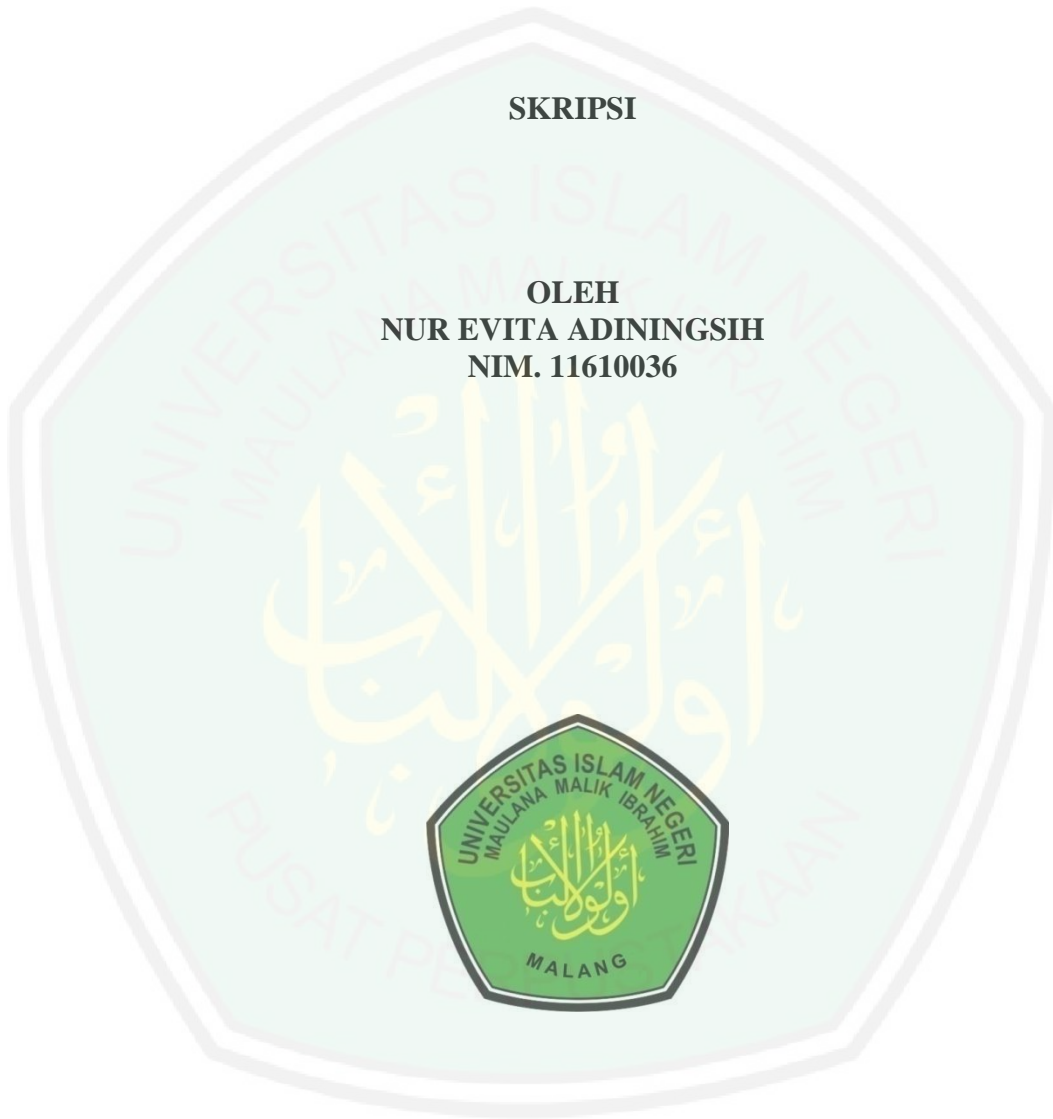


**ANALISIS DINAMIK SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL
PREDATOR-PREY TIGA SPESIES**

SKRIPSI

**OLEH
NUR EVITA ADININGSIH
NIM. 11610036**

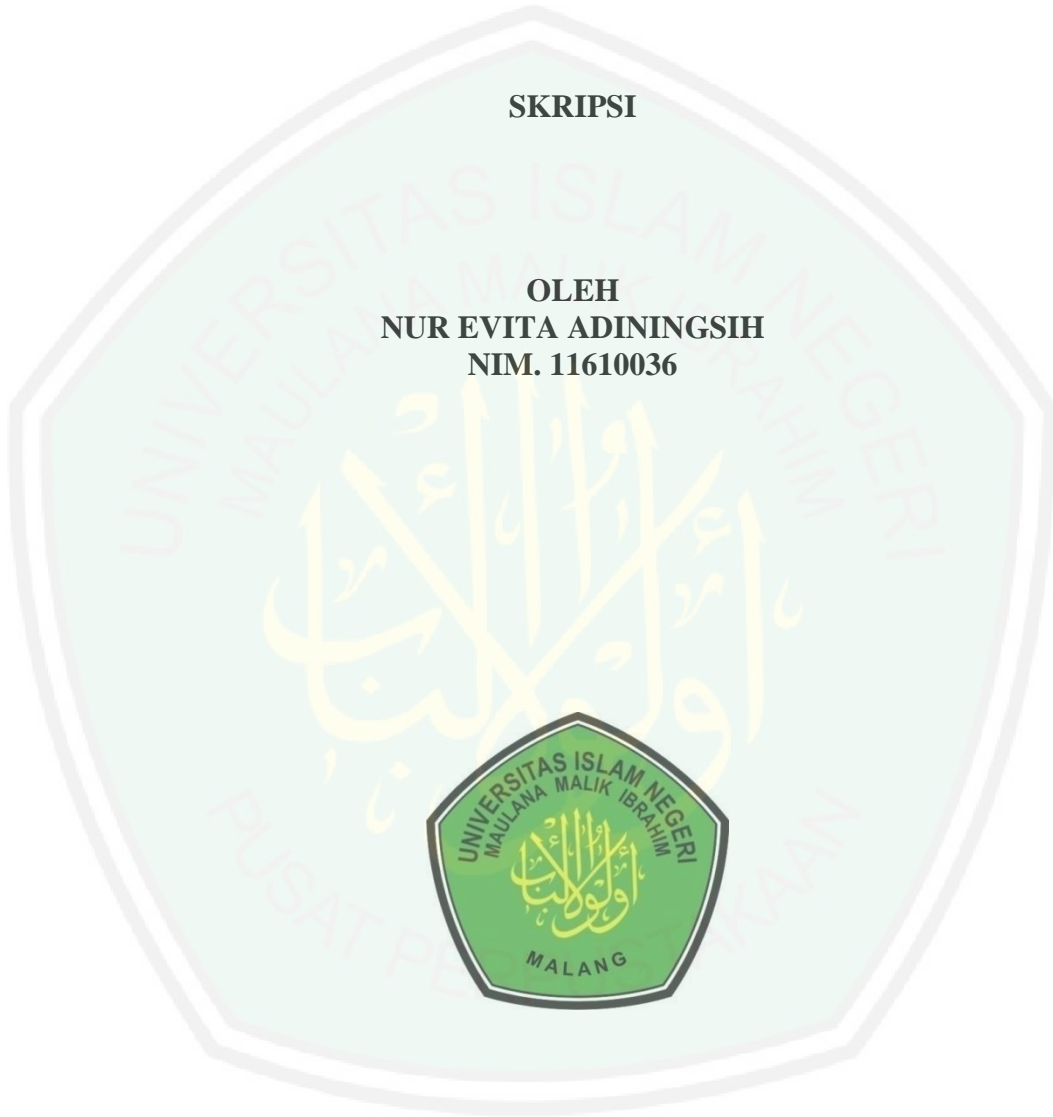


**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018**

**ANALISIS DINAMIK SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL
PREDATOR-PREY TIGA SPESIES**

SKRIPSI

**OLEH
NUR EVITA ADININGSIH
NIM. 11610036**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018**

**ANALISIS DINAMIK SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL
PREDATOR-PREY TIGA SPESIES**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
Nur Evita Adiningsih
NIM. 11610036**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018**

**ANALISIS DINAMIK SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL
PREDATOR-PREY TIGA SPESIES**


SKRIPSI

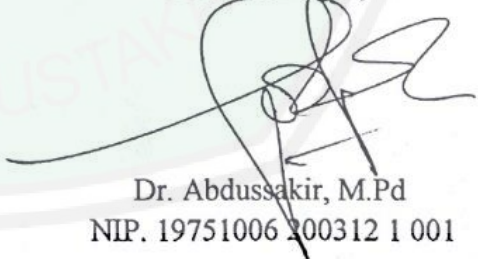
Oleh
Nur Evita Adiningsih
NIM. 11610036

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 7 Juni 2018

Pembimbing I,

Pembimbing II,


Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001


Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

**ANALISIS DINAMIK SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL
PREDATOR-PREY TIGA SPESIES**

SKRIPSI

Oleh
Nur Evita Adiningsih
NIM. 11610036

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

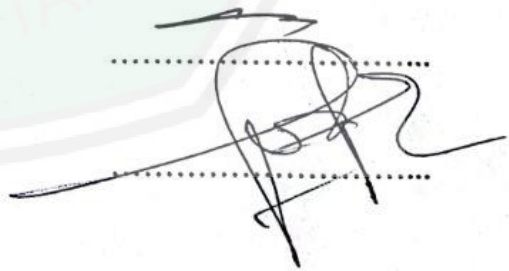
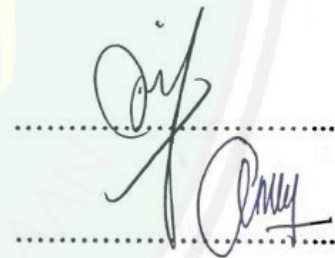
Tanggal 7 Juni 2018

Penguji Utama : Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si

Ketua Penguji : Muhammad Jamhuri, M.Si

Sekretaris Penguji : Dr. Usman Pagalay, M.Si

Anggota Penguji : Dr. Abdussakir, M.Pd



Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414-200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama : Nur Evita Adiningsih

NIM : 11610036

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Analisis Dinamik Sistem Persamaan Diferensial *Predator-Prey* Tiga Spesies

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 7 Juni 2018
Yang membuat pernyataan,



Nur Evita Adiningsih
NIM. 11610036

MOTO

Dunia ini sebuah permainan yang memiliki *target*, *action*, dan *execute*. Jalani dengan kemampuan maksimal yang kita miliki. Allah memberikan setiap insannya masing-masing dengan jalan takdir yang berbeda.

Syukuri dan Nikmatilah.



PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Dengan rasa syukur kepada Allah Swt penulis persembahkan skripsi ini kepada:

Ayahanda Heru Purwandito, ibunda Rochimah, serta kakak dan adik tersayang Mochammad Ryan Andriawandito dan Della Perwitasari. Muhammad Sukron yang telah membantu penulis dalam proses pengerjaan skripsi ini dan mendukung dengan sepenuh hati. Gagah Kurniawan yang memotivasi penulis dalam proses pengerjaan skripsi ini.



KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Alhamdulillah rabbil'alam, segala puji bagi Allah Swt yang telah memberikan rahmat, berkah, dan hidayah-Nya sehingga penulis mampu menyelesaikan skripsi yang berjudul “Analisis Dinamik Sistem Persamaan Diferensial *Predator-Prey* Tiga Spesies” ini dengan baik. Sholawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada Baginda Nabi Muhammad Saw yang telah menunjukkan dan mengubah dari jalan jahiliyah/kegelapan ke jalan yang terang benderang seperti sekarang ini.

Penulis menyadari banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Oleh karena itu, iringan do'a dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan, terutama kepada:

1. Prof Dr. H. Abdul Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang serta dosen pembimbing I yang telah memberikan bimbingan, nasihat, dan arahan untuk segera menyelesaikan skripsi ini.
4. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan arahan dan bimbingan selama penyusunan skripsi ini.

5. Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si, selaku sekretaris Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang serta berperan dalam membimbing selama penyusunan skripsi ini.
6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen yang telah memberikan bimbingan dalam perkuliahan.
7. Kedua orang tua dan seluruh keluarga yang memberikan dukungan berupa motivasi dan do'a sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik.
8. Teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2011 yang telah membantu dalam penyelesaian skripsi ini.
9. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik berupa materil maupun moril.

