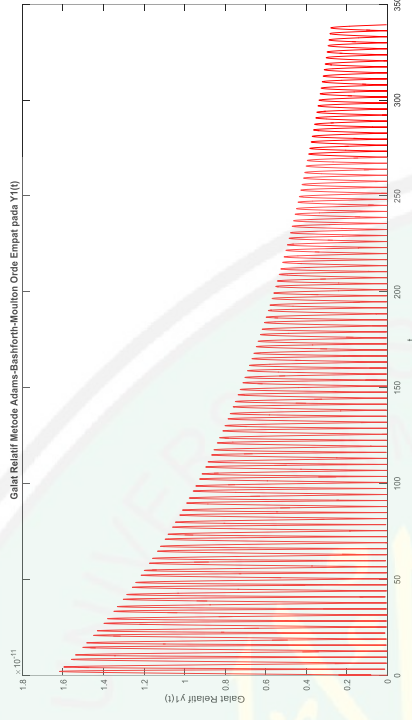
$$\theta_1(0) = \theta_{1(0)} = 1,2$$

$$\theta_2(0) = \theta_{2(0)} = 0$$

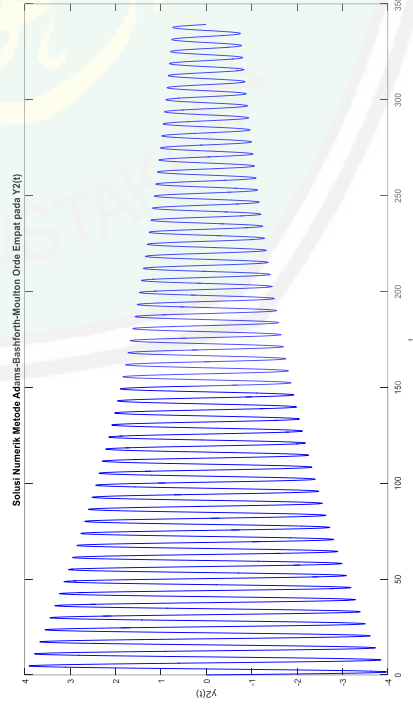
dan kriteria pemberhentian $\varepsilon = 10^{-20}$. Hasil simulasi numerik menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat untuk model gerak osilasi vertikal dan torsional sebagai berikut:



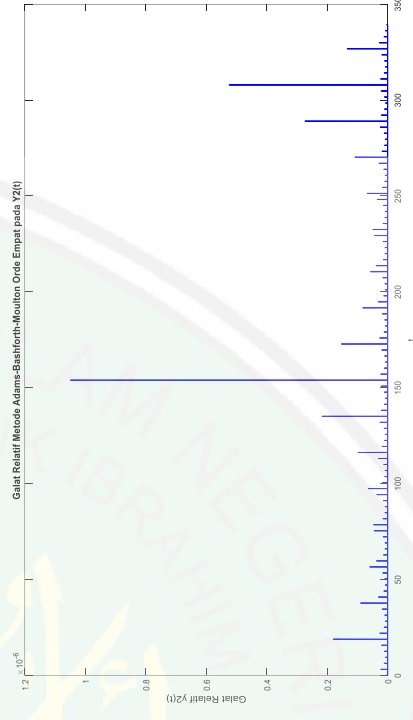
Gambar 3.3 Solusi Numerik $y_1(t)$ pada Kasus Pertama dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat



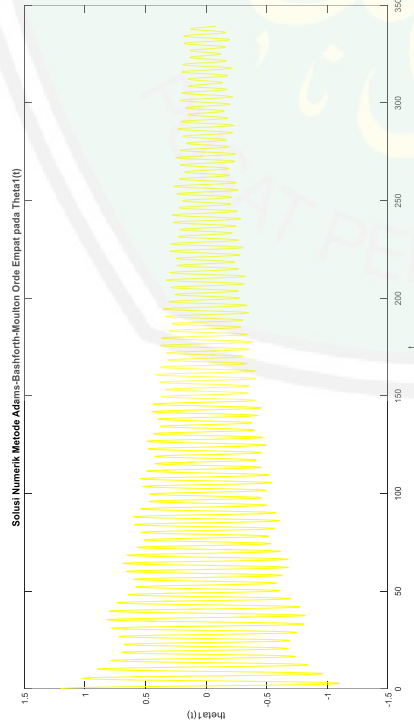
Gambar 3.1 Galat Relatif $y_1(t)$ pada Kasus Pertama dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat



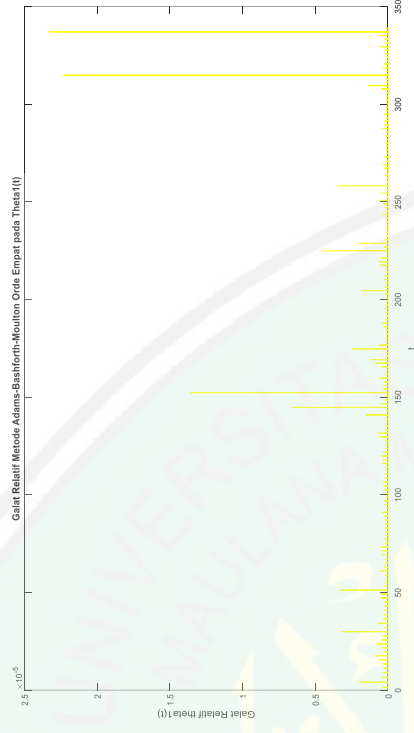
Gambar 3.4 Solusi Numerik $y_2(t)$ pada Kasus Pertama dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat



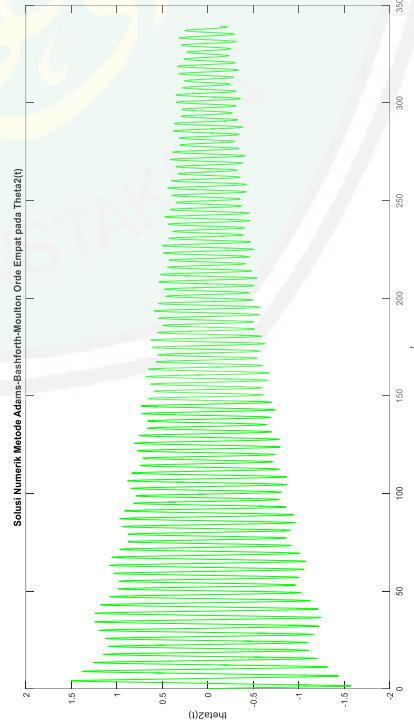
Gambar 3.2 Galat Relatif $y_2(t)$ pada Kasus Pertama dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat



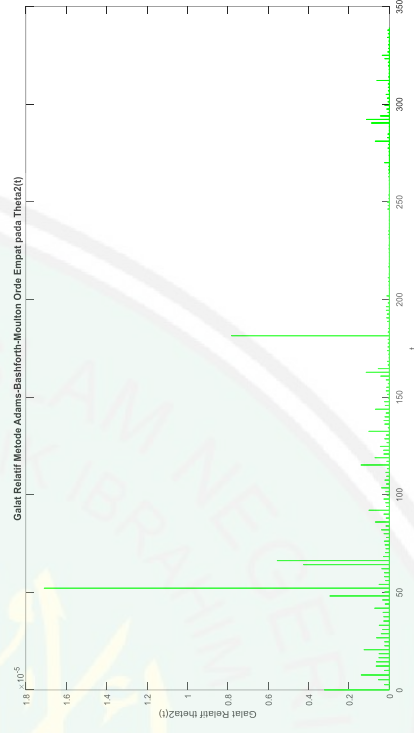
Gambar 3.7 Solusi Numerik $\theta_1(t)$ pada Kasus Pertama dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat



Gambar 3.5 Galat Relatif $\theta_1(t)$ pada Kasus Pertama dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat



Gambar 3.8 Solusi Numerik $\theta_2(t)$ pada Kasus Pertama dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat



Gambar 3.6 Galat Relatif $\theta_2(t)$ pada Kasus Pertama dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat

Tabel 3.2 Hasil Solusi Numerik Model Gerak Osilasi Vertikal Simulasi Pertama dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat

Interaksi n	t	$h = 0.01$											
		$y_{1(n+1)}^{(i)}$	$y_{1(n+1)}^{(i+1)}$	Galat Relatif $y_1(t)$	$y_{2(n+1)}^{(i)}$	$y_{2(n+1)}^{(i+1)}$	Galat Relatif $y_2(t)$	$\theta_{1(n+1)}^{(i)}$	$\theta_{1(n+1)}^{(i+1)}$	Galat Relatif $\theta_1(t)$	$\theta_{2(n+1)}^{(i)}$	$\theta_{2(n+1)}^{(i+1)}$	Galat Relatif $\theta_2(t)$
0	0		14			0			1.2		0		
1	0.01		13.9997998504613			-0.03999733031285			1.19995916989383		-0.01012842267763		
2	0.02		13.9991997643296			-0.07998665843602			1.19981707900342		-0.02025135748622		
3	0.03		13.9981998416331			-0.11996398647107			1.19957377317634		-0.03037104464979		
4	0.04	13.9968003801207	13.9968003800888	2.28504×10^{-12}		-0.15992532504821	4.63423×10^{-9}	1.19921946942503	1.19921946931716	8.95521×10^{-11}	-0.04048975315832	-0.04048983411044	1.99931×10^{-6}
5	0.05	13.9950014017113	13.9950014017446	2.38269×10^{-12}		-0.19986667886998	5.17119×10^{-9}	1.19876397195690	1.19876397125347	5.86795×10^{-10}	-0.05061026339153	-0.05061010051923	3.21817×10^{-6}
6	0.06	13.9928031264809	13.9928031264600	1.49557×10^{-12}		-0.23978404963886	3.09303×10^{-9}	1.19820725385734	1.19820725486984	8.45012×10^{-10}	-0.06073394852725	-0.06073402957667	1.33449×10^{-6}
7	0.07	13.9902058139789	13.9902058139675	8.15156×10^{-13}		-0.27967345423111	5.34388×10^{-10}	1.19754927147137	1.19754927128453	1.56020×10^{-10}	-0.07086385680783	-0.07086385653425	3.86063×10^{-9}
8	0.08	13.9872097638982	13.9872097638870	7.99075×10^{-13}		-0.31953090377605	4.67894×10^{-10}	1.19678995062763	1.19678995068018	4.39159×10^{-11}	-0.08100180262796	-0.08100180232245	3.77155×10^{-9}
9	0.09	13.9838153156908	13.9838153156779	9.23631×10^{-13}		-0.35935241654902	4.15518×10^{-10}	1.19592920077107	1.19592920079312	1.84376×10^{-11}	-0.09115008199174	-0.09115008169257	3.28208×10^{-9}
10	0.1	13.9800228486173	13.9800228486029	1.03061×10^{-12}		-0.39913401422423	3.73741×10^{-10}	1.19496690721743	1.19496690724238	2.03748×10^{-11}	-0.10131090274394	-0.10131090243547	3.04481×10^{-9}
1000	10	6.79679563824507	6.7967956382223	1.13533×10^{-11}		2.06958208902915	5.78125×10^{-11}	0.899295540237233	0.899295540198491	4.30805×10^{-11}	0.005688484124848	0.005688485473913	2.37157×10^{-7}
2000	20	11.4943372128578	11.4943372127341	1.07618×10^{-11}		-3.30393965530124	1.67282×10^{-11}	-0.39356715901907	-0.39356715898826	7.82916×10^{-11}	-0.87115387261599	-0.87115386950696	3.56886×10^{-9}
3000	30	10.512767788541	10.512767789817	1.21429×10^{-11}		3.40186782772708	5.88760×10^{-12}	0.154757580394090	0.154737581407323	6.54807×10^{-9}	1.1697732992330	1.1697732695444	2.53797×10^{-9}
4000	40	7.82925635488181	7.82925635478994	1.17334×10^{-11}		-2.44131023124953	3.35820×10^{-11}	0.738462427927419	0.738462428303309	5.90017×10^{-10}	-0.42413469505030	-0.42413469376323	3.03457×10^{-9}
5000	50	13.0014572166135	13.0014572166447	2.39576×10^{-12}		0.819239716802309	1.37638×10^{-10}	-0.59163834016766	-0.59163833996034	3.50416×10^{-10}	-0.2106502018052	-0.21065022122455	4.95627×10^{-9}
10000	100	12.0843981757544	12.0843981758009	3.84511×10^{-12}		1.23113450754896	6.37313×10^{-11}	0.399323182541251	0.399323182677264	3.40610×10^{-10}	-0.40284369511463	-0.40284369523300	2.93845×10^{-10}
15000	150	11.3119095724336	11.3119095724845	4.50279×10^{-12}		1.35322647520273	3.65933×10^{-11}	0.260483527039412	0.260483527005313	1.30905×10^{-10}	-0.44040320628873	-0.44040320689051	1.36642×10^{-9}
20000	200	10.7072559801991	10.7072559802475	4.51668×10^{-12}		1.28687664276374	2.08462×10^{-11}	-0.27195029469439	-0.27195029468359	3.97236×10^{-11}	-0.03796227179562	-0.03796227180515	2.51275×10^{-10}
25000	250	10.2671345603577	10.2671345603995	4.06963×10^{-12}		1.11311512642330	9.23494×10^{-12}	0.190036984114287	0.190036984105821	4.45492×10^{-11}	-0.08086573095035	-0.08086573106000	1.35592×10^{-9}
30000	300	9.97247120610718	9.97247120614064	3.35500×10^{-12}		0.892233543660122	9.22786×10^{-13}	-0.08768014146737	-0.08768014138020	9.94116×10^{-10}	0.303615776017214	0.303615776231002	7.04140×10^{-10}
33927	339.27	10.7330572077859	10.7330572077867	7.67935×10^{-14}		0.019248033352665	1.42856×10^{-9}	-0.07998054516091	-0.07998054521075	6.23203×10^{-10}	-0.14233518720430	-0.14233518707840	8.84490×10^{-10}
33928	339.28	10.7332130239548	10.7332130239553	5.13052×10^{-14}		0.011915062922151	2.30809×10^{-9}	-0.08138945229233	-0.08138945234091	5.96872×10^{-10}	-0.13943897608276	-0.13943897595643	9.06017×10^{-10}
33929	339.29	10.7332955075173	10.7332955075176	2.56524×10^{-14}		0.004581634315225	6.00278×10^{-9}	-0.08276918105287	-0.08276918110018	5.71589×10^{-10}	-0.13649967420445	-0.13649967407776	9.28147×10^{-10}

Dari Gambar 3.1, Gambar 3.2, Gambar 3.3, Gambar 3.4, Gambar 3.5, Gambar 3.6, Gambar 3.7, Gambar 3.8, dan Tabel 3.2 menunjukkan hasil solusi numerik model gerak osilasi vertikal dan torsional untuk nilai awal $y_1(0) = 14$, $y_2(0) = 0$, $\theta_1(0) = 1, 2$, dan $\theta_2(0) = 0$ dengan ukuran langkah $h = 0.01$ berhenti saat di iterasi $n = 33929$ atau waktu $t = 339,29$, karena salah satu hasil galat relatif model gerak osilasi vertikal dan torsional telah memenuhi kondisi persamaan (4.49) dengan kriteria pemberhentian $\varepsilon = 10^{-20}$. Sehingga galat relatif terkecil solusi numerik model gerak osilasi vertikal dan torsional adalah $2,11051249275449 \times 10^{-16}$ untuk $y_1(t)$, $2,00090434708501 \times 10^{-15}$ untuk $y_2(t)$, $1,48661494274038 \times 10^{-14}$ untuk $\theta_1(t)$, dan $1,01010488096929 \times 10^{-14}$ untuk $\theta_2(t)$. Dan galat relatif terbesar solusi numerik model gerak osilasi vertikal dan torsional adalah $1,61679962146804 \times 10^{-11}$ untuk $y_1(t)$, $1,04900550445605 \times 10^{-6}$ untuk $y_2(t)$, $2,32813713898227 \times 10^{-5}$ untuk $\theta_1(t)$, dan $1,70915380137216 \times 10^{-5}$ untuk $\theta_2(t)$.

Kasus kedua dengan memberikan nilai awal model gerak osilasi vertikal dan torsional (3.60), yaitu:

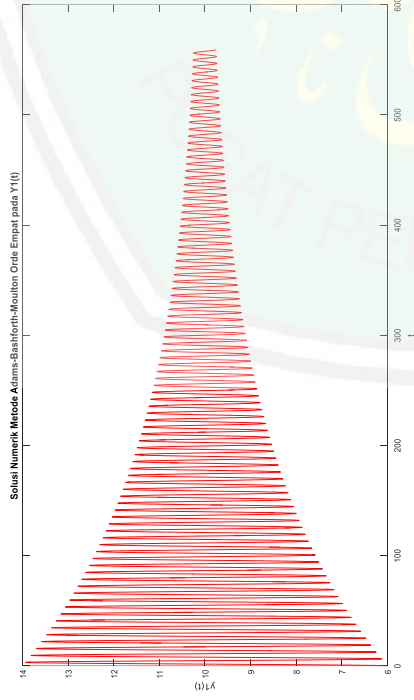
$$y_1(0) = y_{1(0)} = 6$$

$$y_2(0) = y_{2(0)} = 0$$

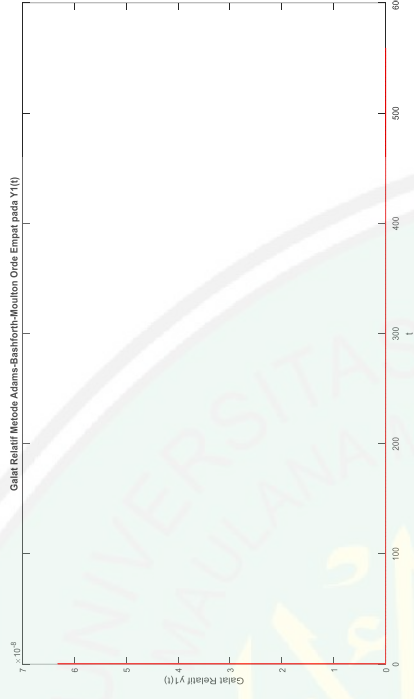
$$\theta_1(0) = \theta_{1(0)} = 1, 2$$

$$\theta_2(0) = \theta_{2(0)} = 0$$

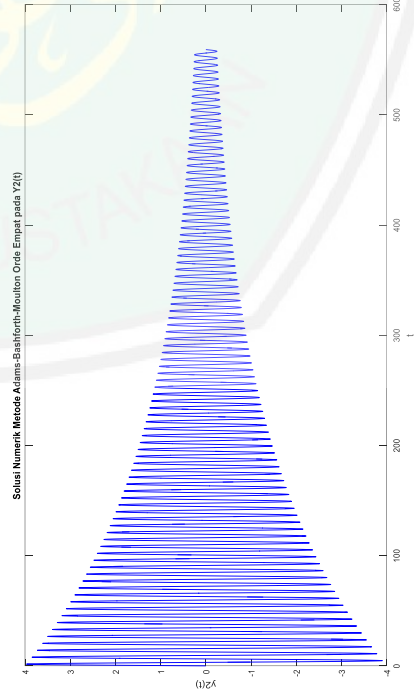
dan kriteria pemberhentian $\varepsilon = 10^{-20}$. Hasil simulasi numerik menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat untuk model gerak osilasi vertikal dan torsional sebagai berikut:



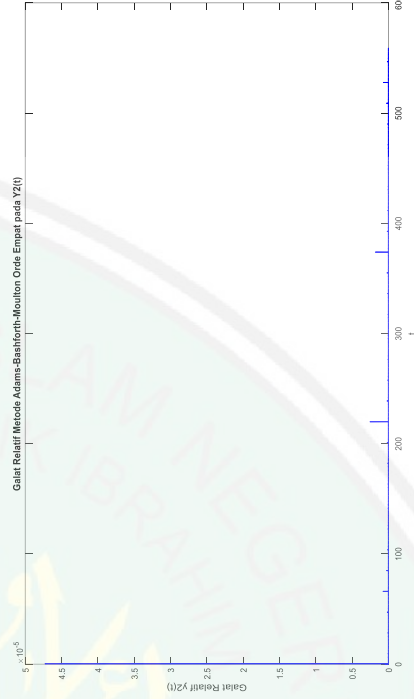
Gambar 3.11 Solusi Numerik $y_1(t)$ pada Kasus Kedua dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat



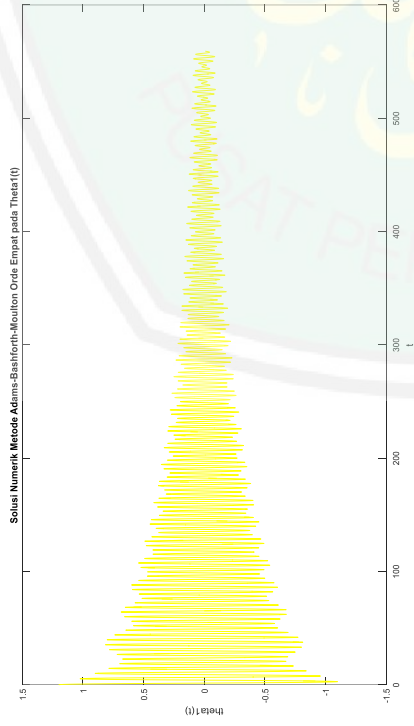
Gambar 3.9 Galat Relatif $y_1(t)$ pada Kasus Kedua dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat



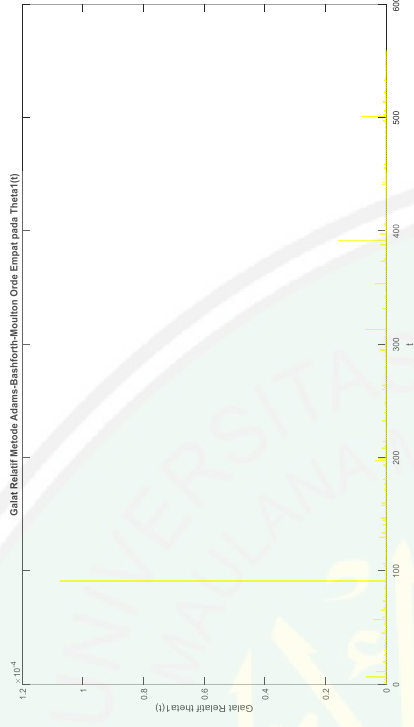
Gambar 3.12 Solusi Numerik $y_2(t)$ pada Kasus Kedua dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat



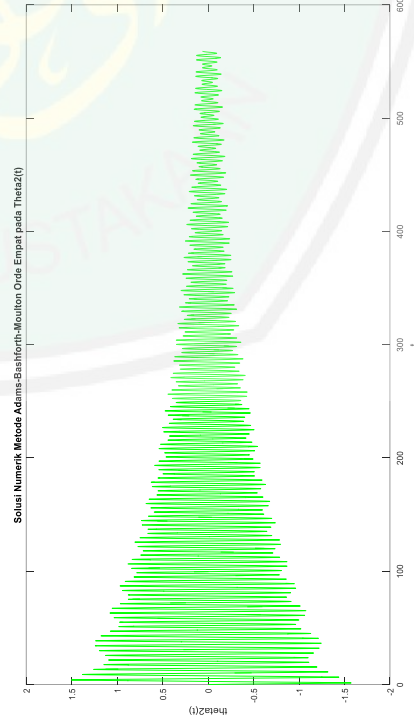
Gambar 3.10 Galat Relatif $y_2(t)$ pada Kasus Kedua dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat



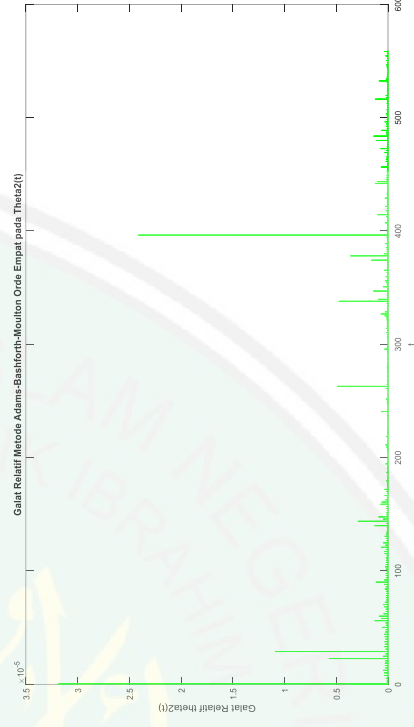
Gambar 3.15 Solusi Numerik $\theta_1(t)$ pada Kasus Kedua dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat



Gambar 3.13 Galat Relatif $\theta_1(t)$ pada Kasus Kedua dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat



Gambar 3.16 Solusi Numerik $\theta_2(t)$ pada Kasus Kedua dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat



Gambar 3.14 Galat Relatif $\theta_2(t)$ pada Kasus Kedua dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat

Tabel 3.3 Hasil Solusi Numerik Model Gerak Osilasi Vertikal Simulasi Kedua dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat

