

**SIMULASI NUMERIK MODEL VIBRASI MASSA YANG BERJALAN DI  
ATAS *STRING* MENGGUNAKAN METODE CTCS**

**SKRIPSI**

**OLEH  
AMITA PRADANA PUTRA  
NIM. 11610012**



**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2018**

**SIMULASI NUMERIK MODEL VIBRASI MASSA YANG BERJALAN DI  
ATAS *STRING* MENGGUNAKAN METODE CTCS**

**SKRIPSI**

**Diajukan Kepada  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam  
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh  
Amita Pradana Putra  
NIM. 11610012**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2018**

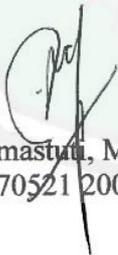
**SIMULASI NUMERIK MODEL VIBRASI MASSA YANG BERJALAN DI  
ATAS *STRING* MENGGUNAKAN METODE CTCS**

**SKRIPSI**

Oleh  
**Amita Pradana Putra**  
**NIM. 11610012**

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji  
Tanggal 03 Mei 2018

Pembimbing I,

  
Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si  
NIP. 19770521 200501 2 004

Pembimbing II,

  
Muhammad Nafi Jauhari, M.Si  
NIP. 19870218 20160801 1 016

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si  
NIP. 19650414 200312 1 001

**SIMULASI NUMERIK MODEL VIBRASI MASSA YANG BERJALAN DI  
ATAS *STRING* MENGGUNAKAN METODE CTCS**

**SKRIPSI**

Oleh  
**Amita Pradana Putra**  
NIM. 11610012

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi  
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan  
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

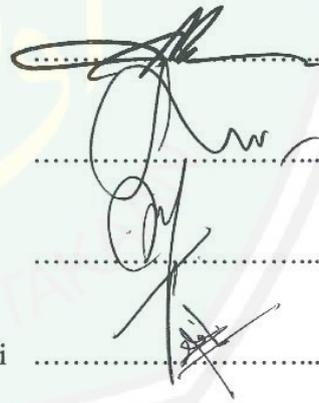
Tanggal 30 Mei 2018

Penguji Utama : Abdul Aziz, M.Si

Ketua Penguji : Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd

Sekretaris Penguji : Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si

Anggota Penguji : Muhammad Nafi' Jauhari, M.Si



Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si  
NIP. 19650414 200312 1 001

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Amita Pradana Putra

NIM : 11610012

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul : Simulasi Numerik Model Vibrasi *Massa* yang Berjalan di Atas  
*String* menggunakan Metode CTCS

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 30 April 2018

Yang membuat pernyataan



Amita pradana Putra

NIM. 11610012

## MOTO

“God is always Good”



## PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Dengan rasa syukur kepada Allah Swt penulis persembahkan skripsi ini kepada:  
Ayahanda Hartono dan Ibunda Siti Julaikah serta adik saya Miranda Permatadani  
Putri yang selalu semangat mendorong penulis untuk menyelesaikan skripsi ini.



## KATA PENGANTAR

*Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh*

Alhamdulillahirobbil 'alamin, segala puji bagi Allah Swt yang telah memberikan rahmat, berkah, dan hidayah-Nya sehingga penulis mampu menyelesaikan skripsi yang berjudul “Simulasi Numerik Model Vibrasi *Massa* yang Berjalan Di Atas *String* menggunakan Metode CTCS” ini dengan baik. Sholawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada Baginda Nabi Muhammad Saw yang telah menunjukkan dan mengubah dari jalan jahiliyah/kegelapan ke jalan yang terang benderang seperti sekarang ini.

Penulis menyadari banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Oleh karena itu, iringan do'a dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan, terutama kepada:

1. Prof Dr. H. Abdul Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
4. Abdul Aziz, M.Si, selaku dosen penguji I yang telah memberikan bimbingan, nasihat dan arahan untuk segera menyelesaikan skripsi ini.
5. Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd, selaku dosen penguji II yang telah memberikan bimbingan, nasihat dan arahan untuk segera menyelesaikan skripsi ini.

6. Ari Kusumastuti M.Pd, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan bimbingan, nasihat dan arahan untuk segera menyelesaikan skripsi ini.
7. Muhammad Nafi Jauhari, M.Si, selaku pembimbing II yang telah memberikan arahan dan bimbingan selama penyusunan skripsi ini.
8. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen yang telah memberikan bimbingan dalam perkuliahan.
9. Kedua orang tua dan seluruh keluarga yang memberikan dukungan berupa motivasi dan do'a sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik.
10. Teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2011 yang telah membantu dalam penyelesaian skripsi ini.
11. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik berupa materil maupun moril.

Akhir kata, semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat dan menambah wawasan keilmuan bagi yang membacanya.

*Wassalamu'alaikum Wr. Wb.*

Malang, 30 April 2018

Penulis

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b>	
<b>HALAMAN PENGAJUAN</b>	
<b>HALAMAN PERSETUJUAN</b>	
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b>	
<b>HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN</b>	
<b>HALAMAN MOTO</b>	
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b>	
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	viii
<b>DAFTAR ISI</b> .....	x
<b>ABSTRAK</b> .....	xii
<b>ABSTRACT</b> .....	xiii
<b>المخلص</b> .....	xiv
<b>BAB I PENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	4
1.3 Tujuan Penelitian .....	5
1.4 Manfaat Penelitian .....	5
1.5 Batasan Masalah .....	5
1.6 Metode Penelitian .....	5
1.7 Sistematika Penulisan .....	6
<b>BAB II KAJIAN PUSTAKA</b>	
2.1 Konstruksi Model Matematika Pada Penelitian Sebelumnya .....	7
2.1.1 Identifikasi Energi Potensial .....	10
2.1.2 Identifikasi Energi Kinetik .....	17
2.1.3 Penurunan Persamaan Lagrangian dengan Pembebanan .....	19
2.1.4 Model Matematika Dawai .....	21
2.2 Metode Beda Hingga .....	21
2.2.1 Skema Eksplisit CTCS .....	23
2.3 Syarat Kestabilan .....	25
2.4 Identifikasi Parameter, Variabel dan Energi pada Dawai .....	27
2.5 Kajian Keagamaan .....	29
<b>BAB III PEMBAHASAN</b>	
3.1 Skema Eksplisit CTCS Model Matematika pada Vibrasi Massa yang Berjalan Di Atas <i>String</i> .....	33

3.2 Analisis Kestabilan .....	38
3.3 Simulasi dan Interpretasi Hasil .....	47
<b>BAB IV PENUTUP</b>	
4.1 Kesimpulan .....	50
4.2 Saran .....	50
<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....	51
<b>LAMPIRAN</b>	



## ABSTRAK

Putra, Amita Pradana. 2018. **Simulasi Numerik Model Vibrasi Massa yang Berjalan di Atas *String* Menggunakan Metode CTCS**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si. (II) Muhammad Nafi Jauhari, M.Si.

**Kata kunci:** analisa konstruksi model, massa yang berjalan, simulasi, vibrasi massa

Penelitian ini membahas tentang simulasi numerik pada model vibrasi massa yang berjalan di atas *string*. Dalam pembahasannya dibutuhkan persamaan pada penelitian sebelumnya yang telah diselesaikan oleh Kusumastuti (2016). Simulasi numerik menggunakan skema CTCS (*Central Time Central Space*). Diberikan simulasi untuk model dawai dua dimensi agar model yang didapat signifikan terhadap masalah nyatanya. Hasilnya adalah model gelombang dawai atau *string* tiga dimensi.

## ABSTRACT

Putra, Amita Pradana. 2018. **Numerical Simulation of Mass Vibration Models Running on *String* Using CTCS Method**. Final project / thesis. Department of Mathematics Faculty of Science and Technology, State Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang. Counselor: (I) Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si. (II) Muhammad Nafi Jauhari, M.Sc.

Keywords: model construction analysis, mass running, simulation, mass vibration

This study discusses the numerical simulation on the mass vibration model that runs on the *string*. In the discussion required equations in previous studies that have been completed by Kusumastuti (2016). Numerical simulation using the CTCS (Central Time Central Space) scheme. The result is a *string* wave model or a three-dimensional *string*. Given a simulation for the two-dimensional *strings* model for the model to be gained significantly against the real problem.

## الملخص

الابن ، امينا برادانا. 2018. محاكاة عددية لنماذج اهتزازات الكتلة التي تعمل على السلسلة باستخدام طريقة CTCS. المشروع النهائي / الأطروحة. قسم الرياضيات كلية العلوم والتكنولوجيا ، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المستشار (I) : آري كوسوماستوتي ، أستاذ التعليم ، (II) محمد نافع جوهرى ، ماجستير.

الكلمات المفتاحية: تحليل البناء النموذجي ، تشغيل الجسيمات ، المحاكاة ، الاهتزاز الجماعي

تناقش هذه الدراسة المحاكاة الرقمية على نموذج الاهتزاز الجماعي الذي يعمل على السلسلة. في مناقشة المعادلات المطلوبة في الدراسات السابقة التي تم الانتهاء منها بواسطة كوسوماستوتي (2016) المحاكاة العددية باستخدام مخطط CTCS سنترال تايم سنترال فضاء. (والنتيجة هي نموذج موجة سلسلة أو سلسلة ثلاثية الأبعاد. وبالنظر إلى محاكاة نموذج السلاسل ثنائية الأبعاد لنموذج يمكن اكتسابه بشكل ملحوظ ضد المشكلة الحقيقية.

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Masalah vibrasi massa yang dikenai pembebanan dan menimbulkan banyak gaya dapat dijadikan penelitian bahkan dimanfaatkan. Seperti saat terjadi peregangan *string*, muncul energi-energi yang nantinya akan dapat kita kontrol untuk kebutuhan penelitian kita. Ada energi potensial berat ( $E_{p_{Berat}}$ ), energi potensial gesek ( $E_{p_{Gesek}}$ ), energi potensial pegas ( $E_{p_{Pegas}}$ ), dan energi potensial tegangan dawai ( $E_{p_{Tegangan}}$ ), yang merupakan kemungkinan dari *string* yang mengalami peregangan tadi. Seperti penelitian yang dilakukan oleh Kusumastuti (2016), yaitu masalah vibrasi massa yang berjalan di atas *string*. Di sini membahas bagaimana energi-energi itu mempengaruhi model penelitiannya. Dalam penelitian tersebut, diketahui panjang dawai ( $l$ ) yang menjadi jarak antara dua buah ujung dawai, lalu massa dawai ( $m$ ) dimana saya menyebutnya *string* dan saya definisikan sebagai perkalian antara massa jenis ( $\rho$ ) dan satuan panjang dawai ( $l$ ). Kaidah konstruksi model matematika mempertimbangkan eksistensi hukum pertama, kedua dan ketiga Newton. Lalu ada *massa*, yang disebut  $m_{benda}$  yaitu benda yang berjalan di atas *string*. Selanjutnya ada modulus elastisitas dawai ( $E$ ), menyatakan *string* yang mengalami kelenturan. Di dalam modulus elastisitas dawai tersebut juga terdapat konstanta-konstanta yang berpengaruh terhadap dawai seperti konstanta pegas ( $k_p$ ) dan konstanta bentuk dawai ( $k_b$ ). Selanjutnya dipengaruhi juga oleh udara, yang memiliki koefisien viskositas ( $n$ ).

Penelitian ini merupakan penelitian lanjutan terhadap penelitian sebelumnya oleh Kusumastuti (2016). Penelitian ini menggunakan kaidah numerik

dengan skema CTCS. Menurut Triatmojo (2002), metode beda hingga skema eksplisit banyak digunakan dalam penyelesaian persamaan differensial parsial. Skema ini sangat mudah untuk memahaminya. Penggunaan skema ini untuk menurunkan persamaan differensial parsial menjadi persamaan beda hingga juga mudah. Skema CTCS merupakan pendekatan numerik dengan beda pusat terhadap waktu dan beda pusat terhadap ruang.

Landasan agama untuk melakukan penelitian tentang vibrasi ini didasarkan pada firman Allah surat al-Imran/3:190-191 sebagai berikut.

إِنَّ فِي خَلْقِ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَاخْتِلَافِ اللَّيْلِ وَالنَّهَارِ لَآيَاتٍ لِّأُولِي الْأَلْبَابِ  
 ١٩٠ الَّذِينَ يَذْكُرُونَ اللَّهَ قِيَامًا وَقُعُودًا وَعَلَىٰ جُنُوبِهِمْ وَيَتَفَكَّرُونَ فِي خَلْقِ  
 السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ رَبَّنَا مَا خَلَقْتَ هَٰذَا بَاطِلًا سُبْحَانَكَ فَقِنَا عَذَابَ النَّارِ ١٩١

*“Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, dan silih bergantinya malam dan siang terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal, (yaitu) orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri atau duduk atau dalam keadaan berbaring dan mereka memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya berkata): Ya Tuhan kami, tiadalah Engkau menciptakan ini dengan sia-sia, Maha Suci Engkau, maka peliharalah kami dari siksa neraka” (QS. al-Imran/3:190-191).*

Dalam penciptaan langit dan bumi maupun alam semesta ini ternyata memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta beserta segala isinya diciptakan oleh Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdussakir, 2007:79). Begitu juga dengan vibrasi dawai yang tercipta memiliki persamaan atau model matematika. Landasan agama bahwa vibrasi dawai memiliki model matematika didasarkan pada firman Allah surat al-Furqan/25:2 sebagai berikut.

أَلَدِي لَهُ مُلْكُ السَّمٰوٰتِ وَالْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُن لَّهُ شَرِيكٌ فِي الْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَرَهُ تَقْدِيرًا ۚ

*“Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan Dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu bagi-Nya dalam kekuasaan(Nya), dan Dia telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya” (QS. al Furqan/25:2).*

Secara umum pengertian dari model matematika adalah persamaan matematika atau suatu usaha untuk menciptakan replika dari fenomena alam (Abdussakir, 2007:79). Model matematika terbentuk dengan terlebih dahulu mengidentifikasi permasalahan yang diteliti, menterjemahkan ke dalam bahasa matematika dan menentukan variabel apa saja yang terlibat yang menggambarkan fenomena yang terjadi. Setelah itu, merumuskan asumsi-asumsi yang rasional yang bisa menyederhanakan permasalahan. Kemudian model yang dikonstruksi selalu dalam bentuk persamaan diferensial yang memodelkan fenomena perubahan suatu objek yang terjadi dan membuat simulasi dari model yang telah dikonstruksi. Oleh karena itu, penyelesaian konstruksi model matematika memerlukan teknik-teknik atau metode-metode penyelesaian persamaan diferensial matematika, misalnya dengan mengintegalkannya atau menurunkannya. Setelah model terbentuk maka ia harus diinterpretasikan kembali ke masalah nyatanya (Kartono, 2012:9). Begitu juga dengan model vibrasi dawai yang harus ditelusuri agar hasil dari simulasinya dapat diinterpretasikan kembali ke masalah nyatanya.

Dalam numerik banyak metode yang bisa digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial maupun sistem persamaan differensial. Sistem persamaan differensial merupakan persamaan yang terdiri dari dua atau lebih fungsi. Sistem persamaan differensial non linear dengan dua fungsi tak diketahui (Hariyanto,1992:194), dimana  $f$  dan  $g$  mempunyai turunan parsial yang kontinu

untuk semua  $y, x$ , untuk mencari solusi eksak dari sistem persamaan differensial non linear sangat tidak mungkin sehingga diperlukan metode numerik untuk menyelesaikannya.

