

**SOLUSI NUMERIK MODEL GERAK DAWAI PADA ALAT MUSIK  
SASANDO DENGAN METODE CTCS**

**SKRIPSI**

**OLEH  
AMINATUS ZURIA  
NIM. 11610018**

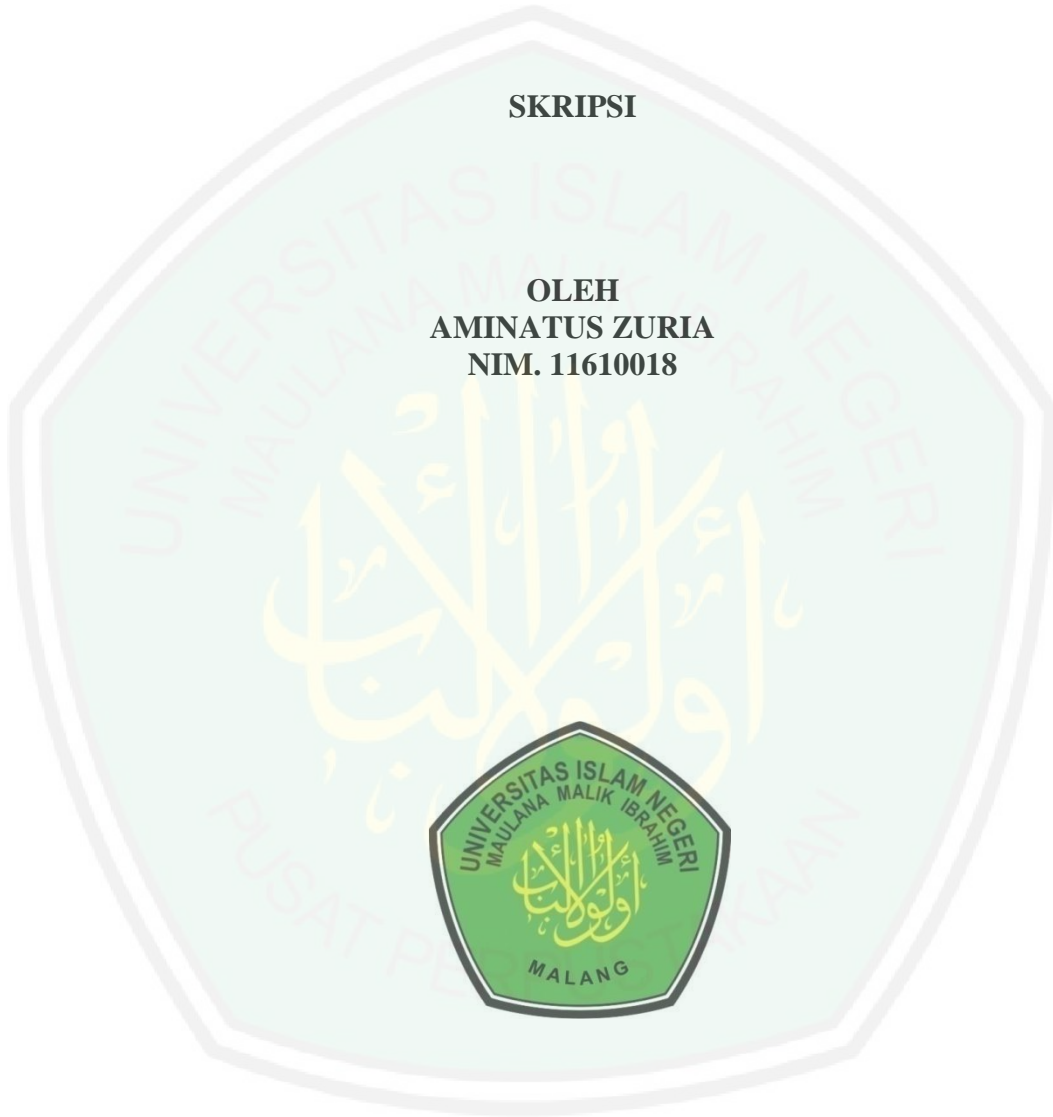


**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2018**

**SOLUSI NUMERIK MODEL GERAK DAWAI PADA ALAT MUSIK  
SASANDO DENGAN METODE CTCS**

**SKRIPSI**

**OLEH  
AMINATUS ZURIA  
NIM. 11610018**



**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2018**

**SOLUSI NUMERIK MODEL GERAK DAWAI PADA ALAT MUSIK  
SASANDO DENGAN METODE CTCS**

**SKRIPSI**

**Diajukan Kepada  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam  
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh  
Aminatus Zuria  
NIM. 11610018**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2018**

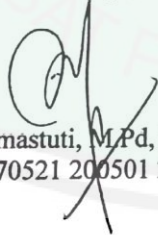
**SOLUSI NUMERIK MODEL GERAK DAWAI PADA ALAT MUSIK  
SASANDO DENGAN METODE CTCS**

**SKRIPSI**

Oleh  
**Aminatus Zuria**  
**NIM. 11610018**

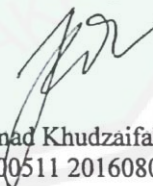
Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji  
Tanggal 03 Mei 2018

Pembimbing I,



**Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si**  
NIP. 19770521 200501 2 004

Pembimbing II,



**Muhammad Khudzaifah, M.Si**  
NIP. 19900511 20160801 1 057

Mengetahui,  
**Ketua Jurusan Matematika**



**Dr. Usman Pagalay, M.Si**  
NIP. 19650414 200312 1 001

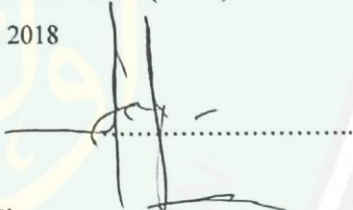
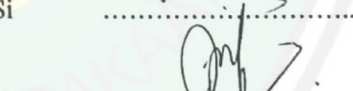
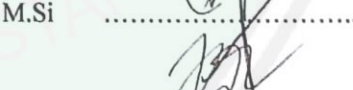

**SOLUSI NUMERIK MODEL GERAK DAWAI PADA ALAT MUSIK  
SASANDO DENGAN METODE CTCS**

**SKRIPSI**

Oleh  
**Aminatus Zuria**  
NIM. 11610018

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi  
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan  
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal 03 Juni 2018

|                    |                               |  |
|--------------------|-------------------------------|--|
| Penguji Utama      | : Hairur Rahman, M.Si         |  |
| Ketua Penguji      | : Dr. Usman Pagalay, M.Si     |  |
| Sekretaris Penguji | : Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si |  |
| Anggota Penguji    | : Muhammad Khudzaifah, M.Si   |  |

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si  
NIP. 19650414 200312 1 001

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Aminatus Zuria

NIM : 11610018

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul : Solusi Numerik Model Gerak Dawai pada Alat Musik Sasando  
dengan Metode CTCS

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 30 April 2018  
Yang membuat pernyataan



Aminatus Zuria  
NIM. 11610018

## MOTO

“Sesungguhnya Allah tidak akan mengubah nasib suatu kaum, kecuali kaum itu yang mengubahnya”



## PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Dengan rasa syukur kepada Allah Swt penulis persembahkan skripsi ini kepada:  
Bapak Tasmuji dan Ibu Niswati Rupiah yang selalu semangat mendorong penulis  
untuk menyelesaikan skripsi ini.



## KATA PENGANTAR

*Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh*

Alhamdulillahirobbil 'alamin, segala puji bagi Allah Swt yang telah memberikan rahmat, berkah, dan hidayah-Nya sehingga penulis mampu menyelesaikan skripsi yang berjudul “Solusi Numerik Model Gerak Dawai pada Alat Musik Sasando dengan Metode CTCS” ini dengan baik. Sholawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada Baginda Nabi Muhammad Saw yang telah menunjukkan dan mengubah dari jalan jahiliyah/kegelapan ke jalan yang terang benderang seperti sekarang ini.

Penulis menyadari banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Oleh karena itu, iringan do'a dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan, terutama kepada:

1. Prof Dr. H. Abdul Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Ari Kusumastuti M.Pd, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan bimbingan, nasihat dan arahan untuk segera menyelesaikan skripsi ini.
5. Muhammad Khudzaifah M.Si, selaku pembimbing II yang telah memberikan arahan dan bimbingan selama penyusunan skripsi ini.

6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen yang telah memberikan bimbingan dalam perkuliahan.
7. Kedua orang tua dan seluruh keluarga yang memberikan dukungan berupa motivasi dan do'a sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik.
8. Teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2011 yang telah membantu dalam penyelesaian skripsi ini.
9. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik berupa materil maupun moril.

Akhir kata, semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat dan menambah wawasan keilmuan bagi yang membacanya.

*Wassalamu 'alaikum Wr. Wb.*

Malang, April 2018

Penulis

## DAFTAR ISI

|  |      |
|--|------|
| <b>HALAMAN JUDUL</b>                                       |      |
| <b>HALAMAN PENGAJUAN</b>                                   |      |
| <b>HALAMAN PERSETUJUAN</b>                                 |      |
| <b>HALAMAN PENGESAHAN</b>                                  |      |
| <b>HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN</b>                 |      |
| <b>HALAMAN MOTO</b>  |      |
| <b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b>                                 |      |
| <b>KATA PENGANTAR</b> .....                                | viii |
| <b>DAFTAR ISI</b> .....                                    | x    |
| <b>DAFTAR GAMBAR</b> .....                                 | xii  |
| <b>DAFTAR SIMBOL</b> .....                                 | xiii |
| <b>ABSTRAK</b> .....                                       | xiv  |
| <b>ABSTRACT</b> .....                                      | xv   |
| <b>المخلص</b> .....  | xvi  |
| <br>   |      |
| <b>BAB I PENDAHULUAN</b>                                   |      |
| 1.1 Latar Belakang .....                                   | 1    |
| 1.2 Rumusan Masalah .....                                  | 4    |
| 1.3 Tujuan Penelitian .....                                | 4    |
| 1.4 Manfaat Penelitian .....                               | 4    |
| 1.5 Batasan Masalah .....                                  | 5    |
| 1.6 Metode Penelitian .....                                | 5    |
| 1.7 Sistematika Penulisan .....                            | 6    |
| <br>   |      |
| <b>BAB II KAJIAN PUSTAKA</b>                               |      |
| 2.1 Kajian Model Gerak Dawai pada Alat Musik Sasando ..... | 7    |
| 2.2 Metode Beda Hingga .....                               | 10   |
| 2.3 Skema Eksplisit CTCS .....                             | 12   |
| 2.4 Syarat Kestabilan .....                                | 13   |
| 2.5 Ikhtiar dalam Perspektif Islam .....                   | 15   |
| <br>   |      |
| <b>BAB III PEMBAHASAN</b>                                  |      |
| 3.1 Analisis Skema Eksplisit CTCS .....                    | 17   |

|  |    |
|--|----|
| 3.2 Analisis Kestabilan .....                | 18 |
| 3.3 Solusi Numerik dan Simulasi Grafik ..... | 25 |
| 3.4 Kajian Keagamaan .....                   | 29 |