Akhir kata, semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat dan menambah wawasan keilmuan bagi yang membacanya.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, Juni 2018

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR	xiii
ABSTRAK	xiv
ABSTRACT	xv
ملخص	xvi
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Tujuan Penelitian	3
1.4 Batasan Masalah	4
1.5 Manfaat Penelitian	5
1.6 Metode Penelitian	5
1.7 Sistematika Penulisan	6
BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 <i>Predator-Prey</i> Tiga Spesies	8
2.2 Sistem Persamaan Diferensial	9
2.3 Sistem Persamaan Diferensial Biasa Linier dan Nonlinier	12
2.4 Sistem Persamaan Diferensial Biasa <i>Autonomous</i>	13
2.5 Titik Keseimbangan Sistem <i>Autonomous</i>	14
2.6 Linierisasi Sistem PDB <i>Autonomous</i>	15
2.7 Titik Tetap atau <i>Fixed point</i>	19
2.8 Analisis Kestabilan <i>Fixed point</i>	20
2.9 Nilai-Nilai Eigen dan Vektor Eigen	21

2.10 Kajian Al-Quran tentang Kestabilan Ekosistem	23
---	----

BAB III PEMBAHASAN

3.1 Model <i>Predator-Prey</i> Tiga Spesies	26
3.2 Identifikasi Model <i>Predator-Prey</i> Tiga Spesies	30
3.3 Analisis Model <i>Predator-Prey</i> Tiga Spesies	31
3.4 Analisis Perilaku dari Model <i>Predator-Prey</i> Tiga Spesies	34
3.5 Besaran Parameter	34
3.6 Titik Tetap pada Sistem Persamaan	35
3.7 Linierisasi	36
3.8 Nilai Eigen	39
3.9 Kestabilan Titik Tetap	40
3.10 Simulasi <i>Predator-Prey</i> Tiga Spesies	42
3.11 Kajian Agama tentang Keseimbangan Makhluk Hidup	44

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan	46
4.2 Saran	46

DAFTAR RUJUKAN	47
-----------------------------	----

LAMPIRAN-LAMPIRAN

RIWAYAT HIDUP

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Menentukan Titik Tetap.....	20
Tabel 3.1 Besaran Parameter	34
Tabel 3.2 Nilai Awal	34



DAFTAR GAMBAR

Gambar 3.1	Grafik simulasi <i>prey, intermediate-predator, top-predator</i> dengan $x(0) = 0.8$, $y(0) = 0.2$, dan $z(0) = 0.9$	42
Gambar 3.2	Grafik simulasi <i>prey</i> dengan $x(0) = 0.8$	42
Gambar 3.3	Grafik simulasi <i>intermediate-predator</i> dengan $y(0) = 0.2$	43
Gambar 3.4	Grafik simulasi <i>top-predator</i> dengan $z(0) = 0.9$	43



ABSTRAK

Adiningsih, Nur Evita. 2018. **Analisis Dinamik Sistem Persamaan Diferensial Predator-Prey Tiga Spesies**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Usman Pagalay, M.Si. (II) Dr. Abdussakir, M.Pd.

Kata kunci: *Predator-Prey* Tiga Spesies, Rantai Makanan, Ekosistem, Kestabilan, Analisis dinamik, Model populasi.

Salah satu model interaksi antar makhluk hidup dalam suatu ekosistem adalah model *predator-prey* tiga spesies. *Predator-prey* tiga spesies ini tersusun dari satu spesies *prey*, satu spesies *intermediate predator*, dan satu spesies *top predator*. *Prey* merupakan spesies yang dimangsa oleh *intermediate predator* dan *top predator*. *Intermediate predator* merupakan spesies yang memangsa *prey* tetapi juga dimangsa oleh *top predator*. Sedangkan *top predator* adalah spesies yang memangsa *prey* dan *intermediate predator*. Model dari *predator-prey* tiga spesies ini berbentuk sistem persamaan diferensial nonlinier.

Berdasarkan permasalahan di atas maka penelitian ini bertujuan untuk mengetahui bagaimana analisis dinamik dari model *predator-prey* tiga spesies tersebut. Sehingga diharapkan dapat mengetahui bagaimana arah kepunahan suatu spesies *predator* maupun *prey*. Hasil analisis dinamik dari sistem persamaan diferensial *predator-prey* tiga spesies didapatkan tiga titik tetap yaitu titik tetap (a) $x_1 = 1, y_1 = 0$, dan $z_1 = 0$ (tidak stabil), (b) $x_2 = 0,3297008434$, $y_2 = 2,486229719$, dan $z_2 = 0$ (tidak stabil), (c) $x_3 = 0,2445212315$, $y_3 = 0,08667445145$, dan $z_3 = 0,4485840923$ (tidak stabil).

ABSTRACT

Adiningsih, Nur Evita. 2018. **Dynamic Analysis of Differential Equations System Predator-Prey Three Species**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Islamic State University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisor: (I) Dr. Usman Pagalay, M.Si. (II) Dr. Abdussakir, M.Pd.

Keyword: Predator-Prey Three Species, Food Chain, Ecosystem, Stability, Dynamic Analysis, Population Model.

One model of interaction between living things in an ecosystem is a predator-prey of three species model. The predator-prey of three species is composed of one species of prey, one species of intermediate predator, and one species of predator. Preys are species that is preyed by intermediate predators and top predators. Intermediate predators are species that prey on preys but are also preyed by top predators. While top predators are species that prey on preys and intermediate predators. The model of the predator-prey of these three species is a system of nonlinier differential equations.

Based on the problem then this research is aimed to know how dynamic analysis from predator-prey of three species model. So it is expected to know how the extinction of the predator or the prey. The results of this study indicate that (a) $x_1 = 1, y_1 = 0$, and $z_1 = 0$ (unstable), (b) $x_2 = 0,3297008434, y_2 = 2,486229719$, and $z_2 = 0$ (unstable), (c) $x_3 = 0,2445212315, y_3 = 0,08667445145$, and $z_3 = 0,4485840923$ (unstable).

ملخص

ادينيغسيه, نور إيفيتا. ٢٠١٨. التحليل الديناميكي لنظام المعادلات التفاضلية المفترس الفريسة الثلاثة الأنواع. بحث جامعي. قسم الرياضيات, كلية العلوم والتكنولوجيا, الجامعة الحكومية الإسلامية مولانا مالك إبراهيم مالانج. . المشرف: (١) الدكتور عثمان فاغلاي الماجستير (٢) الدكتور رعبداشاكرالماجستير. كلمة المفتاحية: ثلاثة أنواع، السلسلة الغذائية، النظام البيئي، الاستقرار، التحليل الديناميكي، نموذج السكان

نموذج واحد للتفاعل بين الكائنات الحية في النظام البيئي هو نموذج مفترس لثلاثة أنواع من الفرائس. يتكون الفريسة الفريسة من ثلاثة أنواع من نوع واحد من الفرائس، ونوع واحد من الحيوانات المفترسة الوسيطة، ونوع واحد من الحيوانات المفترسة. فريسة هي نوع من الأنواع التي تفترسها الحيوانات المفترسة الوسيطة والحيوانات المفترسة. الحيوانات المفترسة الوسيطة هي الأنواع التي تفترسها الحيوانات المفترسة. في حين أن الحيوانات المفترسة هي الأنواع التي تفترس الفريسة والحيوانات المفترسة الوسيطة. إن نموذج المفترس الفريسة لهذه الأنواع الثلاثة هو نظام من المعادلات التفاضلية غير الخطية.

استناداً إلى المشكلة المذكورة أعلاه، يهدف هذا البحث إلى معرفة ديناميكية نموذج المفترس الفريسة من الأنواع الثلاثة. لذلك فمن المتوقع أن نعرف كيف انقرض الفصيلة أو الفريسة. نتائج هذه الدراسة تشير إلى أن:

$$\text{(غير مستقر) } z_1 = 0, \text{ و } y_1 = 0, \text{ و } x_1 = 1 \text{ (١)}$$

$$\text{(غير مستقر) } z_2 = 0, \text{ و } y_2 = 2,486229719, \text{ و } x_2 = 0,3297008434 \text{ (٢)}$$

$$\text{(غير مستقر) } z_3 = 0,4485840923, \text{ و } y_3 = 0,08667445145, \text{ و } x_3 = 0,2445212315 \text{ (٣)}$$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Fenomena yang terjadi di antara makhluk hidup sering membentuk masalah-masalah yang pembahasannya berupa model matematika. Salah satu masalah yang sering dihadapi adalah tentang ekosistem makhluk hidup. Ekosistem tersusun dari organisme biotik dan organisme abiotik. Konsep ekosistem diintegrasikan dengan konsep tropik dan rangkaian perubahan lingkungan. Salah satu model interaksi antar makhluk hidup dalam suatu ekosistem adalah model *predator-prey* tiga spesies. *Predator-prey* tiga spesies ini tersusun dari satu spesies *prey*, satu spesies *intermediate predator*, dan satu spesies *top predator*. Misal *prey* sebagai produsen yaitu tumbuhan, *intermediate predator* sebagai konsumen I yaitu kelinci dan *top predator* sebagai konsumen II yaitu buaya. Hubungan di antara ketiga spesies yang terjadi adalah sebuah rantai makanan pada suatu ekosistem.

Seiring perkembangan zaman, populasi pada ekosistem mengalami penurunan dan peningkatan secara tidak stabil. Adapun faktor yang memicu pertumbuhan populasi seperti migrasi, kelahiran, kematian, dan lain sebagainya. Beberapa faktor tersebut terjadi dari waktu ke waktu sehingga waktu adalah salah satu yang mempengaruhi faktor laju pertumbuhan populasi tersebut.

Peneliti menganalisis sistem persamaan diferensial pada model *predator-prey* tiga spesies menggunakan penjabaran secara sistematis mengenai persamaan diferensial model tersebut dan menganalisis sistem persamaan diferensial model

tersebut sesuai perilaku pada spesies *prey* terhadap spesies *intermediate predator* dan spesies *top predator*. Model tersebut memiliki tiga persamaan yaitu laju pertumbuhan pada populasi *prey*, laju pertumbuhan pada populasi *intermediate predator*, dan laju pertumbuhan pada populasi *top predator*. Peneliti menganalisis model tiap persamaan dan mengetahui model perilaku dari model persamaan *predator-prey* tiga spesies. Peneliti menganalisis untuk kestabilan pada model persamaan tersebut dengan menentukan nilai Eigen, vektor Eigen, linierisasi, dan titik kestabilan. Dari semua itu menghasilkan gambaran dengan simulasi menggunakan Matlab atau Maple.

Peneliti menggunakan persamaan yang ada pada jurnal Suwanto (2013) bahwa di dalam jurnal tersebut membahas model *predator-prey* tiga spesies termasuk model sistem dinamis yang dapat dianalisis secara numerik dengan menggunakan metode *Runge Kutta* Orde 4.

Berdasarkan rujukan di atas, peneliti meneruskan penelitian dengan menggunakan model *predator-prey* milik Suwanto (2013), yaitu *predator-prey* tiga spesies dengan cara menentukan model dan perilaku dari masing-masing persamaan, menentukan analisis dinamis dari persamaan *predator-prey* tiga spesies. Model ini sangat memiliki peran penting dalam bidang ekologi. *Predator-prey* adalah contoh sederhana dari ekosistem di kehidupan sehari-hari. Kehidupan yang saling bergantung pada satu sama lain, *prey* yang bergantung pada ekosistem sekitar, *intermediate predator* yang bergantung pada *prey*, dan *top predator* yang bergantung pada *intermediate predator* dan *prey*. Sesuai dengan firman Allah Swt surat Al-Hijr ayat 20

وَجَعَلْنَا لَكُمْ فِيهَا مَعَايِشَ وَمَنْ لَسْتُمْ لَهُ بِرَازِقِينَ (٢٠)

“Dan Kami telah menjadikan untukmu di bumi keperluan-keperluan hidup, dan (Kami menciptakan pula) makhluk-makhluk yang kamu sekali-kali bukan pemberi rezeki kepadanya” (QS. Al-Hijr: 20).

Ayat tersebut menjelaskan bahwa ekosistem di bumi memiliki manfaat masing-masing dan saling bergantung bagi makhluk hidup lainnya. Peneliti berpendapat bahwa mempelajari tentang *predator-prey* akan mengetahui pentingnya menjaga keharmonisan ekosistem termasuk rantai makanan pada ekosistem agar terjaga dan selalu berkaitan erat.

Oleh karena itu, dalam penelitian ini peneliti mengambil judul “*Analisis Dinamik Sistem Persamaan Diferensial Model Predator-Prey Tiga Spesies*” yang akan menganalisis model sistem persamaan *predator-prey* tiga spesies pada jurnal Suwanto dan menganalisis dinamik persamaan *predator-prey* tiga spesies beserta simulasinya.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka permasalahan dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana analisis sistem persamaan diferensial *predator-prey* tiga spesies pada jurnal Suwanto (2013)?
2. Bagaimana analisis dinamik sistem persamaan diferensial *predator-prey* tiga spesies dan simulasinya?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan permasalahan tersebut, maka tujuan penelitian ini adalah:

1. Untuk menganalisis sistem persamaan diferensial *predator-prey* tiga spesies pada jurnal Suwanto (2013).

2. Untuk menganalisis dinamik sistem persamaan diferensial *predator-prey* tiga spesies dan simulasinya.

1.4 Batasan Masalah

Sistem persamaan yang digunakan dalam penelitian ini memiliki tiga persamaan diferensial. Penulis membuat batasan masalah penelitian dalam pembahasan, yaitu:

1. Sistem persamaan pada spesies *predator-prey* yang diambil dari jurnal Suwanto (2013) dengan tiga persamaan

$$\begin{aligned}\frac{dX(t)}{dT} &= rX(t) \left(1 - \frac{X(t)}{K}\right) - \frac{A_1X(t)Y(t)}{\rho + X(t) + \gamma Y(t)} - \frac{A_2X^2(t)Z(t)}{\alpha^2 + Z^2(t)} \\ \frac{dY(t)}{dT} &= \frac{B_1X(t)Y(t)}{\rho + X(t) + \gamma Y(t)} - \frac{A_3Y^2(t)Z(t)}{\beta^2 + Y^2(t)} - \mu^*Y(t) \\ \frac{dZ(t)}{dT} &= \frac{B_2X^2(t)Z(t)}{\alpha^2 + X^2(t)} + \frac{B_3Y^2(t)Z(t)}{\beta^2 + Y^2(t)} - \mu^*Z(t) - QZ(t)\end{aligned}\quad (1.1)$$

$$X(0) > 0, \quad Y(0) > 0, \quad \text{dan} \quad Z(0) > 0$$

Sistem persamaan (1.1) disederhanakan dengan menggunakan penskalaan parameter sesuai pada jurnal Suwanto (2013) dan variabelnya yaitu $T = \frac{t}{r}$, $X = Kx$, $Y = Ky$, $Z = Kz$, $A_1 = ra_1$, $A_2 = ra_2$, $A_3 = ra_3$, $B_1 = rb_1$, $B_2 = rb_2$, $B_3 = rb_3$, $\mu^* = r\mu$ dan $Q = r$. Penskalaan tersebut memperoleh hasil sistem persamaan diferensial biasa nonlinier model *predator-prey* yang lebih sederhana, yaitu

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t)(1 - x(t)) - \frac{a_1x(t)y(t)}{m_1 + x(t) + \gamma y(t)} - \frac{a_2x^2(t)z(t)}{m_2^2 + x^2(t)}$$

$$\begin{aligned}\frac{dy(t)}{dt} &= \frac{b_1x(t)y(t)}{m_1 + x(t) + \gamma y(t)} - \frac{a_3y^2(t)z(t)}{m_3^2 + y^2(t)} - \mu y(t) \\ \frac{dz(t)}{dt} &= \frac{b_2x^2(t)z(t)}{m_2^2 + x^2(t)} + \frac{b_3y^2(t)z(t)}{m_3^2 + y^2(t)} - \mu z(t) - qz(t)\end{aligned}\quad (1.2)$$

(Suwanto, 2013)

2. Penelitian yang dilakukan terdapat nilai besaran paramater $a_1 = 0,8$, $a_2 = 0,6$, $a_3 = 0,25$, $b_1 = 0,9$, $b_2 = 0,5$, $b_3 = 1,9$, $\gamma = 0,9$, $\mu = 0,1$, $q = 0,5$, $m_1 = 0,4$, $m_2 = 0,2$, $m_3 = 0,2$, sesuai dengan jurnal penelitian Suwanto (2013).