Pada penelitian sebelumnya yang dilakukan oleh Kusumastuti (2016) belum dikaji uji validasi model. Pada penelitian ini, model yang dikonstruksi akan dibandingkan dengan model McKenna (1999). Jika profil grafik gelombang yang dihasilkan dari uji perbandingan ini dianggap ekivalen, maka model dianggap cukup valid. Jika sebaliknya, maka tahap ini harus menguji kembali *reliability* model. Kedua proses ini yakni uji *reliability* dan uji *validity* model dilakukan terus menerus sampai diperoleh model yang mendekati kondisi riilnya. Pelaksanaan kedua uji tersebut tetap dengan mempertimbangkan (1) kelengkapan gaya-gaya, (2) kelengkapan asumsi yang harus dipertimbangkan dan (3) kelengkapan hukum-hukum fisika yang harus digunakan yang relevan dengan permasalahan. Uji ini akan menyempurnakan model matematika sehingga lebih kontekstual dan mendekati kondisi sesungguhnya.

Oleh karena itu penulis mengangkat tema penelitian ini dengan judul Pemanfaatan Metode numerik untuk Simulasi Vibrasi *Massa* yang Berjalan di Atas *String*.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana simulasi numerik dengan skema eksplisit CTCS model vibrasi *massa* yang berjalan di atas *string*?

### 1.3 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis simulasi numerik dengan skema CTCS model matematika vibrasi *massa* yang berjalan di atas *string*.

### 1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini yaitu agar hasil yang diperoleh dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan terkait dengan teknologi dawai dan sebagai kajian teori yang dapat dikembangkan untuk penelitian lebih lanjut.

### 1.5 Batasan Masalah

Adapun ruang lingkup yang dikaji dalam penelitian ini, adalah vibrasi *massa* yang berjalan di atas *string* pada model Kusumastuti (2016) menggunakan skema eksplisit CTCS.

### 1.6 Metode Penelitian

Metode dalam penelitian ini, menggunakan pendekatan penelitian kepustakaan (*library research*). Adapun langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini yaitu:

1. Diskritisasi model dengan skema eksplisit CTCS.
2. Analisis Kestabilan.
3. Simulasi dengan langkah-langkah :
  - a. Simulasi I adalah simulasi model dengan substitusi syarat kestabilan model
  - b. Simulasi II adalah simulasi dengan melakukan perubahan nilai awal dan parameter.

## 1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan ini digunakan untuk mempermudah dalam memahami dan menyusun laporan penelitian. Adapun sistematika penulisan dalam penelitian ini yaitu:

### BAB I Pendahuluan

Pada bab ini, dijelaskan tentang latar belakang penelitian dan topik yang diteliti, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat dari permasalahan yang akan diteliti, ruang lingkup atau batasan masalah yang diteliti, serta metode penelitian dan sistematika penulisan.

### BAB II Kajian Pustaka

Bab ini menjelaskan tentang gambaran umum dari teori yang mendasari pembahasan.

### BAB III Pembahasan

Pada bab ini dijelaskan langkah-langkah yang digunakan untuk mensimulasikan vibrasi massa yang berjalan di atas *string* dengan skema eksplisit CTCS.

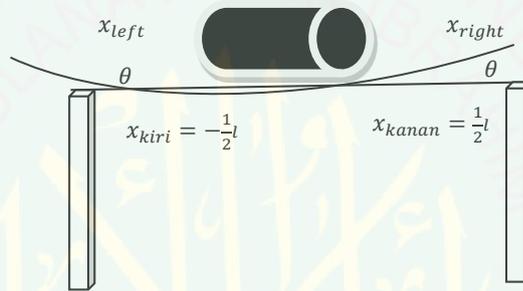
### BAB IV Penutup

Pada bab ini dijelaskan intisari dari hasil penelitian yang berupa kesimpulan dari pembahasan hasil penelitian dengan dilengkapi dengan saran-saran yang berkaitan dengan penelitian ini.

## BAB II KAJIAN PUSTAKA

### 2.1 Konstruksi Model Matematika pada Penelitian Sebelumnya

Pada subbab ini dijelaskan kembali model Kusumastuti (2016). Pembebanan pada dawai menimbulkan adanya peregangan dawai yang besar peregangan ( $e$ ). Ketika dawai dengan panjang  $l$  dikenai benda bermassa  $m$  pada posisi  $\frac{1}{2}l$  dari panjang dawai  $l$ , terjadi peregangan ( $e$ ) pada dawai seperti pada Gambar 4.1 berikut yang dimaksud dalam penelitian Kusumastuti (2016):



**Gambar 2.1** Peregangan kiri dan kanan dawai akibat massa di atasnya

Dari Gambar 2.1, terlihat peregangan terjadi di sisi kiri dan di sisi kanan dawai. Peregangan di sisi kiri dawai menyebabkan pertambahan panjang dawai mula-mula sepanjang  $x_{kiri} = -\frac{1}{2}l$  menjadi  $x_{left}$ . Sedangkan peregangan di sisi kanan dawai menyebabkan pertambahan panjang dawai mula-mula sepanjang  $x_{kanan} = \frac{1}{2}l$  menjadi  $x_{right}$ .

Selain terjadi peregangan, pada dawai yang dikenai beban juga terbentuk simpangan sebesar  $u$  yang bergantung pada keadaan  $x$  dan waktu  $t$ . Tahap pertama menghitung besar simpangan  $u$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 u &= x_{kiri} \tan \theta \\
 &= -\frac{1}{2}l \tan \theta
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

dan jika ditinjau dari sisi kanan dawai adalah

$$\begin{aligned} u &= x_{kanan} \tan \theta \\ &= \frac{1}{2} l \tan \theta \end{aligned} \quad (2.2)$$

Nilai  $\tan \theta$  mendeskripsikan kemiringan dawai yang didefinisikan sebagai  $\frac{\partial u}{\partial x}$ .

Sehingga besar simpangan  $u$  yang ditinjau dari sisi kiri dawai pada persamaan (2.1)

menjadi:

$$u = -\frac{1}{2} l \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (2.3)$$

dan dari sisi kanan dawai pada persamaan (2.2) menjadi:

$$u = \frac{1}{2} l \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (2.4)$$

Tahap kedua adalah menentukan panjang peregangan yang terjadi di sisi kiri dawai dan sisi kanan dawai secara berturut-turut sebagai  $x_{left}$  dan  $x_{right}$ . Panjang  $x_{left}$  dapat dihitung sebagai berikut:

$$x_{left} = \sqrt{u^2 + (x_{kiri})^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{2} l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} l\right)^2} = \frac{1}{2} l \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} \quad (2.5)$$

Dengan panjang  $x_{left}$  yang diperoleh, maka dapat diketahui pertambahan panjang dari sisi kiri dawai. Besar pertambahan panjang di sisi kiri dawai yang disimbolkan dengan  $x^-$  merupakan selisih antara  $x_{left}$  dengan  $x_{kiri}$ , yakni

$$x^- = x_{left} - x_{kiri} \quad (2.6)$$

dengan menggunakan persamaan (2.5) maka persamaan (2.6) dapat dituliskan menjadi:

$$x^- = \frac{1}{2} l \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} - \left(-\frac{1}{2} l\right) = \frac{1}{2} l \left( \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} + 1 \right) \quad (2.7)$$

Secara analog ditentukan panjang  $x_{right}$  sebagai akibat dari peregangan yang terjadi di sisi kanan dawai sebagai berikut:

$$x_{right} = \sqrt{u^2 + (x_{kanan})^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}l\right)^2} = \frac{1}{2}l \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} \quad (2.8)$$

Selanjutnya dapat ditentukan pertambahan panjang di sisi kanan dawai. Besar pertambahan panjang di sisi kanan dawai yang disimbolkan dengan  $x^+$  merupakan selisih antara  $x_{right}$  dengan  $x_{kanan}$ , yakni:

$$x^+ = x_{right} - x_{kanan} \quad (2.9)$$

$$x^+ = \frac{1}{2}l \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} - \left(\frac{1}{2}L\right) = \frac{1}{2}l \left( \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} - 1 \right) \quad (2.10)$$

Dengan nilai  $x^-$  dan  $x^+$  yang diperoleh pada persaaan (2.7) dan (2.10), dapat ditentukan besar peregangan ( $e$ ) yang terjadi pada dawai dengan benda bermassa  $m$  yang menggeling di atasnya. Besar regangan ( $e$ ) berdasarkan konsep elastisitas, didefinisikan sebagai:

$$e = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (2.11)$$

Dengan  $\Delta l$  adalah pertambahan panjang dawai. Hal ini berarti  $\Delta l$  dapat diartikan sebagai pertambahan panjang di sisi kiri  $x^-$  dan pertambahan panjang dawai di sisi kanan  $x^+$ . Sementara  $l_0$  adalah panjang mula-mula dari dawai. Maka dapat dipahami bahwa  $l_0$  adalah panjang mula-mula dawai di sisi kanan  $x_{kanan}$  dan panjang mula-mula di sisi kiri dawai dan  $x_{kiri}$ . Dengan demikian, besar peregangan yang terjadi di sisi kiri dawai ( $e^-$ ) dapat diperoleh sebagai berikut:

$$e^- = \frac{x^-}{x_{kiri}} = \frac{\frac{1}{2}l \left( \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} + 1 \right)}{-\frac{1}{2}l} = - \left( \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} + 1 \right) \quad (2.12)$$

Secara analog besar peregangan yang terjadi di sisi kanan dawai ( $e^+$ ) adalah:

$$e^+ = \frac{x^+}{x_i^+} = \frac{\frac{1}{2}l \left( \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} - 1 \right)}{\frac{1}{2}l} = \left( \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} - 1 \right) \quad (2.13)$$

### 2.1.1 Identifikasi energi potensial ( $Ep$ )

Pada dawai diidentifikasi energi-energi potensial yang meliputi (1) energi potensial berat ( $Ep_{berat}$ ), (2) energi potensial gesek ( $Ep_{gesek}$ ), (3) energi potensial pegas ( $Ep_{pegas}$ ), dan (4) energi potensial tegangan dawai ( $Ep_{tegangan}$ ). Selanjutnya energi potensial ( $Ep$ ) pada dawai merupakan jumlahan dari keseluruhan energi potensial yang mungkin, yakni:

$$EP = (Ep_{berat}) + (Ep_{gesek}) + (Ep_{tegangan}) + (Ep_{pegas}) \quad (2.14)$$

#### a. Energi Potensial Berat

Ketika dawai bermassa  $m_{dawai}$  dikenai benda bermassa  $m_{benda}$ , maka pasti terjadi gaya berat  $F(y)$ . Pada kasus ini diperhitungkan pengaruh gaya gravitasi, sehingga

$$F(y) = (m_{dawai} + m_{benda})g = m_{total}g \quad (2.15)$$

Akibatnya berlaku energi potensial berat ( $Ep_{berat}$ ). Energi potensial berat ini terjadi karena perpindahan energi secara vertikal dari posisi kesetimbangan. Perpindahan ini disebut juga sebagai perubahan energi potensial  $\Delta Ep_{berat}$ , yakni:

$$\Delta Ep_{berat} = - \int_{y_0}^{y_1} F(y)dy = - \int_{y_0}^{y_1} m_{total}gdy = -m_{total}g(y_1 - y_0) \quad (2.16)$$

Dalam hal ini

$$\Delta Ep_{berat} = Ep_{berat} - Ep_{berat \text{ di titik acuan}} \quad (2.17)$$

Pada titik acuan  $y_0 = 0$  berlaku  $Ep_{berat\ di\ titik\ acuan} = 0$ . Dari kenyataan ini maka persamaan (2.16) bersama dengan persamaan (2.17) dengan dapat dinyatakan sebagai:

$$Ep_{berat} = -m_{total}gy_1 = -m_{total}gy \quad (2.18)$$

### b. Energi Potensial Gesek

Analisis energi potensial gesek ( $Ep_{Gesek}$ ) terjadi karena (1) gaya gesek kinetis antara permukaan benda dengan permukaan dawai, (2) gaya gesek kinetis antara benda dengan fluida (udara), dan (3) gaya gesek kinetis antara dawai dengan fluida.

Gaya gesek kinetis antara permukaan benda dengan permukaan dawai dinyatakan sebagai:

$$F_{k_1} = \mu_k N \quad (2.19)$$

Pada persamaan (2.19)  $\mu_k$  adalah koefisien gesek kinetis yang menyebabkan perlambatan (*drag force*) dan  $N$  gaya normal.

Gaya gesek kinetis antara benda dengan fluida (udara) dan dawai dengan fluida (udara) didasarkan pada hukum *Stokes* yaitu:

$$F_{k_2} = k_{benda}\eta\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + k_{dawai}\eta\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) \quad (2.20)$$

Pada persamaan (2.20)  $k_{benda}$  adalah konstanta yang mewakili bentuk benda. Dalam penelitian ini benda berbentuk bola pejal, sehingga  $k_{benda} = 6\pi r^3$ . Sedangkan  $\eta$  adalah koefisien kekentalan fluida (udara) dan  $k_{dawai}$  konstanta yang menyatakan bentuk dawai.

Sebelum dawai dikenai beban maka belum terjadi osilasi pada dawai, sehingga besar simpangan yang terbentuk pada posisi setimbang adalah sebesar nol, yakni  $u_{setimbang} = 0$  sehingga besar energi potensial gesek yang terjadi sebelum

dawai beresilasi adalah sebesar nol, yakni  $Ep_{gesek\ setimbang} = 0$ . Selanjutnya  $Ep_{Gesek}$  antara dawai dan udara terjadi secara vertikal di sepanjang kurva  $u$ .