Interaksi n	t	$h = 0.01$											
		$y_{1(n+1)}^{(i)}$	$y_{1(n+1)}^{(i+1)}$	Galat Relatif $y_1(t)$	$y_{2(n+1)}^{(i)}$	$y_{2(n+1)}^{(i+1)}$	Galat Relatif $y_2(t)$	$\theta_{1(n+1)}^{(i)}$	$\theta_{1(n+1)}^{(i+1)}$	Galat Relatif $\theta_1(t)$	$\theta_{2(n+1)}^{(i)}$	$\theta_{2(n+1)}^{(i+1)}$	Galat Relatif $\theta_2(t)$
0	0		6			0			1.2		0		
1	0.01		6.00019391289947		0.038751251554382			1.19959598439218			-0.00992638414701		
2	0.02		6.00077531528327		0.077497778763715			1.19982072691876			-0.01984770482535		
3	0.03		6.00174415625175		0.116238851152651			1.19958226751378			-0.02976661664494		
4	0.04	6.00310022465752	6.00310022473985	1.37131×10^{-11}	0.154973760198324	0.154973804840983	2.88065×10^{-7}	1.19923500687035	1.19923500675305	9.78126×10^{-11}	-0.03968580549580	-0.03968589050575	2.14206×10^{-6}
5	0.05	6.00484360957256	6.00484360994369	6.18043×10^{-11}	0.193702074915375	0.193701987183153	4.52923×10^{-7}	1.19878853957931	1.19878853883136	6.23920×10^{-10}	-0.04960849676087	-0.04960832711703	3.41966×10^{-6}
6	0.06	6.00697424006587	6.00697423955087	8.57330×10^{-11}	0.232422608201515	0.232422652781671	1.91806×10^{-7}	1.19824281969635	1.19824282073947	8.70544×10^{-10}	-0.05953644902168	-0.05953653406690	$1.42845e \times 10^{-6}$
7	0.07	6.00949203529167	6.00949203542155	2.16113×10^{-11}	0.271135090871784	0.271135091360667	1.80309×10^{-9}	1.19759778054252	1.19759778032817	1.79883×10^{-10}	-0.06947317610366	-0.06947317625119	2.12356×10^{-9}
8	0.08	6.01239691158527	6.01239691159166	1.06361×10^{-12}	0.309838594349531	0.309838594827602	1.54296×10^{-9}	1.19685332021457	1.19685332024580	2.60916×10^{-11}	-0.07942091023826	-0.07942091035199	1.43208×10^{-9}
9	0.09	6.01568877517229	6.01568877520169	4.88730×10^{-12}	0.348532462929962	0.348532463415176	1.39216×10^{-9}	1.19609391629290	1.19609391628797	4.12264×10^{-12}	-0.08938239436624	-0.08938239449044	1.38961×10^{-9}
10	0.1	6.01936752640932	6.01936752644363	5.69880×10^{-12}	0.387216006503656	0.387216006989830	1.25556×10^{-9}	1.19506561766259	1.19506561765630	5.26244×10^{-12}	-0.09936028846474	-0.09936028858228	1.18292×10^{-9}
1000	10	13.2132149450831	13.2132149450067	5.78432×10^{-12}	-2.04994034118153	-2.04994034130156	5.85519×10^{-11}	0.899425813615242	0.899425813571889	4.82014×10^{-11}	0.010632742118223	0.010632743468285	1.26972×10^{-7}
2000	20	8.48748374654568	8.48748374666899	1.45281×10^{-11}	3.29349157750515	3.29349157756110	1.69891×10^{-11}	-0.38931508396955	-0.38931508395383	4.03604×10^{-11}	-0.87614271862722	-0.87614271546842	3.60533×10^{-9}
3000	30	9.50718680770943	9.50718680758173	1.34314×10^{-11}	-3.40296080787937	-3.40296080786009	5.66569×10^{-12}	0.152299868036551	0.152299869053940	6.68016×10^{-9}	1.16976595968861	1.16976595677297	2.49250×10^{-9}
4000	40	12.1553222844534	12.1553222845457	7.59187×10^{-12}	2.45250890755822	2.45250890747681	3.31936×10^{-11}	0.737311175047203	0.737311175424407	5.11593×10^{-10}	-0.42576397789427	-0.42576397661177	3.01222×10^{-9}
5000	50	7.00599808160097	7.00599808156919	4.53655×10^{-12}	-0.83612863251497	-0.83612863240245	1.34568×10^{-10}	-0.59199353189058	-0.59199353168854	3.41282×10^{-10}	-0.20381400869421	-0.20381400974894	5.17495×10^{-9}
10000	100	7.92397970463822	7.92397970459132	5.91765×10^{-12}	-1.24249934840475	-1.24249934832660	6.28977×10^{-11}	0.395339702098439	0.395339702233474	3.41567×10^{-10}	-0.41435674577142	-0.41435674594070	4.08539×10^{-10}
20000	200	9.30060764231730	9.30060764226881	5.21355×10^{-12}	-1.29025526126697	-1.29025526124044	2.05638×10^{-11}	-0.27168805561466	-0.27168805560424	3.83836×10^{-11}	-0.02579245314345	-0.02579245315657	5.08915×10^{-10}
30000	300	10.0326664080658	10.0326664080324	3.33239×10^{-12}	-0.89158424472669	-0.89158424472771	1.13975×10^{-12}	-0.08366806356030	-0.08366806347003	1.07888×10^{-9}	0.308115809790256	0.308115810000907	6.88672×10^{-10}
40000	400	10.2914375168095	10.2914375167924	1.66253×10^{-12}	-0.45729416259161	-0.45729416260244	2.36673×10^{-11}	0.0645378459152192	0.0645378458962523	2.93888×10^{-10}	-0.06358442252900	-0.06358442262367	1.48886×10^{-9}
50000	500	10.2926156474793	10.2926156474737	5.42609×10^{-13}	-0.15000357832064	-0.15000357833158	7.29256×10^{-11}	-0.05152762028324	-0.05152762027746	1.12055×10^{-10}	-0.01257947767657	-0.01257947761678	4.75253×10^{-9}
55919	559.19	9.75602605102293	9.75602605102266	2.82220×10^{-14}	-0.00640968889062	-0.00640968888146	1.42775×10^{-9}	-0.00968870899573	-0.00968870897268	2.37874×10^{-9}	0.0558274433024871	0.055827443283456	3.40880×10^{-10}
55920	559.20	9.75597415659614	9.75597415659595	1.89362×10^{-14}	-0.00396915064595	-0.00396915063679	2.30599×10^{-9}	-0.00913140433238	-0.00913140430953	2.50269×10^{-9}	0.055630360151672	0.055630360131902	3.55382×10^{-10}
55921	559.21	9.7559466851944	9.7559466851935	9.28604×10^{-15}	-0.00152845595099	-0.00152845595184	5.98861×10^{-9}	-0.00857616412950	-0.00857616410684	2.64126×10^{-9}	0.055414575162990	0.055414575142488	3.69977×10^{-10}

Dari Gambar 3.9, Gambar 3.10, Gambar 3.11, Gambar 3.12, Gambar 3.13, Gambar 3.14, Gambar 3.15, Gambar 3.16, dan Tabel 3.3 menunjukkan hasil solusi numerik model gerak osilasi vertikal dan torsional untuk nilai awal $y_1(0) = 6$, $y_2(0) = 0$, $\theta_1(0) = 1, 2$, dan $\theta_2(0) = 0$ dengan ukuran langkah $h = 0.01$ berhenti saat di iterasi $n = 55921$ atau waktu $t = 559,21$, karena salah satu hasil galat relatif model gerak osilasi vertikal dan torsional telah memenuhi kondisi persamaan (4.49) dengan kriteria pemberhentian $\varepsilon = 10^{-20}$. Sehingga galat relatif terkecil solusi numerik model gerak osilasi vertikal dan torsional adalah $1,68743786280312 \times 10^{-16}$ untuk $y_1(t)$, $1,39224000389205 \times 10^{-16}$ untuk $y_2(t)$, $9,76528635814982 \times 10^{-16}$ untuk $\theta_1(t)$, dan $3,74955260951865 \times 10^{-15}$ untuk $\theta_2(t)$. Dan galat relatif terbesar solusi numerik model gerak osilasi vertikal dan torsional adalah $6,31691472681704 \times 10^{-8}$ untuk $y_1(t)$, $4,72688280861889 \times 10^{-5}$ untuk $y_2(t)$, $0,000107615464981596$ untuk $\theta_1(t)$, dan $3,18628996874423 \times 10^{-5}$ untuk $\theta_2(t)$.

Kasus ketiga atau terakhir dengan memberikan nilai awal model gerak osilasi vertikal dan torsional (3.60), yaitu:

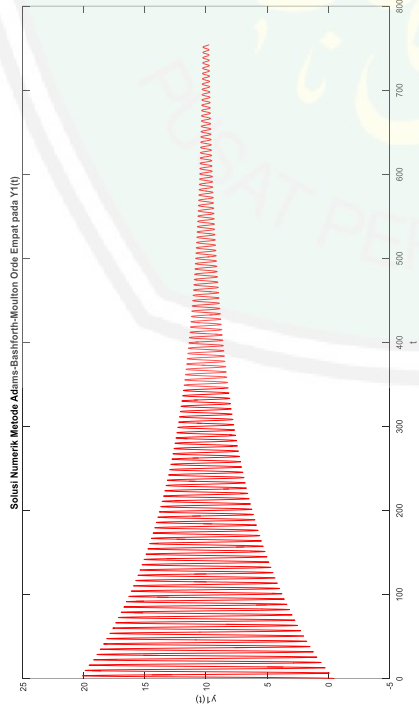
$$y_1(0) = y_{1(0)} = -0.5$$

$$y_2(0) = y_{2(0)} = 0$$

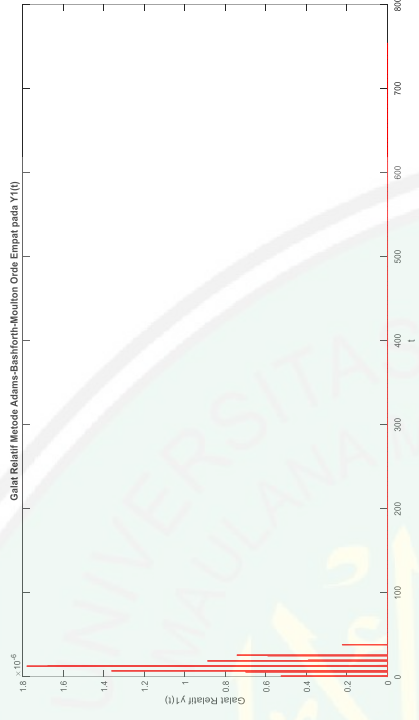
$$\theta_1(0) = \theta_{1(0)} = 0,5$$

$$\theta_2(0) = \theta_{2(0)} = 0$$

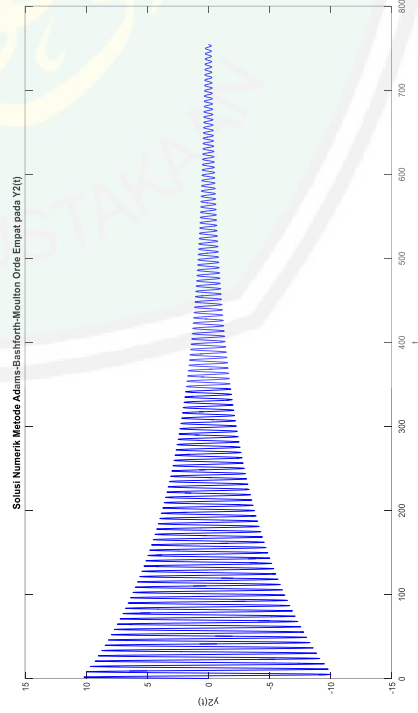
dan kriteria pemberhentian $\varepsilon = 10^{-20}$. Hasil simulasi numerik menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat untuk model gerak osilasi vertikal dan torsional sebagai berikut:



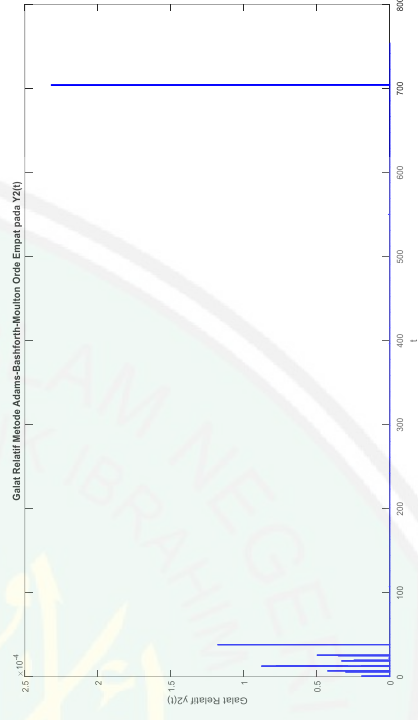
Gambar 3.19 Solusi Numerik $y_1(t)$ pada Kasus Ketiga dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat



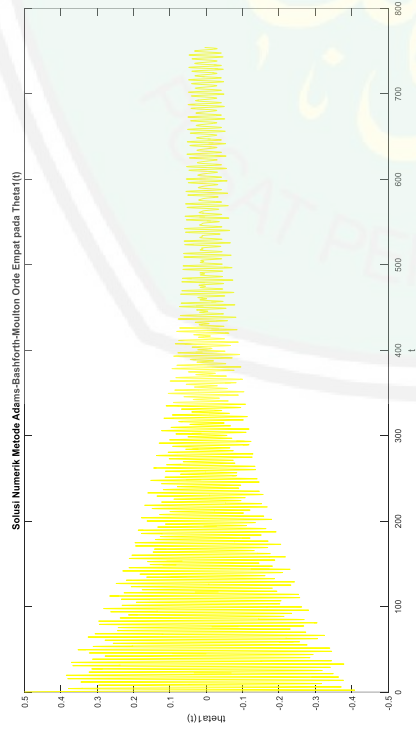
Gambar 3.17 Galat Relatif $y_1(t)$ pada Kasus Ketiga dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat



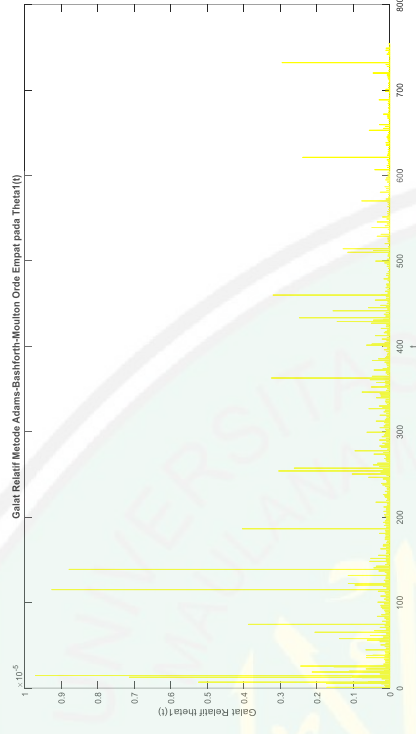
Gambar 3.20 Solusi Numerik $y_2(t)$ pada Kasus Ketiga dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat



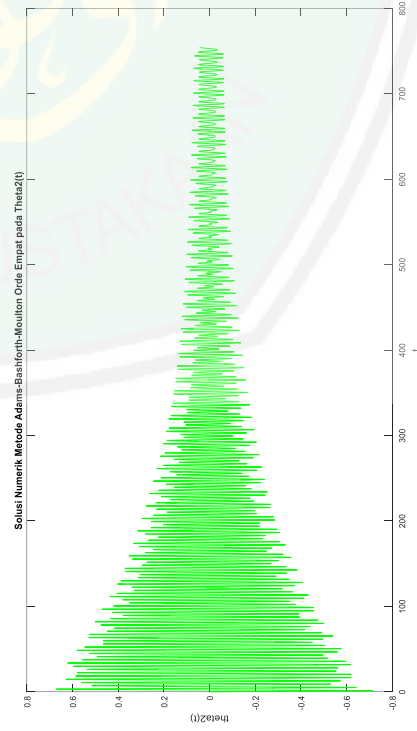
Gambar 3.18 Galat Relatif $y_2(t)$ pada Kasus Ketiga dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat



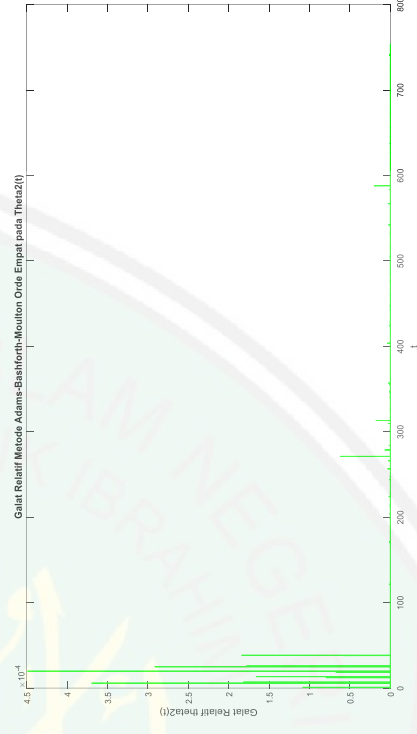
Gambar 3.23 Solusi Numerik $\theta_1(t)$ pada Kasus Ketiga dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat



Gambar 3.21 Galat Relatif $\theta_1(t)$ pada Kasus Ketiga dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat



Gambar 3.24 Solusi Numerik $\theta_2(t)$ pada Kasus Ketiga dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat



Gambar 3.22 Galat Relatif $\theta_2(t)$ pada Kasus Ketiga dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat

Tabel 3.4 Hasil Solusi Numerik Model Gerak Osilasi Vertikal Simulasi Ketiga dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat

Interaksi n	t	$h = 0.01$											
		$y_{1(n+1)}^{(i)}$	$y_{1(n+1)}^{(i+1)}$	Galat Relatif $y_1(t)$	$y_{2(n+1)}^{(i)}$	$y_{2(n+1)}^{(i+1)}$	Galat Relatif $y_2(t)$	$\theta_{1(n+1)}^{(i)}$	$\theta_{1(n+1)}^{(i+1)}$	Galat Relatif $\theta_1(t)$	$\theta_{2(n+1)}^{(i)}$	$\theta_{2(n+1)}^{(i+1)}$	Galat Relatif $\theta_2(t)$
0	0		-0.5			0			0.5		0		
1	0.01		-0.49956753845130		0.086422374442584			0.499978527439229			-0.005332611572763		
2	0.02		-0.49827090866147		0.172833198421312			0.499903817626418			-0.01064648205742		
3	0.03		-0.49611023991366		0.259229718332640			0.499775923062181			-0.01596233796994		
4	0.04	-0.49308603005707	-0.49308602994358	2.30146 $\times 10^{-10}$	0.345609210834929	0.345609268536775	1.66956 $\times 10^{-7}$	0.499589734550147	0.499589734576633	5.30156 $\times 10^{-11}$	-0.02127491538281	-0.02127489844488	7.97556 $\times 10^{-7}$
5	0.05	-0.48919812021046	-0.48919811976459	9.11430 $\times 10^{-10}$	0.431969302292595	0.431969187581152	2.65554 $\times 10^{-7}$	0.499350431965313	0.499350432097379	2.64474 $\times 10^{-10}$	-0.02658534312445	-0.02658537698507	1.27365 $\times 10^{-6}$
6	0.06	-0.48444672007050	-0.48444672074663	1.39567 $\times 10^{-9}$	0.518306633712465	0.518306691456187	1.11408 $\times 10^{-7}$	0.499058030058182	0.499058029850395	4.16358 $\times 10^{-10}$	-0.03189504268321	-0.03189502570333	5.32367 $\times 10^{-7}$
7	0.07	-0.47883207014927	-0.47883206999951	3.12744 $\times 10^{-10}$	0.604619036086116	0.604619036315668	3.79663 $\times 10^{-10}$	0.498712530112401	0.498712530150752	7.69005 $\times 10^{-11}$	-0.03720508636550	-0.03720508634067	6.67374 $\times 10^{-10}$
8	0.08	-0.47235443303072	-0.47235443304639	3.31861 $\times 10^{-11}$	0.690903474133215	0.690903474377401	3.53429 $\times 10^{-10}$	0.498313922611188	0.498313922600338	2.17733 $\times 10^{-11}$	-0.04251680356140	-0.04251680353132	7.07506 $\times 10^{-10}$
9	0.09	-0.46501410269482	-0.46501410268403	2.32027 $\times 10^{-11}$	0.777157260736415	0.777157260974821	3.06765 $\times 10^{-10}$	0.497862184409388	0.4978621844405925	6.95508 $\times 10^{-12}$	-0.04783142283291	-0.04783142280417	6.00819 $\times 10^{-10}$
10	0.1	-0.45681139914823	-0.45681139913509	2.87611 $\times 10^{-11}$	0.863377654944950	0.863377655184362	2.77296 $\times 10^{-10}$	0.497357280318777	0.497357280315590	6.40665 $\times 10^{-12}$	-0.05315019053783	-0.05315019050813	5.58820 $\times 10^{-10}$
1000	10	19.112286388054	19.112286386626	7.47321 $\times 10^{-12}$	-3.84260871895039	-3.84260871929123	8.87012 $\times 10^{-11}$	-0.31267662637095	-0.31267662638708	5.15823 $\times 10^{-11}$	0.084467467445157	0.084467467341345	1.22901 $\times 10^{-9}$
2000	20	4.27097573530700	4.27097573558172	6.43206 $\times 10^{-11}$	7.34635770127664	7.34635770148978	2.90129 $\times 10^{-11}$	0.310267740895132	0.310267740914836	6.35063 $\times 10^{-11}$	-0.37018953809326	-0.37018953842972	9.08905 $\times 10^{-10}$
3000	30	11.0851562149562	11.0851562146263	2.97593 $\times 10^{-11}$	-8.80013482250496	-8.80013482254359	4.39036 $\times 10^{-12}$	0.068649446319611	0.068649446600362	4.08964 $\times 10^{-9}$	0.588091600586329	0.588091600293179	4.98476 $\times 10^{-10}$
4000	40	13.6660628115812	13.6660628118656	2.08069 $\times 10^{-11}$	7.56806868805802	7.56806868791876	1.84017 $\times 10^{-11}$	-0.25031562820166	-0.25031562821131	3.85535 $\times 10^{-11}$	-0.23818518881424	-0.23818518857772	9.93005 $\times 10^{-10}$
5000	50	3.14852723506768	3.14852723491203	4.94361 $\times 10^{-11}$	-4.12455680628085	-4.12455680602293	6.25338 $\times 10^{-11}$	0.265661216977249	0.265661216968286	3.37369 $\times 10^{-11}$	-0.37741516363842	-0.37741516404192	1.06911 $\times 10^{-9}$
10000	100	5.70364907943803	5.70364907926841	2.97388 $\times 10^{-11}$	-4.506616787997526	-4.506616787981308	3.59885 $\times 10^{-11}$	-0.20250636432505	-0.20250636427853	2.29702 $\times 10^{-10}$	0.274939856201601	0.274939856448103	8.96567 $\times 10^{-10}$
30000	300	10.6902104305220	10.6902104304398	7.68653 $\times 10^{-12}$	-2.19355043752728	-2.19355043755266	1.15665 $\times 10^{-11}$	-0.4895729616092	-0.4895729619014	5.96748 $\times 10^{-10}$	-0.0548881075205	-0.0548881068983	1.13359 $\times 10^{-9}$
50000	500	10.8277461671492	10.8277461671428	5.87976 $\times 10^{-13}$	-0.17285358934319	-0.17285358937419	1.79361 $\times 10^{-10}$	-0.0169770327524	-0.0169770328881	7.99725 $\times 10^{-10}$	-0.07090071394240	-0.07090071391460	3.92152 $\times 10^{-10}$
70000	700	10.2019674425949	10.2019674426038	8.67286 $\times 10^{-13}$	0.235182792950945	0.235182792943315	3.24417 $\times 10^{-11}$	-0.04533704707662	-0.04533704707388	6.04564 $\times 10^{-11}$	0.025910554859162	0.025910554876779	6.79913 $\times 10^{-10}$
75000	750	10.103381400636	10.1033814008718	8.11751 $\times 10^{-13}$	0.218319413834999	0.218319413831071	1.79938 $\times 10^{-11}$	0.031763860410577	0.031763860407890	8.45352 $\times 10^{-11}$	0.007257416202326	0.007257416198446	5.34578 $\times 10^{-10}$
75424	75424	9.76316224214977	9.76316224214950	2.71097 $\times 10^{-14}$	-0.00618619251368	-0.00618619250479	1.43607 $\times 10^{-9}$	0.003539797660204	0.003539797663809	1.01840 $\times 10^{-9}$	0.042965079385634	0.042965079392371	1.56784 $\times 10^{-10}$
75425	75425	9.76311222574306	9.76311222574288	1.80126 $\times 10^{-14}$	-0.00381704494552	-0.00381704493663	2.32775 $\times 10^{-9}$	0.003969706868741	0.003969706872412	9.24963 $\times 10^{-10}$	0.043015632677128	0.043015632683816	1.55459 $\times 10^{-10}$
75426	75426	9.76308590173338	9.76308590173329	8.91536 $\times 10^{-15}$	-0.0014475259804	-0.0014475258916	6.13748 $\times 10^{-9}$	0.00440087651615	0.00440087655353	8.49579 $\times 10^{-10}$	0.043059387225112	0.043059387225112	1.54099 $\times 10^{-10}$

Dari Gambar 3.17, Gambar 3.18, Gambar 3.19, Gambar 3.20, Gambar 3.21, Gambar 3.22, Gambar 3.23, Gambar 3.24, dan Tabel 3.4 menunjukkan hasil solusi numerik model gerak osilasi vertikal dan torsional untuk nilai awal $y_1(0) = -0.5$, $y_2(0) = 0$, $\theta_1(0) = 0.5$, dan $\theta_2(0) = 0$ dengan ukuran langkah $h = 0.01$ berhenti saat di iterasi $n = 75428$ atau waktu $t = 754.28$, karena salah satu hasil galat relatif model gerak osilasi vertikal dan torsional telah memenuhi kondisi persamaan (4.49) dengan kriteria pemberhentian $\varepsilon = 10^{-20}$. Sehingga galat relatif terkecil solusi numerik model gerak osilasi vertikal dan torsional adalah $1.689912531783 \times 10^{-16}$ untuk $y_1(t)$, $6.08456230685175 \times 10^{-16}$ untuk $y_2(t)$, $5.62265610955897 \times 10^{-15}$ untuk $\theta_1(t)$, dan $4.02654249307406 \times 10^{-14}$ untuk $\theta_2(t)$. Dan galat relatif terbesar solusi numerik model gerak osilasi vertikal dan torsional adalah $1.7786597453662 \times 10^{-6}$ untuk $y_1(t)$, 0.000232058939491643 untuk $y_2(t)$, $9.7001688041798 \times 10^{-6}$ untuk $\theta_1(t)$, dan 0.000448816839561137 untuk $\theta_2(t)$.