1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan mampu sebagai rujukan bagi penelitian berikutnya, terutama dalam sistem persamaan diferensial *predator-prey* tiga spesies dalam mencari titik kesetimbangan antara populasi *prey*, populasi *intermediate predator* dengan populasi *top predator* dengan kondisi yang berbeda.

1.6 Metode Penelitian

Jenis penelitian yang digunakan adalah jenis penelitian kepustakaan (*library research*) atau studi literatur. Hal ini dilakukan dengan cara membaca, memahami, menelaah kemudian mengidentifikasi pengetahuan yang diperoleh dari literatur tersebut. Literatur utama yang digunakan adalah jurnal Niarti Suwanto (2013) dan beberapa literatur pendukung yang lain.

Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam membahas penelitian ini:

1. Analisis sistem persamaan diferensial *predator-prey* tiga spesies.
 - a. Menormalisasi persamaan *predator-prey* tiga spesies.

- b. Mengidentifikasi tiap variabel pada persamaan *predator-prey* tiga spesies.
 - c. Menganalisis model tiap persamaan.
 - d. Menganalisis perilaku persamaan *predator-prey* tiga spesies.
2. Analisis dinamik dan simulasi.
- a. Menentukan titik tetap.
 - b. Melinierisasi sistem persamaan.
 - c. Menentukan nilai Eigen dan vektor Eigen.
 - d. Menentukan kestabilan.
 - e. Mensimulasi dengan bantuan Matlab.
 - f. Membuat kesimpulan.

1.7 Sistematika Penulisan

Dalam penulisan skripsi ini, penulis menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab, dengan masing-masing bab dibagi dalam subbab dengan sistematika penulisan sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Berisi latar belakang masalah penelitian, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Berisi teori-teori yang berhubungan dengan permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian.

Bab III Pembahasan

Berisi pembahasan mengenai analisa sistem persamaan diferensial pada

predator-prey tiga spesies dengan perlambatan dan kondisi titik kesetimbangan pada sistem persamaan *predator-prey* tiga spesies dengan perlambatan.

Bab IV Penutup

Berisi kesimpulan dan saran.



BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 *Predator-Prey Tiga Spesies*

Ekosistem terdapat model linier dari *predator-prey* tiga spesies dimana x sebagai populasi *prey* dengan tingkatan terendah, y sebagai populasi *intermediate predator* atau konsumen I dengan tingkatan tengah, dan z sebagai populasi *top predator* atau konsumen II dengan tingkat tertinggi pada lingkup ekosistem *predator-prey* tiga spesies. Contoh ekosistem pada model *predator-prey* tiga spesies seperti tikus-ular-burung hantu, tumbuhan-kelinci-harimau, dan cacing-burung kecil-elang (Chauvet, 2002). Model dari contoh *predator-prey* tiga spesies adalah:

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy \quad (2.1)$$

$$\frac{dy}{dt} = -cy + dxy - eyz \quad (2.2)$$

$$\frac{dz}{dt} = -fz + gyz \quad (2.3)$$

untuk $a, b, c, d, e, f, g > 0$, dimana a, b, c dan d adalah persamaan dari Lotka-Voltera,

- 1) a menunjukkan tingkat pertumbuhan alami *prey* saat *predator* tidak ada,
- 2) b menunjukkan efek pemangsa pada *prey*,
- 3) c menunjukkan tingkat kematian alami dari *predator* saat *prey* tidak ada,
- 4) d menunjukkan tingkat perkembangbiakkan dan efisiensi *predator* dalam keberadaan *prey*,
- 5) e menunjukkan perlakuan yang terjadi akibat spesies z memakan spesies y ,

- 6) f menunjukkan tingkat kematian alami *predator z* saat *prey* tidak ada atau tidak dihitung, dan
- 7) g menunjukkan tingkat perkembangbiakkan dan efisiensi *predator z* dalam keberadaan *prey*.

Persamaan (2.1) merupakan persamaan diferensial untuk menyatakan kejadian dari spesies *prey*. Persamaan (2.2) merupakan persamaan diferensial untuk menyatakan kejadian dari spesies *intermediate predator*. Persamaan (2.3) merupakan persamaan diferensial untuk menyatakan kejadian dari spesies *top predator* (Chauvet, 2002).

2.2 Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial dapat mengekspresikan fenomena yang terjadi pada dunia nyata secara matematis dengan mengambil resiko perubahan dalam satu besaran terhadap perubahan besar lainnya. Fungsi $f(x) = y$ termasuk sistem persamaan diferensial. Adanya variabel x menentukan nilai variabel y sehingga pada variabel y bergantung pada nilai x . Relasi tersebut dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \end{aligned} \quad (2.4)$$

jika limitnya ada (Kartono, 2012).

Persamaan diferensial terdapat variabel bebas dan variabel terikat. Banyaknya variabel bebas yang terlibat, maka ada dua bentuk persamaan diferensial yaitu persamaan diferensial biasa jika hanya ada satu variabel bebas

yang terlibat dan persamaan diferensial parsial jika ada lebih dari satu variabel bebas yang terlibat (Kartono, 2012).

Bentuk umum dari persamaan diferensial biasa adalah:

$$F(x, y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, \ddot{y}^n) = 0. \quad (2.5)$$

Pada persamaan tersebut mengatakan bahwa terdapat hubungan antara variabel bebas x dan variabel terikat y beserta derivatif-derivatifnya dalam bentuk himpunan persamaan yang secara identik sama dengan nol yang menyatakan model matematika dari fenomena perubahan yang terjadi (Kartono, 2012).

Sistem persamaan diferensial adalah suatu sistem yang memuat n buah fungsi yang tidak diketahui. Sistem persamaan diferensial biasa muncul secara alamiah dalam masalah yang melibatkan beberapa variabel bebas (misalnya x_1, x_2, \dots, x_n) yang masing-masing darinya merupakan sebuah fungsi dari satu variabel bebas (misalnya t) (Kartono, 2012).

Bentuk umum dari suatu sistem n persamaan orde pertama mempunyai bentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

dengan x_1, x_2, \dots, x_n adalah variabel bebas dan t adalah variabel terikat, sehingga $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t)$, dengan $\frac{dx_n}{dt}$ merupakan derivatif fungsi x_n terhadap t (Kartono, 2012).

Waluya (2006) memberikan contoh pada sistem persamaan diferensial tersebut. Contoh sederhana yang digunakan yaitu sistem dua massa pegas dengan masing-masing massa m_1 dan m_2 diberikan gaya berturut-turut $F_1(t)$ dan $F_2(t)$.

Pada masa berlaku hukum Newton

$$\sum F_1 = m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} \text{ dan } \sum F_2 = m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2}, \quad (2.7)$$

dengan $\sum F_1$ dan $\sum F_2$ adalah jumlah gaya pada m_1 dan m_2 berturut-turut. Pada persamaan $x_1(t)$ dan $x_2(t)$ adalah pasangan karena dikaitkan dengan sebuah pegas yang mempunyai konstanta pegas k_2 . Oleh karena itu sistem yang terbentuk dinyatakan sebagai:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) + F_1 = -(k_1 + k_2) x_1 + k_2 x_2 + F_1 \quad (2.8)$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k_3 x_3 + k_2 (x_2 - x_1) + F_2 = -(k_2 + k_3) x_2 + k_2 x_3 + F_2 \quad (2.9)$$

Kartono (2012) membahas metode penyelesaian pada sistem persamaan diferensial. Contoh sederhana tersebut menggunakan dua persamaan diferensial linier orde pertama

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x, y) \quad (2.10)$$

$$\frac{dy}{dt} = G(t, x, y)$$

dengan persamaan linier pada masing-masing fungsi menyatakan dalam bentuk:

$$f_1(W)x + g_1(W)y = s_1(t) \quad (2.11)$$

$$f_2(W)x + g_2(W)y = s_2(t) \quad (2.12)$$

dengan operator $W = \frac{d}{dt}$.

2.3 Sistem Persamaan Diferensial Biasa Linier dan Nonlinier

Waluya (2006) menjelaskan bahwa persamaan diferensial biasa yang berbentuk $F(x, y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, \ddot{y}^n) = 0$ dikatakan linier jika F adalah linier dalam variabel-variabel $x, y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, \ddot{y}^n$. Secara umum persamaan diferensial biasa linier dapat diberikan sebagai berikut:

$$a_n(t)y^n + a_{n-1}(t)y^{n-1} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t). \quad (2.13)$$

Menurut Baiduri (2002), persamaan (2.13) merupakan persamaan diferensial orde- n dikatakan linier jika memiliki ciri-ciri sebagai berikut:

- Variabel-variabel terikat dan turunannya paling tinggi pangkat satu.
- Tidak mengandung bentuk perkalian antara sebuah variabel terikat dengan variabel terikat lainnya, atau turunan yang satu dengan turunan yang lainnya, atau variabel terikat dengan sebuah turunan.
- Variabel terikat y bukan merupakan fungsi transenden.

Dimisalkan bahwa koefisien-koefisien $a_n(t), a_{n-1}(t), \dots, a_0(t)$ dan fungsi $f(t)$ merupakan fungsi-fungsi yang kontinu pada suatu selang I . Jika fungsi $f(t) = 0$ maka persamaan (2.13) disebut persamaan homogen. Jika fungsi $f(t) \neq 0$ maka persamaan (2.13) disebut persamaan nonhomogen atau tak homogen. Bila semua koefisien $a_n(t), a_{n-1}(t), \dots, a_0(t)$ adalah suatu konstanta, maka persamaan (2.13) disebut persamaan linier koefisien konstanta, jika semua variabelnya berupa fungsi maka disebut persamaan linier koefisien variabel (Finizio dan Ladas, 1988).

Menurut Finizio dan Ladas (1988), sistem persamaan diferensial linier adalah suatu sistem yang memuat n buah persamaan diferensial dengan n buah fungsi yang tidak diketahui, dengan n merupakan bilangan bulat positif yang lebih

besar sama dengan 2. Bentuk umum dari suatu sistem persamaan diferensial linier orde satu dengan n fungsi yang tidak diketahui adalah:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \dot{x}_2 = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{cases} \quad (2.14)$$

Bentuk persamaan (2.14) dapat ditulis secara singkat menjadi:

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + f_i(t) \quad (2.15)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

Suatu sistem persamaan diferensial dikatakan linier apabila sistem tersebut terdiri dari lebih dari satu persamaan linier yang saling terkait. Sedangkan koefisiennya bisa berupa konstanta fungsi. Sedangkan sistem persamaan diferensial dikatakan nonlinier apabila sistem tersebut terdiri dari lebih dari satu persamaan nonlinier yang saling terkait (Boyce dan Diprima, 1999).

2.4 Sistem Persamaan Diferensial Biasa *Autonomous*

Misal diberikan sistem persamaan diferensial

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

Dengan P dan Q merupakan fungsi kontinu dari x dan y serta derivatif parsial pertamanya juga kontinu. Persamaan (2.18) dengan P dan Q tidak bergantung secara eksplisit terhadap t disebut *autonomous*. Sebaliknya jika P dan Q bergantung secara eksplisit terhadap t maka disebut sistem *nonautonomous* (Hariyanto, dkk,1992).

Jika suatu sistem *autonomous* memiliki bentuk:

$$\begin{aligned}x' &= F(x, y) \\y' &= G(x, y)\end{aligned}\tag{2.17}$$

maka titik kritis sistem persamaan (2.19) adalah $p^* = x^*, y^*$ sedemikian sehingga

$$f(x^*, y^*) = 0, \quad g(x^*, y^*) = 0\tag{2.18}$$

Suatu titik kesetimbangan p^* pada ruang fase dari suatu persamaan diferensial biasa *autonomous* adalah sebuah titik dimana semua derivatif dari variabel adalah nol. Titik kesetimbangan juga disebut sebagai titik stasioner (tetap) atau suatu posisi yang mantap (*steady state*). Maka $p^* = (x^*, y^*)$ adalah titik kesetimbangan, $x = x^*, y = y^*$ (untuk sebarang t) adalah suatu solusi konstan (Robinson, 2004).

2.5 Titik Kesetimbangan Sistem *Autonomous*

Sistem *autonomous* adalah suatu sistem persamaan diferensial yang berbentuk:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y)\end{aligned}\tag{2.19}$$

dimana fungsi-fungsi f dan g bebas dari waktu. Bila sistem *autonomous* di atas linier dengan koefisien yaitu jika $\frac{dx}{dt} = ax + by, \frac{dy}{dt} = cx + dy$ dengan a, b, c dan d merupakan konstanta. Jika dimisalkan bahwa $ad - bc \neq 0$, maka titik $(0, 0)$ adalah satu-satunya titik kritis dari persamaan di atas dan persamaan karakteristiknya berbentuk:

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0\tag{2.20}$$

dengan λ_1 dan λ_2 adalah akar-akar dari persamaan (2.20).

