

**STUDI PROSES GERAK BROWN RELATIVISTIK DENGAN  
PENDEKATAN HANGGI-KLIMONTOVICH**

**SKRIPSI**

Oleh:

**IRHAM NAJMUDIN**

**NIM. 13640006**



**JURUSAN FISIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2018**

**STUDI PROSES GERAK BROWN RELATIVISTIK DENGAN  
PENDEKATAN HANGGI-KLIMONTOVICH**

**SKRIPSI**

**Diajukan kepada:**

**Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam  
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si.)**

**Oleh:**

**IRHAM NAJMUDIN**

**NIM. 13640006**

**JURUSAN FISIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2018**

**HALAMAN PERSETUJUAN**

**STUDI PROSES GERAK BROWN RELATIVISTIK DENGAN PENDEKATAN  
HANGGI-KLIMONTOVICH**

SKRIPSI

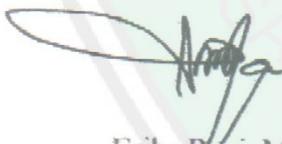
Oleh:

Irham Najmudin  
NIM. 13640006

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diseminarkan  
Pada tanggal 9 Mei 2018

Pembimbing I

Pembimbing II



Erika Rani, M.Si.  
NIP. 19810613 200604 2 002



Umayyatus Syarifah, M.A.  
NIP. 19820925 200901 2 005

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Fisika



Drs. Abdul Basid, M.Si.  
NIP. 19630504 199003 1 003

## HALAMAN PENGESAHAN

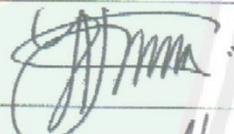
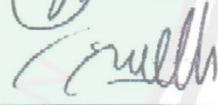
### STUDI PROSES GERAK BROWN RELATIVISTIK DENGAN PENDEKATAN HANGGI-KLIMONTOVICH

SKRIPSI

Oleh:

Irham Najmudin  
NIM. 13640006

Telah Dipertahankan di depan Dewan Penguji Skripsi dan Dinyatakan Diterima  
Sebagai Salah Satu Persyaratan Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si.)  
Tanggal: 23 Mei 2018

Penguji Utama:	<u>Dr. Imam Tazi, M.Si</u> NIP. 19740530 200312 1 002	
Ketua Penguji:	<u>Arista Romadani, M.Sc.</u> NIDT 19900905 20160801 1 072	
Sekretaris Penguji:	<u>Erika Rani, M.Si.</u> NIP. 19810613 200604 2 002	
Anggota Penguji:	<u>Umaiyatus Syarifah, M.A.</u> NIP. 19820925 200901 2 005	

Mengesahkan,  
Ketua Jurusan Fisika



Dr. Abdul Basid, M.Si.  
NIP. 19650504 199003 1 003

**PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN**

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Irham Najmudin

NIM : 13640006

Jurusan : Fisika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Penelitian : Studi Proses Gerak Brown Relativistik dengan Pendekatan  
Hanggi-Klimontovich

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa hasil penelitian saya ini tidak terdapat unsur-unsur penjiplakan karya penelitian atau karya ilmiah yang pernah dilakukan atau dibuat oleh orang lain, kecuali yang tertulis dikutip dalam naskah ini dan disebutkan dalam sumber kutipan dan daftar pustaka. Apabila ternyata hasil penelitian ini terbukti terdapat unsur-unsur jiplakan maka saya bersedia untuk menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, Mei 2018

Yang membuat pernyataan



Irham Najmudin

NIM. 13640006

## MOTTO

“Jika kamu tak mampu menjelaskan suatu hal kepada anak berusia 6 tahun, berarti kamu sendiri tidak mengerti”. (Feynman)

“Saya muslim karena saya percaya dengan pesan spiritual Al-Quran. Al-Quran banyak membantu saya dalam memahami Hukum Alam, dengan contoh-contoh fenomena kosmologi, biologi dan kedokteran sebagai tanda bagi seluruh manusia”. (Abdus Salam).

“Gravitasi bukan Gaya”

**HALAMAN PERSEMBAHAN**

**UNTUK KEDUA ORANG TUAKU DAN KELUARGAKU  
YANG SELALU MENJADI PENERANG DI KALA GELAP**

**UNTUK SIAPAPUN YANG MENCINTAI FISIKA DAN  
MEMBENCI FISIKA**

## KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadiran Allah SWT, yang atas rahmat, taufiq dan hidayah-Nya Sholawat serta salam semoga selalu tercurahkan kepada Nabi Agung Muhammad SAW serta para keluarga, sahabat dan pengikutnya sampai hari akhir kelak. Atas Ridho dan Kehendak Allah SWT, penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi yang berjudul *Studi Proses Gerak Brown Relativistik dengan Pendekatan Hanggi-Klimontovich*”, dengan baik. Penulis merasa Bersyukur diberi kesempatan oleh Allah SWT untuk belajar fisika di jenjang universitas

Pada penulisan skripsi, penulis menyadari masih banyak kekurangan dalam skripsi, terutama dalam pemilihan kata serta pengambilan informasi. Oleh karena saran dan kritik yang membangun sangat diperlukan penulis untuk tugas akhir dan lanjutan penelitian yang akan datang

Dalam penulisan Skripsi ini, Penulis menyadari bahwa terdapat pihak-pihak yang telah berpartisipasi dan membantu secara moril maupun materil. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terimakasih kepada semua pihak yang turut membantu laporan penelitian. Ucapan terimakasih, penulis sampaikan kepada:

1. Ayah, ibu, kakak, adik, serta semua keluarga besar yang selalu berdo'a dan memberikan dukungan moril dan materil kepada penulis dalam menyelesaikan perkuliahan di jurusan fisika.
2. Prof. Dr. Abdul Haris, M.Ag selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Sri Harini, M.Si selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Drs Abdul Basid, M.Si selaku Ketua Jurusan Fisika Jurusan Fisika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
5. Erika Rani, M.Si, Selaku dosen pembimbing penulisan skripsi ini, sekaligus dosen dan guru yang telah memberikan banyak arah petunjuk, motivasi dan ilmu sehingga penulis bisa menyelesaikan tugas belajar ini dengan baik

6. Arista Romadani, M.Sc., selaku dosen jurusan fisika yang telah memberikan banyak ilmu dan masukan terhadap penyelesaian penelitian ini.
7. Umaiatus Syarifah, M.A. selaku dosen pembimbing integrasi agama yang telah memberikan banyak nasehat mengenai integrasi.
8. Segenap dosen dan staf jurusan fisika yang tidak dapat disebutkan satu persatu
9. Teman-teman grup fisika teori, Zainul, Zuhairini, Ruby, Najib, Qomar, Kevin, Aini, dan lain-lain
10. Kawan-kawan S1 angkatan 2013 yang selalu memberikan motivasi, candaan dan semangat disetiap langkah perjalanan.
11. Pihak-pihak lain yang belum disebutkan namanya yang telah memberikan dukungan kepada penulis.

Demikian yang dapat penulisan sampaikan, kurang lebihnya mohon maaf. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat di kemudian hari dan membantu perkembangan fisika teori di Indonesia. Amin.

Malang, Mei 2018

Penulis

## DAFTAR ISI

<b>COVER</b> .....	i
<b>HALAMAN JUDUL</b> .....	ii
<b>HALAMAN PERSETUJUAN</b> .....	iii
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b> .....	iv
<b>HALAMAN PERNYATAAN</b> .....	v
<b>MOTTO</b> .....	vi
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b> .....	vii
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	viii
<b>DAFTAR ISI</b> .....	x
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xi
<b>DAFTAR LAMPIRAN</b> .....	xii
<b>ABSTRAK</b> .....	xiii
<b>ABSTRACT</b> .....	xiv
<b>المخلص</b> .....	xv
<b>BAB I PENDAHULUAN</b> .....	1
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	4
1.3 Tujuan Penelitian .....	5
1.4 Manfaat Penelitian .....	5
1.5 Batasan Masalah .....	6
<b>BAB II PROSES GERAK BROWN KLASIK</b> .....	7
2.1 Gerak Brown .....	7
2.2 Persamaan Langevin .....	13
2.3 Gerak Partikel Brown dalam Al-Quran .....	18
<b>BAB III PROSES STOKASTIK PADA GERAK BROWN</b> .....	25
3.1 Proses Stokastik .....	25
3.2 Proses Wiener .....	26
3.3 Persamaan Differensial Stokastik .....	31
3.4 Proses Difusi Klasik .....	32
3.5 Persamaan Fokker-Planck .....	34
<b>BAB IV PROSES GERAK BROWN RELATIVISTIK</b> .....	37
4.1 Persamaan Langevin Relativistik .....	37
4.2 Persamaan Fokker-Planck Relativistik .....	51
4.3 Karakteristik Rapat Peluang Persamaan Fokker-Planck Relativistik .....	63
<b>BAB V PENUTUP</b> .....	68
5.1 Kesimpulan .....	68
5.2 Saran .....	69
<b>DAFTAR PUSTAKA</b>	
<b>LAMPIRAN</b>	

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Skema Gerak Brown .....	7
Gambar 4.1	Hubungan Rapat Peluang kecepatan dengan kecepatan partikel untuk $\chi \leq 1$ .....	65
Gambar 4.2	Hubungan Rapat Peluang kecepatan dengan kecepatan partikel untuk $\chi \gg 1$ .....	66



## DAFTAR LAMPIRAN

- Lampiran 1 Pembuktian Persamaan Tensor Gesekan
- Lampiran 2 Penurunan Persamaan Langevin Relativistik pada Kerangka Laboratorium
- Lampiran 3 Pembuktian Nilai Eigen
- Lampiran 4 Metode *Cholesky Decomposition*
- Lampiran 5 Pendekatan Hanggi-Klimontovich
- Lampiran 6 Bentuk Integral Fungsi Bessel Termodifikasi Jenis Kedua
- Lampiran 7 Hubungan Rekursi Fungsi Bessel
- Lampiran 8 Script untuk Permodelan Rapat Peluang Kecepatan
- Lampiran 9 Bukti Konsultasi Skripsi



## ABSTRAK

Najmudin, Irham. 2018. **Studi Proses Gerak Brown Relativistik dengan Pendekatan Hanggi-Klimontovich**. Skripsi. Jurusan Fisika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (1) Erika Rani, M.Si (2) Umayyatus Syarifah, M.A

---

**Kata Kunci:** Gerak Brown, Proses Stokastik, Persamaan Langevin, Persamaan Fokker-Planck. proses gerak brown relativistik (1+3)-Dimensi. Pendekatan Hanggi-Klimontovich

Teori Gerak Brown telah berkembang sejak 60 tahun terakhir ini, penelitian tidak hanya dilakukan dalam bidang ekonomi dan biologi, namun juga berbagai bidang yang lain terutama dalam bidang astrofisika. Kajian Astrofisika mengenai gerak Brown sangat penting untuk dikembangkan karena pergerakan partikel disekitar bintang masif seperti bintang neutron dan lubang hitam mengikuti gerak Brown. Pada penelitian ini dibangun proses gerak Brown untuk kasus relativistik kemudian diperluas pada proses gerak Brown relativistik dalam ruang (1+3)-Dimensi. Perluasan ini dilakukan melalui persamaan Langevin yang menggambarkan dinamika partikel dan persamaan Fokker-Planck yang menggambarkan evolusi waktu dari proses gerak Brown. Solusi persamaan Fokker-Planck diselesaikan melalui pendekatan Hanggi-Klimontovich yang kemudian disimulasikan menggunakan program Python 2.7. Hasil penelitian diperoleh peluang menemukan partikel pada kecepatan tertentu melalui persamaan Fokker-Planck pendekatan Hanggi Klimontovich. Sedangkan simulasi menghasilkan grafik yang menunjukkan bahwa puncak grafik akan cenderung mendekati kelajuan cahaya jika kecepatan partikel mendekati kelajuan cahaya.

## ABSTRACT

Najmudin, Irham. 2018. **The Study Process of Relativistic Brownian Motion with Hanggi-Klimontovich Approach.** Thesis. Department of Physics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang. Supervisor: (1) Erika Rani, M.Si (2) Umayatus Syarifah, M.A

---

**Kata Keywords:** Brownian Motion, Stochastic Process, Langevin Equation, Fokker-Planck Equation, Relativistic Brownian Motion Process (3+1)-Dimensional, Hanggi-Klimontovich Approach

The theory of Brownian motion has grown in the last 60 years, research has not only done in economics and biology but also a variety of other fields, especially in the field of Astrophysics. Study of Astrophysics on the Brownian motion is very important to be developed due to the movement of the particles around the massive stars such as neutron stars and black holes follow the Brownian motion. It was built on the research of the process of Brownian motion for the relativistic case and then expanded in a process of Brownian motion of relativistic space (3 + 1)-dimensional. This is done through the expansion of the equations that describe the dynamics of a particle of Langevin and Fokker-Planck equations describing the evolution time of the process of Brownian motion. The Fokker Planck equation solution solved through approach Hanggi-Klimontovich which are then simulated using Python 2.7 program. The research results obtained odds of finding a particle at a particular speed through the Fokker-Planck equation with Hanggi-Klimontovich approach. While the simulation generates a graph that shows that the peak of the charts will tend to approach the speed of light if the particle speed approaches the speed of light.

## المخلص

نجم الدين، ارحم، 2018. دراسة عملية حركة براون *relativistic* بمنهج . بحث علمي. قسم الفيزياء كلية العلوم والتكنولوجيا بجامعة مولانا مالك إبراهيم مالانج الإسلامية الحكومية. تحت الاشراف (1) إريكا راني الماجستير و(2) أمية الصالحة الماجستير.

الكلمات الرئيسية : حركة النسبي وعملية *Stochastic* وتشابهه *Langevin* وتشابهه *Fokker-Planck* وعملية حركة براون (3+1) - البعد.

نشأت نظرية حركة براون منذ الستين عامًا الماضية. ولا يتم إجراء الأبحاث في مجال الاقتصاد والبيولوجيا فحسب بل في المجال الأخر خاصة في مجال الفيزياء الفلكية. وكانت دراسة الفيزياء الفلكية لحركة براون مهمة جدا للتطور بسبب حركة الجسيمات حول النجوم الضخمة مثل النجوم النيوترونية والثقوب السوداء بعد حركة براون. في هذا البحث قيمت عملية حركة براون لحالة *relativistic* ثم اتسعت في عملية حركة براون *relativistic* في الغرفة (3 + 1) - البعد. وكان هذا التوسع مفعولا من خلال تشابه *Langevin* الذي يتصور ديناميكا الجسيمات وتشابهه *Fokker-Planck* الذي يتصور تحول الوقت من عملية حركة براون. وحلول تشابه *Fokker-Planck* منهى من خلال مدخل *Hanggi-Klimontovich* المحاكاة باستخدام برنامج *Python 2.7*. تدل نتائج البحث على أن هناك الجسيمات بالسرعة المعينة من خلال تشابه *Fokker-Planck*. بمنهج *Hanggi-Klimontovich*. فأما المحاكاة فنتج الرسم البياني الذي يوضح أن غاية الرسم البياني تميل إلى اقتراب سرعة الضوء إذا اقتربت سرعة الجسيم إلى سرعة الضوء.

## BAB I PENDAHULUAN

### 1.1 Latar belakang

Alam semesta beserta isi yang terkandung di dalamnya tersusun atas partikel-partikel berukuran sangat kecil. Pada kondisi tertentu, gerak acak suatu partikel misalnya gerak partikel penyusun serbuk sari saat dilarutkan di dalam air akan memunculkan berbagai sifat-sifat serta fenomena yang sangat menarik untuk dipelajari dan diambil manfaatnya. Sebagai manusia, adalah sebuah kewajiban bagi kita mempelajari setiap kejadian alam termasuk pergerakan partikel sebagai bukti tanda kebesaran Allah SWT. Bukti keberadaan suatu partikel sebagai penyusun alam semesta telah dicantumkan sejak dulu yaitu dalam Al-Quran surat Saba' (34) ayat 3:

وَقَالَ الَّذِينَ كَفَرُوا لَا تَأْتِينَا السَّاعَةُ ۗ قُلْ بَلَىٰ وَرَبِّي لَتَأْتِيَنَّكُمْ ۗ عِلْمُ  
الْغَيْبِ ۗ لَا يَعْزُبُ عَنْهُ مِثْ ذَرَّةٍ فِي السَّمَوَاتِ وَلَا فِي الْأَرْضِ ۗ ضِ  
وَلَا أَصْغَرُ مِنْ ذَلِكَ وَلَا أَكْبَرُ إِلَّا فِي كِتَابٍ مُّبِينٍ ۙ ۓ

*" Dan orang-orang yang kafir berkata: " Hari berbangkit itu tidak akan datang kepada kami." Katakanlah: " Pasti datang, demi Tuhanku Yang Mengetahui yang ghaib, sesungguhnya kiamat itu pasti akan datang kepadamu. Tidak ada tersembunyi daripada-Nya sebesar zarrah pun yang ada di langit dan yang ada di bumi dan tidak ada (pula) yang lebih kecil dari itu dan yang lebih besar, melainkan tersebut dalam Kitab yang nyata (Lauh Mahfuzh) " (QS Saba' (34): 3)*

Robert Brown, seorang botanis asal Skotlandia pada tahun 1827 mengamati pergerakan partikel serbuk sari yang terlarut dalam cairan menggunakan mikroskop. Pengamatan Brown kemudian memberikan kesimpulan bahwa partikel tersebut bergerak terus-menerus dalam pola sangat tidak teratur dan gerak

partikel semakin cepat bila temperaturnya semakin tinggi. Fenomena ini kemudian dikenal sebagai gerak Brown.

Namun, pengamatan yang dilakukan Robert Brown ternyata tidak menjelaskan penyebab dari gerak acak tersebut, oleh karena itu Albert Einstein dan Von Smoluchowski (1905) meneliti penyebab gerak tersebut dan menerbitkan naskah yang menjelaskan secara mendetail mengenai konsep gerak Brown klasik atau difusi nonrelativistik. Mereka mengusulkan bahwa gerak Brown disebabkan oleh gerak acak dan interaksi partikel dengan molekul yang menyusun fluida. Partikel-partikel yang berukuran jauh lebih besar dibandingkan molekul penyusun fluida semua bagian partikel ditumbuki secara terus menerus oleh molekul tersebut. Karena jumlah molekul lebih banyak daripada partikel, maka menyebabkan terjadi gaya tidak seimbang yang pada gilirannya menyebabkan partikel tersebut bergerak dengan berbagai cara. Hasil pengamatan mereka kemudian menarik banyak peneliti dari berbagai bidang ilmu pengetahuan dalam menggunakan konsep gerak Brown untuk menjelaskan berbagai proses acak yang terjadi di alam.

Di bidang Astrofisika, proses gerak Brown menjadi menarik untuk dipelajari karena temuan dalam berbagai fenomena difusi benda langit semisal gerak partikel di sekitar bintang neutron, lubang hitam dan ruang antar galaksi berupa ruang plasma yang tersusun dari partikel-partikel bermuatan. Namun faktanya, beberapa difusi benda langit seperti bintang neutron dan lubang hitam proses gerak Brown tidak langsung bisa menjelaskan gerak acak partikel disekitarnya. Hal ini karena pada bintang neutron dan lubang hitam terjadi efek relativistik

akibat melengkungnya dan Bergeraknya ruang-waktu disekitarnya sehingga penjelasan proses difusi harus dikembangkan ke teori relativistik. Selain itu hal ini juga berkaitan dengan kerangka acuan dalam mengamati peristiwa gerak Brown.

Pada kajian relativistik, setiap orang memiliki ruang dan waktu yang berbeda sehingga pengamat-pengamat pada kerangka diam tidak sepakat mengenai posisi dan waktu terjadinya peristiwa. Hal ini juga terjadi pada bintang neutron dan lubang hitam dimana pemahaman difusi saat mengamati kerangka diam akan berbeda dengan difusi pada kerangka bergerak disekitar bintang neutron dan lubang hitam. Karena kerangka disekitar bintang berada di ruang hampa dan bergerak dengan mendekati kelajuan cahaya, maka saat mengamati gerak partikel dengan menggunakan analisis gerak Brown yang mengacu pada teori gerak Newton akan didapatkan kecepatan total yang melanggar postulat Einstein. Dari fakta diatas dapat diketahui perlunya solusi baru proses gerak Brown untuk kasus ruang (1+3)-dimensi.

Upaya memasukkan teori relativitas khusus pada konsep gerak Brown selama abad ini telah menarik banyak ilmuwan untuk mengembangkannya. diantaranya Hakim (1965) meneliti mengenai invariansi Lorentz pada proses Markov untuk kasus ruang datar. Debbash, Mallick dan Rivet (1997) merumuskan teori relativistik dari gerak Brown untuk pergerakan partikel dari ruang homogen menggunakan proses Ornstein-Uhlenbeck klasik. Kemudian Dunkel dan Hanggi (2005) merumuskan persamaan gerak brown relativistik pada kasus ruang (1+1)-dimensi menggunakan persamaan Fokker-Planck dan dinamika Langevin relativistik dan (2006) merumuskan kembali sebuah teori relativistik untuk gerak

brown dimulai dengan membangun persamaan Langevin relativistik dan diperoleh persamaan Fokker-Planck yang dapat ditulis sebagai persamaan kontinuitas pada kasus ruang (1+3)-dimensi dengan pengaruh gaya luar.

Persamaan Fokker-Planck dapat menggambarkan waktu evolusi dari fungsi kepadatan probabilitas dan posisi sebuah partikel. Persamaan Fokker-Planck dapat digunakan untuk deskripsi statistik gerak Brown serta aplikasi dalam fisika statistik untuk menjelaskan dinamika banyak partikel (Kadanoff,2000).

Konsep gerak brown memiliki aplikasi sangat luas dalam berbagai disiplin ilmu khususnya dalam astrofisika. Karena dengan mempelajarinya, dapat mengetahui gambaran dari distribusi setiap partikel pada berbagai fenomena benda langit, dan penting juga mengetahui sebaran materi di masa mendatang sehingga dapat mengungkapkan berbagai misteri alam semesta.

Oleh karena itu, fokus penelitian ini terdapat pada perluasan kajian mengenai gerak Brown relativistik. Adapun analisisnya akan berfokus menggunakan persamaan Langevin relativistik dan persamaan Fokker-Planck relativistik dengan pendekatan Hanggi-Klimontovich. Setelah itu dilakukan simulasi terhadap rapat peluang kecepatan partikel Brown dengan perbandingan kecepatan biasa dan kecepatan partikel mendekati kelajuan cahaya.

## **1.2 Rumusan masalah**

1. Bagaimana rapat peluang kecepatan proses gerak Brown relativistik dengan pendekatan Hanggi-Klimontovich?
2. Bagaimana karakteristik rapat peluang kecepatan proses gerak Brown relativistik dengan pendekatan Hanggi-Klimontovich?

### 1.3 Tujuan Penelitian

1. Memperoleh rapat peluang kecepatan proses gerak Brown relativistik dengan pendekatan Hanggi-Klimontovich.
2. Memperoleh karakteristik rapat peluang kecepatan proses gerak Brown relativistik dengan pendekatan Hanggi-Klimotovich.

### 1.4 Batasan Masalah

1. Fluida tempat terjadinya gerak brown adalah yang homogen dan isotropik.
2. Kerangka acuan yang digunakan berupa kerangka acuan inersia
3. Proses gerak Brown ditinjau dalam kerangka teori relativitas khusus
4. Gerak Brown yang di analisis masih dalam keadaan makroskopik.
5. Proses difusi yang ditinjau adalah persamaan Fokker-Planck.
6. Pendekatan persamaan Fokker-Planck yang digunakan yaitu pendekatan Hanggi-Klimontovich.
7. Plot grafik rapat peluang kecepatan digunakan adalah grafik 2 dimensi dengan memakai program Python 2.7.4.

### 1.5 Manfaat Penelitian

1. Untuk mengetahui proses difusi relativistik secara umum dan secara khusus penerapannya dalam memahami pergerakan partikel Brown relativistik ketika dipengaruhi oleh ruang 1+3-dimensi.
2. Sebagai dasar untuk penelitian selanjutnya, terutama dalam memahami pergerakan tumbukan partikel atom serta proses difusi pada benda angkasa semisal difusi pada inti bintang neutron.
3. Sebagai langkah awal dalam pengembangan teknologi keantariksaan, terutama teknologi untuk mempelajari proses difusi pada benda angkasa seperti planet dan bintang.

## BAB II PROSES GERAK BROWN KLASIK

### 2.1 Gerak Brown

Gerak Brown adalah gerak acak atau gerak terus-menerus dari partikel saat dimasukkan dalam suatu fluida (cair ataupun gas). Gerak ini dinamakan gerak Brown karena yang pertama kali mengamati adalah seorang botanis asal Skotlandia bernama Robert Brown pada tahun 1827. Menggunakan mikroskop, Brown menemukan gejala gerak acak saat mengamati partikel dari serbuk sari ketika dilarutkan dalam air dimana partikel menyebar ke segala arah dengan lintasan yang tidak teratur. Brown kemudian mengambil kesimpulan bahwa lintasan dari gerak partikel sangat tidak teratur dan gerakan akan semakin cepat bila temperatur dinaikkan.



**Gambar 2.1** Skema gerak Brown (Anonymous, 2015)

Setelah Brown, Seorang peneliti bernama Gouy melakukan eksperimen untuk membuktikan keberadaan gerak Brown dan mendapatkan kesimpulan sebagai berikut:

1. Gerakan ini sangat tidak teratur, gabungan dari translasi dan rotasi dan lintasannya nampak tidak mempunyai garis singgung.