**BAB IV PENUTUP**

|                      |    |
|----------------------|----|
| 4.1 Kesimpulan ..... | 31 |
| 4.2 Saran .....      | 31 |

|                             |    |
|-----------------------------|----|
| <b>DAFTAR RUJUKAN</b> ..... | 32 |
|-----------------------------|----|

**RIWAYAT HIDUP**



## DAFTAR GAMBAR

|   |    |
|---|----|
| Gambar 1.1 Alat Musik Sasando (Bryllian, 2017).....   | 2  |
| Gambar 2.1 Denah Alat Musik Dawai (Bryllian, 2017) .....  | 7  |
| Gambar 3.1 Grafik Solusi Numerik Model Gerak Dawai pada Alat Musik<br>Sasando dengan $\Delta t = 0.1$ ..... | 28 |
| Gambar 3.1 Grafik Solusi Numerik Model Gerak Dawai pada Alat Musik<br>Sasando dengan $\Delta t = 0.2$ ..... | 29 |



## DAFTAR SIMBOL

- $l$  : Panjang dawai Sasando.
- $c$  : Kecepatan elastisitas dawai Sasando.
- $k_d$  : Konstanta peredam.
- $u(x, t)$  : Simpangan yang bergantung pada keadaan  $x$  dan waktu  $t$ .



## ABSTRAK

Zuria, Aminatus. 2018. **Solusi Numerik Model Gerak Dawai pada Alat Musik Sasando dengan Metode CTCS**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si. (II) Muhammad Khudzaifah, M.Si.

**Kata Kunci:** Solusi Numerik, Metode CTCS, Model Matematika, Dawai, Sasando

Model matematika pada penelitian ini merupakan suatu ukuran yang menggambarkan masalah gerak dawai pada alat musik Sasando. Penelitian ini memfokuskan pada solusi numerik model gerak dawai pada alat musik Sasando. Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui solusi numerik dari model gerak dawai pada alat musik Sasando. Metode yang digunakan dalam menyelesaikan model gerak dawai pada alat musik Sasando dalam penelitian ini adalah metode CTCS (*Central Time Central Space*). Langkah dalam menyelesaikan model gerak dawai pada alat musik Sasando Antara lain yaitu mencari skema eksplisit CTCS, analisis kestabilan dari skema eksplisit CTCS. Hasil yang diperoleh menunjukkan solusi  $u(x, t)$  stabil, dimana pergerakan dawai selalu menuju nilai setimbang  $(0,0)$ .

## ABSTRACT

Zuria, Aminatus. 2018. **Numerical Model Motion Solution on Sasando Musikal Instruments using CTCS Method**. Essay. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang. Counselor: (I) Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si. (II) Muhammmad Khudzaifah, M.Si.

Keywords: Numerical Solution, CTCS Method, Mathematical Model, String, Sasando

Mathematical model in this study is a measure that describes the problem of strings on the Sasando musical instrument. This research focuses on the numerical solution of the wavelength model on the Sasando musical instrument. The purpose of this study is to determine the numerical solution of the wavelength model on the Sasando musical instrument out. The method used in completing the string model on Sasando musical instrument in this research is CTCS (Central Time Central Space) method. Steps in solving the string motion model on the Sasando musical instrument include searching for the CTCS scheme, stability analysis of the CTCS scheme. The result show the solution  $u(x, t)$  stable, which means the movement of the strings toward a balanced value (0,0).

## المخلص

زوريا ، اميناتوس. 2018. نموذج الحركة الحل العددي على الآلات الموسيقية Sasando مع طريقة CTCS. بحث جامعي. شعبة الرياضيات ، كلية العلوم والتكنولوجيا ، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المستشار (I) Ari Kusumastuti ، (M.Pd ، M.Si. (ثانيا) محمد خديفة ، م.

كلمات البحث: الحل العددي ، طريقة CTCS ، نموذج رياضي ، سلسلة ، Sasando

النموذج الرياضي في هذه الدراسة هو مقياس يصف مشكلة الأوتار الموسيقية على آلة موسيقية Sasando الموجودة في العالم الحقيقي. يركز هذا البحث على الحل العددي لنموذج الطول الموجي على الآلة الموسيقية Sasando. كان الغرض من هذه الدراسة هو معرفة الحل العددي لنموذج الطول الموجي على آلة موسيقية Sasando. الطريقة المستخدمة في حل نموذج الوتر على أداة Sasando في هذا البحث هي CTCS (Central Time Central Space). تتضمن الخطوات في حل نموذج حركة السلسلة على آلة موسيقية Sasando البحث عن مخطط CTCS ، تحليل استقرار مخطط CTCS ، ثم الحلول العددية الحصول عليها. ولكن هذه النتيجة ليست كافية بحيث يمكن للبحث الإضافي البحث عن حلول رقمية بطرق. النتيجة تظهر الحل  $u(x,t)$  مستقر ، مما يعني حركة السلاسل نحو قيمة متوازنة  $(0,0)$ .

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Saat ini tuntutan terhadap penguasaan matematika terapan semakin kuat. Kerja efektif, praktis, dan akurat diperlukan untuk menjalani kehidupan saat ini. Matematika terapan diperlukan khususnya dalam membantu menyelesaikan masalah-masalah yang berkaitan dengan model matematika. Pemodelan matematika merupakan bidang matematika yang berusaha merepresentasikan dan menjelaskan masalah-masalah nyata ke dalam persamaan matematika. Sebagai contoh fenomena vibrasi yang terjadi sepanjang dawai Sasando dapat dianalisis dengan menggunakan model matematika. Model matematika untuk permasalahan ini telah dikerjakan oleh Kusumastuti, dkk (2017).

Di dalam Islam juga terdapat perintah untuk terus mengembangkan ilmu pengetahuan dan memahami fenomena alam ciptaan Tuhan yang menarik untuk diteliti, diselidiki, dan dikembangkan. Hal ini dijelaskan dalam al-Quran surat Yunus/10:101, yaitu:

قُلْ أَنْظُرُوا مَاذَا فِي السَّمٰوٰتِ وَالْاَرْضِ وَمَا تُنۡعٰیۡنِیۡ اِلَّاۤ اٰیٰتُۙ وَالۡتَذٰرُۙعَنۡ قَوۡمٍۭ لَّا یُؤۡمِنُوۡنَ

*Artinya: Katakanlah: "Perhatikanlah apa yang ada di langit dan di bumi, tidaklah bermanfaat tanda kekuasaan Allah dan Rasul-rasul yang memberi peringatan bagi orang-orang yang tidak beriman" (QS. Yunus/10:101).*

Ayat al-Quran di atas merupakan salah satu landasan dalam Islam untuk terus mengembangkan ilmu pengetahuan dan teknologi. Sebagai bentuk pengamalan dari surat Yunus/10 ayat 101, skripsi ini mengkaji salah satu alat

musik dawai. Alat musik dawai atau senar adalah alat musik yang menghasilkan suara dengan cara menggetarkan dawai atau senar. Ada tiga cara utama menggetarkan dawai untuk menghasilkan suara, yaitu dengan dipetik (contohnya Sasando) dan digesek (contohnya biola).

Sasando merupakan salah satu alat musik tradisional yang berasal dari Pulau Rote Kabupaten Ndao Nusa Tenggara Timur.



Gambar 1.1 Alat Musik Sasando (Sumber: Brylliant, 2017)

Bunyinya yang khas dan indah membuat banyak orang, tidak hanya masyarakat lokal tetapi juga masyarakat mancanegara tertarik untuk mengkaji bagaimana alat musik ini mampu menciptakan alunan bunyi yang indah.

Masalah gerak dawai pada alat musik Sasando merupakan masalah yang sulit untuk dianalisis secara langsung. Oleh karena itu, diperlukan suatu upaya untuk memahami masalah tersebut, salah satunya adalah dengan membentuk suatu ukuran yang tepat yang dapat mewakili masalah tersebut pada keadaan riilnya. Dalam ilmu matematika, hal ini dikenal sebagai model matematika. Untuk kasus ini, model matematika merupakan representasi dari masalah gerak dawai pada alat musik Sasando ke dalam bahasa matematika. Artinya model matematika untuk masalah gerak dawai pada alat musik Sasando dipandang sebagai abstraksi

dari masalah gerak dawai pada alat musik Sasando yang kompleks yang disajikan dalam bentuk bahasa matematika. Dengan memodelkan masalah gerak dawai pada alat musik Sasando, dapat diketahui pola vibrasi dawai pada alat musik Sasando dalam persamaan matematika. Dengan begitu pemahaman mengenai masalah gerak dawai pada alat musik Sasando menjadi lebih sistematis dan lebih mudah untuk dianalisis lebih lanjut.

Agus Purwanto (2006), pernah melakukan penelitian mengenai analisis dan sintesa sinyal suara yang dihasilkan dari alat musik gitar semi-akustik. Dalam penelitian tersebut dawai gitar dipetik kemudian suara yang dihasilkan direkam dengan menggunakan program *SOUND FORGE*. Data suara hasil perekaman tersebut kemudian dianalisis dengan *FFT* untuk memperoleh spektrum sinyal suara, dan komponen-komponen penyusun sinyal suara, seperti frekuensi fundamental, frekuensi harmonik, amplitudo, dan rasio amplitudo. Kemudian dilakukan konstruksi sinyal suara berdasarkan komponen-komponen yang telah diperoleh. Dan hasilnya menunjukkan bahwa dengan menambahkan faktor peredam pada model sinyal suara yang digunakan diperoleh suara yang hampir sama dengan suara asli dari petikan gitar.