Penentuan kestabilan titik kesetimbangan didapat dengan melihat nilai-nilai Eigennya, yaitu $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ yang diperoleh dari persamaan karakteristik dari A , yaitu $(A - \lambda I)x = 0$.

Secara umum kestabilan titik kesetimbangan mempunyai tiga perilaku sebagai berikut:

Teorema I

1. Titik kritis $(0, 0)$ dari sistem di atas stabil jika dan hanya jika kedua akar dari persamaan (2.20) adalah riil negatif atau mempunyai bagian riil tak positif.
2. Titik kritis $(0, 0)$ dari sistem di atas stabil asimtotik jika dan hanya jika kedua akar dari persamaan (2.20) adalah riil negatif atau mempunyai bagian riil negatif.
3. Titik kritis $(0, 0)$ dari sistem di atas tak stabil jika salah satu (atau kedua akar) dari persamaan (2.20) adalah riil dan positif atau paling sedikit satu akar mempunyai bagian riil positif (Finizio dan Ladas, 1988).

2.6 Linierisasi Sistem PDB *Autonomous*

Linierisasi adalah proses pendekatan persamaan diferensial nonlinier dengan persamaan diferensial linier untuk membantu memahami persamaan diferensial nonlinier. Suatu sistem *autonomous* di atas dengan f dan g adalah nonlinier, selanjutnya akan dicari pendekatan sistem linier disekitar (x^*, y^*) dengan melakukan ekspansi menurut deret Taylor di sekitar (x^*, y^*) dan menghilangkan suku nonliniernya sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = f(x^*, y^*) + \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*) \quad (2.21)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x^*, y^*) + \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*)$$

Bila dilakukan substitusi $(x - x^*) = u$ dan $(y - y^*) = v$ maka $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}$

dan $\frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dt}$ pada keadaan setimbang $f(x^*, y^*) = 0$, $g(x^*, y^*) = 0$ sehingga

diperoleh persamaan linier sebagai berikut:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)u + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)v \quad (2.22)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)u + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)v$$

Sistem berikut dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$\begin{pmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Sehingga sistem linier pada titik tetap (x^*, y^*) diberikan dengan

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

dengan semua turunan parsial di dalam matrik adalah dievaluasi pada (x^*, y^*)

(Boyce dan DiPrima, 1999).

Sebagai contoh, diberikan sistem persamaan diferensial berikut:

$$\dot{x} = -x + y \quad (2.25)$$

$$\dot{y} = 2 - 2xy^2$$

Nullcline dari persamaan tersebut adalah $x = y$ dan $xy^2 = 1$, terdapat titik tetap tunggal yaitu $x = 1$ dan $y = 1$. Pada sistem tersebut menggunakan tanda \dot{x} dan \dot{y} tidak cukup untuk menentukan perilaku solusi di sekitar titik tetap. Oleh karena itu dapat menggunakan ekspansi deret Taylor tentang titik tetap dari dua persamaan diferensial, yaitu:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) = -x + y \\ \dot{y} &= g(x, y) = 2 - 2xy^2\end{aligned}\tag{2.26}$$

diberikan $u = x - 1$ dan $v = y - 1$, maka:

$$\begin{aligned}\dot{u} = \dot{x} &= f(1, 1) + u \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) + v \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) + \dots = -u + v \\ \dot{v} = \dot{y} &= g(1, 1) + u \frac{\partial g}{\partial x}(1, 1) + v \frac{\partial g}{\partial y}(1, 1) + \dots = -2u - 4v + \dots\end{aligned}\tag{2.27}$$

Koefisien matriks untuk sistem linier tersebut memiliki nilai Eigen -2 dan -3 dengan vektor Eigen $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ berturut-turut. Sistem yang terlinierisasi bersifat stabil *node* di titik asal. Sistem linier mendominasi di sekitar titik tetap, sehingga persamaan nonlinier juga memiliki titik tetap yang menarik, dan sebagian besar solusi mendekati titik tetap dengan garis asimtotik $y - 1 = -(x - 1)$. Stabil *manifold* titik tetap $(1,1)W^s((1,1))$ tentunya memuat kemiringan tentang titik tetap.

Untuk persamaan umumnya yaitu:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y)\end{aligned}\tag{2.28}$$

linierisasi sistem pada titik tetap (x^*, y^*) diberikan oleh

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

dengan semua turunan parsial pada matriks ditaksir pada (x^*, y^*) . Ketika membandingkan sistem linier dengan solusi sistem nonlinier, koordinat (u, v) untuk sistem linier harus dibandingkan dengan $(x, y) = (u + x^*, v + y^*)$ untuk sistem nonlinier. Jika

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

maka dapat ditulis

$$DF(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

untuk matriks turunan parsial atau turunan biasa. Pada n variabel, jika

$$F(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} F_1(x_1, \dots, x_n) \\ F_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

dan $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ adalah titik tetap, maka kita tulis

$$DF_{(x^*)} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x^*) \right) \quad (2.33)$$

dengan matriks $n \times n$ dari turunan parsial maupun turunan biasa. Linierisasi sistemnya adalah:

$$\dot{u} = DF_{(x^*)} u \quad (2.34)$$

Jika \dot{x} adalah titik tetap dari $\dot{x} = F(x)$, maka kembali ke nilai Eigen matriks turunan parsial $DF_{(x^*)}$ sebagai nilai Eigen titik tetap atau nilai Eigen dari x^* . Titik tetap x^* dinamakan hiperbolik dengan syarat bahwa bagian riil dari

semua nilai Eigen dari matriks $DF_{(x^*)}$ bukan nol. Stabil *manifold* dari titik tetap $W^s(x^*)$ adalah himpunan semua titik yang mendekati titik tetap seperti t menuju tak hingga positif. $W^s(x^*) = \{P_0: \phi(t; P_0) \text{ mendekati } x^* \text{ sebagai } t \rightarrow \infty\} = \{P_0: \omega(P_0) = \{x^*\}\}$ pada konteks ini, jika orbit konvergen ke satu titik x^* sebagai t menuju tak hingga, maka himpunan ω -limit sama dengan satu titik ($\omega(P_0) = \{x^*\}$). Tak stabil *manifold* dari titik tetap $W^u(x^*)$ adalah himpunan semua titik yang mendekati titik tetap sebagai t menuju tak hingga negatif. $W^u(x^*) = \{P_0: \phi(t; P_0) \text{ mendekati } x^* \text{ sebagai } t \rightarrow \infty\} = \{P_0: \omega(P_0) = \{x^*\}\}$, jika titik tetapnya adalah hiperbolik maka tipe kestabilan titik tetap untuk sistem nonlinier adalah sama seperti sistem terlinierisasi (Robinson, 2004).

2.7 Titik Tetap atau *Fixed point*

Satu karakteristik dari sistem linier mengidentifikasi banyak solusi kearah asal. Asumsikan bahwa sistem persamaan diferensial

$$\dot{x} = F(x)$$

memiliki turunan parsial komponen dari F , ini adalah solusi yang unik. Diberikan $\phi(t; x_0)$ maka:

$$\frac{d}{dt}\phi(t; x_0) = F(\phi(t; x_0)) \text{ dan } \phi(0; x_0) = x_0$$

Satu titik x^* disebut satu titik tetap, jika $F(x^*) = 0$. Solusi mulai pada satu titik tetap mempunyai percepatan nol dari $\phi(t; x^*) = x^*$ bagi seluruh t , ini adalah titik tetap. Kekuatan berada di dalam keseimbangan dan berkumpul pada titik disebut titik keseimbangan. Titik tetap untuk sistem linier $e^{At}0 = 0$ ini satu-satunya titik tetap dari satu sistem linier kecuali memasuki nilai Eigen (Robinson, 2004).

Berikut adalah tabel solusi dalam menentukan titik tetap pada kondisi kontinu dan diskrit.

Tabel 2.1 Mencari Titik Tetap

Titik Tetap		
Waktu	Sistem Persamaan	Solusi
Kontinu	$x' = f(x)$	$f(x) = 0$
Diskrit	$x(k + 1) = f(x(k))$	$f(x) = x$

Dalam menemukan titik-titik tetap dari sistem dinamis tidak diharuskan untuk menemukan formula yang tepat untuk $x(k)$ atau $x(t)$. Hal yang harus dilakukan adalah menyelesaikan beberapa persamaan. Tentu saja, memecahkan sistem persamaan bisa sulit, tetapi setidaknya menghibur untuk mengetahui bahwa ini adalah satu-satunya masalah yang terlibat. Persamaan yang dipecahkan bergantung pada f dan apakah sistem dalam waktu diskrit atau kontinu sesuai pada Tabel 2.1 (Scheinerman, 1996).

2.8 Analisis Kestabilan *Fixed point*

Sistem linier bilangan riil yang semua nilai Eigennya memiliki nilai negatif, maka trayektorinya tidak hanya berada dekat dengan titik asal tetapi juga cenderung mendekati titik asal. Berikut ini definisi jenis-jenis kestabilan dari titik tetap $x^* = (x^*, y^*)$ dengan $\phi(t; x_0)$ adalah solusi dekat x^* untuk semua $t \geq 0$ jika kondisi awal x_0 dimulai cukup dekat kepada x^* .

Definisi 1: Titik tetap x^* disebut *L-stabel*, dibuktikan bahwa untuk sebarang $\varepsilon > 0$, ada $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $\|x_0 - x^*\| < \delta$ maka $\|\phi(t; x_0) - x^*\| < \varepsilon$ untuk semua $t \geq 0$.

Definisi 2: Titik tetap x^* disebut tak stabil, dibuktikan bahwa x^* tidak stabil untuk sebarang $\varepsilon_1 > 0$, dan $\delta > 0$ terdapat x_δ dengan $\|x_\delta - x^*\| < \delta$ dan $t_1 > 0$ maka $\|\phi(t_1; x_\delta) - x^*\| > \varepsilon_1$.

Definisi 3: Titik tetap x^* disebut stabil asimtotis lemah, dibuktikan bahwa ada $\delta_1 > 0$ sedemikian sehingga $\omega(x_0) = \{x^*\}$ untuk semua $\|x_0 - x^*\| < \delta_1$ (yaitu $\|\phi(t; x_0) - x^*\|$ menuju 0 sebagaimana t menuju takhingga untuk semua $\|x_0 - x^*\| < \delta_1$). Titik tetap x^* disebut stabil asimtotis, dibuktikan bahwa itu adalah stabil dan stabil asimtotis lemah.

Definisi 4: Titik tetap x^* disebut *repelling*, dibuktikan bahwa stabil asimtotik di $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $\|x_0 - x^*\| < \delta$ maka $\|\phi(t; x_0) - x^*\| < \varepsilon$ untuk semua $t \leq 0$ dan terdapat $\delta_1 > 0$ sedemikian sehingga $\alpha(x_0) = \{x^*\}$ untuk semua $\|x_0 - x^*\| < \delta_1$ (Robinson, 2004).

2.9 Nilai-Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Jika A adalah matriks $n \times n$, maka vektor tak nol x di dalam R^n dinamakan vektor Eigen dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x , atau dapat ditulis

$$Ax = \lambda x \quad (2.35)$$

untuk suatu skalar λ , maka skalar λ dinamakan nilai Eigen (*Eigen value*) dari A dan x dinamakan vektor Eigen dari A yang terkait dengan λ (Anton dan Rorres, 2004).

Andaikan bahwa λ adalah nilai Eigen dari matriks A , dan x adalah vektor Eigen yang terkait dengan nilai Eigen λ , maka $Ax = \lambda x = Ix$ dimana I adalah

matriks identitas $n \times n$, sedemikian sehingga $(A - I)x = 0$ karena $v \in R^n$ tidak nol, maka $\det(A - \lambda I) = 0$ atau dengan kata lain

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nm} - \lambda \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

Persamaan di atas adalah persamaan polinomial. Penyelesaian matriks A tersebut harus ada nilai Eigen atau sebarang nilai Eigen λ dari matriks A dengan himpunan $\{v \in R^n : (A - I)v = 0\}$ adalah ruang *null* dari matriks $(A - I)$. Persamaan di atas disebut juga persamaan karakteristik matriks A . Jika matriks tersebut diperluas maka terdapat determinan $(A - I)$ sebagai polinomial p dalam variabel λ yang disebut sebagai polinomial karakteristik (Chen, 2008).

Jika A adalah sebuah matriks $n \times n$, maka polinomial karakteristik A memiliki derajat n dan koefisien variabel $n\lambda$ adalah 1. Secara umum, polinomial karakteristik $p(v)$ dari sebuah matriks $n \times n$ memiliki bentuk

$$p(v) = \det(A - I) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \dots + c_n. \quad (2.37)$$

Berdasarkan teorema dasar aljabar, bahwa persamaan karakteristik

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \dots + c_n = 0 \quad (2.37)$$

memiliki sebanyak-banyaknya n solusi yang berbeda, sehingga sebuah matriks $n \times n$ memiliki sebanyak-banyaknya n nilai Eigen yang berbeda (Anton dan Rorres, 2004).

Setiap pasangan nilai Eigen dan vektor Eigen $(\lambda_j, \lambda v^i)$ maka ada suatu vektor solusi yang bersesuaian $v^i e^{\lambda_1 t}$ untuk matriks A . Jika nilai Eigennya adalah $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ dan semuanya berbeda, maka akan ada n solusi yaitu $v^1 e^{1t}, \dots, v^n e^{n t}$.