Setelah menganalisis beberapa *point* penting di atas, langkah selanjutnya adalah menentukan  $Ep_{Gesek}$  pada dawai. Perhitungan  $Ep_{Gesek}$  sebagai berikut

$$\Delta Ep_{Gesek} = - \int_{u_{setimbang}}^{u_{setelah\ pembebanan}} F_{gesek}(u) d(u)$$

$$Ep_{Gesek} - Ep_{Gesek\ setimbang} = - \int_0^u k_{benda} \eta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) + k_{dawai} \eta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) d(u)$$

Untuk  $Ep_{gesek\ setimbang} = 0$  maka persamaan di atas dapat dituliskan sebagai berikut:

$$Ep_{Gesek} - 0 = -k_{benda} \eta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) [u]_0^u - k_{dawai} \eta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) [u]_0^u$$

$$Ep_{Gesek} = -k_{benda} \eta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) [u - 0] - k_{dawai} \eta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) [u - 0]$$

Diperoleh hasil:

$$Ep_{Gesek} = -k_b \eta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) u - k_{dawai} \eta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) u \quad (2.21)$$

### c. Energi Potensial Tegangan Dawai

Ketika benda bermassa  $m$  berada di tengah dawai, maka terjadi gaya tegangan di kedua sisi dawai. Analisis gaya tegangan dawai dikerjakan pada sisi kiri dan sisi kanan. Tegangan dawai dinyatakan sebagai  $\sigma$  dan didefinisikan sebagai:

$$\sigma = eE \quad (2.22)$$

Dalam hal ini  $e$  adalah regangan dawai dan  $E$  adalah modulus elastisitas dawai. Regangan dawai pada sisi kiri dan sisi kanan berdasarkan persamaan (2.12) dan persamaan (2.13) yakni

$$e^- = -\left(\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} + 1\right) \quad \text{dan} \quad e^+ = \left(\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} - 1\right)$$

maka dapat dihitung gaya tegangan di sisi kiri  $F_{tegangangan\ kiri}$  dan di sisi kanan  $F_{tegangangan\ kanan}$  sebagai berikut:

$$F_{tegangangan\ kiri} = e^- EA \quad (2.23)$$

Maka persamaan (2.23) dapat dinyatakan kembali berikut:

$$F_{tegangangan\ kiri} = -\left(\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} + 1\right) EA \quad (2.24)$$

Gaya tegangan kanan dapat dihitung dengan formula:

$$F_{tegangangan\ kanan} = e^+ EA \quad (2.25)$$

$$= \left(\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} - 1\right) EA \quad (2.26)$$

Tahap selanjutnya menentukan energi potensial di sisi kiri dan di sisi kanan berturut-turut sebagai  $\Delta E p_{tegangangan\ kiri}$  dan  $\Delta E p_{tegangangan\ kanan}$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \Delta E p_{tegangangan\ kiri} &= - \int_{x_0}^{x_{kiri}} F_{tegangangan\ kiri} dx \\ &= - \int_{x_0}^{x_{kiri}} -\left(\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} + 1\right) EA dx \end{aligned}$$

Diperoleh:  $\Delta E p_{tegangangan\ kiri} = e^- EA(x_{kiri} - x_0)$  dengan titik acuan  $x_0 = 0$ , maka dapat dinyatakan  $E p_{tegangangan\ kiri} = e^- EA x_{kiri} = e^- EA x$  (2.27)

Dan energi potensial tegangan kanan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \Delta E p_{tegangangan\ kanan} &= - \int_{x_0}^{x_{kanan}} F_{tegangangan\ kanan} dx \\ &= - \int_{x_0}^{x_{kanan}} \left(\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} - 1\right) EA dx \end{aligned}$$

Diperoleh  $\Delta E p_{tegangangan\ kanan} = -e^+ EA(x_{kanan} - x_0)$  dengan titik acuan  $x_0 = 0$ , maka dapat dinyatakan

$$E p_{tegangangan\ kanan} = e^+ EA x_{kanan} = e^+ EA x \quad (2.28)$$

Sehingga diperoleh energi potensial tegangan total sebagai berikut:

$$\begin{aligned} E p_{tegangangan\ total} &= E p_{tegangangan\ kiri} + E p_{tegangangan\ kanan} \\ &= e^- EA x + e^+ EA x \end{aligned} \quad (2.30)$$

#### d. Energi Potensial Pegas ( $E p_{pegas}$ )

Analisis energi potensial pegas  $E p_{pegas}$  terjadi akibat adanya gaya pegas ( $F_{pegas}$ ) yang bekerja pada dawai ketika dikenai pembebanan ke bawah. Perubahan energi potensial pegas ( $\Delta E p_{pegas}$ ) sendiri merupakan minus integral dari  $F_{pegas}$  yang didefinisikan mengikuti hukum *Hooke*, yaitu:

$$F_{pegas} = -k_p x \quad (2.31)$$

Dengan  $k_p$  adalah konstanta pegas dan  $x$  adalah pertambahan panjang dawai. Pertambahan panjang dawai di sebelah kiri  $x^-$  dan kanan  $x^+$ . Dalam hal ini nilai  $x^-$  dan kanan  $x^+$  dapat dilihat pada persamaan (2.7) dan persamaan (2.10), yakni:

$$x^- = \frac{1}{2} l \left( \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} + 1 \right) \quad \text{dan} \quad x^+ = \frac{1}{2} l \left( \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} - 1 \right)$$

Sebelum dawai dikenai pembebanan, dawai dalam posisi kesetimbangan. Dawai belum mengalami pertambahan panjang baik di sisi kiri maupun di sisi kanan dawai. Hal ini berarti pada posisi kesetimbangan berlaku :

$$x_{setimbang}^- = 0 \quad \text{dan} \quad x_{setimbang}^+ = 0$$

Besar energi potensial pegas dawai pada posisi setimbang adalah:

$$E p_{pegas\ kiri\ setimbang} = 0 \quad \text{dan} \quad E p_{pegas\ kanan\ setimbang} = 0.$$

Selanjutnya menentukan perubahan energi potensial pegas di sisi kiri benda bermassa, yakni:

$$\Delta E_{p_{Pegas\ kiri}} = - \int_{x_{setimbang}^-}^{x_{setelah\ pembebanan}^-} F_{Pegas}(x^-) d(x^-)$$

$$E_{p_{Pegas\ kiri}} - E_{p_{Pegas\ kiri\ setimbang}} = - \int_0^{\frac{1}{2}l \left( \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} + 1 \right)} -k_p x^- d(x^-)$$

Persamaan di atas dapat dituliskan kembali sebagai berikut:

$$E_{p_{Pegas\ kiri}} - (0) = \left[ \frac{1}{2} k_p (x^-)^2 \right]_0^{\frac{1}{2}l \left( \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} + 1 \right)}$$

Selanjutnya dapat dinyatakan menjadi:

$$E_{p_{Pegas\ kiri}} - (0) = \frac{1}{2} k \left[ \left( \frac{1}{2} l \left( \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} + 1 \right) \right)^2 - (0)^2 \right]$$

yang secara sederhana dapat dinyatakan sebagai:

$$E_{p_{Pegas\ kiri}} = \frac{1}{2} k_p \left( \frac{1}{2} l \left( \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} + 1 \right) \right)^2 \quad (2.32)$$

Selanjutnya menentukan  $E_{p_{Pegas\ kanan}}$ . Perubahan energi potensial pegas di sisi kanan dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\Delta E_{p_{Pegas\ kanan}} = - \int_{x_{setimbang}^+}^{x_{setelah\ pembebanan}^+} F_{Pegas}(x^+) d(x^+)$$

$$E_{p_{Pegas\ kanan}} - E_{p_{Pegas\ kanan\ setimbang}} = - \int_0^{\frac{1}{2}l \left( \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} - 1 \right)} -k_p x^+ d(x^+)$$

Persamaan di atas dapat dinyatakan sebagai:

$$E_{p_{Pegas\ kanan}} - 0 = \left[ \frac{1}{2} k_p (x^+)^2 \right]_0^{\frac{1}{2}l \left( \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} - 1 \right)}$$

$$E_{p_{Pegas\ kanan}} = \frac{1}{2} k_p \left[ \left( \frac{1}{2} l \left( \sqrt{\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1} - 1 \right) \right)^2 - (0)^2 \right]$$

dan dapat disederhanakan menjadi:

$$E_{p_{Pegas\ kanan}} = \frac{1}{2} k_p \left( \frac{1}{2} l \left( \sqrt{\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1} - 1 \right) \right)^2 \quad (2.33)$$

Selanjutnya dapat dihitung energi potensial pegas total sebagai berikut:

$$\begin{aligned} E_{p_{Pegas\ total}} &= E_{p_{Pegas\ kiri}} + E_{p_{Pegas\ kanan}} \\ &= \frac{1}{2} k_p \left( \frac{1}{2} l \left( \sqrt{\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1} + 1 \right) \right)^2 + \frac{1}{2} k_p \left( \frac{1}{2} l \left( \sqrt{\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1} - 1 \right) \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} k_p \left( \frac{1}{4} l^2 \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1 + 2 \sqrt{\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1} + 1 \right) + \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{1}{4} l^2 \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1 - 2 \sqrt{\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1} + 1 \right) \right) \right) \\ &= \frac{1}{8} k_p l^2 \left( \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \sqrt{\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1} + 2 \right) + \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - 2 \sqrt{\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1} + 2 \right) \right) \\ &= \frac{1}{8} k_p l^2 \left( 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 4 \right) \\ &= \frac{1}{4} k_p l^2 \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \right) \quad (2.34) \end{aligned}$$

Selanjutnya energi potensial model ( $E_{P_{Model}}$ ) merupakan jumlahan seluruh energi potensial yang terjadi saat dawai dikenai benda bermassa  $m$  yakni:

$$\begin{aligned} E_{P_{Model}} &= E_{p_{berat}} + E_{p_{Gesek}} + E_{p_{tegangan\ total}} + E_{P_{Pegas}} \\ &= (-m_{total} g y) + \left( -k_b \eta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) u - k_{dawai} \eta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) u \right) + \end{aligned}$$

$$(e^{-EAx} + e^{+EAx}) + \frac{1}{4}k_p l^2 \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \right) \quad (2.35)$$

### 2.1.2 Identifikasi Energi Kinetik

Setelah mengidentifikasi seluruh energi potensial yang terjadi, langkah selanjutnya adalah mengidentifikasi energi kinetik yang terjadi pada dawai. Pada masalah ini dawai dikenai beban bermassa  $m$  yang menggeling di atasnya. Hal ini menyebabkan terjadi energi kinetik pada dawai akibat gerak benda di atasnya. Energi kinetik didefinisikan sebagai

$$Ek = \frac{1}{2}m \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \quad (2.36)$$

Dengan  $m$  adalah massa dawai dan  $\left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)$  adalah kecepatan dawai berosilasi. Diasumsikan luas penampang dawai sangatlah kecil sehingga volume dawai sebanding dengan panjang dawai itu sendiri, akibatnya massa jenis linier dawai ( $\rho$ ) didefinisikan sebagai massa per satuan panjang dawai ( $l$ ). Dari sini massa dawai dapat didefinisikan sebagai perkalian antara massa jenis linier dawai ( $\rho$ ) dan satuan panjang dawai ( $l$ ), yaitu:

$$m = \rho l$$

Sehingga energi kinetik yang terjadi disepanjang dawai adalah:

$$Ek_M = \frac{1}{2}\rho l \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \quad (2.37)$$

Energi kinetik di atas merupakan energi kinetik total model yang terjadi di sepanjang dawai dengan benda bermassa  $m$  yang menggeling di atasnya. Setelah mendapatkan energi potensial model dan energi kinetik model, langkah selanjutnya adalah menentukan persamaan *Lagrangian*. Persamaan *Lagrangian* didefinisikan

sebagai selisih antara energi kinetik model ( $Ek_{Model}$ ) dan energi potensial model ( $Ep_{Model}$ ), atau dapat dituliskan sebagai berikut:

$$L = Ek_{Model} - Ep_{Model} \quad (2.38)$$

Berdasarkan persamaan (2.38), maka dapat dihitung persamaan *Lagrangian* model dengan memperhatikan eksistensi persamaan (2.38) dan persamaan (2.35), yakni:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\rho l \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \left( (-m_{total}gy) + \left( -k_b\eta \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)u - k_{dawai}\eta \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)u \right) \right) \\ &\quad + (e^-EAx + e^+EAx) + \frac{1}{4}k_p l^2 \left( \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2 \right) \\ &= \frac{1}{2}\rho l \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \left( \frac{1}{4}k_p l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}kl^2 - k_b\eta \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)u + lE \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} \right) \end{aligned} \quad (2.39)$$

### 2.1.3 Penurunan Persamaan Lagrangian dan Model Dawai dengan Pembebanan

Formula *Lagrangian* sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)} \right) = \frac{\partial L}{\partial u} \quad (2.40)$$

Berdasarkan persamaan persamaan (2.40) di atas, maka dapat dihitung nilai  $\frac{\partial L}{\partial u}$  dari persamaan (2.39) yakni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial u} &= \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{2}\rho l \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \left( \frac{1}{4}k_p l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}kl^2 - k_b\eta \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)u + lE \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} \right) \right) \\ &= -k_b\eta \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) \end{aligned} \quad (2.41)$$

Pada persamaan (2.39) suku yang memuat variabel  $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$  adalah  $\frac{1}{4}k_p l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$  dan  $lE\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1}$ . Berdasarkan asumsi bahwa simpangan yang terjadi akibat pembebanan pada dawai harusnya sangat kecil, sehingga kemiringan yang dinotasikan dengan  $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$  juga sangatlah kecil yakni  $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \ll 1$ . Dengan demikian, berdasarkan ekspansi deret Taylor nilai  $\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} \approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ , sehingga suku  $lE\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1}$  menjadi  $lE\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right)$ . Dari sini diperoleh penurunan persamaan (2.39) terhadap variabel  $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$  adalah:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)} &= \frac{\partial}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)} \left( \frac{1}{2} \rho l \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \left( \frac{1}{4} k_p l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2} k l^2 - k_b \eta \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) u + lE \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} \right) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)} \left( \frac{1}{2} \rho l \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{4} k_p l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{2} k_p l^2 + k_b \eta \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) u - lE \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)} \left( \frac{1}{2} \rho l \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{4} k_p l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{2} k_p l^2 + k_b \eta \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) u - lE - \frac{1}{2} lE \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} k_p l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - lE \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \end{aligned}$$

Sehingga,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} k_p l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - lE \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \right) = \frac{1}{2} k_p l^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - lE \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.42)$$

Selanjutnya, menurunkan persamaan (2.39) terhadap variabel  $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)$  sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)} &= \frac{\partial}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)} \left( \frac{1}{2} \rho l \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \left( \frac{1}{4} k_p l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2} k l^2 - k_b \eta \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) u + lE \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \rho l \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + k_b \eta u \end{aligned}$$

Sehingga, dapat dihitung:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho l \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) + k_b \eta u \right) \\ &= \rho l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k_b \eta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)\end{aligned}\quad (2.43)$$

Dari sini, diperoleh perasamaan (2.41) sampai persamaan (2.43) dapat diterapkan pada persamaan *Lagrangian* berikut:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)} \right) = \frac{\partial L}{\partial u}$$

Sehingga diperoleh:

$$\rho l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k_b \eta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \left( \frac{1}{2} k_p l^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - lE \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = -k_b \eta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)$$

atau

$$\rho l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2k_b \eta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \frac{1}{2} k_p l^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + lE \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2.44)$$

#### 2.1.4 Model Matematika Dawai

Kusumastuti (2016) telah merumuskan persamaan dawai dengan pembebanan berupa massa dinamis yang dinyatakan oleh persamaan sebagai berikut:

$$(m_{Benda} + m_{dawai}) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = -EI(x) \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4}$$

Dengan memandang kembali persamaan (2.44) yakni:

$$\rho l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2k_b \eta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \frac{1}{2} k_p l^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + lE \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Maka dengan memperhatikan kedua persamaan di atas, diperoleh model vibrasi dawai dengan pembebanan ke bawah oleh benda bermassa  $m$  sebagai berikut:

$$-EI(x) \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} + (m_{Benda} + m_{dawai}) \rho l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2k_b \eta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \frac{1}{2} k_p l^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + lE \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$0 = EI(x) \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} - (m_{Benda} + m_{dawai}) \rho l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2k_b \eta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} k_p l^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - lE \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