Penelitian ini merupakan penelitian lanjutan terhadap penelitian sebelumnya oleh Kusumastuti, dkk (2017) yang telah menganalisis konstruksi model gerak dawai pada alat musik sasando. Karena pada penelitian sebelumnya analisis numerik dibahas dengan metode persamaan diferensial parsial orde dua. Maka peneliti ingin melakukan analisis numerik dengan menggunakan metode *CTCS (Central Time Central Space)*. Triatmodjo (2002) menyatakan bahwa metode beda hingga skema eksplisit digunakan dalam penyelesaian persamaan

differensial parsial. Penggunaan skema tersebut untuk menurunkan persamaan differensial parsial menjadi persamaan beda hingga. Skema CTCS merupakan pendekatan numerik dengan beda pusat terhadap waktu dan beda pusat terhadap ruang.

Dari pemaparan latar belakang di atas, maka penulis memiliki gagasan dalam menyusun skripsi dengan judul “*Solusi Numerik Model Gerak Dawai pada Alat Musik Sasando dengan Metode CTCS*”.

## **1.2 Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana solusi numerik model gerak dawai pada alat musik Sasando dengan metode CTCS?

## **1.3 Tujuan Penelitian**

Berdasarkan perumusan masalah di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah mengetahui solusi numerik model gerak dawai pada alat musik Sasando dengan metode CTCS.

## **1.4 Manfaat Penelitian**

Manfaat dari penelitian ini adalah dapat menambah wawasan keilmuan, khususnya dalam pengetahuan tentang bagaimana model gerak dawai pada alat musik Sasando. Selain itu juga model matematika yang dihasilkan dapat dijadikan sebagai bahan literatur dalam pengembangan keilmuan yang berkaitan dengan analisis model gerak dawai pada alat musik Sasando atau sejenisnya.

### 1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Model yang dianalisis adalah model matematika khusus untuk masalah gerak dawai pada alat musik Sasando.
2. Alat musik Sasando yang digunakan merupakan Sasando jenis modern yaitu Sasando jenis biola dengan jumlah dawai sebanyak 32 dan jenis dawai yang digunakan adalah dawai berbahan nilon.
3. Konstruksi model matematika untuk masalah gerak dawai pada alat musik Sasando adalah menggunakan dawai penghasil nada *do* yang dipetik pada posisi tengah-tengah dawai.

### 1.6 Metode Penelitian

Metode dalam penelitian ini, menggunakan pendekatan penelitian kepustakaan (*library research*), dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Mengkonstruksi stensil persamaan gerak dawai pada alat musik Sasando dengan skema eksplisit CTCS.
2. Melakukan analisis kestabilan dari skema eksplisit CTCS untuk gerak dawai pada alat musik Sasando.
3. Mensimulasikan solusi numerik skema eksplisit CTCS dengan menerapkan analisis kestabilan dan substitusi parameter-parameternya.

## 1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika dalam penulisan penelitian ini sebagai berikut:

### BAB I Pendahuluan

Pada bab ini, dijelaskan tentang latar belakang penelitian dan topik yang diteliti, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat dari permasalahan yang akan diteliti, ruang lingkup atau batasan masalah yang diteliti, serta metode penelitian dan sistematika penulisan.

### BAB II Kajian Pustaka

Bab ini menjelaskan tentang gambaran umum dari teori yang mendasari pembahasan.

### BAB III Pembahasan

Pada bab ini dijelaskan langkah-langkah yang digunakan untuk menganalisis model gerak dawai pada alat musik Sasando.

### BAB IV Penutup

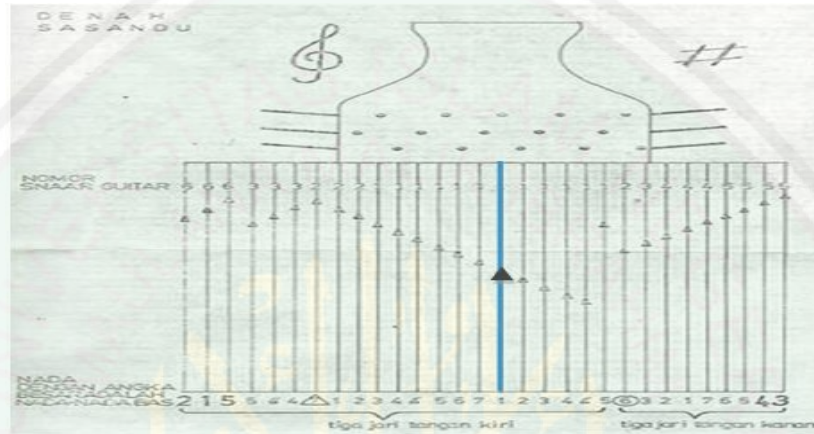
Pada bab ini dijelaskan intisari dari hasil penelitian yang berupa kesimpulan dari pembahasan hasil penelitian dengan dilengkapi dengan saran-saran yang berkaitan dengan penelitian ini.

## BAB II

### KAJIAN PUSTAKA

#### 2.1 Kajian Model Gerak Dawai pada Alat Musik Sasando

Secara umum, denah dawai pada alat musik Sasando, sebagai berikut:



Gambar 2.1 Denah Alat Musik Dawai (Bryllian, 2017)

Berdasarkan pada Gambar 2.1, dawai penghasil nada dasar *do* berada di tengah-tengah, yaitu dawai ke-16 yang diberi tanda warna biru. Jarak antara kedua pengait dawai ini adalah 35 *cm*. Letak penyangga dawainya berada di tengah-tengah, sehingga panjang di kedua sisi dawai sama ( $l$ ). Jenis material dawai yang digunakan berbahan nilon yang memiliki modulus elastisitas ( $E$ ) sebesar  $5 \times 10^9 N/m^2$ . Konstanta modulus elastisitas dari dawai Sasando menunjukkan tingkat kelenturan dawai.

Dalam penelitian Kusumastuti, dkk (2017) dihasilkan model matematika gerak dawai pada alat musik Sasando sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left( \frac{1}{2} c^2 + 2 \frac{c^2}{l} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_d \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (2.1)$$

Konstruksi model matematika gerak dawai pada alat musik Sasando terbentuk dari pemanfaatan hukum fisika. Petikan yang diberikan pada dawai Sasando menimbulkan adanya energi potensial ( $Ep$ ) dan energi kinetik ( $Ek$ ).

Energi potensial ( $Ep$ ) pada dawai Sasando merupakan keseluruhan dari total masing-masing energi potensial yang terjadi pada dawai Sasando. Dalam kasus dawai Sasando yang dipetik, terdapat beberapa energi potensial yang terjadi, diantaranya adalah

1. Energi potensial pegas ( $Ep_{Pegas}$ ), sebagai berikut:

$$Ep_{Pegas} = \frac{1}{2} k_p l^2 \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1 \right) \quad (2.2)$$

2. Energi potensial tegangan ( $Ep_{Tegangan}$ ), sebagai berikut:

$$Ep_{Tegangan} = 2E \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1 \right) \quad (2.3)$$

3. Energi potensial gesek ( $Ep_{Gesek}$ ), sebagai berikut:

$$Ep_{Gesek} = -k_b \eta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) u \quad (2.4)$$

Dari persamaan (2.2), (2.3), dan (2.4) dapat dihasilkan energi potensial model  $Ep_{Model}$  yang merupakan keseluruhan energi potensial, sehingga

$$Ep_{Model} = \left( \frac{1}{2} k_p l^2 + 2E \right) \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1 \right) + \left( -k_b \eta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) u \right) \quad (2.5)$$

Ketika dawai Sasando dipetik terjadi gerak osilasi pada dawai, sehingga terdapat energi kinetik pada dawai Sasando. Energi kinetik pada dawai Sasando didefinisikan sebagai berikut:

$$Ek_{Model} = \frac{1}{2} \rho l \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \quad (2.6)$$

Langkah selanjutnya adalah menentukan persamaan *Lagrange*. Persamaan *Lagrange* didefinisikan sebagai selisih antara energi kinetik model ( $E_{p_{Model}}$ ) dan energi potensial model ( $E_{k_{Model}}$ ), sehingga didapatkan persamaan *Lagrange* sebagai berikut:

$$L = \frac{1}{2}\rho l \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}k_p l^2 + 2E\right) \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1\right) + \left(k_b \eta \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) u\right) \quad (2.7)$$

Dengan menurunkan persamaan *Lagrange* pada persamaan (2.7), maka akan didapatkan persamaan (2.1).

Berdasarkan persamaan (2.1) terdapat beberapa parameter, yakni:

1. Panjang dawai Sasando ( $l$ ), merupakan jarak Antara dua buah ujung dawai Sasando adalah 16 cm.
2. Konstanta peredam ( $k_d$ ) yang mempengaruhi kecepatan dawai selama dawai berisolasi adalah 1.5.
3. Kecepatan elastisitas ( $c$ ) adalah 1 m/s<sup>2</sup>.

Dan fungsi  $f(x)$  dinyatakan sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2hx}{l}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}l \\ 2h - \frac{2hx}{l}, & \frac{1}{2}l \leq x \leq l \end{cases}$$

Dengan kondisi awal sebagai berikut

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{untuk setiap} \quad 0 < x < l$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = 0 \quad \text{untuk setiap} \quad 0 < x < l$$

Dan kondisi batas sebagai berikut

$$u(0, t) = 0 \quad \text{untuk setiap} \quad t > 0$$

$$u(l, t) = 0 \quad \text{untuk setiap} \quad t > 0$$

## 2.2 Metode Beda Hingga

Strauss (2007) menyatakan bahwa metode beda hingga merupakan sebuah metode yang sangat populer dalam penyelesaian masalah-masalah persamaan diferensial biasa maupun persamaan differensial parsial, yang didasarkan pada ekspansi deret Taylor. Berikut adalah ekspansi deret Taylor di sekitar  $(x, t)$  yaitu:

$$f(x + \Delta x, t) = f(x, t) + f_x(x, t)\Delta x + \frac{1}{2}f_{xx}(x, t)\Delta x^2 + \frac{1}{6}f_{xxx}(x, t)\Delta x^3 + \dots \quad (2.8)$$

$$f(x - \Delta x, t) = f(x, t) - f_x(x, t)\Delta x - \frac{1}{2}f_{xx}(x, t)\Delta x^2 - \frac{1}{6}f_{xxx}(x, t)\Delta x^3 + \dots \quad (2.9)$$

$$f(x, t + \Delta t) = f(x, t) + f_t(x, t)\Delta t + \frac{1}{2}f_{tt}(x, t)\Delta t^2 + \frac{1}{6}f_{ttt}(x, t)\Delta t^3 + \dots \quad (2.10)$$

$$f(x, t - \Delta t) = f(x, t) - f_t(x, t)\Delta t - \frac{1}{2}f_{tt}(x, t)\Delta t^2 - \frac{1}{6}f_{ttt}(x, t)\Delta t^3 + \dots \quad (2.11)$$