Pada kasus ini, solusi umum dari matriks A adalah kombinasi linier dari

$$x = c_1 v^1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v^2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n v^n e^{\lambda_n t} \quad (2.38)$$

dengan konstanta C_1, C_2, \dots, C_n dapat diperoleh dengan memberikan sebuah nilai awal pada persamaan (2.38) (Boyce dan DiPrima, 2001).

2.10 Kajian Al-Quran tentang Kestabilan Ekosistem

Ekosistem merupakan suatu sistem ekologis yang terbentuk oleh hubungan timbal-balik antara makhluk hidup dengan lingkungannya. Menurut pengertian, suatu sistem terdiri dari atas komponen-komponen yang bekerja secara teratur sebagai suatu kesatuan. Kesatuan itu terjadi oleh adanya arus materi dan energi yang terkendalikan oleh arus informasi antar komponen dalam ekosistem itu. Selama masing-masing komponen itu melakukan fungsinya dan bekerja sama dengan baik, keteraturan ekosistem itu pun terjaga. Jadi, lingkungan adalah suatu wadah bagi makhluk hidup, baik berbentuk benda, kondisi atau keadaan, yang menjadi tempat makhluk hidup berproses dan berinteraksi. Di samping itu, lingkungan merupakan objek ekologi dan bagian dari ekosistem. Dengan demikian, ekologi, ekosistem dan lingkungan hidup merupakan satu kesatuan yang tidak dapat terpisahkan. Keteraturan ekosistem menunjukkan ekosistem tersebut berada pada suatu keseimbangan. Keberadaan keseimbangan itu tidaklah statis, melainkan dapat berubah-ubah (dinamis) (Soemarwoto, 1994).

Al-Qur'an telah menjelaskan bahwa alam ini diciptakan Allah dalam keadaan seimbang, yakni dalam Q.S. Al-Mulk ayat 3, yaitu:

الَّذِي خَلَقَ سَبْعَ سَمَاوَاتٍ طِبَاقًا مَّا تَرَى فِي خَلْقِ الرَّحْمَنِ مِنْ تَفَؤُتٍ مَّفَؤُتٍ فَارْجِعِ
الْبَصَرَ هَلْ تَرَى مِنْ فُطُورٍ (٣)

“Yang telah menciptakan tujuh langit berlapis-lapis. Kamu sekali-kali tidak melihat pada ciptaan Tuhan yang Maha Pemurah sesuatu yang tidak seimbang. Maka lihatlah berulang-ulang, adakah kamu lihat sesuatu yang tidak seimbang?” (Q.S. Al-Mulk: 3).

Selain sebagai tempat tinggal, bumi juga menyediakan semua kebutuhan makhluk di dalamnya. Oleh karena itu sudah sepatutnya manusia sebagai *khalifah fil ardh* mensyukuri nikmat tersebut. Alam raya ini telah diciptakan oleh Allah Swt dalam suatu sistem yang sangat serasi dan sesuai dengan kehidupan manusia (Shihab, 2005).

Perlu diusahakannya untuk menjaga ekosistem agar menjadi stabil, hal ini dimaksudkan demi kelangsungan hidup dan kesejahteraan manusia dari generasi ke generasi. Di samping itu perlu disadari pula, bahwa manusia harus berfungsi sebagai subjek dari ekosistemnya, walaupun tidak boleh mengabaikan arti pentingnya menjadi kestabilan ekosistemnya sendiri. Perubahan-perubahan yang terjadi di dalam daerah lingkungan hidupnya akan mempengaruhi eksistensi manusianya karena manusia akan banyak sekali bergantung pada ekosistemnya (Hadjoesoemantri, 1993).

Banyak di antaranya yang menebang hutan secara membabi buta tanpa melakukan penanaman kembali sebagai ganti pohon yang telah ditebang. Kerusakan alam juga terjadi pada sumber air yang ada di sekitar lingkungan hidup manusia dengan adanya pencemaran berbagai macam limbah. Akibat dari perbuatan yang tidak terkontrol tersebut membuat keseimbangan ekosistem yang ada di bumi ini menjadi terganggu, dan akibatnya banyak terjadi bencana seperti banjir, kekeringan, banyak hewan yang terancam punah, dan hama tanaman yang merajalela (Shihab, 2005).

Sesuai Al-Qur'an menjelaskan bahwa alam ini diciptakan Allah dalam keadaan seimbang, yakni dalam Q.S. An-Nahl ayat 112, yaitu:

وَضَرَبَ اللَّهُ مَثَلًا قَرْيَةً كَانَتْ آمِنَةً مُطْمَئِنَّةً يَأْتِيهَا رِزْقُهَا رَغَدًا مِنْ كُلِّ مَكَانٍ فَكَفَرَتْ بِأَنْعُمِ اللَّهِ فَأَذَاقَهَا اللَّهُ لِبَاسَ الْجُوعِ وَالْخَوْفِ بِمَا كَانُوا يَصْنَعُونَ (١١٢)

“Dan Allah telah membuat suatu perumpamaan (dengan) sebuah negeri yang dahulunya aman lagi tenteram, rezekinya datang kepadanya melimpah ruah dari segenap tempat, tetapi (penduduk) nya mengingkari nikmat-nikmat Allah; karena itu Allah merasakan kepada mereka pakaian kelaparan dan ketakutan, disebabkan apa yang selalu mereka perbuat” (Q.S. An-Nahl: 112).



BAB III PEMBAHASAN

3.1 Model *Predator-Prey* Tiga Spesies

Pada penelitian sebelumnya pada jurnal Suwanto telah dilakukan penjabaran sederhana. Peneliti melakukan penjabaran untuk membuktikan kebenaran dari penjabaran pada jurnal tersebut dengan variabel yang telah diketahui pada batasan masalah:

a. Penskalaan variabel $x(t)$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dX} \frac{dX}{dT} \frac{dT}{dt} \quad (3.1)$$

dengan menjabarkan persamaan di atas, pertama untuk mencari $\frac{dx}{dX}$, diketahui $X = Kx$, maka

$$x = \frac{1}{K} X$$

$$\frac{dx}{dX} = \frac{1}{K}$$

Kedua untuk mencari $\frac{dT}{dt}$, diketahui $t = rT$, maka

$$T = \frac{1}{r} t$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{r}$$

Ketiga untuk mencari $\frac{dX}{dT}$, diketahui $Y = Ky$, $Z = Kz$, $A_1 = ra_1$, dan $A_2 = ra_2$, maka

$$\frac{dX}{dT} = rX \left(1 - \frac{X}{K}\right) - \frac{A_1 XY}{\rho + X + \gamma Y} - \frac{A_2 X^2 Z}{\alpha^2 + X^2}$$

$$= rKx \left(1 - \frac{Kx}{K}\right) - \frac{ra_1KxKy}{\rho + Kx + \gamma Ky} - \frac{ra_2(Kx)^2Kz}{\alpha^2 + (Kx)^2}$$

Kemudian substitusikan ketiga persamaan diatas ke persamaan (3.1), diperoleh

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{K} \left(rKx \left(1 - \frac{Kx}{K}\right) - \frac{ra_1KxKy}{\rho + Kx + \gamma Ky} - \frac{ra_2(Kx)^2Kz}{\alpha^2 + (Kx)^2} \right) \frac{1}{r}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{rK} \left(rKx(1-x) - \frac{\frac{\rho}{K} + x + \gamma y}{\frac{\alpha^2}{K^2} + x^2} \right)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{rK} \left(rKx(1-x) - rK \left(\frac{\frac{a_1xy}{\frac{\rho}{K} + x + \gamma y} + \frac{a_2x^2z}{\frac{\alpha^2}{K^2} + x^2}} \right) \right)$$

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x) - \frac{a_1xy}{\frac{\rho}{K} + x + \gamma y} - \frac{a_2x^2z}{\frac{\alpha^2}{K^2} + x^2}$$

dimisalkan $m_1 = \frac{\rho}{K}$ dan $m_2 = \frac{\alpha}{K}$ maka

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x) - \frac{a_1xy}{m_1 + x + \gamma y} - \frac{a_2x^2z}{m_2^2 + x^2}$$

b. Penskalaan variabel $y(t)$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dY} \frac{dY}{dT} \frac{dT}{dt} \quad (3.2)$$

dengan menjabarkan persamaan di atas, pertama untuk mencari $\frac{dy}{dY}$, diketahui $Y =$

Ky , maka

$$y = \frac{1}{K}Y$$

$$\frac{dy}{dY} = \frac{1}{K}$$

Kedua untuk mencari $\frac{dT}{dt}$, diketahui $t = rT$, maka

$$T = \frac{1}{r}t$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{r}$$

Ketiga untuk mencari $\frac{dY}{dT}$, diketahui $X = Kx$, $Z = Kz$, $A_3 = ra_3$, $\mu^* = r\mu$ dan

$B_1 = rb_1$, maka

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dT} &= \frac{B_1XY}{\rho + X + \gamma Y} - \frac{A_3Y^2Z}{\beta^2 + Y^2} - \mu^*Y \\ &= \frac{rb_1KxKy}{\rho + Kx + \gamma Ky} - \frac{ra_3(Ky)^2Kz}{\beta^2 + (Ky)^2} - r\mu Ky \end{aligned}$$

Kemudian substitusikan ketiga persamaan diatas ke persamaan (3.2), diperoleh

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{K} \left(\frac{rb_1KxKy}{\rho + Kx + \gamma Ky} - \frac{ra_3(Ky)^2Kz}{\beta^2 + (Ky)^2} - r\mu Ky \right) \frac{1}{r}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{rK} \left(\frac{rb_1xKy}{\frac{\rho}{K} + x + \gamma y} - \frac{ra_3y^2Kz}{\frac{\beta^2}{K^2} + y^2} - r\mu Ky \right)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{b_1xy}{\frac{\rho}{K} + x + \gamma y} - \frac{a_3y^2z}{\frac{\beta^2}{K^2} + y^2} - \mu y$$

dimisalkan $m_1 = \frac{\rho}{K}$ dan $m_3 = \frac{\beta}{K}$ maka

$$\frac{dy}{dt} = \frac{b_1xy}{m_1 + x + \gamma y} - \frac{a_3y^2z}{m_3^2 + y^2} - \mu y$$

c. Penskalaan variabel $z(t)$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dZ} \frac{dZ}{dT} \frac{dT}{dt} \quad (3.3)$$

dengan menjabarkan persamaan di atas, pertama untuk mencari $\frac{dz}{dZ}$, diketahui $Z =$

Kz , maka

$$z = \frac{1}{K}Z$$

$$\frac{dz}{dZ} = \frac{1}{K}$$

Kedua untuk mencari $\frac{dT}{dt}$, diketahui $t = rT$, maka

$$T = \frac{1}{r}t$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{r}$$

Ketiga untuk mencari $\frac{dZ}{dT}$, diketahui $X = Kx, Y = Ky, B_2 = rb_2, B_3 = rb_3, \mu^* =$

$r\mu, Q = rq$, maka

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dT} &= \frac{B_2 X^2 Z}{\alpha^2 + X^2} + \frac{B_3 Y^2 Z}{\beta^2 + Y^2} - \mu^* Z - QZ \\ &= \frac{rb_2 (Kx)^2 Kz}{\alpha^2 + (Kx)^2} + \frac{rb_3 (Ky)^2 Kz}{\beta^2 + (Ky)^2} - r\mu Kz - rqKz \end{aligned}$$

Kemudian substitusikan ketiga persamaan diatas ke persamaan (3.3), diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{1}{K} \left(\frac{rb_2 (Kx)^2 Kz}{\alpha^2 + (Kx)^2} + \frac{rb_3 (Ky)^2 Kz}{\beta^2 + (Ky)^2} - r\mu Kz - rqKz \right) \frac{1}{r} \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{1}{rK} \left(\frac{rb_2 x^2 Kz}{\frac{\alpha^2}{K^2} + x^2} + \frac{rb_3 y^2 Kz}{\frac{\beta^2}{K^2} + y^2} - r\mu Kz - rqKz \right) \end{aligned}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{b_2 x^2 z}{\frac{\alpha^2}{K^2} + x^2} + \frac{b_3 y^2 z}{\frac{\beta^2}{K^2} + y^2} - \mu z - qz$$

dimisalkan $m_1 = \frac{\alpha}{K}$ dan $m_3 = \frac{\beta}{K}$ maka diperoleh

$$\frac{dz}{dt} = \frac{b_2 x^2 z}{m_2^2 + x^2} + \frac{b_3 y^2 z}{m_3^2 + y^2} - \mu z - qz$$

Dari penjabaran variabel x, y, z , maka dapat diperoleh persamaan yang terdapat pada jurnal Suwanto adalah benar dan pada penelitian ini menggunakan persamaan tersebut, yaitu:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(1-x) - \frac{a_1xy}{m_1+x+\gamma y} - \frac{a_2x^2z}{m_2^2+x^2} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{b_1xy}{m_1+x+\gamma y} - \frac{a_3y^2z}{m_3^2+y^2} - \mu y \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{b_2x^2z}{m_2^2+x^2} + \frac{b_3y^2z}{m_3^2+y^2} - \mu z - qz\end{aligned}\quad (3.4)$$

3.2 Identifikasi Model *Predator-Prey* Tiga Spesies

Model *predator-prey* tiga spesies terdiri dari spesies *prey*, spesies *intermediate predator*, dan *top predator*. Identifikasinya adalah sebagai berikut:

$x(t)$: banyaknya populasi *prey* terhadap t

$y(t)$: banyaknya populasi *intermediate predator* terhadap t

$z(t)$: banyaknya populasi *top predator* terhadap t

a_1 : koefisien pemangsa *intermediate predator* terhadap *prey*

a_2 : koefisien pemangsa *top predator* terhadap *prey*

a_3 : koefisien pemangsa *top predator* terhadap *intermediate predator*

γ : koefisien gangguan *intermediate predator*

μ : laju kematian alami *intermediate predator* dan *top predator*

q : laju emigrasi *top predator*

b_1 : koefisien pertumbuhan *intermediate predator* akibat *prey*

b_2 : koefisien pertumbuhan *top predator* akibat *prey*

b_3 : koefisien pertumbuhan *top predator* akibat *intermediate predator*

- m_1 : besaran satuan kejenuhan yang berpengaruh terhadap besarnya daya kapasitas yang dilakukan oleh spesies *intermediate predator* kepada spesies *prey*
- m_2 : besaran satuan kejenuhan yang berpengaruh terhadap besarnya daya kapasitas yang dilakukan oleh spesies *top predator* kepada spesies *prey*
- m_3 : besaran satuan kejenuhan yang berpengaruh terhadap besarnya daya kapasitas yang dilakukan oleh spesies *top predator* kepada spesies *intermediate predator*

3.3 Analisis Model *Predator-Prey* Tiga Spesies

a. Populasi *Prey*

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t)(1 - x(t))$$

Persamaan di atas menunjukkan bahwa kejadian banyaknya populasi $x(t)$ pada spesies *prey* yang terjadi dari waktu ke waktu (dt) yaitu pertumbuhan alami pada populasi spesies *prey* ($x(t)$) berkurang dari populasi pada awalnya ($x^2(t)$) dikarenakan adanya

$$-\frac{a_1 x(t)y(t)}{m_1 + x(t) + \gamma y(t)}$$

pengaruh dari laju pertumbuhan pada banyaknya satuan perlakuan memangsa sebesar a_1 yang dilakukan oleh spesies *intermediate predator* ($y(t)$) terhadap spesies *prey* ($x(t)$) yang jumlahnya berbanding terbalik dengan jumlah dari satuan tingkat kejenuhan sebesar m_1 yang dialami dengan penambahan populasi spesies *prey* ($x(t)$) akibat gangguan (γ) yang datang dari populasi spesies

intermediate predator ($y(t)$) sehingga populasi tersebut mengalami penurunan akibat faktor tersebut.

$$-\frac{a_2 x^2(t) z(t)}{m_2^2 + x^2(t)}$$

Kemudian ada pengaruh lain yang datang dari banyaknya perlakuan memangsa sebesar a_2 yang dilakukan oleh spesies *top predator* ($z(t)$) terhadap spesies *prey* ($x(t)$). Pengaruh tersebut berbanding terbalik dengan jumlah banyaknya tingkat kejenuhan sebesar m_2 yang dialami oleh spesies *prey* ($x(t)$). Perlakuan memangsanya dua kali lipat dari perlakuan spesies *intermediate predator* ($y(t)$).

b. Populasi *Intermediate Predator*

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{b_1 x(t) y(t)}{m_1 + x(t) + \gamma y(t)}$$

Persamaan di atas menunjukkan laju perubahan pada banyaknya populasi spesies *intermediate predator* ($y(t)$) yang terjadi dari waktu ke waktu (dt) dengan tingkat pertumbuhan sebesar b_1 yang dialami oleh spesies *intermediate predator* ($y(t)$) akibat memakan spesies *prey* ($x(t)$) berbanding terbalik dengan jumlah dari satuan tingkat kejenuhan sebesar m_1 yang dialami dengan penambahan populasi spesies *prey* ($x(t)$) akibat gangguan (γ) yang datang dari populasi spesies *intermediate predator* ($y(t)$).

$$-\frac{a_3 y^2(t) z(t)}{m_3^2 + y^2(t)}$$

Namun ada pengaruh juga yang menghambat pertumbuhan dari spesies *intermediate predator* ($y(t)$) yaitu tingkat memangsa sebesar a_3 yang dilakukan oleh spesies *top predator* ($z(t)$) terhadap spesies *intermediate predator* ($y^2(t)$) berbanding terbalik dengan jumlah dua kali lipat tingkat kejenuhan sebesar m_3^2

yang dialami oleh spesies *intermediate predator* ($y^2(t)$) akibat ulah dari spesies *top predator*.

$$-\mu y(t)$$

Faktor lainnya yaitu *intermediate predator* ($y(t)$) mengalami kematian secara alami pada lingkup ekosistemnya.

c. Populasi *Top Predator*

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{b_2 x^2(t) z(t)}{m_2^2 + x^2(t)}$$

Persamaan di atas menunjukkan laju perubahan pada banyaknya populasi spesies *prey* ($x(t)$) yang terjadi dari waktu ke waktu (dt) dengan tingkat pertumbuhan sebesar b_2 yang dialami oleh spesies *top predator* ($z(t)$) akibat memakan spesies *prey* ($x^2(t)$) lebih banyak berbanding terbalik dengan jumlah dua kali lipat tingkat kejenuhan sebesar m_2^2 yang dialami oleh spesies *prey* ($x(t)$) akibat ulah dari spesies *top predator*.

$$\frac{b_3 y^2(t) z(t)}{m_3^2 + y^2(t)}$$

Perlakuan lain yang didapat oleh spesies *top predator* ($z(t)$) yaitu tingkat pertumbuhan sebesar b_3 yang dialami oleh spesies *top predator* ($z(t)$) akibat memakan spesies *intermediate predator* ($y^2(t)$) lebih banyak dua kali lipat berbanding terbalik dengan jumlah dua kali lipat tingkat kejenuhan sebesar m_3^2 yang dialami oleh spesies *intermediate predator* ($y^2(t)$) akibat ulah dari spesies *top predator*.

$$-\mu z(t) - qz(t)$$

Dari sekian faktor yang dialami dalam pertumbuhan dari spesies *top predator* ($z(t)$) yaitu beberapa faktor yaitu kematian alami μ dan kejadian laju emigrasi q yang mengurangi populasi spesies *top predator* ($z(t)$).

3.4 Analisis Perilaku dari Model *Predator-Prey* Tiga Spesies

Model rantai makanan ini dipengaruhi oleh beberapa faktor internal dan eksternal sehingga model ini diperlukan asumsi yang membatasi pemodelan tersebut. Asumsi yang digunakan dalam pembahasan ini antara lain:

1. Model rantai makanan yang digunakan adalah model *predator-prey* tiga spesies yang terdiri dari spesies *prey*, spesies *intermediate predator*, dan spesies *top predator*.
2. *Prey* adalah mangsa pertama yang dimangsa oleh *intermediate predator* dan *top predator*, *intermediate predator* adalah mangsa kedua yang dimangsa oleh *top predator*. *Intermediate predator* dan *top predator* mengalami kematian alami. *Top predator* juga mengalami pengaruh akibat emigrasi alami.
3. Tidak ada perulangan siklus rantai makanan. *Prey* tidak akan memakan *top predator*.

3.5 Besaran Parameter

Parameter yang digunakan dalam model persamaan *predator-prey* tiga spesies berdasarkan studi literatur yang dilakukan oleh Suwanto (2013) adalah sebagai berikut:

Tabel 3.1 Besaran Parameter

No.	Parameter	Nilai	Parameter	Nilai
1.	a_1	0,8	γ	0,9
2.	a_2	0,6	μ	0,1
3.	a_3	0,25	q	0,5
4.	b_1	0,9	m_1	0,4
5.	b_2	0,5	m_2	0,2
6.	b_3	1,9	m_3	0,2

Tabel 3.2 Nilai Awal

No.	Variabel	Nilai
1.	x	0,8
2.	y	0,2
3.	z	0,9

3.6 Titik Tetap pada Sistem Persamaan

Titik tetap dari persamaan (3.4) diperoleh jika $\frac{dx}{dt} = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0$, dan $\frac{dz}{dt} = 0$.

Pada saat titik tetap didapat maka laju pertumbuhan dari tiap persamaan akan tetap. Dengan kata lain tidak terdapat perubahan pada jumlah populasi lagi. Dari persamaan (3.4) dicari nilai titik tetap dengan bantuan program Maple sebagaimana lampiran, sehingga diperoleh tiga titik tetap yaitu:

1. $x_1 = 1, y_1 = 0, z_1 = 0$
2. $x_2 = 0,3297008434, y_2 = 2,486229719, z_2 = 0$ dan
3. $x_3 = 0,2445212315, y_3 = 0,08667445145, z_3 = 0,4485840923$.

Tiga titik tetap ini akan digunakan pada analisis kestabilan.

3.7 Linierisasi

Sistem persamaan diferensial dari model *predator-prey* tiga spesies merupakan sistem persamaan diferensial biasa nonlinier sehingga diperlukan melinierkan persamaan tersebut yang nantinya akan dianalisis kestabilannya tersebut di sekitar titik tetap. Menurut Boyce dan DiPrima (2000), linierisasi adalah proses pendekatan persamaan diferensial nonlinier dengan persamaan diferensial linier untuk membantu memahami persamaan diferensial nonlinier. Berdasarkan pernyataan tersebut, dari sistem persamaan diferensial pada model *predator-prey* tiga spesies dicari pendekatan di sekitar titik tetapnya dengan menggunakan deret Taylor.

Di bawah ini merupakan penjelasan untuk mengetahui bentuk linierisasi pada sistem persamaan diferensial dari model *predator-prey* tiga spesies. Misal persamaan (3.4)

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y, z)$$

$$\frac{dy}{dt} = f_2(x, y, z)$$

$$\frac{dz}{dt} = f_3(x, y, z)$$

Selanjutnya akan dicari pendekatan sistem linier di sekitar titik tetap x^* , y^* dan z^* dengan menggunakan deret Taylor dan dipotong sampai orde 1 sebagai berikut:

$$f_1(x, y, z) = f_1(x^*, y^*, z^*) + \frac{\partial f_1}{\partial x}(x^*, y^*, z^*)(x - x^*) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(x^*, y^*, z^*)(y - y^*) + \frac{\partial f_1}{\partial z}(x^*, y^*, z^*)(z - z^*)$$

$$f_2(x, y, z) = f_2(x^*, y^*, z^*) + \frac{\partial f_2}{\partial x}(x^*, y^*, z^*)(x - x^*) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x^*, y^*, z^*)(y - y^*) + \frac{\partial f_2}{\partial z}(x^*, y^*, z^*)(z - z^*)$$

$$f_3(x, y, z) = f_3(x^*, y^*, z^*) + \frac{\partial f_3}{\partial x}(x^*, y^*, z^*)(x - x^*) + \frac{\partial f_3}{\partial y}(x^*, y^*, z^*)(y - y^*) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x^*, y^*, z^*)(z - z^*)$$

Dengan melakukan substitusi dengan memasukkan besaran parameter beserta titik tetapnya pada keadaan masing-masing titik tetap:

1. $x_1 = 1, y_1 = 0, z_1 = 0$

Berdasarkan bantuan Maple pada lampiran maka diperoleh persamaan

linier sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = -x - 0,5714285714y - 0,5769230769z$$

$$\frac{dy}{dt} = 0,5428571429y$$

$$\frac{dz}{dt} = -0,1192307692z$$

Dengan bantuan program Maple diperoleh nilai titik tetapnya dari persamaan linier tersebut adalah $x = 1$, $y = 0$, dan $z = 0$. Nilai titik tetap ini sama dengan nilai titik tetap dari persamaan nonliniernya, sehingga persamaan linier tersebut merupakan linierisasi di sekitar titik tetap dari persamaan nonliniernya. Apabila ditulis dalam bentuk matriks Jacobian, persamaan linier menjadi sebagai berikut:

$$J_1 = \begin{bmatrix} -1 & -0,5714285714 & -0,5769230769 \\ 0 & 0,5428571429 & 0 \\ 0 & 0 & -0,1192307692 \end{bmatrix}$$

$$2. \quad x_2 = 0,3297008434, y_2 = 2,486229719, z_2 = 0$$

Berdasarkan bantuan Maple pada lampiran maka diperoleh persamaan linier sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = -0,2552231594x - 0,02185897320y - 0,4386040825z$$

$$\frac{dy}{dt} = 0,6702991567x - 0,07540865515y - 0,2483926288z$$

$$\frac{dz}{dt} = 1,653287381z$$

Dengan bantuan program Maple diperoleh nilai titik tetapnya dari persamaan linier tersebut adalah $x = 0,3297008434, y = 2,486229719$ dan $z = 0$. Nilai titik tetap ini sama dengan nilai titik tetap dari persamaan nonliniernya, sehingga persamaan linier tersebut merupakan linierisasi di sekitar titik tetap dari persamaan nonliniernya. Apabila ditulis dalam bentuk matriks Jacobian, persamaan linier menjadi sebagai berikut:

$$J_2 = \begin{bmatrix} -0,2552231594 & -0,02185897320 & -0,4386040825 \\ 0,67029915670 & -0,07540865515 & -0,2483926288 \\ 0 & 0 & 1,653287381 \end{bmatrix}$$

$$3. \quad x_3 = 0,2445212315, y_3 = 0,08667445145, z_3 = 0,4485840923.$$

Berdasarkan bantuan Maple pada lampiran maka diperoleh persamaan linier sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = -0,0812481224x - 0,2415094562y - 0,3594964641z$$

$$\frac{dy}{dt} = 0,07142631154x - 0,1727706857y - 0,03952889648z$$

$$\frac{dz}{dt} = 0,4405963374x + 2,617963062y$$

Dengan bantuan program Maple diperoleh nilai titik tetapnya dari persamaan linier tersebut adalah $x = 0,2445212315, y = 0,08667445145$ dan $z = 0,4485840923$. Nilai titik tetap ini sama dengan nilai titik tetap dari persamaan nonliniernya, sehingga persamaan linier tersebut merupakan linierisasi di sekitar titik tetap dari persamaan nonliniernya. Apabila ditulis dalam bentuk matriks Jacobian, persamaan linier menjadi sebagai berikut:

$$J_3 = \begin{bmatrix} -0,0812481224 & -0,2415094562 & -0,3594964641 \\ 0,07142631154 & -0,1727706857 & -0,03952889648 \\ 0,4405963374 & 2,617963062 & 0 \end{bmatrix}$$