2. Dua partikel nampak bergerak secara saling bebas, bahkan ketika mereka mendekati satu sama lain dalam jarak yang lebih dekat dibandingkan diameter mereka.
3. Gerakan ini semakin cepat untuk partikel yang semakin kecil.
4. Gerakan ini tidak dipengaruhi oleh komposisi dan rapatan partikel.
5. Gerakan ini semakin cepat dalam fluida yang viskositasnya semakin kecil.
6. Gerakan ini semakin cepat pada suhu yang semakin tinggi
7. Gerakan ini tidak pernah berhenti

Penelitian dari kedua ilmuwan tersebut tidak memberikan penjelasan mengenai penyebab gerak Brown namun hanya menyatakan sifat-sifat gerak Brown tersebut. Penjelasan mengenai asal usul gerak Brown pertama kali dilakukan oleh Einstein. Melalui disertasinya, Einstein mengasumsikan bahwa gerak acak dari partikel-partikel serbuk sari tersebut berasal dari tumbukan molekul-molekul penyusun fluida yang bergerak terus-menerus dalam fluida dan pergerakan dari partikel serbuk sari sangat tidak teratur sehingga hanya dapat dijelaskan menggunakan konsep probabilistik.

Didefinisikan partikel berjumlah  $n$  bergerak dalam suatu fluida dan memiliki interval waktu  $\tau$ , di dalam interval tersebut masing-masing partikel yang bergerak searah dengan koordinat sumbu-  $X$  akan meningkat sejauh  $\Delta$ . Karena setiap partikel tidak mempengaruhi satu dengan yang lain, memiliki nilai interval waktu, serta pergeseran yang sangat kecil dan berbeda-beda, maka jumlah partikel  $dn$  yang mengalami pergeseran antara selang  $\Delta$  dan  $\Delta + d\Delta$  memiliki bentuk persamaan

$$dn = n\phi(\Delta)d\Delta \quad (2.1)$$

dimana  $n$  adalah jumlah partikel yang terlarut dalam fluida,  $\phi$  adalah fungsi atau pemetaan partikel pada selang  $\Delta$  dan  $\Delta + d\Delta$  dan memenuhi fungsi genap  $\phi(\Delta) = \phi(-\Delta)$ . Kemudian diasumsikan juga jumlah partikel dalam fluida tersebut sangat banyak memenuhi fungsi kontinuitas dengan

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\Delta)d\Delta = 1 \quad (2.2)$$

Untuk melihat bagaimana koefisien difusi dapat bergantung  $\phi$ . Didefinisikan kembali  $f(x, t)$  adalah jumlah partikel per satuan volume yang bergantung pada  $x$  dan  $t$ . sehingga distribusi jumlah partikel yang ditemukan pada saat  $t + dt$  dari  $t$  yang tegak lurus terhadap sumbu- $X$  melalui titik  $x$  dan  $x + dx$  adalah

$$f(x, t + \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - \Delta, t)\phi(\Delta)d\Delta \quad (2.3)$$

karena dalam distribusi partikel terjadi pada interval waktu yang sangat singkat, maka persamaan dapat diatur menjadi

$$f(x, t + \tau) = f(x, t) + \tau \frac{\partial f}{\partial t} \quad (2.4)$$

selanjutnya,  $f(x - \Delta, t)$  diekspansikan menggunakan deret Taylor menjadi

$$f(x - \Delta, t) = f(x, t) - \Delta \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\Delta^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dots \quad (2.5)$$

kemudian persamaan (2.4) dan (2.5) dimasukkan ke dalam persamaan (2.3) didapatkan

$$f(x, t) + \tau \frac{\partial f}{\partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ f(x, t) - \Delta \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\Delta^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dots \right] \phi(\Delta)d\Delta$$

$$\begin{aligned}
&= f \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\Delta) d \Delta - \frac{\partial f}{\partial x} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta \phi(\Delta) d \Delta \\
&\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta^2}{2!} \phi(\Delta) d \Delta
\end{aligned} \tag{2.6}$$

karena fungsi genap  $\phi(\Delta) = \phi(-\Delta)$ , maka suku kedua ruas kanan persamaan (2.6) memiliki nilai

$$\frac{\partial f}{\partial x} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta \phi(\Delta) d \Delta = 0 \tag{2.7}$$

selain itu, sifat integral pada (2.2) mengakibatkan persamaan (2.6) diungkapkan kembali menjadi

$$\begin{aligned}
f + \tau \frac{\partial f}{\partial t} &= f + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta^2}{2!} \phi(\Delta) d \Delta \\
\tau \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta^2}{2!} \phi(\Delta) d \Delta
\end{aligned} \tag{2.8}$$

dikalikan dengan  $\frac{1}{\tau}$  didapatkan

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{\tau} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta^2}{2} \phi(\Delta) d \Delta \tag{2.9}$$

selanjutnya, didefinisikan

$$D = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta^2}{2} \phi(\Delta) d \Delta \tag{2.10}$$

sehingga didapatkan ungkapan persamaan

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \tag{2.11}$$

persamaan diatas adalah persamaan diferensial orde dua untuk kasus difusi dan D adalah koefisien difusi.

Persamaan (2.11) kemudian dicari solusinya dengan menggunakan transformasi Fourier. Diketahui  $f(x, t)$  adalah transformasi Fourier yang memenuhi

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ikx} F(x, t) \quad (2.12)$$

dan inversnya

$$F(x, t) = \int dx e^{ikx} f(x, t) \quad (2.13)$$

persamaan (2.12) dimasukkan ke dalam persamaan difusi (2.11) didapatkan

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \left[ \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ikx} F(x, t) \right]}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 \left[ \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ikx} F(x, t) \right]}{\partial x^2} \\ \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ikx} \frac{\partial F(x, t)}{\partial t} &= D \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ikx} [-k^2 F(x, t)] \\ \frac{\partial F}{\partial t} &= -Dk^2 F \end{aligned} \quad (2.14)$$

dari kedua ruas pada persamaan (2.14) didapatkan

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial F}{F} &= \int -Dk^2 \partial t \\ F &= e^{-Dk^2 t} \end{aligned} \quad (2.15)$$

selanjutnya, solusi persamaan (2.15) dimasukkan ke dalam persamaan (2.12)

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ikx} e^{-Dk^2 t} \quad (2.16)$$

dengan

$$e^{ikx} e^{-Dk^2 t} = \exp(ikx - Dk^2 t)$$

$$\begin{aligned}
&= \exp\left(ikx - Dk^2t + \frac{x^2}{4Dt} - \frac{x^2}{4Dt}\right) \\
&= \exp\left(Dt\left[\frac{ikx}{Dt} - k^2 + \frac{x^2}{4(Dt)^2}\right] - \frac{x^2}{4Dt}\right) \\
&= \exp\left(-Dt\left[k^2 - \frac{ikx}{2Dt} - \frac{ikx}{2Dt} + \left(\frac{x}{2Dt}\right)^2\right] - \frac{x^2}{4Dt}\right) \\
&= \exp\left(-Dt\left[k - \frac{ix}{2Dt}\right]^2 - \frac{x^2}{4Dt}\right) \tag{2.17}
\end{aligned}$$

persamaan (2.17) disubstitusikan ke (2.16) menjadi

$$\begin{aligned}
f(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int dk e^{-Dt(k-ix/2Dt)^2} e^{-x^2/4Dt} \\
&= \frac{e^{-x^2/4Dt}}{2\pi} \int dk e^{-Dt(k-ix/2Dt)^2} \tag{2.18}
\end{aligned}$$

diketahui integral Gaussian

$$\int dk e^{-a(k-b)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{2.19}$$

sehingga

$$\begin{aligned}
f(x, t) &= \frac{e^{-x^2/4Dt}}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{Dt}} \\
&= \frac{e^{-x^2/4Dt}}{\sqrt{4\pi Dt}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-x^2/4Dt} \tag{2.20}
\end{aligned}$$

persamaan diatas mirip seperti bentuk persamaan untuk distribusi Gauss

$$P\{x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2(\sigma)^2}\right) \tag{2.21}$$

dimana  $4Dt$  merupakan koefisien difusi dan simpangan baku  $(\sigma)^2$  pada distribusi Gauss (2.21) menunjukkan bagaimana partikel tersebar dalam suatu interval tertentu serta dapat ditulis dalam bentuk perpindahan setiap partikel yang bergerak searah sumbu-x, yaitu

$$\lambda_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x_0^2 \rangle} = \sqrt{2Dt} \quad (2.22)$$

hasil diatas menunjukkan sifat dari gerak dan nilai koefisien difusi berdasarkan beberapa asumsi namun tidak memperlihatkan teori dinamika dari gerak Brown.

## 2.2 Persamaan Langevin

Teori dinamika dari gerak Brown kemudian disusun oleh Langevin (1908). Pergerakan partikel Brown tunggal pada dasarnya mengikuti hukum gerak Newton. Partikel Brown bergerak disekitar ruang karena mengikuti gaya resultan  $F$  yang diakibatkan dari tumbukan dengan molekul pelarut. Gerak Brown bisa dipelajari menggunakan hukum kedua Newton (Scoot, 2013)

$$\sum F = m a = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (2.23)$$

Sebuah partikel yang bermassa  $m$  dan bergerak pada suatu fluida diatur oleh dua gaya:

1. Gaya hambat ( $f_d$ ), misalkan sebuah partikel berbentuk bola bergerak lambat dalam suatu fluida dengan kekentalan tertentu, persamaan diungkapkan sebagai  $f_d = -b \frac{dx}{dt}$ , dimana tanda negatif menunjukkan gaya hambat berlawanan arah dengan kecepatan partikel,  $b$  adalah tetapan gaya hambat yang mengikuti gaya Stokes  $b = 6\pi\eta r$  dengan  $r$  adalah diameter

partikel dan  $\eta$  adalah viskositas dari fluida tersebut, terakhir  $\frac{dx}{dt}$  adalah kecepatan partikel.

2. Gaya fluktuatif  $f_r(t)$ , dimana menunjukkan dampak pergerakan terus-menerus dari partikel akibat bertumbukan dengan molekul-molekul penyusun fluida.

sehingga persamaan gerak suatu partikel Brown diberikan oleh

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -b \frac{dx}{dt} + f_r(t) \quad (2.24)$$

Persamaan Langevin (2.24) menggambarkan dinamika suatu partikel saat bergerak acak atau distribusi kecepatan setiap mengalami tumbukan. Penggambaran dinamika partikel ini dimaksudkan agar analisis dapat dikembangkan untuk mengetahui evolusi suatu rapat peluang lintasan dari proses gerak Brown saat bergerak dalam suatu lintasan. Masing-masing ruas persamaan (2.24) dikalikan  $x(t)$  *differentiable* menjadi

$$m \frac{d^2x}{dt^2} x = -b \frac{dx}{dt} x + f_r(t)x \quad (2.25)$$

dengan menggunakan aturan Leibniz diketahui

$$xu = x \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dx^2}{dt} \quad (2.26)$$

dan

$$x \frac{du}{dt} = x \frac{d(xu)}{dt} - u^2 = \frac{1}{2} \frac{d^2x^2}{dt^2} - u^2 \quad (2.27)$$

maka diperoleh bentuk persamaan baru

$$\frac{m}{2} \frac{d^2}{dt^2} (x^2) - mv^2 = -\frac{b}{2} \frac{d}{dt} (x^2) + x f_r(t) \quad (2.28)$$

$f_r(t)$  adalah gaya fluktuatif akibat partikel yang terus-menerus bertumbukan dengan molekul-molekul fluida dari segala arah. Hal ini mengakibatkan  $f_r(t)$  mempunyai lintasan acak atau lintasan ketidakteraturan yang tinggi sehingga persamaan (2.28) bukan lagi persamaan differensial biasa. Selanjutnya, di asumsikan sekelompok partikel Brown mempunyai keadaan sama. Persamaan (2.28) dapat ditulis menggunakan bentuk umum rata-rata partikel menjadi

$$\frac{m}{2} \frac{d^2x}{dt^2} \langle x^2 \rangle - \langle mv^2 \rangle = -\frac{b}{2} \frac{dx}{dt} \langle x^2 \rangle + \langle xf_r(t) \rangle \quad (2.29)$$

didefinisikan energi kinetik rata-rata partikel Brown (akibat gerak acak) yang terdistribusi ke seluruh ruangan dalam keadaan kesetimbangan termal sama dengan energi kinetik gas ideal pada kondisi sama sehingga

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} k_B T \quad (2.30)$$

dimana  $k_B$  adalah konstanta Boltzman dan  $T$  adalah suhu partikel pada gas ideal. Persamaan (2.29) dapat diungkapkan kembali

$$\frac{m}{2} \frac{d^2x}{dt^2} \langle x^2 \rangle - k_B T = -\frac{b}{2} \frac{dx}{dt} \langle x^2 \rangle + \langle xf_r(t) \rangle \quad (2.31)$$

perkalian  $\langle xf_r(t) \rangle$  menuju ke 0 akibat ketidakteraturan pada  $f_r(t)$  sehingga

$$\frac{m}{2} \frac{d^2x}{dt^2} \langle x^2 \rangle - k_B T = -\frac{b}{2} \frac{dx}{dt} \langle x^2 \rangle$$

$$\frac{m}{2} \frac{d^2x}{dt^2} \langle x^2 \rangle + \frac{b}{2} \frac{dx}{dt} \langle x^2 \rangle = k_B T$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} \langle x^2 \rangle + b \frac{dx}{dt} \langle x^2 \rangle = 2k_B T \quad (2.32)$$

untuk solusi dari persamaan (2.32) diasumsikan  $\frac{d}{dt} = D$  dan  $\langle x^2 \rangle = y$

$$mD^2y + bDy = 2k_B T \quad (2.33)$$

persamaan (2.33) kemudian dikalikan  $\frac{1}{m}$  didapatkan

$$D^2y + \frac{b}{m}Dy = \frac{2k_B T}{m} \quad (2.34)$$

dimisalkan  $\frac{b}{m} = \gamma$ , persamaan (2.34) bisa ditulis kembali dalam bentuk persamaan differensial linear orde satu

$$\begin{aligned} D^2y + \gamma Dy &= \frac{2k_B T}{m} \\ Dy(D + \gamma) &= \frac{2k_B T}{m} \end{aligned} \quad (2.35)$$

diketahui  $Y = Dy$ ,  $P(t) = \gamma$ , dan  $Q(t) = \frac{2k_B T}{m}$ , solusi persamaan (2.35) dapat dicari dengan menggunakan metode faktor integral

$$Ye^{\int P(t)dt} = \int [Q(t)e^{\int P(t)dt}] dt + C$$

$$Dye^{\int \gamma dt} = \int \left[ \frac{2k_B T}{m} e^{\int \gamma dt} \right] dt + C$$

$$Dye^{\gamma t} = \int \left[ \frac{2k_B T}{m} e^{\gamma t} \right] dt + C$$

$$Dy = e^{-\gamma t} \int \left[ \frac{2k_B T}{m} e^{\gamma t} \right] dt + e^{-\gamma t} C$$

$$Dy = e^{-\gamma t} \frac{2k_B T}{m\gamma} e^{\gamma t} + e^{-\gamma t} C$$

$$Dy = \frac{2k_B T}{m\gamma} + Ce^{-\gamma t} \quad (2.36)$$

karena  $\frac{d}{dt} = D$ ,  $\langle x^2 \rangle = y$  dan  $\frac{b}{m} = \Upsilon$ , maka didapatkan

$$\frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = \frac{2k_B T}{m \frac{b}{m}} + C e^{-\Upsilon t}$$

$$\frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = \frac{2k_B T}{b} + C e^{-\Upsilon t} \quad (2.37)$$

dimana C adalah konstanta.

Apabila  $t$  sangat kecil dan mencapai  $t = 10^{-8}$  peluruhan  $C e^{-\Upsilon t}$  akan mendekati nol sehingga

$$\frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = \frac{2k_B T}{b} \quad (2.38)$$

kedua ruas kemudian di integralkan

$$\int_{x_0}^x d\langle x^2 \rangle = \int_0^t \frac{2k_B T}{b} dt$$

$$x^2 - x_0^2 = \frac{2k_B T}{b} t \quad (2.39)$$

dalam pendekatan Einstein (2.22) diketahui  $x^2 - x_0^2 = 2Dt$  sehingga

$$2Dt = \frac{2k_B T}{b} t$$

$$D = \frac{k_B T}{b} \quad (2.40)$$

dengan  $D$  adalah koefisien difusi,  $k_B$  adalah konstanta Boltzman,  $T$  adalah temperatur partikel pada gas ideal dan  $b$  merupakan gaya stokes.

### 2.3 Gerak Partikel Brown dalam Al-Quran

Gerak Brown merupakan nama lain gerak suatu partikel yang tidak beraturan. Hal ini berarti keberadaan partikel menjadi suatu acuan sangat penting dalam analisis gerak Brown. Keberadaan partikel di dalam Al- Quran dijelaskan Surat Saba'(34): 3 dan surat An-Nisa'(4): 40 yaitu

وَقَالَ الَّذِينَ كَفَرُوا لَا تَأْتِينَا السَّاعَةُ ۗ قُلْ ۗ بَلَىٰ وَرَبِّي لَتَأْتِيَٰنَكُمْ ۗ عِلْمُ  
 آلِ عَادٍ ۗ بَلَىٰ ۗ لَا يَعْزُبُ عَنْهُ مِثْ ذَرَّةٍ فِي السَّمُوتِ وَلَا فِي الْأَرْضِ  
 وَلَا أَصْغَرَ مِنْ ذَلِكَ وَلَا أَكْبَرَ إِلَّا فِي كِتَابٍ مُّبِينٍ ۓ

*” Dan orang-orang yang kafir berkata:” Hari berbangkit itu tidak akan datang kepada kami.” Katakanlah:” Pasti datang, demi Tuhanku Yang Mengetahui yang ghaib, sesungguhnya kiamat itu pasti akan datang kepadamu. Tidak ada tersembunyi daripada-Nya sebesar zarah pun yang ada di langit dan yang ada di bumi dan tidak ada(pula) yang lebih kecil dari itu dan yang lebih besar, melainkan tersebut dalam Kitab yang nyata (Lauh Mahfuzh)” (QS Saba’ ,(34): 3).*

إِنَّ اللَّهَ لَا يَظُنُّ ۗ مِثْ ذَرَّةٍ ۗ وَإِن تَكُ حَسَنَةً يُضْعِفُ ۗهَا وَيُؤْتِ ۗتِ مِنْ لَدُنْ ۗهُ  
 أَجْرًا عَظِيمًا ٤٠

*Sesungguhnya Allah tidak menganiaya seseorang walaupun sebesar zarah, dan jika ada kebajikan sebesar zarah, niscaya Allah akan melipat gandakannya dan memberikan dari sisi-Nya pahala yang besar (QS An-Nisa’ , (3) :40).*

Kata “zarah” memiliki beberapa makna. Dalam mushaf Al-Quran terjemahan bahasa indonesia yang diterbitkan oleh King Fadh Madinah, “zarah” diartikan sebagai “zarah” saja, namun terdapat tambahan di catatan kakinya yaitu pada surat Saba’ ayat 3 dijelaskan, “zarah adalah jenis yang terkecil dari semut, orang Arab mengungkapkan sesuatu yang paling kecil dengan sebutan zarah”. Sedangkan pada catatan kaki surat An-Nisa’ ayat 40 juga dijelaskan “zarah adalah sesuatu yang terkecil dan teringan”.

Sedangkan dalam kitab tafsir *Aiisuru At-Tafaasir* yang disusun oleh Syaikh Abu bakar Al-Jaza'i, menjelaskan mengenai surat An-Nisa' ayat 40 yaitu "dan *zarrah* adalah sesuatu yang kecil di alam, dahulu ada yang mengatakan bahwa *zarrah* adalah debu atau kepala dari semut kecil, dan *zarrah* adalah bagian yang paling kecil".

Penjelasan di atas kemudian diperkuat dalam kitab tafsir Juz 'Amma karangan Syeikh Ibnu Utsaimin "dan yang dimaksudkan dengan *zarrah* adalah seekor semut kecil yang sudah dimaklumi. Jadi, *zarrah* itu bukan atom sebagaimana yang dikatakan orang-orang sekarang, karena pada saat itu atom belum dikenal. Allah SWT tidak berfirman pada satu kaum kecuali dengan bahasa yang mereka pahami. Dan penyebutan *zarrah* di sini adalah sebagai ungkapan bagi sesuatu yang paling kecil". Hal ini juga ditambahkan dalam Tafsir Al-Azhar karya Prof. Dr. Buya Hamka dimana dijelaskan "di zaman dahulu penyelidikan tentang *zarrah* belum meluas sebagaimana sekarang. Sekarang ini tentu tafsiran *zarrah* sudah lebih hebat lagi setelah orang memecahkan rahasia atom. Sekarang, atom (a tidak, tom terbagi) sudah nyata terbagi".

Dari berbagai penjelasan di atas dapat diambil sebuah kesimpulan bahwa *zarrah* dapat diartikan sebagai sesuatu atau partikel paling kecil yang menyusun benda, namun pengertian ini disesuaikan dengan konteks zaman. Sesuai dengan yang dijelaskan oleh Syeikh Ibnu Utsmaini "Allah SWT tidak berfirman pada satu kaum kecuali dengan bahasa yang mereka pahami", yaitu pada zaman ketika ayat tersebut diturunkan orang-orang memaknai sesuatu yang paling kecil sebatas seukuran debu atau semut kecil. Menyesuaikan dengan perkembangan zaman dan

penelitian yang dilakukan oleh banyak ilmuwan, dibuktikan bahwa ternyata terdapat partikel lebih kecil menyusun debu dan semut kecil yang kemudian hari definisi *zarrah* diperdalam untuk menunjukkan pengertian atom.

Lebih lanjut lagi pada tahun 1973 penemuan yang dilakukan oleh David J. Gross, Frank Wilczek dan H. David Politzer didapatkan partikel bernama quark yang merupakan partikel penyusun atom sehingga pengertian *zarrah* diperluas lagi untuk menunjukkan keberadaan partikel quark (Bayu, 2013).

Penemuan-penemuan selanjutnya kemudian juga menunjukkan berbagai hal baru tentang partikel yang sangat menarik untuk dipelajari. Salah satunya adalah sistem gerak partikel. Sistem gerak partikel dalam alam semesta telah diketahui mengikuti bentuk gerak Brown. Gerak Brown merupakan gerak partikel acak atau partikel yang bergerak dan memiliki lintasan tidak teratur. Untuk mempelajari dan menganalisis sistem gerak acak terutama ketika acuannya berupa kerangka atau wadah berisi ribuan partikel bergerak acak, maka tidak bisa menggunakan teori gerak Newton biasa. Hal ini karena Newton menggunakan lintasan gerak lurus untuk mempelajari sistem gerak dan berfokus pada pergerakan satu benda. Sehingga alternatifnya adalah menggunakan teori peluang.

Peluang merupakan salah satu bentuk perkiraan. Peluang atau kebolehjadian adalah angka atau nilai yang menunjukkan kemungkinan terjadinya suatu kejadian. Konsep ini biasa digunakan dalam bidang statistik dan sains untuk melihat sifat fenomena ketika suatu penelitian menghasilkan data acak yang sangat banyak dan juga digunakan untuk memprediksi kemungkinan terjadinya

suatu fenomena di masa depan dengan memakai data penelitian yang telah diambil di masa sekarang.

Peluang memiliki banyak manfaat, dalam Islam ilmu peluang digunakan untuk mengetahui perubahan siang dan malam, mengetahui arah kiblat dan menentukan waktu sholat serta hari-hari besar dalam kalender hijriyah. Ilmu ini dinamakan ilmu Falak. Ihwal mengenai ilmu Falak juga terdapat pada surat yunus (10): 5-6 yaitu

هُوَ الَّذِي جَعَلَ الشَّمْسَ ضِيَاءً وَالْقَمَرَ نُورًا وَقَدَرَهُ مَنَازِلَ لِتَعْلَمُوا عَدَدَ السِّنِينَ وَالْحِسَابَ مَا خَلَقَ اللَّهُ ذَلِكَ إِلَّا بِالْحَقِّ يُفَصِّلُ الْآيَاتِ لِقَوْمٍ يَعْلَمُونَ ه إِنَّ فِي آخِ تِلْفِ آيَاتِهِ لَآلِنَهَارٍ وَمَا خَلَقَ اللَّهُ فِي السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ لَآيَاتٍ لِّقَوْمٍ يَتَّقُونَ ٦

“(5) Dialah yang menjadikan matahari bersinar dan bulan bercahaya dan ditetapkan-Nya manzilah-manzilah (tempat-tempat) bagi perjalanan bulan itu, supaya kamu mengetahui bilangan tahun dan perhitungan (waktu). Allah tidak menciptakan yang demikian itu melainkan dengan hak. Dia menjelaskan tanda-tanda (kebesaran-Nya) kepada orang-orang yang mengetahui. (6) Sesungguhnya pada pertukaran malam dan siang itu dan pada apa yang diciptakan Allah di langit dan di bumi, benar-benar terdapat tanda-tanda (kekuasaan-Nya) bagi orang-orang yang bertakwa” (QS Yunus, (10): 5-6).