Sehingga turunan haampiran pertama suatu fungsi  $f(x)$  untuk beda pusat terhadap  $t$  dapat diperoleh sebagai berikut

$$f(x, t + \Delta t) - f(x, t - \Delta t) = 2f_t(x, t)\Delta t \quad (2.12)$$

Maka

$$f_t(x, t) = \frac{f(x, t + \Delta t) - f(x, t - \Delta t)}{2\Delta t} \quad (2.13)$$

Sehingga persamaan (2.13) dapat ditulis

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{f_j^{n+1} - f_j^{n-1}}{2\Delta t} \quad (2.14)$$

Adapun untuk memperkirakan turunan kedua  $f(x)$  beda pusat terhadap  $t$  adalah dengan mengulangi prosedur untuk memperoleh turunan pertama, sehingga diperoleh

$$f(x, t + \Delta t) - f(x, t - \Delta t) = 2f_t(x, t) - 2\frac{1}{2}f_{tt}(x, t)\Delta t^2 \quad (2.15)$$

Maka

$$f_{tt}(x, t) = \frac{f(x, t + \Delta t) - 2f_t(x, t) + f(x, t - \Delta t)}{\Delta t^2} \quad (2.16)$$

Sehingga persamaan (2.16) dapat ditulis

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \approx \frac{f_j^{n+1} - 2f_j^n + f_j^{n-1}}{\Delta t^2} \quad (2.17)$$

Sedangkan untuk turunan kedua  $f(x)$  pada  $x$  beda pusat adalah dengan mengulangi prosedur untuk memperoleh turunan kedua terhadap  $t$ , sehingga diperoleh

$$f(x + \Delta x, t) - f(x - \Delta x, t) = 2f_x(x, t) + 2\frac{1}{2}f_{xx}(x, t)\Delta x^2 \quad (2.18)$$

Maka

$$f_{xx}(x, t) = \frac{f(x + \Delta x, t) - 2f_x(x, t) + f(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2} \quad (2.19)$$

Sehingga persamaan (2.19) dapat ditulis

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \frac{f_{j+1}^n - 2f_j^n + f_{j-1}^n}{\Delta x^2} \quad (2.20)$$

### 2.3 Skema Eksplisit CTCS

Triatmodjo (2002) menyatakan bahwa metode beda hingga skema eksplisit banyak digunakan dalam penyelesaian persamaan differensial parsial. Skema ini sangat sederhana dan mudah untuk memahaminya. Penggunaan skema tersebut untuk menurunkan persamaan differensial parsial menjadi persamaan beda hingga juga mudah. Skema CTCS merupakan pendekatan numerik dengan beda pusat terhadap waktu dan beda pusat terhadap ruang. Dengan metode beda hingga untuk persamaan (2.1) didapatkan skema eksplisit CTCS sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta x} \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \quad (2.24)$$

Dalam skema eksplisit, nilai pada suatu titik dihitung secara langsung dari nilai di beberapa titik sekitarnya pada waktu sebelumnya yang sudah diketahui nilainya atau nilai setiap besaran waktu yang lalu sudah diketahui, sehingga nilai  $n + 1$  dapat dihitung. Namun skema ini mempunyai kelemahan, yaitu langkah waktu  $\Delta t$  dibatasi berdasarkan bilangan *Courant* yaitu  $|Cr| = \left| u \frac{\Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1$ . Apabila  $|Cr| > 1$  maka hitungan tidak stabil. Penggunaan langkah waktu  $\Delta t$  yang kecil tersebut menyebabkan prosedur dan waktu hitungan menjadi sangat panjang dan lama.

## 2.4 Syarat Kestabilan

Zauderer (2009) menyatakan bahwa suatu permasalahan persamaan diferensial dapat menjadi stabil dan tidak stabil. Suatu konsep kestabilan dapat diterapkan dalam skema beda hingga. Ketidakstabilan skema beda hingga hingga menghasilkan kesalahan dalam aproksimasi numerik terhadap solusi nilai eksak dari masalah yang diberikan, sehingga solusi numerik kurang mendekati nilai eksak.

Salah satu metode untuk menganalisis kestabilan skema adalah stabilitas *Von Neumann* atau juga dikenal dengan stabilitas Fourier, dengan menerapkan stabilitas *Von Neumann* terhadap skema beda hingga, maka dapat dicari kestabilan dari persamaan beda dengan mensubstitusikan  $u_j^n = \rho^n e^{iaj}$  ke dalam persamaan tersebut, yang mana superskrip  $i$  menunjukkan posisi,  $n$  menunjukkan waktu,  $j$  merupakan vektor dan untuk skema  $a$  dalam interval  $[0, 2\pi]$ . Syarat perlu dan cukup stabilitas *Von Neumann* adalah  $|\rho| \leq 1$ .

Solusi dari stabilitas *Von Neumann* dengan didasarkan pada dekomposisi dari kesalahan deret Fourier. Untuk menunjukkan prosedur deret Fourier diberikan interval  $0 \leq x \leq l$ , kemudian dipartisi sebanyak  $N$ , yang menentukan  $x_n = \frac{nl}{N}, n = 0, 1, \dots, N$ . Kenaikan  $x$  didefinisikan sebagai  $h = \frac{l}{N}$ , kenaikan  $t$  didefinisikan sebagai  $k$  sehingga didapatkan  $t_m = mk$ . Maka  $u_{n,m}$  sesuai dengan  $u(x_n, t_m)$ . Berlaku juga  $x_n \pm h = x_{n\pm 1}$  dan  $t_m \pm k = t_{m\pm 1}$ .

Pada grid nilai  $x$ , didefinisikan deret Fourier  $u(x_n, t_m)$  sebagai berikut:

$$c_s(m) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} u(x_n, t_m) e^{\left(\frac{2i\pi s x_n}{l}\right)}, s = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.25)$$

dengan  $c_s(m)$  adalah koefisien Fourier. Invers dari deret Fourier diberikan

$$u(x_n, t_m) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} c_s(m) e^{\left(\frac{2i\pi s x_n}{l}\right)}, s = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.26)$$

Fungsi  $u(x_n, t_m)$  yang didapatkan dari koefisien Fourier  $c_s(m)$ . Perhatikan bahwa  $u(x_n, t_m) = u(x_0, t_m)$ , sehingga  $u(x_n, t_m)$  adalah periodik. Deret Fourier dari  $u(x_n \pm h, t_m)$  dan  $u(x_n, t_m \pm k)$  diberikan sebagai  $c_s(m) e^{\left(\pm \frac{2i\pi s x_n}{l}\right)}$  dan  $c_s(m+1)$ , dengan hal serupa untuk setiap kenaikan  $x$  dan  $t$ . Sebagai hasil, jika dipertimbangkan persamaan beda hingga

$$u(x_n, t_m \pm k) = au(x_n + h, t_m) + bu(x_n, t_m) + u(x_n - h, t_m) \quad (2.27)$$

Deret Fourier yang menghasilkan hubungan rekursi

$$c_s(m+1) = c_s(m) \left[ ae^{\left(\frac{2i\pi s x_n}{l}\right)} + b + ce^{\left(-\frac{2i\pi s x_n}{l}\right)} \right] \quad (2.28)$$

Solusi dari hubungan rekursi adalah

$$c_s(m+1) = c_s(0) \left[ ae^{\left(\frac{2i\pi s x_n}{l}\right)} + b + ce^{\left(-\frac{2i\pi s x_n}{l}\right)} \right]^m \quad (2.29)$$

dengan  $c_s(0)$  adalah kondisi awal dari deret Fourier untuk masalah tersebut.

Solusi dari persamaan beda adalah

$$u(x_n, t_m) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} c_s(0) \left[ ae^{\left(\frac{2i\pi s x_n}{l}\right)} + b + ce^{\left(-\frac{2i\pi s x_n}{l}\right)} \right]^m e^{\left(\frac{2i\pi s x_n}{l}\right)}, \quad (2.30)$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1$$

Untuk syarat kestabilan  $\left[ ae^{\left(\frac{2i\pi s x_n}{l}\right)} + b + ce^{\left(-\frac{2i\pi s x_n}{l}\right)} \right]^m$  pada persamaan (2.30)

harus terbatas dan bernilai mutlak pada  $m \rightarrow \infty$  untuk semua  $s$  yang relevan.

Sebagai hasil solusi  $u(x_n, t_m)$  tidak dapat bertumbuh  $t_m \rightarrow \infty$ . Ini berarti bahwa

$$\left[ ae^{\left(\frac{2i\pi s x_n}{l}\right)} + b + ce^{\left(-\frac{2i\pi s x_n}{l}\right)} \right] \leq 1 \quad (2.31)$$

Untuk semua  $s$  yang relevan, dan ini adalah kondisi kestabilan *Von Neumann*.

Sebagai jumlah subdivisi  $N \rightarrow \infty$ , kenaikan  $h = \frac{1}{N}$  mendekati nol,  $\frac{2\pi sh}{l} = \frac{2\pi s}{N}$

berada pada interval  $[0, 2\pi]$ . Sehingga kondisi kestabilan *Von Neumann* dapat

diberikan sebagai  $\beta = \frac{2\pi sh}{l}$ ,

$$|\rho| = |ae^{i\beta} + b + ce^{-i\beta}| \leq 1, 0 \leq \beta \leq 2\pi \quad (2.32)$$

## 2.5 Ikhtiar dalam Perspektif Islam

Untuk terus mengembangkan ilmu pengetahuan dan memahami fenomena alam ciptaan Allah, khususnya pada pengembangan penyelesaian masalah matematika dibutuhkan suatu usaha (ikhtiar) supaya mendapatkan hasil yang maksimal. Sebagaimana firman Allah pada Qs. Ar-Ra'd/13: 11, yakni

إِنَّ اللَّهَ لَا يُغَيِّرُ مَا بِقَوْمٍ حَتَّىٰ يُغَيِّرُوا مَا بِأَنْفُسِهِمْ

Artinya: “Sesungguhnya Allah tidak merubah keadaan sesuatu kaum sehingga mereka merubah keadaan yang ada pada diri mereka sendiri”. (Qs. Ar-Ra'd/13: 11)

Bagi manusia ada malaikat-malaikat yang selalu mengikutinya bergiliran, di muka dan di belakangnya, mereka menjaganya atas perintah Allah. Sesungguhnya Allah tidak merubah keadaan sesuatu kaum sehingga mereka merubah keadaan yang ada pada diri mereka sendiri. Dan apabila Allah menghendaki keburukan terhadap sesuatu kaum, maka tak ada yang dapat menolaknya, dan sekali-kali tak ada pelindung bagi mereka selain Allah.