3.4.2 Simulasi Numerik dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima

Simulasi Numerik pada model gerak osilasi vertikal dan torsional menggunakan 3 kasus nilai awal. Kasus pertama dengan memberikan nilai awal model gerak osilasi vertikal dan torsional (3.60), yaitu (Kwofie, 2012):

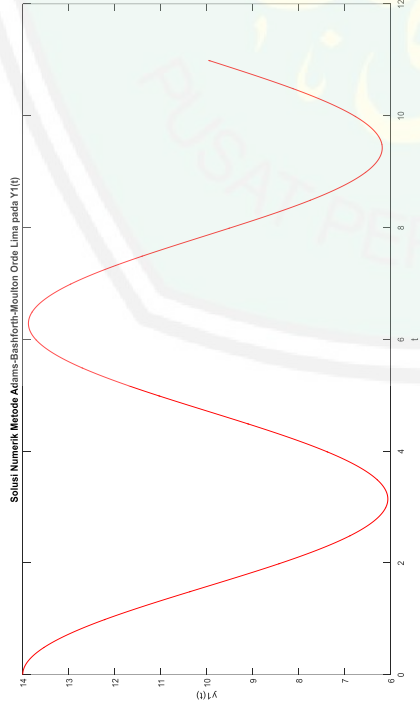
$$y_1(0) = y_{1(0)} = 14$$

$$y_2(0) = y_{2(0)} = 0$$

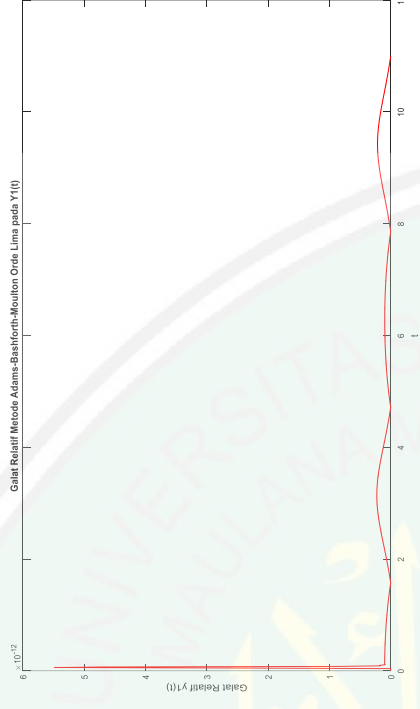
$$\theta_1(0) = \theta_{1(0)} = 1, 2$$

$$\theta_2(0) = \theta_{2(0)} = 0$$

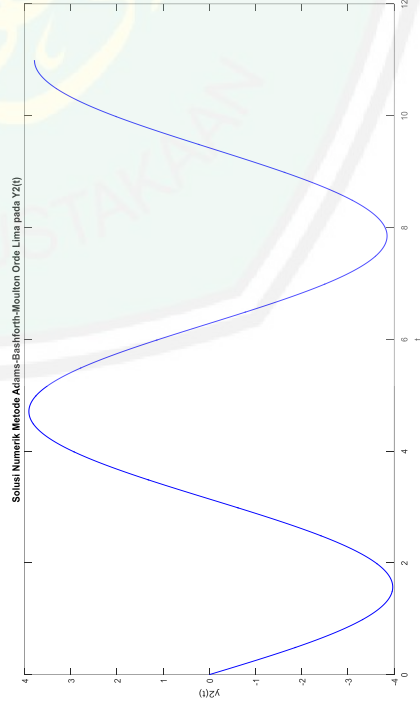
dan kriteria pemberhentian $\varepsilon = 10^{-20}$. Hasil simulasi numerik menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde lima untuk model gerak osilasi vertikal dan torsional sebagai berikut:



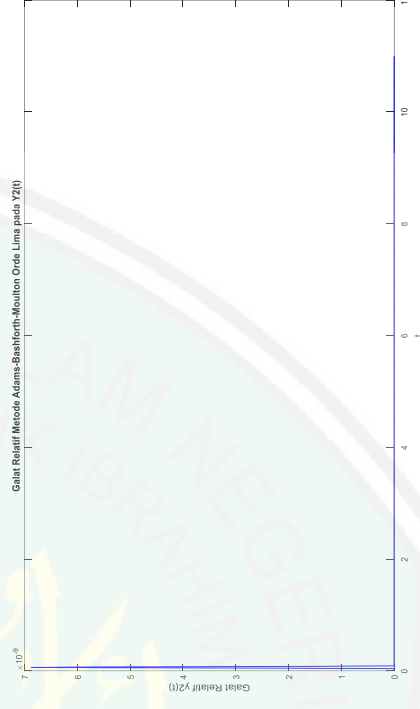
Gambar 3.27 Solusi Numerik $y_1(t)$ pada Kasus Pertama dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima



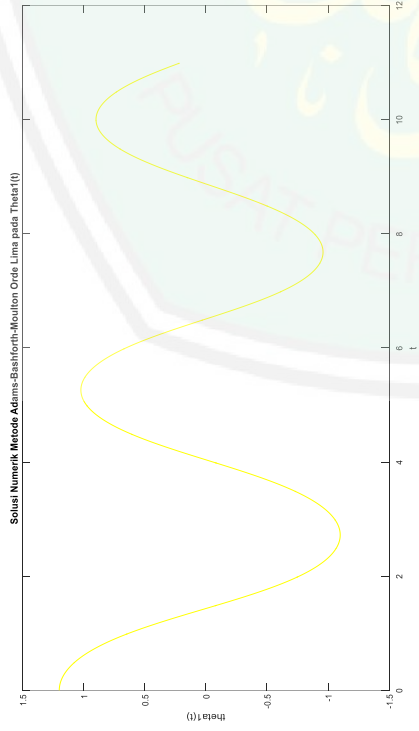
Gambar 3.25 Galat Relatif $y_1(t)$ pada Kasus Pertama dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima



Gambar 3.28 Solusi Numerik $y_2(t)$ pada Kasus Pertama dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima



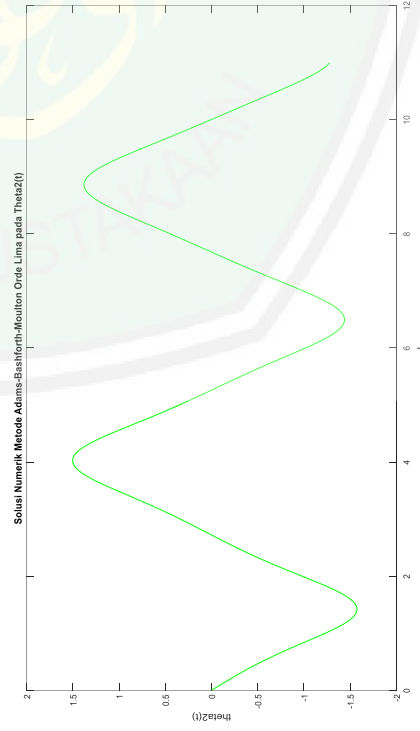
Gambar 3.26 Galat Relatif $y_2(t)$ pada Kasus Pertama dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima



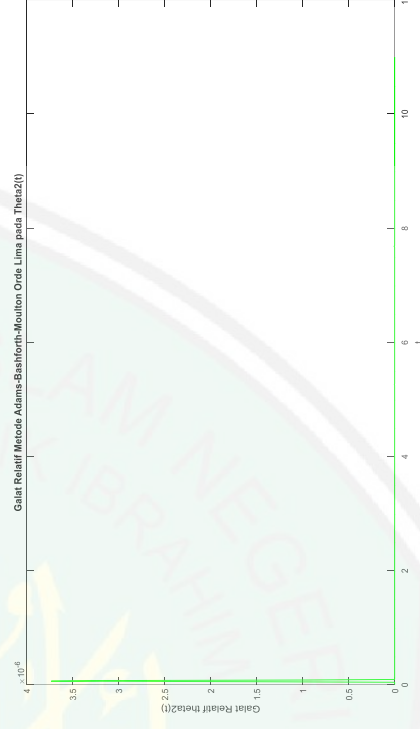
Gambar 3.31 Solusi Numerik $\theta_1(t)$ pada Kasus Pertama dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima



Gambar 3.29 Galat Relatif $\theta_1(t)$ pada Kasus Pertama dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima



Gambar 3.32 Solusi Numerik $\theta_2(t)$ pada Kasus Pertama dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima



Gambar 3.30 Galat Relatif $\theta_2(t)$ pada Kasus Pertama dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima

Tabel 3.5 Hasil Solusi Numerik Model Gerak Osilasi Vertikal Simulasi Pertama dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima

Interaksi n	t	$h = 0.01$											
		$y^{(i)}_{1(n+1)}$	$y^{(i+1)}_{1(n+1)}$	Galat Relatif $y_1(t)$	$y^{(i)}_{2(n+1)}$	$y^{(i+1)}_{2(n+1)}$	Galat Relatif $y_2(t)$	$\theta^{(i)}_{1(n+1)}$	$\theta^{(i+1)}_{1(n+1)}$	Galat Relatif $\theta_1(t)$	$\theta^{(i)}_{2(n+1)}$	$\theta^{(i+1)}_{2(n+1)}$	Galat Relatif $\theta_2(t)$
0	0		14			0			1.2			0	
1	0.01		13.9997998504613			-0.03999733031285			1.19995916989383			-0.01012842267763	
2	0.02		13.9991997643296			-0.07998665843602			1.19981707900342			-0.02025135748622	
3	0.03		13.9981998416331			-0.11996398647107			1.19957377317634			-0.03037104464979	
4	0.04		13.9968002223716			-0.15992531811960			1.19922927586661			-0.04048972212671	
5	0.05	13.9950012441643	13.9950012441328	2.25284×10^{-12}		-0.1998666772692	2.74815×10^{-9}	1.19877378108055	1.19877378079004	$8.46755e - 11$	-0.05060965472719	-0.05060973018657	1.49100×10^{-6}
6	0.06	13.9928029688606	13.9928029689372	5.47995×10^{-12}		-0.23978404103263	6.87690×10^{-9}	1.19821706896010	1.19821706833819	$5.19031e - 10$	-0.06073368980734	-0.06073346329947	3.72953×10^{-6}
7	0.07	13.9902056566348	13.9902056565697	4.65363×10^{-12}		-0.27967344010863	5.89852×10^{-9}	1.19755909035036	1.19755909219247	$1.53822e - 09$	-0.07086284172151	-0.07086306832564	3.19777×10^{-6}
8	0.08	13.9872096066105	13.9872096066221	8.27015×10^{-13}		-0.31953089027129	1.72308×10^{-9}	1.19679978183025	1.19679978033468	$1.24963e - 09$	-0.08100087352255	-0.08100079798017	9.32612×10^{-7}
9	0.09	13.9838151585608	13.9838151585632	1.70346×10^{-13}		-0.35935240091224	7.19855×10^{-13}	1.19593904103729	1.19593904155814	$4.3515e - 10$	-0.09114886142576	-0.09114886137244	5.84979×10^{-10}
10	0.1	13.9800226916569	13.9800226916544	1.77635×10^{-13}		-0.39913399700867	7.77034×10^{-13}	1.19497676143807	1.19497676129089	$1.23164e - 10$	-0.10130946622474	-0.10130946624951	2.44526×10^{-10}
100	1	12.1672172319232	12.1672172319224	6.19020×10^{-14}		-3.34911097421958	3.48868×10^{-13}	0.630402587343220	0.630402587316026	$4.31386e - 11$	-1.22984051794938	-1.22984051829828	2.83691×10^{-10}
200	2	8.37007129013730	8.37007129013787	6.81249×10^{-14}		-3.60108471264360	3.48381×10^{-13}	-0.76304140919476	-0.76304140919341	$1.77087e - 12$	-0.97988941495131	-0.97988941517786	2.31201×10^{-10}
300	3	6.10178890435931	6.10178890436067	2.2852×10^{-13}		-0.55622917920428	3.44905×10^{-13}	-1.05300494707287	-1.05300494708255	$9.19677e - 12$	0.336351306714740	0.336351306684783	8.90643×10^{-11}
400	4	7.42221372056442	7.42221372056532	1.20861×10^{-13}		2.96717568018323	3.49024×10^{-13}	-0.05908277404235	-0.05908277400642	$6.08126e - 10$	1.50054311537044	1.50054311482345	3.64524×10^{-10}
500	5	11.0876946246274	11.0876946246271	3.44450×10^{-14}		3.74110873281372	3.48518×10^{-13}	0.977894882343316	0.977894882357755	$1.47652e - 11$	0.349222327979549	0.349222327948489	8.89396×10^{-11}
600	6	13.7216653009365	13.7216653009352	9.45031×10^{-14}		1.08492302170908	3.46905×10^{-13}	0.654554573815489	0.654554573806970	$1.30143e - 11$	-1.01790496144136	-1.01790496165559	2.10459×10^{-10}
700	7	12.9247966502620	12.9247966502610	7.87519×10^{-14}		-2.53733578264710	3.49168×10^{-13}	-0.62737705620117	-0.62737705617900	$3.53481e - 11$	-0.99068251980740	-0.99068252006298	2.57979×10^{-10}
800	8	9.46021255511403	9.46021255511422	2.00915×10^{-14}		-3.80236264919266	3.48627×10^{-13}	-0.88744547724854	-0.88744547726265	$1.58956e - 11$	0.447281177922762	0.447281177910117	2.82700×10^{-11}
900	9	6.5239066653032	6.5239066653153	1.85833×10^{-13}		-1.57634835717952	3.47501×10^{-13}	0.172163332138409	0.172163332095310	$2.50333e - 10$	1.33918190693186	1.33918190661027	2.40142×10^{-10}
1000	10	6.79679575892527	6.79679575892638	1.64129×10^{-13}		2.06958199758853	3.49549×10^{-13}	0.899309193164117	0.899309193176699	$1.39901e - 11$	0.005787516516139	0.005787516511135	8.64559×10^{-10}
1097	10.97	9.88372773097664	9.88372773097668	3.95395×10^{-15}		3.78530372673285	3.48672×10^{-13}	0.242228436303815	0.242228436247855	$2.31020e - 10$	-1.26269080654221	-1.26269080646899	5.79813×10^{-11}
1098	10.98	9.92158405817717	9.92158405817719	2.68559×10^{-15}		3.78589860947236	3.48618×10^{-13}	0.229570271761023	0.229570271705835	$2.40396e - 10$	-1.26888576331428	-1.26888576321806	7.58290×10^{-11}
1099	10.99	9.95944444107102	9.95944444107103	1.24851×10^{-15}		3.78611486494924	3.48715×10^{-13}	0.216851857514366	0.216851857460180	$2.49874e - 10$	-1.27473978349339	-1.27473978337401	9.36475×10^{-11}

Dari Gambar 3.25, Gambar 3.26, Gambar 3.27, Gambar 3.28, Gambar 3.29, Gambar 3.30, Gambar 3.31, Gambar 3.32, dan Tabel 3.5 menunjukkan hasil solusi numerik model gerak osilasi vertikal dan torsional untuk nilai awal $y_1(0) = 14$, $y_2(0) = 0$, $\theta_1(0) = 1,2$, dan $\theta_2(0) = 0$ dengan ukuran langkah $h = 0.01$ berhenti saat di iterasi $n = 1099$ atau waktu $t = 10,99$, karena salah satu hasil galat relatif model gerak osilasi vertikal dan torsional telah memenuhi kondisi persamaan (4.54) dengan kriteria pemberhentian $\varepsilon = 10^{-20}$. Sehingga galat relatif terkecil solusi numerik model gerak osilasi vertikal dan torsional adalah $3,55397128062262 \times 10^{-16}$ untuk $y_1(t)$, $2,3755884749661 \times 10^{-14}$ untuk $y_2(t)$, $8,21568807080448 \times 10^{-14}$ untuk $\theta_1(t)$, dan $5,57921120389406 \times 10^{-14}$ untuk $\theta_2(t)$. Dan galat relatif terbesar solusi numerik model gerak osilasi vertikal dan torsional adalah $5,47995965187342 \times 10^{-12}$ untuk $y_1(t)$, $6,87690944297702 \times 10^{-9}$ untuk $y_2(t)$, $1,31808611543055 \times 10^{-8}$ untuk $\theta_1(t)$, dan $3,72953974456171 \times 10^{-6}$ untuk $\theta_2(t)$.

Kasus kedua dengan memberikan nilai awal model gerak osilasi vertikal dan torsional (3.60), yaitu:

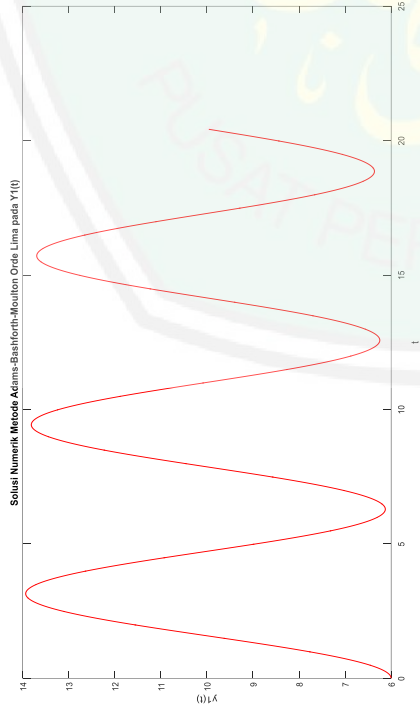
$$y_1(0) = y_{1(0)} = 6$$

$$y_2(0) = y_{2(0)} = 0$$

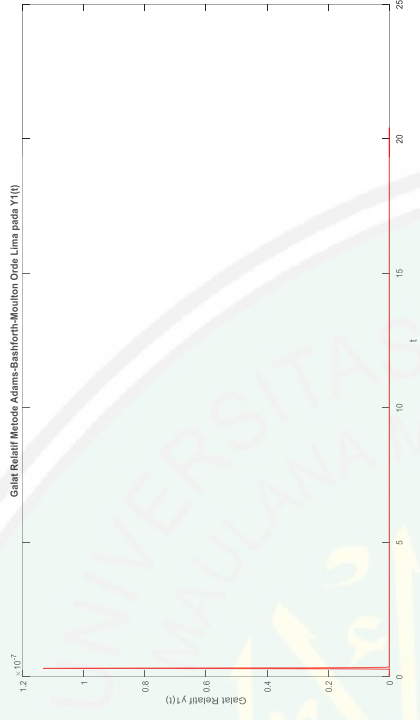
$$\theta_1(0) = \theta_{1(0)} = 1,2$$

$$\theta_2(0) = \theta_{2(0)} = 0$$

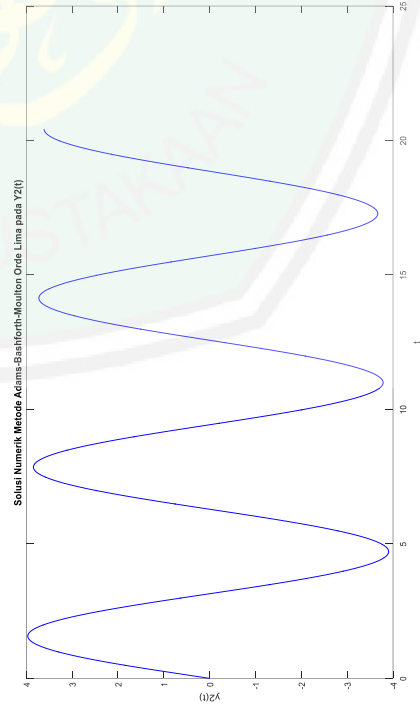
dan kriteria pemberhentian $\varepsilon = 10^{-20}$. Hasil simulasi numerik menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde lima untuk model gerak osilasi vertikal dan torsional sebagai berikut:



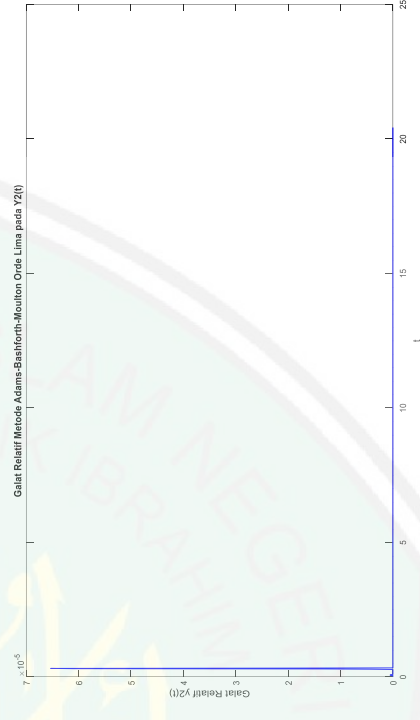
Gambar 3.35 Solusi Numerik $y_1(t)$ pada Kasus Kedua dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima



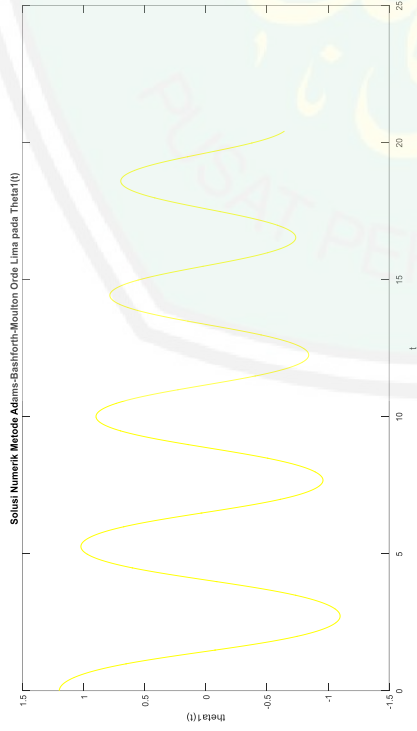
Gambar 3.33 Galat Relatif $y_1(t)$ pada Kasus Kedua dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima



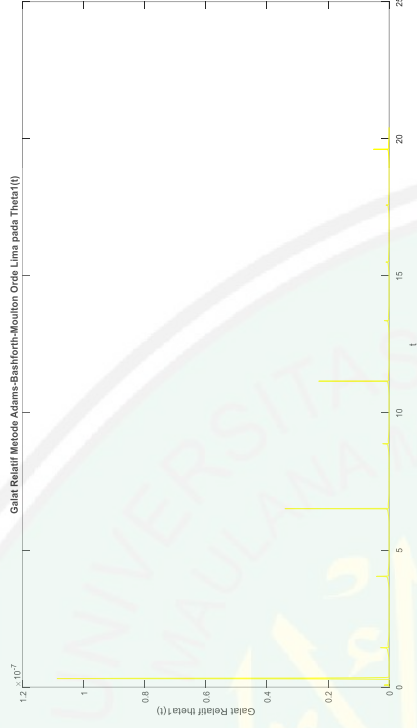
Gambar 3.36 Solusi Numerik $y_2(t)$ pada Kasus Kedua dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima



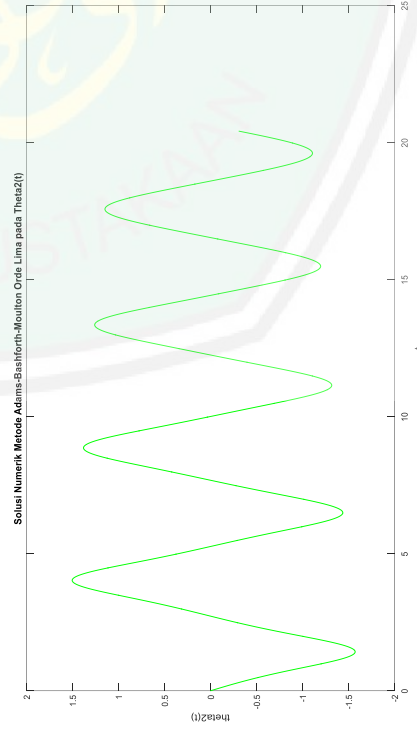
Gambar 3.34 Galat Relatif $y_2(t)$ pada Kasus Kedua dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima



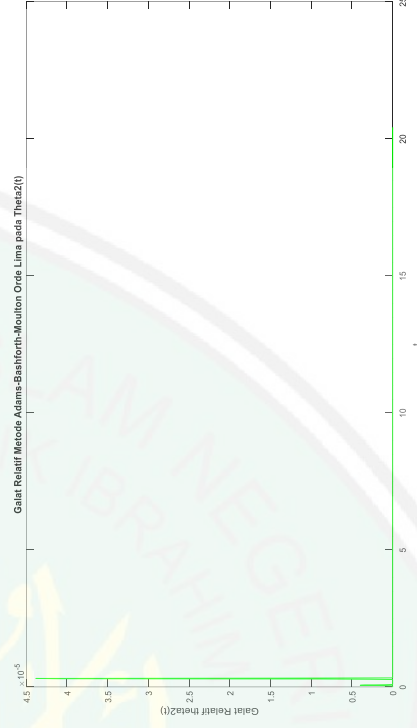
Gambar 3.39 Solusi Numerik $\theta_1(t)$ pada Kasus Kedua dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima



Gambar 3.37 Galat Relatif $\theta_1(t)$ pada Kasus Kedua dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima



Gambar 3.40 Solusi Numerik $\theta_2(t)$ pada Kasus Kedua dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima



Gambar 3.38 Galat Relatif $\theta_2(t)$ pada Kasus Kedua dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima

Tabel 3.6 Hasil Solusi Numerik Model Gerak Osilasi Vertikal Simulasi Kedua dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima

Interaksi n	t	$h = 0.01$											
		$y_{1(n+1)}^{(i)}$	$y_{1(n+1)}^{(i+1)}$	Galat Relatif $y_1(t)$	$y_{2(n+1)}^{(i)}$	$y_{2(n+1)}^{(i+1)}$	Galat Relatif $y_2(t)$	$\theta_{1(n+1)}^{(i)}$	$\theta_{1(n+1)}^{(i+1)}$	Galat Relatif $\theta_1(t)$	$\theta_{2(n+1)}^{(i)}$	$\theta_{2(n+1)}^{(i+1)}$	Galat Relatif $\theta_2(t)$
0	0		6			0			1.2		0		
1	0.01	6.00019391289947			0.0387512515554382			1.19995998439218			-0.00992638414701		
2	0.02	6.00077531328327			0.077497778763715			1.19982072691876			-0.01984770482535		
3	0.03	6.00174415625175			0.116238851152651			1.19958226751378			-0.02976661664494		
4	0.04	6.00310037760837			0.154973740023990			1.19924461956667			-0.03968577390082		
5	0.05	6.00484376096189			0.193701781780667			1.19879815495804			-0.04960794050065		
6	0.06	6.00697438827473			0.232422463433828			1.19825244143433			-0.05953617919280		
7	0.07	6.00949218035105			0.271134657667466			1.19760740813702			-0.06947211568431		
8	0.08	6.01239705170891			0.309838042584209			1.19686295719937			-0.07941993898275		
9	0.09	6.01568890920880			0.348531792326966			1.19601896486343			-0.0893811775129		
10	0.1	6.01936765305616			0.387215216616871			1.195075280280291			-0.09935878518925		
100	1	7.81474917310378			3.33474896400449			0.634460029002632			-1.22492921923421		
200	2	11.6081330354834			3.60852269246941			-0.75956355615424			-0.98495043952906		
300	3	13.8926297594842			3.45285 × 10 ⁻¹³			-1.0538513131726136			0.332331695106893		
400	4	12.5933638296367			3.49172 × 10 ⁻¹³			-0.6367946947833			1.49997284487769		
500	5	8.93458071916200			3.48480 × 10 ⁻¹³			0.976734368579141			0.353469701333692		
600	6	6.28686339975648			3.46772 × 10 ⁻¹³			0.657621976355762			-1.01358276849290		
700	7	7.06232001538908			3.49236 × 10 ⁻¹³			-0.62433092722951			-0.99513964773127		
800	8	10.5174909812181			3.48532 × 10 ⁻¹³			-0.88892089641851			0.442702095747148		
900	9	13.4648745159656			3.47491 × 10 ⁻¹³			0.167811308396830			1.34104356278271		
1000	10	13.2132159747010			3.49433 × 10 ⁻¹³			0.899434984305114			0.010730379717026		
2000	20	8.48748152977855			3.48962 × 10 ⁻¹³			-0.38920790856698			-0.87627482158321		
2041	20.41	9.92279539283184			3.48679 × 10 ⁻¹³			-0.64022205328621			-0.32236057969001		
2042	20.42	9.95889152949748			3.48657 × 10 ⁻¹³			-0.64337112874726			-0.30745012412691		

Dari Gambar 3.33, Gambar 3.34, Gambar 3.35, Gambar 3.36, Gambar 3.37, Gambar 3.38, Gambar 3.39, Gambar 3.40, dan Tabel 3.6 menunjukkan hasil solusi numerik model gerak osilasi vertikal dan torsional untuk nilai awal $y_1(0) = 6$, $y_2(0) = 0$, $\theta_1(0) = 1,2$, dan $\theta_2(0) = 0$ dengan ukuran langkah $h = 0.01$ berhenti saat di iterasi $n = 2042$ atau waktu $t = 20,42$, karena salah satu hasil galat relatif model gerak osilasi vertikal dan torsional telah memenuhi kondisi persamaan (4.54) dengan kriteria pemberhentian $\varepsilon = 10^{-20}$. Sehingga galat relatif terkecil solusi numerik model gerak osilasi vertikal dan torsional adalah $1,77412018055013 \times 10^{-16}$ untuk $y_1(t)$, $1,24895289073744 \times 10^{-13}$ untuk $y_2(t)$, $1,90608952722218 \times 10^{-16}$ untuk $\theta_1(t)$, dan $1,24180449404304 \times 10^{-13}$ untuk $\theta_2(t)$. Dan galat relatif terbesar solusi numerik model gerak osilasi vertikal dan torsional adalah $1,13258607378114 \times 10^{-7}$ untuk $y_1(t)$, $6,5318726993942 \times 10^{-5}$ untuk $y_2(t)$, $1,08679781101889 \times 10^{-7}$ untuk $\theta_1(t)$, dan $4,3813018747523 \times 10^{-5}$ untuk $\theta_2(t)$.