Pada penggalan surat yunus di atas terdapat bagian yang berbunyi

هُوَ الَّذِي جَعَلَ الشَّمْسَ ضِيَاءً وَالْقَمَرَ نُورًا وَقَدَرَهُ مَنَازِلَ لِتَعْلَمُوا عَدَدَ السِّنِينَ وَالْحِسَابَ

yang artinya adalah “Dialah yang menjadikan matahari bersinar dan bulan bercahaya dan ditetapkan-Nya manzilah-manzilah (tempat-tempat) bagi perjalanan bulan itu, supaya kamu mengetahui bilangan tahun dan perhitungan (waktu).” Dari ayat tersebut dapat terlihat bahwa “dan ditetapkan-Nya manzilah-

*manzilah (tempat-tempat) bagi perjalanan bulan itu*” menunjukkan perintah Allah SWT untuk memperhatikan dan mengamati pergerakan bulan dan secara umum benda langit lainnya. Pengamatan tersebut dapat dilakukan dengan cara mencatat pergerakan atau perpindahan benda langit setiap menit, jam atau setiap hari. Selanjutnya, kegunaan mencatat perpindahan ini terlihat pada bagian berikutnya yaitu “*supaya kamu mengetahui bilangan tahun dan perhitungan (waktu).*” dimana pengamatan yang telah dilakukan dapat dikonversi ke bentuk angka-angka yang kemudian dianalisis memakai hukum matematika tertentu sehingga dapat menentukan kapan terjadinya suatu fenomena. Fenomena ini dapat diartikan luas untuk menentukan kapan mulai dilaksanakan hari-hari besar dalam islam seperti penentuan bulan Ramadhan dan bulan Syawal serta penentuan waktu sholat yang merupakan bagian utama dari ilmu Falak.

Dari penjelasan di atas, dapat diketahui bahwa ilmu Falak menggunakan data-data dari pengamatan benda langit. Data-data ini sangat acak seperti halnya data acak pada gerak Brown yang selanjutnya digunakan untuk menentukan kapan terjadinya hari-hari besar dalam islam yang akan datang dan waktu-waktu penting untuk umat islam dapat beribadah. Hal ini berarti ilmu Falak pada dasarnya juga menggunakan ilmu peluang, dimana dalam ilmu peluang untuk menentukan atau memperkirakan suatu kejadian yang akan datang harus menggunakan data-data pengamatan yang diambil pada waktu sebelumnya.

Setelah itu dalam surat yunus ayat 6 yaitu “*Sesungguhnya pada pertukaran malam dan siang itu dan pada apa yang diciptakan Allah di langit dan di bumi, benar-benar terdapat tanda-tanda (kekuasaan-Nya) bagi orang-orang yang bertakwa*”

(QS Yunus ,(10):6). Menurut Jauhari, surat yunus ayat 6 menunjukkan bahwa dalam pergerakan benda langit yang diamati terdapat tanda kebesaran Allah Swt dimana benda-benda langit tersebut bergerak pada garis edarnya atas perintah dari Allah Swt. Ayat ini juga memperlihatkan bahwa ilmu Falak termasuk golongan ilmu-ilmu yang wajib dipelajari dengan wajib kifayah. Karena adanya tanda-tanda ciptaan Allah Swt di dalamnya dan sudah tentu ilmu Falak itu tidak dapat diketahui kecuali diketahui dahulu ilmu pasti, dan ilmu ukur.

Ibnu Abdil Bar menjelaskan tentang ilmu Falak bahwa manfaat ilmu perbintangan (astrologi), menurut seluruh penganut agama adalah mengetahui perjalanan pelayaran, letak bintang-bintang, tempat munculnya rasi bintang, pergeseran siang-malam, bagian siang dan bagian malam di setiap negeri, setiap hari, dan letak sebuah negeri dari garis khatulistiwa (ekuator). Selain itu, mengetahui gugusan bintang utara, ufuk timur dan barat, munculnya bulan sabit (hilal), pergerakan bintang-bintang untuk menentukan musim dan sebagainya. Demikian pula mengetahui peredarannya, tegaknya, membujur dan melintangnya, masa dan terjadinya gerhana bulan dan matahari, besar dan kecilnya gerhana di setiap negeri, serta mengetahui makna dari tahun matahari, tahun bulan dan tahun bintang (Salim, 2007).

Adapun mengenai para ahli ilmu Falak, sekalipun mereka mengetahui kapan terjadinya gerhana matahari dan gerhana bulan serta musim penghujan melalui dalil *hisabiyah*, maka hal-hal tersebut bukanlah termasuk hal yang ghaib. Sebenarnya hal-hal tersebut merupakan tanda-tanda yang dapat dijangkau oleh pengetahuan manusia, terlebih lagi sebagian dari padanya terkadang termasuk ke

dalam kategori *zan* (perkiraan) dan bukannya kategori *yakin* (pasti) (Al-Maragi, 1992).

Dari penjelasan diatas dapat diketahui bahwa teori peluang yang digunakan dalam menganalisis gerak acak di alam adalah perkiraan yang diperbolehkan dalam islam. Hal ini karena peluang tidak digunakan untuk memprediksi hal-hal yang ghaib. namun untuk menganalisis sebuah peristiwa dengan menggunakan data-data penelitian yang telah diambil sebelumnya dari alam untuk menghasilkan penjelasan, mengatasi masalah serta memberi perkiraan selanjutnya mengenai peristiwa yang dianalisis. Seperti ilmu Falak yang menggunakan data-data perhitungan pada penanggalan hijriyah untuk menentukan kapan dimulainya puasa romadhon yang kemudian kebenarannya dibuktikan dengan pengamatan hilal.

Sebuah penelitian tidak sepenuhnya benar, namun hanya perkiraan dan pendekatan terhadap hasil sebenarnya. Penelitian-penelitian ini kemudian juga memberikan fakta-fakta terbaru dari peristiwa yang dianalisis. Dari fakta-fakta tersebut muncullah hipotesis yang harus dibuktikan kebenarannya sehingga ilmu pengetahuan dapat berkembang dan bermanfaat bagi umat manusia.

## **BAB III**

### **PROSES STOKASTIK PADA GERAK BROWN**

#### **3.1 Proses Stokastik**

Menurut Hull (1989) setiap nilai yang berubah terhadap waktu dengan cara yang tidak tertentu (dalam ketidakpastian) dikatakan mengikuti proses stokastik. Proses stokastik adalah model yang digunakan untuk menjelaskan gerak acak dimana bentuk peluang digunakan dalam memprediksi gerakannya. Salah satu contoh gerak acak di alam adalah gerak Brown. Gerak ini menggunakan proses stokastik untuk menjelaskan evolusi dan peluang pergerakan partikel Brown terutama pada lingkungan banyak partikel.

Proses Stokastik mempunyai variabel acak yang didefinisikan sebagai  $X(t)$  atau  $X_t$  dan memiliki syarat sebagai berikut:

1. Nilai  $X(t)$  merupakan pemetaan dari ruang parameter  $X$  menuju ruang keadaan dari  $X$ .
2. Gerak Brown diasumsikan bergerak acak pada lingkungan dengan jumlah partikel sangat besar dan setiap tumbukan menyebabkan gerak terus-menerus tanpa terputus sehingga Nilai  $X(t)$  merupakan proses waktu kontinu.
3. Ruang terjadinya proses waktu kontinu dinamakan ruang parameter kontinu, Sedangkan variabel acak yang terjadi pada ruang kontinu dinamakan variabel acak kontinu.

Distribusi probabilitas dalam ruang kontinu diberikan oleh fungsi  $P(x)$  tak negatif

$$P(x) \geq 0, \quad (3.1)$$

dengan normalisasinya adalah

$$\int P(x)dx = 1 \quad (3.2)$$

dimana batas integralnya berada disepanjang sumbu-  $x$  dan  $P(x)dx$  adalah peluang  $X$  mempunyai nilai antara  $x$  dan  $x + dx$ .

### 3.2 Proses Wiener

Proses Wiener adalah bentuk dari proses stokastik pada waktu kontinu, terdefinisi pada ruang keadaan, tidak ada pengaruh gaya luar serta berangkat dari waktu dan posisi 0. Sesuai definisi diatas, proses stokastik  $W(t)$  disebut gerak Brown jika memenuhi (Fathin, 2012):

1.  $W(t) = 0$  untuk  $t = 0$
2.  $W(t)$  memiliki kenaikan yang independen, yakni untuk setiap  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n, W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1})$  merupakan kumpulan peubah acak yang independen.
3. Untuk setiap  $0 \leq t < dt$ , hampir semua lintasan sampel dari  $W(t + dt) - W(t) = W(t) = dW(t)$  adalah fungsi kontinu yang memenuhi  $\int P(x)dx = 1$  serta  $P(x)$  adalah fungsi tak negatif. Sehingga peluang distribusinya dapat menggunakan distribusi normal.

Antara  $\int P(x)dx = 1$  dan distribusi normal memiliki hubungan sebagai berikut, didefinisikan distribusi normal (distribusi gauss)

$$P\{x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2(\sigma)^2}\right) \quad (3.3)$$

dimana  $x$  adalah peubah acak kontinu memenuhi  $-\infty \leq x \leq \infty$  dan memiliki dua parameter yaitu nilai rata-rata  $\mu$  dan varian  $\sigma^2$  dengan  $-\infty \leq \mu \leq \infty$  dan  $\sigma^2 > 0$ .

Selanjutnya persamaan diintegalkan

$$\int_{-\infty}^{\infty} P\{x\} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2(\sigma)^2}\right) dx \quad (3.4)$$

dimisalkan

$$\frac{(x-\mu)^2}{2(\sigma)^2} = z^2 \quad (3.5)$$

sehingga

$$\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma} = z$$

$$x = \sqrt{2}z\sigma + \mu \quad (3.6)$$

bentuk turunan dari persamaan (3.6) adalah

$$dx = \sqrt{2}\sigma dz \quad (3.7)$$

persamaan (3.5) dan (3.7) dimasukkan ke dalam persamaan (3.4) didapatkan

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} P\{x\} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-z^2) \sqrt{2}\sigma dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-z^2) dz \end{aligned} \quad (3.8)$$

persamaan (3.8) adalah bentuk integral Gaussian satu dimensi. Persamaan (3.8) dapat diselesaikan dengan cara perkalian dua persamaan integral Gaussian satu dimensi

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-z^2) dz &= \sqrt{\left( \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-z^2) dz \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-z^2) dz \right)} \\
 &= \sqrt{\left( \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2) dy \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-z^2) dz \right)} \\
 &= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp-(y^2 + z^2) dy dz} \tag{3.9}
 \end{aligned}$$

dengan merubahnya menuju koordinat polar didapatkan

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-z^2) dz &= \sqrt{\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \exp-(r^2) r dr d\theta} \\
 &= \sqrt{2\pi \left[ -\frac{1}{2} \exp-(r^2) \right]_0^{\infty}} \\
 &= \sqrt{\pi} \tag{3.10}
 \end{aligned}$$

hasil diatas kemudian dimasukkan persamaan (3.8) sehingga

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} P\{x\} dx &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-z^2) dz \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} \\
 &= 1 \tag{3.11}
 \end{aligned}$$

Kemudian, diketahui nilai harap  $\langle x \rangle$

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2(\sigma)^2}\right) dx \quad (3.12)$$

dimisalkan

$$\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 = z^2 \quad (3.13)$$

maka

$$\begin{aligned} x &= \sigma z + \mu \\ dx &= \sigma dz \end{aligned} \quad (3.14)$$

sehingga persamaan (3.12) menjadi

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2(\sigma)^2}\right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma z + \mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz + \mu \end{aligned} \quad (3.15)$$

dimisalkan

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}z^2 &= u \\ z dz &= du \end{aligned} \quad (3.16)$$

didapatkan

$$\langle x \rangle = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-u) du + \mu$$

$$\langle x \rangle = \mu \quad (3.17)$$

untuk nilai harap  $\langle x^2 \rangle$

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2(\sigma)^2}\right) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma z + \mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) \sigma dz \quad (3.18)$$

Diketahui

$$(\sigma z + \mu)^2 = \sigma^2 z^2 + 2\sigma z\mu + \mu^2 \quad (3.19)$$

sehingga

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 z^2 \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz + \right.$$

$$\left. 2\sigma\mu \int_{-\infty}^{\infty} z \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz + \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz \right\}$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz + 0 + \mu^2$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) 2\sqrt{2} + \mu^2$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} 2\sqrt{2} + \mu^2$$

$$= \sigma^2 + \mu^2 \quad (3.20)$$

sehingga, untuk nilai harap pada selang  $(x - \mu)^2$  adalah

$$\begin{aligned}(x - \mu)^2 &= x^2 - 2x\mu + \mu^2 \\ &= \sigma^2 + \mu^2 - 2\mu^2 + \mu^2 \\ &= \sigma^2\end{aligned}\tag{3.21}$$

dengan  $x = W(t)$  dan  $\mu = W(t + dt)$  maka didapatkan hubungan  $W(t + dt) - W(t) = dW(t) = dW(t)$  dan peluang distribusi pada persamaan (3.4).

### 3.3 Persamaan Differensial Stokastik

Persamaan diferensial stokastik (PDS) adalah persamaan differensial deterministik yang diberi gangguan acak. Persamaan differensial stokastik secara matematis dituliskan dalam bentuk sebagai berikut (Riyanti, 2008):

$$dX_t = \rho(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)\eta_t dt\tag{3.22}$$

dengan  $X_t$  proses stokastik dan  $\eta_t dt$  bentuk *Gaussian white noise*,  $\rho(t, X_t)dt$  merupakan bagian deterministik dan  $\sigma(t, X_t)dW_t$  merupakan bagian stokastik dari persamaan (3.25),  $\rho$  adalah koefisien yang tergantung  $(t, X_t)dt$ , serta  $\sigma$  adalah koefisien yang tergantung  $(t, X_t)\eta_t dt$ .

*Gaussian white noise* merupakan faktor ketidakteraturan pada proses stokastik yang memuat seberapa besar pengaruh gangguan dari gaya luar saat partikel bergerak acak dan didefinisikan sebagai turunan proses Wiener (Fathin, 2012):

$$\frac{dW_t}{dt} = \eta_t\tag{3.23}$$

Persamaan (3.22) disusun dan dituliskan kembali menjadi

$$X_t = X_0 + \int_0^t \rho(t, X_t) dt + \int_0^t \sigma(t, X_t) dW_t \quad (3.24)$$

dimana solusi  $X_t$  mengikuti proses stokastik,  $\int_0^t \rho(t, X_t) dt$  merupakan integral deterministik dan  $\int_0^t \sigma(t, X_t) dW_t$  adalah integral stokastik dengan  $W_t$  adalah proses Wiener.

### 3.4 Proses Difusi Klasik

Gerak Brown dan proses Wiener merupakan salah satu contoh proses difusi. Proses difusi merupakan model matematis peluang dari fenomena difusi di alam dimana peluang muncul karena partikel Brown bergerak sangat tidak teratur sehingga model deterministik tidak dapat digunakan untuk memprediksi arah gerakannya. Sedangkan proses Wiener merupakan model matematis yang menjelaskan gerak Brown dalam proses difusi.

Pada proses difusi, jika sekumpulan partikel terlarut dalam suatu fluida mempunyai kerapatan partikel saat  $t$  di titik  $\vec{r}$  dengan  $\vec{r} = (\vec{x} + \vec{y} + \vec{z})$  sebagai fungsi  $f(t, \vec{r})$  maka kerapatan tersebut mengikuti persamaan kontinuitas

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (3.25)$$

dimana  $\vec{j}$  adalah rapat arus atau kerapatan peluang partikel mengalir pada fluida. Arus tersebut berada pada kondisi dengan kerapatan yang rendah dan akan menuju kerapatan yang tinggi.

Selanjutnya diketahui sekumpulan partikel terlarut tersebut bergerak secara acak. Sebelum dibentuk dalam vektor-3 dimensi ( $\vec{r}$ ) akan lebih mudah dianalisis terlebih dahulu dalam bentuk 1 dimensi. Jika partikel tersebut bergerak acak

searah sumbu- $x$  maka ketika mencapai titik tertentu akan memiliki panjang interval  $\Delta x$  dan waktu  $\Delta t$  dari titik awal partikel bergerak. Pada langkah titik tertentu, partikel mempunyai peluang setengah dari partikel ke kiri dan setengahnya lagi bergerak ke kanan. Karena setengah dari partikel di posisi  $x$  bergerak ke kanan dan setengah dari partikel di titik  $x + \Delta x$  bergerak ke kiri, maka total partikel yang bergerak ke kanan adalah (Arista, 2013):

$$-\frac{1}{2} [N(x + \Delta x, t) - N(x, t)] \quad (3.26)$$

rapat arus  $j$  merupakan jumlah partikel yang bergerak melewati luasan  $a$  pada selang waktu  $\Delta t$  didefinisikan sebagai

$$j = -\frac{1}{2} \left[ \frac{N(x + \Delta x, t)}{a\Delta t} - \frac{N(x, t)}{a\Delta t} \right] \quad (3.27)$$

selanjutnya persamaan (3.27) dikalikan  $\left(\frac{\Delta x}{\Delta x}\right)^2$  didapatkan

$$j = -\frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \left[ \frac{N(x + \Delta x, t)}{a(\Delta x)^2} - \frac{N(x, t)}{a(\Delta x)^2} \right] \quad (3.28)$$

didefinisikan  $f(x, t)$  adalah kerapatan partikel pada titik  $x$  di waktu  $t$  per satuan volume, sehingga

$$f(x, t) = \frac{N(x, t)}{a\Delta x} \quad (3.29)$$

dan  $D$  adalah konstanta difusi, yaitu

$$D = \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \quad (3.30)$$

persamaan (3.28) kemudian dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$j = -D \left[ \frac{f(x, t)}{\Delta x} - \frac{N(x, t)}{\Delta x} \right] \quad (3.31)$$

untuk  $\Delta x$  yang mendekati nol, persamaan diperumum menjadi

$$j = -D \frac{\partial f}{\partial x} \quad (3.32)$$

sedangkan pada kasus 3-dimensi persamaan diatas dapat dirubah menjadi

$$\vec{j} = -D \nabla f \quad (3.33)$$

dimana  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right)$ . Persamaan diatas kemudian dimasukkan ke dalam

persamaan (3.25) sehingga

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (-D \nabla f) = 0 \quad (3.34)$$

karena  $D$  homogen maka persamaan menjadi

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} - D \nabla^2 f &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial t} &= D \nabla^2 f \end{aligned} \quad (3.35)$$

bentuk diatas merupakan persamaan yang dikenal sebagai persamaan difusi.

### 3.5 Persamaan Fokker-Planck

Persamaan Fokker-Planck merupakan persamaan yang menggambarkan rapat peluang partikel dalam suatu sistem berisi banyak partikel yang saling bertumbukan. Persamaan ini berbentuk differensial parsial dan digunakan untuk menjelaskan evolusi suatu rapat peluang dari gerak Brown.

Didefinisikan sebuah partikel pada posisi  $x$  saat  $t$  berpindah posisi menuju  $x + \Delta$  saat  $t + \tau$ , dengan  $t < t + \tau$  maka probabilitas transisi antara kedua posisi tersebut adalah (Arista, 2013):

$$\int K(\Delta, \tau, x, t) d\Delta = 1 \quad (3.36)$$

karena probabilitas partikel ke seluruh ruangan adalah

$$\int P(x, t) dx = 1 \quad (3.37)$$

maka distribusi partikel  $P(x, t)$  yang berubah terhadap waktu didapatkan

$$P(x, t + \tau) = \int K(\Delta, \tau, x - \Delta, t) P(x - \Delta, t) \quad (3.38)$$

Selanjutnya  $P$  dan  $K$  diasumsikan fungsi kontinu terhadap  $x$  sehingga dengan ekspansi Taylor diperoleh

$$\begin{aligned} K(\Delta, \tau, x - \Delta, t) P(x - \Delta, t) &= \int K(\Delta, \tau, x, t) P(x, t) \\ &- \sum_i \Delta_i \frac{\partial}{\partial x_i} [K(\Delta, \tau, x, t) P(x, t)] \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{ij} \Delta_i \Delta_j \frac{\partial}{\partial x_i \partial x_j} [K(\Delta, \tau, x, t) P(x, t)] + \dots \end{aligned} \quad (3.39)$$

didefinisikan kecepatan rerata  $b_i(x, t)$

$$b_i(x, t) \tau = \int K(\Delta, \tau, x, t) \Delta_i d\Delta \quad (3.40)$$

dan koefisien difusi

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \int \Delta_i \Delta_j K(\Delta, \tau, x, t) d\Delta \quad (3.41)$$

persamaan (3.38) menjadi

$$\frac{\partial P}{\partial t} = - \sum_i \Delta_i \frac{\partial}{\partial x_i} [b_i P] + \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i \partial x_j} [D_{ij} P] \quad (3.42)$$

diasumsikan  $D_{ij} = D\delta_{ij}$  sehingga persamaan (3.42) menjadi

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \frac{\partial}{\partial x_i} [b_i P] - D\nabla^2 P \quad (3.43)$$

persamaan diatas merupakan persamaan difusi yang disebut juga sebagai persamaan Fokker-Planck.

Persamaan Fokker-Planck dalam ruang 3-dimensi didefinisikan sebagai

$$\frac{\partial f(t, \vec{r})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} [A(t, \vec{r})f(t, \vec{r})] = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} [B(t, \vec{r})f(t, \vec{r})] \quad (3.44)$$

koefisien A merupakan koefisien gesekan dinamis dimana partikel Brown mendapat gaya gesek yang berlawanan dengan arah kecepatan partikel dan koefisien B merupakan koefisien difusi yaitu rata-rata perubahan kecepatan. Suku pertama persamaan Fokker-Planck merupakan gesekan yang memperlambat partikel berkas dan menggerakkan partikel menuju kecepatan nol dalam ruang fasa, sedangkan bentuk kedua menyajikan difusi berkas partikel dalam ruang kecepatan tiga dimensi. Sedangkan  $f(t, \vec{r})$  dimana  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$  adalah rapat peluang yang menyerupai proses Wiener untuk kasus 3 dimensi

$$f(t, \vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{r^2}{2t}\right) \quad (3.45)$$

persamaan Fokker-Planck juga dikenal sebagai persamaan difusi dimana

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t, \vec{r}) = D\nabla^2 f(t, \vec{r}) \quad (3.46)$$

## BAB IV PROSES GERAK BROWN RELATIVISTIK

Dinamika dan evolusi dari partikel Brown dapat dijelaskan menggunakan persamaan Langevin dan persamaan Fokker-Planck. Kedua persamaan tersebut merupakan teori yang umum untuk menggambarkan gerak Brown terutama dalam kerangka relativitas khusus karena keduanya sama-sama berangkat dari teori gerak Newton. Penggambaran tersebut digunakan sebagai dasar untuk menganalisis gerak acak partikel di alam semesta. Beberapa diantaranya seperti gerak acak partikel disekitar bintang neutron dan lubang hitam dimana pengaruh relativistik sangat kuat sehingga analisis untuk menggambarkan gerak partikel Brown di sekitar benda langit tersebut harus diperluas menggunakan kerangka relativitas.

### 4.1 Persamaan Langevin Relativistik

Diasumsikan partikel Brown bermassa  $m$ , bergerak dengan kecepatan  $\vec{v}(t)$  di ruang 3-dimensi dan terlarut dalam fluida yang homogen dan isotropik. Dinamika partikel tersebut dapat digambarkan melalui persamaan

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \vec{v}(t)$$

$$m \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = -Um\vec{v}(t) + \vec{L}(t) \quad (4.1)$$

dengan  $U$  adalah koefisien gesekan fluida diukur pada kerangka diam partikel serta  $\vec{L}(t)$  merupakan gaya Langevin yang menggambarkan proses difusi dan faktor ketidaktentuan dari gerak partikel Brown didapatkan dari turunan proses Wiener  $\vec{W}(t)$  terhadap waktu yaitu

$$\frac{d\vec{W}(t)}{dt} = \vec{L}(t) \quad (4.2)$$

karena  $m\vec{v}(t) = \vec{p}(t)$  maka pers (3.1) dapat ditulis kembali sebagai

$$\vec{p}(t) = -Um\vec{v}(t)dt + d\vec{W}(t) \quad (4.3)$$

Untuk sembarang  $t \geq 0$  dan  $dt > 0$  proses Wiener mempunyai nilai  $\vec{W}(t) = d\vec{W}(t) = d\vec{W}(t + dt) - d\vec{W}(t)$  yang kenaikannya digambarkan melalui distribusi Gauss 3 dimensi (Dunkel, 2005)

$$P^3[\vec{W}(t)] = \left(\frac{1}{4\pi D dt'}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{\vec{W}(t)^2}{4D dt'}\right] \quad (4.4)$$

dengan  $D$  adalah koefisien difusi partikel Brown dan  $\vec{W}$  adalah gabungan proses Wiener satu dimensi pada sumbu  $x, y$ , dan  $z$  atau  $\vec{W} = W_x\hat{i} + W_y\hat{j} + W_z\hat{k}$

Bentuk umum persamaan Langevin relativistik dibangun dengan memperluas analisis persamaan Langevin non-relativistik menuju ranah relativistik. Diasumsikan partikel memiliki kecepatan sangat tinggi dan bergerak dalam kerangka diam  $S$ . Jika terdapat kerangka koordinat lain  $S'$  yang bergerak bersama partikel, maka menurut pengamat dalam kerangka  $S'$ , partikel tersebut dalam keadaan diam sehingga persamaan relativistik harus di ubah menjadi persamaan non-relativistik Newton (Weinberg, 1972).