3.8 Nilai Eigen

Nilai Eigen diperoleh dengan cara menyelesaikan $\det(\lambda I - J) = 0$, maka perhitungan nilai Eigen untuk masing-masing tiga titik tetap sebagai berikut:

1. $x_1 = 1, y_1 = 0, z_1 = 0$

$$\det(\lambda I - J_1) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} \lambda + 1 & -0,5714285714 & -0,5769230769 \\ 0 & \lambda - 0,5428571429 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 0,1192307692 \end{bmatrix} \right) = 0$$

Untuk mencari determinan matriks di atas, determinan Matrik di atas berbentuk persamaan karakteristik. Penulis menggunakan bantuan program Maple sehingga diperoleh nilai Eigen

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0,5428571429, \lambda_3 = 0,5428571429.$$

2. $x_2 = 0,3297008434, y_2 = 2,486229719, z_2 = 0$

$$\det(\lambda I - J_2) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} \lambda + 1 & -0,5714285714 & -0,5769230769 \\ 0 & \lambda - 0,5428571429 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 0,1192307692 \end{bmatrix} \right) = 0$$

Untuk mencari determinan matriks di atas, determinan Matrik di atas berbentuk persamaan karakteristik. Penulis menggunakan bantuan program Maple sehingga diperoleh nilai Eigen

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -0,1653159073 + 0,08104774715i, & \lambda_2 &= \\ & -0,1653159073 - 0,08104774715i, \\ \lambda_3 &= 1,653287381\end{aligned}$$

$$3. \quad x_3 = 0,2445212315, \quad y_3 = 0,08667445145, \quad z_3 = 0,4485840923.$$

$$\det(\lambda I - J_3) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} \lambda + 1 & -0,5714285714 & -0,5769230769 \\ 0 & \lambda - 0,5428571429 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 0,1192307692 \end{bmatrix} \right) = 0$$

Untuk mencari determinan matriks di atas, determinan Matrik di atas berbentuk persamaan karakteristik. Penulis menggunakan bantuan program Maple sehingga diperoleh nilai Eigen

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 0,03094513171 + 0,5583543089i \\ \lambda_2 &= 0,03094513171 - 0,5583543089i \\ \lambda_3 &= -0,3159090715.\end{aligned}$$

3.9 Kestabilan Titik Tetap

Menurut Finizio dan Ladas (1988), penentuan kestabilan titik tetap dapat diperoleh dengan melihat nilai-nilai eigennya, yaitu λ_i , $i = 1, 2, 3, \dots, n$ yang diperoleh dari persamaan karakteristik dari suatu matrik \mathbf{A} , yaitu $(\mathbf{A} - \lambda I) = 0$. Secara umum kestabilan titik tetap mempunyai tiga perilaku sebagai berikut:

1. Stabil

Suatu nilai titik tetap dikatakan stabil jika:

- a. Setiap nilai eigen real adalah negatif ($\lambda_i < 0, i = 1, 2, \dots, n$),
- b. Setiap komponen nilai eigen kompleks, bagian realnya lebih kecil atau sama dengan nol, $Re(\lambda_i \leq 0, i = 1, 2, \dots, n)$.

2. Tidak stabil

Suatu nilai titik tetap dikatakan stabil jika:

- a. Setiap nilai eigen real adalah positif ($\lambda_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$),
- b. Setiap komponen nilai eigen kompleks, bagian realnya lebih besar atau sama dengan nol, $Re(\lambda_i > 0, i = 1, 2, \dots, n)$.

3. Pelana (*saddle*)

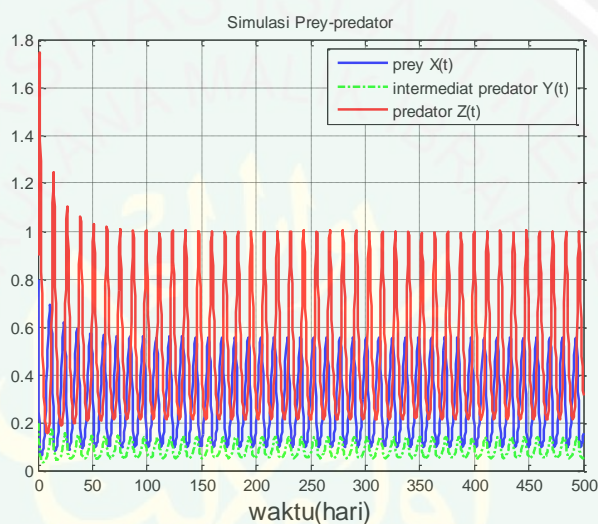
Suatu nilai titik tetap dari suatu sistem *autonomous* adalah pelana jika perkalian dua nilai Eigen real adalah negatif ($\lambda_i \lambda_j < 0, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$)

Berdasarkan teori kestabilan di atas maka

1. Untuk titik tetap $x_1 = 1, y_1 = 0, z_1 = 0$, sistem pada model *predator-prey* tiga spesies ini dinyatakan tidak stabil karena terdapat nilai Eigen yang positif ($Re(\lambda_i > 0$), untuk setiap i).
2. Untuk titik tetap $x_2 = 0,3297008434, y_2 = 2,486229719, z_2 = 0$, sistem pada model *predator-prey* tiga spesies ini dinyatakan tidak stabil karena terdapat nilai Eigen yang positif ($Re(\lambda_i > 0$), untuk setiap i).
3. Untuk titik tetap $x_3 = 0,2445212315, y_3 = 0,08667445145, z_3 = 0,4485840923$, sistem pada model *predator-prey* tiga spesies ini dinyatakan tidak stabil karena terdapat nilai Eigen kompleks positif ($Re(\lambda_i > 0$), untuk setiap i).

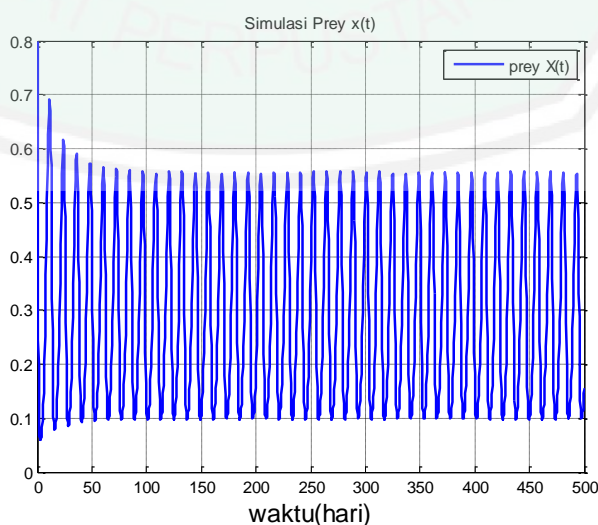
3.10 Simulasi *Predator-Prey* Tiga Spesies

Simulasi pada gambar 3.1 diperoleh dari model sistem persamaan diferensial *predator-prey* tiga spesies dengan titik tetap $x_3 = 0,2445212315$, $y_3 = 0,08667445145$, dan $z_3 = 0,4485840923$ dari persamaan tersebut dengan $t \rightarrow \infty$ dapat dikatakan bahwa sistem persamaan diferensial nonlinier tersebut tidak stabil karena menjauh dari titik tetap.



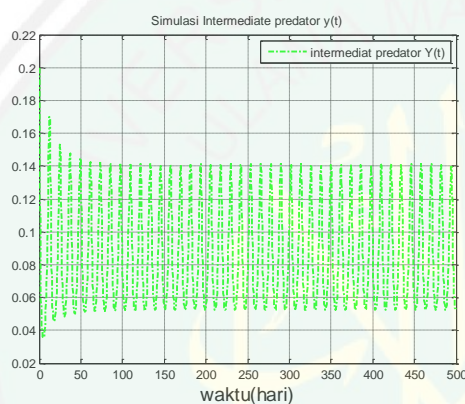
Gambar 3.1 Grafik simulasi *prey*, *intermediate predator*, *top predator* dengan $x(0) = 0.8$, $y(0) = 0.2$, dan $z(0) = 0.9$.

Simulasi *prey* dapat dilihat sebagai berikut:

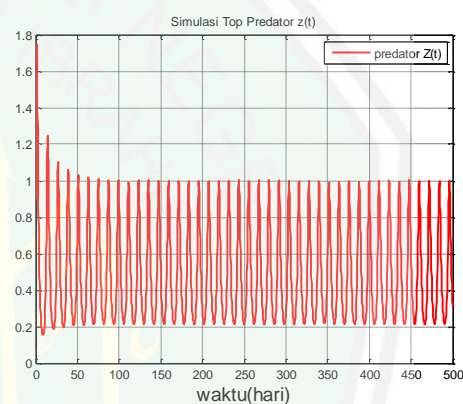


Gambar 3.2 Grafik simulasi *prey* dengan $x(0) = 0.8$.

Gambar di atas menunjukkan bahwa populasi *prey* mengalami fluktuatif sampai pada waktu ke- n , dimana dalam iterasi di atas sampai waktu ke 500 hari dengan populasi 0,2445212315. Hal ini menunjukkan bahwa perubahan populasi *prey* menjauh dari titik tetap pada $x_3 = 0,2445212315$. Perubahan populasi *prey* terhadap waktu juga disebabkan menurunnya jumlah populasi *predator*, baik *intermediate predator* maupun *top predator* seperti pada gambar berikut:



Gambar 3.3 Grafik simulasi *intermediate predator* dengan $y(0) = 0.2$.



Gambar 3.4 Grafik simulasi *top predator* dengan $z(0) = 0.9$.

Dari Gambar 3.3 menunjukkan bahwasanya jumlah populasi dari *intermediate predator* mengalami penurunan secara fluktuatif. Hal ini disebabkan oleh menurunnya jumlah ketersediaan sumber daya alam yang mendukung ekosistem secara fluktuatif dan faktor kematian pada populasi *intermediate predator*. Perubahan populasi menunjukkan bahwa populasi *intermediate predator* menjauh dari titik tetap pada $y_3 = 0,08667445145$. Untuk Gambar 3.4 menunjukkan bahwasanya jumlah populasi dari *top predator* mengalami penurunan secara fluktuatif. Hal ini juga disebabkan oleh menurunnya jumlah ketersediaan sumber daya alam yang mendukung ekosistem dan faktor kematian serta migrasi pada

populasi *top predator*. Perubahan populasi menunjukkan bahwa populasi *top predator* menjauh dari titik tetap pada $z_3 = 0,4485840923$.

3.9 Kajian Agama tentang Keseimbangan Makhluk Hidup

Sesuai dengan pembahasan di atas, terdapatnya titik tetap yang eksis yang tidak stabil dan tidak terdapat data yang stabil dikarenakan stabil dalam penelitian ini harus menggunakan syarat. Akan tetapi, adanya besaran parameter yang sudah diketahui sebelumnya maka tanpa syarat pun, titik tetap eksis dan stabil bersyarat ternyata tidak stabil. Ketidakstabilan ini terpengaruh akibat adanya kematian pada populasi *intermediate predator* dan *top predator* dan perpindahan tempat atau migrasi yang dilakukan oleh populasi *top predator*. Maka dari itu sebagai manusia yang hidup dengan jiwa kepemimpinan (*khalifah*) di bumi, wajib menjaga kelestarian dan keseimbangan makhluk hidup agar kehidupan makhluk hidup menjadi stabil. Seperti yang dijelaskan pada ayat sebelumnya yaitu Al-Mulk ayat 3 (Shihab, 2005).

Perbuatan merusak alam yang dilakukan oleh manusia tersebut sangatlah bertentangan dengan tujuan penciptaan manusia, yakni sebagai *khalifah fil ardhi*. Sebagai *khalifah* atau wakil tuhan di bumi, manusia dituntut untuk memelihara, menjaga dan memakmurkan bumi ini agar tujuan dari penciptaan bisa tercapai. Al-Qur'an sendiri memuat banyak ayat dalam berbagai surat yang menjelaskan tentang masalah lingkungan (ekologi). Sebagaimana yang dijelaskan pada surat Al-Huud ayat 7, yaitu:

وَهُوَ الَّذِي خَلَقَ السَّمَاوَاتِ وَالْأَرْضَ فِي سِتَّةِ أَيَّامٍ وَكَانَ عَرْشُهُ عَلَى الْمَاءِ لِيَبْلُوكُمْ
 أَيُّكُمْ أَحْسَنُ عَمَلًا ۗ وَلَئِنْ قُلْتُمْ إِنَّا مَبْعُوثُونَ مِنْ بَعْدِ الْمَوْتِ لَيَقُولَنَّ الَّذِينَ كَفَرُوا إِنْ
 هَذَا إِلَّا سِحْرٌ مُّبِينٌ (٧)

“Dan Dialah yang menciptakan langit dan bumi dalam enam masa, dan adalah singgasana-Nya (sebelum itu) di atas air, agar Dia menguji siapakah di antara kamu yang lebih baik amalnya, dan jika kamu berkata (kepada penduduk Mekah): "Sesungguhnya kamu akan dibangkitkan sesudah mati", niscaya orang-orang yang kafir itu akan berkata: "Ini tidak lain hanyalah sihir yang nyata".” (Q.S Al-Huud:7).