Yang artinya bahwa Allah tidak akan merubah keadaan manusia jika manusia tidak berusaha untuk merubah keadaannya sendiri. Seperti halnya dalam Matematika, setiap masalah pasti memiliki solusi. Dimana jika berusaha, maka

akan didapatkan solusi atau jawaban yang mendekati kebenaran walaupun masih memiliki sedikit *error*. Karena suatu kebenaran (ketetapan) adalah milik Allah.



## BAB III

### PEMBAHASAN

#### 3.1 Analisis Skema Eksplisit CTCS

Pada subbab ini, akan dijelaskan bagaimana penyelesaian numerik model gerak dawai pada alat musik Sasando menggunakan metode beda hingga skema eksplisit *Central Time Central Space* (CTCS). Model gerak dawai pada alat musik Sasando yang digunakan dalam penelitian ini adalah

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left( \frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_d \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (3.1)$$

Dengan kondisi awal sebagai berikut

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{untuk setiap} \quad 0 < x < l$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = 0 \quad \text{untuk setiap} \quad 0 < x < l$$

Dan kondisi batas sebagai berikut

$$u(0, t) = 0 \quad \text{untuk setiap} \quad t > 0$$

$$u(l, t) = 0 \quad \text{untuk setiap} \quad t > 0$$

Diskritisasi persamaan dengan menggunakan skema eksplisit CTCS adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} \quad (3.4)$$

Persamaan (3.2), (3.3) dan (3.4) disubstitusikan ke persamaan (3.1), sehingga

$$\left( \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} \right) - \left( \frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l} \right) \left( \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right) + k_d \left( \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} \right) = 0$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\Delta t^2} + \frac{k_d}{2\Delta t}\right)u_j^{n+1} &= -\left(-\frac{2}{\Delta t^2} + \frac{c^2}{\Delta x^2} + \frac{4c^2}{l\Delta x^2}\right)u_j^n - \left(\frac{1}{\Delta t^2} - \frac{k_d}{2\Delta t}\right)u_j^{n-1} \\
&\quad + \left(\frac{c^2}{2\Delta x^2} + \frac{2c^2}{l\Delta x^2}\right)u_{j+1}^n + \left(\frac{c^2}{2\Delta x^2} + \frac{2c^2}{l\Delta x^2}\right)u_{j-1}^n \\
\left(\frac{1}{\Delta t^2} + \frac{k_d}{2\Delta t}\right)u_j^{n+1} &= \left(\frac{2}{\Delta t^2} - \frac{2c^2}{2\Delta x^2} - \frac{4c^2}{l\Delta x^2}\right)u_j^n - \left(\frac{1}{\Delta t^2} - \frac{k_d}{2\Delta t}\right)u_j^{n-1} \\
&\quad + \left(\frac{c^2}{2\Delta x^2} + \frac{2c^2}{l\Delta x^2}\right)u_{j+1}^n + \left(\frac{c^2}{2\Delta x^2} + \frac{2c^2}{l\Delta x^2}\right)u_{j-1}^n \\
\left(\frac{2 + k_d\Delta t}{2\Delta t^2}\right)u_j^{n+1} &= \left(\frac{2l\Delta x^2 - c^2l\Delta t^2 - 4c^2\Delta t^2}{l\Delta x^2\Delta t^2}\right)u_j^n - \left(\frac{2 - k_d\Delta t}{2\Delta t^2}\right)u_j^{n-1} \\
&\quad + \left(\frac{c^2l + 4c^2}{2l\Delta x^2}\right)u_{j+1}^n + \left(\frac{c^2l + 4c^2}{2l\Delta x^2}\right)u_{j-1}^n
\end{aligned}$$

dikalikan dengan  $\left(\frac{2\Delta t^2}{2+k_d\Delta t}\right)$

$$\begin{aligned}
u_j^{n+1} &= \left(\frac{4l\Delta x^2 - 2c^2l\Delta t^2 - 8c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t}\right)u_j^n - \left(\frac{2 - k_d\Delta t}{2 + k_d\Delta t}\right)u_j^{n-1} + \\
&\quad \left(\frac{c^2l\Delta t^2 + 4c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t}\right)u_{j+1}^n + \left(\frac{c^2l\Delta t^2 + 4c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t}\right)u_{j-1}^n
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh persamaan beda

$$\begin{aligned}
u_j^{n+1} &= \left(\frac{4l\Delta x^2 - 2c^2l\Delta t^2 - 8c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t}\right)u_j^n - \left(\frac{2 - k_d\Delta t}{2 + k_d\Delta t}\right)u_j^{n-1} + \left(\frac{c^2l\Delta t^2 + 4c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t}\right)u_{j+1}^n + \\
&\quad \left(\frac{c^2l\Delta t^2 + 4c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t}\right)u_{j-1}^n
\end{aligned} \tag{3.5}$$

### 3.2 Analisis Kestabilan

Setelah mendiskritkan persamaan sehingga diperoleh persamaan (3.5) langkah selanjutnya adalah analisis kestabilan. Analisis kestabilan dilakukan untuk mengetahui apakah metode yang digunakan untuk mencari solusi dari model gerak dawai pada alat musik Sasando tersebut stabil atau tidak. Dalam penelitian ini dilakukan dengan uji kestabilan *Von Neumann* dan dikatakan stabil

jika  $\rho \leq 1$ , dengan mensubstitusikan  $u_j^n = \rho^n e^{i\alpha j}$ ,  $\forall i = \sqrt{-1}$  pada persamaan beda

(3.5), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= \left( \frac{4l\Delta x^2 - 2c^2l\Delta t^2 - 8c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t} \right) u_j^n - \left( \frac{2-k_d\Delta t}{2+k_d\Delta t} \right) u_j^{n-1} + \left( \frac{c^2l\Delta t^2 + 4c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t} \right) u_{j+1}^n + \\ &\quad \left( \frac{c^2l\Delta t^2 + 4c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t} \right) u_{j-1}^n \\ \rho^{n+1} e^{i\alpha j} &= \left( \frac{4l\Delta x^2 - 2c^2l\Delta t^2 - 8c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t} \right) \rho^n e^{i\alpha j} - \left( \frac{2-k_d\Delta t}{2+k_d\Delta t} \right) \rho^{n-1} e^{i\alpha j} \\ &\quad + \left( \frac{c^2l\Delta t^2 + 4c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t} \right) \rho^n e^{i\alpha(j+1)} + \left( \frac{c^2l\Delta t^2 + 4c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t} \right) \rho^n e^{i\alpha(j-1)} \end{aligned}$$

Disederhanakan dengan membagi persamaan diatas dengan  $\rho^n e^{i\alpha j}$ , sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \rho &= \left( \frac{4l\Delta x^2 - 2c^2l\Delta t^2 - 8c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t} \right) - \left( \frac{2-k_d\Delta t}{2+k_d\Delta t} \right) \rho^{-1} \\ &\quad + \left( \frac{c^2l\Delta t^2 + 4c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t} \right) e^{i\alpha} + \left( \frac{c^2l\Delta t^2 + 4c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t} \right) e^{-i\alpha} \end{aligned}$$

Karena  $e^{\pm i\alpha} = \cos \alpha \pm i \sin \alpha$ , maka

$$\begin{aligned} \rho &= \left( \frac{4l\Delta x^2 - 2c^2l\Delta t^2 - 8c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t} \right) - \left( \frac{2-k_d\Delta t}{2+k_d\Delta t} \right) \rho^{-1} \\ &\quad + \left( \frac{c^2l\Delta t^2 + 4c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t} \right) \cos \alpha + i \sin \alpha + \left( \frac{c^2l\Delta t^2 + 4c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t} \right) \cos \alpha - i \sin \alpha \\ \rho &= \left( \frac{4l\Delta x^2 - 2c^2l\Delta t^2 - 8c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t} \right) - \left( \frac{2-k_d\Delta t}{2+k_d\Delta t} \right) \rho^{-1} + \left( \frac{c^2l\Delta t^2 + 4c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t} \right) 2 \cos \alpha \end{aligned}$$

dikalikan dengan  $\rho$ , maka

$$\rho^2 = \left( \frac{4l\Delta x^2 - 2c^2l\Delta t^2 - 8c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t} \right) \rho - \left( \frac{2-k_d\Delta t}{2+k_d\Delta t} \right) + \left( \frac{c^2l\Delta t^2 + 4c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t} \right) 2 \cos \alpha \rho$$

$$\rho^2 = \left( \left( \frac{4l\Delta x^2 - 2c^2l\Delta t^2 - 8c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t} \right) + \left( \frac{c^2l\Delta t^2 + 4c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t} \right) 2 \cos \alpha \right) \rho - \left( \frac{2-k_d\Delta t}{2+k_d\Delta t} \right)$$

$$\rho^2 = \left( \left( \frac{4l\Delta x^2 - 2c^2l\Delta t^2 - 8c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t} \right) + \left( \frac{2c^2l\Delta t^2 \cos \alpha + 8c^2\Delta t^2 \cos \alpha}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t} \right) \right) \rho - \left( \frac{2-k_d\Delta t}{2+k_d\Delta t} \right)$$

$$\rho^2 = \left( \frac{4l\Delta x^2 - 2c^2l\Delta t^2 - 8c^2\Delta t^2 + 2c^2l\Delta t^2 \cos \alpha + 8c^2\Delta t^2 \cos \alpha}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t} \right) \rho - \left( \frac{2-k_d\Delta t}{2+k_d\Delta t} \right)$$

atau

$$\rho^2 - \left( \frac{4l\Delta x^2 - 2c^2l\Delta t^2 - 8c^2\Delta t^2 + 2c^2l\Delta t^2 \cos\alpha + 8c^2\Delta t^2 \cos\alpha}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t} \right) \rho + \left( \frac{2-k_d\Delta t}{2+k_d\Delta t} \right) = 0 \quad (3.6)$$

Sehingga akar-akar dari persamaan (3.6) adalah

$$\rho_{1,2} = \frac{\left( \frac{4l\Delta x^2 - 2c^2l\Delta t^2 - 8c^2\Delta t^2 + 2c^2l\Delta t^2 \cos\alpha + 8c^2\Delta t^2 \cos\alpha}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t} \right)}{2} \pm \sqrt{\frac{\left( \frac{4l\Delta x^2 - 2c^2l\Delta t^2 - 8c^2\Delta t^2 + 2c^2l\Delta t^2 \cos\alpha + 8c^2\Delta t^2 \cos\alpha}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t} \right)^2 - 4 \left( \frac{2-k_d\Delta t}{2+k_d\Delta t} \right)}{2}} \quad (3.7)$$