Melalui keadaan tersebut persamaan Langevin relativistik dapat dibangun dengan menggunakan dua pendekatan yaitu

1. Persamaan (4.1) disusun kembali dalam bentuk relativistik Galileo dengan mengikuti kerangka koordinat  $S'$  yang bergerak bersama partikel saat waktu  $t$ , dimana  $t$  adalah waktu pada kerangka  $S$ .

2. Transformasi Lorentz diaplikasikan ke dalam persamaan gerak non-relativistik yang telah didapatkan untuk kerangka  $S'$ .

Pertama, berangkat melalui asumsi kerangka fluida ( $S$ ) dalam keadaan terisolasi (tidak ada gangguan) dan tidak bergerak. Persamaan non-relativistik (4.1) dapat disederhanakan menjadi

$$m \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = -Um\vec{v}(t) \quad (4.5)$$

akibat dari tidak ada gangguan, maka tidak ada proses Wiener. Karena sistem koordinat  $S'$  bergerak bersama partikel di waktu  $t$  dan pada pendekatan non-relativistik waktu selalu sama untuk semua kerangka inersia atau  $t' = t'(t)$  dimana  $t'$  menunjukkan koordinat waktu untuk kerangka  $S'$ , maka didapatkan

$$\vec{v}'(t) = \vec{v}'(t'(t)) = 0 \quad (4.6)$$

selanjutnya, kerangka  $S'$  yang bergerak relatif terhadap  $S$  memiliki kecepatan konstan  $V'$ . Dengan menggunakan transformasi Galileo diketahui bahwa dalam kerangka  $S'$  pada waktu  $t$

$$m \frac{d\vec{v}'}{dt'}(t) = -Um(\vec{v}'(t) - \vec{V}'(t)) = -Um\vec{V}'(t) \quad (4.7)$$

persamaan (4.7) dapat diperluas untuk ruang lingkup relativitas khusus. Berangkat melalui dua postulat yang disusun Einstein mengenai relativitas, yaitu

- 1 Semua hukum fisika mempunyai bentuk yang sama (kovarian) pada semua kerangka acuan inersia.
- 2 Laju perambatan cahaya bernilai sama (invarian) di semua kerangka acuan inersia.

kedua asas tersebut mengakibatkan konsep ruang dan waktu pada persamaan (4.7) berubah. Pada penjelasan sebelumnya, disebutkan bahwa  $t' = t'(t)$  menunjukkan perubahan waktu di kerangka  $S'$  tergantung terhadap perubahan nilai waktu pada  $S$  atau  $t' = t$  untuk semua kerangka inersia. Hal ini kemudian di ubah melalui postulat di atas. Jika cepat rambat cahaya bernilai sama dalam perpindahan peninjauan kerangka inersia satu menuju kerangka inersia lain, maka setiap pengamat pada setiap kerangka inersia akan membawa sistem koordinat dan waktunya masing-masing yang mengakibatkan pengamat pada kerangka-kerangka inersia tidak sepakat mengenai posisi dan waktu terjadinya peristiwa.

Ruang  $\vec{r}' = (x', y', z')$  yang tidak terpisah dengan waktu  $t'$  akan membentuk sistem koordinat baru berdimensi 4 atau ruang-waktu

$$\begin{aligned} x^{\mu'} &= (ct', \vec{r}') \\ &= (ct', x', y', z') \\ &= (x^0, x^1, x^2, x^3) \\ &= (x^0, x^{i'}) \end{aligned} \quad (4.8)$$

dimana  $x^{\mu'}$  adalah bentuk tensor kontravarian (1+3)-dimensi dengan  $\mu = 0, 1, 2, 3$ . Ruang-waktu ini disebut sebagai ruang Minkowski. Selanjutnya, diambil dua titik dalam kerangka  $S'$  yaitu titik  $(ct', x', y', z')$  dan titik  $(t' + dt', x' + dx', y' + dy', z' + dz)$ . Jarak antara kedua titik tersebut adalah

$$ds^{2'} = -c^2 t^{2'} + dx^{2'} + dy^{2'} + dz^{2'} \quad (4.9)$$

atau

$$\begin{aligned}
 ds^{2'} &= [cdt' \quad dx' \quad dy' \quad dz'] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cdt' \\ dx' \\ dy' \\ dz' \end{bmatrix} \\
 &= [dx^0 \quad dx^1 \quad dx^2 \quad dx^3] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{bmatrix} \\
 &= dx^\mu \eta_{\mu\nu} dx^\nu
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

dimana  $\eta_{\mu\nu}$  adalah tensor metrik Minkowski kovarian

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

dengan sifat  $\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$ .

Ditinjau dua peristiwa pada titik  $(ct', r')$  dan titik  $(t' + dt', r' + dr')$  terjadi pada kedudukan yang sama dalam kerangka acuan  $S'$ . Selang waktu antara dua peristiwa tersebut  $dt'$  diukur oleh jam yang diam terhadap peristiwa. Selang waktu yang diukur oleh jam yang diam terhadap peristiwa (jam dan peristiwa berada dalam kerangka acuan yang sama) disebut selang waktu pribadi atau *proper time* (Anugraha, 2011):

$$d\tau^2 = -\frac{ds^{2'}}{c^2} \tag{4.12}$$

karena persamaan (4.9) invarian, maka persamaan (4.12) sama untuk setiap pengamat sehingga

$$d\tau^2 = -\frac{(-c^2 t^{2'} + dx^{2'} + dy^{2'} + dz^{2'})}{c^2}$$

$$\begin{aligned}
&= dt^{2'} - \frac{(dx^{2'} + dy^{2'} + dz^{2'})}{c^2} \\
&= dt^{2'} \left\{ 1 - \frac{1}{c^2} \left[ \frac{(dx^{2'} + dy^{2'} + dz^{2'})}{dt^{2'}} \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$d\tau = dt' \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left[ \frac{dx^{2'}}{dt^{2'}} + \frac{dy^{2'}}{dt^{2'}} + \frac{dz^{2'}}{dt^{2'}} \right]} \quad (4.13)$$

dengan  $v = \frac{dr}{dt}$ , maka

$$d\tau = dt' \sqrt{1 - \frac{v^{2'}}{c^2}} = \frac{dt'}{\gamma} \quad (4.14)$$

dimana  $\gamma$  adalah faktor Lorentz yang ditulis sebagai

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (4.15)$$

Melalui persamaan (4.8) dan (4.14), didefinisikan vektor kecepatan-(1+3) kontravarian  $v^\mu$  untuk kerangka  $S'$  yaitu

$$v^{\mu'} = \frac{dx^{\mu'}}{d\tau} = \frac{dx^{\mu'}}{dt'} \frac{dt'}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt'} (ct, \vec{r}') = \gamma(c, \vec{v}') \quad (4.16)$$

sedangkan komponen vektor kecepatan-(1+3) kovarian  $v'_\mu$  didapat dari perkalian  $v^{\mu'}$  dengan tensor metrik kovarian

$$v'_\mu = \eta_{\mu\nu} v^{\nu'} = \gamma(-c, \vec{v}') \quad (4.17)$$

untuk vektor momentum-(1+3) kontravarian komponennya didapat dengan menggunakan persamaan (4.16) sehingga

$$\begin{aligned}
p^{\mu'} &= mv^{\mu'} \\
&= m\gamma(c, \vec{v}') \\
&= (m\gamma c, m\gamma \vec{v}') \\
&= (p^0, \vec{p}') \\
&= \left(\frac{E}{c}, \vec{p}'\right)
\end{aligned} \tag{4.18}$$

dengan energi relativistik didefinisikan sebagai

$$E = \gamma mc^2 \tag{4.19}$$

dan momentum-3 pada kerangka  $S'$

$$\vec{p}' = m\gamma \vec{v}' \tag{4.20}$$

adapun vektor momentum-(1+3) kovarian  $p'_{\mu}$  komponennya adalah

$$p'_{\mu} = \eta_{\mu\nu} p^{\nu'} = \left(-\frac{E}{c}, \vec{p}'\right) \tag{4.21}$$

didefinisikan gaya-3 dimensi sebagai

$$\vec{F}' = \frac{d\vec{p}'}{dt} \tag{4.22}$$

sehingga vektor gaya-(1+3) kontravarian untuk kerangka  $S'$  yaitu  $f^{\mu'}$  memiliki komponen

$$f^{\mu'} = \frac{dp^{\mu'}}{d\tau} = \frac{dp^{\mu'}}{dt'} \frac{dt'}{d\tau} = \gamma \left(\frac{dE}{cdt}, \vec{F}'\right) \tag{4.23}$$

dan vektor gaya-(1+3) kovarian  $f'_{\mu}$  sebagai

$$f'_{\mu} = \eta_{\mu\nu} f^{\nu'} = \gamma \left(-\frac{dE}{cdt}, \vec{F}'\right) \tag{4.24}$$

Didefinisikan  $v^{\mu'}$  merupakan komponen vektor kecepatan-(1+3) dari partikel Brown dan  $V^{\mu'}$  sebagai komponen vektor kecepatan-(1+3) untuk kerangka  $S'$ .

Komponen-komponen pada persamaan (4.23) merubah bentuk persamaan (4.7) menjadi bentuk

$$\frac{dp^{\mu'}}{d\tau} = f^{\mu'} \quad (4.25)$$

dimana

$$f^{\mu'} \neq -Um(v^{\mu'} - V^{\mu'}) \quad (4.26)$$

terlihat pada (4.26) vektor gaya-(1+3) dimensi  $f^{\mu'}$  tidak bisa langsung dihubungkan dengan vektor kecepatan-(1+3) dimensi  $v^{\mu'}$ . Hal ini terjadi karena didalam kerangka  $S'$  yang bergerak bersama partikel, persamaan relativistik harus di ubah menjadi persamaan non-relativistik. Sehingga waktu pribadi  $d\tau$  akan sama dengan  $dt$  dan  $f^{\mu} = (0, F^i)$  dimana  $F^i$  adalah komponen kartesian dari gaya non-relativistik dan  $F^0$  merupakan komponen waktu gaya non-relativistik yang bernilai (Weinberg, 1972).

$$F^0 = 0 \quad (4.27)$$

bentuk (4.27) mengakibatkan komponen waktu dari  $v^{\mu'} - V^{\mu'} \neq 0$

$$\begin{aligned} v^0 - V^0 &= \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v_i v^i}{c^2}}} - \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v_i v^i}{c^2}}} \\ &= c - \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v_i v^i}{c^2}}} \neq 0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

Untuk mengatasi permasalahan tersebut, didefinisikan tensor gesek kontavarian yang memiliki bentuk sama dengan tensor tekanan pada gas ideal dari kerangka  $S'$  yang diam dan ditulis sebagai

$$U_{\beta}^{\mu} = U \left( \delta_{\beta}^{\mu} + \frac{v^{\mu}v_{\beta}}{c^2} \right) \quad (4.29)$$

sehingga didapatkan nilai tensor gesekan fluida (Lampiran 1)

$$U_{\beta}^{\mu'} = \begin{pmatrix} U_0^0 & U_1^0 & U_2^0 & U_3^0 \\ U_0^1 & U_1^1 & U_2^1 & U_3^1 \\ U_0^2 & U_1^2 & U_2^2 & U_3^2 \\ U_0^3 & U_1^3 & U_2^3 & U_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

persamaan  $f^{\mu'}$  bisa ditulis dalam bentuk kontravarian dengan memasukkan tensor gesekan (4.30) pada persamaan (4.26) dan didapatkan bentuk Lorentz-invarian

$$\frac{dp^{\mu'}}{d\tau} = -mU_{\beta}^{\mu'}(v^{\beta'} - V^{\beta'}) \quad (4.31)$$

Selanjutnya, dilakukan analisis proses Wiener yang diperluas menuju pendekatan relativistik. Menggunakan asumsi pada (4.27) untuk kerangka  $S'$  yang bergerak bersama partikel pada waktu kerangka diam  $t$ , persamaan differensial stokastik (4.7) ditulis menjadi

$$d\vec{p}'(t) = -U(\vec{p}'(t) - m\vec{V}')dt' + \vec{W}'(t) \quad (4.32)$$

dimana  $\vec{W}'(t) = d\vec{W}'(t)$  mewakili proses Wiener dengan kenaikannya ditentukan oleh persamaan (4.4) yaitu

$$P^3[\vec{W}'(t)] = \left( \frac{1}{4\pi D dt'} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{\vec{W}'(t)^2}{4D dt'} \right] \quad (4.33)$$

dalam teori relativistik, kenaikan nilai  $\vec{W}'(t) = d\vec{W}'(t)$  cenderung menuju tak terbatas selama nilai tersebut mengikuti kenaikan kecepatannya. Langkah selanjutnya, didefinisikan kenaikan proses Wiener-(1+3) dimensi

$$\begin{aligned} (W^{\mu'}) &= (W^0, W^{i'}) \\ &= (0, W^{i'}) \end{aligned} \quad (4.34)$$

definisi ini sesuai dengan asumsi (4.27) bahwa dalam sistem kerangka inersia  $S'$  yang sesaat bergerak bersama partikel komponen-0 dari gaya (1+3)-dimensi harus hilang. Selain itu karena kerangka  $S'$  bergerak pada waktu  $t$  dan  $W'(t)$  bernilai sangat kecil atau  $W'(t) = dW'(t)$  maka memiliki sifat

$$\langle W^{\mu'}(t) \rangle = 0, \quad \langle W^{\mu'}(t) W^{\beta'}(t) \rangle \begin{cases} 0 & \mu = 0, \beta = 0 \\ 2Ddt & \mu, \beta \neq 0 \end{cases} \quad (4.35)$$

Diperkenalkan tensor korelasi

$$D_{\mu\beta} = 2Dd\tau \left( \delta_{\mu\beta} + \frac{v_\mu v_\beta}{c^2} \right) \quad (4.36)$$

dengan inversnya

$$\hat{D}_{\mu\beta} = \frac{1}{2Dd\tau} \left( \delta_{\mu\beta} + \frac{v_\mu v_\beta}{c^2} \right) \quad (4.37)$$

yang memiliki struktur isotropik sama dengan tensor gesekan (4.29).

Menggunakan sifat pada (4.35), persamaan (4.36) memiliki nilai tensor

$$D_{\mu\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2Dd\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2Dd\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2Dd\tau \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

dengan demikian

$$\langle W^\mu(t) W^\beta(t) \rangle = D^{\mu\beta} \quad (4.39)$$

dan juga invers dari tensor korelasi yaitu

$$\widehat{D}_{\mu\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (2Dd\tau)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (2Dd\tau)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (2Dd\tau)^{-1} \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

persamaan (4.33) bisa diperluas untuk kerangka-(1+3) dimensi sebagai

$$P^{1+3'}[W^{\mu'}(\tau)] = \frac{1}{(4\pi Dd\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \widehat{D}'_{\mu\beta} W^{\mu'}(\tau) W^{\beta'}(\tau) \right] \delta[W^0(\tau)] \quad (4.41)$$

dari persamaan di atas, delta dirac muncul karena pada komponen-0, tidak ada proses wiener atau gaya stokastik yang bekerja. Dalam teori relativitas khusus terdapat suatu hubungan

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\tau} (-mc^2) \\ &= m \frac{d}{d\tau} v_\mu v^\mu \\ &= 2v_\mu f^\mu \end{aligned} \quad (4.42)$$

yang mana dalam kasus gaya stokastik,  $f^\mu$  dapat diartikan

$$0 = v_\mu W^\mu \quad (4.43)$$

Oleh karena itu, rapat peluang (4.38) dapat di ubah menjadi

$$P^{1+3'}[W^{\mu'}(\tau)] = \frac{c}{(4\pi Dd\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp \left[ -\frac{1}{2d\tau} \widehat{D}'_{\mu\beta} W^{\mu'}(\tau) W^{\beta'}(\tau) \right] \delta[v'_\mu W^{\mu'}(\tau)] \quad (4.44)$$

dimana  $(v'_\mu) = (-c, 0)$  adalah kecepatan-(1+3) kovarian dari partikel. Rapat peluang partikel Brown melibatkan jumlah partikel sangat besar sehingga termasuk

kasus pada ruang kontinu.

Akibatnya, persamaan (4.38) memiliki bentuk normalisasi

$$1 = \left\{ \prod_{\mu=0}^1 \int_{-\infty}^{\infty} d(W^{\mu'}(\tau)) \right\} P^{1+3'}(W^{\mu'}(\tau)) \quad (4.45)$$

karena partikel Brown terlarut dalam fluida yang homogen dan isotropik, maka persamaan (4.44) dapat ditulis sebagai rapat peluang untuk sembarang kerangka Lorentz yaitu

$$P^{1+3}[W^\mu(\tau)] = \frac{c}{(4\pi D d\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp \left[ -\frac{W_\mu(\tau)W^\mu(\tau)}{4D d\tau} \right] \delta[v_\mu W^\mu(\tau)] \quad (4.46)$$

dengan didapatkan bentuk rapat peluang pada (4.46), persamaan Langevin relativistik dapat disusun kembali untuk sembarang kerangka Lorentz. Jika partikel Brown dengan massa diam  $m$ , waktu pribadi  $d\tau$ , dan kecepatan-(1+3) dimensi  $v^\beta$ , dan momentum-(1+3) dimensi

$$p^\mu = m v^\mu \quad (4.47)$$

terlarut dalam fluida yang isotropik, homogen dengan kecepatan-(1+3) konstan  $V^\beta$ , maka persamaan Langevin relativistik ditulis

$$dx^\mu(\tau) = \frac{p^\mu(\tau)}{m} d\tau$$

$$dp^\mu(\tau) = -U_\beta^\mu (p^\beta(\tau) - mV^\beta) d\tau + W^\mu(\tau) \quad (4.48)$$

dengan tensor gesekan  $U_\beta^\mu$  diberikan oleh

$$U_\beta^\mu = U \left( \delta_\beta^\mu + \frac{v^\mu v_\beta}{c^2} \right) \quad (4.49)$$

dan kenaikan stokastik  $W^\mu(\tau) = dW^\mu(\tau)$  mengikuti persamaan (4.46).

Selanjutnya, persamaan (4.48) ditulis dalam kerangka laboratorium, Kerangka laboratorium adalah kerangka dalam keadaan diam atau bergerak bersama kerangka lain dengan kecepatan sama sehingga seolah-olah dalam keadaan diam. Pemilihan kerangka laboratorium ini dilakukan karena ketika pengamat diposisikan berada di dalam kerangka bergerak bersama partikel, maka pengamat akan melihat partikel Brown tersebut dalam keadaan diam.

Pada kerangka laboratorium  $S$  diketahui bahwa

$$(V^\mu) = (c, 0), \quad (v^\mu) = \gamma(c, v^i), \quad (W^\mu) = (W^0, W^i), \quad d\tau = \frac{dt}{\gamma} \quad (4.50)$$

dimana

$$\gamma = \left(1 - \frac{v_i v^i}{c^2}\right)^{-1/2} = \left(1 - \frac{p_i p^i}{m^2 c^2}\right)^{1/2} \quad (4.51)$$

dengan menggunakan tensor gesekan pada persamaan (4.49), persamaan (4.48) dirubah menjadi (Lampiran 2)

$$dp^i = -v p^i dt + W^i \quad (4.52)$$

yang merupakan bentuk persamaan Langevin relativistik untuk menggambarkan partikel Brown relativistik di kerangka Laboratorium.

Statistik kenaikan  $W^i$  di tentukan melalui

$$P^3[W^i(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} dW^0 P^{1+3}[W^\mu(\tau)] \quad (4.53)$$

dengan memasukkan persamaan (4.46) ke dalam persamaan (4.52) didapatkan

$$P^3[W^i(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} dW^0 P^{1+3}[W^\mu(\tau)]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dW^0 \frac{c}{(4\pi D d\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp \left[ -\frac{W_{\mu}(\tau)W^{\mu}(\tau)}{4D d\tau} \right] \delta[v_{\mu}W^{\mu}(\tau)] \quad (4.54)$$

karena

$$(v_{\mu}) = \gamma(-c, v^i), \quad (W_{\mu}) = (-W^0, W^i), \quad (4.55)$$

maka didapatkan bentuk persamaan

$$\begin{aligned} P^3[W^i(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} dW^0 \frac{c}{\left(4\pi D \frac{dt}{\gamma}\right)^{\frac{3}{2}}} \exp \left[ -\frac{W_{\mu}(t)W^{\mu}(t)}{4D \frac{dt}{\gamma}} \right] \delta[v_{\mu}W^{\mu}(t)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} c \left(\frac{\gamma}{4\pi D dt}\right)^{\frac{3}{2}} \exp \left[ -\frac{(W^i)^2(t) - (W^0)^2(t)}{4D \frac{dt}{\gamma}} \right] \\ &\quad \delta[-c\gamma W^0(t) + \gamma v_i W^i(t)] dW^0 \end{aligned} \quad (4.56)$$

bentuk (4.56) merupakan turunan persamaan yang bergantung pada  $W^0$ . Untuk mempermudah perhitungan dimisalkan  $W^0 = \frac{x}{\gamma c}$ , dan  $x = \gamma c W^0$  sehingga

$$\begin{aligned} P^3[W^i(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} c \left(\frac{\gamma}{4\pi D dt}\right)^{\frac{3}{2}} \exp \left[ -\frac{\gamma}{4D dt} \left( W_i W^i - \left(\frac{x}{\gamma c}\right)^2 \right) \right] \delta[-x \\ &\quad + \gamma v_i W^i] \frac{dx}{\gamma c} \\ &= \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\gamma}{4\pi D dt}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{\gamma}{4D dt} \left( \frac{W_i W^i \gamma^2 c^2 - x^2}{\gamma^2 c^2} \right) \right] \delta[-x \\ &\quad + \gamma v_i W^i] dx \\ &= \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\gamma}{4\pi D dt}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{\gamma}{4D dt} \frac{1}{\gamma^2 c^2} (W_i W^i \gamma^2 c^2 - x^2) \right] \\ &\quad \delta[-x + \gamma v_i W^i] dx \end{aligned} \quad (4.57)$$

persamaan (4.57) memenuhi bentuk integral  $\delta$ -dirac yaitu

$$\int f(x)\delta(x - a) = f(a) \quad (4.58)$$

didapatkan

$$\begin{aligned} P^3[W^i(t)] &= \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\gamma}{4\pi Ddt} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{\gamma}{4Ddt} \frac{1}{\gamma^2 c^2} \left( W_i W^i \gamma^2 c^2 - (\gamma v_i W^i)^2 \right) \right] \\ &= \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\gamma}{4\pi Ddt} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{\gamma}{4Ddt} \left( W_i W^i - \frac{v_i v^i W_i W^i}{c^2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\gamma}{4\pi Ddt} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{\gamma}{4Ddt} \left( \delta_{ij} W^j W^i - \frac{\delta^{ij} v^i v^j \delta_{ij} W^j W^i}{c^2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\gamma}{4\pi Ddt} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{\gamma}{4Ddt} \left( \delta_{ij} - \frac{\delta^{ij} \delta_{ij} v^i v^j}{c^2} \right) W^i W^j \right] \end{aligned} \quad (4.59)$$

$\delta^{ij}$  adalah bentuk delta kronecker dimana  $\delta^{ij} = 1$  jika  $i = j$  dan bernilai 0 jika  $i \neq j$  serta memiliki sifat

$$\delta^{ij} = \delta^{ji} \text{ dan } \delta^{ij} \delta_{ji} = 1 \quad (4.60)$$

sehingga persamaan (4.56) dapat ditulis menjadi

$$P^3[W^i(t)] = \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\gamma}{4\pi Ddt} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{\gamma}{4Ddt} \left( \delta_{ij} - \frac{v^i v^j}{c^2} \right) W^j W^i \right] \quad (4.61)$$

persamaan (4.61) adalah persamaan rapat peluang partikel Brown relativistik untuk persamaan Langevin pada kerangka laboratorium.

#### 4.2 Persamaan Fokker-Planck relativistik

Persamaan Fokker-Planck merupakan kasus khusus dari persamaan Langevin. Jika persamaan Langevin berfokus pada distribusi kecepatan setiap mengalami

tumbukan dan ditunjukkan dengan fungsi rapat peluang, maka persamaan Fokker-Planck digunakan untuk menggambarkan evolusi waktu pada fungsi rapat peluang dari kecepatan partikel Brown. Selain itu, persamaan Fokker-Planck relativistik juga merupakan perluasan persamaan Fokker-Planck biasa agar dapat digunakan untuk menggambarkan evolusi waktu dari rapat peluang kecepatan partikel yang mendekati kelajuan cahaya.

Sebelum masuk ke dalam bentuk persamaan Fokker-Planck relativistik, di tinjau kembali persamaan Langevin relativistik untuk kasus kerangka laboratorium  $S$ , yaitu

$$dp^i = -vp^i dt + W^i \quad (4.62)$$

dimana  $p^i = \gamma m v^i$  adalah momentum relativistik dan  $\gamma$  diberikan oleh (4.15).