## 2.2 Metode Beda Hingga

Strauss (2007) menyatakan bahwa metode beda hingga merupakan sebuah metode yang sangat populer dalam penyelesaian masalah-masalah persamaan diferensial biasa maupun persamaan diferensial parsial, yang didasarkan pada ekspansi deret Taylor. Berikut adalah ekspansi deret Taylor di sekitar  $(x, t)$  yaitu:

$$f(x + \Delta x, t) = f(x, t) + f_x(x, t) \Delta x + \frac{1}{2} f_{xx}(x, t) \Delta x^2 + \frac{1}{6} f_{xxx}(x, t) \Delta x^3 + \dots \quad (2.45)$$

$$f(x - \Delta x, t) = f(x, t) - f_x(x, t) \Delta x - \frac{1}{2} f_{xx}(x, t) \Delta x^2 - \frac{1}{6} f_{xxx}(x, t) \Delta x^3 + \dots \quad (2.46)$$

$$f(x, t + \Delta t) = f(x, t) + f_t(x, t) \Delta t + \frac{1}{2} f_{tt}(x, t) \Delta t^2 + \frac{1}{6} f_{ttt}(x, t) \Delta t^3 + \dots \quad (2.47)$$

$$f(x, t - \Delta t) = f(x, t) - f_t(x, t) \Delta t - \frac{1}{2} f_{tt}(x, t) \Delta t^2 - \frac{1}{6} f_{ttt}(x, t) \Delta t^3 + \dots \quad (2.48)$$

Sehingga turunan hampiran pertama suatu fungsi  $f(x)$  untuk beda pusat terhadap  $t$  dapat diperoleh sebagai berikut

$$f(x, t + \Delta t) - f(x, t - \Delta t) = 2f_t(x, t) \Delta t \quad (2.49)$$

atau

$$f_t(x, t) = \frac{f(x, t + \Delta t) - f(x, t - \Delta t)}{2\Delta t} \quad (2.50)$$

Sehingga persamaan (2.50) dapat ditulis

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{f_j^{n+1} - f_j^{n-1}}{2\Delta t} \quad (2.51)$$

Adapun untuk memperkirakan turunan kedua  $f(x)$  beda pusat terhadap  $t$  adalah dengan mengulangi prosedur untuk memperoleh turunan pertama, sehingga diperoleh

$$f(x, t + \Delta t) - f(x, t - \Delta t) = 2f_t(x, t) - 2\frac{1}{2}f_{tt}(x, t)\Delta t^2 \quad (2.52)$$

atau

$$f_{tt}(x, t) = \frac{f(x, t + \Delta t) - 2f_t(x, t) + f(x, t - \Delta t)}{\Delta t^2} \quad (2.53)$$

Sehingga persamaan (2.53) dapat ditulis

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \approx \frac{f_j^{n+1} + f_j^n - f_j^{n-1}}{\Delta t^2} \quad (2.54)$$

Sedangkan untuk turunan kedua  $f(x)$  pada  $x$  beda pusat adalah dengan mengulangi prosedur untuk memperoleh turunan kedua terhadap  $t$ , sehingga diperoleh

$$f(x + \Delta x, t) - f(x - \Delta x, t) = 2f_x(x, t) + 2\frac{1}{2}f_{xx}(x, t)\Delta x^2 \quad (2.55)$$

atau

$$f_{xx}(x, t) = \frac{f(x + \Delta x, t) - 2f_x(x, t) + f(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2} \quad (2.56)$$

Sehingga persamaan (2.56) dapat ditulis

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \frac{f_{j+1}^n + f_j^n - f_{j-1}^n}{\Delta x^2} \quad (2.57)$$

### 2.2.1 Skema Eksplisit CTCS

Triatmodjo (2002) menyatakan bahwa metode beda hingga skema eksplisit banyak digunakan dalam penyelesaian persamaan differensial parsial. Skema ini sangat sederhana dan mudah untuk memahaminya. Penggunaan skema tersebut untuk menurunkan persamaan differensial parsial menjadi persamaan beda hingga juga mudah. Skema CTCS merupakan pendekatan numerik dengan beda pusat terhadap waktu dan beda pusat terhadap ruang.

Dalam skema eksplisit, nilai pada suatu titik dihitung secara langsung dari nilai di beberapa titik sekitarnya pada waktu sebelumnya yang sudah diketahui nilainya atau nilai setiap besaran waktu yang lalu sudah diketahui, sehingga nilai  $n + 1$  dapat dihitung. Namun skema ini mempunyai kelemahan, yaitu langkah waktu  $\Delta t$  dibatasi berdasarkan bilangan *Courant* yaitu  $|Cr| = \left| u \frac{\Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1$ . Apabila  $|Cr| > 1$  maka hitungan tidak stabil. Penggunaan langkah waktu  $\Delta t$  yang kecil tersebut menyebabkan prosedur dan waktu hitungan menjadi sangat panjang dan lama.

Berdasarkan Teorema Taylor, dengan  $U_r^s = U(x_r, t_s)$ ,  $U_{r+1}^s = U(x_{r+1}, t_s)$ ,  $U_r^{s+1} = U(x_r, t_{s+1})$ ,  $x_{r+1} = x_r + \Delta x$ ,  $t_{s+1} = t_s + \Delta t$ , pendekatan beda hingga untuk turunan pertama adalah sebagai berikut:

#### 1. Beda Maju

$$\frac{\partial U_r^s}{\partial x} \approx \frac{U_{r+1}^s - U_r^s}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial U_r^s}{\partial t} \approx \frac{U_r^{s+1} - U_r^s}{\Delta t}$$

#### 2. Beda Mundur

$$\frac{\partial U_r^s}{\partial x} \approx \frac{U_r^s - U_{r-1}^s}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial U_r^s}{\partial t} \approx \frac{U_r^s - U_r^{s-1}}{\Delta t}$$

### 3. Beda Pusat

$$\frac{\partial U_r^s}{\partial x} \approx \frac{U_{r+1}^s - U_{r-1}^s}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial U_r^s}{\partial t} \approx \frac{U_r^{s+1} - U_r^{s-1}}{2\Delta t}$$

### 2.3 Syarat Kestabilan

Zauderer (2009) menyatakan bahwa suatu permasalahan persamaan diferensial dapat menjadi stabil dan tidak stabil. Suatu konsep kestabilan dapat diterapkan dalam skema beda hingga. Ketidakstabilan skema beda hingga hingga menghasilkan kesalahan dalam aproksimasi numerik terhadap solusi nilai eksak dari masalah yang diberikan, sehingga solusi numerik kurang mendekati nilai eksak.

Salah satu metode untuk menganalisis kestabilan skema adalah stabilitas *Von Neumann* atau juga dikenal dengan stabilitas Fourier, dengan menerapkan stabilitas *Von Neumann* terhadap skema beda hingga, maka dapat dicari kestabilan dari persamaan beda dengan mensubstitusikan  $u_j^n = \rho^n e^{i\alpha j}$  ke dalam persamaan tersebut, yang mana superskrip  $i$  menunjukkan posisi,  $n$  menunjukkan waktu,  $j$  merupakan vektor dan untuk skema  $a$  dalam interval  $[0, 2\pi]$ . Syarat perlu dan cukup stabilitas *Von Neumann* adalah  $|\rho| \leq 1$ .

Solusi dari stabilitas *Von Neumann* dengan didasarkan pada dekomposisi dari kesalahan deret Fourier. Untuk menunjukkan prosedur deret Fourier diberikan

interval  $0 \leq x \leq l$ , kemudian dipartisi sebanyak  $N$ , yang menentukan  $x_n = \frac{nl}{N}$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ . Kenaikan  $x$  didefinisikan sebagai  $h = \frac{l}{N}$ , kenaikan  $t$  didefinisikan sebagai  $k$  sehingga didapatkan  $t_m = mk$ . Maka  $u_{n,m}$  sesuai dengan  $u(x_n, t_m)$ . Berlaku juga  $x_n \pm h = x_{n\pm 1}$  dan  $t_m \pm k = t_{m\pm 1}$ .

Pada grid nilai  $x$ , didefinisikan deret Fourier  $u(x_n, t_m)$  sebagai berikut:

$$c_s(m) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} u(x_n, t_m) e^{\left(\frac{2i\pi s x_n}{l}\right)}, s = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.14)$$

dengan  $c_s(m)$  adalah koefisien Fourier. Invers dari deret Fourier diberikan

$$u(x_n, t_m) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{s=0}^{N-1} c_s(m) e^{\left(\frac{2i\pi s x_n}{l}\right)}, s = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.58)$$

Fungsi  $u(x_n, t_m)$  yang didapatkan dari koefisien Fourier  $c_s(m)$ . Perhatikan bahwa  $u(x_n, t_m) = u(x_0, t_m)$ , sehingga  $u(x_n, t_m)$  adalah periodik. Deret Fourier dari  $u(x_n \pm h, t_m)$  dan  $u(x_n, t_m \pm k)$  diberikan sebagai  $c_s(m) e^{\left(\pm \frac{2i\pi s x_n}{l}\right)}$  dan  $c_s(m+1)$ , dengan hal serupa untuk setiap kenaikan  $x$  dan  $t$ . Sebagai hasil, jika dipertimbangkan persamaan beda hingga

$$u(x_n, t_m \pm k) = au(x_n + h, t_m) + bu(x_n, t_m) + u(x_n - h, t_m) \quad (2.59)$$

Deret Fourier yang menghasilkan hubungan rekursi

$$c_s(m+1) = c_s(m) \left[ ae^{\left(\frac{2i\pi s x_n}{l}\right)} + b + ce^{\left(-\frac{2i\pi s x_n}{l}\right)} \right] \quad (2.60)$$

Solusi dari hubungan rekursi adalah

$$c_s(m+1) = c_s(0) \left[ ae^{\left(\frac{2i\pi s x_n}{l}\right)} + b + ce^{\left(-\frac{2i\pi s x_n}{l}\right)} \right]^m \quad (2.61)$$

dengan  $c_s(0)$  adalah kondisi awal dari deret Fourier untuk masalah tersebut. Solusi dari persamaan beda adalah

$$u(x_n, t_m) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} c_s(0) \left[ a e^{\left(\frac{2i\pi s x_n}{l}\right)} + b + c e^{\left(-\frac{2i\pi s x_n}{l}\right)} \right]^m e^{\left(\frac{2i\pi s x_n}{l}\right)}, \quad (2.62)$$

$$n = 0, 1, \dots, N - 1$$

Untuk syarat kestabilan  $\left[ a e^{\left(\frac{2i\pi s x_n}{l}\right)} + b + c e^{\left(-\frac{2i\pi s x_n}{l}\right)} \right]^m$  pada persamaan (2.63)

harus terbatas dan bernilai mutlak pada  $m \rightarrow \infty$  untuk semua  $s$  yang relevan.

Sebagai hasil solusi  $u(x_n, t_m)$  tidak dapat bertumbuh  $t_m \rightarrow \infty$ . Ini berarti bahwa

$$\left[ a e^{\left(\frac{2i\pi s x_n}{l}\right)} + b + c e^{\left(-\frac{2i\pi s x_n}{l}\right)} \right] \leq 1 \quad (2.64)$$

Untuk semua  $s$  yang relevan, dan ini adalah kondisi kestabilan *Von Neumann*.

Sebagai jumlah subdivisi  $N \rightarrow \infty$ , kenaikan  $h = \frac{1}{N}$  mendekati nol,  $\frac{2\pi s h}{l} = \frac{2\pi s}{N}$

berada pada interval  $[0, 2\pi]$ . Sehingga kondisi kestabilan *Von Neumann* dapat

diberikan sebagai  $\beta = \frac{2\pi s h}{l}$ ,

$$|\rho| = |a e^{i\beta} + b + c e^{-i\beta}| \leq 1, 0 \leq \beta \leq 2\pi \quad (2.65)$$

#### 2.4 Identifikasi Parameter, Variabel dan Energi pada Dawai

Langkah selanjutnya yang dilakukan adalah mengidentifikasi parameter, variabel dan energi pada *string* yang dikenai pembebanan pada Kusumastuti (2016).

Berdasarkan hasil identifikasi masalah pada sub bab 2.1, terdapat beberapa parameter yang terlibat dalam masalah gerak dawai pada massa yang berjalan di atas *string*, diantaranya adalah:

1. Panjang dawai ( $l$ ), merupakan jarak antara dua buah ujung dawai. Panjang dawai yang digunakan dalam penelitian ini adalah 1 m.

2. Massa dawai ( $m$ ) adalah suatu besaran yang menyatakan kekuatan dawai dalam satuan  $kg$ . Massa dawai ( $m$ ) didefinisikan sebagai perkalian antara massa jenis dawai ( $\rho$ ) dan satuan panjang dawai ( $l$ ).
3. Massa benda yang menggelinging  $m_{Benda}$  adalah suatu besaran yang menyatakan kekuatan benda yang akan menggelinging di atas dawai yang menggunakan satuan kilogram. Seluruh permukaan benda dilapisi karet.
4. Modulus elastisitas dawai ( $E$ ), merupakan konstanta yang menyatakan tingkat keelastisan atau kelenturan dawai yang berbahan beton dengan satuan  $N/m^2$ . Besar modulus elastisitas dawai yang berbahan beton adalah  $20 \times 10^9 N/m^2$ .
5. Konstanta pegas ( $k_p$ ), merupakan konstanta yang menyatakan ukuran kekakuan dari dawai yang berbahan beton. Konstanta ini memiliki nilai sebesar  $k_p = \frac{E}{l}$  dengan satuannya adalah  $N/m$ .
6. Konstanta  $k_b$  yang menyatakan koefisien bentuk dawai yang bergesekan dengan udara. Konstanta  $k_b$  memiliki nilai sebesar  $k_b = 6\pi r$ , dengan  $r$  adalah jari-jari dawai.
7. Koefisien viskositas ( $\eta$ ), merupakan besaran yang menunjukkan tingkat kekentalan fluida atau zat alir. Dalam penelitian ini, jenis fluida atau zat alir yang dipertimbangkan adalah udara yang memiliki koefisien viskositas sebesar  $0,000019 Ns/m^2$ .
8. Kecepatan elastisitas ( $c$ ) yang didefinisikan sebagai akar kuadrat dari modulus elastisitas ( $E$ ) per massa jenis dawai ( $\rho$ ), dengan satuannya adalah  $m/s$ .

Selanjutnya adalah mengidentifikasi variabel yang terlibat dalam masalah gerak dawai. Variabel-variabel yang digunakan terbagi menjadi dua macam, yakni variabel bebas dan variabel terikat. Dalam penelitian ini, model matematika untuk

masalah gerak dawai yang akan dikonstruksi bergantung pada keadaan  $x$  dan waktu  $t$ . Sehingga terdapat dua variabel bebas dalam penelitian ini yaitu  $x$  yang menyatakan keadaan dan  $t$  yang menyatakan waktu. Sedangkan untuk variabel terikatnya terdapat beberapa, diantaranya adalah:

1. Besar simpangan  $u$  dan besar sudut  $\theta$  yang terbentuk ketika massa berjalan di atas *string*. Keduanya bergantung pada keadaan  $x$  dan waktu  $t$ .
2. Kecepatan dawai berosilasi ( $v$ ) yang didefinisikan sebagai perubahan simpangan  $u$  terhadap waktu  $t$ ,  $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)$  dengan satuannya adalah  $m/s$ .
3. Percepatan dawai berosilasi, yang merupakan perubahan kecepatan terhadap waktu  $t$ ,  $\left(\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)$  dengan satuannya adalah  $m/s^2$ .
4. Nilai  $\tan \theta$  yang merupakan koefisien garis singgung atau kemiringan didefinisikan sebagai perubahan besar simpangan  $u$  terhadap keadaan  $x$ , yakni  $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ , Kusumastuti (2016).