Karena persamaan (3.7) mengandung  $\cos \alpha$ , dalam hal ini diambil titik diskritnya yaitu  $\cos \alpha = -1$ ,  $\cos \alpha = 0$ , dan  $\cos \alpha = 1$  sehingga dapat diuraikan sebagai berikut:

Untuk  $\cos \alpha = -1$  disubstitusikan ke dalam persamaan (3.7), maka

$|\rho_1|$  diperoleh

$$\begin{aligned} |\rho_1| &= \frac{\sqrt{\left( \frac{4l\Delta x^2 - 4c^2l\Delta t^2 - 16c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t} \right)^2 + \left( \sqrt{\left( \frac{4l\Delta x^2 - 4c^2l\Delta t^2 - 16c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t} \right)^2 - 4 \left( \frac{2-k_d\Delta t}{2+k_d\Delta t} \right)} \right)^2}}{2^2} \leq 1 \\ &\left( \frac{\sqrt{\left( \frac{4l\Delta x^2 - 4c^2l\Delta t^2 - 16c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t} \right)^2 + \left( \sqrt{\left( \frac{4l\Delta x^2 - 4c^2l\Delta t^2 - 16c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t} \right)^2 - 4 \left( \frac{2-k_d\Delta t}{2+k_d\Delta t} \right)} \right)^2}}{2^2} \right)^2 \leq 1^2 \\ &\frac{\left( \frac{4l\Delta x^2 - 4c^2l\Delta t^2 - 16c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t} \right)^2 + \left( \sqrt{\left( \frac{4l\Delta x^2 - 4c^2l\Delta t^2 - 16c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t} \right)^2 - 4 \left( \frac{2-k_d\Delta t}{2+k_d\Delta t} \right)} \right)^2}{2^2} \leq 1 \\ &\left( \frac{4l\Delta x^2 - 4c^2l\Delta t^2 - 16c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t} \right)^2 + \left( \frac{4l\Delta x^2 - 4c^2l\Delta t^2 - 16c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t} \right)^2 - 4 \left( \frac{2-k_d\Delta t}{2+k_d\Delta t} \right) \leq 4 \\ &2 \left( \frac{4l\Delta x^2 - 4c^2l\Delta t^2 - 16c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t} \right)^2 - 4 \left( \frac{2-k_d\Delta t}{2+k_d\Delta t} \right) \leq 4 \\ &\frac{1}{2} \left( \frac{4l\Delta x^2 - 4c^2l\Delta t^2 - 16c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t} \right)^2 - \left( \frac{2-k_d\Delta t}{2+k_d\Delta t} \right) \leq 1 \end{aligned}$$

$$\left( \frac{2l\Delta x^2 - 2c^2l\Delta t^2 - 8c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t} \right)^2 - \left( \frac{2 - k_d\Delta t}{2 + k_d\Delta t} \right) \leq 1$$

Dan  $|\rho_2|$  diperoleh

$$|\rho_2| = \sqrt{\frac{\left( \frac{4l\Delta x^2 - 4c^2l\Delta t^2 - 16c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t} \right)^2 - \left( \sqrt{\frac{4l\Delta x^2 - 4c^2l\Delta t^2 - 16c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t}} - 4 \left( \frac{2 - k_d\Delta t}{2 + k_d\Delta t} \right) \right)^2}{2^2}} \leq 1$$

$$\left( \sqrt{\frac{\left( \frac{4l\Delta x^2 - 4c^2l\Delta t^2 - 16c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t} \right)^2 - \left( \sqrt{\frac{4l\Delta x^2 - 4c^2l\Delta t^2 - 16c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t}} - 4 \left( \frac{2 - k_d\Delta t}{2 + k_d\Delta t} \right) \right)^2}{2^2}} \right)^2 \leq 1^2$$

$$\frac{\left( \frac{4l\Delta x^2 - 4c^2l\Delta t^2 - 16c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t} \right)^2 - \left( \sqrt{\frac{4l\Delta x^2 - 4c^2l\Delta t^2 - 16c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t}} - 4 \left( \frac{2 - k_d\Delta t}{2 + k_d\Delta t} \right) \right)^2}{2^2} \leq 1$$

$$\left( \frac{4l\Delta x^2 - 4c^2l\Delta t^2 - 16c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t} \right)^2 - \left( \frac{4l\Delta x^2 - 4c^2l\Delta t^2 - 16c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t} \right)^2 - 4 \left( \frac{2 - k_d\Delta t}{2 + k_d\Delta t} \right) \leq 4$$

$$-4 \left( \frac{2 - k_d\Delta t}{2 + k_d\Delta t} \right) \leq 4$$

$$-\left( \frac{2 - k_d\Delta t}{2 + k_d\Delta t} \right) \leq 1$$

Untuk  $\cos \alpha = 0$  disubstitusikan ke dalam persamaan (3.7), maka

$|\rho_1|$  diperoleh

$$|\rho_1| = \sqrt{\frac{\left( \frac{4l\Delta x^2 - 2c^2l\Delta t^2 - 8c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t} \right)^2 + \left( \sqrt{\frac{4l\Delta x^2 - 2c^2l\Delta t^2 - 8c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t}} - 4 \left( \frac{2 - k_d\Delta t}{2 + k_d\Delta t} \right) \right)^2}{2^2}} \leq 1$$

$$\left( \sqrt{\frac{\left( \frac{4l\Delta x^2 - 2c^2l\Delta t^2 - 8c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t} \right)^2 + \left( \sqrt{\frac{4l\Delta x^2 - 2c^2l\Delta t^2 - 8c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t}} - 4 \left( \frac{2 - k_d\Delta t}{2 + k_d\Delta t} \right) \right)^2}{2^2}} \right)^2 \leq 1^2$$

$$\frac{\left(\frac{4l\Delta x^2 - 2c^2l\Delta t^2 - 8c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{4l\Delta x^2 - 2c^2l\Delta t^2 - 8c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t}} - 4\left(\frac{2 - k_d\Delta t}{2 + k_d\Delta t}\right)\right)^2}{2^2} \leq 1$$

$$\left(\frac{4l\Delta x^2 - 2c^2l\Delta t^2 - 8c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{4l\Delta x^2 - 2c^2l\Delta t^2 - 8c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t}\right)^2 - 4\left(\frac{2 - k_d\Delta t}{2 + k_d\Delta t}\right) \leq 4$$

$$2\left(\frac{4l\Delta x^2 - 2c^2l\Delta t^2 - 8c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t}\right)^2 - 4\left(\frac{2 - k_d\Delta t}{2 + k_d\Delta t}\right) \leq 4$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{4l\Delta x^2 - 2c^2l\Delta t^2 - 8c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t}\right)^2 - \left(\frac{2 - k_d\Delta t}{2 + k_d\Delta t}\right) \leq 1$$

$$\left(\frac{2l\Delta x^2 - c^2l\Delta t^2 - 4c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t}\right)^2 - \left(\frac{2 - k_d\Delta t}{2 + k_d\Delta t}\right) \leq 1$$

Dan  $|\rho_2|$  diperoleh

$$|\rho_2| = \frac{\left(\frac{4l\Delta x^2 - 2c^2l\Delta t^2 - 8c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{4l\Delta x^2 - 2c^2l\Delta t^2 - 8c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t}} - 4\left(\frac{2 - k_d\Delta t}{2 + k_d\Delta t}\right)\right)^2}{2^2} \leq 1$$

$$\left(\sqrt{\frac{\left(\frac{4l\Delta x^2 - 2c^2l\Delta t^2 - 8c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{4l\Delta x^2 - 2c^2l\Delta t^2 - 8c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t}} - 4\left(\frac{2 - k_d\Delta t}{2 + k_d\Delta t}\right)\right)^2}{2^2}}\right)^2 \leq 1^2$$

$$\frac{\left(\frac{4l\Delta x^2 - 2c^2l\Delta t^2 - 8c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{4l\Delta x^2 - 2c^2l\Delta t^2 - 8c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t}} - 4\left(\frac{2 - k_d\Delta t}{2 + k_d\Delta t}\right)\right)^2}{2^2} \leq 1$$

$$\left(\frac{4l\Delta x^2 - 2c^2l\Delta t^2 - 8c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t}\right)^2 - \left(\frac{4l\Delta x^2 - 2c^2l\Delta t^2 - 8c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t}\right)^2 - 4\left(\frac{2 - k_d\Delta t}{2 + k_d\Delta t}\right) \leq 4$$

$$-4\left(\frac{2 - k_d\Delta t}{2 + k_d\Delta t}\right) \leq 4$$

$$-\left(\frac{2 - k_d\Delta t}{2 + k_d\Delta t}\right) \leq 1$$

Untuk  $\cos \alpha = 1$  disubstitusikan ke dalam persamaan (3.7), maka

$|\rho_1|$  diperoleh

$$\begin{aligned}
 |\rho_1| &= \sqrt{\frac{\left(\frac{4l\Delta x^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{4l\Delta x^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t}} - 4\frac{(2-k_d\Delta t)}{(2+k_d\Delta t)}\right)^2}{2^2}} \leq 1 \\
 &\left(\sqrt{\frac{\left(\frac{4l\Delta x^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{4l\Delta x^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t}} - 4\frac{(2-k_d\Delta t)}{(2+k_d\Delta t)}\right)^2}{2^2}}\right)^2 \leq 1^2 \\
 &\frac{\left(\frac{4l\Delta x^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{4l\Delta x^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t}} - 4\frac{(2-k_d\Delta t)}{(2+k_d\Delta t)}\right)^2}{2^2} \leq 1 \\
 &\left(\frac{4l\Delta x^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{4l\Delta x^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t}\right)^2 - 4\frac{(2-k_d\Delta t)}{(2+k_d\Delta t)} \leq 4 \\
 &2\left(\frac{4l\Delta x^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t}\right)^2 - 4\frac{(2-k_d\Delta t)}{(2+k_d\Delta t)} \leq 4 \\
 &\frac{1}{2}\left(\frac{4l\Delta x^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t}\right)^2 - \frac{(2-k_d\Delta t)}{(2+k_d\Delta t)} \leq 1 \\
 &\left(\frac{2l\Delta x^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t}\right)^2 - \frac{(2-k_d\Delta t)}{(2+k_d\Delta t)} \leq 1
 \end{aligned}$$