Didefinisikan element matriks yaitu

$$A_j^i = \left( \delta_j^i - \frac{v^i v_j}{c^2} \right) \gamma = \left( \delta_j^i - \frac{p^i p_j}{\gamma^2 m^2 c^2} \right) \quad (4.63)$$

sehingga kenaikan rapat peluang proses Wiener  $W^i$  pada persamaan (4.61) menjadi

$$P^3[W^i(t)] = \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\gamma}{4\pi D dt} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{1}{4D dt} W^j A_j^i W^i \right] \quad (4.64)$$

Selanjutnya, persamaan Langevin relativistik (4.62) dapat ditulis kembali dalam bentuk persamaan baru dimana persamaan tersebut menunjukkan perkalian *Gaussian white noise* yang diatur oleh distribusi Gauss tak-tergantung kecepatan. Untuk mendapatkan bentuk tersebut, dimisalkan  $(A_j^i) = A(p)$  adalah sebuah matriks simetri sehingga nilai eigen dan determinannya diberikan oleh (Lampiran 3)

$$\text{spec}(A) = \{\gamma, \gamma, \gamma^{-1}\}, \quad \det(A) = \gamma \quad (4.65)$$

dengan demikian, matriks  $A$  menjadi definit positif untuk kecepatan  $v^2 < c^2$  dan memiliki invers matriks  $A^{-1}$  yaitu

$$(A^{-1})^j_k = \left( \frac{\delta_k^j}{\gamma^2} - \frac{v^j v_k}{c^2} \right) \gamma = \left( \delta_k^j - \frac{p^j p_k}{m^2 c^2} \right) \frac{1}{\gamma} \quad (4.66)$$

karena matriks  $A$  simetris dan definit positif maka memiliki sifat unik *Cholesky-decomposition* (Lampiran 4)

$$A = L^T L = \begin{pmatrix} L_1^1 & 0 & 0 \\ L_2^1 & L_2^2 & 0 \\ L_3^1 & L_3^2 & L_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1^1 & L_1^2 & L_1^3 \\ 0 & L_2^2 & L_2^3 \\ 0 & 0 & L_3^3 \end{pmatrix} \quad (4.67)$$

dimana  $L(p)$  merupakan matriks nonsingular yang elemen matriksnya didapatkan melalui

$$L_1^1 = \sqrt{A_1^1}$$

$$L_2^1 = \frac{A_2^1}{L_1^1}$$

$$L_2^2 = \sqrt{A_2^2 - (L_2^1)^2}$$

$$L_3^1 = \frac{A_3^1}{L_1^1}$$

$$L_3^2 = \frac{(A_3^2 - L_3^1 L_2^1)}{L_2^2}$$

$$L_3^3 = \sqrt{A_3^3 - (L_3^1)^2 - (L_3^2)^2} \quad (4.68)$$

dan invers matriks  $L(p)^{-1}$  yaitu

$$L^{-1} = \frac{1}{\det(L)} \begin{pmatrix} L_2^2 L_3^3 & -L_1^2 L_3^3 & L_1^2 L_2^3 - L_1^3 L_2^2 \\ 0 & L_3^3 L_1^1 & -L_2^3 L_1^1 \\ 0 & 0 & L_1^1 L_2^2 \end{pmatrix} \quad (4.69)$$

dengan

$$\det(L) = L_1^1 L_2^2 L_3^3 \quad (4.70)$$

Diperkenalkan sebuah variabel vektor stokastik  $y(t) = y^i$  yaitu

$$y^i = L_j^i W^j \quad (4.71)$$

dengan mengasumsikan  $(W_i) = W^T$  dan  $(y_i) = y^T$  maka diperoleh hubungan

$$W_i A W^i = W^T A W^i = W^T L^T L W^i = (LW)^T L W^i = y^T y \quad (4.72)$$

dari persamaan (4.71) dan (4.72), persamaan Langevin (4.62) dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$dp^i = -vp^i dt + L(p)^{-1} y^i \quad (4.73)$$

dimana  $y^i$  merupakan vektor stokastik yang perpindahannya diatur oleh distribusi Gauss yang tidak bergantung kecepatan, yaitu

$$P^3[W] = \left( \frac{1}{4\pi D dt} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{y_i y^i}{4D dt} \right] \quad (4.74)$$

$L^{-1}$  adalah proses *white noise* yaitu turunan gerak Brown  $W^i$  terhadap waktu dan berfungsi sebagai faktor ketidaktentuan. Proses ini pada persamaan (4.69) mengambil bentuk sebagai matriks invers dan tergantung kepada koordinat momentum  $p^i$ , sehingga vektor stokastik  $y(t)$  masuk ke dalam persamaan Langevin relativistik (4.70) dikenal sebagai perkalian *Gaussian white noise* atau perkalian vektor stokastik  $y^i$  yang mengikuti rapat peluang *Gaussian* dengan proses *white noise*  $L(p)^{-1}$ .

Perkalian proses stokastik pada persamaan Langevin (4.73) menunjukkan persamaan tersebut tidak unik untuk mendapatkan persamaan Fokker-Planck yang sesuai. Untuk mengatasi permasalahan tersebut, digunakan pendekatan Hanggi-Klimtovich dalam mencari solusi persamaan Fokker-Planck relativistik.

Pendekatan Hanggi-Klimontovich merupakan salah satu dari tiga pendekatan persamaan Fokker-Planck relativistik. Pendekatan ini memiliki konsep dimana bentuk koefisien matriks  $\gamma(t)$  pada persamaan (4.66) dikoreksi dan analisisnya difokuskan pada daerah perhitungan (diskritasi)  $t + dt$  atau batas atas dari interval gerak partikel  $[t, t + dt]$  dimana

$$L(p)^{-1} = L(p(t + dt))^{-1} \quad (4.75)$$

Untuk mengawalinya, persamaan Fokker-Planck ditulis dalam bentuk persamaan kontinuitas yaitu

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f(p, t) + \frac{\partial}{\partial p^i} j^i(p, t) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} f(p, t) &= -\frac{\partial}{\partial p^i} j^i(p, t) \end{aligned} \quad (4.76)$$

dimana  $j^i(p, t)$  didefinisikan sebagai rapat arus peluang

$$j^i(p, t) = vp^i f + D\delta_j^i \frac{\partial}{\partial p_j} f \quad (4.77)$$

dengan  $vp^i f$  adalah koefisien gesek partikel Brown dan  $D\delta_j^i \frac{\partial}{\partial p_j} f$  merupakan persamaan difusi.

Persamaan Fokker-Planck pendekatan Hanggi-Klimontovich diperoleh dengan memasukkan bentuk (4.75) ke dalam persamaan (4.77) sehingga secara eksplisit didapatkan bentuk persamaan (Lampiran 5)

$$j^i(p, t) = -\{vp^i f + D[L^{-1}(L^{-1})^T]_j^i \frac{\partial}{\partial p_j} f\} \quad (4.78)$$

karena bentuk identitas

$$A^{-1} = [L(L)^T]^{-1} = L^{-1}(L^T)^{-1} = L^{-1}(L^{-1})^T \quad (4.79)$$

persamaan (4.78) berubah menjadi

$$j^i(p, t) = -\{vp^i f + D(A^{-1})_j^i \frac{\partial}{\partial p_j} f\} \quad (4.80)$$

persamaan (4.80) merupakan rapat arus peluang untuk persamaan Fokker-Planck relativistik dengan pendekatan Hanggi-Klimontovich. Untuk memperoleh solusi persamaan (4.76) diasumsikan solusi stasioner  $f(p)$  dari persamaan (4.76) menghasilkan arus hilang sehingga

$$j_i^i(p, t) = 0 \quad (4.81)$$

didefinisikan fungsi coba  $f(p)$  dari persamaan Fokker-Planck yaitu (Dunkel, 2006):

$$f(p) = C\gamma^{-\alpha} \exp(-\chi\gamma) \quad (4.82)$$

dimana  $C > 0$  adalah konstanta normalisasi,  $\alpha$  dan  $\chi$  merupakan konstanta yang menentukan keadaan stasioner, serta

$$\gamma = \frac{1}{\left(1 + \frac{v_j v^j}{c^2}\right)^{1/2}} = \left(1 + \frac{p_j p^j}{m^2 c^2}\right)^{1/2} \quad (4.83)$$

untuk mendapatkan nilai  $\alpha$  dan  $\chi$  pada (4.82), persamaan (4.83) diturunkan parsial terhadap  $p_j$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial p_j} = \frac{\partial}{\partial p_j} \left(1 + \frac{p_j p^j}{m^2 c^2}\right)^{1/2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{p_j p^j}{m^2 c^2} \right)^{-1/2} \frac{p_j}{m^2 c^2} \\
&= \frac{p_j}{\gamma m^2 c^2}
\end{aligned} \tag{4.84}$$

dan persamaan (4.82) juga diturunkan parsial terhadap  $p_j$  sehingga

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial p_j} &= \frac{\partial f}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial p_j} \\
&= \frac{\partial}{\partial \gamma} (C \gamma^{-\alpha} \exp(-\chi \gamma)) \frac{\partial}{\partial p_j} \left( 1 + \frac{p_j p^j}{m^2 c^2} \right)^{1/2} \\
&= [C \alpha \gamma^{-\alpha-1} \exp(-\chi \gamma) + C \gamma^{-\alpha} (-\chi) \exp(-\chi \gamma)] \frac{p_j}{\gamma m^2 c^2} \\
&= -\frac{p_j}{\gamma m^2 c^2} C \left( \frac{\alpha}{\gamma} + \chi \right) \gamma^{-\alpha} \exp(-\chi \gamma) \\
&= -\frac{p_j}{\gamma m^2 c^2} \left( \frac{\alpha}{\gamma} + \chi \right) f
\end{aligned} \tag{4.85}$$

kemudian nilai arus pada persamaan (4.81) diperoleh melalui pendekatan Hanggi-Klimontovich

$$\begin{aligned}
j_i^i(t, p) &= 0 = v p^i f + D (A^{-1})_j^i \frac{\partial}{\partial p_j} f \\
j_i^i(t, p) &= v p^i f + D \left( \delta_j^i + \frac{p_j}{m^2 c^2} \right) \frac{-p_j}{\gamma^2 m^2 c^2} \left( \frac{\alpha}{\gamma} + \chi \right) f \\
&= v p^i f + D \gamma^2 \frac{-p_j}{\gamma^2 m^2 c^2} \left( \frac{\alpha}{\gamma} + \chi \right) f \\
&= v p^i f - D \frac{\delta_{ij} p^i}{m^2 c^2} \left( \frac{\alpha}{\gamma} + \chi \right) f \\
&= p^i f \left[ v - \frac{D}{m^2 c^2} \left( \frac{\alpha}{\gamma} + \chi \right) \right]
\end{aligned} \tag{4.86}$$

dari bentuk (4.86) diketahui bahwa persamaan  $j_i^i(t, p) = 0$  apabila  $\alpha = 0$  dan  $\chi = \frac{vm^2c^2}{D}$ . Nilai  $\alpha$  dan  $\chi$  dimasukkan ke dalam persamaan coba (4.81) sehingga

$$\begin{aligned} f(p) &= C\gamma^{-0}\exp\left(-\frac{vm^2c^2}{D}\gamma\right) \\ &= C\exp\left(-\frac{vm^2c^2}{D}\left(1 + \frac{p_j p^j}{m^2c^2}\right)^{1/2}\right) \end{aligned} \quad (4.87)$$

dan lebih singkatnya ditulis

$$f(p) = C\exp\left(-\chi\sqrt{1 + \frac{\vec{p}^2}{m^2c^2}}\right) \quad (4.88)$$

persamaan (4.88) merupakan rapat peluang momentum untuk partikel Brown relativistik pada persamaan Fokker-Planck relativistik pendekatan Hanggi-klimtovick dengan C adalah konstanta normalisasi dan

$$\chi = \frac{vm^2c^2}{D} \quad (4.89)$$

dimana  $\chi$  adalah parameter tak berdimensi yang mengandung koefisien difusi  $D$  dan menggambarkan pengaruh gangguan terhadap kecepatan partikel yang mendekati kelajuan cahaya serta memiliki kaitan dengan relasi Einstein yaitu

$$k_\beta T = \frac{mc^2}{\chi} = \frac{D}{mv} \quad (4.90)$$

sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} k_\beta T \chi &= mc^2 \\ \chi &= \frac{mc^2}{k_\beta T} \end{aligned} \quad (4.91)$$

yang merupakan hubungan antara energi diam dan energi termal suatu partikel.

Kemudian, untuk mencari nilai konstanta normalisasi  $C$ , bentuk persamaan (4.88) dapat dirubah menjadi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(p) d^3p = C \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\chi \sqrt{1 + \frac{\vec{p}^2}{m^2 c^2}}\right) d^3p \quad (4.92)$$

karena nilai normalisasi  $\int_{-\infty}^{\infty} f(p) d^3p = 1$ , maka didapatkan

$$1 = C \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\chi \sqrt{1 + \frac{\vec{p}^2}{m^2 c^2}}\right) d^3p$$

$$C^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\chi \sqrt{1 + \frac{\vec{p}^2}{m^2 c^2}}\right) d^3p \quad (4.93)$$

persamaan (4.93) di integralkan terhadap  $d^3p$  karena partikel berada di ruang fluida tiga dimensi yang diam atau  $\vec{p}^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$ . Dengan  $d^3p = (dp_x, dp_y, dp_z)$  bentuk (4.93) dapat dihitung menggunakan integral lipat tiga

$$C^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\chi \sqrt{1 + \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{m^2 c^2}}\right) dp_x dp_y dp_z \quad (4.94)$$

dalam menyelesaikan persamaan (4.94). digunakan pendekatan koordinat bola dimana

$$p_x = p \sin \phi \cos \theta$$

$$p_y = p \sin \phi \sin \theta$$

$$p_z = p \cos \phi \quad (4.95)$$

determinannya

$$\begin{aligned} dp_x dp_y dp_z &= \begin{pmatrix} \sin \phi \cos \theta & -p \sin \phi \sin \theta & p \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \theta & p \sin \phi \cos \theta & p \cos \phi \sin \theta \\ \cos \phi & -p \sin \phi & 0 \end{pmatrix} \\ &= p^2 \sin \phi dp d\phi d\theta \end{aligned} \quad (4.96)$$

persamaan (4.94) dirubah kembali menjadi

$$C^{-1} = \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left(-\chi \sqrt{1 + \frac{\vec{p}^2}{m^2 c^2}}\right) p^2 \sin \phi dp d\phi d\theta \quad (4.97)$$

definisi momentum  $p$  juga dapat diartikan sebagai

$$p = mc \sinh \rho \quad (4.98)$$

dimana  $\sinh \rho$  merupakan sudut hiperbolik imajiner bervariasi dari  $p = 0$  sampai  $p = \infty$ . Persamaan (4.97) dibentuk menjadi

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left(-\chi \sqrt{1 + \frac{\vec{p}^2}{m^2 c^2}}\right) (mc)^3 \sinh^2 \rho \cosh \rho d\rho \sin \phi d\phi d\theta \\ &= 4\pi (mc)^3 \int_0^{\infty} \exp\left(-\chi \sqrt{1 + \frac{\vec{p}^2}{m^2 c^2}}\right) \sinh^2 \rho \cosh \rho d\rho \end{aligned} \quad (4.99)$$

karena

$$\sinh^2 \rho = \cosh^2 \rho - 1 \quad (4.100)$$

maka  $C^{-1}$  menjadi

$$C^{-1} = 4\pi (mc)^3 \int_0^{\infty} \exp(-\chi \cosh \rho) \sinh^2 \rho \cosh \rho d\rho \quad (4.101)$$

diketahui  $\cosh^2 \rho$  dapat ditulis sebagai

$$4 \cosh^2 \rho = \cosh 3\rho - \cosh \rho \quad (4.102)$$

kemudian bentuk  $\sinh^2 \rho \cosh \rho$  pada persamaan (4.99) dapat dirubah menjadi

$$\begin{aligned} \sinh^2 \rho \cosh \rho &= (\cosh^2 \rho - 1) \cosh \rho \\ &= \frac{1}{4} (\cosh 3\rho - \cosh \rho) \end{aligned} \quad (4.103)$$

sehingga persamaan (4.99) menjadi

$$\begin{aligned} C^{-1} &= 4\pi \frac{1}{4} (mc)^3 \int_0^{\infty} \exp(-\chi \cosh \rho) (\cosh 3\rho - \cosh \rho) \\ &= \pi (mc)^3 \left[ \int_0^{\infty} \exp(-\chi \cosh \rho) \cosh 3\rho \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\infty} \exp(-\chi \cosh \rho) \cosh \rho \right] \end{aligned} \quad (4.104)$$

Diketahui bahwa formula integral pada fungsi Bessel yang termodifikasi bentuk pertama didefinisikan sebagai (Lampiran 6)

$$K_n^{(1)}(\chi) = \int_0^{\infty} \exp(-\chi \cosh \rho) \cosh(n\rho) d\rho \quad (4.105)$$

untuk mengubahnya menjadi fungsi Bessel yang termodifikasi bentuk kedua digunakan

$$K_n^{(1)}(\chi) = (-1)^{n+1} K_n^{(2)}(\chi) \quad (4.106)$$

didapatkan bentuk baru persamaan (4.105) dimana

$$C^{-1} = \pi (mc)^3 \left[ K_3^{(2)}(\chi) + K_1^{(2)}(\chi) \right] \quad (4.107)$$

persamaan rekursi fungsi Bessel termodifikasi bentuk kedua adalah (Lampiran 7)

$$K_{n+1}^{(2)}(\chi) + K_{n-1}^{(2)}(\chi) = \frac{2n}{\chi} K_n^{(2)}(\chi) \quad (4.108)$$

sehingga nilai konstanta normalisasi  $C$  dapat ditentukan, yaitu

$$\begin{aligned} C^{-1} &= \pi (mc)^3 \left[ K_3^{(2)}(\chi) + K_1^{(2)}(\chi) \right] \\ &= 4\pi (mc)^3 \frac{K_2^{(2)}(\chi)}{\chi} \\ C &= \frac{\chi}{4\pi (mc)^3 K_2^{(2)}(\chi)} \end{aligned} \quad (4.109)$$

Rapat arus peluang untuk persamaan Fokker-Planck relativistik dengan pendekatan Hanggi-Klimontovich secara lengkap dapat ditulis sebagai

$$f(p) = \frac{\chi}{4\pi (mc)^3 K_2^{(2)}(\chi)} \exp\left(-\chi \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}}\right) \quad (4.110)$$

persamaan (4.110) merupakan bentuk rapat arus peluang yang masih tergantung terhadap momentum partikel. Untuk mendapatkan rapat peluang yang tergantung terhadap kecepatan partikel, digunakan hukum transformasi yaitu

$$\phi(v) = f(p(v)) \left| \frac{\partial p}{\partial v} \right| \quad (4.111)$$

dimana

$$p(v) = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (4.112)$$

dan faktor determinannya

$$\left| \frac{\partial p}{\partial v} \right| = m^3 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-5/2} \quad (4.113)$$

didapatkan

$$\phi(v) = \frac{\chi}{4\pi c^3 K_2^{(2)}(\chi)} \exp\left(-\frac{\chi}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-5/2} \quad (4.114)$$

dimana  $m$  adalah massa diam partikel,  $v$  merupakan kecepatan partikel,  $c$  adalah kecepatan cahaya pada ruang vakum,  $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\gamma}$  adalah faktor Lorentz kontravarian yang digunakan untuk kasus partikel dengan kecepatan mendekati kelajuan cahaya serta  $K_2^{(2)}(\chi)$  adalah fungsi Bessel termodifikasi jenis kedua.

Persamaan (4.114) merupakan rapat peluang kecepatan untuk persamaan Fokker-Planck relativistik dengan pendekatan Hangei-Klimontovich. Persamaan ini menggambarkan rapat peluang kecepatan partikel bergerak acak pada suatu fluida dengan kasus khusus untuk kecepatan partikel yang mendekati kelajuan cahaya dengan

$$\chi = \frac{mc^2}{k_\beta T} \quad (4.115)$$

yang menunjukkan perbandingan antara energi relativistik partikel  $mc^2$  dengan energi termal partikel  $k_\beta T$ .

### 4.3 Karakteristik Rapat Peluang Persamaan Fokker-Planck Relativistik

Perpindahan sejumlah partikel Brown dalam suatu fluida dengan kecepatan mendekati kelajuan cahaya diatur oleh rapat peluang kecepatan pada persamaan (4.114). Rapat peluang kecepatan ini muncul karena pada keadaan fisisnya partikel yang terlarut dalam fluida bergerak ke segala arah, memiliki lintasan acak dan setiap partikel memiliki kecepatan berbeda tergantung dari tumbukan yang

dialami setiap partikel sehingga analisisnya hanya dapat diketahui melalui penggunaan ilmu peluang pada rapat peluang kecepatan. Dengan mengetahui rapat peluangnya maka evolusi waktu sejumlah partikel tersebut dapat diketahui melalui persamaan Fokker-Planck.

Karakteristik rapat peluang kecepatan partikel Brown relativistik dapat diketahui dengan melakukan simulasi pada persamaan (4.114). Simulasi tersebut akan menghasilkan kurva persamaan (4.114). Untuk mendapatkan bentuknya, simulasi dilakukan dengan menggunakan program Python 2.7.4 dan fungsi khusus *matplotlib.pyplot* untuk mendapatkan kurva rapat peluang kecepatan. Sedangkan bentuk persamaan yang digunakan adalah bentuk persamaan (4.114).

Kurva yang akan dianalisis adalah untuk kasus relativistik. Untuk mendapatkannya, partikel diberi range antara  $v = -1.0c$  dan  $v = 1.0c$  agar bentuk kurva dapat terlihat dengan jelas. Range tersebut diberi interval sebesar  $dv = 0.001 c$  dimana  $c$  adalah kelajuan cahaya dan partikel mempunyai massa diam sekitar  $10^{-27}$ . Pada keadaan sistem, diasumsikan berada pada kerangka laboratorium atau kerangka diam. Sedangkan variasi data akan dilakukan dengan mengubah nilai  $\chi$  pada persamaan (4.115).

Hasil permodelan kurva menggunakan program Python didapatkan hubungan

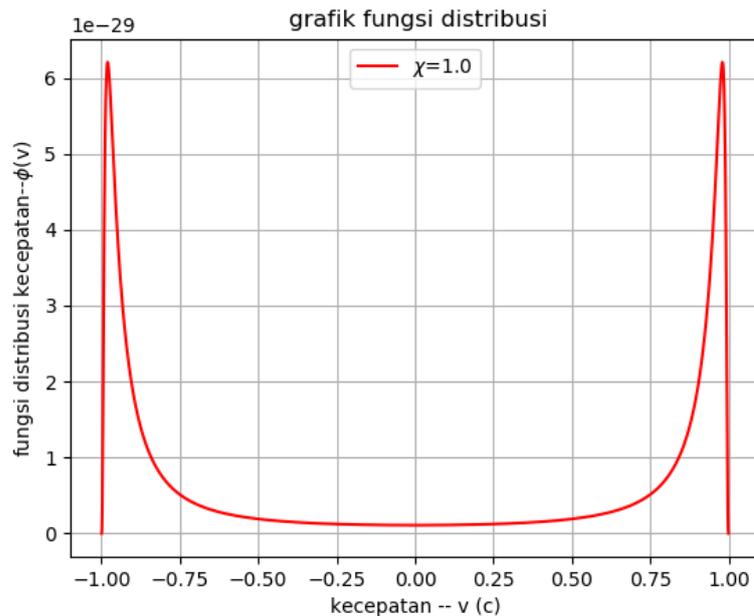
antara rapat

peluang

kecepatan

pada

persamaan



rapat

partikel

(4.114)

dengan kecepatan partikel yang ditampilkan pada Gambar 4.1.



Gambar 4.1 Hubungan Rapat peluang kecepatan dengan kecepatan partikel, untuk  $\chi \leq 1$

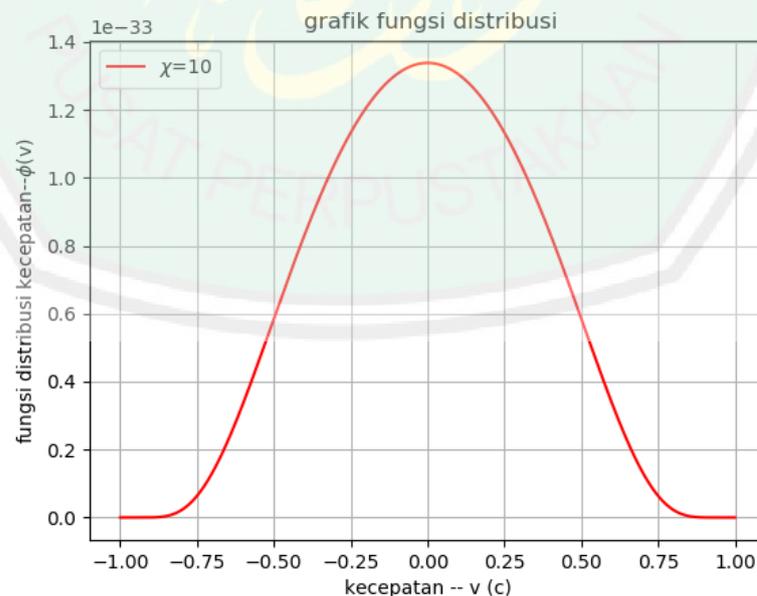
Gambar 4.1 adalah kurva rapat peluang kecepatan partikel untuk persamaan Fokker-Planck relativistik pendekatan Hanggi-Klimontovich yang ditunjukkan pada persamaan (4.114). Bentuk kurva tersebut didapatkan dengan memasukkan nilai  $\chi$ .

Nilai  $\chi$  menunjukkan bahwa partikel-partikel yang bergerak acak dan memiliki kecepatan mendekati kelajuan cahaya akan mengalami bentuk rapat peluang seperti gambar 4.1. Rapat peluang kecepatan digunakan untuk mendapatkan kecepatan rata-rata kumpulan partikel yang dikaji. Kecepatan tersebut dapat dilihat pada salah satu titik pada sumbu-x (titik kecepatan) dimana di titik tersebut kurva mencapai titik tertinggi. Semakin tinggi garis kurva maka semakin besar rapat atau kepadatan partikel yang ditemukan pada titik kecepatan tersebut. Sehingga peluang ditemukannya partikel semakin besar sampai akhirnya

mencapai puncak kurva dimana pada bagian tersebut merupakan peluang ditemukannya partikel paling besar.