Langkah selanjutnya adalah mengidentifikasi energi-energi yang bekerja pada dawai energi-energi yang bekerja pada dawai adalah sebagai berikut:

1. Energi potensial ( $Ep$ ) pada dawai meliputi (1) energi potensial berat ( $Ep_{berat}$ ), (2) energi potensial gesek ( $Ep_{gesek}$ ), (3) energi potensial pegas ( $Ep_{pegas}$ ), dan (4) energi potensial tegangan dawai ( $Ep_{tegangan}$ ). Energi-energi ini timbul karena adanya reaksi dari partikel-partikel penyusun dawai dalam rangka melawan gaya tarikan yang diberikan ketika dawai mengalami pembebanan. Satuan energi potensial adalah *Joule* atau setara dengan  $kg\ m^2/s^2$ .
2. Energi kinetik ( $Ek$ ), energi ini dipengaruhi oleh kecepatan dawai berosilasi. Satuan energi kinetik adalah *Joule* atau setara dengan  $kg\ m^2/s^2$ , Kusumastuti (2016).

## 2.5 Kajian Keagamaan

Berdasarkan pemaparan pendahuluan pada bab sebelumnya telah dijelaskan bahwa manusia memiliki akal yang digunakan untuk mengkaji, meneliti dan mengamati tentang segala sesuatu yang telah tercipta di langit dan bumi. Hal ini sesuai dengan isi dari surat al-Imran/3:190-191 sebagai berikut.

إِنَّ فِي خَلْقِ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَاخْتِلَافِ أَلْيَالِ وَالنَّهَارِ لَآيَاتٍ لِّأُولِي الْأَلْبَابِ  
 ١٩٠ الَّذِينَ يَذْكُرُونَ اللَّهَ قِيَامًا وَقُعُودًا وَعَلَىٰ جُنُوبِهِمْ وَيَتَفَكَّرُونَ فِي خَلْقِ  
 السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ رَبَّنَا مَا خَلَقْتَ هَٰذَا بَاطِلًا سُبْحَانَكَ فَقِنَا عَذَابَ النَّارِ ١٩١

*“Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, dan silih bergantinya malam dan siang terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal, (yaitu) orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri atau duduk atau dalam keadaan berbaring dan mereka memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya berkata): Ya Tuhan kami, tiadalah Engkau menciptakan ini dengan sia-sia, Maha Suci Engkau, maka peliharalah kami dari siksa neraka” (QS. al-Imran/3:190-191)*

Asbabun nuzul dari ayat ini diriwayatkan oleh ath-Thabarani dan Ibnu Abi Hatim, yang bersumber dari Ibnu ‘Abbas bahwa orang Quraisy datang kepada Yahudi untuk bertanya, “Mukjizat apa yang dibawa Musa kepada kalian?” Mereka menjawab, “Tongkat dan tangannya terlihat putih bercahaya.” Kemudian mereka bertanya kepada kaum Nasrani, “Mukjizat apa yang dibawa ‘Isa pada kalian?” Mereka menjawab, “Ia dapat menyembuhkan orang buta sejak lahir hingga dapat melihat, menyembuhkan orang berpenyakit sopak, dan menghidupkan orang mati.” Kemudian mereka menghadap nabi Muhammad Saw dan berkata “Hai Muhammad, coba berdoalah engkau kepada Rabb-mu agar gunung Shafa ini dijadikan emas.” Lalu beliau berdoa sehingga turunlah ayat tersebut (Ali ‘Imraan: 190) sebagai petunjuk untuk memperhatikan apa yang telah ada, yang akan lebih besar manfaatnya bagi orang yang menggunakan akal.

Tafsir secara umum pada ayat 190 surat Ali Imran adalah Allah mengajak manusia untuk berpikir dan merenungi tentang penciptaan langit dan bumi. Kemudian pada ayat berikutnya Allah menjelaskan hasil dan buah dari berpikir ini. Ayat ini menjelaskan tentang keesaan Allah dan menyatakan bahwa apabila manusia memikirkan dengan cermat dan menggunakan akalnyanya terkait dengan proses penciptaan langit dan bumi, silih bergantinya siang dan malam, maka ia akan menemukan tanda-tanda jelas atas kekuasaan Allah, maha karya dan rahasia-rahasia yang menakjubkan yang akan menuntun para hamba kepada Allah dan hari kiamat serta menggiring mereka pada kekuasaan Allah yang tak terbatas. Makna dua ayat ini adalah mereka yang menyaksikan, yang didasari dengan pemikiran dan perenungan, penciptaan langit dan bumi, silih bergantinya siang dan malam, pemikiran dan perenungan ini menyebabkan mereka senantiasa akan mengingat Allah. Dengan perantara ini mereka akan menyadari bahwa Allah segera akan membangkitkan mereka dan atas dasar itu ia memohon rahmat-Nya serta meminta supaya janji yang diberikan kepada mereka dapat terealisasi bagi-Nya (Dasuki, 1995:102).

Kemudian dalam penciptaan langit dan bumi, Allah telah menciptakan semuanya sesuai dengan ukurannya. Hal ini sesuai dengan surat al-Furqan/25:2.

أَلَدِّي لَهُ مَلِكُ السَّمٰوٰتِ وَالْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُنْ لَهُ شَرِيكٌ فِي الْمَلِكِ  
وَحَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَرَهُ تَقْدِيرًا ۚ

*“Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan Dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu bagi-Nya dalam kekuasaan(Nya), dan Dia telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya” (QS. al-Furqan/25:2)*

Di ayat yang kedua ini diterangkan kekuasaan dan kebesaran Allah yang menurunkan al-Furqan dan mengutus hamba-Nya itu kepada seluruh alam. Allah

adalah Tuhan yang menguasai seluruh langit dan bumi. Penguasa dari sekalian penguasa, raja dari sekalian raja, menaikkan dan menurunkan, memuliakan dan menghinakan. Kekuasaan-Nya adalah mutlak dan kekal. Tanda dari kekuasaan itu terasa apabila ilmu semakin bertambah. Dengan ilmu pengetahuan alam dapatlah sedikit demi sedikit melihat kekuasaan yang mutlak itu. Perjalanan matahari yang teratur detik demi detik, persamaan terbit dan terbenamnya pada persamaan tanggal dan bulannya sehingga satu detik pun tidak ada selisih adalah bukti nyata dari kekuasaan-Nya. Apabila menambah ilmu pengetahuan tentang ilmu alam, ilmu bumi, ilmu tumbuh-tumbuhan dan sekalian cabang ilmu yang lain, bertambah nyatalah kekuasaan yang mutlak itu sehingga semakin manusia dapat mengetahui suatu cabang ilmu, semakin juga manusia mengetahui bahwa yang diketahuinya ini adalah perkara yang telah ada sejak berjuta tahun. Ilmu pengetahuan manusia bukanlah menambah peraturan yang baru pada peraturan yang telah ada, melainkan hanya semata-mata telah mengetahui perkara yang tadinya belum diketahui (Dasuki, 1995:680).

Segala sesuatu tercipta sesuai dengan ukurannya juga dijelaskan dalam surat al-Qamar/54:49.

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ٤٩

*“Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran” (QS. al-Qamar/54:49)*

Asbabun nuzul untuk surat ini diriwayatkan oleh Muslim dan at-Tirmidzi, yang bersumber dari Abu Hurairah bahwa kaum musyrikin Quraisy pernah membantah Rasulullah Saw. berkenaan dengan persoalan takdir. Ayat ini (al-Qamar: 47-49) turun sehubungan dengan peristiwa tersebut, yang melukiskan

bahwa segala sesuatu diciptakan menurut ukuran dan aturan. Maksudnya, Allah menetapkan suatu ukuran dan memberi petunjuk kepada semua makhluk pada ketetapan tersebut. Oleh karena itu, para ulama menjadikan ayat yang mulia ini sebagai dalil untuk menetapkan takdir Allah bagi semua makhluk sebelum makhluk itu diciptakan. Hal itu merupakan ilmu Allah terhadap segala sesuatu sebelum adanya dan pencatatan ketentuan masing-masing makhluk sebelum semuanya tercipta (Jalaludin, 1993:507).

Pada akhirnya, setelah segala sesuatu itu ada ukuran dan hitungannya maka segala sesuatu juga ada sebabnya sehingga harus ditelusuri bagaimana ia terjadi. Jalan penelusuran ini sesuai dengan surat al-Kahfi/18:84-85.

إِنَّا مَكَّنَّا لَهُ فِي الْأَرْضِ وَءَاتَيْنَاهُ مِنْ كُلِّ شَيْءٍ سَبَبًا ۚ فَاتَّبَعِ سَبَبًا ۝ ٨٥

*“Sesungguhnya Kami telah memberi kekuasaan kepadanya di (muka) bumi, dan Kami telah memberikan kepadanya jalan (untuk mencapai) segala sesuatu. Maka diapun menempuh suatu jalan” (QS. al Kahfi/18:84-85).*

## BAB III

### PEMBAHASAN

Pembahasan pada penelitian ini menyajikan upaya menyelesaikan model matematika untuk masalah gerak dawai vibrasi *massa* yang berjalan diatas *string* menggunakan metode eksplisit CTCS (*Central Time Center Space*) untuk mendapatkan solusi secara numeriknya.

#### 3.1 Skema Eksplisit CTCS Model Matematika pada Vibrasi Massa yang Berjalan di Atas *String*

Bentuk model matematika yang telah dikonstruksi untuk masalah gerak dawai dengan pembebanan benda bermassa menggeling yang akan dicari solusi numeriknya dalam penelitian ini dinyatakan sebagai berikut:

$$-EI(x) \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} + (m_{Benda} + m_{dawai}) \rho l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2k_b \eta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \frac{1}{2} k_p l^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + lE \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (3.1)$$

Kusumastuti (2016)

Dengan kondisi awal

$$u(x, 0) = f_0(x) \quad \text{untuk setiap} \quad 0 < x < l$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0 \quad \text{untuk setiap} \quad 0 < x < l$$

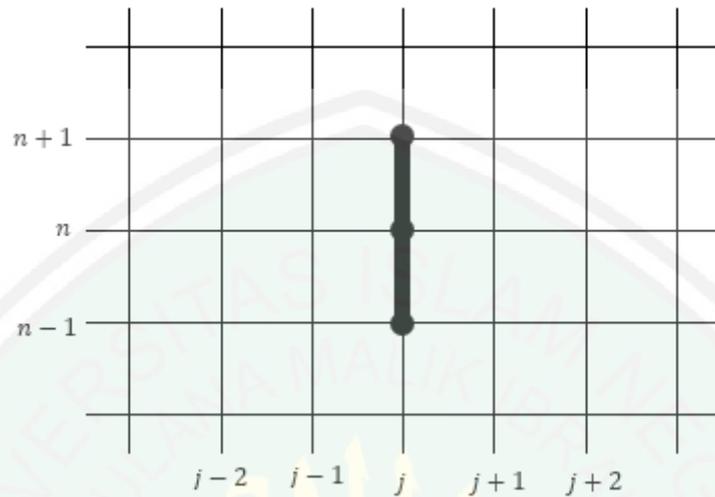
dan kondisi batas

$$u(0, t) = 0 \quad \text{untuk setiap} \quad t > 0$$

$$u(l, t) = 0 \quad \text{untuk setiap} \quad t > 0$$

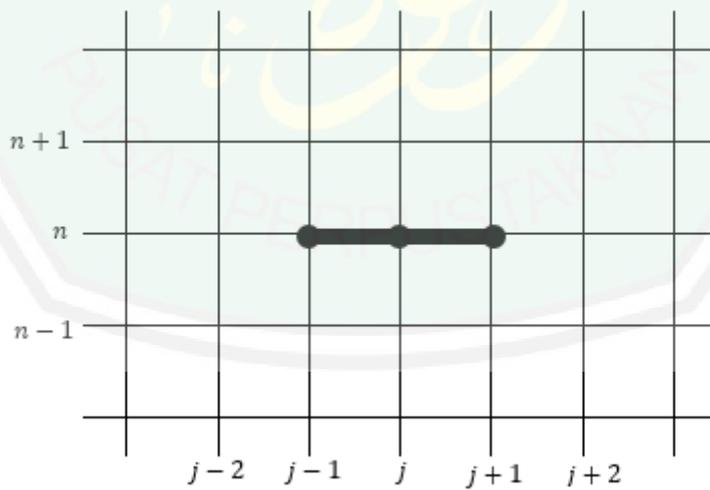
Diskritisasi persamaan (3.1) dengan menggunakan skema eksplisit CTCS adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} \quad (3.2)$$



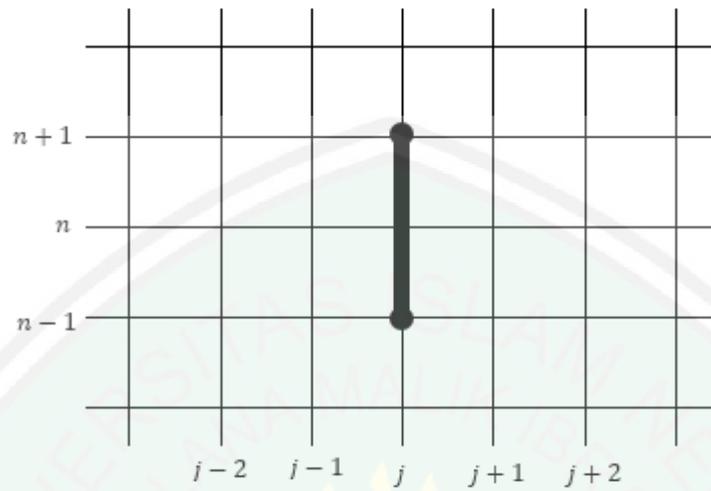
Gambar 3.1 Skema Eksplisit untuk persamaan (3.2)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \quad (3.3)$$



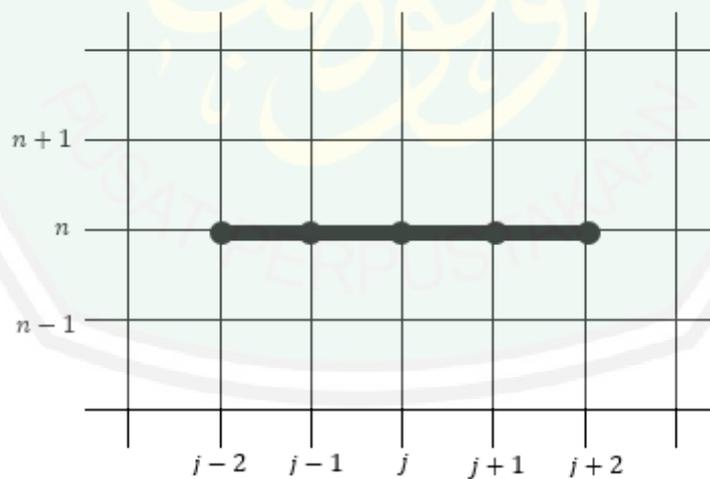
Gambar 3.2 Skema Eksplisit untuk persamaan (3.3)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} \quad (3.4)$$



Gambar 3.3 Skema Eksplisit untuk persamaan (3.4)

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \frac{u_{j+2}^n - 4u_{j+1}^n + 6u_j^n - 4u_{j-1}^n + u_{j-2}^n}{\Delta x^4} \quad (3.5)$$



Gambar 3.4 Skema Eksplisit untuk persamaan (3.5)