Kasus ketiga atau terakhir dengan memberikan nilai awal model gerak osilasi vertikal dan torsional (3.60), yaitu:

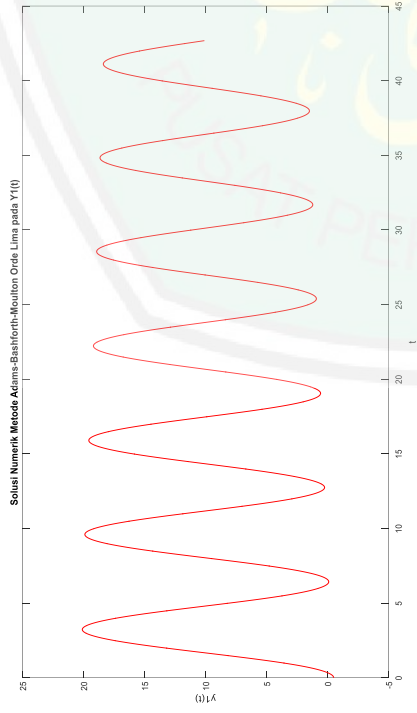
$$y_1(0) = y_{1(0)} = -0,5$$

$$y_2(0) = y_{2(0)} = 0$$

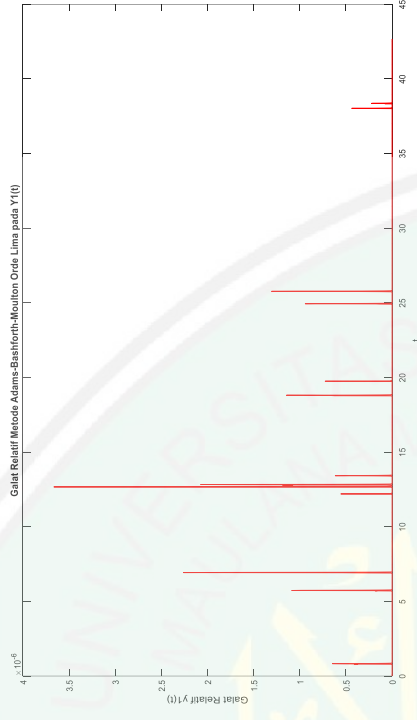
$$\theta_1(0) = \theta_{1(0)} = 0,5$$

$$\theta_2(0) = \theta_{2(0)} = 0$$

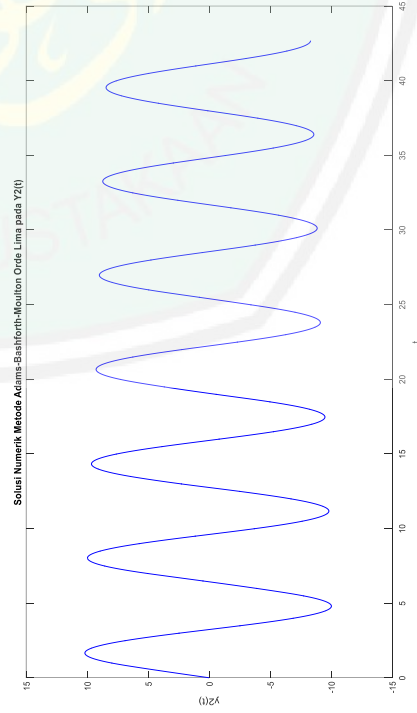
dan kriteria pemberhentian $\varepsilon = 10^{-20}$. Hasil simulasi numerik menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde lima untuk model gerak osilasi vertikal dan torsional sebagai berikut:



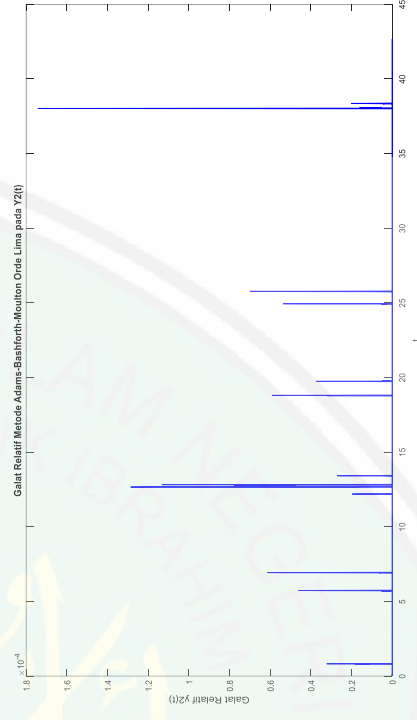
Gambar 3.43 Solusi Numerik $y_1(t)$ pada Kasus Ketiga dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima



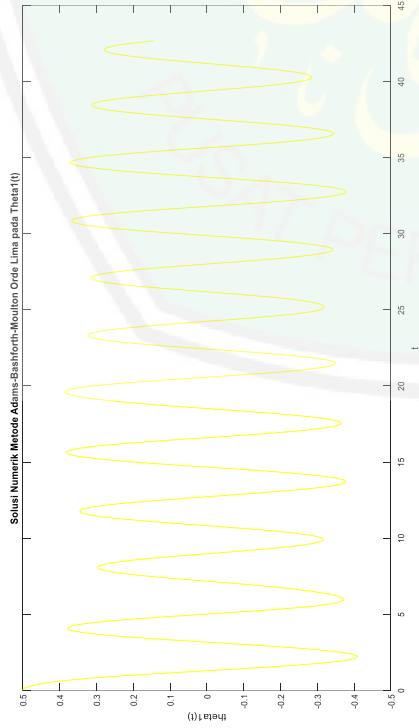
Gambar 3.41 Galat Relatif $y_1(t)$ pada Kasus Ketiga dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima



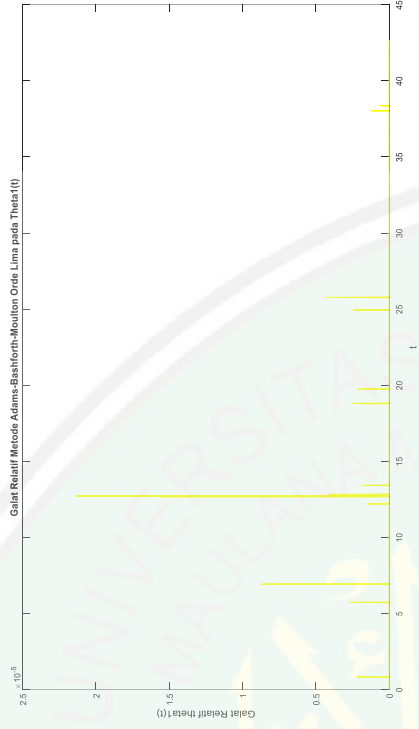
Gambar 3.44 Solusi Numerik $y_2(t)$ pada Kasus Ketiga dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima



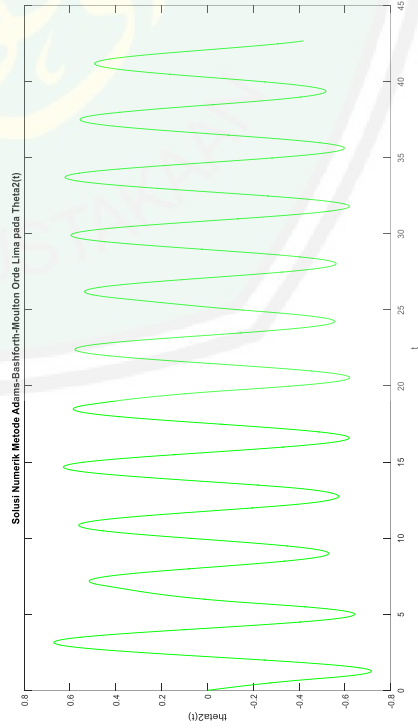
Gambar 3.42 Galat Relatif $y_2(t)$ pada Kasus Ketiga dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima



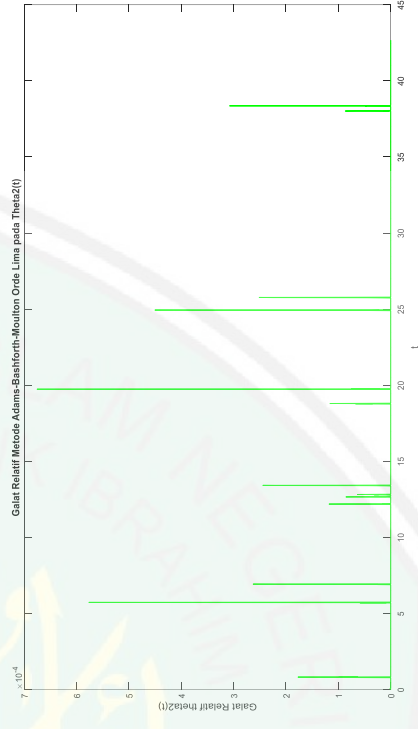
Gambar 3.47 Solusi Numerik $\theta_1(t)$ pada Kasus Ketiga dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima



Gambar 3.45 Galat Relatif $\theta_1(t)$ pada Kasus Ketiga dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima



Gambar 3.48 Solusi Numerik $\theta_2(t)$ pada Kasus Ketiga dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima



Gambar 3.46 Galat Relatif $\theta_2(t)$ pada Kasus Ketiga dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima

Tabel 3.7 Hasil Solusi Numerik Model Gerak Osilasi Vertikal Simulasi Ketiga dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima

Interasi n	t	$h = 0.01$											
		$y_{1(n+1)}^{(i)}$	$y_{1(n+1)}^{(i+1)}$	Galat Relatif $y_1(t)$	$y_{2(n+1)}^{(i)}$	$y_{2(n+1)}^{(i+1)}$	Galat Relatif $y_2(t)$	$\theta_{1(n+1)}^{(i)}$	$\theta_{1(n+1)}^{(i+1)}$	Galat Relatif $\theta_1(t)$	$\theta_{2(n+1)}^{(i)}$	$\theta_{2(n+1)}^{(i+1)}$	Galat Relatif $\theta_2(t)$
0	0		-0.5			0			0.5		0		
1	0.01		-0.49956753845130			0.0864223744425848			0.499978527439229		-0.005332611572763		
2	0.02		-0.49827090866147			0.172833198421312			0.499903817626418		-0.01064648205742		
3	0.03		-0.49611023991366			0.259292718332640			0.499775923062181		-0.01596233796994		
4	0.04		-0.49308568902814			0.345609180461176			0.499594883852130		-0.02127492372422		
5	0.05	-0.48919778131380	-0.48919778120114	2.30294×10^{-10}	0.431968863296385	0.431968916698504	1.23624×10^{-7}	0.499355580656348	0.499355580687466	6.23166×10^{-11}	-0.02658547193144	-0.02658545618660	5.92235×10^{-7}
6	0.06	-0.48444638525116	-0.48444638491120	7.01734×10^{-10}	0.518306442059513	0.518306281843461	3.09114×10^{-7}	0.499063177536972	0.499063177642465	2.11383×10^{-10}	-0.03189509856959	-0.03189514580416	1.48093×10^{-6}
7	0.07	-0.47883173831958	-0.47883173952001	2.50700×10^{-9}	0.604618309254082	0.604618469497545	2.65032×10^{-7}	0.498717676731391	0.498717676370833	7.22970×10^{-10}	-0.03720550003188	-0.03720552578978	1.26976×10^{-6}
8	0.08	-0.47235410987892	-0.47235410884755	2.18348×10^{-9}	0.690902807918246	0.690902754472851	7.73558×10^{-8}	0.498319066669686	0.498319066975637	61.3966×10^{-10}	-0.04251699935913	-0.04251701511528	3.70584×10^{-7}
9	0.09	-0.46501378607545	-0.46501378644068	7.85419×10^{-10}	0.777156388024587	0.777156388031754	3.49569×10^{-11}	0.497867326550748	0.497867326442669	2.17083×10^{-10}	-0.04783167951418	-0.04783167950483	1.95555×10^{-10}
10	0.1	-0.45681109249614	-0.45681109238678	2.39402×10^{-10}	0.863376629357574	0.863376629342041	1.79908×10^{-11}	0.497362419528012	0.497362419559882	6.40782×10^{-11}	-0.05315049229294	-0.05315049229744	8.46971×10^{-11}
100	1	3.69142083541710	3.69142083541929	5.94778×10^{-13}	8.06563707309450	8.06563707309168	3.49076×10^{-13}	0.197812878405867	0.197812878394852	5.56816×10^{-11}	-0.64621004766605	-0.64621004766509	1.48233×10^{-12}
200	2	13.3351635820131	13.3351635820119	8.76511×10^{-14}	9.58449956460641	9.58449956460307	3.48432×10^{-13}	-0.38312882038432	-0.38312882038489	1.49221×10^{-12}	-0.23397359101163	-0.23397359103926	1.18106×10^{-10}
300	3	19.8318957211741	19.8318957211706	1.73050×10^{-13}	2.32021638472060	2.32021638471980	3.46242×10^{-13}	-0.11034929562363	-0.11034929561593	6.97576×10^{-11}	0.649873085033403	0.649873085003915	4.53747×10^{-11}
400	4	17.2696301333037	17.2696301333011	1.46678×10^{-13}	-6.99435200727432	-6.99435200727188	3.49208×10^{-13}	0.374895582609422	0.374895582611867	6.52119×10^{-12}	0.084827141813008	0.084827141824717	1.38028×10^{-10}
500	5	8.08250134292577	8.08250134292645	8.35156×10^{-14}	-9.81770895545631	-9.81770895545289	3.48659×10^{-13}	0.004910801056569	0.004910801055237	2.71283×10^{-10}	-0.64260731470787	-0.64260731466238	7.07806×10^{-11}
600	6	0.725684494528476	0.725684494530501	2.79068×10^{-12}	-3.77461682551702	-3.77461682551945	3.79896×10^{-13}	-0.37087613773980	-0.37087613774002	5.90470×10^{-13}	0.022808412394559	0.022808412398935	1.91866×10^{-10}
1000	10	19.1122375037980	19.1122375037948	1.66182×10^{-13}	-3.84258053443965	-3.84258053443831	3.49832×10^{-13}	-0.31268082446239	-0.31268082446340	3.21831×10^{-12}	0.084456067450844	0.084456067455771	5.83416×10^{-11}
2000	20	4.27095667340349	4.27095667340548	4.66657×10^{-13}	7.34634685611886	7.34634685611630	3.49040×10^{-13}	0.310272404444628	0.310272404441720	9.37296×10^{-12}	-0.37018087690424	-0.37018087693030	7.03954×10^{-11}
3000	30	11.0851815467969	11.0851815467966	3.36516×10^{-14}	-8.80013388802524	-8.80013388802217	3.48806×10^{-13}	0.068641725921017	0.068641725918541	3.60750×10^{-11}	0.588093864946184	0.588093864913396	5.57524×10^{-11}
4000	40	13.6660434855515	13.6660434855503	9.38479×10^{-14}	7.56808051236858	7.56808051236595	3.48319×10^{-13}	-0.25031275380831	-0.25031275380599	9.28250×10^{-12}	-0.23819764743503	-0.23819764744961	6.11842×10^{-11}
4266	42.66	10.2617174098964	10.2617174098963	8.49215×10^{-15}	-8.31161236130411	-8.31161236130122	3.48577×10^{-13}	0.152388961280284	0.152388961275714	2.99869×10^{-11}	-0.41038172809186	-0.41038172809525	8.27645×10^{-12}
4267	42.67	10.1785937418183	10.1785937418183	5.58460×10^{-15}	-8.31298269180118	-8.31298269179828	3.48733×10^{-13}	0.148260828040628	0.148260828036026	3.10390×10^{-11}	-0.41522461761185	-0.41522461761438	6.09409×10^{-12}
4268	42.68	10.0954605273590	10.0954605273589	2.81529×10^{-15}	-8.31352163549351	-8.31352163549061	3.48710×10^{-13}	0.14408487876202	0.14408487871577	3.21017×10^{-11}	-0.41994482366375	-0.41994482366539	3.90413×10^{-12}

Dari Gambar 3.41, Gambar 3.42, Gambar 3.43, Gambar 3.44, Gambar 3.45, Gambar 3.46, Gambar 3.47, Gambar 3.48, dan Tabel 3.7 menunjukkan hasil solusi numerik model gerak osilasi vertikal dan torsional untuk nilai awal $y_1(0) = -0,5$, $y_2(0) = 0$, $\theta_1(0) = 0,5$, dan $\theta_2(0) = 0$ dengan ukuran langkah $h = 0.01$ berhenti saat di iterasi $n = 4268$ atau waktu $t = 42,68$, karena salah satu hasil galat relatif model gerak osilasi vertikal dan torsional telah memenuhi kondisi persamaan (4.54) dengan kriteria pemberhentian $\varepsilon = 10^{-20}$. Sehingga galat relatif terkecil solusi numerik model gerak osilasi vertikal dan torsional adalah $1,77817700485202 \times 10^{-16}$ untuk $y_1(t)$, $1,98006131301671 \times 10^{-15}$ untuk $y_2(t)$, $2,61206507694246 \times 10^{-15}$ untuk $\theta_1(t)$, dan $1,17466551651688 \times 10^{-14}$ untuk $\theta_2(t)$. Dan galat relatif terbesar solusi numerik model gerak osilasi vertikal dan torsional adalah $3,66367558653258 \times 10^{-6}$ untuk $y_1(t)$, $0,00017415649778281$ untuk $y_2(t)$, $2,1387087114825 \times 10^{-5}$ untuk $\theta_1(t)$, dan $0,000675333603378575$ untuk $\theta_2(t)$.

3.4.3 Simulasi Numerik dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam

Simulasi Numerik pada model gerak osilasi vertikal dan torsional menggunakan 3 kasus nilai awal. Kasus pertama dengan memberikan nilai awal model gerak osilasi vertikal dan torsional (3.60), yaitu (Kwofie, 2012):

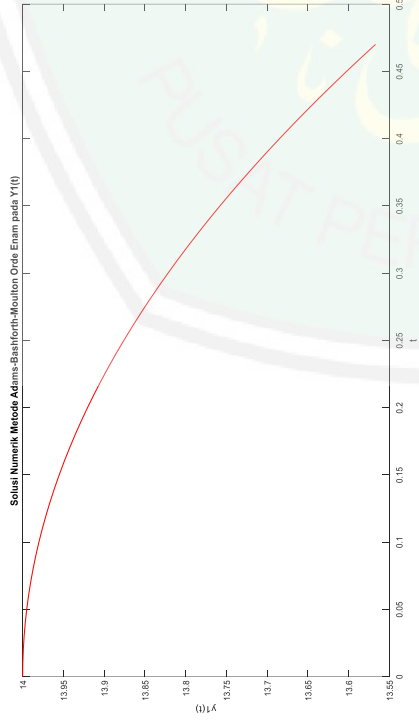
$$y_1(0) = y_{1(0)} = 14$$

$$y_2(0) = y_{2(0)} = 0$$

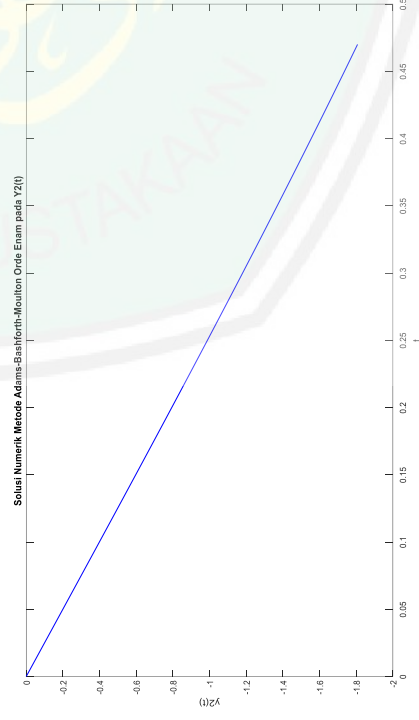
$$\theta_1(0) = \theta_{1(0)} = 1, 2$$

$$\theta_2(0) = \theta_{2(0)} = 0$$

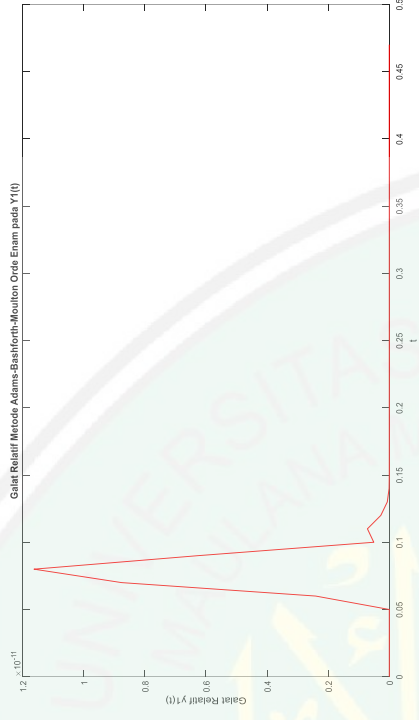
dan kriteria pemberhentian $\varepsilon = 10^{-20}$. Hasil simulasi numerik menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde enam untuk model gerak osilasi vertikal dan torsional sebagai berikut:



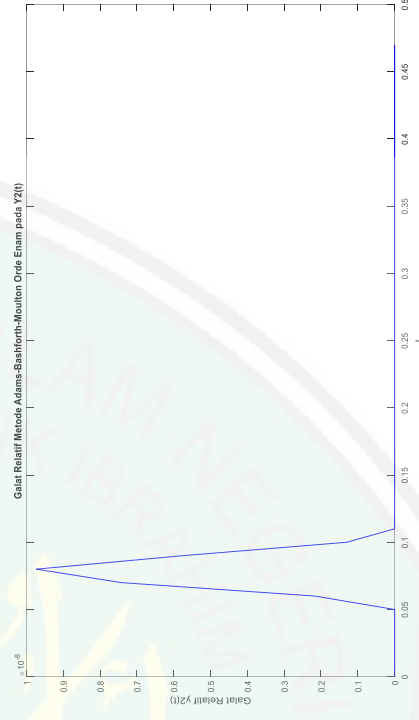
Gambar 3.51 Solusi Numerik $y_1(t)$ pada Kasus Pertama dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam



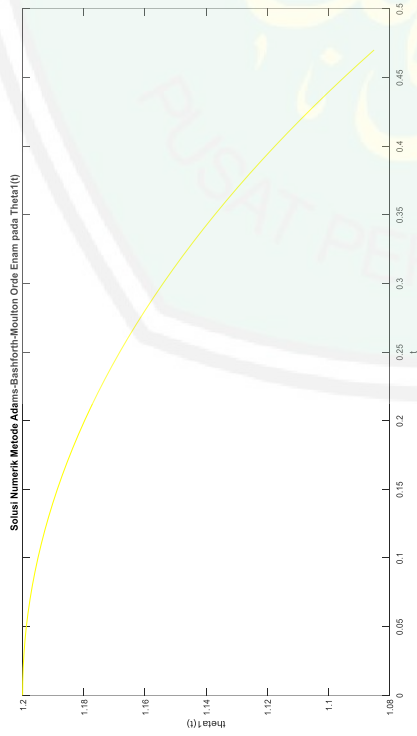
Gambar 3.52 Solusi Numerik $y_2(t)$ pada Kasus Pertama dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam



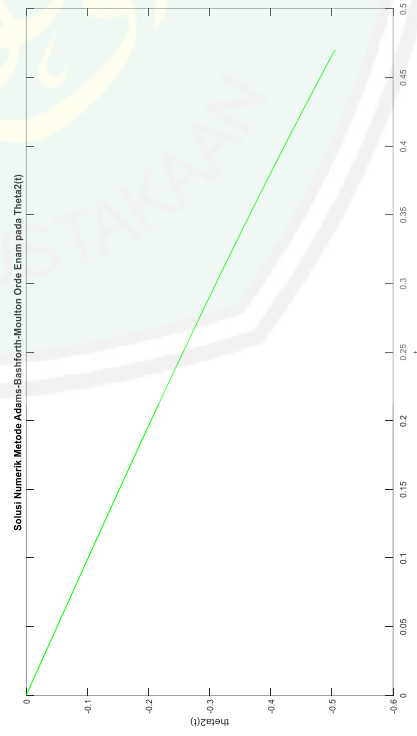
Gambar 3.49 Galat Relatif $y_1(t)$ pada Kasus Pertama dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam



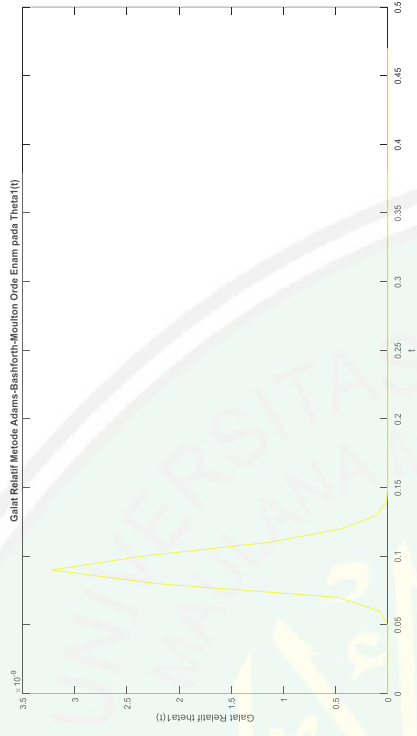
Gambar 3.50 Galat Relatif $y_2(t)$ pada Kasus Pertama dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam



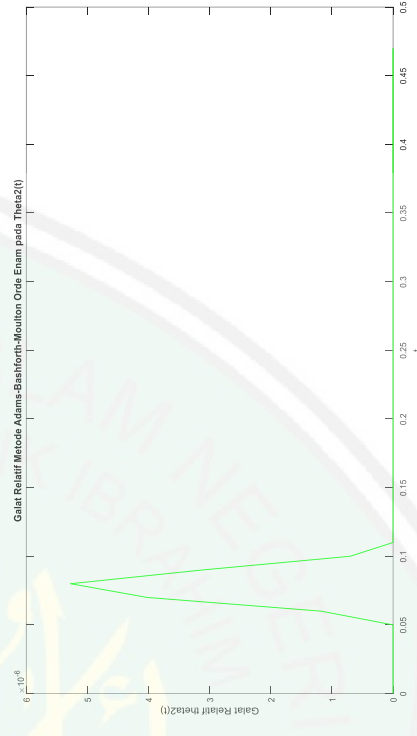
Gambar 3.55 Solusi Numerik $\theta_1(t)$ pada Kasus Pertama dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam



Gambar 3.56 Solusi Numerik $\theta_2(t)$ pada Kasus Pertama dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam



Gambar 3.53 Galat Relatif $\theta_1(t)$ pada Kasus Pertama dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam



Gambar 3.54 Galat Relatif $\theta_2(t)$ pada Kasus Pertama dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam

Tabel 3.8 Hasil Solusi Numerik Model Gerak Osilasi Vertikal Simulasi Pertama dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam

Interaksi n	t	$h = 0.01$											
		$y_{1(n+1)}^{(i)}$	$y_{1(n+1)}^{(i+1)}$	Galat Relatif $y_1(t)$	$y_{2(n+1)}^{(i)}$	$y_{2(n+1)}^{(i+1)}$	Galat Relatif $y_2(t)$	$\theta_{1(n+1)}^{(i)}$	$\theta_{1(n+1)}^{(i+1)}$	Galat Relatif $\theta_1(t)$	$\theta_{2(n+1)}^{(i)}$	$\theta_{2(n+1)}^{(i+1)}$	Galat Relatif $\theta_2(t)$
0	0		14			0			1.2			0	
1	0.01		13.9997998504613			-0.03999733031285			1.19995916989383			-0.01012842267763	
2	0.02		13.9991997643296			-0.07998665843602			1.19981707900342			-0.02025135748622	
3	0.03		13.9981998416331			-0.11996398647107			1.19957377317634			-0.03037104464979	
4	0.04		13.9968002223716			-0.15992531811960			1.19922927586661			-0.04048972212671	
5	0.05		13.9950010864979			-0.19986665908268			1.19878358816042			-0.05060962485559	
6	0.06	13.9928028114671	13.9928028114334	2.40959 $\times 10^{-12}$	-0.23978402819889	2.16617 $\times 10^{-9}$	1.1982267892498	1.1982267892498	1.1982267892498	7.97382 $\times 10^{-11}$	-0.06073301297101	-0.06073308432071	1.17480 $\times 10^{-6}$
7	0.07	13.9902054990356	13.9902054991581	8.76115 $\times 10^{-12}$	-0.27967343135399	7.42088 $\times 10^{-9}$	1.19756890646318	1.19756890646318	1.19756890646318	4.5687 $\times 10^{-10}$	-0.07086279655742	-0.07086251147721	4.02300 $\times 10^{-6}$
8	0.08	13.9872094495238	13.9872094493612	1.16297 $\times 10^{-11}$	-0.31953087242949	9.73221 $\times 10^{-9}$	1.1968095952740	1.1968095952740	1.1968095952740	2.20381 $\times 10^{-9}$	-0.0809958019183	-0.08100000730028	5.27294 $\times 10^{-6}$
9	0.09	13.9838150013571	13.9838150014449	6.28059 $\times 10^{-12}$	-0.35935238726143	5.76442 $\times 10^{-9}$	1.19594887547188	1.19594887547188	1.19594887547188	3.21993 $\times 10^{-9}$	-0.09114814321827	-0.09114785886961	3.11964 $\times 10^{-6}$
10	0.1	13.9800225347094	13.9800225347023	5.08509 $\times 10^{-13}$	-0.39913397919865	1.29884 $\times 10^{-9}$	1.19498659977413	1.19498659977413	1.19498659977413	2.36033 $\times 10^{-9}$	-0.10130817724200	-0.10130824813001	6.99725 $\times 10^{-7}$
15	0.15	13.9551059733036	13.9551059733036	6.36454 $\times 10^{-16}$	-0.59730431400759	1.97024 $\times 10^{-14}$	1.18864662523395	1.18864662523395	1.18864662523395	6.39805 $\times 10^{-13}$	-0.1523749685440	-0.1523749685255	1.21559 $\times 10^{-11}$
17	0.17	13.9423709357650	13.9423709357650	5.09628 $\times 10^{-16}$	-0.67615436107529	2.10171 $\times 10^{-14}$	1.18539340278329	1.18539340278329	1.18539340278329	1.54724 $\times 10^{-13}$	-0.17296573328909	-0.17296573328793	6.68223 $\times 10^{-12}$
20	0.2	13.9203186329318	13.9203186329318	5.10435 $\times 10^{-16}$	-0.79388301135837	1.84598 $\times 10^{-14}$	1.17973844545804	1.17973844545804	1.17973844545821	1.49631 $\times 10^{-13}$	-0.20408091429674	-0.20408091429762	5.48023 $\times 10^{-12}$
25	0.25	13.8757523762432	13.8757523762432	2.50337 $\times 10^{-16}$	-0.98837964583743	1.48272 $\times 10^{-14}$	1.16822349790741	1.16822349790741	1.16822349790765	2.00144 $\times 10^{-13}$	-0.25668856485205	-0.25668856485086	4.61539 $\times 10^{-12}$
27	0.27	13.8552130046701	13.8552130046701	2.56417 $\times 10^{-16}$	-1.06548647617561	1.39626 $\times 10^{-14}$	1.16287652504308	1.16287652504308	1.16287652504333	2.21686 $\times 10^{-13}$	-0.27804075108806	-0.27804075108685	4.34081 $\times 10^{-12}$
30	0.3	13.8215234560623	13.8215234560623	2.57042 $\times 10^{-16}$	-1.18030923943654	1.26043 $\times 10^{-14}$	1.15405037429618	1.15405037429618	1.15405037429647	2.55128 $\times 10^{-13}$	-0.31044846480366	-0.31044846480242	3.96224 $\times 10^{-12}$
35	0.35	13.7577722126914	13.7577722126914	2.59233 $\times 10^{-16}$	-1.36919347127732	1.11898 $\times 10^{-14}$	1.13715553920459	1.13715553920459	1.13715553920494	3.13202 $\times 10^{-13}$	-0.36559433836287	-0.36559433836165	3.34544 $\times 10^{-12}$
37	0.37	13.7296414275513	13.7296414275513	2.58762 $\times 10^{-16}$	-1.44378878631536	1.04579 $\times 10^{-14}$	1.12961914256376	1.12961914256414	1.12961914256414	3.6717 $\times 10^{-13}$	-0.38808902895273	-0.38808902895153	3.08245 $\times 10^{-12}$
39	0.39	13.7000246103333	13.7000246103333	1.29660 $\times 10^{-16}$	-1.51779174530370	1.00943 $\times 10^{-14}$	1.12163018962637	1.12163018962677	1.12163018962677	3.60298 $\times 10^{-13}$	-0.41085195488642	-0.41085195488527	2.80074 $\times 10^{-12}$
40	0.4	13.6846627111799	13.6846627111799	2.59612 $\times 10^{-16}$	-1.55456186933794	9.71272 $\times 10^{-15}$	1.11746430055475	1.11746430055475	1.11746430055516	3.71973 $\times 10^{-13}$	-0.42233763151916	-0.42233763151804	2.65110 $\times 10^{-12}$
45	0.45	13.6023823194901	13.6023823194901	1.30591 $\times 10^{-16}$	-1.73595298257042	8.82574 $\times 10^{-15}$	1.09489209015606	1.09489209015606	1.09489209015653	4.26489 $\times 10^{-13}$	-0.48086033442221	-0.48086033442134	1.79141 $\times 10^{-12}$
46	0.46	13.5848438353103	13.5848438353103	1.30760 $\times 10^{-16}$	-1.77171402651181	8.77292 $\times 10^{-15}$	1.09002390189355	1.09002390189402	1.09002390189402	4.36134 $\times 10^{-13}$	-0.49279184634475	-0.49279184634396	1.59259 $\times 10^{-12}$
47	0.47	13.5669486414185	13.5669486414185	1.30932 $\times 10^{-16}$	-1.80729433345959	8.60021 $\times 10^{-15}$	1.08503600113754	1.08503600113754	1.08503600113803	4.45302 $\times 10^{-13}$	-0.5048013830592	-0.50480138305923	1.38381 $\times 10^{-12}$

Dari Gambar 3.49, Gambar 3.50, Gambar 3.51, Gambar 3.52, Gambar 3.53, Gambar 3.54, Gambar 3.55, Gambar 3.56, dan Tabel 3.8 menunjukkan hasil solusi numerik model gerak osilasi vertikal dan torsional untuk nilai awal $y_1(0) = 14$, $y_2(0) = 0$, $\theta_1(0) = 1,2$, dan $\theta_2(0) = 0$ dengan ukuran langkah $h = 0.01$ berhenti saat di iterasi $n = 47$ atau waktu $t = 0,47$, karena salah satu hasil galat relatif model gerak osilasi vertikal dan torsional telah memenuhi kondisi persamaan (4.59) dengan kriteria pemberhentian $\varepsilon = 10^{-20}$. Sehingga galat relatif terkecil solusi numerik model gerak osilasi vertikal dan torsional adalah $1,29519103495881 \times 10^{-16}$ untuk $y_1(t)$, $8,60021638810714 \times 10^{-15}$ untuk $y_2(t)$, $5,27487848189871 \times 10^{-14}$ untuk $\theta_1(t)$, dan $1,38381619095561 \times 10^{-12}$ untuk $\theta_2(t)$. Dan galat relatif terbesar solusi numerik model gerak osilasi vertikal dan torsional adalah $1,16297751742516 \times 10^{-11}$ untuk $y_1(t)$, $9,73221049966855 \times 10^{-9}$ untuk $y_2(t)$, $3,21993591731726 \times 10^{-9}$ untuk $\theta_1(t)$, dan $5,27294334913894 \times 10^{-6}$ untuk $\theta_2(t)$.

Kasus kedua dengan memberikan nilai awal model gerak osilasi vertikal dan torsional (3.60), yaitu:

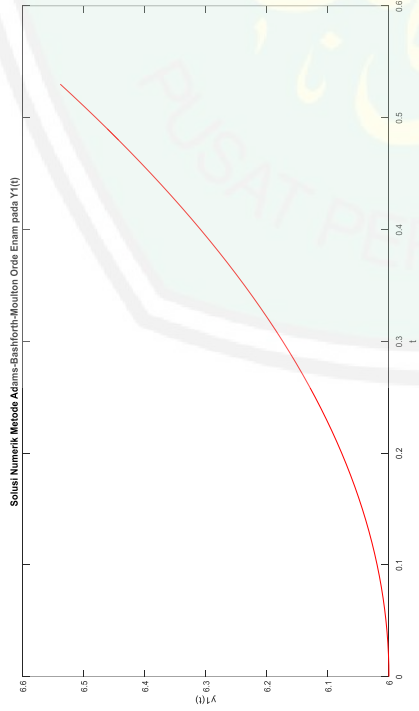
$$y_1(0) = y_{1(0)} = 6$$

$$y_2(0) = y_{2(0)} = 0$$

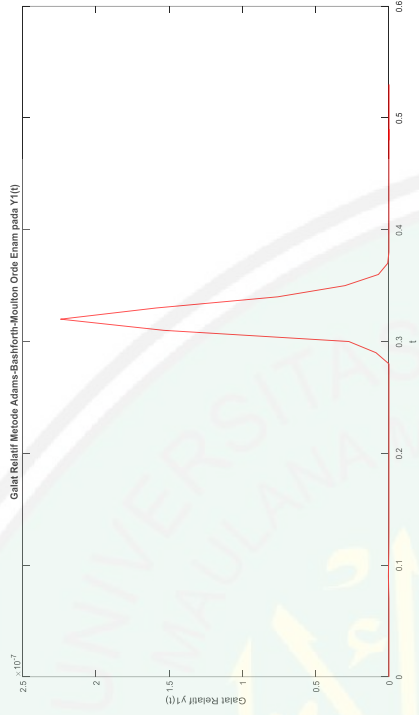
$$\theta_1(0) = \theta_{1(0)} = 1,2$$

$$\theta_2(0) = \theta_{2(0)} = 0$$

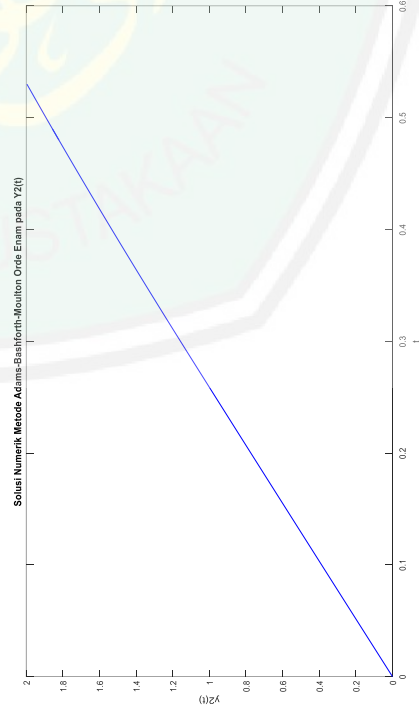
dan kriteria pemberhentian $\varepsilon = 10^{-20}$. Hasil simulasi numerik menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde enam untuk model gerak osilasi vertikal dan torsional sebagai berikut:



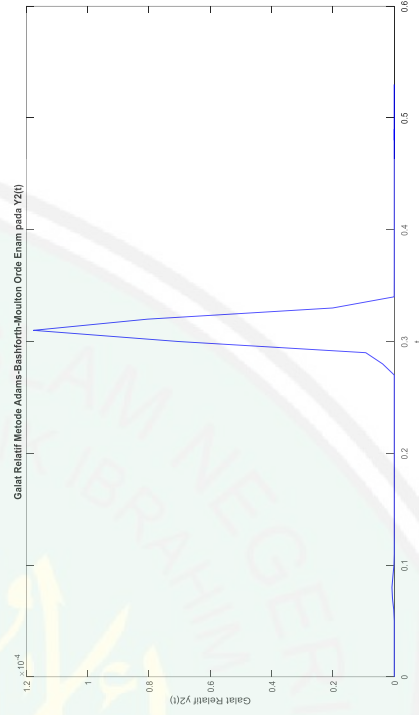
Gambar 3.59 Solusi Numerik $y_1(t)$ pada Kasus Kedua dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam



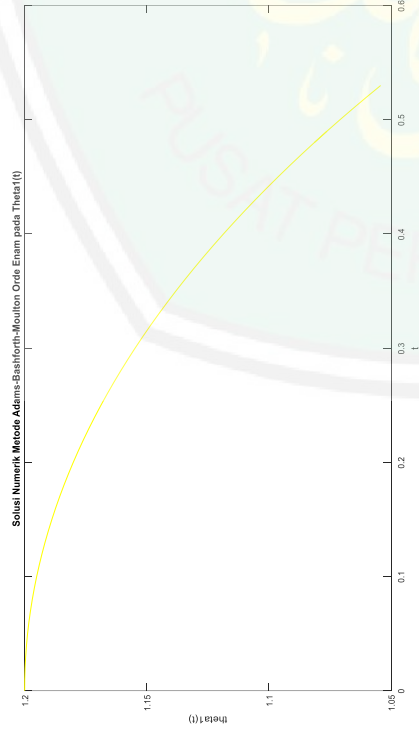
Gambar 3.57 Galat Relatif $y_1(t)$ pada Kasus Kedua dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam



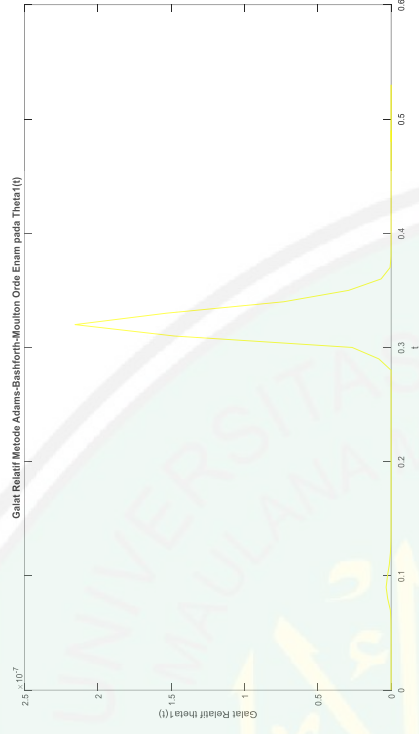
Gambar 3.60 Solusi Numerik $y_2(t)$ pada Kasus Kedua dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam



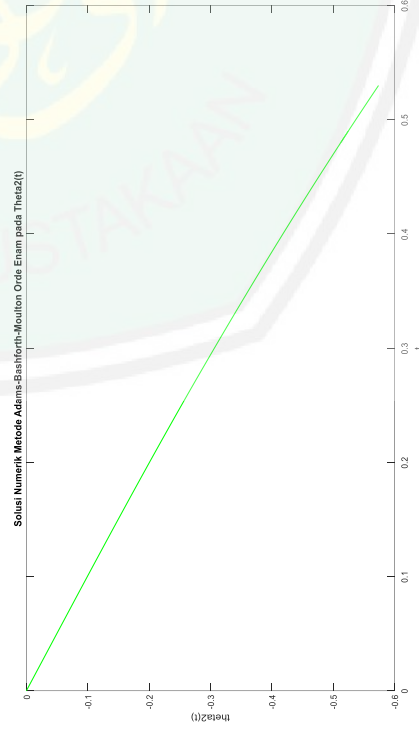
Gambar 3.58 Galat Relatif $y_2(t)$ pada Kasus Kedua dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam



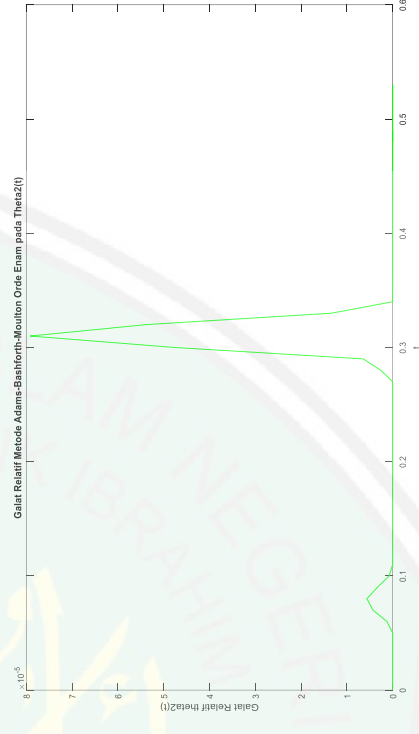
Gambar 3.63 Solusi Numerik $\theta_1(t)$ pada Kasus Kedua dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam



Gambar 3.61 Galat Relatif $\theta_1(t)$ pada Kasus Kedua dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam



Gambar 3.64 Solusi Numerik $\theta_2(t)$ pada Kasus Kedua dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam



Gambar 3.62 Galat Relatif $\theta_2(t)$ pada Kasus Kedua dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam

Tabel 3.9 Hasil Solusi Numerik Model Gerak Osilasi Vertikal Simulasi Kedua dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam

Interaksi n	t	$h = 0,01$											
		$y_{1(n+1)}^{(i)}$	$y_{1(n+1)}^{(i+1)}$	Galat Relatif $y_1(t)$	$y_{2(n+1)}^{(i)}$	$y_{2(n+1)}^{(i+1)}$	Galat Relatif $y_2(t)$	$\theta_{1(n+1)}^{(i)}$	$\theta_{1(n+1)}^{(i+1)}$	Galat Relatif $\theta_1(t)$	$\theta_{2(n+1)}^{(i)}$	$\theta_{2(n+1)}^{(i+1)}$	Galat Relatif $\theta_2(t)$
0	0		6			0			1,2			0	
1	0.01		6,00019391289947			0,038751251554382			1,1999598439218			-0,00992638414701	
2	0.02		6,0007753128327			0,077497778763715			1,19982072691876			-0,01984770482535	
3	0.03		6,00174415625175			0,116238851152651			1,19958226751378			-0,02976661664494	
4	0.04		6,00310037760837			0,154973740023990			1,19924461956667			-0,03968577390082	
5	0.05		6,00484391388382			0,193701719739121			1,19880776992395			-0,04960783092836	
6	0.06	6,00697453948535	6,00697453955548	$1,16738 \times 10^{-11}$	0,232422090249120	0,232422129220026	$1,67672 \times 10^{-7}$	1,19826205929209	1,19826205919432	$8,15894 \times 10^{-11}$	-0,05953547209464	-0,05953554675516	$1,25404 \times 10^{-6}$
7	0.07	6,00949232930005	6,00949232953592	$3,92483 \times 10^{-11}$	0,271134504566592	0,271134349090057	$5,73429 \times 10^{-7}$	1,19761703051496	1,19761702992272	$4,94511 \times 10^{-10}$	-0,06947206863271	-0,06947177045763	$4,29203 \times 10^{-6}$
8	0.08	6,01239719775057	6,01239719641209	$2,22620 \times 10^{-10}$	0,309837373187789	0,309837605837640	$7,50876 \times 10^{-7}$	1,19687258470019	1,19687258747077	$2,31484 \times 10^{-9}$	-0,07941858668727	-0,07941903324886	$5,62285 \times 10^{-6}$
9	0.09	6,01568904732796	6,01568904936152	$3,38042 \times 10^{-10}$	0,348531393706868	0,348531238973243	$4,43959 \times 10^{-7}$	1,19602860778123	1,19602860734754	$3,37256 \times 10^{-9}$	-0,08938036598681	-0,08938006878367	$3,32516 \times 10^{-6}$
10	0.1	6,01936778861140	6,01936778709119	$2,52553 \times 10^{-10}$	0,387214505635180	0,387214544191836	$9,95743 \times 10^{-8}$	1,19508492783322	1,19508493078324	$2,46846 \times 10^{-9}$	-0,09935735385324	-0,09935750991737	$7,45430 \times 10^{-7}$
15	0.15	6,04356078879372	6,04356078879348	$3,90920 \times 10^{-14}$	0,580452864065983	0,580452864065957	$4,43742 \times 10^{-14}$	1,18886407126619	1,18886407126697	$6,58178 \times 10^{-13}$	-0,14958411873190	-0,14958411873036	$1,02949 \times 10^{-11}$
17	0.17	6,05594194800703	6,05594194800707	$7,77310 \times 10^{-15}$	0,657653205758852	0,657653205759166	$4,78761 \times 10^{-13}$	1,18566963401784	1,18566963401795	$9,49477 \times 10^{-14}$	-0,16988300796913	-0,16988300796838	$4,40490 \times 10^{-12}$
20	0.2	6,07740716948937	6,07740716948945	$1,24222 \times 10^{-14}$	0,773337338393309	0,773337338393659	$4,53083 \times 10^{-13}$	1,18011300780553	1,18011300780561	$7,45095 \times 10^{-14}$	-0,20062146990367	-0,20062146990295	$3,60783 \times 10^{-12}$
25	0.25	6,12088749145330	6,12088749145339	$1,52361 \times 10^{-14}$	0,965800481618040	0,965800481618382	$3,53712 \times 10^{-13}$	1,16878281306166	1,16878281306179	$1,08288 \times 10^{-13}$	-0,25280558048619	-0,25280558048533	$3,39712 \times 10^{-12}$
27	0.27	6,14097218120197	6,14097218120207	$1,63433 \times 10^{-14}$	1,04265563390414	1,04265563390447	$3,20718 \times 10^{-13}$	1,16351441074878	1,16351441074892	$1,24045 \times 10^{-13}$	-0,27407606763736	-0,27407606763644	$3,36458 \times 10^{-12}$
30	0.3	6,17397784725379	6,17397784725379	$2,73586 \times 10^{-8}$	1,15749219022071	1,15757360922932	$7,03359 \times 10^{-5}$	1,15480796162896	1,15480799231718	$2,65743 \times 10^{-8}$	-0,30642127045146	-0,30643588058633	$4,76776 \times 10^{-5}$
35	0.35	6,23659873909496	6,23659892607952	$2,99818 \times 10^{-8}$	1,34672720848060	1,34672719083462	$1,31028 \times 10^{-8}$	1,13811575155175	1,13811578363618	$2,89211 \times 10^{-8}$	-0,36149961376093	-0,36149961907419	$1,46978 \times 10^{-8}$
40	0.4	6,3085928932658	6,30859289591967	$1,09406 \times 10^{-12}$	1,53241614219818	1,53241614218502	$8,58885 \times 10^{-12}$	1,11863162435183	1,11863162434999	$1,64652 \times 10^{-12}$	-0,41814411237131	-0,41814411237466	$8,00040 \times 10^{-12}$
45	0.45	6,38977516655402	6,38977516655402	$2,77999 \times 10^{-16}$	1,71418298758036	1,71418298758034	$8,80829 \times 10^{-15}$	1,09627185513230	1,09627185513276	$4,22711 \times 10^{-13}$	-0,47655449579318	-0,47655449579230	$1,85571 \times 10^{-12}$
50	0.5	6,47993828256948	6,47993828256948	$1,37065 \times 10^{-16}$	1,89157547849303	1,89157547849302	$8,21702 \times 10^{-15}$	1,07094427044207	1,07094427044257	$4,56675 \times 10^{-13}$	-0,53687755090695	-0,53687755090653	$7,73197 \times 10^{-13}$
51	0.51	6,4990287210557	6,4990287210557	$2,73226 \times 10^{-16}$	1,92649002927937	1,92649002927935	$8,06810 \times 10^{-15}$	1,06551404334590	1,06551404334640	$4,71799 \times 10^{-13}$	-0,54918135846523	-0,54918135846494	$5,22582 \times 10^{-13}$
52	0.52	6,51846742938936	6,51846742938936	$1,36255 \times 10^{-16}$	1,96120845101971	1,96120845101970	$7,92527 \times 10^{-15}$	1,05996037265545	1,05996037265596	$4,76785 \times 10^{-13}$	-0,56156634869885	-0,56156634869871	$2,60174 \times 10^{-13}$
53	0.53	6,53825227385346	6,53825227385347	$1,35843 \times 10^{-16}$	1,99572729168634	1,99572729168633	$7,78819 \times 10^{-15}$	1,05428244432881	1,05428244432932	$4,80616 \times 10^{-13}$	-0,57403294838775	-0,57403294838776	$1,56660 \times 10^{-14}$

Dari Gambar 3.57, Gambar 3.58, Gambar 3.59, Gambar 3.60, Gambar 3.61, Gambar 3.62, Gambar 3.63, Gambar 3.64, dan Tabel 3.9 menunjukkan hasil solusi numerik model gerak osilasi vertikal dan torsional untuk nilai awal $y_1(0) = 6$, $y_2(0) = 0$, $\theta_1(0) = 1,2$, dan $\theta_2(0) = 0$ dengan ukuran langkah $h = 0.01$ berhenti saat di iterasi $n = 53$ atau waktu $t = 0,53$, karena salah satu hasil galat relatif model gerak osilasi vertikal dan torsional telah memenuhi kondisi persamaan (4.59) dengan kriteria pemberhentian $\varepsilon = 10^{-20}$. Sehingga galat relatif terkecil solusi numerik model gerak osilasi vertikal dan torsional adalah $1,35843400075013 \times 10^{-16}$ untuk $y_1(t)$, $4,19213338108617 \times 10^{-15}$ untuk $y_2(t)$, $5,94534689005873 \times 10^{-14}$ untuk $\theta_1(t)$, dan $1,56660110272783 \times 10^{-14}$ untuk $\theta_2(t)$. Dan galat relatif terbesar solusi numerik model gerak osilasi vertikal dan torsional adalah $2,24060388991285 \times 10^{-7}$ untuk $y_1(t)$, $0,000117654078126362$ untuk $y_2(t)$, $2,15673891072678 \times 10^{-7}$ untuk $\theta_1(t)$, dan $7,9131645137083 \times 10^{-5}$ untuk $\theta_2(t)$.