Dan  $|\rho_2|$  diperoleh

$$\begin{aligned}
 |\rho_2| &= \sqrt{\frac{\left(\frac{4l\Delta x^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{4l\Delta x^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t}} - 4\frac{(2-k_d\Delta t)}{(2+k_d\Delta t)}\right)^2}{2^2}} \leq 1 \\
 &\left(\sqrt{\frac{\left(\frac{4l\Delta x^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{4l\Delta x^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t}} - 4\frac{(2-k_d\Delta t)}{(2+k_d\Delta t)}\right)^2}{2^2}}\right)^2 \leq 1^2
 \end{aligned}$$

$$\frac{\left(\frac{4l\Delta x^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{4l\Delta x^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t}\right)^2 - 4\left(\frac{2-k_d\Delta t}{2+k_d\Delta t}\right)}\right)^2}{2^2} \leq 1$$

$$\left(\frac{4l\Delta x^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t}\right)^2 - \left(\frac{4l\Delta x^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t}\right)^2 - 4\left(\frac{2-k_d\Delta t}{2+k_d\Delta t}\right) \leq 4$$

$$-4\left(\frac{2-k_d\Delta t}{2+k_d\Delta t}\right) \leq 4$$

$$-\left(\frac{2-k_d\Delta t}{2+k_d\Delta t}\right) \leq 1$$

Dari perhitungan di atas pada saat  $\cos \alpha = -1$ ,  $\cos \alpha = 0$ , dan  $\cos \alpha = 1$ ,

diperoleh  $|\rho_1|$

Saat  $\cos \alpha = -1$  diperoleh

$$\left|\left(\frac{2l\Delta x^2 - 2c^2l\Delta t^2 - 8c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t}\right)^2 - \left(\frac{2-k_d\Delta t}{2+k_d\Delta t}\right)\right| \leq 1 \quad (3.8)$$

Saat  $\cos \alpha = 0$  diperoleh

$$\left|\left(\frac{2l\Delta x^2 - c^2l\Delta t^2 - 4c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t}\right)^2 - \left(\frac{2-k_d\Delta t}{2+k_d\Delta t}\right)\right| \leq 1 \quad (3.9)$$

Saat  $\cos \alpha = 1$  diperoleh

$$\left|\left(\frac{2l\Delta x^2}{2l\Delta x^2 + lk_d\Delta x^2\Delta t}\right)^2 - \left(\frac{2-k_d\Delta t}{2+k_d\Delta t}\right)\right| \leq 1$$

$$|-k_d^2\Delta t^2 + 2k_d\Delta t - 2| \leq 0$$

$$(-k_d\Delta t + 1)(k_d\Delta t - 2) \leq 0$$

$$\Delta t \leq \frac{1}{k_d} \quad \text{atau} \quad \Delta t \leq \frac{2}{k_d} \quad (3.10)$$

Dengan nilai  $k_d = 1.5$ , maka nilai  $\Delta t \leq 0.67$  dan  $\Delta t \leq 1.3$ .

Dari perhitungan di atas pada saat  $\cos \alpha = -1$ ,  $\cos \alpha = 0$ , dan  $\cos \alpha = 1$ ,

diperoleh  $|\rho_2|$

$$\left|-\left(\frac{2-k_d\Delta t}{2+k_d\Delta t}\right)\right| \leq 1$$

$$\begin{aligned}
 -2k_d \Delta t &\leq 0 \\
 \Delta t &\leq 0
 \end{aligned}
 \tag{3.11}$$

### 3.3 Solusi Numerik dan Simulasi Grafik

Dengan nilai  $l = 16 \text{ cm}$ ,  $k_d = 1.5$ ,  $c = 1 \text{ m/s}^2$ , disubstitusikan ke persamaan (3.5), maka skema numeriknya adalah

$$\begin{aligned}
 u_j^{n+1} &= \left( \frac{64\Delta x^2 - 32\Delta t^2 - 8\Delta t^2}{32\Delta x^2 + 24\Delta x^2 \Delta t} \right) u_j^n - \left( \frac{2 - 1.5\Delta t}{2 + 1.5\Delta t} \right) u_j^{n-1} + \left( \frac{16\Delta t^2 + 4\Delta t^2}{32\Delta x^2 + 24\Delta x^2 \Delta t} \right) u_{j+1}^n + \\
 &\quad \left( \frac{16\Delta t^2 + 4\Delta t^2}{32\Delta x^2 + 24\Delta x^2 \Delta t} \right) u_{j-1}^n \\
 u_j^{n+1} &= \left( \frac{8\Delta x^2 - 4\Delta t^2 - 1\Delta t^2}{2\Delta x^2 + 3\Delta x^2 \Delta t} \right) u_j^n - \left( \frac{2 - 1.5\Delta t}{2 + 1.5\Delta t} \right) u_j^{n-1} + \left( \frac{4\Delta t^2 + 1\Delta t^2}{8\Delta x^2 + 6\Delta x^2 \Delta t} \right) u_{j+1}^n + \\
 &\quad \left( \frac{4\Delta t^2 + 1\Delta t^2}{8\Delta x^2 + 6\Delta x^2 \Delta t} \right) u_{j-1}^n
 \end{aligned}
 \tag{3.12}$$

Dari skema numerik di atas, dengan  $\Delta x = 4$  dan  $\Delta t = 0.1$  disubstitusikan ke dalam persamaan (3.12), maka:

$$\begin{aligned}
 u_j^{n+1} &= \left( \frac{8(4)^2 - 4(0.1)^2 - 1(0.1)^2}{2(4)^2 + 3(4)^2(0.1)} \right) u_j^n - \left( \frac{2 - 1.5(0.1)}{2 + 1.5(0.1)} \right) u_j^{n-1} + \left( \frac{4(0.1)^2 + 1(0.1)^2}{8(4)^2 + 6(4)^2(0.1)} \right) u_{j+1}^n + \\
 &\quad \left( \frac{4(0.1)^2 + 1(0.1)^2}{8(4)^2 + 6(4)^2(0.1)} \right) u_{j-1}^n \\
 u_j^{n+1} &= (4.7)u_j^n - (0.86)u_j^{n-1} + (0.00036)u_{j+1}^n + (0.00036)u_{j-1}^n
 \end{aligned}$$

Dengan nilai awalnya

1.  $u(x, 0) = f(x) \approx u_j^0$
2.  $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{u_j^1 - u_j^{-1}}{2\Delta t} = 0$   
 $u_j^1 - u_j^{-1} = 0$   
 $u_j^1 = u_j^{-1}$
3.  $u(0, t) = 0 \approx u_0^n$

$$4. u(l, t) = 0 \approx u_{j_{max}}^n$$

Dimana  $x = n$  dan  $t = j$ , maka  $n = 0$

Untuk  $j = 1$

$$u_1^1 \rightarrow u_1^1 = (4.7)u_1^0 - (0.86)u_1^{-1} + (0.00036)u_2^0 + (0.00036)u_0^0$$

$$u_1^1 = (4.7)4 - (0.86)u_1^1 + (0.00036)8 + (0.00036)0$$

$$1.86 u_1^1 = 18.8 + 0.00288$$

$$u_1^1 = \frac{18.80288}{1.86}$$

$$u_1^1 = 10.1$$

Untuk  $j = 2$

$$u_2^1 \rightarrow u_2^1 = (4.7)u_2^0 - (0.86)u_2^{-1} + (0.00036)u_3^0 + (0.00036)u_1^0$$

$$u_2^1 = (4.7)8 - (0.86)u_2^1 + (0.00036)12 + (0.00036)4$$

$$1.86 u_2^1 = 37.6 + 0.00432 + 0.00144$$

$$u_2^1 = \frac{37.60576}{1.86}$$

$$u_2^1 = 20.22$$

Untuk  $j = 3$

$$u_3^1 \rightarrow u_3^1 = (4.7)u_3^0 - (0.86)u_3^{-1} + (0.00036)u_4^0 + (0.00036)u_2^0$$

$$u_3^1 = (4.7)12 - (0.86)u_3^1 + (0.00036)16 + (0.00036)8$$

$$1.86 u_3^1 = 56.4 + 0.00576 + 0.00288$$

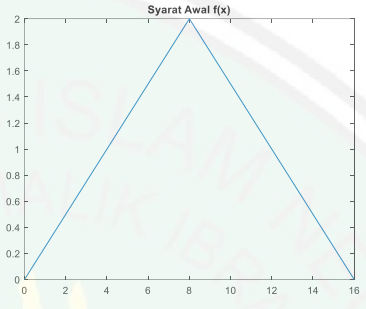
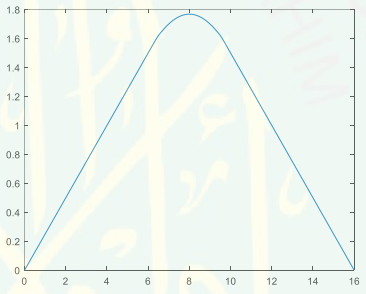
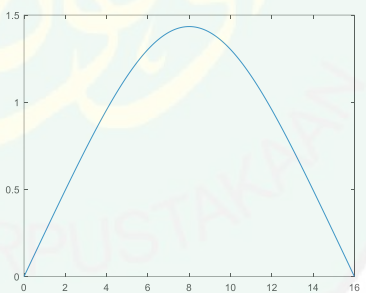
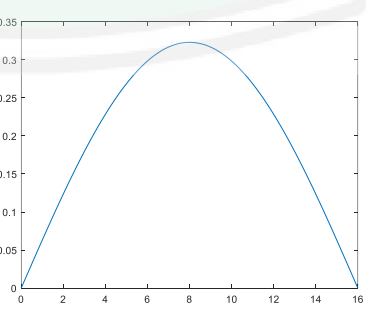
$$u_3^1 = \frac{56.40864}{1.86}$$

$$u_3^1 = 30.32$$

Dari hasil perhitungan di atas, maka solusi  $u(x, t)$  diperoleh  $u(1,1) = 10.1$ ,  $u(1,2) = 20.22$ ,  $u(1,3) = 30.32$  dan seterusnya.