Persamaan (3.2), (3.3), (3.4) dan (3.5) disubstitusikan ke persamaan (3.1), sehingga

$$\begin{aligned}
& -EI(x) \left( \frac{u_{j+2}^n - 4u_{j+1}^n + 6u_j^n - 4u_{j-1}^n + u_{j-2}^n}{\Delta x^4} \right) \\
& + (m_{Benda} + m_{dawai}) \rho l \left( \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} \right) \\
& + 2k_b \eta \left( \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} \right) - \frac{1}{2} k_p l^2 \left( \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right) \\
& + lE \left( \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right) = 0
\end{aligned} \tag{3.6}$$

dengan

$$M = m_{Benda} + m_{dawai}$$

Maka,

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{-EI(x)}{\Delta x^4} \right) u_{j+2}^n + \left( \frac{4EI(x)}{\Delta x^4} \right) u_{j+1}^n - \left( \frac{6EI(x)}{\Delta x^4} \right) u_j^n + \left( \frac{4EI(x)}{\Delta x^4} \right) u_{j-1}^n - \left( \frac{EI(x)}{\Delta x^4} \right) u_{j-2}^n \\
& + \left( \frac{M\rho l}{\Delta t^2} \right) u_j^{n+1} - \left( \frac{2M\rho l}{\Delta t^2} \right) u_j^n + \left( \frac{M\rho l}{\Delta t^2} \right) u_j^{n-1} + \left( \frac{2k_b \eta}{2\Delta t} \right) u_j^{n+1} - \left( \frac{2k_b \eta}{2\Delta t} \right) u_j^{n-1} \\
& - \left( \frac{\frac{1}{2} k_p l^2}{\Delta x^2} \right) u_{j+1}^n + \left( \frac{k_p l^2}{\Delta x^2} \right) u_j^n - \left( \frac{\frac{1}{2} k_p l^2}{\Delta x^2} \right) u_{j-1}^n + \left( \frac{lE}{\Delta x^2} \right) u_{j+1}^n - \left( \frac{2lE}{\Delta x^2} \right) u_j^n \\
& + \left( \frac{lE}{\Delta x^2} \right) u_{j-1}^n = 0 \\
& \left( \frac{-EI(x)}{\Delta x^4} \right) u_{j+2}^n - \left( \frac{EI(x)}{\Delta x^4} \right) u_{j-2}^n + \left( \frac{4EI(x)}{\Delta x^4} \right) u_{j+1}^n - \left( \frac{\frac{1}{2} k_p l^2}{\Delta x^2} \right) u_{j+1}^n + \left( \frac{lE}{\Delta x^2} \right) u_{j+1}^n - \left( \frac{6EI(x)}{\Delta x^4} \right) u_j^n \\
& - \left( \frac{2M\rho l}{\Delta t^2} \right) u_j^n + \left( \frac{k_p l^2}{\Delta x^2} \right) u_j^n - \left( \frac{2lE}{\Delta x^2} \right) u_j^n + \left( \frac{4EI(x)}{\Delta x^4} \right) u_{j-1}^n - \left( \frac{\frac{1}{2} k_p l^2}{\Delta x^2} \right) u_{j-1}^n \\
& + \left( \frac{lE}{\Delta x^2} \right) u_{j-1}^n + \left( \frac{M\rho l}{\Delta t^2} \right) u_j^{n+1} + \left( \frac{2k_b \eta}{2\Delta t} \right) u_j^{n+1} + \left( \frac{M\rho l}{\Delta t^2} \right) u_j^{n-1} - \left( \frac{2k_b \eta}{2\Delta t} \right) u_j^{n-1} \\
& = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{-EI(x)}{\Delta x^4} \right) u_{j+2}^n - \left( \frac{EI(x)}{\Delta x^4} \right) u_{j-2}^n + \left( \frac{4EI(x)}{\Delta x^4} \right) u_{j+1}^n - \left( \frac{\frac{1}{2}k_p l^2}{\Delta x^2} \right) u_{j+1}^n + \left( \frac{lE}{\Delta x^2} \right) u_{j+1}^n - \left( \frac{6EI(x)}{\Delta x^4} \right) u_j^n \\
& - \left( \frac{2M\rho l}{\Delta t^2} \right) u_j^n + \left( \frac{k_p l^2}{\Delta x^2} \right) u_j^n - \left( \frac{2lE}{\Delta x^2} \right) u_j^n + \left( \frac{4EI(x)}{\Delta x^4} \right) u_{j-1}^n - \left( \frac{\frac{1}{2}k_p l^2}{\Delta x^2} \right) u_{j-1}^n \\
& + \left( \frac{lE}{\Delta x^2} \right) u_{j-1}^n + \left( \frac{M\rho l}{\Delta t^2} \right) u_j^{n+1} + \left( \frac{k_b \eta}{\Delta t} \right) u_j^{n+1} + \left( \frac{M\rho l}{\Delta t^2} \right) u_j^{n-1} - \left( \frac{k_b \eta}{\Delta t} \right) u_j^{n-1} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{-EI(x)}{\Delta x^4} \right) u_{j+2}^n - \left( \frac{EI(x)}{\Delta x^4} \right) u_{j-2}^n + \left( \frac{4EI(x)}{\Delta x^4} - \frac{\frac{1}{2}k_p l^2}{\Delta x^2} + \frac{lE}{\Delta x^2} \right) u_{j+1}^n \\
& - \left( \frac{6EI(x)}{\Delta x^4} + \frac{2M\rho l}{\Delta t^2} - \frac{k_p l^2}{\Delta x^2} + \frac{2lE}{\Delta x^2} \right) u_j^n + \left( \frac{4EI(x)}{\Delta x^4} - \frac{\frac{1}{2}k_p l^2}{\Delta x^2} + \frac{lE}{\Delta x^2} \right) u_{j-1}^n \\
& + \left( \frac{M\rho l}{\Delta t^2} + \frac{k_b \eta}{\Delta t} \right) u_j^{n+1} + \left( \frac{M\rho l}{\Delta t^2} - \frac{k_b \eta}{\Delta t} \right) u_j^{n-1} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{-EI(x)}{\Delta x^4} \right) u_{j+2}^n - \left( \frac{EI(x)}{\Delta x^4} \right) u_{j-2}^n + \left( \frac{4EI(x) - \frac{1}{2}k_p l^2 \Delta x^2 + lE \Delta x^2}{\Delta x^4} \right) u_{j+1}^n \\
& - \left( \frac{6EI(x) \Delta t^2 - k_p l^2 \Delta x^2 \Delta t^2 + 2lE \Delta x^2 \Delta t^2 + 2M\rho l \Delta x^4}{\Delta x^4 \Delta t^2} \right) u_j^n \\
& + \left( \frac{4EI(x) - \frac{1}{2}k_p l^2 \Delta x^2 + lE \Delta x^2}{\Delta x^4} \right) u_{j-1}^n + \left( \frac{M\rho l + k_b \eta \Delta t}{\Delta t^2} \right) u_j^{n+1} \\
& + \left( \frac{M\rho l - k_b \eta \Delta t}{\Delta t^2} \right) u_j^{n-1} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left( \frac{M\rho l + k_b \eta \Delta t}{\Delta t^2} \right) u_j^{n+1} &= \left( \frac{EI(x)}{\Delta x^4} \right) u_{j+2}^n + \left( \frac{EI(x)}{\Delta x^4} \right) u_{j-2}^n - \\
& \left( \frac{4EI(x) - \frac{1}{2}k_p l^2 \Delta x^2 + lE \Delta x^2}{\Delta x^4} \right) u_{j+1}^n + \\
& \left( \frac{6EI(x) \Delta t^2 - k_p l^2 \Delta x^2 \Delta t^2 + 2lE \Delta x^2 \Delta t^2 + 2M\rho l \Delta x^4}{\Delta x^4 \Delta t^2} \right) u_j^n -
\end{aligned}$$

$$\left( \frac{4EI(x) - \frac{1}{2}k_p l^2 \Delta x^2 + lE\Delta x^2}{\Delta x^4} \right) u_{j-1}^n - \left( \frac{M\rho l - k_b \eta \Delta t}{\Delta t^2} \right) u_j^{n-1}$$

Dikalikan dengan  $\left( \frac{\Delta t^2}{M\rho l + k_b \eta \Delta t} \right)$

Sehingga diperoleh persamaan beda

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} = & \left( \frac{EI(x)\Delta t^2}{M\rho l \Delta x^4 + k_b \eta \Delta t \Delta x^4} \right) u_{j+2}^n + \left( \frac{EI(x)\Delta t^2}{M\rho l \Delta x^4 + k_b \eta \Delta t \Delta x^4} \right) u_{j-2}^n \\ & - \left( \frac{4EI(x)\Delta t^2 - \frac{1}{2}k_p l^2 \Delta x^2 \Delta t^2 + lE\Delta x^2 \Delta t^2}{M\rho l \Delta x^4 + k_b \eta \Delta t \Delta x^4} \right) u_{j+1}^n \\ & + \left( \frac{6EI(x)\Delta t^2 - k_p l^2 \Delta x^2 \Delta t^2 + 2lE\Delta x^2 \Delta t^2 + 2M\rho l \Delta x^4}{M\rho l \Delta x^4 + k_b \eta \Delta t \Delta x^4} \right) u_j^n \\ & - \left( \frac{4EI(x)\Delta t^2 - \frac{1}{2}k_p l^2 \Delta x^2 \Delta t^2 + lE\Delta x^2 \Delta t^2}{M\rho l \Delta x^4 + k_b \eta \Delta t \Delta x^4} \right) u_{j-1}^n \\ & - \left( \frac{M\rho l - k_b \eta \Delta t}{M\rho l + k_b \eta \Delta t} \right) u_j^{n-1} \end{aligned} \quad (3.7)$$

### 3.2 Analisis Kestabilan

Setelah mendiskritkan persamaan sehingga diperoleh persamaan (3.7) langkah selanjutnya adalah analisis stabilitas. Analisis stabilitas dilakukan untuk mengetahui apakah metode yang digunakan untuk mendekati model gerak dawai tersebut stabil atau tidak. Dalam penelitian ini melakukan uji kestabilan dengan menggunakan analisis stabilitas *Von Neumann*, yang dapat dilakukan dengan mensubstitusikan  $u_j^n = \rho^n e^{i\alpha j}$ ,  $\forall i = \sqrt{-1}$  pada persamaan beda (3.7), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \rho^{n+1}e^{i\alpha j} &= \left(\frac{EI(x)\Delta t^2}{M\rho l\Delta x^4+k_b\eta\Delta t\Delta x^4}\right)\rho^n e^{i\alpha j+2} + \left(\frac{EI(x)\Delta t^2}{M\rho l\Delta x^4+k_b\eta\Delta t\Delta x^4}\right)\rho^n e^{i\alpha j-2} - \\ &\left(\frac{4EI(x)\Delta t^2-\frac{1}{2}k_p l^2\Delta x^2\Delta t^2+lE\Delta x^2\Delta t^2}{M\rho l\Delta x^4+k_b\eta\Delta t\Delta x^4}\right)\rho^n e^{i\alpha j+1} + \\ &\left(\frac{6EI(x)\Delta t^2-k_p l^2\Delta x^2\Delta t^2+2lE\Delta x^2\Delta t^2+2M\rho l\Delta x^4}{M\rho l\Delta x^4+k_b\eta\Delta t\Delta x^4}\right)\rho^n e^{i\alpha j} - \\ &\left(\frac{4EI(x)\Delta t^2-\frac{1}{2}k_p l^2\Delta x^2\Delta t^2+lE\Delta x^2\Delta t^2}{M\rho l\Delta x^4+k_b\eta\Delta t\Delta x^4}\right)\rho^n e^{i\alpha j-1} - \left(\frac{M\rho l-k_b\eta\Delta t}{M\rho l+k_b\eta\Delta t}\right)\rho^{n-1}e^{i\alpha j} \end{aligned}$$

dengan

$$Q = \frac{EI(x)\Delta t^2}{M\rho l\Delta x^4+k_b\eta\Delta t\Delta x^4}$$

$$S = \frac{4EI(x)\Delta t^2 - \frac{1}{2}k_p l^2\Delta x^2\Delta t^2 + lE\Delta x^2\Delta t^2}{M\rho l\Delta x^4+k_b\eta\Delta t\Delta x^4}$$

$$T = \frac{6EI(x)\Delta t^2 - k_p l^2\Delta x^2\Delta t^2 + 2lE\Delta x^2\Delta t^2 + 2M\rho l\Delta x^4}{M\rho l\Delta x^4+k_b\eta\Delta t\Delta x^4}$$

$$V = \frac{M\rho l - k_b\eta\Delta t}{M\rho l+k_b\eta\Delta t}$$

$$\begin{aligned} \rho &= (Q)\rho^n e^{i\alpha(j+2)} + (Q)\rho^n e^{i\alpha(j-2)} - (S)\rho^n e^{i\alpha(j+1)} + (T)\rho^n e^{i\alpha j} - \\ &(S)\rho^n e^{i\alpha(j-1)} - (V)\rho^{n-1}e^{i\alpha j} \end{aligned}$$

Disederhanakan dengan membagi persamaan di atas dengan  $\rho^n e^{i\alpha j}$ , sehingga diperoleh dimana  $e^{i\alpha} = \cos \alpha \pm i \sin \alpha$

$$\rho = (Q)e^{2i\alpha} + (Q)e^{-2i\alpha} - (S)e^{i\alpha} + (T) - (S)e^{-i\alpha} - (V)\rho^{-1}$$

Karena  $e^{\pm i\alpha} = \cos \alpha \pm i \sin \alpha$ , maka

$$\begin{aligned} \rho &= \{(Q) \cos 2\alpha + i(Q) \sin 2\alpha\} + \{(Q) \cos 2\alpha - i(Q) \sin 2\alpha\} - \\ &\{(S) \cos \alpha + i(S) \sin \alpha\} + (T) - \{(S) \cos \alpha - i(S) \sin \alpha\} - \\ &(V)\rho^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (Q) \cos 2\alpha + i(Q) \sin 2\alpha + (Q) \cos 2\alpha - i(Q) \sin 2\alpha - \\
&\quad (S) \cos \alpha - i(S) \sin \alpha + (T) - (S) \cos \alpha + i(S) \sin \alpha - (V)\rho^{-1} \\
&= 2(Q) \cos 2\alpha - 2(S) \cos \alpha + (T) - (V)\rho^{-1} \\
&= 2(Q)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - 2(S) \cos \alpha + (T) - (V)\rho^{-1} \\
&= 2(Q)(\cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha)) - 2(S) \cos \alpha + (T) - (V)\rho^{-1} \\
&= 2(Q)(\cos^2 \alpha - 1 + \cos^2 \alpha) - 2(S) \cos \alpha + (T) - (V)\rho^{-1} \\
&= 2(Q) \cos^2 \alpha - 2(Q) + 2(Q) \cos^2 \alpha - 2(S) \cos \alpha + (T) - \\
&\quad (V)\rho^{-1} \\
&= 4(Q) \cos^2 \alpha - 2(S) \cos \alpha - 2(Q) + (T) - (V)\rho^{-1}
\end{aligned}$$