Menurut Quraish Shihab menyatakan dalam ayat di atas menafsirkan, dan Allah Swt telah menciptakan langit dan bumi beserta isinya selama enam hari. Sebelumnya, yang ada hanyalah dunia air yang di atasnya terletak singgasana ('arsy) Allah Swt. Alam raya ini diciptakan sedemikain rupa untuk menguji kalian, wahai umat manusia, agar tampak siapa yang taat kepada Allah Swt dan melakukan amal saleh dan siapa yang menentang-Nya. Akan tetapi, meskipun dengan adanya kekuasaan penciptaan seperti ini, bila kamu, Muhammad, menegaskan bahwa mereka akan dibangkitkan dari kubur, diciptakan untuk kemudian dimatikan dan lalu dibangkitkan kembali, mereka serta merta membantahmu. Bahkan mereka menganggap apa yang kamu sampaikan ini sebagai suatu ilusi yang tidak ada hakikatnya, sebagaimana sihir yang dapat mempermainkan dan menipu akal (Shihab, 2005).

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Kesimpulan dari pembahasan di atas diperoleh bahwa:

1. Normalisasi yang terdapat pada jurnal Suwanto (2013) adalah benar.
2. Hasil analisis dinamik dari sistem persamaan diferensial *predator-prey* tiga spesies didapatkan tiga titik tetap yaitu titik tetap
 - a. $x_1 = 1, y_1 = 0$, dan $z_1 = 0$ (tidak stabil),
 - b. $x_2 = 0,3297008434, y_2 = 2,486229719$, dan $z_2 = 0$ (tidak stabil),
 - c. $x_3 = 0,2445212315, y_3 = 0,08667445145$, dan $z_3 = 0,4485840923$ (tidak stabil).

Keberadaan populasi pada model *predator-prey* tiga spesies ini dipengaruhi adanya faktor perilaku antar populasi *prey*, populasi *intermediate-predator*, populasi *top predator*, dan adanya faktor kematian pada populasi *intermediate predator* dan *top predator* serta adanya faktor migrasi akibat kurangnya sumber daya makanan bagi populasi *top predator*. Dalam analisis kestabilan dan simulasi bahwa model *predator-prey* tiga spesies ini tidak stabil dengan adanya nilai Eigen yang positif dan gambar simulasi yang menunjukkan bahwa gambar model tersebut menjauh dari nilai titik tetap.

4.2 Saran

Peneliti berharap bahwa penelitian selanjutnya dapat dilakukan dengan adanya penerapan metode saat mencari titik tetap secara analitik atau numerik dan kontrol pada spesies *prey* maupun *predator* dengan menggunakan metode lain.

DAFTAR RUJUKAN

- Anton, H, dan Rorres, C.. 2004. *Aljabar Linear Elementer versi Aplikasi Jilid 1*. Jakarta: Erlangga.
- Azizah, S.S. 2012. *Diskretisasi Model Lorenz dengan Analogi Persamaan Beda*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Baiduri. 2002. *Persamaan Diferensial dalam Satuan SI Metric*. Jakarta: Erlangga.
- Boyce, W.E. dan DiPrima, R.C.. 1999. *ODE Architect Companion*. New York: John Willey & Sons, Inc.
- Boyce, W.E. dan DiPrima, R.C.. 2001. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems Seventh Edition*. New York: John Willey & Sons, Inc.
- Chauvet. 2002. A Lotka-Volterra Three-species Food Chain. *Journal Tulane University*. Vol. 75 (4): 243-255.
- Chen. 2008. *Linear Algebra*. London: Imperial College.
- Doust, M.H. Rahmani dan Gholizade, S. 2014. An Analysis of The Modified Lotka-Volterra Predator-Prey Model. *GMN*. Vol. 25 (2): 1-5.
- Finizio, N. dan Ladas. 1988. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern Edisi Kedua* . Jakarta: Erlangga.
- Hadjosoemantri, Koesnadi. 1993. *Hukum Tata Lingkungan*, Yogyakarta: Gadjah Mada University Press.
- Hariyanto, S, Sumarno dan Soehardjo. 1992. *Persamaan Diferensial Biasa*. Jakarta: Universitas Terbuka.
- Kartono. 2012. *Persamaan Diferensial Biasa*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Robinson, R. C.. 2004. *An Introduction to Dynamical Systems Continous and Discrete*. New Jersey: Pearson Education, In.
- Scheinerman, E. R. 1996. *Invitation to Dynamical Systems*. New York: Dover Publications, Reprint Edition.
- Shihab, M. Quraish. 2005. *Tafsir al-Misbah: Pesan, Kesan dan Keserasian al-Qur'an*. Jakarta: Lentera Hati.
- Soemarwoto, O. 1994. *Ekologi Lingkungan Hidup dan Pembangunan*, Jakarta: Djambatan.

- Toaha, S. dan Hasan. 2008. Stability Analysis of Predator-Prey Population Model with Time Delay and Constant Rate of Harvesting. *Journal of Mathematics (ISSN 1016-2526)*. Vol. 40: 37-48.
- Suwanto, N. 2013. Analisis Dinamik Model Predator-Prey Tiga Spesies. *Jurnal Mahasiswa Matematika*. Vol. 1 (1): 9-12.
- Waluya, S.B.. 2006. *Persamaan Diferensial*. Yogyakarta: Graha Ilmu.



Lampiran 1: Nilai Titik Tetap, Matrik Jacobian, dan Nilai Eigen dengan Maple

```

> restart;>
a1:=0.8;a2:=0.6;a3:=0.25;b1:=0.9;b2:=0.5;b3:=1.9;m1:=0.4;
m2:=0.2;m3:=0.2;mu:=0.1;q:=0.5;gama:=0.9;
a1 := 0.8
a2 := 0.6
a3 := 0.25
b1 := 0.9
b2 := 0.5
b3 := 1.9
m1 := 0.4
m2 := 0.2
m3 := 0.2
mu := 0.1
q := 0.5
gama := 0.9
> dx:=x*(1-x)-a1*x*y/(gama*y+m1+x)-a2*x^2*z/(m2^2+x^2);
dx := x(1-x) - \frac{0.8xy}{x+0.9y+0.4} - \frac{0.6x^2z}{x^2+0.04}
> dy:=b1*x*y/(gama*y+m1+x)-a3*y^2*z/(m3^2+y^2)-mu*y;
dy := \frac{0.9xy}{x+0.9y+0.4} - \frac{0.25y^2z}{y^2+0.04} - 0.1y
> dz:=b2*x^2*z/(m2^2+x^2)+b3*y^2*z/(m3^2+y^2)-mu*z-q*z;
dz := \frac{0.5x^2z}{x^2+0.04} + \frac{1.9y^2z}{y^2+0.04} - 0.6z
> fixedpoint:=solve({dx,dy,dz},{x,y,z});

```

```

fixedpoint := {x = 0., y = 0.135873244} z = -0.172106109}, {x = 0.,
y = -0.135873244} z = 0.172106109}, {x = 0.2445212315, y
= 0.08667445145, z = 0.4485840923}, {x = 1.773590874, y =
-0.04868268866, z = -2.261059028}, {x = 0.2138862436
+ 1.179397530I, y = 0.04374162070 - 0.001361398428I, z
= 2.493270460 + 1.055828415I}, {x = 0.0002132751569
+ 0.1704761621I, y = -0.3121912782 + 1.548578800I, z =
-0.04143441243 - 0.02433034593I}, {x = 0.001192955439
+ 0.1163952468I, y = -0.1810860483 + 0.001527709816I, z =
-0.1254661606 - 0.5654043449I}, {x = -0.1150909842, y
= 0.1155698088, z = -0.6765119222}, {x = -1.133606070, y =
-0.05078645626, z = -4.055024657}, {x = 0.001192955439
- 0.1163952468I, y = -0.1810860483 - 0.001527709816I, z =
-0.1254661606 + 0.5654043449I}, {x = 0.0002132751569
- 0.1704761621I, y = -0.3121912782 - 1.548578800I, z =
-0.04143441243 + 0.02433034593I}, {x = 0.2138862436
- 1.179397530I, y = 0.04374162070 + 0.001361398428I, z
= 2.493270460 - 1.055828415I}, {x = -6.63725644210-560
+ 0.4898979486I, y = 0., z = 0.3333333333 + 0.6804138174I}, {x
= -6.63725644210-560 - 0.4898979486I, y = 0., z = 0.3333333333
- 0.6804138174I}, {x = 1., y = 0., z = 0.}, {x = 0.3297008434, y
= 2.486229719, z = 0.}, {x = -0.1198243002, y = -1.509549335, z
= 0.}, {x = 0., y = 0., z = 0.}

```

```

>
#fixedpoint1:=fixedpoint[3];fixedpoint2:=fixedpoint[17]
;fixedpoint3:=fixedpoint[4];#fixedpoint4:=fixedpoint[5]
;
> #konstanta1
> #fixedpoint1:={x = 1., y = 0., z =
0.};fixedpoint2:={x = .4477187570, y = 1.545416698, z =
0.};fixedpoint3:={x = .4834515480, y = 0.6331373042e-1,
z = .4366166941};
> #konstanta3
> fixedpoint1:={x = 1., y = 0., z = 0.};fixedpoint2:={x
= .3297008434, y = 2.486229719, z = 0.};fixedpoint3:={x
= .2445212315, y = 0.8667445145e-1, z = .4485840923};
fixedpoint1 := {x = 1., y = 0., z = 0.}
fixedpoint2 := {x = 0.3297008434, y = 2.486229719, z = 0.}
fixedpoint3 := {x = 0.2445212315, y = 0.8667445145, z =
0.4485840923}
> with(linalg):

```

```

> jac:=jacobian([dx,dy,dz],[x,y,z]);

> jac1:=subs(fixedpoint1,evalm(jac));
      jac1 := 
$$\begin{bmatrix} -1. & -0.5714285714 & -0.5769230769 \\ 0. & 0.5428571429 & -0. \\ 0. & 0. & -0.1192307692 \end{bmatrix}$$


> jac2:=subs(fixedpoint2,evalm(jac));
      jac2 := 
$$\begin{bmatrix} -0.2552231594 & -0.02185897320 & -0.4386040825 \\ 0.6702991567 & -0.07540865515 & -0.2483926288 \\ 0. & 0. & 1.653287381 \end{bmatrix}$$


> jac3:=subs(fixedpoint3,evalm(jac));
      jac3 := 
$$\begin{bmatrix} -0.0812481224 & -0.2415094562 & -0.3594964641 \\ 0.07142631154 & -0.1727706857 & -0.03952889648 \\ 0.4405963374 & 2.617963062 & 0. \end{bmatrix}$$


> neigen1:=eigenvals(jac1);
      neigen1 := -1., 0.5428571429000000-0.11923076920000

> neigen2:=eigenvals(jac2);
      neigen2 := -0.165315907275000+ 0.0810477471470958i,
      -0.165315907275000- 0.0810477471470958i, 1.65328738100000

> neigen3:=eigenvals(jac3);
      neigen3 := 0.030945131714091+ 0.558354308852080i,
      0.030945131714091- 0.558354308852080i, -0.31590907152818

      vekeigen3 := [0.0309451311+ 0.5583543100i, 1, {[0.6463830170
      + 0.3400424663i, 0.1280941407- 0.01893565348i, 0.240359574
      - 1.097335061i]}], [-0.31590907101,
      {[0.3888086038 -0.1045350160 0.3240209639]}],
      [0.0309451311- 0.5583543100i, 1, {[0.6463830170
      - 0.3400424663i, 0.1280941407+ 0.01893565348i, 0.240359574
      + 1.097335061i}]]

```

RIWAYAT HIDUP



Nur Evita Adiningsih, lahir di Kota Jakarta Timur pada tanggal 13 Januari 1993, biasa dipanggil Evita, selama di Malang bertempat tinggal di Jl. Joyosuko Timur No. 10, Lowokwaru, Malang. Anak kedua dari tiga bersaudara dari bapak Heru Purwandito dan ibu Rochimah.

Pendidikan dasarnya ditempuh di SDN Harapan Jaya XVII, Bekasi dan lulus pada tahun 2005, setelah itu melanjutkan ke Sekolah Menengah Pertama Negeri 5 Bekasi dan lulus pada tahun 2008. Kemudian melanjutkan pendidikan ke Sekolah Menengah Atas Diponegoro 2 Cakung dan lulus tahun 2011. Selanjutnya, pada tahun 2011 menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil Jurusan Matematika lewat SNMPTN tulis.

Selama menjadi mahasiswa, penulis berperan aktif pada organisasi intra kampus dalam rangka mengembangkan kompetensi non akademiknya. Anggota Paduan Suara Gema Gita Bahana Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang tahun 2012 dengan mengikuti Lomba Paduan Suara di SDGNCF Semarang tahun 2013 dan mendapatkan medali perunggu, serta mengikuti Lomba Paduan Suara CIFCC di Universitas Negeri Malang tahun 2015 dan mendapatkan medali perak.



**KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**

Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Nur Evita Adiningsih
NIM : 11610036
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Analisis Dinamik Sistem Persamaan Diferensial *Predator-Prey* Tiga Spesies
Pembimbing I : Dr. Usman Pagalay, M.Si.
Pembimbing II : Dr. Abdussakir, M.Pd.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	10 Mei 2016	Konsultasi Bab I	1.
2.	10 Mei 2016	Konsultasi Bab II	2.
3.	8 Maret 2017	ACC Bab I & Bab II	3.
4.	12 Maret 2018	Konsultasi Kajian Keagamaan	4.
5.	12 Maret 2018	Konsultasi Kajian Keagamaan	5.
6.	9 April 2018	Konsultasi Bab III	6.
7.	30 April 2018	Konsultasi Bab III	7.
8.	3 Mei 2018	ACC Bab III	8.
9.	9 Mei 2018	Konsultasi Bab IV	9.
10.	10 Mei 2018	Konsultasi Abstrak	10.
11.	9 Mei 2018	ACC Kajian Keagamaan	11.
12.	14 Mei 2018	ACC Bab IV	12.
13.	21 Mei 2018	ACC Abstrak	13.
14.	21 Mei 2018	ACC Keseluruhan	14.

Malang, 21 Mei 2018

Mengetahui

Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si

NIP. 19650414 200312 1 001