Kasus ketiga atau terakhir dengan memberikan nilai awal model gerak osilasi vertikal dan torsional (3.60), yaitu:

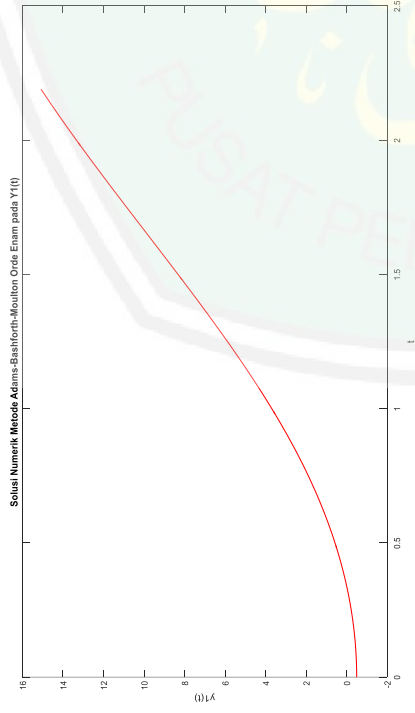
$$y_1(0) = y_{1(0)} = -0,5$$

$$y_2(0) = y_{2(0)} = 0$$

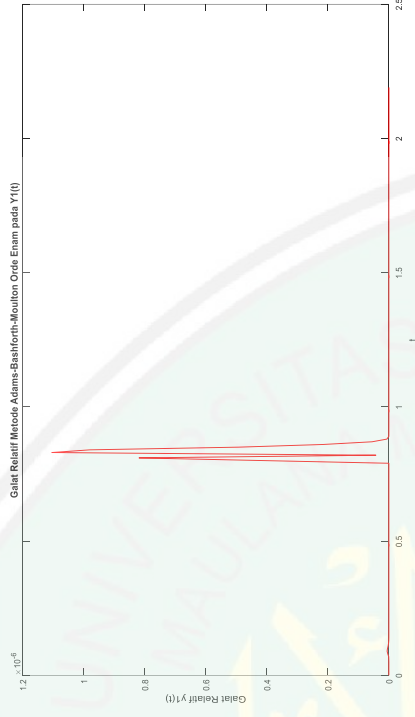
$$\theta_1(0) = \theta_{1(0)} = 0,5$$

$$\theta_2(0) = \theta_{2(0)} = 0$$

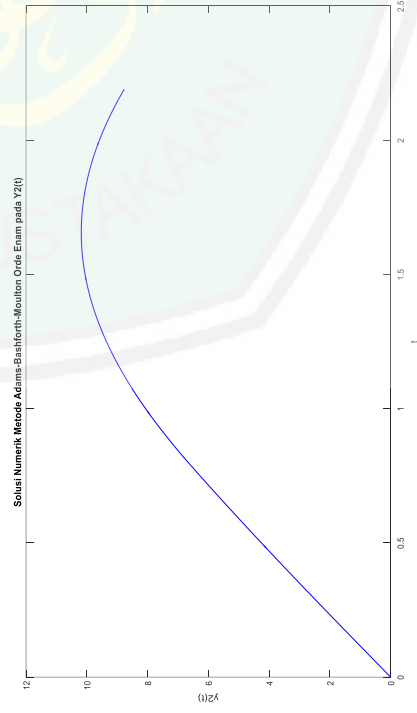
dan kriteria pemberhentian $\varepsilon = 10^{-20}$. Hasil simulasi numerik menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde enam untuk model gerak osilasi vertikal dan torsional sebagai berikut:



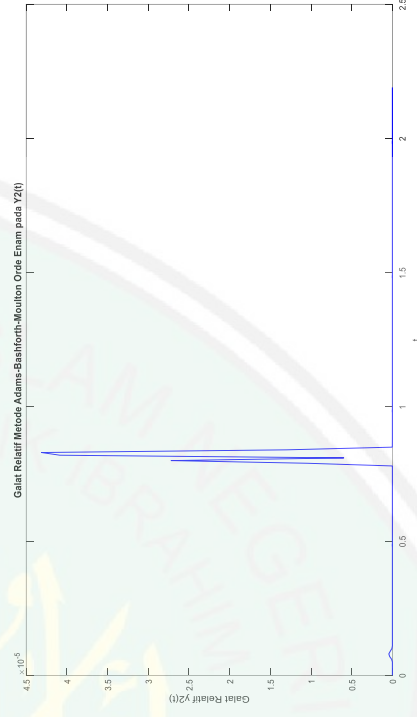
Gambar 3. 67 Solusi Numerik $y_1(t)$ pada Kasus Ketiga dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam



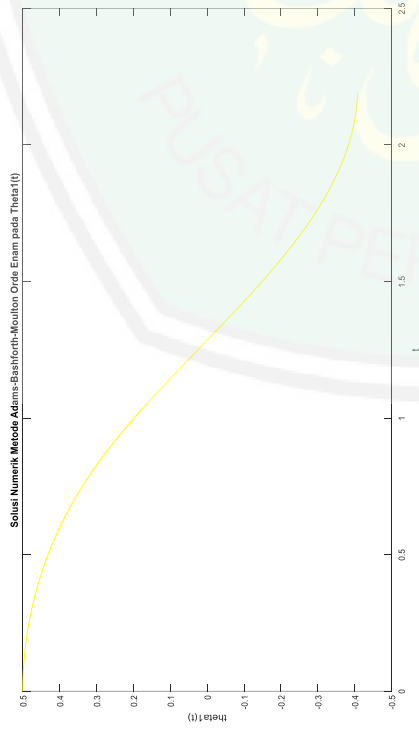
Gambar 3.65 Galat Relatif $y_1(t)$ pada Kasus Ketiga dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam



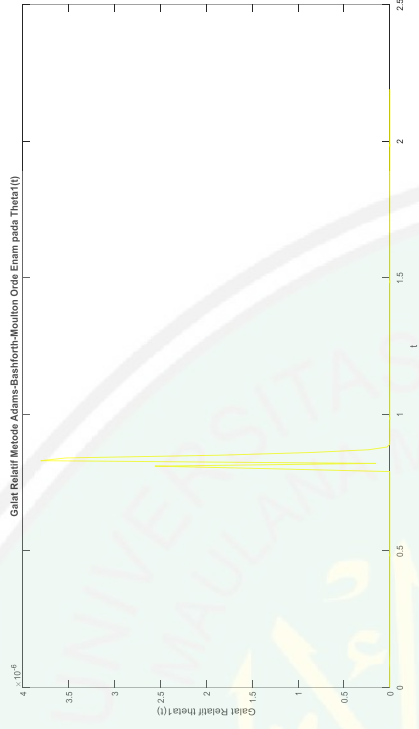
Gambar 3.68 Solusi Numerik $y_2(t)$ pada Kasus Ketiga dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam



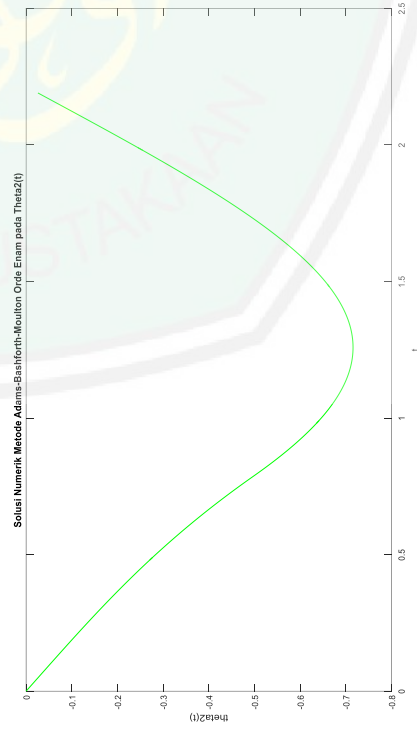
Gambar 3.66 Galat Relatif $y_2(t)$ pada Kasus Ketiga dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam



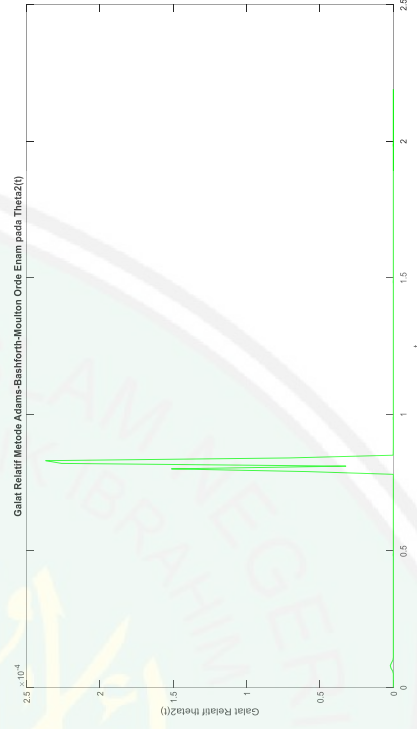
Gambar 3.71 Solusi Numerik $\theta_1(t)$ pada Kasus Ketiga dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam



Gambar 3.69 Galat Relatif $\theta_1(t)$ pada Kasus Ketiga dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam



Gambar 3.72 Solusi Numerik $\theta_2(t)$ pada Kasus Ketiga dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam



Gambar 3.70 Galat Relatif $\theta_2(t)$ pada Kasus Ketiga dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam

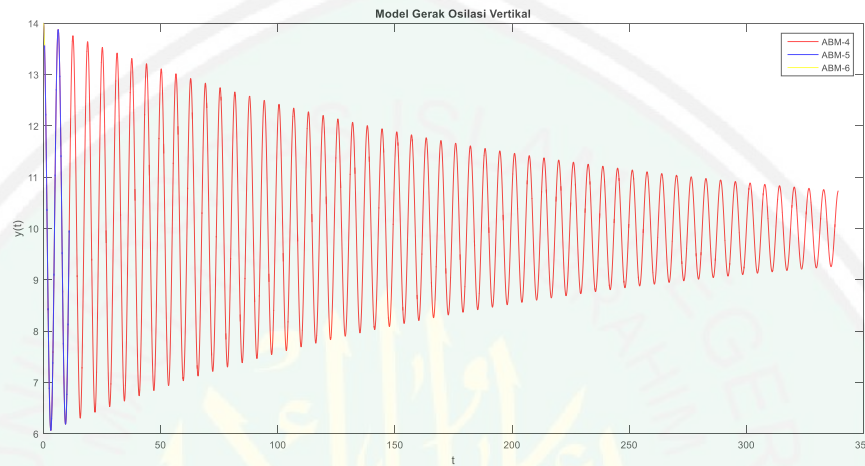
Tabel 3.10 Hasil Solusi Numerik Model Gerak Osilasi Vertikal Simulasi Ketiga dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam

Interaksi n	t	$h = 0.01$										
		$y_{1(n+1)}^{(i)}$	$y_{1(n+1)}^{(i+1)}$	Galat Relatif $y_1(t)$	$y_{2(n+1)}^{(i)}$	Galat Relatif $y_2(t)$	$\theta_{1(n+1)}^{(i)}$	$\theta_{1(n+1)}^{(i+1)}$	Galat Relatif $\theta_1(t)$	$\theta_{2(n+1)}^{(i)}$	$\theta_{2(n+1)}^{(i+1)}$	Galat Relatif $\theta_2(t)$
0	0		-0.5		0			0.5		0		
1	0.01		-0.49956753845130		0.086422374442584			0.499978527439229		-0.005332611572763		
2	0.02		-0.49827090866147		0.172833198421312			0.499903817626418		-0.01064648205742		
3	0.03		-0.49611023991366		0.259229718332640			0.499775923062181		-0.01596233796994		
4	0.04		-0.49308568902814		0.345609180461176			0.499594883852130		-0.02127492372422		
5	0.05		-0.48919744036025		0.431968831617998			0.499360727694385		-0.02658548078535		
6	0.06	-0.48444604665453	-0.48444604654644	2.23131 $\times 10^{-10}$	0.518305952544864	9.74853 $\times 10^{-8}$	0.499068323894652	0.499068323925477	6.17645 $\times 10^{-11}$	-0.03189524240777	-0.03189522750979	4.67091 $\times 10^{-7}$
7	0.07	-0.47883140376208	-0.47883140352279	4.99735 $\times 10^{-10}$	0.604618266494075	3.33740 $\times 10^{-7}$	0.498722821884580	0.498722821959874	1.50972 $\times 10^{-10}$	-0.03720531215850	-0.03720537165256	1.59907 $\times 10^{-6}$
8	0.08	-0.47235377707032	-0.47235377871230	3.47614 $\times 10^{-9}$	0.690901881701233	4.37417 $\times 10^{-7}$	0.498324211333605	0.498324210841569	9.87382 $\times 10^{-10}$	-0.04251727196021	-0.04251718285862	2.09566 $\times 10^{-6}$
9	0.09	-0.46501346482250	-0.46501346224113	5.55116 $\times 10^{-9}$	0.777155868541295	2.58895 $\times 10^{-7}$	0.497872467796321	0.497872468563219	1.54035 $\times 10^{-9}$	-0.04783183220526	-0.04783189152512	1.24017 $\times 10^{-6}$
10	0.1	-0.45681077429401	-0.45681077625721	4.29763 $\times 10^{-9}$	0.86337570531820	5.82517 $\times 10^{-8}$	0.497367559886223	0.497367559305799	1.16699 $\times 10^{-9}$	-0.05315076426247	-0.05315074943289	2.79009 $\times 10^{-7}$
20	0.2	-0.32744351771076	-0.32744351771075	4.45861 $\times 10^{-14}$	1.72314102772072	2.96378 $\times 10^{-15}$	0.489377616259981	0.489377616259995	2.96057 $\times 10^{-14}$	-0.10684210264174	-0.10684210264166	7.92592 $\times 10^{-13}$
30	0.3	-0.11239275699943	-0.11239275699942	1.26933 $\times 10^{-13}$	2.57660452050679	4.82592 $\times 10^{-15}$	0.475939519198446	0.475939519198470	4.99197 $\times 10^{-14}$	-0.16232192752958	-0.16232192752948	6.41044 $\times 10^{-13}$
40	0.4	0.187581170331590	0.187581170331601	6.19976 $\times 10^{-14}$	3.42118748521693	1.31103 $\times 10^{-14}$	0.456812115749184	0.456812115749219	7.71642 $\times 10^{-14}$	-0.22083460302519	-0.22083460302506	5.76893 $\times 10^{-13}$
50	0.5	0.571468447956024	0.571468447956029	8.35384 $\times 10^{-15}$	4.25448978540423	2.29638 $\times 10^{-14}$	0.431630608040970	0.4316306080401019	1.13303 $\times 10^{-13}$	-0.28360565838312	-0.28360565838297	5.14779 $\times 10^{-13}$
60	0.6	1.03803085413044	1.03803085413043	8.12855 $\times 10^{-15}$	5.07435408921914	3.55316 $\times 10^{-14}$	0.399909474346182	0.399909474346246	1.59353 $\times 10^{-13}$	-0.35181960563965	-0.35181960563950	4.11340 $\times 10^{-13}$
70	0.7	1.58582920281342	1.58582920281339	2.01625 $\times 10^{-14}$	5.87892868251781	5.10644 $\times 10^{-14}$	0.361048097710865	0.361048097710942	2.12175 $\times 10^{-13}$	-0.42658730169996	-0.42658730169986	2.37094 $\times 10^{-13}$
80	0.8	2.21325485089120	2.21325394216810	4.10582 $\times 10^{-7}$	6.6603834161667	2.71920 $\times 10^{-5}$	0.314341199555779	0.314341585581528	1.22804 $\times 10^{-6}$	-0.50860719544226	-0.50868403959172	0.0001510645
90	0.9	2.91732029428988	2.91732029439181	3.49409 $\times 10^{-11}$	7.40325353010057	3.94678 $\times 10^{-11}$	0.259528398851851	0.259528398744439	4.13872 $\times 10^{-10}$	-0.58521981813710	-0.58521981844569	5.27307 $\times 10^{-10}$
100	1	3.69141507323810	3.69141507323809	3.48879 $\times 10^{-15}$	8.06562788378427	4.62499 $\times 10^{-15}$	0.197815967594463	0.197815967594386	3.90342 $\times 10^{-13}$	-0.64621506683047	-0.64621506682789	3.98567 $\times 10^{-12}$
200	2	13.3351527660383	13.3351527660383	2.93058 $\times 10^{-15}$	9.5844948730114	9.26682 $\times 10^{-16}$	-0.38313219197659	-0.38313219197686	7.07196 $\times 10^{-13}$	-0.23397856780002	-0.23397856779926	3.26632 $\times 10^{-12}$
217	2.17	14.9072536005115	14.9072536005115	2.62153 $\times 10^{-15}$	8.86644376857065	2.00346 $\times 10^{-16}$	-0.40719957801092	-0.40719957801102	2.52608 $\times 10^{-13}$	-0.04806816022160	-0.04806816022046	2.36256 $\times 10^{-11}$
218	2.18	14.9956667750069	14.9956667750068	2.60607 $\times 10^{-15}$	8.81604461495445	2.01491 $\times 10^{-16}$	-0.40762489585045	-0.40762489585054	2.24427 $\times 10^{-13}$	-0.03699516374628	-0.03699516374514	3.09192 $\times 10^{-11}$
219	2.19	15.0835715710897	15.0835715710896	2.70865 $\times 10^{-15}$	8.76476894796519	2.02670 $\times 10^{-16}$	-0.40793948025860	-0.40793948025868	1.96086 $\times 10^{-13}$	-0.02592185887382	-0.02592185887266	4.44120 $\times 10^{-11}$

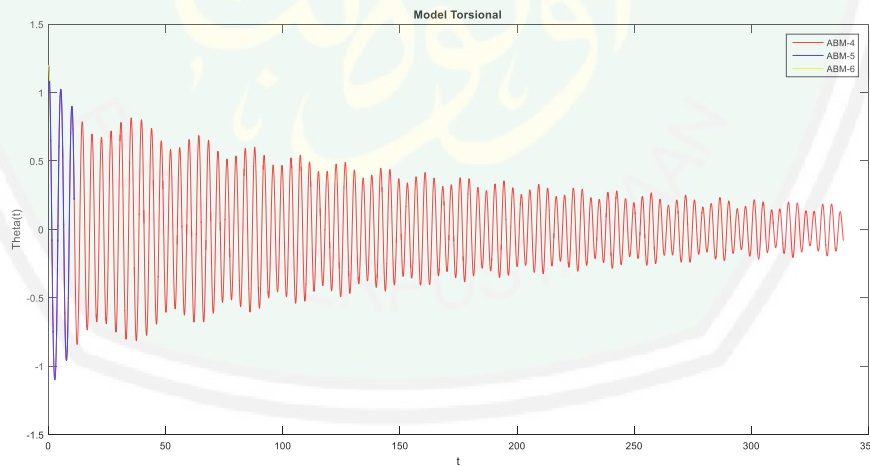
Dari Gambar 3.65, Gambar 3.66, Gambar 3.67, Gambar 3.68, Gambar 3.69, Gambar 3.70, Gambar 3.71, Gambar 3.72, dan Tabel 3.10 menunjukkan hasil solusi numerik model gerak osilasi vertikal dan torsional untuk nilai awal $y_1(0) = -0,5$, $y_2(0) = 0$, $\theta_1(0) = 0,5$, dan $\theta_2(0) = 0$ dengan ukuran langkah $h = 0.01$ berhenti saat di iterasi $n = 219$ atau waktu $t = 2,19$, karena salah satu hasil galat relatif model gerak osilasi vertikal dan torsional telah memenuhi kondisi persamaan (4.59) dengan kriteria pemberhentian $\varepsilon = 10^{-20}$. Sehingga galat relatif terkecil solusi numerik model gerak osilasi vertikal dan torsional adalah $4,04196828767192 \times 10^{-16}$ untuk $y_1(t)$, $1,9815255587367 \times 10^{-16}$ untuk $y_2(t)$, $4,9675608426393 \times 10^{-16}$ untuk $\theta_1(t)$, dan $2,86607032656047 \times 10^{-14}$ untuk $\theta_2(t)$. Dan galat relatif terbesar solusi numerik model gerak osilasi vertikal dan torsional adalah $1,10404638729739 \times 10^{-6}$ untuk $y_1(t)$, $4,31051746765652 \times 10^{-5}$ untuk $y_2(t)$, $3,80133175647868 \times 10^{-7}$ untuk $\theta_1(t)$, dan $0,000236741439004662$ untuk $\theta_2(t)$.

3.4.4 Perbandingan Hasil Numerik

Hasil simulasi numerik model gerak osilasi vertikal dan torsional dengan metode Adams-Bashforth-Moulton setiap orde akan dibandingkan sebagai gambar berikut:



Gambar 3.73 Solusi Numerik Model Gerak Osilasi Vertikal dengan nilai awal $y(0) = 14$, $\dot{y}(0) = 0$, $\theta(0) = 1, 2$, dan $\dot{\theta}(0) = 0$

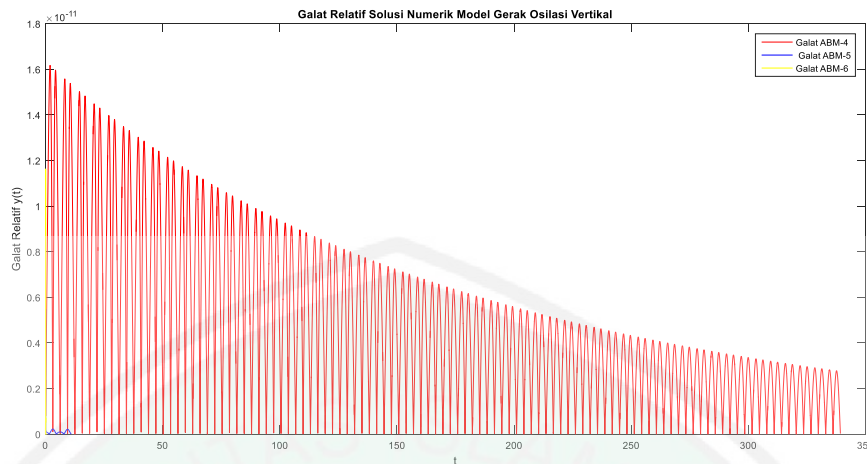


Gambar 3.74 Solusi Numerik Model Torsional dengan nilai awal $y(0) = 14$, $\dot{y}(0) = 0$, $\theta(0) = 1, 2$, dan $\dot{\theta}(0) = 0$

Gambar 3.73 dan Gambar 3.74 menunjukkan pergerakan osilasi vertikal $y(t)$ dan pergerakan torsional $\theta(t)$ menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde

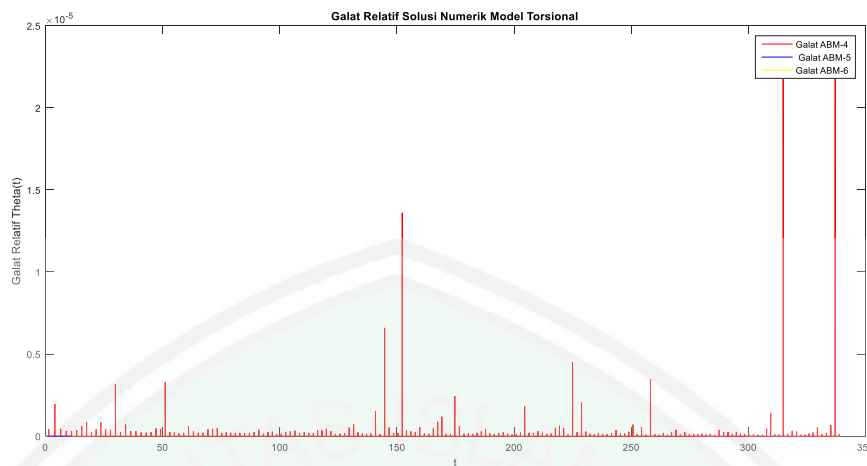
empat, metode Adams-Bashforth-Moulton orde lima, dan metode Adams-Bashforth-Moulton orde enam dengan nilai awal $y(0) = 14$, $\dot{y}(0) = 0$, $\theta(0) = 1,2$, dan $\dot{\theta}(0) = 0$. Pada Gambar 3.73 menunjukkan bahwa pergerakan osilasi vertikal $y(t)$ mengalami stabil mendekati titik 10 selama selang waktu t . Hal tersebut menunjukkan bahwa perubahan amplitudo pada model gerak osilasi vertikal semakin lama semakin mengecil saat waktu t bertambah. Sehingga gerak osilasi vertikal pada saat $y(0) = 14$, $\dot{y}(0) = 0$, $\theta(0) = 1,2$, dan $\dot{\theta}(0) = 0$ merupakan gerak harmonik teredam. Sedangkan Gambar 3.74 menunjukkan bahwa pergerakan torsional $\theta(t)$ mengalami stabil mendekati titik 0 pada selang waktu t . Hal tersebut menunjukkan bahwa perubahan amplitudo pada model gerak torsional semakin lama semakin mengecil saat waktu t bertambah. Sehingga gerak torsional pada $y(0) = 14$, $\dot{y}(0) = 0$, $\theta(0) = 1,2$, dan $\dot{\theta}(0) = 0$ merupakan gerak harmonik teredam.