Sehingga,

$$\rho^2 = \{4(Q) \cos^2 \alpha - 2(S) \cos \alpha - 2(Q) + (T)\}\rho - (V)$$

atau

$$\rho^2 - \{4(Q) \cos^2 \alpha - 2(S) \cos \alpha - 2(Q) + (T)\}\rho + (V) = 0$$

dengan

$$M = 4(Q) \cos^2 \alpha - 2(S) \cos \alpha - 2(Q) + (T)$$

Sehingga akar-akar dari persamaan tersebut adalah

$$\rho_{1,2} = \frac{(M) \pm \sqrt{(M)^2 - 4(V)}}{2} \quad (3.8)$$

Karena persamaan (3.8) mengandung  $\cos \alpha$ , dalam hal ini diambil titik diskritnya yaitu  $\cos \alpha = -1$ ,  $\cos \alpha = 0$ , dan  $\cos 2 = 1$  sehingga dapat diuraikan sebagai berikut:

Untuk  $\cos \alpha = -1$  disubstitusikan ke dalam persamaan (3.8), jika

$\frac{\sqrt{(4(Q) \cos^2 \alpha - 2(S) \cos \alpha - 2(Q) + (T))^2 - 4(V)}}{2}$  bernilai imajiner maka:

$$\frac{\sqrt{(2(Q) + 2(S) + (T))^2 - 4(V)}}{2}$$

dengan

$$W = 2(Q) + 2(S) + (T)$$

$$|\rho_1| = \sqrt{\frac{(W)^2 + (\sqrt{(W)^2 - 4(V)})^2}{2^2}}$$

$$\left( \sqrt{\frac{(W)^2 + (\sqrt{(W)^2 - 4(V)})^2}{2^2}} \right)^2 \leq 1^2$$

$$\frac{(W)^2 + (\sqrt{(W)^2 - 4(V)})^2}{2^2} \leq 1$$

$$(W)^2 + (W)^2 - 4(V) \leq 4$$

$$2(W)^2 - 4(V) \leq 4$$

$$\frac{1}{2}(W)^2 - (V) \leq 1$$

$$\left( (Q) + (S) + \frac{1}{2}(T) \right)^2 - \left( \frac{M\rho l - k_b\eta\Delta t}{M\rho l + k_b\eta\Delta t} \right) \leq 1$$

$$\left( \frac{(8EI(x)\Delta t^2 + k_p l^2 \Delta x^2 \Delta t^2 + 2lE\Delta x^2 \Delta t^2 + M\rho l \Delta x^4)}{M\rho l \Delta x^4 + k_b \eta \Delta t \Delta x^4} \right)^2 - \left( \frac{M\rho l - k_b \eta \Delta t}{M\rho l + k_b \eta \Delta t} \right) \leq 1$$

$$|\rho_2| = \sqrt{\frac{(W)^2 - (\sqrt{(W)^2 - 4(V)})^2}{2^2}}$$

$$\left( \sqrt{\frac{(W)^2 - (\sqrt{(W)^2 - 4(V)})^2}{2^2}} \right)^2 \leq 1^2$$

$$\frac{(W)^2 + (\sqrt{(W)^2 - 4(V)})^2}{2^2} \leq 1$$

$$\begin{aligned}
 (W)^2 - (W)^2 - 4(V) &\leq 4 \\
 -4(V) &\leq 4 \\
 -\left(\frac{M\rho l - k_b\eta\Delta t}{M\rho l + k_b\eta\Delta t}\right) &\leq 1
 \end{aligned}$$

Untuk  $\cos\alpha = 0$  disubstitusikan ke dalam persamaan (3.8), jika

$\frac{\sqrt{(4(Q)\cos^2\alpha - 2(S)\cos\alpha - 2(Q) + (T))^2 - 4(V)}}{2}$  bernilai imajiner maka:

$$\frac{\sqrt{(-2(Q) + (T))^2 - 4(V)}}{2}$$

dengan

$$Y = -2(Q) + (T)$$

$$\begin{aligned}
 |\rho_1| &= \sqrt{\frac{(Y)^2 + (\sqrt{(Y)^2 - 4(V)})^2}{2^2}} \\
 &\left(\sqrt{\frac{(Y)^2 + (\sqrt{(Y)^2 - 4(V)})^2}{2^2}}\right)^2 \leq 1^2 \\
 &\frac{(Y)^2 + (\sqrt{(Y)^2 - 4(V)})^2}{2^2} \leq 1 \\
 &(Y)^2 + (Y)^2 - 4(V) \leq 4 \\
 &2(Y)^2 - 4(V) \leq 4 \\
 &\frac{1}{2}(Y)^2 - (V) \leq 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{5EI(x)\Delta t^2 - k_p l^2 \Delta x^2 \Delta t^2 + 2lE\Delta x^2 \Delta t^2 + 2M\rho l \Delta x^4}{M\rho l \Delta x^4 + k_b \eta \Delta t \Delta x^4}\right)^2 \\
 &-\left(\frac{M\rho l - k_b \eta \Delta t}{M\rho l + k_b \eta \Delta t}\right) \leq 1
 \end{aligned}$$

$$|\rho_2| = \sqrt{\frac{(Y)^2 - (\sqrt{(Y)^2 - 4(V)})^2}{2^2}}$$

$$\left( \sqrt{\frac{(Y)^2 - (\sqrt{(Y)^2 - 4(V)})^2}{2^2}} \right)^2 \leq 1^2$$

$$\frac{(Y)^2 - (\sqrt{(Y)^2 - 4(V)})^2}{2^2} \leq 1$$

$$(Y)^2 - (Y)^2 - 4(V) \leq 4$$

$$-4(V) \leq 4$$

$$-(V) \leq 1$$

$$-\left(\frac{M\rho l - k_b \eta \Delta t}{M\rho l + k_b \eta \Delta t}\right) \leq 1$$

Untuk  $\cos \alpha = 1$  disubstitusikan ke dalam persamaan (3.8), jika

$\frac{\sqrt{(4(Q) \cos^2 \alpha - 2(S) \cos \alpha - 2(Q) + (T))^2 - 4(V)}}{2}$  bernilai imajiner maka:

$$\frac{\sqrt{(2(Q) - 2(S) + (T))^2 - 4(V)}}{2}$$

dengan

$$Z = 2(Q) - 2(S) + (T)$$

$$|\rho_1| = \sqrt{\frac{(Z)^2 + (\sqrt{(Z)^2 - 4(V)})^2}{2^2}}$$

$$\left( \sqrt{\frac{(Z)^2 + (\sqrt{(Z)^2 - 4(V)})^2}{2^2}} \right)^2 \leq 1^2$$

$$\frac{(Z)^2 + (\sqrt{(Z)^2 - 4(V)})^2}{2^2} \leq 1$$

$$\begin{aligned}
(Z)^2 + (Z)^2 - 4(V) &\leq 4 \\
2(Z)^2 - 4(V) &\leq 4 \\
\frac{1}{2}(Z)^2 - (V) &\leq 1 \\
\left(\frac{M\rho l\Delta x^4}{M\rho l\Delta x^4 + k_b\eta\Delta t\Delta x^4}\right)^2 - \left(\frac{M\rho l - k_b\eta\Delta t}{M\rho l + k_b\eta\Delta t}\right) &\leq 1 \\
|\rho_2| = \sqrt{\frac{(Z)^2 - (\sqrt{(Z)^2 - 4(V)})^2}{2^2}} & \\
\left(\sqrt{\frac{Z - (\sqrt{(Z)^2 - 4(V)})^2}{2^2}}\right)^2 &\leq 1^2 \\
\frac{(Z)^2 - (\sqrt{(Z)^2 - 4(V)})^2}{2^2} &\leq 1 \\
(Z)^2 - (Z)^2 - 4(V) &\leq 4 \\
-4(V) &\leq 4 \\
-(V) &\leq 1 \\
-\left(\frac{M\rho l - k_b\eta\Delta t}{M\rho l + k_b\eta\Delta t}\right) &\leq 1
\end{aligned}$$

Dari perhitungan di atas pada saat  $\cos \alpha = -1$ ,  $\cos \alpha = 0$ , dan  $\cos \alpha = 1$

diperoleh  $|\rho_1|$  sebagai berikut:

Saat  $\cos \alpha = -1$  diperoleh  $|\rho_1|$

$$\left(\frac{8EI(x)\Delta t^2 + k_p l^2 \Delta x^2 \Delta t^2 + 2lE\Delta x^2 \Delta t^2 + M\rho l\Delta x^4}{M\rho l\Delta x^4 + k_b\eta\Delta t\Delta x^4}\right)^2 - \left(\frac{M\rho l - k_b\eta\Delta t}{M\rho l + k_b\eta\Delta t}\right) \leq 1 \quad (3.9)$$

Saat  $\cos \alpha = 0$  diperoleh  $|\rho_1|$

$$\left( \frac{5EI(x)\Delta t^2 - k_p l^2 \Delta x^2 \Delta t^2 + 2lE\Delta x^2 \Delta t^2 + 2M\rho l \Delta x^4}{M\rho l \Delta x^4 + k_b \eta \Delta t \Delta x^4} \right)^2 - \left( \frac{M\rho l - k_b \eta \Delta t}{M\rho l + k_b \eta \Delta t} \right) \leq 1 \quad (3.10)$$

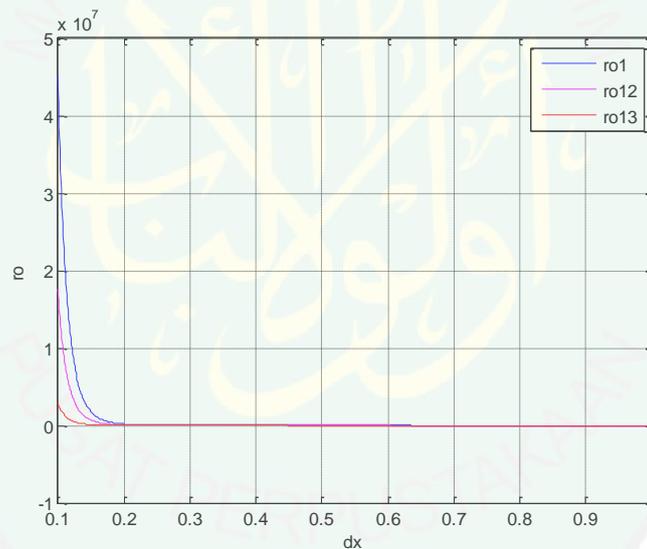
Saat  $\cos\alpha = 1$  diperoleh  $|\rho_1|$

$$\left( \frac{M\rho l \Delta x^4}{M\rho l \Delta x^4 + k_b \eta \Delta t \Delta x^4} \right)^2 - \left( \frac{M\rho l - k_b \eta \Delta t}{M\rho l + k_b \eta \Delta t} \right) \leq 1 \quad (3.11)$$

Dari perhitungan di atas pada saat  $\cos\alpha = -1$ ,  $\cos\alpha = 0$ , dan  $\cos\alpha = 1$  diperoleh  $|\rho_2|$  diperoleh

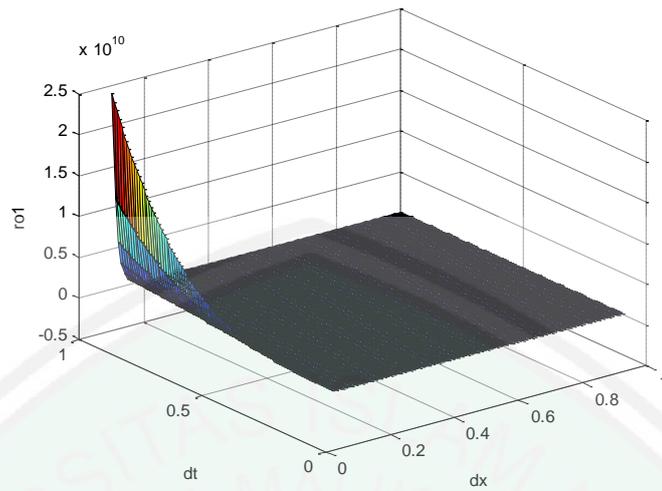
$$-1 \leq 1 \quad (3.12)$$

Selanjutnya persamaan (3.10), (3.11), dan (3.12) disajikan ke dalam bentuk grafik sebagai berikut

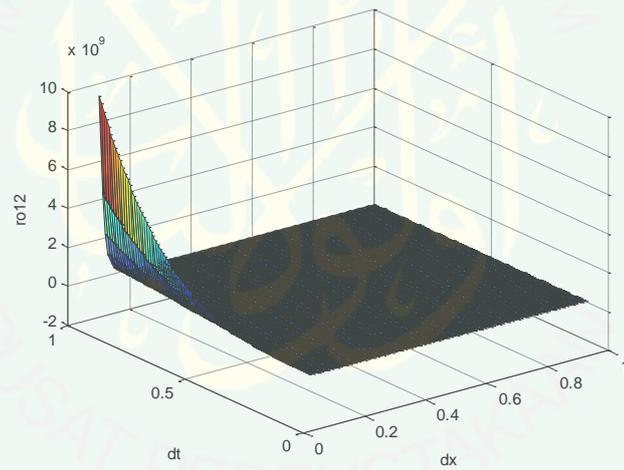


Gambar 3.5 Grafik Persamaan (3.9), (3.10), dan (3.11)

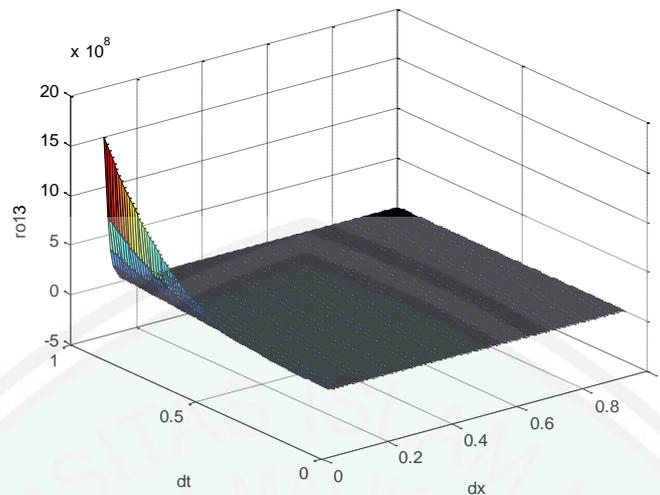
Dari gambar 3.5 tersebut diperoleh bahwa pada saat  $\Delta x \leq 0.3$  hasil dari persamaan (3.9), (3.10), dan (3.11) menghasilkan  $\rho \leq 1$ . Oleh karena itu, untuk syarat kestabilan telah terpenuhi. Untuk lebih memperjelas hasil dari persamaan (3.9), (3.10), dan (3.11) dapat disajikan dengan gambar sebagai berikut:



Gambar 3.6 Persamaan (3.9)



Gambar 3.7 Persamaan (3.10)



Gambar 3.8 Persamaan (3.11)

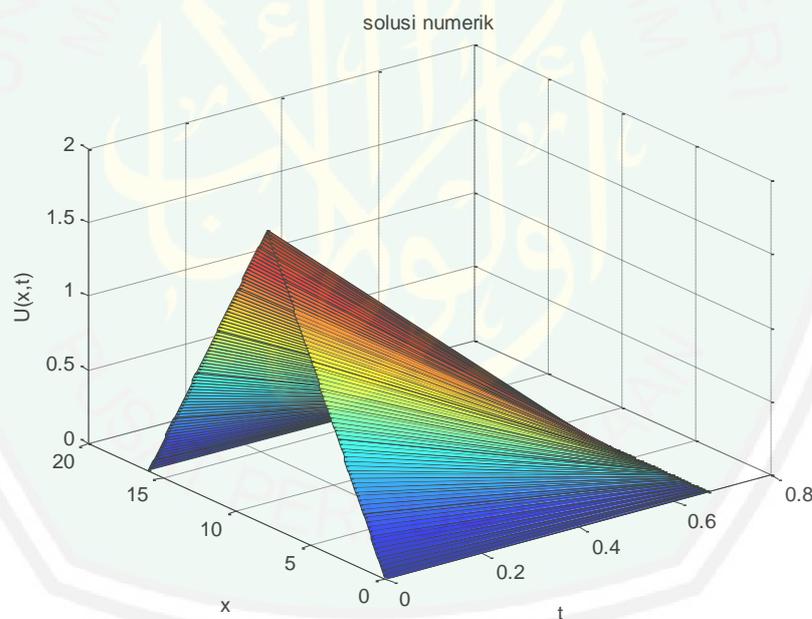
Dari Gambar 3.6, 3.7 dan Gambar 3.8 hasil persamaan (3.9), (3.10) dan persamaan (3.11) terdapat  $|\rho| \leq 1$  pada saat  $\Delta x \leq 1$ . Jika terdapat  $|\rho| \leq 1$  maka syarat kestabilan tidak akan terpenuhi, sehingga dalam hal ini syarat kestabilan diambil dari hasil persamaan (3.12) dengan  $|\rho| \leq 1$ .