Nilai  $\chi$  diberikan pada rentang  $\chi \leq 1$ , kurva pada gambar 4.1 memperlihatkan penyimpangan, dimana puncak kurva cenderung pada kecepatan yang mendekati kelajuan cahaya ( $v = 1c$ ). Hal ini menunjukkan kumpulan partikel memiliki kecepatan rata-rata yang mendekati kelajuan cahaya. Karena kecepatan memiliki hubungan dengan temperatur sistem atau  $k_B T = mc^2$  maka kecepatan partikel yang mendekati kelajuan cahaya diakibatkan oleh kenaikan temperatur fluida yang sangat tinggi.

Untuk kasus partikel dengan kecepatan jauh dibawah kelajuan cahaya, didapatkan kurva sebagai berikut



Gambar

4.2

Hubungan rapat peluang kecepatan dengan kecepatan partikel untuk  $\chi \gg 1$  terlihat pada gambar 4.2, saat diberikan nilai  $\chi \gg 1$ , kurva cenderung menurun ketika semakin mendekati kelajuan cahaya. Hal ini menunjukkan bahwa kasus

$\chi \gg 1$  mengakibatkan puncak kurva jauh dari kelajuan cahaya. Kemudian hasil ini memperlihatkan bahwa rata-rata kecepatan partikel berada jauh dari kelajuan cahaya yang diakibatkan temperatur sistem rendah.

Kecepatan yang semakin turun dan menjauhi kelajuan cahaya akan mengakibatkan puncak kurva menjadi cenderung mendekati nol dan terlihat berbentuk lonceng. Hal ini terlihat secara jelas ketika range kecepatan pada gambar 4.2. Bentuk Lonceng ini merupakan ciri khas kurva distribusi Maxwell-Boltzmann. Sehingga menunjukkan bahwa untuk kasus kecepatan rendah, persamaan (4.114) akan kembali kepada bentuk distribusi Maxwell-Boltzmann.

Adanya Gambar 4.1 dan 4.2 menunjukkan bahwa persamaan (4.114) dapat digunakan pada saat kecepatan partikel mendekati kelajuan cahaya. Sedangkan ketika kecepatan partikel jauh dari kelajuan cahaya akan kembali kepada bentuk distribusi Maxwell-Boltzmann.

Secara garis besar, persamaan (4.114) merupakan kasus khusus dari distribusi Maxwell-Boltzmann untuk kecepatan partikel yang mendekati kelajuan cahaya. Hal ini terlihat saat diberi kasus kecepatan partikel yang jauh dibawah kelajuan cahaya, dimana bentuk kurva menunjukkan kemiripan dengan distribusi Maxwell-Boltzmann. Sedangkan pada saat kecepatan masing-masing partikel mendekati kelajuan cahaya, kurva rapat peluang akan menyimpang dan puncak kurva berada pada posisi dekat dengan kelajuan cahaya. Selain itu, penyimpangan kurva rapat peluang juga menunjukkan bahwa bentuk tersebut sesuai dengan keadaan fisisnya dimana ketika kecepatan masing-masing partikel mendekati kelajuan cahaya maka

kecepatan rata-rata yang dihasilkan (puncak kurva) tidak jauh berbeda dengan kecepatan masing-masing partikel.

Jika kecepatan rata-rata kumpulan partikel dengan masing-masing partikel yang memiliki kecepatan mendekati kelajuan cahaya diketahui seperti pada gambar 4.1, maka persamaan Fokker-Planck relativistik dengan pendekatan Hangei-Klimontovich dapat digunakan untuk mendapatkan evolusi waktu dari kumpulan partikel sehingga peluang lintasan antara dua titik gerak partikel dapat diketahui.



## BAB V PENUTUP

### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil yang diperoleh dari penelitian, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut :

1. Rapat peluang kecepatan proses gerak Brown relativistik dengan pendekatan Hangei-Klimontovich menggambarkan rapat peluang kecepatan partikel bergerak acak pada suatu fluida dengan kasus khusus untuk kecepatan partikel yang mendekati kelajuan cahaya. Dengan keadaan partikel yang bergerak bebas diantara tumbukan kecil, tidak berinteraksi satu sama lain dan merupakan fungsi dari massa partikel ( $m$ ), kecepatan partikel ( $v$ ) serta temperatur dari fluida. Rapat peluang kecepatan dapat ditulis sebagai

$$\phi(v) = \frac{\chi}{4\pi (mc)^3 K_2^{(2)}(\chi)} \exp\left(-\frac{\chi}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-5/2}$$

dimana  $\chi$  merupakan

$$\chi = \frac{mc^2}{k_{\beta}T}$$

yang menunjukkan bahwa dalam suatu kerangka fluida, kecepatan partikel dapat terus meningkat sampai mendekati kelajuan cahaya jika temperatur fluida tersebut ( $k_{\beta}T$ ) terus dinaikkan dan mencapai  $mc^2$ .

2. Fluida dengan temperatur ekstra tinggi mengakibatkan setiap partikel yang berada didalamnya memiliki kecepatan gerak mendekati kelajuan cahaya.

Hal ini dapat ditunjukkan oleh kurva rapat peluang kecepatan yang mulai akan naik dan mencapai titik tertinggi kurva saat kecepatan partikel mendekati kelajuan cahaya, sehingga kecepatan rata-rata yang diwakili titik tertinggi kurva dapat diketahui.

## 5.2 Saran

Gerak partikel Brown memiliki fungsi sangat penting dalam berbagai cabang ilmu pengetahuan terutama pada bidang astrofisika. Hal ini karena memahami gerak partikel Brown dapat digunakan untuk memahami keadaan alam semesta terutama bagaimana difusi mengatur alam semesta dan pergerakan berbagai benda di dalamnya. Oleh karena itu untuk selanjutnya diperlukan penelitian-penelitian lebih mendalam mengenai gerak Brown, yaitu

1. Gerak partikel Brown pada fluida yang tak-homogen dan tak-isotropik.
2. Gerak partikel Brown dengan pengaruh gaya luar, semisal gaya elektromagnetik.
3. Gerak partikel Brown relativistik dengan menggunakan pendekatan lain, semisal pendekatan Ito dan Fisk-Stratonovich.
4. Gerak partikel Brown menggunakan metrik ruang waktu yang lain, semisal menggunakan pendekatan relativistas umum pada metrik Schwarzschild dan metrik De-Sitter.

## DAFTAR PUSTAKA

- Agustinah, T, et al. 2014. *Probabilitas dan Proses Stokastik*. Yogyakarta: Kanisius.
- Al-Jazari, Abu Bakar Jabir. 2006. *Aisuru al-Tafasir Li Kalami Ayati Kabir*. Mesir: Dar al-Hadis.
- Al-Qur'anul Karim Terjemahan Bahasa Indonesia*. Madinah: King Fahd KSA.
- Al-Maraghi. 1992. *Terjemahan Tafsir al-Maraghi*. Semarang: Toha Putra.
- Anonymous. 2015. *Sistem Koloid*. <http://bahan-kampus.blogspot.co.id/2015/05/sistem-koloid-sifat-sifat-koloid.html>. Diakses pada tanggal 1 Maret 2018 jam 15.39.
- Anugraha, Rinto. 2011. *Teori Relativitas dan Kosmologi*. Yogyakarta: Jurusan Fisika F-MIPA Universitas Gajah Mada.
- Apostodis, Pavlos. 2014. *Investigation of the Equilibrium Speed Distribution of Relativistic Particles*. London: Dept. of Physics and Astronomy University College London.
- Arista, R. 2013. *Proses Difusi Relativistik pada Kasus (1+3)-Dimensi*. Skripsi. Yogyakarta: Universitas Gajah Mada.
- Bayu, Moch. 2014. *Pelanggaran CP Untuk Bauran Partikel  $B_{s,d}$  Dengan Menggunakan Kerangka Kerja Teori Pelanggaran Flavor Minimal*. Skripsi. Malang: Jurusan Fisika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Brown, Robert. 1866. *The Miscellaneous botanical works of Robert Brown: Volume I*. London: R.Hardwicke.
- Cain, B., dan W. Reynolds, A. 2010. *Ordinary and Partial Differential Equation: An Introduction to Dynamical Systems*. Virginia: Virginia Commonwealth University.
- Carroll, Sean. 2004. *Spacetime and Geometry an Introduction to General Relativity*. Boston: Addison Wesley
- Chacon-Acosta, Guilermo. Dagdug, Leonardo. dan Morales-Tecot, Hugo A. 2009. *On the Manifestly Covariant Juttner Distribution and Equipartition Theorem*. arXiv:0910.1625v1 [cond-mat.stat-mech].

- Chamama, Fathin. 2012. *Model Katastrophe Cup Stokastik pada Krisis Pasar Saham*. Tesis. Depok: Program Studi Magister Matematika Universitas Indonesia.
- Debbash, Fabrice., Mallick, Kaushik., dan Rivet. 1997. *Relativistic Ornstein-Uhlenbeck Process*. J Stat Phys. 88, 945.
- Dunkel, J dan P. Hanggi. 2005. *Theory of Relativistic Brownian Motion: the (1+1)-Dimensional Case*. Physical Review E. 71, 016124.
- Dunkel, J dan P. Hanggi. 2006. *Theory of Relativistic Brownian Motion: the (1+3)-Dimensional Case*. Physical Review E. 72, 036106.
- Dunkel, J dan P. Hanggi. 2008. *Theory of Relativistic Brownian Motion: the (1+3)-Dimensional Case*. arXiv:cond-mat/0505532v1.
- Einstein, Albert. dan Von Smoluchowski, Marian. 1905. *Untersuchungen Uber die Theorie der Brownschen Bewegung/Abhandlungen Uber die Brownsche Bewegung und Verwandte Erscheinungen 3<sup>rd</sup> Edition*. Frankfurt: Harri Deutsch Vol 199.
- Gradshteyn, I, S. dan Ryzhik, I, M. 2007. *Tabel of Integral, Series, and Products Seventh Edition*. Amsterdam: Elsevier Academic Press.
- Hakim, Remi. 1965. *A Covariant Theory of Relativistic Brownian Motion I. Local Equilibrium*. Journal of Mathematical Physics. 6, 1482.
- Hanggi, Peter. 1977. *Stochastic Processes I: Asymptotic Behaviour and Symmetries*. Helvetica Physica Acta. Vol.51, 183.
- Hanggi, Peter. dan Thomas, Harry. 1982. *Stochastic Prozesse: Time Evolution, Symmetries and Linear Response*. Physics Reports (Reviues Section of Physics Letters). 88, 4, 207-319.
- Hamka. 2000. *Tafsir al-Azhar, Juz X, cet.II*. Jakarta: Pustaka Panjimas.
- Hull, J, C. 1989. *Options, Futures, and Other Derivatives*. New Jersey: Prentice Hall.
- Jannah, N. 2015. *Solusi Numerik Persamaan Fokker-Planck dengan Metode Implisit FTCS*. Skripsi. Malang: Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Jauhari, Thantawi. *Al-Jawahir fi Tafsir al-Qur'an al-Karim*. Beirut: Dar al-Fikr.

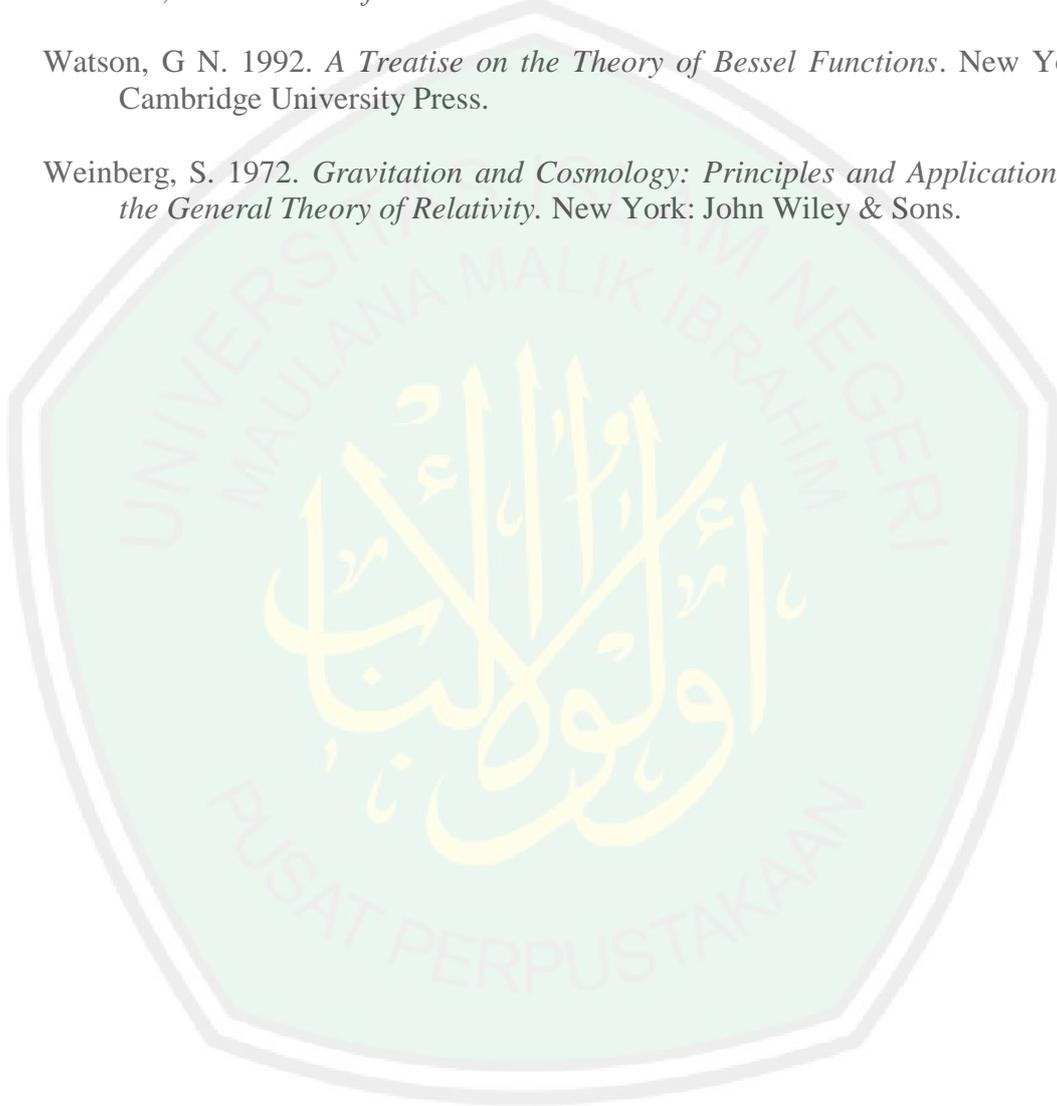
- Juttner, Ferencz. 1911. *Das Maxwellsche Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung in der Relativtheorie*. Ann Phys (N.Y). 37, 856.
- Kardanoff, L, P. 2000. *Statistical Physics: Statics, Dynamics and Renormalization*. World Scientific. ISBN 9810237642.
- Kleinrock, Leonard. 1975. *Queueing System*. New York: John Wiley and Son.
- Klimontovich, Yu, L. 1992. *Alternative Description of Stochastic Processes in Nonlinear Systems "Kinetic Form" of Master and Fokker-Planck Equations*. Physics A. 182, 121-132.
- Klimontovich, Yu, L. 1990. *Ito, Stratonovich and Kinetic Forms of Stochastic Equations*. Physics A. 163, 515-532.
- Klimontovich, Yu, L. 1994. *Nonlinear Brownian Motion*. Physics-Uspekhi. 37 (8) 737-767.
- Lemons, Don. S. 1997. *Paul Langevin's 1908 Paper" On the Theory of Brownian Motion*. Am. J. Phys (11), 1079-1081.
- Nelson, E. 2001. *Dynamical Theories of Brownian Motion Second Edition*. Princeton: Princeton University Press.
- Palupi, Dwi. 2010. *Persamaan Fokker-Planck dan Aplikasinya dalam Astrofisika*. Jurnal Berkala Fisika. 13(2). 1-6.
- Purwanto, A. 2010. *Teori Relativitas Khusus*. Surabaya: ITS Press.
- Resmiyanto, R. 2014. *Nalar Fisika di Pasar Saham Pengantar Ekonofisika*. Yogyakarta: GRE Publisihing.
- Risken, H. 1984. *The Fokker-Planck Equation Methods of Solution and Applications*. New York: Springer-Verlag.
- Riyanti, S. 2008. *Aplikasi Teori Kontrol Optimal Stokastik pada Penentuan Portofolio Optimal*. Skripsi. Bandung: Institut Teknologi Bandung.
- Salim, Muchtar. 2007. *Ilmu Falak*. Surakarta: Pustaka.
- Scot, M. 2013. *Applied Stochastic Process in Science and Engineering*. Anonymous.
- Taylor, H, M. dan S, Karlin. 1998. *An Introduction to Stochastic Modelling*. California: Academic Press.

Torvannabun, M, dan Duangpithak, S. 2011. *Numerical Solucition of Fokker-Planck Equation by Variational Iteration Method*. Int, Journal of Math Analysis. 5(44): 2193-2201.

Utsaimin, Ibnu. 2009. *Tafsir Juz'Amma*. Bekasi: Pustaka Darul Falah.

Watson, G N. 1992. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. New York: Cambridge University Press.

Weinberg, S. 1972. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. New York: John Wiley & Sons.





# LAMPIRAN

## Lampiran 1

### Pembuktian Persamaan Tensor Gesekan

dimulai dari persamaan (4.17)

$$U_{\beta}^{\mu} = U \left( \delta_{\beta}^{\mu} + \frac{v^{\mu} v_{\beta}}{c^2} \right) \quad (1)$$

pada kerangka  $S'$  diketahui bahwa

$$(V^{\mu}) = (c, V^i) \quad (v^{\mu}) = (c, 0) \quad (2)$$

sehingga bentuk matrik tensor gesekan bisa dihitung dengan menggunakan

$$U_0^0 = U \left( \delta_0^0 + \frac{v^0 v_0}{c^2} \right) = U(1 - 1) = 0$$

$$U_1^0 = U \left( \delta_1^0 + \frac{v^0 v_1}{c^2} \right) = 0$$

$$U_2^0 = U \left( \delta_2^0 + \frac{v^0 v_2}{c^2} \right) = 0$$

$$U_3^0 = U \left( \delta_3^0 + \frac{v^0 v_3}{c^2} \right) = 0$$

$$U_0^1 = U \left( \delta_0^1 + \frac{v^1 v_0}{c^2} \right) = 0$$

$$U_1^1 = U \left( \delta_1^1 + \frac{v^1 v_1}{c^2} \right) = v$$

$$U_2^1 = U \left( \delta_2^1 + \frac{v^1 v_2}{c^2} \right) = 0$$

$$U_3^1 = U \left( \delta_3^1 + \frac{v^1 v_3}{c^2} \right) = 0$$

$$U_0^2 = U \left( \delta_0^2 + \frac{v^2 v_0}{c^2} \right) = 0$$

$$U_1^2 = U \left( \delta_1^2 + \frac{v^2 v_1}{c^2} \right) = 0$$

$$U_2^2 = U \left( \delta_2^2 + \frac{v^2 v_2}{c^2} \right) = v$$

$$U_3^2 = U \left( \delta_3^2 + \frac{v^2 v_3}{c^2} \right) = 0$$

$$U_0^3 = U \left( \delta_0^3 + \frac{v^3 v_0}{c^2} \right) = 0$$

$$U_1^3 = U \left( \delta_1^3 + \frac{v^3 v_1}{c^2} \right) = 0$$

$$U_2^3 = U \left( \delta_2^3 + \frac{v^3 v_2}{c^2} \right) = 0$$

$$U_3^3 = U \left( \delta_3^3 + \frac{v^3 v_3}{c^2} \right) = v$$

(3)

didapatkan bentuk matriks tensor yaitu

$$(U_{\beta}^{\mu}) = \begin{pmatrix} U_0^0 & U_1^0 & U_2^0 & U_3^0 \\ U_0^1 & U_1^1 & U_2^1 & U_3^1 \\ U_0^2 & U_1^2 & U_2^2 & U_3^2 \\ U_0^3 & U_1^3 & U_2^3 & U_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U \end{pmatrix}$$

(4)

## Lampiran 2

### Penurunan Persamaan Langevin Relativistik pada Kerangka

#### Laboratorium

Pada kerangka laboratorium  $S$  diketahui bahwa

$$(V^\mu) = (c, 0), \quad (v^\mu) = \gamma(c, v^i), \quad (W^\mu) = (W^0, W^i), \quad d\tau = \frac{dt}{\gamma} \quad (1)$$

dengan menggunakan tensor gesekan

$$U_v^\mu = U \left( \eta_v^\mu + \frac{v^\mu v_v}{c^2} \right) \quad (2)$$

didapatkan nilai tensor setiap bagian matriks, yaitu

$$\begin{aligned} U_0^0 &= U \left( \eta_0^0 + \frac{v^0 v_0}{c^2} \right) \\ &= U(-\gamma^2 + 1) \\ &= -U \frac{\gamma^2 v^2}{c^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_1^0 &= U \left( \eta_1^0 + \frac{v^0 v_1}{c^2} \right) \\ &= U \frac{\gamma^2 v_x}{c^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_2^0 &= U \left( \eta_2^0 + \frac{v^0 v_2}{c^2} \right) \\ &= U \frac{\gamma^2 v_y}{c^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_3^0 &= U \left( \eta_3^0 + \frac{v^0 v_3}{c^2} \right) \\ &= U \frac{\gamma^2 v_z}{c^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_0^1 &= U \left( \eta_0^1 + \frac{v^1 v_0}{c^2} \right) \\ &= -U \frac{\gamma^2 v_x}{c} \end{aligned}$$

$$U_1^1 = U \left( \eta_1^1 + \frac{v^1 v_1}{c^2} \right)$$

$$= U \left( 1 + \frac{\gamma^2 v_x^2}{c^2} \right)$$

$$U_2^1 = U \left( \eta_2^1 + \frac{v^1 v_2}{c^2} \right)$$

$$= U \frac{\gamma^2 v_x v_y}{c^2}$$

$$U_3^1 = U \left( \eta_3^1 + \frac{v^1 v_3}{c^2} \right)$$

$$= U \frac{\gamma^2 v_x v_z}{c^2}$$

$$U_0^2 = U \left( \eta_0^2 + \frac{v^1 v_0}{c^2} \right)$$

$$= -U \frac{\gamma^2 v_y}{c}$$

$$U_1^2 = U \left( \eta_1^2 + \frac{v^2 v_1}{c^2} \right)$$

$$= U \frac{\gamma^2 v_y v_x}{c^2}$$

$$U_2^2 = U \left( \eta_2^2 + \frac{v^2 v_2}{c^2} \right)$$

$$= U \left( 1 + \frac{\gamma^2 v_y^2}{c^2} \right)$$

$$U_3^2 = U \left( \eta_3^2 + \frac{v^2 v_3}{c^2} \right)$$

$$= U \frac{\gamma^2 v_y v_z}{c^2}$$

$$U_0^3 = U \left( \eta_0^3 + \frac{v^3 v_0}{c^2} \right)$$

$$= -U \frac{\gamma^2 v_z}{c}$$

$$U_1^3 = U \left( \eta_1^3 + \frac{v^3 v_1}{c^2} \right)$$

$$= U \frac{\gamma^2 v_z v_x}{c^2}$$

$$U_2^3 = U \left( \eta_2^3 + \frac{v^3 v_2}{c^2} \right) \\ = U \frac{\gamma^2 v_z v_y}{c^2}$$

$$U_3^3 = U \left( \eta_3^3 + \frac{v^3 v_3}{c^2} \right) \\ = U \left( 1 + \frac{\gamma^2 v_z^2}{c^2} \right) \tag{3}$$