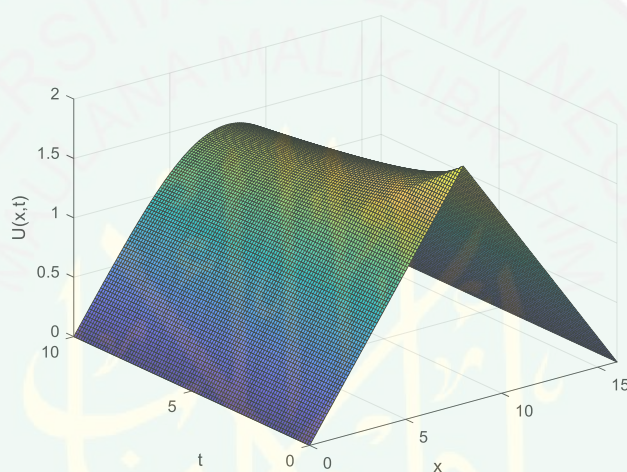
Simulasi grafik dilakukan dengan menggunakan MATLAB R2017b, dengan solusi numerik untuk persamaan (3.12). Diambil  $\Delta t = 0.1$ , sehingga menghasilkan *output* grafik sebagai berikut:

Tabel 3.1 Tabel Grafik 2D Solusi Numerik  
Dawai Sasando dengan  $\Delta t = 0.1$

| $t = n\Delta t$ | Output grafik  |
|-----------------|--|
| $t = 1$         |    |
| $t = 21$        |   |
| $t = 51$        |  |
| $t = 101$       |  |
| $t = \dots$     | ...  |

Tabel 3.1 menunjukkan hasil simulasi grafik untuk persamaan (3.12) dengan  $\Delta t = 0.1$ , menggambarkan pergerakan simpangan dawai Sasando yang berubah terhadap nilai  $t$  dimana  $t = 1,2,3,\dots,n$ . Dari tabel 3.1 diatas terlihat bahwa semakin tinggi nilai  $t$ , dawai Sasando menuju titik setimbang  $(0,0)$ .

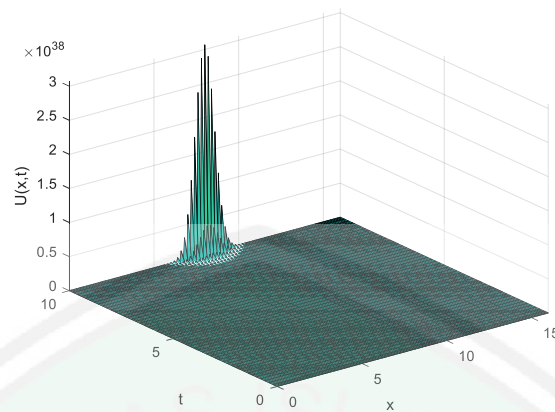
*Output* grafik ketika  $\Delta t = 0.1$  untuk persamaan (3.12) menggunakan Matlab adalah sebagai berikut:



Gambar 3.1 Grafik 3D Solusi Numerik Model Gerak Dawai pada Alat Musik Sasando dengan  $\Delta t = 0.1$

Gambar 3.1 menunjukkan hasil simulasi dari solusi numerik model gerak dawai pada alat musik Sasando ketika  $\Delta t = 0.1$  menggambarkan pergerakan simpangan yang berubah terhadap nilai  $x$  dan  $t$ , dan dari grafik tersebut menunjukkan bahwa hasil grafik stabil dimana pergerakan dawai menuju titik setimbang  $(0,0)$ .

Sedangkan *Output* grafik ketika  $\Delta t = 0.2$  untuk persamaan (3.12) menggunakan Matlab adalah sebagai berikut:



Gambar 3.1 Grafik 3D Solusi Numerik Model Gerak Dawai pada Alat Musik Sasando dengan  $\Delta t = 0.2$

Gambar 3.2 menunjukkan hasil simulasi dari solusi numerik model gerak dawai pada alat musik Sasando ketika  $\Delta t = 0.2$  menggambarkan pergerakan simpangan yang berubah terhadap nilai  $x$  dan  $t$ , dan dari grafik tersebut menunjukkan bahwa hasil tidak stabil.

Dari hasil Tabel 3.1, Gambar 3.1 dan Gambar 3.2, dapat di simpulkan bahwa pergerakan dawai pada alat musik Sasando stabil dengan syarat  $\Delta t \leq 0.1$ . yang berarti semakin tinggi  $t$ , pergerakan dawai Sasando semakin mendekati titik setimbang  $(0,0)$ .

### 3.4 Kajian Keagamaan

Berdasarkan hasil pembahasan di atas, bahwa dalam penyelesaian persamaan model gerak dawai pada alat musik sasando dapat diselesaikan dengan menggunakan metode numerik. Dalam al-Quran dijelaskan bahwa Allah memberikan kemudahan bagi umatnya untk menyelesaikan segala masalah. Dalam hal ini kemudahan sangat dimudahkan dalam menyelesaikan persamaan,

terutama dalam bidang ilmu matematika. Seperti yang tercantum dalam QS. Al-Inshirah ayat 5-6, sebagai berikut:

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا

*Artinya: "...Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan, sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan" (Q.S Al-Inshirah: 5-6)*

Kemudahan dalam ilmu matematika dapat memberikan jalan yang benar untuk penyelesaian persamaan tersebut. Dalam menyelesaikan langkah-langkahnya harus teliti, untuk memperoleh hasil yang tepat dalam perhitungan secara matematis. Adapun kemudahan dalam menyelesaikan permasalahan itu, tidak lepas dari adanya usaha yang telah dilakukan.

Sebagaimana ayat yang menjelaskan mengenai manusia dianjurkan untuk selalu berusaha. Hal ini merupakan perintah Allah yang dijelaskan dalam al-Quran surat Yusuf ayat 87, sebagai berikut:

يَا بَنِي إِدْهَبُوا فَتَحَسَّسُوا مِنْ يُوسُفَ وَأَخِيهِ وَلَا تَيْأَسُوا مِنْ رَوْحِ اللَّهِ إِنَّهُ لَا يَيْأَسُ مِنْ رَوْحِ اللَّهِ إِلَّا الْقَوْمُ الْكَافِرُونَ

*Artinya: "...jangan kamu berputus asa dari rahmat Allah. Sesungguhnya tiada berputus asa dari rahmat Allah, melainkan kaum yang kafir" (Q.S Yusuf:87)*

Ayat di atas menjelaskan mereka yang berputus asa merupakan sifat dari kaum kafir. Dalam hal ini sangat jelas bahwa setiap manusia harus berusaha dalam melakukan sesuatu, karena Allah selalu membrikan kemudahan (rahmat-Nya) pada setiap permasalahan. Sehingga manusia tidak diperkenankan untuk berputus asa, karena berputus asa merupakan sifat dari kaum kafir.

## **BAB IV**

### **PENUTUP**

#### **4.1 Kesimpulan**

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bab sebelumnya, diperoleh kesimpulan bahwa solusi numerik untuk model gerak dawai pada alat musik Sasando dengan metode CTCS adalah stabil dengan syarat  $\Delta t \leq 0.1$ . Yang artinya semakin tinggi nilai  $t$ , pergerakan dawai menuju titik setimbang (0,0).

#### **4.2 Saran**

Dalam penelitian ini, solusi numerik diselesaikan dengan menggunakan metode CTCS. Untuk mendapatkan hasil yang lebih valid disarankan melakukan analisis numerik dengan metode lain dan/atau mencari solusi analitiknya.

## DAFTAR RUJUKAN

- Bryllian, D.N. 2017. *Analisis Konstruksi Model Gerak Dawai pada Alat Musik Sasando*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Kusumastuti, dkk. 2017. *Analisis Konstruksi Model Gerak Dawai pada Alat Musik Sasando*. Artikel tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Purwanto, Agus. 2006. Analisis dan Sintesa Bunyi Dawai pada Gitar Semi-Akustik. *Seminar Nasional MIPA*, (240-246).
- Rochmad, 2014. *Persamaan Diferensial Bagian I*. (Online), (<http://maulana.lecture.ub.ac.id/files/2014/09/persamaandiferensial.pdf>). diakses 11 Januari 2015.
- Strauss, A.W.. 1983. *Partial Differential Equations an Introduction Second Edition*. New York: John Wiley & Sons, Ltd.
- Triatmodjo, B.. 2002. *Metode Numerik Dilengkapi dengan Program Komputer*. Yogyakarta: Beta Offset.
- Zauderer, E.. 2006. *Partial Differential Equations of Applied Mathematics Third Edition*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

## RIWAYAT HIDUP

Aminatus Zuria lahir di Lamongan pada tanggal 26 Maret 1994. Biasa dipanggil Atus. Ia tinggal di Dsn Jati Desa Jatipayak Kec. Modo Kab. Lamongan Jawa Timur. Ia merupakan anak pertama dari bapak Tasmuji dan ibu Niswati Rupiah. Pendidikan dasarnya ditempuh di SDN Jatipayak II dan lulus pada tahun 2006. Sekolah tingkat pertama di MTs Negeri Model Babat dan lulus pada tahun 2009. Sekolah tingkat atas ditempuh di SMA Negeri Ngimbang selama tiga tahun, dan selanjutnya menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang pada tahun 2011.



KEMENTERIAN AGAMA RI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI  
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Aminatus Zuria  
NIM : 11610018  
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika  
Judul Skripsi : Solusi Numerik Model Gerak Dawai pada Alat Musik  
Sasando dengan Metode CTCS  
Pembimbing I : Ari Kusumastuti M.Pd, M.Si  
Pembimbing II : Muhammad Khudzaifah M.Si

| No  | Tanggal          | Hal                         | Tanda Tangan |
|-----|------------------|-----------------------------|--------------|
| 1.  | 23 Februari 2018 | Konsultasi Bab I            | 1.           |
| 2.  | 14 Maret 2018    | Konsultasi Bab II           | 2.           |
| 3.  | 15 Maret 2018    | ACC Bab I & Bab II          | 3.           |
| 4.  | 10 Maret 2018    | Konsultasi Kajian Keagamaan | 4.           |
| 5.  | 13 Maret 2018    | Konsultasi Kajian Keagamaan | 5.           |
| 6.  | 29 Maret 2018    | Konsultasi Bab III          | 6.           |
| 7.  | 02 April 2018    | Konsultasi Bab III          | 7.           |
| 8.  | 04 April 2018    | ACC Bab III                 | 8.           |
| 9.  | 11 April 2018    | Konsultasi Bab IV           | 9.           |
| 10. | 19 April 2018    | Konsultasi Abstrak          | 10.          |
| 11. | 24 April 2018    | ACC Kajian Keagamaan        | 11.          |
| 12. | 26 April 2018    | ACC Bab IV                  | 12.          |
| 13. | 02 Mei 2018      | ACC Keseluruhan             | 13.          |

Malang, 03 Mei 2018  
Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si  
NIP. 19650414 200312 1 001