### 3.3 Simulasi dan Interpretasi Hasil

Penjelasan mengenai cara menyelesaikan persamaan vibrasi dawai menggunakan skema eksplisit telah dibahas pada subbab sebelumnya. Untuk lebih memahami proses skema ini, akan ditunjukkan simulasi penyelesaian numerik persamaan vibrasi dawai menggunakan skema eksplisit. Pada subbab ini simulasi dilakukan menggunakan program MATLAB R2014a dan akan dilakukan interpretasi grafik terhadap hasil simulasi. Pada subbab ini simulai dilakukan menggunakan program MATLAB R2014b dan akan dilakukan interpretasi grafik terhadap hasil simulasi. Parameter-parameter yang digunakan dalam model pada persamaan (3.7) diantaranya adalah:

1. Konstanta pegas,  $k_p = 10 \text{ N/m}$
2. Panjang dawai  $l$
3. Faktor peredam,  $k_b = 1.5$

Simulasi pertama dilakukan dengan menggambarkan solusi  $u(x, t)$  yang bergantung terhadap keadaan  $x$  dan waktu  $t$  dalam grafik 3 dimensi untuk menggambarkan simpangan yang terjadi terhadap terhadap keadaan  $x$  dan waktu  $t$ . Simpangan awal yang diberikan mengikuti fungsi  $\sin(x) * \cos(x)$ , sehingga pada pergerakan awal gelombang yang terbentuk mengikuti fungsi  $\sin(x) * \cos(x)$ . Grafik hasil simulasi ditunjukkan pada gambar berikut:



Gambar 3.9 Grafik 3D Solusi Numerik Persamaan Vibrasi Dawai Menggunakan Skema CTCS

Gambar 3.9 menunjukkan hasil simulasi tiga dimensi persamaan vibrasi dawai terhadap ruang, waktu, dan gelombang  $u(x, t)$ . Dari grafik tersebut menunjukkan pada waktu  $t = 0$  gelombang mulai menaik hingga mencapai

$u(x, t) = 1,2$ , kemudian saat waktu  $t = 0,7$  gelombang menurun dengan  $u(x, t) = -1,2$ .



## **BAB IV**

### **PENUTUP**

#### **4.1 Kesimpulan**

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada bab sebelumnya, diperoleh kesimpulan mengenai simulasi numerik dari model vibrasi massa yang berjalan diatas *string* dengan menggunakan metode CTCS (*Central Time Central Space*), yaitu terlihat semakin lama dawai bergerak menuju posisi kesetimbangan. Dalam waktu 1 s, pergerakan solusi  $u(x, t)$  menuju ke titik kesetimbangan (0,0). Dari simulasi ini, dapat kita simpulkan perilaku gerak dawai semakin lama bergerak kembali ke keadaan semula yakni pada posisi setimbangan dawai.

#### **4.2 Saran**

Dalam penelitian ini, solusi numerik diselesaikan dengan menggunakan metode CTCS. Namun, banyak metode lain yang masih dapat digunakan untuk menemukan model ini. Semoga tulisan ini dapat dikembangkan lagi untuk penelitian selanjutnya.

## DAFTAR PUSTAKA

- Abdussakir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.
- Anwar. Dkk, 2014. Analisis Akord D Mayor pada Alat Musik Gitar Akustik. *Jurnal Fisika Indonesia* No: 54, Volume XVIII, Edisi Desember 2014, ISSN: 1410-2994.
- Bahrul, 2009. *Model Peredam Gelombang Laut yang Menyebabkan Evolusi terhadap Wilayah Pantai*. Malang: UIN Press
- Baiduri. 2002. *Persamaan Diferensial dan Matematika Model*. Malang: UMM Press.
- Basyuni, M.. 2007. *Al-Qur'an dan Tafsirnya Jilid 8*. Jakarta: Departemen Agama Republik Indonesia.
- Dasuki, H..1995. *Al-Qur'an dan Tafsirnya Jilid II*. Yogyakarta: PT Dana Bhakti Wakaf.
- Giancoli. D.C. 2014. *Fisika*. Alih bahasa oleh Hanum. Y. Jakarta:Airlangga
- Hestenes. D. 1987. Toward a Modelling Theory of Physics Instruction.*American Journal of Physics*, 55(5),440-454.
- Jalaludin, I.. 1993. *Riwayat Turunnya Ayat-Ayat Suci Al-Qur'an*. Semarang: CV Asy-Syifa'.
- Kusumastuti, Ari. 2016. *Solusi Analitik Model Vibrasi Massa yang Berjalan Diatas String*. Malang: UIN Malang
- Munir, Rinaldi. 2006. *Metode Numerik*. Bandung: INFORMATIKA.
- Strauss, A.W.. 2007. *Partial Differential Equations an Introduction Second Edition*. New York: john Wiley & Sons, Ltd.
- Tripler. P.A. 1998. *Fisika untuk Sains dan Teknik* (jilid I). Jakarta:Airlangga
- Triatmodjo, B.. 2002. *Metode Numerik Dilengkapi dengan Progam Komputer*. Yogyakarta: Beta Offset.
- Zauderer, E.. 2006. *Partial Differential Equations of Applied Mathematics Third Edition*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

## LAMPIRAN

## Lampiran 1. Grafik 2D Rho

```

E=20;
l=1;
I=3;
kp=10;
kb=1.5;
M=4;
m=2;
p=7;
dx=0.1:0.001:1;
dt=0.1;
%untuk cos a = -1
ro1 =
(((8.*E.*I.*(dt.^2))+(kp.*(l.^2).*(dx.^2).*(dt.^2))+(2.*l.*E.*(dx.^2).*(dt.^2))+(M.*p.*l.*(dx.^4)))/(M.*p.*l.*(dx.^4)+kb.*m.*dt.*(dx.^4)).^2)-(M.*p.*l-kb.*m.*(dt));
%untuk cos a = 0
ro12 = (((5.*E.*I.*(dt.^2))-
(kp.*(l.^2).*(dx.^2).*(dt.^2))+(2.*l.*E.*(dx.^2).*(dt.^2))+(2.*M.*p.*l.*(dx.^4)))/(M.*p.*l.*(dx.^4)+kb.*m.*dt.*(dx.^4)).^2)-(M.*p.*l-kb.*m.*(dt));
%untuk cos a = 1
ro13=(((M.*p.*l.*(dx.^4)))/(M.*p.*l.*(dx.^4)+kb.*m.*dt.*(dx.^4)).^2)-(M.*p.*l-kb.*m.*(dt));
plot(dx, ro1, 'b')
hold on
plot(dx, ro12, 'm')
plot(dx, ro13, 'r')
grid on
legend('ro1', 'ro12', 'ro13')
xlabel('dx')
ylabel('ro')

```

## Lampiran 2. Grafik 3D Rho

```

clc,clear
E=20;
l=1;
I=3;
kp=10;
kb=1.5;
M=4;
m=2;
p=7;
[dx,dt]=meshgrid(0.1:0.01:1,0.1:0.01:1);
figure (1)
%untuk cos a = -1
ro1 =
(((8.*E.*I.*(dt.^2))+(kp.*(l.^2).*(dx.^2).*(dt.^2))+(2.*l.*E.*(dx.^2).*(dt.^2))+(M.*p.*l.*(dx.^4)))/(M.*p.*l.*(dx.^4)+kb.*m.*dt.*(dx.^4)).^2)-(M.*p.*l-kb.*m.*(dt));
surf(dx,dt,ro1)
xlabel('dx')

```

```

ylabel('dt')
xlabel('ro1')
%untuk cos a = 0
figure(2)
ro12 = (((5.*E.*I.*(dt.^2))-
(kp.*(1.^2).*(dx.^2).*(dt.^2))+2.*l.*E.*(dx.^2).*(dt.^2))+2.*M.*
p.*l.*(dx.^4))./(M.*p.*l.*(dx.^4)+kb.*m.*dt.*(dx.^4)).^2)-
(M.*p.*l-kb.*m.*(dt));
surf(dx,dt,ro12)
xlabel('dx')
ylabel('dt')
zlabel('ro12')
%untuk cos a = 1
figure(3)
ro13=(((M.*p.*l.*(dx.^4))./(M.*p.*l.*(dx.^4)+kb.*m.*dt.*(dx.^4))
).^2)-(M.*p.*l-kb.*m.*(dt));
surf(dx,dt,ro13)
xlabel('dx')
ylabel('dt')
zlabel('ro13')

```

### Lampiran 3. Grafik 3D Solusi Numerik Persamaan Vibrasi Dawai

```

clc, clear all
E=20;
l=1;
I=3;
kp=10;
kb=1.5;
M=4;
m=2;
p=7;

kd=1.5; L=16; c=1;
dt=0.67;
dx=0.1;

t=0:dt:1;
x=0:dx:L;
n=1;
h=2;

K=length(x);N= length(t);

U=zeros(K,N);

for i=1:K
    if x(i)<0.5*L
        U(i,1)=2*h*x(i)/L;
    else
        U(i,1)=2*h-2*h*x(i)/L;
    end

    % U(i,1)=((8*h/n^2*pi^2)*(sin(n*pi/2)))*sin((n*pi/L)*x(i));
    % dt=(8*h*pi^3*sin((pi*n)/2)*cos((pi*n*x)/l))/(l*n)
    U(1,:)=0;

```

```

U(K,:) = 0;
end
for i = 2:K-1
    for j = 2:N-1

        A = (E*I*(dt^2)) / ((M*p*1*(dx^4)) + (kb*m*dt*(dx^4)));
        B = ((4*E*I*(dt^2)) -
            ((1/2)*kp*(l^2)*(dx^2)*(dt^2)) + (1*E*(dx^2)*(dt^2))) / (M*p*1*(dx^4) +
            kb*m*dt*(dx^4));
        C = ((6*E*I*(dt^2)) -
            (kp*(l^2)*(dx^2)*(dt^2)) + (2*1*E*(dx^2)*(dt^2)) + (2*M*p*1*(dx^4))) / (
            M*p*1*(dx^4) + kb*m*dt*(dx^4));
        D = ((M*p*1) - (kb*m*dt)) / ((M*p*1) + (kb*m*dt));
        U(i+1,j) = A*U(i,j+2) + A*U(i,j-2) -
        B*U(i,j+1) + C*U(i,j) + B*U(i,j-1) + D*U(i-1,j);
    end
end

figure (1)
surf(t,x,U)
title('solusi numerik')
xlabel('t'); ylabel('x'); zlabel('U(x,t)')
grid on

figure (2)
plot(x,U(:,2))
title('solusi numerik')
xlabel('x'); zlabel('U(x,t)')
grid on

```

## DAFTAR RIWAYAT HIDUP

Amita Pradana Putra lahir di Mojokerto pada tanggal 24 September 1993. Biasa dipanggil Arga Dana. Ia tinggal di Ds Penompo RT 12 RW 04 Kec Jetis Kab Mojokerto Jawa Timur. Ia merupakan anak pertama dari bapak Hartono dan ibu Siti Julaikah. Pendidikan dasarnya ditempuh di SDN Penompo II dan lulus pada tahun 2006. Sekolah tingkat pertama di SMP Tamansiswa Kota Mojokerto dan lulus pada tahun 2009. Sekolah tingkat atas ditempuh di SMA PGRI I Kota Mojokerto selama tiga tahun, dan selanjutnya menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang pada tahun 2011.



KEMENTERIAN AGAMA RI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI  
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Amita Pradana Putra  
NIM : 11610012  
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika  
Judul Skripsi : Simulasi Numerik Model Vibrasi Massa yang Berjalan  
Diatas String Menggunakan Metode CTCS  
Pembimbing I : Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si  
Pembimbing II : Muhammad Nafi' Jauhari, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	23 Februari 2018	Konsultasi Bab I	1.
2.	14 Maret 2018	Konsultasi Bab II	2.
3.	15 Maret 2018	ACC Bab I & Bab II	3.
4.	10 Maret 2018	Konsultasi Kajian Keagamaan	4.
5.	13 Maret 2018	Konsultasi Kajian Keagamaan	5.
6.	29 Maret 2018	Konsultasi Bab III	6.
7.	02 April 2018	Konsultasi Bab III	7.
8.	04 April 2018	ACC Bab III	8.
9.	11 April 2018	Konsultasi Bab IV	9.
10.	19 April 2018	Konsultasi Abstrak	10.
11.	24 April 2018	ACC Kajian Keagamaan	11.
12.	26 April 2018	ACC Bab IV	12.
13.	30 April 2018	ACC Abstrak	13.
14.	03 Mei 2018	ACC Keseluruhan	14.

Malang, 03 Mei 2018  
Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si  
NIP. 19650414 200312 1 001



**KEMENTERIAN AGAMA RI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI  
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933**

**BUKTI KONSULTASI SKRIPSI**

Nama : Amita Pradana Putra  
NIM : 11610012  
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika  
Judul Skripsi : Simulasi Numerik Model Vibrasi Massa yang Berjalan  
di Atas *String* Menggunakan Metode CTCS  
Pembimbing I : Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si  
Pembimbing II : Muhammad Nafi' Jauhari, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	23 Februari 2018	Konsultasi Bab I	1.
2.	14 Maret 2018	Konsultasi Bab II	2.
3.	15 Maret 2018	ACC Bab I & Bab II	3.
4.	10 Maret 2018	Konsultasi Kajian Keagamaan	4.
5.	13 Maret 2018	Konsultasi Kajian Keagamaan	5.
6.	29 Maret 2018	Konsultasi Bab III	6.
7.	02 April 2018	Konsultasi Bab III	7.
8.	04 April 2018	ACC Bab III	8.
9.	11 April 2018	Konsultasi Bab IV	9.
10.	19 April 2018	Konsultasi Abstrak	10.
11.	24 April 2018	ACC Kajian Keagamaan	11.
12.	26 April 2018	ACC Bab IV	12.
13.	30 April 2018	ACC Abstrak	13.
14.	03 Mei 2018	ACC Keseluruhan	14.

Malang, 03 Mei 2018  
Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si  
NIP. 19650414 200312 1 001