Gambar 3.73 dan Gambar 3.74 menunjukkan bahwa perbedaan hasil solusi metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat, metode Adams-Bashforth-Moulton orde lima, dan metode Adams-Bashforth-Moulton orde enam pada model gerak osilasi vertikal dan torsional saat nilai awal $y(0) = 14$, $\dot{y}(0) = 0$, $\theta(0) = 1,2$, dan $\dot{\theta}(0) = 0$ adalah panjang grafik. Hal ini diakibatkan karena tingkat ketelitian tiap langkah atau galat relatif solusi numerik terhadap tingkat orde pada metode Adams-Bashforth-Moulton. Sehingga untuk membandingkan metode Adams-Bashforth-Moulton setiap orde menggunakan galat relatif perlangkah, sebagai berikut:



Gambar 3.75 Galat Relatif Metode Adams-Bashforth-Moulton pada Model Gerak Osilasi Vertikal saat Nilai Awal $y(0) = 14$, $\dot{y}(0) = 0$, $\theta(0) = 1, 2$, dan $\dot{\theta}(0) = 0$

Gambar 3.75 menunjukkan bahwa galat relatif solusi numerik metode Adams-Bashforth-Moulton orde enam pada model gerak osilasi vertikal berhenti lebih cepat dibandingkan orde empat dan lima, dimana galat relatif metode Adams-Bashforth-Moulton orde enam berhenti saat waktu $t = 0,47$, galat relatif metode Adams-Bashforth-Moulton orde lima berhenti saat waktu $t = 10,99$, dan galat relatif metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat berhenti saat waktu $t = 339,29$. Hal ini menunjukkan bahwa solusi perlangkah pada metode Adams-Bashforth-Moulton memiliki ketelitian semakin tinggi sebanding dengan besar orde pada metode tersebut. Sehingga solusi numerik model gerak osilasi vertikal saat nilai awal $y(0) = 14$, $\dot{y}(0) = 0$, $\theta(0) = 1, 2$, dan $\dot{\theta}(0) = 0$ memiliki ketelitian sangat tinggi pada penggunaan metode Adams-Bashforth-Moulton orde enam. Sedangkan untuk model gerak torsional adalah sebagai berikut:

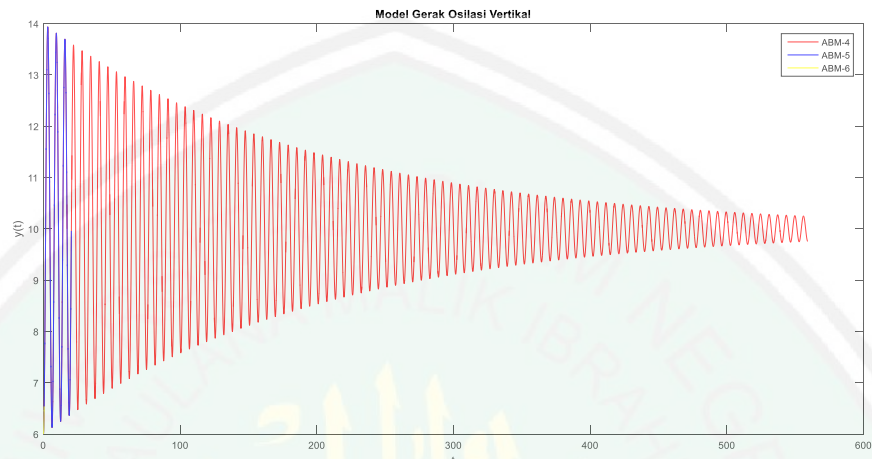


Gambar 3.76 Galat Relatif Metode Adams-Bashforth-Moulton pada Model Torsional saat Nilai Awal $y(0)=14$, $\dot{y}(0)=0$, $\theta(0)=1,2$, dan $\dot{\theta}(0)=0$

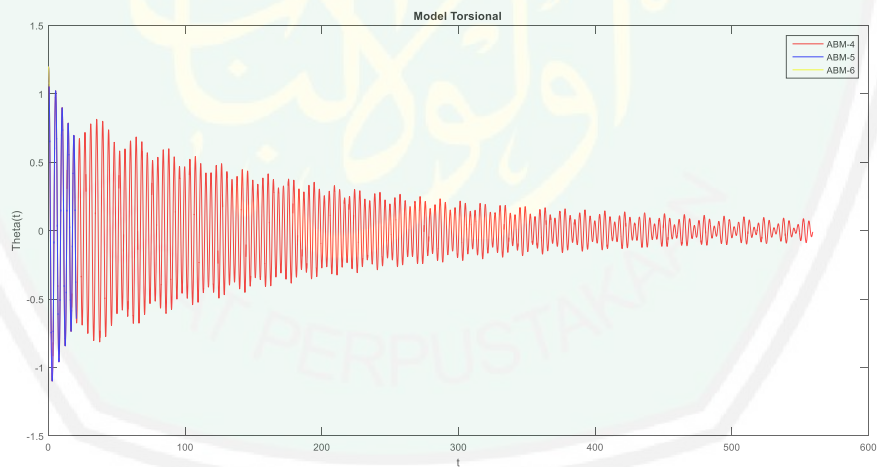
Gambar 3.76 menunjukkan bahwa galat relatif solusi numerik metode Adams-Bashforth-Moulton orde enam pada model gerak torsional berhenti lebih cepat dibandingkan orde empat dan lima, dimana galat relatif metode Adams-Bashforth-Moulton orde enam berhenti saat waktu $t=0,47$, galat relatif metode Adams-Bashforth-Moulton orde lima berhenti saat waktu $t=10,99$, dan galat relatif metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat berhenti saat waktu $t=339,29$. Hal ini menunjukkan bahwa solusi perlangkah pada metode Adams-Bashforth-Moulton memiliki ketelitian semakin tinggi sebanding dengan besar orde pada metode tersebut. Sehingga solusi numerik model gerak torsional saat nilai awal $y(0)=14$, $\dot{y}(0)=0$, $\theta(0)=1,2$, dan $\dot{\theta}(0)=0$ memiliki ketelitian sangat tinggi pada penggunaan metode Adams-Bashforth-Moulton orde enam.

Hasil Simulasi selanjutnya menggunakan nilai awal model gerak osilasi vertikal dan torsional yaitu $y(0)=6$, $\dot{y}(0)=0$, $\theta(0)=1,2$, dan $\dot{\theta}(0)=0$. Sehingga hasil solusi numerik model gerak osilasi vertikal dan torsional dengan

metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat, metode Adams-Bashforth-Moulton orde lima, dan metode Adams-Bashforth-Moulton orde enam adalah sebagai berikut:



Gambar 3.77 Solusi Numerik Model Gerak Osilasi Vertikal dengan Nilai Awal $y(0) = 6$, $\dot{y}(0) = 0$, $\theta(0) = 1, 2$, dan $\dot{\theta}(0) = 0$

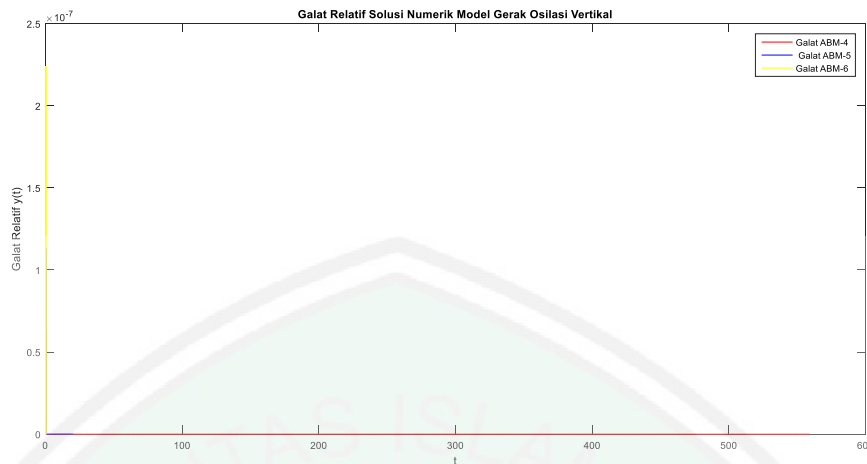


Gambar 3.78 Solusi Numerik Model Torsional dengan Nilai Awal $y(0) = 6$, $\dot{y}(0) = 0$, $\theta(0) = 1, 2$, dan $\dot{\theta}(0) = 0$

Gambar 3.77 menunjukkan bahwa pergerakan osilasi $y(t)$ mengalami stabil mendekati titik 10 selama selang waktu t . Hal tersebut menunjukkan bahwa perubahan amplitudo pada model gerak osilasi vertikal semakin lama semakin

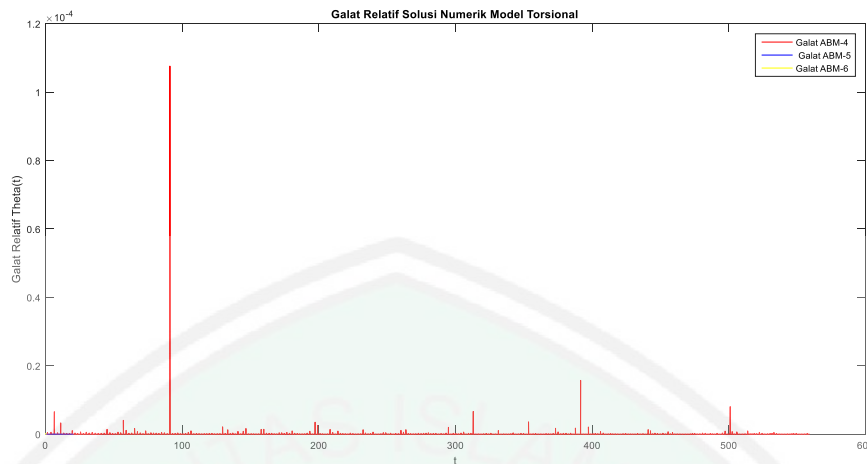
mengecil saat waktu t bertambah. Sehingga gerak osilasi vertikal pada saat $y(0)=6$, $\dot{y}(0)=0$, $\theta(0)=1,2$, dan $\dot{\theta}(0)=0$ merupakan gerak harmonik teredam. Sedangkan Gambar 3.78 menunjukkan bahwa pergerakan torsional $\theta(t)$ mengalami stabil mendekati titik 0 pada selang waktu t . Hal tersebut menunjukkan bahwa perubahan amplitudo pada model gerak torsional semakin lama semakin mengecil saat waktu t bertambah. Sehingga gerak torsional pada $y(0)=6$, $\dot{y}(0)=0$, $\theta(0)=1,2$, dan $\dot{\theta}(0)=0$ merupakan gerak harmonik teredam.

Gambar 3.77 dan Gambar 3.78 menunjukkan bahwa perbedaan hasil solusi metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat, metode Adams-Bashforth-Moulton orde lima, dan metode Adams-Bashforth-Moulton orde enam pada model gerak osilasi vertikal dan torsional saat nilai awal $y(0)=6$, $\dot{y}(0)=0$, $\theta(0)=1,2$, dan $\dot{\theta}(0)=0$ adalah panjang grafik. Hal ini diakibatkan karena tingkat ketelitian tiap langkah atau galat relatif solusi numerik terhadap tingkat orde pada metode Adams-Bashforth-Moulton. Sehingga untuk membandingkan metode Adams-Bashforth-Moulton setiap orde menggunakan galat relatif perlangkah, sebagai berikut:



Gambar 3.79 Galat Relatif Metode Adams-Bashforth-Moulton pada Model Gerak Osilasi Vertikal saat Nilai Awal $y(0) = 6$, $\dot{y}(0) = 0$, $\theta(0) = 1, 2$, dan $\dot{\theta}(0) = 0$

Gambar 3.79 menunjukkan bahwa galat relatif solusi numerik metode Adams-Bashforth-Moulton orde enam pada model gerak osilasi vertikal berhenti lebih cepat dibandingkan orde empat dan lima, dimana galat relatif metode Adams-Bashforth-Moulton orde enam berhenti saat waktu $t = 0,53$, galat relatif metode Adams-Bashforth-Moulton orde lima berhenti saat waktu $t = 20,42$, dan galat relatif metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat berhenti saat waktu $t = 559,21$. Hal ini menunjukkan bahwa solusi perlangkah pada metode Adams-Bashforth-Moulton memiliki ketelitian semakin tinggi sebanding dengan besar orde pada metode tersebut. Sehingga solusi numerik model gerak osilasi vertikal saat nilai awal $y(0) = 6$, $\dot{y}(0) = 0$, $\theta(0) = 1, 2$, dan $\dot{\theta}(0) = 0$ memiliki ketelitian sangat tinggi pada penggunaan metode Adams-Bashforth-Moulton orde enam. Sedangkan untuk model gerak torsional adalah sebagai berikut:

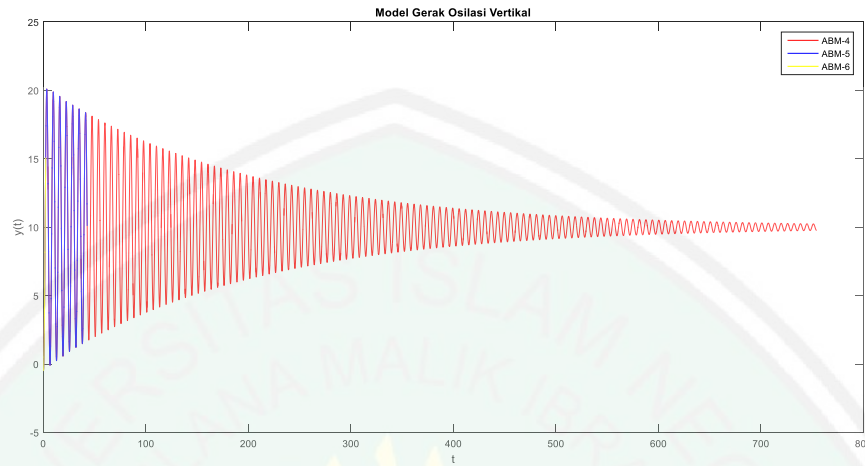


Gambar 3.80 Galat Relatif Metode Adams-Bashforth-Moulton pada Model Torsional saat Nilai Awal $y(0) = 6$, $\dot{y}(0) = 0$, $\theta(0) = 1, 2$, dan $\dot{\theta}(0) = 0$

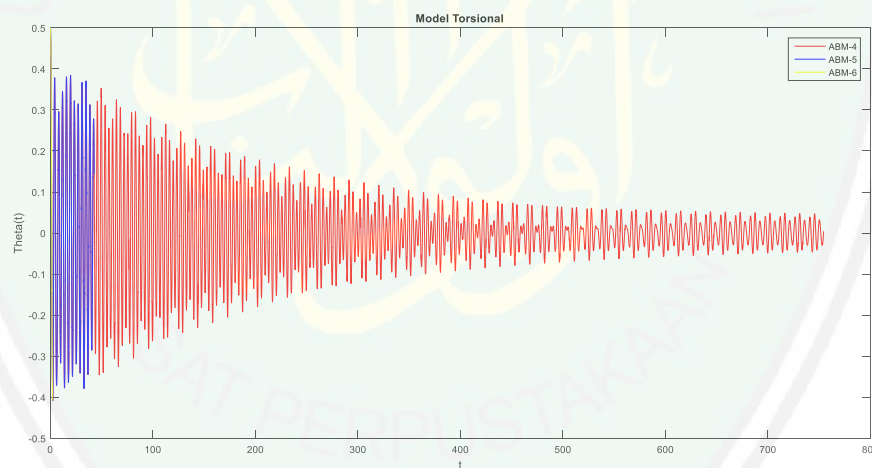
Gambar 3.80 menunjukkan bahwa galat relatif solusi numerik metode Adams-Bashforth-Moulton orde enam pada model gerak torsional berhenti lebih cepat dibandingkan orde empat dan lima, dimana galat relatif metode Adams-Bashforth-Moulton orde enam berhenti saat waktu $t = 0,53$, galat relatif metode Adams-Bashforth-Moulton orde lima berhenti saat waktu $t = 20,42$, dan galat relatif metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat berhenti saat waktu $t = 559,21$. Hal ini menunjukkan bahwa solusi perlangkah pada metode Adams-Bashforth-Moulton memiliki ketelitian semakin tinggi sebanding dengan besar orde pada metode tersebut. Sehingga solusi numerik model gerak torsional saat nilai awal $y(0) = 6$, $\dot{y}(0) = 0$, $\theta(0) = 1, 2$, dan $\dot{\theta}(0) = 0$ memiliki ketelitian sangat tinggi pada penggunaan metode Adams-Bashforth-Moulton orde enam.

Hasil Simulasi terakhir menggunakan nilai awal model gerak osilasi vertikal dan torsional yaitu $y(0) = -0,5$, $\dot{y}(0) = 0$, $\theta(0) = 0,5$, dan $\dot{\theta}(0) = 0$. Sehingga hasil solusi numerik model gerak osilasi vertikal dan torsional dengan metode

Adams-Bashforth-Moulton orde empat, metode Adams-Bashforth-Moulton orde lima, dan metode Adams-Bashforth-Moulton orde enam adalah sebagai berikut:



Gambar 3.81 Solusi Numerik Model Gerak Osilasi Vertikal dengan Nilai Awal $y(0) = -0,5$, $\dot{y}(0) = 0$, $\theta(0) = 0,5$, dan $\dot{\theta}(0) = 0$

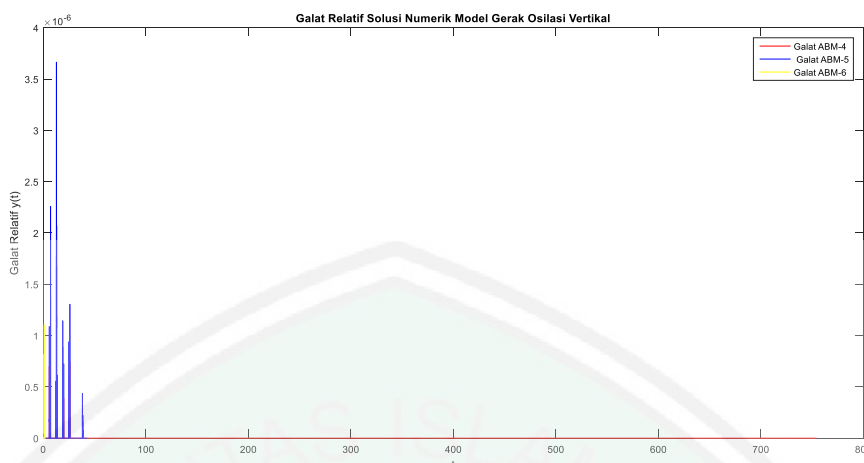


Gambar 3.82 Solusi Numerik Model Torsional dengan Nilai Awal $y(0) = -0,5$, $\dot{y}(0) = 0$, $\theta(0) = 0,5$, dan $\dot{\theta}(0) = 0$

Gambar 3.81 menunjukkan bahwa pergerakan osilasi $y(t)$ mengalami stabil mendekati titik 10 selama selang waktu t . Hal tersebut menunjukkan bahwa perubahan amplitudo pada model gerak osilasi vertikal semakin lama semakin mengecil saat waktu t bertambah. Sehingga gerak osilasi vertikal pada saat

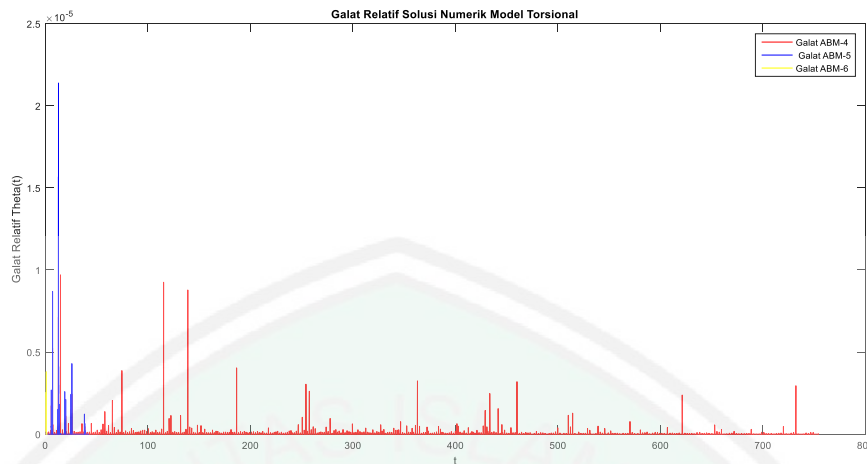
$y(0) = -0,5$, $\dot{y}(0) = 0$, $\theta(0) = 0,5$, dan $\dot{\theta}(0) = 0$ merupakan gerak harmonik teredam. Sedangkan Gambar 3.82 menunjukkan bahwa pergerakan torsional $\theta(t)$ mengalami stabil mendekati titik 0 pada selang waktu t . Hal tersebut menunjukkan bahwa perubahan amplitudo pada model gerak torsional semakin lama semakin mengecil saat waktu t bertambah. Sehingga gerak torsional pada $y(0) = -0,5$, $\dot{y}(0) = 0$, $\theta(0) = 0,5$, dan $\dot{\theta}(0) = 0$ merupakan gerak harmonik teredam.

Gambar 3.81 dan Gambar 3.82 menunjukkan bahwa perbedaan hasil solusi metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat, metode Adams-Bashforth-Moulton orde lima, dan metode Adams-Bashforth-Moulton orde enam pada model gerak osilasi vertikal dan torsional saat nilai awal $y(0) = -0,5$, $\dot{y}(0) = 0$, $\theta(0) = 0,5$, dan $\dot{\theta}(0) = 0$ adalah panjang grafik. Hal ini diakibatkan karena tingkat ketelitian tiap langkah atau galat relatif solusi numerik terhadap tingkat orde pada metode Adams-Bashforth-Moulton. Sehingga untuk membandingkan metode Adams-Bashforth-Moulton setiap orde menggunakan galat relatif perlangkah, sebagai berikut:



Gambar 3.83 Galat Relatif Metode Adams-Bashforth-Moulton pada Model Gerak Osilasi Vertikal saat Nilai Awal $y(0) = -0,5$, $\dot{y}(0) = 0$, $\theta(0) = 0,5$, dan $\dot{\theta}(0) = 0$

Gambar 3.83 menunjukkan bahwa galat relatif solusi numerik metode Adams-Bashforth-Moulton orde enam pada model gerak osilasi vertikal berhenti lebih cepat dibandingkan orde empat dan lima, dimana galat relatif metode Adams-Bashforth-Moulton orde enam berhenti saat waktu $t = 2,19$, galat relatif metode Adams-Bashforth-Moulton orde lima berhenti saat waktu $t = 42,68$, dan galat relatif metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat berhenti saat waktu $t = 754,28$. Hal ini menunjukkan bahwa solusi perlangkah pada metode Adams-Bashforth-Moulton memiliki ketelitian semakin tinggi sebanding dengan besar orde pada metode tersebut. Sehingga solusi numerik model gerak osilasi vertikal saat nilai awal $y(0) = -0,5$, $\dot{y}(0) = 0$, $\theta(0) = 0,5$, dan $\dot{\theta}(0) = 0$ memiliki ketelitian sangat tinggi pada penggunaan metode Adams-Bashforth-Moulton orde enam. Sedangkan untuk model gerak torsional adalah sebagai berikut:



Gambar 3.84 Galat Relatif Metode Adams-Bashforth-Moulton pada Model Torsional saat Nilai Awal $y(0) = -0,5$, $\dot{y}(0) = 0$, $\theta(0) = 0,5$, dan $\dot{\theta}(0) = 0$

Gambar 3.84 menunjukkan bahwa galat relatif solusi numerik metode Adams-Bashforth-Moulton orde enam pada model gerak torsional berhenti lebih cepat dibandingkan orde empat dan lima, dimana galat relatif metode Adams-Bashforth-Moulton orde enam berhenti saat waktu $t = 2,19$, galat relatif metode Adams-Bashforth-Moulton orde lima berhenti saat waktu $t = 42,68$, dan galat relatif metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat berhenti saat waktu $t = 754,28$. Hal ini menunjukkan bahwa solusi perlangkah pada metode Adams-Bashforth-Moulton memiliki ketelitian semakin tinggi sebanding dengan besar orde pada metode tersebut. Sehingga solusi numerik model gerak torsional saat nilai awal $y(0) = -0,5$, $\dot{y}(0) = 0$, $\theta(0) = 0,5$, dan $\dot{\theta}(0) = 0$ memiliki ketelitian sangat tinggi pada penggunaan metode Adams-Bashforth-Moulton orde enam.

Perbandingan simulasi model gerak osilasi vertikal dan torsional di atas menunjukkan bahwa gerak osilasi dan torsional untuk masalah jembatan gantung merupakan gerak harmonik teredam, karena pergerakan osilasi sepanjang waktu t menuju titik kesetimbangannya yaitu 10 dan pergerakan torsional sepanjang waktu t menuju titik kesetimbangannya yaitu 0. Sedangkan perbedaan solusi numerik model gerak osilasi vertikal dan torsional untuk masalah jembatan gantung menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat, lima, dan enam adalah sebagai berikut:



Tabel 3.11 Hasil Perbandingan Simulasi Numerik Model Gerak Osilasi Vertikal dan Torsional dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton

Simulasi	Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat	Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima	Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam
$y(0) = 14, \dot{y}(0) = 0,$ $\theta(0) = 1,2,$ dan $\dot{\theta}(0) = 0$	1. Galat relatif untuk gerak osilasi vertikal berhenti sampai waktu $t = 339,29$ dengan kriteria pemberhentian $\varepsilon = 10^{-20}$. Selama interval waktu $t = 0$ sampai $t = 339,29$ galat relatif terkecil gerak osilasi adalah $2,11051249275449 \times 10^{-16}$ dan galat relatif terbesar gerak osilasi adalah $1,61679962146804 \times 10^{-11}$. 2. Galat relatif untuk gerak torsional berhenti sampai waktu $t = 339,29$ dengan kriteria pemberhentian $\varepsilon = 10^{-20}$. Selama interval waktu $t = 0$ sampai $t = 339,29$ galat relatif terkecil gerak torsional adalah $1,48661494274038 \times 10^{-14}$ dan galat relatif terbesar gerak torsional adalah $2,32813713898227 \times 10^{-5}$.	1. Galat relatif untuk gerak osilasi vertikal berhenti sampai waktu $t = 10,99$ dengan kriteria pemberhentian $\varepsilon = 10^{-20}$. Selama interval waktu $t = 0$ sampai $t = 10,99$ galat relatif terkecil gerak osilasi adalah $3,55397128062262 \times 10^{-16}$ dan galat relatif terbesar gerak osilasi adalah $5,47995965187342 \times 10^{-12}$. 2. Galat relatif untuk gerak torsional berhenti sampai waktu $t = 10,99$ dengan kriteria pemberhentian $\varepsilon = 10^{-20}$. Selama interval waktu $t = 0$ sampai $t = 10,99$ galat relatif terkecil gerak torsional adalah $8,21568807080448 \times 10^{-14}$ dan galat relatif terbesar gerak torsional adalah $1,31808611543055 \times 10^{-8}$.	1. Galat relatif untuk gerak osilasi vertikal berhenti sampai waktu $t = 0,47$ dengan kriteria pemberhentian $\varepsilon = 10^{-20}$. Selama interval waktu $t = 0$ sampai $t = 0,47$ galat relatif terkecil gerak osilasi adalah $1,29519103495881 \times 10^{-16}$ dan galat relatif terbesar gerak osilasi adalah $1,16297751742561 \times 10^{-11}$. 2. Galat relatif untuk gerak torsional berhenti sampai waktu $t = 0,47$ dengan kriteria pemberhentian $\varepsilon = 10^{-20}$. Selama interval waktu $t = 0$ sampai $t = 0,47$ galat relatif terkecil gerak torsional adalah $5,27487848189871 \times 10^{-14}$ dan galat relatif terbesar gerak torsional adalah $3,21993591731726 \times 10^{-9}$.

Lanjutan Tabel 3.11

Simulasi	Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat	Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima	Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam
$y(0) = 6, \dot{y}(0) = 0,$ $\theta(0) = 1,2,$ dan $\dot{\theta}(0) = 0$	1. Galat relatif untuk gerak osilasi vertikal berhenti sampai waktu $t = 559,21$ dengan kriteria pemberhentian $\varepsilon = 10^{-20}$. Selama interval waktu $t = 0$ sampai $t = 559,21$ galat relatif terkecil gerak osilasi adalah $1,68743786280312 \times 10^{-16}$ dan galat relatif terbesar gerak osilasi adalah $6,31691472681704 \times 10^{-8}$. 2. Galat relatif untuk gerak torsional berhenti sampai waktu $t = 559,21$ dengan kriteria pemberhentian $\varepsilon = 10^{-20}$. Selama interval waktu $t = 0$ sampai $t = 559,21$ galat relatif terkecil gerak torsional adalah $3,74955260951865 \times 10^{-15}$ dan galat relatif terbesar gerak torsional adalah $0,000107615464981596$.	1. Galat relatif untuk gerak osilasi vertikal berhenti sampai waktu $t = 20,42$ dengan kriteria pemberhentian $\varepsilon = 10^{-20}$. Selama interval waktu $t = 0$ sampai $t = 20,42$ galat relatif terkecil gerak osilasi adalah $1,77412018055013 \times 10^{-16}$ dan galat relatif terbesar gerak osilasi adalah $1,13258607378114 \times 10^{-7}$. 2. Galat relatif untuk gerak torsional berhenti sampai waktu $t = 20,42$ dengan kriteria pemberhentian $\varepsilon = 10^{-20}$. Selama interval waktu $t = 0$ sampai $t = 20,42$ galat relatif terkecil gerak torsional adalah $1,90608952722218 \times 10^{-16}$ dan galat relatif terbesar gerak torsional adalah $1,08679781101889 \times 10^{-7}$.	1. Galat relatif untuk gerak osilasi vertikal berhenti sampai waktu $t = 0,53$ dengan kriteria pemberhentian $\varepsilon = 10^{-20}$. Selama interval waktu $t = 0$ sampai $t = 0,53$ galat relatif terkecil gerak osilasi adalah $1,35843400075013 \times 10^{-16}$ dan galat relatif terbesar gerak osilasi adalah $2,24060388991285 \times 10^{-7}$. 2. Galat relatif untuk gerak torsional berhenti sampai waktu $t = 0,53$ dengan kriteria pemberhentian $\varepsilon = 10^{-20}$. Selama interval waktu $t = 0$ sampai $t = 0,53$ galat relatif terkecil gerak torsional adalah $5,94534689005873 \times 10^{-14}$ dan galat relatif terbesar gerak torsional adalah $2,15673891072678 \times 10^{-7}$.