Selanjutnya ditinjau bentuk persamaan langevin relativistic

$$dp^\mu(\tau) = -U_v^\mu (p^\nu(\tau) - mV^\nu) d\tau + W^\mu(\tau) \tag{4}$$

diketahui bahwa

$$p^\mu = mv^\mu \\ = m\gamma(c, v^i) \\ = (m\gamma c, m\gamma v^i) \\ = \left( \frac{E}{c}, p^i \right) \tag{5}$$

dari persamaan (2) dan (4), persamaan (6) dapat diuraikan menjadi

$$\begin{aligned} \frac{dE}{c} &= -U_v^0 (p^\nu(\tau) - mV^\nu) d\tau + W^0(\tau) \\ &= -U_0^0 (p^0(\tau) - mV^0) \frac{dt}{\gamma} - U_1^0 (p^1(\tau) - mV^1) \frac{dt}{\gamma} \\ &\quad - U_2^0 (p^2(\tau) - mV^2) \frac{dt}{\gamma} - U_3^0 (p^3(\tau) - mV^3) \frac{dt}{\gamma} + W^0(\tau) \\ &= U \frac{\gamma^2 v^2}{c^2} (p^0(\tau) - mV^0) \frac{dt}{\gamma} - U \frac{\gamma^2 v_x}{c^2} (p^1(\tau) - mV^1) \frac{dt}{\gamma} \\ &\quad - U \frac{\gamma^2 v_y}{c^2} (p^2(\tau) - mV^2) \frac{dt}{\gamma} - U \frac{\gamma^2 v_z}{c^2} (p^3(\tau) - mV^3) \frac{dt}{\gamma} + W^0(t) \end{aligned}$$

$$= U \frac{\gamma^2 v^2}{c^2} (m\gamma c - mc) \frac{dt}{\gamma} - U \frac{\gamma^2 v_x}{c^2} (m\gamma v_x) \frac{dt}{\gamma} - U \frac{\gamma^2 v_y}{c^2} (m\gamma v_y) \frac{dt}{\gamma} \\ - U \frac{\gamma^2 v_z}{c^2} (m\gamma v_z) \frac{dt}{\gamma} + W^0(t)$$

$$= U \frac{m\gamma v^2}{c} (\gamma - 1) dt - U \frac{m\gamma^2 v_x^2}{c^2} dt - U \frac{m\gamma^2 v_y^2}{c^2} dt - U \frac{m\gamma^2 v_z^2}{c^2} dt \\ + W^0(t)$$

$$= U \frac{m\gamma v^2}{c} (\gamma - 1) dt - U \frac{m\gamma^2 v^2}{c^2} dt + W^0(t)$$

$$\frac{dE}{C} = -U \frac{m\gamma v^2}{c} dt + W^0(t)$$

$$dE = -U m\gamma v^2 dt + cW^0(t)$$

$$dE = -U p^i v_i dt + cW^0(t) \quad (6)$$

selanjutnya

$$dp^1 = -U_v^1 (p^v(\tau) - mV^v) d\tau + W^1(\tau)$$

$$= -U_0^1 (p^0(\tau) - mV^0) \frac{dt}{\gamma} - U_1^1 (p^1(\tau) - mV^1) \frac{dt}{\gamma} \\ - U_2^1 (p^2(\tau) - mV^2) \frac{dt}{\gamma} - U_3^1 (p^3(\tau) - mV^3) \frac{dt}{\gamma} + W^1(t)$$

$$= U \frac{\gamma^2 v_x}{c} (p^0(\tau) - mV^0) \frac{dt}{\gamma} - U \left( 1 + \frac{\gamma^2 v_x^2}{c^2} \right) (p^1(\tau) - mV^1) \frac{dt}{\gamma}$$

$$- U \frac{\gamma^2 v_x v_y}{c^2} (p^2(\tau) - mV^2) \frac{dt}{\gamma} - U \frac{\gamma^2 v_x v_z}{c^2} (p^3(\tau) - mV^3) \frac{dt}{\gamma} + W^1(t)$$

$$= U \frac{\gamma^2 v_x}{c} (m\gamma c - mc) \frac{dt}{\gamma} - U \left( 1 + \frac{\gamma^2 v_x^2}{c^2} \right) (m\gamma v_x) \frac{dt}{\gamma}$$

$$- U \frac{\gamma^2 v_x v_y}{c^2} (m\gamma v_y) \frac{dt}{\gamma} - U \frac{\gamma^2 v_x v_z}{c^2} (m\gamma v_z) \frac{dt}{\gamma} + W^1(t)$$

$$\begin{aligned}
&= U\gamma^2 m v_x (\gamma - 1) \frac{dt}{\gamma} - U m \gamma v_x \frac{dt}{\gamma} - U \frac{\gamma^2 v_x^2}{c^2} m \gamma v_x \frac{dt}{\gamma} - U \frac{\gamma^2 v_x v_y}{c^2} m \gamma v_y \frac{dt}{\gamma} \\
&\quad - U \frac{\gamma^2 v_x v_z}{c^2} m \gamma v_z \frac{dt}{\gamma} + W^1(t) \\
&= U\gamma^2 m v_x dt - U\gamma m v_x dt - U m v_x dt - U \frac{\gamma^2 m v_x}{c^2} v_x^2 dt - U \frac{\gamma^2 m v_x}{c^2} v_y^2 dt \\
&\quad - U \frac{\gamma^2 m v_x}{c^2} v_z^2 dt + W^1(t) \\
&= U m v_x (\gamma^2 - \gamma - 1) dt - U \frac{\gamma^2 m v_x}{c^2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) dt + W^1(t) \\
&= U m v_x (\gamma^2 - \gamma - 1) dt - U \frac{\gamma^2 m v^2 v_x}{c^2} dt + W^1(t) \\
&= U m v_x \left( \gamma^2 - \gamma - 1 - \frac{\gamma^2 v^2}{c^2} \right) dt + W^1(t) \\
&= -U m v_x \gamma dt + W^1(t) \\
&= -U m v^1 \gamma dt + W^1(t) \\
&= -U p^1 dt + W^1(t) \tag{7}
\end{aligned}$$

kemudian untuk  $p^2$

$$\begin{aligned}
dp^2 &= -U_v^2 (p^v(\tau) - mV^v) d\tau + W^2(\tau) \\
&= -U_0^2 (p^0(\tau) - mV^0) \frac{dt}{\gamma} - U_1^2 (p^1(\tau) - mV^1) \frac{dt}{\gamma} \\
&\quad - U_2^2 (p^2(\tau) - mV^2) \frac{dt}{\gamma} - U_3^2 (p^3(\tau) - mV^3) \frac{dt}{\gamma} + W^2(t) \\
&= U \frac{\gamma^2 v_y}{c} (p^0(\tau) - mV^0) \frac{dt}{\gamma} - U \frac{\gamma^2 v_y v_x}{c^2} (p^1(\tau) - mV^1) \frac{dt}{\gamma} \\
&\quad - U \left( 1 + \frac{\gamma^2 v_y^2}{c^2} \right) (p^2(\tau) - mV^2) \frac{dt}{\gamma} - U \frac{\gamma^2 v_y v_z}{c^2} (p^3(\tau) - mV^3) \frac{dt}{\gamma} \\
&\quad + W^2(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= U \frac{\gamma^2 v_y}{c} (m\gamma c - mc) \frac{dt}{\gamma} - U \frac{\gamma^2 v_y v_x}{c^2} (m\gamma v_x) \frac{dt}{\gamma} \\
&\quad - U \left( 1 + \frac{\gamma^2 v_y^2}{c^2} \right) (m\gamma v_y) \frac{dt}{\gamma} - U \frac{\gamma^2 v_y v_z}{c^2} (m\gamma v_z) \frac{dt}{\gamma} + W^2(t) \\
&= U\gamma^2 m v_y (\gamma - 1) \frac{dt}{\gamma} - U \frac{\gamma^2 v_x^2}{c^2} m\gamma v_y \frac{dt}{\gamma} - U m\gamma v_y \frac{dt}{\gamma} - U \frac{\gamma^2 v_y^2}{c^2} m\gamma v_y \frac{dt}{\gamma} \\
&\quad - U \frac{\gamma^2 v_y v_z}{c^2} m\gamma v_z \frac{dt}{\gamma} + W^2(t) \\
&= U\gamma^2 m v_y dt - U\gamma m v_y dt - U m v_y dt - U \frac{\gamma^2 m v_y}{c^2} v_x^2 dt - U \frac{\gamma^2 m v_y}{c^2} v_y^2 dt \\
&\quad - U \frac{\gamma^2 m v_y}{c^2} v_z^2 dt + W^2(t) \\
&= U m v_y (\gamma^2 - \gamma - 1) dt - U \frac{\gamma^2 m v_y}{c^2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) dt + W^1(t) \\
&= U m v_y (\gamma^2 - \gamma - 1) dt - U \frac{\gamma^2 m v^2 v_y}{c^2} dt + W^1(t) \\
&= U m v_y \left( \gamma^2 - \gamma - 1 - \frac{\gamma^2 v^2}{c^2} \right) dt + W^2(t) \\
&= -U m v_y \gamma dt + W^2(t) \\
&= -U m v^2 \gamma dt + W^2(t) \\
&= -U p^2 dt + W^2(t) \tag{8}
\end{aligned}$$

terakhir, untuk  $p^3$  adalah

$$\begin{aligned}
dp^3 &= -U_v^3 (p^v(\tau) - mV^v) d\tau + W^3(\tau) \\
&= -U_0^3 (p^0(\tau) - mV^0) \frac{dt}{\gamma} - U_1^3 (p^1(\tau) - mV^1) \frac{dt}{\gamma} \\
&\quad - U_2^3 (p^2(\tau) - mV^2) \frac{dt}{\gamma} - U_3^3 (p^3(\tau) - mV^3) \frac{dt}{\gamma} + W^3(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= U \frac{\gamma^2 v_z}{c} (p^0(\tau) - mV^0) \frac{dt}{\gamma} - U \frac{\gamma^2 v_z v_x}{c^2} (p^1(\tau) - mV^1) \frac{dt}{\gamma} \\
&\quad - U \frac{\gamma^2 v_z v_y}{c^2} (p^2(\tau) - mV^2) \frac{dt}{\gamma} - U \left( 1 + \frac{\gamma^2 v_z^2}{c^2} \right) (p^3(\tau) - mV^3) \frac{dt}{\gamma} \\
&\quad + W^2(t) \\
&= U \frac{\gamma^2 v_z}{c} (m\gamma c - mc) \frac{dt}{\gamma} - U \frac{\gamma^2 v_z v_x}{c^2} (m\gamma v_x) \frac{dt}{\gamma} \\
&\quad - U \frac{\gamma^2 v_z v_y}{c^2} (m\gamma v_y) \frac{dt}{\gamma} - U \left( 1 + \frac{\gamma^2 v_z^2}{c^2} \right) (m\gamma v_z) \frac{dt}{\gamma} + W^3(t) \\
&= U\gamma^2 m v_z (\gamma - 1) \frac{dt}{\gamma} - U \frac{\gamma^2 v_x^2}{c^2} m\gamma v_z \frac{dt}{\gamma} - U \frac{\gamma^2 v_z v_y^2}{c^2} m\gamma v_z \frac{dt}{\gamma} - U m\gamma v_z \frac{dt}{\gamma} \\
&\quad - U \frac{\gamma^2 v_z^2}{c^2} m\gamma v_z \frac{dt}{\gamma} + W^3(t) \\
&= U\gamma^2 m v_z dt - U\gamma m v_z dt - U m v_z dt - U \frac{\gamma^2 m v_z}{c^2} v_x^2 dt - U \frac{\gamma^2 m v_z}{c^2} v_y^2 dt \\
&\quad - U \frac{\gamma^2 m v_z}{c^2} v_z^2 dt + W^3(t) \\
&= U m v_z (\gamma^2 - \gamma - 1) dt - U \frac{\gamma^2 m v_z}{c^2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) dt + W^3(t) \\
&= U m v_z (\gamma^2 - \gamma - 1) dt - U \frac{\gamma^2 m v^2 v_z}{c^2} dt + W^3(t) \\
&= U m v_z \left( \gamma^2 - \gamma - 1 - \frac{\gamma^2 v^2}{c^2} \right) dt + W^3(t) \\
&= -U m v_z \gamma dt + W^3(t) \\
&= -U m v^3 \gamma dt + W^3(t) \\
&= -U p^3 dt + W^2(t) \tag{9}
\end{aligned}$$

dari ketiga persamaan diatas secara umum dapat ditulis menjadi

$$dp^i = -Up^i dt + W^i \quad (10)$$

dengan  $i = 1,2,3$ .



### Lampiran 3

#### Pembuktian Nilai Eigen

diketahui

$$A_j^i = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \quad (1)$$

untuk mencari nilai eigen diatas, diketahui

$$Ax = \gamma x \quad (2)$$

nilai eigen dikali dengan matriks identitas sehingga

$$Ax = \gamma Ix \quad (3)$$

$$(\gamma I - A)x = 0$$

dengan I adalah matriks identitas, yaitu

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

maka

$$\left( \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\left( \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} - \gamma & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} - \gamma & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} - \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (5)$$

dari persamaan (4.60) didapatkan determinan yang memenuhi bentuk persamaan linear orde-3 yaitu

$$aA^3 + bA^2 + cA + d = 0 \quad (6)$$

dengan akar-akar penyelesaiannya adalah

$$A_1 = \gamma, \quad A_2 = \gamma, \quad A_3 = \frac{1}{\gamma} \quad (7)$$

akar-akar tersebut kemudian dituliskan dalam bentuk matriks nilai eigen

$$\begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix} \quad (8)$$

dimana determinannya adalah

$$\det(A) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix} = \gamma^2 \frac{1}{\gamma} = \gamma \quad (9)$$

## Lampiran 4

### Metode *Cholesky Decomposition*

*Cholesky decomposition* atau metode *cholesky* merupakan salah satu metode untuk menyelesaikan sebuah persamaan linier. ciri-ciri dari persamaan linier yang dapat diselesaikan dengan menggunakan metode *cholesky* adalah

1. matriks persegi yang simetris
2. Hermitian
3. berdefinit positif atau negatif
4. angka diluar diagonal utama memiliki nilai yang sama, contohnya

$$\begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix}.$$

Ada dua jenis bentuk rumus dalam metode *cholesky* berdasarkan jenis matriks yang digunakan. Karena pada persamaan (4.58) bentuk matriks  $A$  berdefinit positif maka digunakan bentuk persamaan

$$A = L^T L \quad (1)$$

adapun ciri-ciri dari matriks berdefinit positif adalah

1. nilai pada diagonal utamanya selalu positif
2. determinannya bernilai positif.

selanjutnya, tulis kembali bentuk matriks  $A$  dimana

$$A_j^i = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \quad (2)$$

seperti halnya ciri-ciri diatas, matriks  $A$  disebut sebagai matriks simetri apabila diluar unsur diagonal, unsur matriksnya sama dengan unsur matriks kolom pada indeks baris dan kolom yang sama, atau

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (3)$$

matriks simetri dfapat dinyatakan sebagai produk matriks triangulasi bawah dengan matriks triangulasi atas dengan kedua matriks satu sama lain adalah matriks transpose.

$$A = L^T L = \begin{pmatrix} L_1^1 & 0 & 0 \\ L_2^1 & L_2^2 & 0 \\ L_3^1 & L_2^3 & L_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1^1 & L_1^2 & L_1^3 \\ 0 & L_2^2 & L_2^3 \\ 0 & 0 & L_3^3 \end{pmatrix} \quad (4)$$

hubungan unsur  $A$  dengan unsur  $L$  adalah

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1^1 & 0 & 0 \\ L_2^1 & L_2^2 & 0 \\ L_3^1 & L_2^3 & L_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1^1 & L_1^2 & L_1^3 \\ 0 & L_2^2 & L_2^3 \\ 0 & 0 & L_3^3 \end{pmatrix} \quad (5)$$

dimana matriks  $L(p)$  diberikan oleh

untuk kolom pertama

$$\begin{aligned} A_1^1 &= (L_1^1)^2 \\ A_1^2 &= L_1^1 L_1^2 \\ A_1^3 &= L_1^1 L_1^3 \end{aligned} \quad (6)$$

sehingga didapatkan

$$L_1^1 = \sqrt{A_1^1}$$

$$L_1^2 = \frac{A_1^2}{L_1^1}$$

$$L_1^3 = \frac{A_1^3}{L_1^1}$$

(7)

untuk kolom kedua

$$A_2^2 = (L_1^2)^2 + (L_2^2)^2$$

$$A_2^3 = L_1^2 L_1^3 + L_2^2 L_2^3$$

(8)

didapatkan

$$L_2^2 = \sqrt{A_2^2 - (L_1^2)^2}$$

$$L_2^3 = \frac{(A_2^3 - L_1^2 L_1^3)}{L_2^2}$$

(9)

terakhir, untuk kolom ketiga

$$A_3^3 = (L_1^3)^2 + (L_2^3)^2 + (L_3^3)^2$$

(10)

sehingga

$$(L_3^3)^2 = A_3^3 - (L_1^3)^2 - (L_2^3)^2$$

$$= \sqrt{A_3^3 - (L_1^3)^2 - (L_2^3)^2}$$

(11)

kemudian untuk mencari invers matriks  $L(p)^{-1}$  diketahui

$$L = \begin{pmatrix} L_1^1 & L_1^2 & L_1^3 \\ 0 & L_2^2 & L_2^3 \\ 0 & 0 & L_3^3 \end{pmatrix}$$

(12)

kof  $L$  dicari melalui

$$\begin{aligned}
 f L &= \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} L_2^2 & L_2^3 \\ 0 & L_3^3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & L_2^3 \\ 0 & L_3^3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & L_2^2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} L_1^2 & L_1^3 \\ 0 & L_3^3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} L_1^1 & L_1^3 \\ 0 & L_3^3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} L_1^1 & L_1^2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} L_1^2 & L_1^3 \\ L_2^2 & L_2^3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} L_1^1 & L_1^3 \\ 0 & L_2^3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} L_1^1 & L_1^2 \\ 0 & L_2^2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} +|L_2^2 L_3^3 - L_2^3 0| & -|0 L_3^3 - L_2^3 0| & +|0 - L_2^2 0| \\ -|L_1^2 L_3^3 - L_1^3 0| & +|L_1^1 L_3^3 - L_1^3 0| & -|L_1^1 0 - L_1^2 0| \\ +|L_1^2 L_2^3 - L_1^3 L_2^2| & -|L_1^1 L_2^3 - L_1^3 0| & +|L_1^1 L_2^2 - L_1^2 0| \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} L_2^2 L_3^3 & 0 & 0 \\ -L_1^2 L_3^3 & L_3^3 L_1^1 & 0 \\ L_1^2 L_2^3 - L_1^3 L_2^2 & -L_1^1 L_2^3 & L_1^1 L_2^2 \end{pmatrix} \tag{13}
 \end{aligned}$$

sehingga adjoint  $L$  didapatkan

$$\text{adj } L = \begin{pmatrix} L_2^2 L_3^3 & -L_1^2 L_3^3 & L_1^2 L_2^3 - L_1^3 L_2^2 \\ 0 & L_3^3 L_1^1 & -L_2^3 L_1^1 \\ 0 & 0 & L_1^1 L_2^2 \end{pmatrix} \tag{14}$$

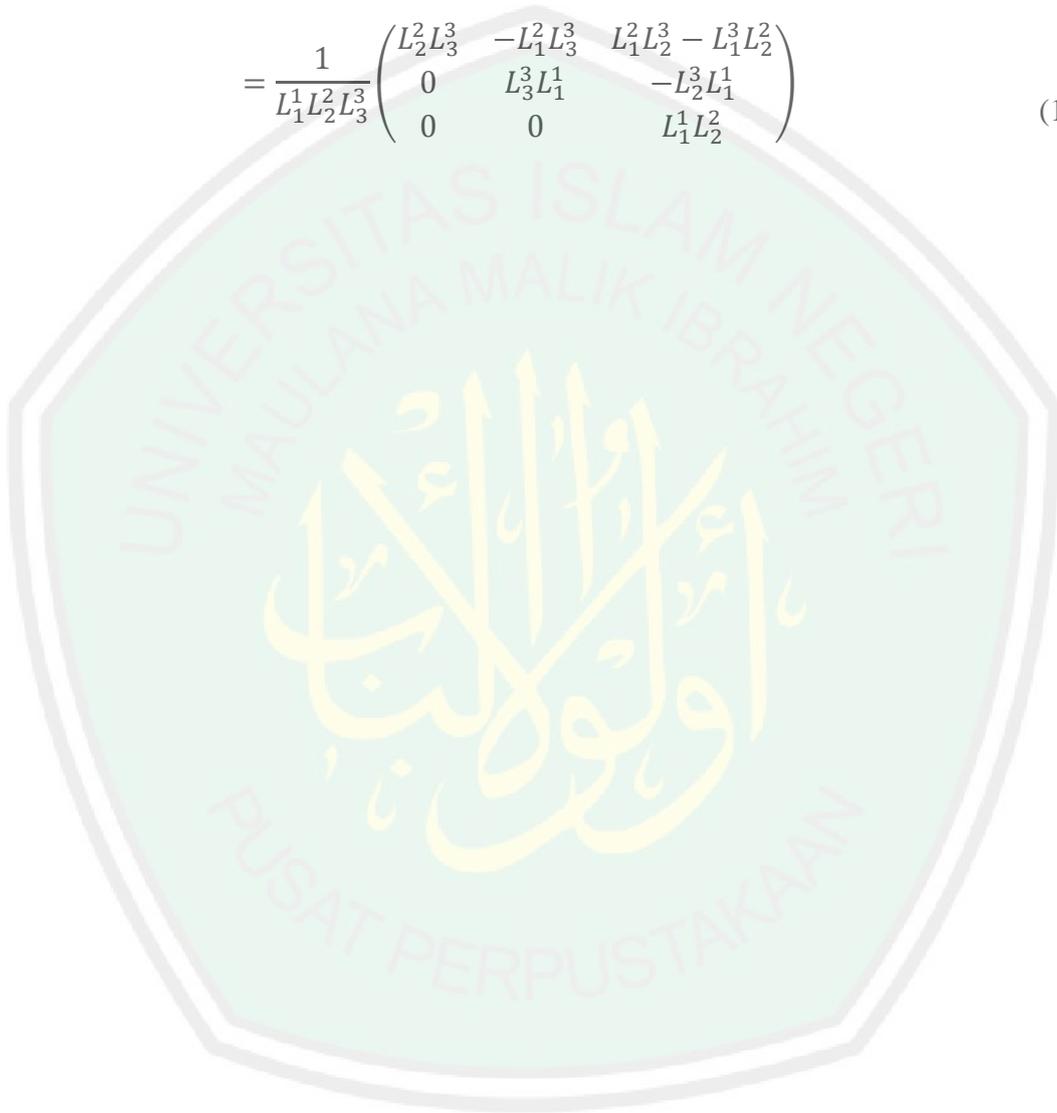
kemudian  $\det L$  adalah

$$\begin{aligned}
 \det L &= \begin{vmatrix} L_1^1 & L_1^2 & L_1^3 & L_1^1 & L_1^2 \\ 0 & L_2^2 & L_2^3 & 0 & L_2^2 \\ 0 & 0 & L_3^3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
 &= L_1^1 L_2^2 L_3^3 + L_1^2 L_2^3 0 + L_1^3 0 - L_1^3 L_2^2 0 - L_1^1 L_2^3 0 - L_1^2 0 L_3^3 \\
 &= L_1^1 L_2^2 L_3^3 \tag{15}
 \end{aligned}$$

sehingga, invers matriks  $L^{-1}$  didapatkan

$$L^{-1} = \frac{1}{\det(L)} \text{adj}(L)$$

$$= \frac{1}{L_1^1 L_2^2 L_3^3} \begin{pmatrix} L_2^2 L_3^3 & -L_1^2 L_3^3 & L_1^2 L_2^3 - L_1^3 L_2^2 \\ 0 & L_3^3 L_1^1 & -L_2^3 L_1^1 \\ 0 & 0 & L_1^1 L_2^2 \end{pmatrix} \quad (16)$$



## Lampiran 5

### Pendekatan Hanggi-Klimontovich

Pendekatan Hanggi-Klimontovich merupakan salah satu pendekatan yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan Fokker-Planck. Pada dasarnya konsep yang digunakan pendekatan tersebut adalah menganalisis persamaan Fokker-Planck pada daerah perhitungan  $t + \Delta t$  pada saat posisi  $x + \Delta x$ .

Ditinjau persamaan Master yang merupakan dasar dari persamaan Fokker-Planck yaitu

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \int [W^s(x, x')(f(x', t) - f(x, t)) - W^a(x, x')(f(x', t) + f(x, t))] dx' \quad (17)$$

dimana fungsi simetri  $W^s(x, x')$  didefinisikan sebagai koefisien difusi dalam persamaan fokker-planck dan fungsi antisimetri  $W^a(x, x')$  sebagai koefisien gesekan.

Diasumsikan partikel pada fluida tersebut identik dengan partikel pada gas ideal dan mengikuti keadaan  $|x - x'| \ll x, x', x \approx x'$ . Dengan berfokus pada daerah perhitungan (diskritisasi)  $(x + \Delta x)$  peluang transisi  $W(x, x')$  dapat dirubah menjadi

$$W^{s,a}(x, x') = W^{s,a}\left(x - x', \frac{x + x'}{2}\right) = W^{s,a}\left(\Delta x, x - \frac{\Delta x}{2}\right) \quad (20)$$

dimana terlihat bahwa daerah analisis berubah antara  $\Delta x$  menuju  $x - \frac{\Delta x}{2}$  dan tulis

kembali persamaan master sebagai

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \int \left[ W_{\Delta x, x - \frac{\Delta x}{2}}^s (f(x - \Delta x, t) - f(x, t)) - W_{\Delta x, x - \frac{\Delta x}{2}}^a (f(x - \Delta x, t) + f(x, t)) \right] d\Delta x \quad (21)$$

selanjutnya, diasumsikan keadaan  $|x - x'| \ll x, x'$  juga mengakibatkan  $|\Delta x| \approx 0$

yang mana  $\Delta x = x - x'$  sehingga  $W(\Delta x, x) \approx 0$  dan  $W\left(\Delta x, x - \frac{\Delta x}{2}\right) \approx W(\Delta x, x)$ ,

dengan kondisi tersebut, didapatkan bentuk integral

$$\int W_{\Delta x, x}^s \Delta x d(\Delta x) = 0$$

$$\int W_{\Delta x, x}^a d(\Delta x) = 0 \quad (22)$$

kemudian, dilakukan ekspansi persamaan (21) terhadap  $\Delta x$  menggunakan teorema Taylor

$$\left[ W_{\Delta x, x - \frac{\Delta x}{2}}^s (f(x - \Delta x, t) - f(x, t)) \right] d\Delta x$$

$$\int \left( 1 - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial}{\partial x} \right) W_{\Delta x, x}^s \left( f(x, t) - \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - f(x, t) \right) d\Delta x$$

$$\int \left( 1 - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial}{\partial x} \right) W_{\Delta x, x}^s \left( -\Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) d\Delta x$$

$$\int \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( W_{\Delta x, x}^s \frac{\partial f}{\partial x} \right) d\Delta x \quad (23)$$

$$\begin{aligned}
& \int \left[ W_{\Delta x, x - \frac{\Delta x}{2}}^s (f(x - \Delta x, t) + f(x, t)) \right] d\Delta x \\
&= - \int \left( 1 - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial}{\partial x} \right) W_{\Delta x, x}^s \left( f(x, t) - \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + f(x, t) \right) d\Delta x \\
&- \int \left( 1 - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial}{\partial x} \right) W_{\Delta x, x}^s \left( 2f(x, t) - \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) d\Delta x \\
& \int \Delta x \frac{\partial}{\partial x} (W_{\Delta x, x}^s f) d\Delta x
\end{aligned} \tag{24}$$

sehingga

$$\frac{f(x, t)}{\partial t} = \int \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( W_{\Delta x, x}^s \frac{\partial f}{\partial x} \right) d\Delta x + \int \Delta x \frac{\partial}{\partial x} (W_{\Delta x, x}^s f) d\Delta x \tag{25}$$

didefinisikan

$$\begin{aligned}
& \int \frac{1}{2} (\Delta x)^2 W_{\Delta x, x}^s d\Delta x = D \\
& \int \Delta x W_{\Delta x, x}^s d\Delta x = v
\end{aligned} \tag{26}$$

sebagai hasilnya, didapatkan bentuk persamaan fokker-planck

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (v f) \tag{27}$$

dimana  $A(x)$  merupakan koefisien gesekan dan  $D(x)$  adalah koefisien difusi.

Untuk kasus 1+3 dimensi dengan pergerakan partikel diwakili oleh perubahan

momentum dan kecepatan, persamaan diatas dapat ditulis menjadi

$$\frac{\partial f(p, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p^i} \left( D A^{-1} \frac{\partial f}{\partial p^j} \right) + \frac{\partial}{\partial p^i} (v p^i f) \tag{28}$$

## Lampiran 6

### Bentuk Integral Fungsi Bessel Termodifikasi Jenis Kedua

Fungsi Bessel jenis kedua merupakan pengembangan dari fungsi Bessel jenis pertama dimana bentuk  $J_\nu(x)$  nilai  $x$  tidak mempunyai limit berhingga. Hal ini kemudian mengakibatkan nilai  $J_\nu(x)$  dan  $J_{-\nu}(x)$  menjadi solusi yang bebas linier. Penyelesaian umum fungsi Bessel jenis kedua dapat ditulis

$$Y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x) \quad (1)$$

nilai  $c_1$  dan  $c_2$  dapat diganti dengan

$$c_1 = \frac{\cos \nu\pi}{\sin \nu\pi} \text{ dan } c_2 = -\frac{1}{\sin \nu\pi} \quad (2)$$

sehingga didapatkan bentuk fungsi Bessel

$$Y_\nu(x) = \frac{\cos \nu\pi J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi} \quad (3)$$

persamaan diatas merupakan fungsi Bessel jenis kedua dengan orde  $\nu \neq [0,1,2,3 \dots]$  atau biasa dikenal dengan fungsi Neumann. Bentuk diatas menjadi “tak terdefinisi” yang berbentuk  $\frac{0}{0}$  jika  $\nu$  merupakan bilangan bulat. Hal ini disebabkan untuk suatu bilangan bulat terdapat bentuk  $\cos \nu\pi (-1)^\nu$  dan  $J_{-\nu}(x) = (-1)^\nu J_\nu(x)$ . Untuk mengatasi hal tersebut maka digunakan rumus L'Hospital dimana

$$Y_\nu(x) = \lim_{p \rightarrow \nu} \left[ \frac{\cos p\pi J_p(x) - J_{-p}(x)}{\sin p\pi} \right] \quad (4)$$

kombinasi linier dari fungsi Bessel jenis kedua dengan orde  $\nu$  dan fungsi Bessel jenis pertama adalah

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iY_\nu(x), \quad H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iY_\nu(x) \quad (5)$$

yang disebut sebagai fungsi Hankel jenis pertama dan jenis kedua.

Fungsi Bessel jenis kedua dan pertama yang telah dijelaskan pada lampiran sebelumnya akan sesuai untuk bilangan yang kompleks, untuk kasus khusus pada bilangan imajiner fungsi Bessel masing-masing dapat dikembangkan menjadi

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix) = e^{\frac{n\pi i}{2}} J_\nu(ix) \quad (6)$$

yang merupakan fungsi Bessel dimodifikasi jenis pertama dengan  $I_\nu(x) = I_{-\nu}(x)$  untuk  $\nu$  bilangan bulat. Sedangkan untuk fungsi Bessel dimodifikasi jenis kedua didefinisikan sebagai

$$k_\nu(x) = \frac{\pi}{2} \left[ \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin \nu\pi} \right] \quad (7)$$

Selanjutnya, untuk mendapatkan bentuk integral dari fungsi dimodifikasi jenis kedua, digunakan kembali fungsi Bessel jenis pertama, dimana

$$J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!) \Gamma(m + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu} \quad (8)$$

kemudian dengan menggunakan bentuk integral dari fungsi gamma, yaitu

$$\frac{1}{\Gamma(m + \nu + 1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^0 t^{-\nu-m-1} e^t dt \quad (9)$$

bentuk persamaan fungsi Bessel jenis pertama menjadi

$$J_v(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^v}{2\pi i} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{1}{2}x\right)^{2m}}{(m!)} \int_{-\infty}^0 t^{-v-m-1} e^t dt \quad (10)$$

pertimbangkan sebuah fungsi yang diperoleh dengan menukar tanda dari penjumlahan dan integral pada persamaan diatas, yaitu

$$f(X) = \int_{-\infty}^0 t^{-v-1} \exp\left(t + \frac{x^2}{4t}\right) dt \quad (11)$$

persamaan diatas merupakan sebuah fungsi analitik  $X$  untuk semua nilai  $X$ . fungsi tersebut kemudian diturunkan terhadap  $X$  dan diekspansi ke dalam deret taylor sehingga didapatkan

$$\int_{-\infty}^0 t^{-v-1} \exp\left(t + \frac{x^2}{4t}\right) dt = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{1}{2}x\right)^{2m}}{(m!)} \int_{-\infty}^0 t^{-v-m-1} e^t dt \quad (12)$$

persamaan (10) dapat ditulis kembali menjadi

$$J_v(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^v}{2\pi i} \int_{-\infty}^0 t^{-v-1} \exp\left(t + \frac{x^2}{4t}\right) dt \quad (13)$$

diasumsikan  $t = \frac{1}{2}xu$  dan  $\frac{2t}{u} = x$  serta mengikuti bentuk fungsi Bessel

dimodifikasi  $I_v(x) = i^{-v}J_v(ix)$ , persamaan (13) menjadi

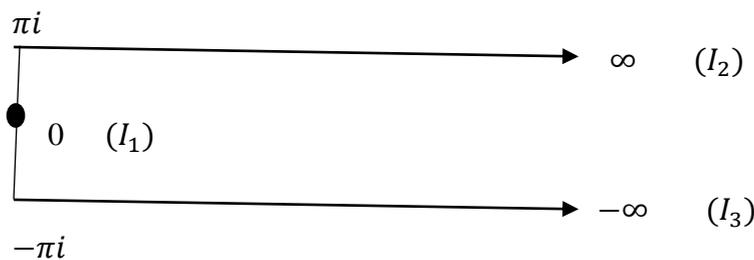
$$x) = \frac{\left(\frac{1}{2} \frac{2t}{u}\right)^v}{2\pi i} \int_{-\infty}^0 \left(\frac{1}{2}xu\right)^{-v-1} \exp\left(\frac{1}{2}xu + \frac{\left(\frac{2t}{u}\right)^2}{4t}\right) d\frac{1}{2}xu$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\left(\frac{t}{u}\right)^v}{2\pi i} \int_{-\infty}^0 \left(\frac{1}{2}xu\right)^{-v-1} \exp\left(\frac{1}{2}xu + \frac{\left(\frac{2t}{u}\right)^2}{4t}\right) d\frac{1}{2}xu \\
 &= \frac{(t)^v}{2\pi i} \frac{1}{tu} \int_{-\infty}^0 (u)^{-v-1} \exp\left(\frac{1}{2}xu + \frac{1}{2}xu \frac{1}{u^2}\right) du \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^0 (u)^{-v-1} \exp\left(\frac{1}{2}x\left[u + \frac{1}{u}\right]\right) du \tag{14}
 \end{aligned}$$

kemudian dimisalkan kembali  $u = e^w$  sehingga

$$\begin{aligned}
 x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^0 (e^w)^{-v-1} \exp\left(\frac{1}{2}x\left[e^w + \frac{1}{e^w}\right]\right) de^w \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^0 (e^w)^{-v}(e^w)^{-1}(e^w) \exp\left(x \frac{(e^w + e^{-w})}{2}\right) dw \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^0 (e^w)^{-v} \exp(x \cosh w) dw \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^0 e^{x \cosh w - vw} dw \tag{15}
 \end{aligned}$$

dari persamaan diatas, diambil kontur integral yang terdiri atas tiga sisi persegi Panjang. Seperti pada gambar dibawah ini dengan batasan pada  $\infty - \pi i, -\pi i, \pi i,$  dan  $\infty + \pi i$



sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} (x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^0 e^{x \cosh w - vw} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} (I_1 + I_2 - I_3) \end{aligned} \tag{16}$$

dengan

$$\begin{aligned} &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ivt} e^{x \cosh(it)} i dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-vi(\pi+t)} e^{x \cosh i(\pi+t)} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-vi(-\pi+t)} e^{x \cosh i(-\pi+t)} dt \end{aligned} \tag{17}$$

pertama, untuk bentuk  $I_1$

$$\begin{aligned} \bar{i} I_1 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ivt} e^{x \cosh(it)} i dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^{\pi} e^{i(x \cosh t - vt)} dt + \int_{-\pi}^0 e^{i(x \cosh t - vt)} dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (e^{i(x \cosh t - vt)} + e^{-i(x \cosh t - vt)}) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (e^{ix \cosh t} e^{-ivt} + e^{-ix \cosh t} e^{ivt}) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{x \cosh t} (e^{ivt} + e^{-ivt}) dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{x \cosh t} \left( \frac{e^{ivt} + e^{-ivt}}{2} \right) dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{x \cosh t} \cos vt dt
\end{aligned} \tag{18}$$

selanjutnya, untuk bentuk  $(I_2 - I_3)$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{i} (I_2 - I_3) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \left( \int_0^{\infty} e^{-vi(\pi+t)} e^{x \cosh i(\pi+t)} \right. \\
&\quad \left. - \int_0^{\infty} e^{-vi(-\pi+t)} e^{x \cosh i(-\pi+t)} \right) dt \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} e^{-x \cosh t - ivt} (e^{vi\pi} - e^{-vi\pi}) dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-x \cosh t - ivt} (-\sin \pi v) dt \\
&= -\frac{\sin \pi v}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-x \cosh t - ivt} dt
\end{aligned} \tag{19}$$

sehingga didapat bentuk integral

$$x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{x \cosh t} \cos vt dt - \frac{\sin \pi v}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-x \cosh t - ivt} dt \tag{20}$$

dengan inversnya

$$I_{-v}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{x \cosh t} \cos(-vt) dt + \frac{\sin \pi v}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-x \cosh t + ivt} dt \quad (21)$$

untuk selisihnya didapatkan

$$\begin{aligned} I_{-v}(x) - I_v(x) &= \\ &= \left( \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{x \cosh t} \cos(-vt) dt + \frac{\sin \pi v}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-x \cosh t + ivt} dt \right) \\ &\quad - \left( \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{x \cosh t} \cos(vt) dt - \frac{\sin \pi v}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-x \cosh t - ivt} dt \right) \\ &= \frac{\sin \pi v}{\pi} \int_0^{\infty} e^{x \cosh t + ivt} dt + \frac{\sin \pi v}{\pi} \int_0^{\infty} e^{x \cosh t - ivt} dt \\ &= \frac{2 \sin \pi v}{\pi} \int_0^{\infty} e^{x \cosh t} \frac{e^{ivt} + e^{-ivt}}{2} dt \\ &= \frac{2 \sin \pi v}{\pi} \int_0^{\infty} e^{x \cosh t} \cosh vt dt \end{aligned} \quad (22)$$

dari perhitungan diatas, didapatkan bentuk integral untuk fungsi Bessel dimodifikasi jeni kedua yaitu

$$\begin{aligned} I_{-v}(x) - I_v(x) &= \frac{\pi}{2} \left[ \frac{I_{-v}(x) - I_v(x)}{\sin v\pi} \right] \\ &= \frac{\pi}{2} \left[ \frac{\frac{2 \sin \pi v}{\pi} \int_0^{\infty} e^{x \cosh t} \cosh vt dt}{\sin v\pi} \right] \end{aligned}$$

$$= \int_0^{\infty} e^{x \cosh t} \cosh vt \, dt$$

(23)



## Lampiran 7

### Hubungan Rekursi Fungsi Bessel

Fungsi Bessel merupakan solusi dai persamaan differensial

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0 \quad (1)$$

fungsi ini banyak digunakan dalam pemecahan persoalan fisika dalam pola koordinat silinder atau bola.

Untuk mendapatkan solusinya, di asumsikan dari persamaan diatas

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n \geq 0} a_n x^{n+r} \\ y'(x) &= \sum_{n \geq 0} (n+r) a_n x^{n+r-1} \\ y''(x) &= \sum_{n \geq 0} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2} \end{aligned} \quad (2)$$

sehingga persamaan (1) menjadi

$$\begin{aligned} &\sum_{n \geq 0} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r} + \sum_{n \geq 0} (n+r) a_n x^{n+r} + \sum_{n \geq 0} a_n x^{n+r+2} \\ &\sum_{n \geq 0} a_n v^2 x^{n+r} = 0 \\ &\left[ \sum_{n \geq 0} (n+r)^2 - v^2 \right] a_n x^n + \sum_{n \geq 0} a_n x^{n+2} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

kemudian suku kedua pada ruas kiri persamaan diatas didefinisikan  $m = n + 2$

dan  $m = m - 2$  sehingga  $n = 0 \Leftrightarrow m = 2$  sehingga

$$\left[ \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)^2 - v^2 \right] a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n = 0 \quad (4)$$

dimisalkan

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} y^n &= [1 + x + x^2 + x^3 + \dots] + [y^2 + y^3 + \dots] \\ &= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} [x^n + y^n] \end{aligned} \quad (5)$$

dengan memasukkan bentuk diatas ke dalam persamaan (3) didapatkan

$$\begin{aligned} (r^2 - v^2)a_0 - [(1+r)^2 - v^2]a_1 x \\ + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+r)^2 - v^2]a_n + a_{n-2} x^n = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

agar nilainya menjadi nol maka ketiga suku pada ruas kiri juga harus bernilai nol.

Untuk mendapatkan nilai dari konstanta  $a_0$ ,  $a_1$  dan  $a_n$ , maka untuk suku pertama

$$\begin{aligned} (r+v)(r-v) - r^2 - v^2 &= 0 \\ r &= \mp v \end{aligned} \quad (7)$$

suku kedua

$$\begin{aligned} [(1+r)^2 - v^2]a_1 &= 0 \\ a_1 &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

dan terakhir untuk suku ketiga

$$\sum_{n=2}^{\infty} [(n+r)^2 - v^2] a_n + a_{n-2} = 0$$

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{1}{(n+r)^2 - v^2} a_{n-2} \\ &= -\frac{1}{n^2 + 2nv + v^2 - v^2} a_{n-2} \\ &= -\frac{1}{n^2 + 2nv} a_{n-2} \end{aligned} \quad (9)$$

diatur

$$a_0 = \frac{1}{2^v v!} \quad (10)$$

untuk nilai coba  $n = 2$  didapatkan

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{1}{4 + 4v} a_0 \\ &= -\frac{1}{4(1+v)} \frac{1}{2^v v!} \\ &= (-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{v+2} \frac{1}{1!(1+v)!} \end{aligned} \quad (11)$$

kemudian nilai coba  $n = 4$  dihasilkan

$$\begin{aligned} a_4 &= -\frac{1}{16 + 8v} a_2 \\ &= \frac{1}{8(v+2)} \left[ \left(\frac{1}{2}\right)^{v+2} \frac{1}{1!(1+v)!} \right] \\ &= (-1)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{v+4} \frac{1}{2!(2+v)!} \end{aligned} \quad (12)$$

sehingga, dari kedua nilai coba diatas, didapatkan bentuk umum fungsi Bessel yaitu

$$a_{2m} = (-1)^m \left(\frac{1}{2}\right)^{v+2m} \frac{1}{m!(m+v)!} \quad (13)$$

atau dapat ditulis menjadi

$$J_v(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)\Gamma(m+v+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+v} \quad (14)$$

dimana

$$\Gamma(m+v+1) = (m+v)! \quad (15)$$

persamaan diatas merupakan bentuk fungsi Bessel bentuk pertama ber-orde  $v$  yang digunakan untuk nilai  $x$  dengan limit berhingga dan mendekati nol. Untuk inversnya yaitu

$$J_{-v}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)\Gamma(m-v+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-v} \quad (16)$$

sekarang misalkan

$$\begin{aligned} m-v &= k \\ m &= v+k \end{aligned} \quad (17)$$

sehingga

$$\begin{aligned} J_{-v}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{v+k}}{(v+k)! k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(v+k)-v} \\ &= (-1)^v \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(v+k)! k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+v} \end{aligned} \quad (18)$$

didapatkan

$$J_{-v}(x) = (-1)^v J_v(x) \quad (19)$$

selanjutnya persamaan (14) ditulis kembali dan diturunkan terhadap  $x$  yaitu

$$\frac{d}{dx} J_v(x) = \frac{d}{dx} \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+v}}{2^{2m+v} (m!) \Gamma(m+v+1)} \right] \quad (20)$$

kalikan setiap bagian dengan  $x^v$  sehingga

$$\frac{d}{dx} [x^v J_v(x)] = \frac{d}{dx} \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+2v}}{2^{2m+v} (m!) \Gamma(m+v+1)} \right] \quad (21)$$

setelah diturunkan didapatkan persamaan

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [x^v J_v(x)] &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+2v-1}}{2^{2m+v} (m!) \Gamma(m+v+1)} \\ &= x^v \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m+2v) x^{2m+v-1}}{2^{2m+v} (m!) (m+v) (m+v-1)!} \\ &= x^v \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m 2 x^{2m+v-1}}{2^{2m+v} (m!) (m+v-1)!} \\ &= x^v \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+(v-1)}}{2^{2m+v-1} (m!) \Gamma(m+(v-1)+1)} \\ &= x^v J_{v-1}(x) \end{aligned} \quad (22)$$

selanjutnya persamaan (13) juga digunakan kembali dan dikalikan  $x^{-v}$  sehingga

$$x^{-v} J_{-v}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+v} (m!) \Gamma(m+v+1)} \quad (23)$$

persamaan diatas selanjutnya diturunkan terhadap  $X$  dan didapatkan

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} [x^{-v} J_{-v}(x)] &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m 2m x^{2m-1}}{2^{2m+v} (m!) \Gamma(m+v+1)} \\
 &= x^{-v} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m 2m x^{2m+v-1}}{2^{2m+v} m(m-1)! \Gamma(m+v+1)} \\
 &= x^{-v} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+v-1}}{2^{2m+v-1} (m-1)! \Gamma(m+v+1)} \quad (24)
 \end{aligned}$$

selanjutnya diganti  $m$  dengan  $m+1$  sehingga

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} [x^{-v} J_{-v}(x)] &= -x^{-v} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+(v+1)}}{2^{2m+v+1} (m!) \Gamma(m+(v+1)+1)} \\
 &= -x^{-v} J_{v+1}(x) \quad (25)
 \end{aligned}$$

dari sini, persamaan (22) digunakan kembali yaitu

$$\frac{d}{dx} [x^v J_v(x)] = x^v J_{v-1}(x) \quad (26)$$

bagian kiri dari persamaan diatas diturunkan dan dihasilkan

$$\begin{aligned}
 x^v J'_v(x) + v x^{v-1} J_v(x) &= x^v J_{v-1}(x) \\
 x^v J'_v(x) &= x^v J_{v-1}(x) - v x^{v-1} J_v(x) \quad (27)
 \end{aligned}$$

selanjutnya kedua ruas dibagi dengan  $x^v$  sehingga

$$J'_v(x) = J_{v-1}(x) - \frac{v}{x} J_v(x) \quad (28)$$

persamaan (25) kemudian juga dipakai kembali dimana

$$\frac{d}{dx} [x^{-v} J_{-v}(x)] = -x^{-v} J_{v+1}(x) \quad (29)$$

ruas kiri persamaan diatas juga diturunkan sehingga

$$x^{-v}J'_{-v}(x) + (-v)x^{-v-1}J_v(x) = -x^{-v}J_{v+1}(x) \quad (30)$$

persamaan diatas dibagi dengan  $x^{-v}$  dan didapatkan

$$J'_{-v}(x) + \frac{v}{x}J_v(x) = -J_{v+1}(x) \quad (31)$$

$$J'_{-v}(x) = \frac{v}{x}J_v(x) - J_{v+1}(x)$$

persamaan (30) dimasukkan ke persamaan (31) sehingga

$$2J'_{-v}(x) = J_{v-1}(x) - J_{v+1}(x) \quad (32)$$

persamaan diatas juga dimasukkan ke dalam persamaan (30) dan (31) sehingga menghasilkan

$$0 = -\frac{2v}{x}J_v(x) + J_{v-1}(x) + J_{v+1}(x) \quad (33)$$

$$\frac{2v}{x}J_v(x) = J_{v-1}(x) + J_{v+1}(x)$$

persamaan diatas merupakan hubungan rekursi untuk fungsi Bessel jenis pertama, sedangkan untuk fungsi Bessel termodifikasi jenis kedua dapat ditulis sebagai

$$K_{v+1}^{(2)}(\chi) + K_{v-1}^{(2)}(\chi) = \frac{2v}{\chi}K_v^{(2)}(\chi) \quad (34)$$

## Lampiran 8

### Script untuk Permodelan Rapat Peluang Kecepatan

1. script rapat peluang kecepatan dengan pengaturan  $\chi \leq 1$  untuk menghasilkan temperatur ekstra tinggi dan kecepatan partikel yang mendekati kelajuan cahaya.

```

1. #!/usr/bin/python -tt
2. import numpy as np
3. import matplotlib.pyplot as plt
4.
5. # draw function
6. X=1
7. m=4.0026*1.660538921**(-27)
8. c=3*1**5
9. K=1
10. N=1000
11. def fmb(v):
12.     return (N*((X/(4.0*np.pi* c**3 *K)) * np.exp(-X/np.sqrt(1-
13.         v**2)) * (1- v**2)**(-5/2)))
14. v = np.arange(-1.0,1.0,0.001)
15.
16.
17.
18. # plotting
19. plt.plot(v, fmb(v), 'r-') # plot from equation
20. plt.xlabel('speed -- v (c)')
21. plt.ylabel('probability -- f(v)')
22. plt.title(' distribution function')
23. plt.grid(True)
24. plt.show()

```

2. script rapat peluang kecepatan dengan pengaturan  $\chi \gg 1$  untuk mendapatkan temperatur yang kecil dan kecepatan partikel yang menjauhi kelajuan cahaya

```

3. #!/usr/bin/python -tt
4. import numpy as np
5. import matplotlib.pyplot as plt
6.
7. # draw function
8. X=10
9. m=4.0026*1.660538921**(-27)
10. c=3*1**5
11. K=1

```

```
12. N=1000
13. def fmb(v):
14.     return (N*((X/(4.0*np.pi* c**3 *K)) * np.exp(-X/np.sqrt(1-
    v**2)) * (1- v**2)**(-5/2)))
15.
16. v = np.arange(-1.0,1.0,0.001)
17.
18.
19.
20. # plotting
21. plt.plot(v, fmb(v), 'r-') # plot from equation
22. plt.xlabel('speed -- v (c)')
23. plt.ylabel('probability -- f(v)')
24. plt.title(' distribution function')
25. plt.grid(True)
26. plt.show()
```





KEMENTERIAN AGAMA RI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)  
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

Jl. Gupayam No. 50 Dinoyo Malang (0341) 551345 Fax. (0341) 572533

**BUKTI KONSULTASI SKRIPSI**

Nama : Irham Najmudin  
NIM : 13640006  
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Fisika  
Judul Skripsi : Studi Proses Gerak Brown Relativistik dengan Pendekatan  
Hanggi-Klimontovich  
Pembimbing I : Erika Rani, M.Si  
Pembimbing II : Umaiatus Syarifah, M. A.

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan
1	23 Agustus 2017	Konsultasi Bab I	
2	29 Agustus 2017	Konsultasi Bab II	
3	10 Oktober 2017	Konsultasi Bab III	
4	14 Desember 2017	Konsultasi Agama	
5	12 Maret 2018	Konsultasi Bab IV dan Bab V	
6	14 April 2018	Konsultasi Agama	
7	28 April 2018	Konsultasi Semua Bab, Abstrak dan Acc	
8	03 Mei 2018	Konsultasi Agama dan Acc	

Malang, 28 Mei 2018  
Mengetahui,  
Ketua Jurusan Fisika,



Dr. Abdul Basid, M.Si  
NIP. 19650504 199003 1 003