Lanjutan Tabel 3.11

Simulasi	Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat	Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima	Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam
$y(0) = -0,5, \dot{y}(0) = 0,$ $\theta(0) = 0,5,$ dan $\dot{\theta}(0) = 0$	1. Galat relatif untuk gerak osilasi vertikal berhenti sampai waktu $t = 754,28$ dengan kriteria pemberhentian $\varepsilon = 10^{-20}$. Selama interval waktu $t = 0$ sampai $t = 754,28$ galat relatif terkecil gerak osilasi adalah $1,689912531783 \times 10^{-16}$ dan galat relatif terbesar gerak osilasi adalah $1,7786597453662 \times 10^{-6}$. 2. Galat relatif untuk gerak torsional berhenti sampai waktu $t = 754,28$ dengan kriteria pemberhentian $\varepsilon = 10^{-20}$. Selama interval waktu $t = 0$ sampai $t = 754,28$ galat relatif terkecil gerak torsional adalah $5,62265610955897 \times 10^{-15}$ dan galat relatif terbesar gerak torsional adalah $9,7001688041798 \times 10^{-6}$.	1. Galat relatif untuk gerak osilasi vertikal berhenti sampai waktu $t = 42,68$ dengan kriteria pemberhentian $\varepsilon = 10^{-20}$. Selama interval waktu $t = 0$ sampai $t = 42,68$ galat relatif terkecil gerak osilasi adalah $1,77817700485202 \times 10^{-16}$ dan galat relatif terbesar gerak osilasi adalah $3,66367558653258 \times 10^{-6}$. 2. Galat relatif untuk gerak torsional berhenti sampai waktu $t = 42,68$ dengan kriteria pemberhentian $\varepsilon = 10^{-20}$. Selama interval waktu $t = 0$ sampai $t = 42,68$ galat relatif terkecil gerak torsional adalah $2,61206507694246 \times 10^{-15}$ dan galat relatif terbesar gerak torsional adalah $2,1387087114825 \times 10^{-5}$.	1. Galat relatif untuk gerak osilasi vertikal berhenti sampai waktu $t = 2,19$ dengan kriteria pemberhentian $\varepsilon = 10^{-20}$. Selama interval waktu $t = 0$ sampai $t = 2,19$ galat relatif terkecil gerak osilasi adalah $4,04196828767192 \times 10^{-16}$ dan galat relatif terbesar gerak osilasi adalah $1,10404638729739 \times 10^{-6}$. 2. Galat relatif untuk gerak torsional berhenti sampai waktu $t = 2,19$ dengan kriteria pemberhentian $\varepsilon = 10^{-20}$. Selama interval waktu $t = 0$ sampai $t = 2,19$ galat relatif terkecil gerak torsional adalah $4,9675608426393 \times 10^{-16}$ dan galat relatif terbesar gerak torsional adalah $3,80133175647868 \times 10^{-7}$.

Berdasarkan Tabel 3.11 menunjukkan bahwa solusi perlangkah pada metode Adams-Bashforth-Moulton memiliki ketelitian semakin tinggi sebanding dengan besar orde pada metode tersebut. Sehingga solusi numerik model gerak osilasi vertikal dan torsional pada penelitian ini memiliki ketelitian sangat tinggi pada penggunaan metode Adams-Bashforth-Moulton orde enam.

3.5 Kajian Agama

Ayat di dalam surat al-Baqarah ayat 11 menjelaskan bahwa di dunia ini terdapat fenomena-fenomena alam yang terjadi. Fenomena tersebut tidak terjadi begitu saja. Akan tetapi semua hal di dunia ini mempunyai perhitungannya sehingga dapat diprediksi sebagaimana Allah Swt berfirman dalam al-Quran surat al-Qamar/54:49, yaitu:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ

“Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran “(QS. al-Qamar/54:49).

Ayat tersebut menjelaskan bahwa dalam dunia ini semua hal sudah di atur oleh Allah dengan sebaik-baiknya. Segala sesuatu di langit dan di bumi adalah ciptaan Allah Swt. Allah Swt menciptakan segala sesuatu menurut ukuran dan takarannya. Artinya, semua sudah di atur oleh Allah Swt berdasarkan ukurannya. Rizki untuk manusia, Rizki untuk tumbuhan dan hewan juga sudah di atur oleh Allah Swt. Bahkan air hujan yang turun juga sesuai ukuran yang telah ditetapkan oleh Allah Swt. Semua hal tersebut tentu mengandung hikma yang begitu besar.

Manusia merupakan makhluk sempurna yang diciptakan oleh Allah Swt karena memiliki akal fikiran. Oleh karena itu, sudah seharusnya manusia menggunakan akal fikiran untuk memikirkan ciptaan-ciptaan Allah Swt

sehingga dapat mengembangkan ilmu pengetahuannya yang dapat digunakan untuk mempermudah kehidupannya. Selain surat al-Qamar ayat 49, Allah juga menjelaskan dalam ayat lain yaitu surat al-Furqan/15:2, sebagai berikut:

الَّذِي لَهُ مُلْكُ السَّمَاوَاتِ وَالْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُنْ لَهُ شَرِيكٌ فِي الْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَرَهُ تَقْدِيرًا

“yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan Dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu bagi-Nya dalam kekuasaan(Nya), dan dia telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya “(QS. al-Furqan/15:2).

Ayat tersebut juga menjelaskan tentang ukuran-ukuran yang sudah ditetapkan oleh Allah Swt. Allah Swt menetapkan ukuran dengan serapi-rapinya. Artinya, dalam menciptakan segala sesuatu Allah Swt sudah memperhitungkan semuanya sehingga tidak ada kesalahan sedikitpun. Berbeda dengan manusia, dalam perbuatannya tentunya akan melakukan kesalahan karena manusia tidak luput dari kesalahan dan dosa. Kedua ayat tersebut menjelaskan bahwa kata ukuran adalah apa yang ada di alam ini dapat dinyatakan dalam dua peran, yaitu sebagai bilangan dengan sifat dan ketelitian yang terkandung didalamnya dan yang kedua yaitu sebagai hukum atau aturan.

Metode Adams-Bashforth-Moulton merupakan metode yang digunakan dalam skripsi ini. Metode ini digunakan untuk menghitung solusi numerik. Metode Adams-Bashforth-Moulton memiliki tingkat ketelitian yang lebih tinggi sesuai dengan tingkat orde. Semakin tinggi orde yang digunakan maka tingkat keakuratan akan semakin tinggi. Dalam dua ayat diatas menjelaskan bahwa Allah Swt. menciptakan segala sesuatu berdasarkan ukuran dengan ketelitian yang tinggi. Oleh karena itu, penulis menggunakan metode Adam-Bashforth-Moulton dengan

membandingkan ketelitian setiap grafik setiap orde pada model gerak osilasi vertikal dan torsional.



BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan di atas, maka penulis dapat menarik kesimpulan sebagai berikut;

1. Solusi numerik model gerak osilasi vertikal dan torsional Kwofie (2012) adalah sebagai berikut:

$$\begin{cases} p(t, y_1, y_2, \theta_1, \theta_2) = \dot{y}_1(t) = y_2(t) \\ q(t, y_1, y_2, \theta_1, \theta_2) = \dot{y}_2(t) = -\frac{K}{m} \left[(y_1(t) - l \sin(\theta_1(t)))^+ + (y_1(t) + l \sin(\theta_1(t)))^+ \right] \\ \quad - \delta_2 y_2(t) + g \\ r(t, y_1, y_2, \theta_1, \theta_2) = \dot{\theta}_1(t) = \theta_2(t) \\ s(t, y_1, y_2, \theta_1, \theta_2) = \dot{\theta}_2(t) = \frac{3K}{ml} \cos(\theta_1(t)) \left[(y_1(t) - l \sin(\theta_1(t)))^+ - (y_1(t) + l \sin(\theta_1(t)))^+ \right] \\ \quad - \delta_1 \theta_2(t) + f(t) \end{cases}$$

dimana $f(t) = \alpha \sin(\mu t)$ dan

$$(y_1(t) + l \sin(\theta_1(t)))^+ = \max(y_1(t) + l \sin(\theta_1(t)), 0).$$

Dengan penyelesaian numerik metode Adams-Bashforth-Moulton terdiri dari:

- a. Metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat

$$y_{1(n+1)}^{(i)} = y_{1(n)} + \frac{h}{24} (55p_n - 59p_{n-1} + 37p_{n-2} - 9p_{n-3})$$

$$y_{2(n+1)}^{(i)} = y_{2(n)} + \frac{h}{24} (55q_n - 59q_{n-1} + 37q_{n-2} - 9q_{n-3})$$

$$\theta_{1(n+1)}^{(i)} = \theta_{1(n)} + \frac{h}{24} (55r_n - 59r_{n-1} + 37r_{n-2} - 9r_{n-3})$$

$$\theta_{2(n+1)}^{(i)} = \theta_{2(n)} + \frac{h}{24} (55s_n - 59s_{n-1} + 37s_{n-2} - 9s_{n-3})$$

sebagai prediktor dan

$$\begin{aligned}
y_{1(n+1)}^{(i+1)} &= y_{1(n)} + \frac{h}{24} \left(p_{n-2} - 5p_{n-1} + 19p_n + 9p \left(t_{(n+1)}, y_{1(n+1)}^{(i)}, y_{2(n+1)}^{(i)}, \theta_{1(n+1)}^{(i)}, \theta_{2(n+1)}^{(i)} \right) \right) \\
y_{2(n+1)}^{(i+1)} &= y_{2(n)} + \frac{h}{24} \left(q_{n-2} - 5q_{n-1} + 19q_n + 9q \left(t_{(n+1)}, y_{1(n+1)}^{(i)}, y_{2(n+1)}^{(i)}, \theta_{1(n+1)}^{(i)}, \theta_{2(n+1)}^{(i)} \right) \right) \\
\theta_{1(n+1)}^{(i+1)} &= \theta_{1(n)} + \frac{h}{24} \left(r_{n-2} - 5r_{n-1} + 19r_n + 9r \left(t_{(n+1)}, y_{1(n+1)}^{(i)}, y_{2(n+1)}^{(i)}, \theta_{1(n+1)}^{(i)}, \theta_{2(n+1)}^{(i)} \right) \right) \\
\theta_{2(n+1)}^{(i+1)} &= \theta_{2(n)} + \frac{h}{24} \left(s_{n-2} - 5s_{n-1} + 19s_n + 9s \left(t_{(n+1)}, y_{1(n+1)}^{(i)}, y_{2(n+1)}^{(i)}, \theta_{1(n+1)}^{(i)}, \theta_{2(n+1)}^{(i)} \right) \right)
\end{aligned}$$

sebagai korektor.

b. Metode Adams-Bashforth-Moulton orde lima

$$\begin{aligned}
y_{1(n+1)}^{(i)} &= y_{1(n+1)} + \frac{h}{720} (1901p_n - 2774p_{n-1} + 2616p_{n-2} - 1274p_{n-3} + 251p_{n-4}) \\
y_{2(n+1)}^{(i)} &= y_{2(n+1)} + \frac{h}{720} (1901q_n - 2774q_{n-1} + 2616q_{n-2} - 1274q_{n-3} + 251q_{n-4}) \\
\theta_{1(n+1)}^{(i)} &= \theta_{1(n+1)} + \frac{h}{720} (1901r_n - 2774r_{n-1} + 2616r_{n-2} - 1274r_{n-3} + 251r_{n-4}) \\
\theta_{2(n+1)}^{(i)} &= \theta_{2(n+1)} + \frac{h}{720} (1901s_n - 2774s_{n-1} + 2616s_{n-2} - 1274s_{n-3} + 251s_{n-4})
\end{aligned}$$

sebagai prediktor dan

$$\begin{aligned}
y_{1(n+1)}^{(i+1)} &= y_{1(n)} + \frac{h}{720} \left(-19p_{n-3} + 106p_{n-2} - 264p_{n-1} + 646p_n + 251p \left(t_{n+1}, y_{1(n+1)}^{(i)}, y_{2(n+1)}^{(i)}, \theta_{1(n+1)}^{(i)}, \theta_{2(n+1)}^{(i)} \right) \right) \\
y_{2(n+1)}^{(i+1)} &= y_{2(n)} + \frac{h}{720} \left(-19q_{n-3} + 106q_{n-2} - 264q_{n-1} + 646q_n + 251q \left(t_{n+1}, y_{1(n+1)}^{(i)}, y_{2(n+1)}^{(i)}, \theta_{1(n+1)}^{(i)}, \theta_{2(n+1)}^{(i)} \right) \right) \\
\theta_{1(n+1)}^{(i+1)} &= \theta_{1(n)} + \frac{h}{720} \left(-19r_{n-3} + 106r_{n-2} - 264r_{n-1} + 646r_n + 251r \left(t_{n+1}, y_{1(n+1)}^{(i)}, y_{2(n+1)}^{(i)}, \theta_{1(n+1)}^{(i)}, \theta_{2(n+1)}^{(i)} \right) \right) \\
\theta_{2(n+1)}^{(i+1)} &= \theta_{2(n)} + \frac{h}{720} \left(-19s_{n-3} + 106s_{n-2} - 264s_{n-1} + 646s_n + 251s \left(t_{n+1}, y_{1(n+1)}^{(i)}, y_{2(n+1)}^{(i)}, \theta_{1(n+1)}^{(i)}, \theta_{2(n+1)}^{(i)} \right) \right)
\end{aligned}$$

sebagai korektor.

c. Metode Adams-Bashforth-Moulton orde enam

$$y_{1(n+1)}^{(i)} = y_{1(n)} + \frac{h}{1440} (4274p_n - 7908p_{n-1} + 9952p_{n-2} - 7268p_{n-3} + 2862p_{n-4} - 472p_{n-5})$$

$$y_{2(n+1)}^{(i)} = y_{2(n)} + \frac{h}{1440} (4274q_n - 7908q_{n-1} + 9952q_{n-2} - 7268q_{n-3} + 2862q_{n-4} - 472q_{n-5})$$

$$\theta_{1(n+1)}^{(i)} = \theta_{1(n)} + \frac{h}{1440} (4274r_n - 7908r_{n-1} + 9952r_{n-2} - 7268r_{n-3} + 2862r_{n-4} - 472r_{n-5})$$

$$\theta_{2(n+1)}^{(i)} = \theta_{2(n)} + \frac{h}{1440} (4274s_n - 7908s_{n-1} + 9952s_{n-2} - 7268s_{n-3} + 2862s_{n-4} - 472s_{n-5})$$

sebagai prediktor dan

$$y_{1(n+1)}^{(i+1)} = y_{1(n)} + \frac{h}{1440} (27p_{n-4} - 173p_{n-3} + 482p_{n-2} - 798p_{n-1} + 1427p_n + 475p(t_{n+1}, y_{1(n+1)}^{(i)}, y_{2(n+1)}^{(i)}, \theta_{1(n+1)}^{(i)}, \theta_{2(n+1)}^{(i)}))$$

$$y_{2(n+1)}^{(i+1)} = y_{2(n)} + \frac{h}{1440} (27q_{n-4} - 173q_{n-3} + 482q_{n-2} - 798q_{n-1} + 1427q_n + 475q(t_{n+1}, y_{1(n+1)}^{(i)}, y_{2(n+1)}^{(i)}, \theta_{1(n+1)}^{(i)}, \theta_{2(n+1)}^{(i)}))$$

$$\theta_{1(n+1)}^{(i+1)} = \theta_{1(n)} + \frac{h}{1440} (27r_{n-4} - 173r_{n-3} + 482r_{n-2} - 798r_{n-1} + 1427r_n + 475r(t_{n+1}, y_{1(n+1)}^{(i)}, y_{2(n+1)}^{(i)}, \theta_{1(n+1)}^{(i)}, \theta_{2(n+1)}^{(i)}))$$

$$\theta_{2(n+1)}^{(i+1)} = \theta_{2(n)} + \frac{h}{1440} (27s_{n-4} - 173s_{n-3} + 482s_{n-2} - 798s_{n-1} + 1427s_n + 475s(t_{n+1}, y_{1(n+1)}^{(i)}, y_{2(n+1)}^{(i)}, \theta_{1(n+1)}^{(i)}, \theta_{2(n+1)}^{(i)}))$$

sebagai korektor.

2. Hasil perbandingan simulasi numerik model gerak osilasi vertikal dan torsional menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat, lima, dan enam menunjukkan bahwa gerak osilasi vertikal dan gerak torsional merupakan gerak harmonik teredam, karena semakin waktu t diperbesar gerak osilasi vertikal dan gerak torsional menuju ke titik kesetimbangan yaitu 10 untuk gerak osilasi vertikal dan 0 untuk gerak torsional. Dan galat relatif terkecil metode Adams-

Bashforth-Moulton pada model gerak osilasi vertikal dengan kriteria pemberhentian $\varepsilon = 10^{-20}$ adalah sebagai berikut:

a. Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat

Simulasi pertama galat relatif terbesar untuk gerak osilasi vertikal adalah $1,61679962146804 \times 10^{-11}$ dan gerak torsional adalah $2,32813713898227 \times 10^{-5}$, galat relatif terkecil untuk gerak osilasi vertikal adalah $2,11051249275449 \times 10^{-16}$ dan gerak torsional adalah $1,48661494274038 \times 10^{-14}$, dan iterasi berhenti pada saat waktu $t = 339,29$.
 Simulasi kedua galat relatif terbesar untuk gerak osilasi vertikal adalah $6,31691472681704 \times 10^{-8}$ dan gerak torsional adalah $0,000107615464981596$, galat relatif terkecil untuk gerak osilasi vertikal adalah $1,39224000389205 \times 10^{-16}$ dan gerak torsional adalah $9,76528635814982 \times 10^{-16}$, dan iterasi berhenti pada saat waktu $t = 559,21$.
 Dan simulasi ketiga galat relatif terbesar untuk gerak osilasi vertikal adalah $1,7786597453662 \times 10^{-6}$ dan gerak torsional adalah $9,7001688041798 \times 10^{-6}$, galat relatif terkecil untuk gerak osilasi vertikal adalah $1,689912531783 \times 10^{-16}$ dan gerak torsional adalah $5,62265610955897 \times 10^{-15}$, dan iterasi berhenti pada saat waktu $t = 754,28$.

b. Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima

Simulasi pertama galat relatif terbesar untuk gerak osilasi vertikal adalah $5,47995965187342 \times 10^{-12}$ dan gerak torsional adalah $1,31808611543055 \times 10^{-8}$, galat relatif terkecil untuk gerak osilasi vertikal

adalah $3,55397128062262 \times 10^{-16}$ dan gerak torsional adalah $8,21568807080448 \times 10^{-14}$, dan iterasi berhenti pada saat waktu $t = 10,99$.

Simulasi kedua galat relatif terbesar untuk gerak osilasi vertikal adalah $1,13258607378114 \times 10^{-7}$ dan gerak torsional adalah $1,08679781101889 \times 10^{-7}$, galat relatif terkecil untuk gerak osilasi vertikal adalah $1,77412018055013 \times 10^{-16}$ dan gerak torsional adalah $1,90608952722218 \times 10^{-16}$, dan iterasi berhenti pada saat waktu $t = 20,42$.

Dan simulasi ketiga galat relatif terbesar untuk gerak osilasi vertikal adalah $3,66367558653258 \times 10^{-6}$ dan gerak torsional adalah $2,1387087114825 \times 10^{-5}$, galat relatif terkecil untuk gerak osilasi vertikal adalah $1,77817700485202 \times 10^{-16}$ dan gerak torsional adalah $2,61206507694246 \times 10^{-15}$, dan iterasi berhenti pada saat waktu $t = 42,68$.

c. Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Enam

Simulasi pertama galat relatif terbesar untuk gerak osilasi vertikal adalah $1,16297751742516 \times 10^{-11}$ dan gerak torsional adalah $3,21993591731726 \times 10^{-9}$, galat relatif terkecil untuk gerak osilasi vertikal adalah $1,29519103495881 \times 10^{-16}$ dan gerak torsional adalah $5,27487848189871 \times 10^{-14}$, dan iterasi berhenti pada saat waktu $t = 0,47$.

Simulasi kedua galat relatif terbesar untuk gerak osilasi vertikal adalah $2,24060388991285 \times 10^{-7}$ dan gerak torsional adalah $2,15673891072678 \times 10^{-7}$, galat relatif terkecil untuk gerak osilasi vertikal adalah $1,35843400075013 \times 10^{-16}$ dan gerak torsional adalah

$5,94534689005873 \times 10^{-14}$, dan iterasi berhenti pada saat waktu $t = 0,53$.

Dan simulasi ketiga galat relatif terbesar untuk gerak osilasi vertikal adalah

$1,10404638729739 \times 10^{-6}$ dan gerak torsional adalah

$3,80133175647868 \times 10^{-7}$, galat relatif terkecil untuk gerak osilasi vertikal

adalah $4,04196828767192 \times 10^{-16}$ dan gerak torsional adalah

$4,9675608426393 \times 10^{-16}$, dan iterasi berhenti pada saat waktu $t = 2,19$.

Sehingga galat relatif metode Adams-Bashforth-Moulton pada model gerak osilasi vertikal dan torsional akan cepat mendekati nilai 0 sepanjang t sebanding dengan tinggi tingkat orde metode Adams-Bashforth-Moluton.

4.2 Saran

Untuk penelitian selanjutnya diharapkan pembaca melakukan penelitian tentang model gerak osilasi vertikal dan torsional menggunakan penyelesaian analitik tanpa mengabaikan gaya tegang kabel $-K(y \pm l \sin \theta)^+$. Karena pada skripsi ini hanya membahas penyelesain numerik model gerak osilasi vertikal dan torsional dengan mempertimbangkan gaya tegang kabel $-K(y \pm l \sin \theta)^+$.

DAFTAR RUJUKAN

- Abdullah, S. 2016. *Penerapan Metode Adams-Bashforth-Moulton pada Persamaan Logistik dalam Memprediksi Pertumbuhan Penduduk di Provinsi Sulawesi Selatan*. Makasar: UIN Alauddin Makassar.
- Al-Jazairi, S. A. 2007. *Aisar At-Tafaasir li Al-Kalaami Al-Aliyyi Al-Kabiir*. Terjemahan M. Azhari Hatim & Abdurrahim Mukti. Jakarta: Darus Sunnah Press.
- Anista, R. 2015. *Analisis Perilaku Model Gerak Vertikal Dawai*. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Apriadi, Prihandono, B., & Noviani, E. 2014. Metode Adams-Bashforth-Moulton dalam Penyelesaian Persamaan Diferensial Non Linier. *Buletin Ilmiah Mat. Sat. dan Terapan (Bimaster)*, 3 (2): 107-116.
- As-Sa'di, S. A. 1999. *Tafsir al-Karim ar-Rahman fi Tafsir Kalam al-mannan*. Terjemahan Muhammad Iqbal. Jakarta: PUSTAKA SAHIFA.
- Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. 1997. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Canada: John Wiley & Sons, Inc.
- Braun, M. 1983. *Diflerential Equations and Their Application Third Edition*. New York: Springer-Verlag New York Inc.
- Braun, M. 1993. *Differential Equation and Their Applications Fourth Edition*. New York: Springer.
- Burden, R. L., & Faires, J. D. 2010. *Numerical Analysis Ninth Edition*. Boston: Cengage Learning.
- Chapra, S. C., & Canale, R. P. 2010. *Numerical Methods for Engineers Sixth Edition*. New York: The McGraw-Hill Companies, Inc.
- Giancoli, D. C. 2009. *Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics*. America: Pearson Education, Inc.
- Hoffman, J. D. 2001. *Numerical Methods for Engineers and Scientists*. New York: Marcel Dekker, Inc.
- Kreyszig, E. 2006. *Advanced Engineering Mathematics Ninth Edition*. Hoboken: John Wiley & Sons. Inc.
- Kwofie, R. O. 2012. *A Mathematical model of a suspension bridge - case study: Adomi bridge, Atimoku, Ghana*. 1(3): 47-62.

- Mufid, I. 2015. *Analisis Dinamik Sudut Defleksi pada Model Vibrasi Dawai*. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Munir, R. 2010. *Metode Numerik*. Bandung: Informatika Bandung.
- Neushauser, C. 2004. *Calculus for Biology and Medicine*. New Jersey: Pearson Education.
- Nurhayati, S. S. 2015. *Metode Adams Bashforth Moulton pada penyelesaian Model Osilasi Vertikal Dawai*. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Putri, P. P. 2013. *Analisis Solusi Numerik Model Predator-Prey Dengan Metode Runge-Kutta Orde Empat Dan Gill*. Jember: Universitas Jember.
- Rosłonec, S. 2008. *Fundamental Numerical Methods for Electrical Engineering*. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Teschl, G. 2012. *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*. America: American Mathematical Society.
- Waluya, B. 2006. *Persamaan Diferensial*. Semarang: Universitas Negeri Semarang.

RIWAYAT HIDUP



Hendrik Widya Permata, lahir di Madiun pada tanggal 06 Juni 1994, bisa dipanggil Hendrik, tinggal di Desa Pucanganom Rt. 36 Rw. 03 Kecamatan Kebonsari Kabupaten Madiun. Anak ketiga dari tiga bersaudara dengan Bapak Suwito dan Ibu Robingaton.

Pendidikan dasarnya ditempuh di MI Nuriddinil Islam Pucanganom dan lulus pada tahun 2006, setelah itu melanjutkan ke SMP Negeri 1 Kebonsari dan lulus pada tahun 2009. Kemudian dia melanjutkan pendidikan ke SMA Negeri 1 Dolopo dan lulus pada tahun 2012. Selanjutnya, pada tahun 2012 menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Nalang Mengambil Jurusan Matematika.



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341) 558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Hendrik Widya Permata
NIM : 12610006
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Solusi Numerik Model Gerak Osilasi Vertikal dan Torsional untuk Masalah Jembatan Gantung
Pembimbing I : Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si
Pembimbing II : Evawati Alisah, M.Pd

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	16 Mei 2016	Konsultasi Bab I & Bab II	1.
2.	17 Mei 2016	Konsultasi Agama Bab I & Bab II	2.
3.	18 Mei 2016	ACC Bab I & Bab II	3.
4.	19 Mei 2016	ACC Agama Bab I & Bab II	4.
5.	25 Mei 2016	Konsultasi Bab III	5.
6.	31 Mei 2016	Konsultasi Agama Bab III	6.
7.	10 April 2018	Konsultasi Bab IV	7.
8.	16 April 2018	Konsultasi Abstrak	8.
9.	24 April 2018	Konsultasi Keseluruhan	9.
10.	24 April 2018	Konsultasi Agama Keseluruhan	10.
11.	26 April 2018	ACC Keseluruhan	11.
12.	26 April 2018	ACC Agama Keseluruhan	12.

Malang, 26 April 2018
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001