KONSTRUKSI *EXTREME POINT DETERMINISTIC ALGORITHM* MELALUI ALGORITMA KRUSKAL DAN ALGORITMA PRIM PADA MASALAH *MULTI-CRITERIA MINIMUM SPANNING TREE*

SKRIPSI

OLEH
MOH. MIFTAKHUL ULUM
NIM. 13610095

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018

KONSTRUKSI *EXTREME POINT DETERMINISTIC ALGORITHM* MELALUI ALGORITMA KRUSKAL DAN ALGORITMA PRIM PADA MASALAH *MULTI-CRITERIA MINIMUM SPANNING TREE*

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Moh. Miftakhul Ulum
NIM. 13610095

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
MALANG
2018

KONSTRUKSI *EXTREME POINT DETERMINISTIC ALGORITHM* MELALUI ALGORITMA KRUSKAL DAN ALGORITMA PRIM PADA MASALAH *MULTI-CRITERIA MINIMUM SPANNING TREE*

SKRIPSI

Oleh
Moh. Miftakhul Ulum
NIM. 13610095

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 2 Februari 2018

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Evawati Alisah, M.Pd	Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd
NIP. 19720604 199903 2 001	NIP. 19630502 198703 1 005

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

KONSTRUKSI *EXTREME POINT DETERMINISTIC ALGORITHM* MELALUI ALGORITMA KRUSKAL DAN ALGORITMA PRIM PADA MASALAH *MULTI-CRITERIA MINIMUM SPANNING TREE*

SKRIPSI

Oleh
Moh. Miftakhul Ulum
NIM. 13610095

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 21 Februari 2018

Penguji Utama	: Mohammad Jamhuri, M.Si	....
Ketua Penguji	: Dr. Abdussakir, M.Pd	....
Sekretaris Penguji	: Evawati Alisah, M.Pd	....
Anggota Penguji	: Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Moh. Miftakhul Ulum

NIM : 13610095

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Konstruksi *Extreme Point Deterministic Algorithm* Melalui Algoritma Kruskal dan Algoritma Prim pada Masalah *Multi-Criteria Minimum Spanning Tree*

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 2 Februari 2018
Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL
0CDE2AFF048885885
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Moh. Miftakhul Ulum
NIM. 13610095

MOTO

و بالحرمة إنتفعوا و بالخدمة إرتفعوا

Dengan hormat, ilmu itu bermanfaat dan dengan khidmah (mengabdikan diri),
derajat akan terangkat.
(Syekh K.H. Masbuhin Faqih)

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Kedua orang tua tercinta, ayahanda Abdul Wahid dan ibunda Zulfa Ulyatin

Adik-adik tersayang, Moh. Ali Syaifuddin (Alm.), Fina Aminatuz Zuhriyah (Alm.), dan Ana Fauziatul Mufarohah

Keluarga besar mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2013 SABSET

Keluarga besar Pondok Pesantren Anwarul Huda, Komplek Umar Ibn Khattab

Keluarga besar *Jam'iyah Sholawat al-Banjari* NUR MUHAMMAD

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala ungkapan syukur penulis haturkan ke hadirat Allah *'azza wa jalla* yang telah melimpahkan rahmat-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan skripsi dengan judul "Konstruksi *Extreme Point Deterministic Algorithm* Melalui Algoritma Kruskal dan Algoritma Prim pada Masalah *Multi-Criteria Minimum Spanning Tree*". Untaian shalawat serta salam selalu terlimpahkan kepada nabi Muhammad Saw.

Dalam penulisan skripsi ini, penulis mendapatkan bantuan berupa masukan, bimbingan, dukungan, dan doa dari berbagai pihak. Oleh karena itu penulis mengucapkan terima kasih sebesar-besarnya dan penghargaan setinggi-tingginya kepada:

1. Prof. Dr. Abdul Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Evawati Alisah, M.Pd, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, dan pengalaman yang berharga kepada penulis.
5. Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan pengalaman yang berharga kepada penulis.
6. Fachrur Rozi, M.Si, selaku dosen wali yang tiada hentinya memotivasi dan memberikan arahan kepada penulis.

7. Segenap *civitas academica* Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, terutama seluruh dosen, terima kasih untuk segenap ilmu dan bimbingannya selama ini.
8. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materiil.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat kepada para pembaca dan khususnya bagi penulis pribadi.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Malang, Februari 2018

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Ulum, Moh Miftakhul. 2018. **Konstruksi *Extreme Point Deterministic Algorithm* Melalui Algoritma Kruskal dan Algoritma Prim pada Masalah *Multi-Criteria Minimum Spanning Tree*.** Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Evawati Alisah, M.Pd. (II) Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd.

Kata kunci: *Extreme Point Deterministic Algorithm* (EPDA), Algoritma Kruskal, Algoritma Prim, *Multi-Criteria Minimum Spanning Tree* (MCMST)

Kajian MCMST merupakan pengembangan dari masalah optimasi *Minimum Spanning Tree* (MST) dengan memuat dua kriteria atau lebih. Salah satu algoritma yang mampu untuk menyelesaikan masalah MCMST adalah EDPA. EPDA memiliki tiga tahapan. Sebagai fondasi awal, pada tahap pertama dibangun dari Algoritma Kruskal atau Algoritma Prim dengan memperhatikan kriteria yang bersesuaian satu per satu. Kemudian pada tahap kedua dan ketiga dilakukan proses mutasi sampai akhirnya didapatkan *spanning tree* baru yang menjadi solusi efisien atau *Pareto Front*.

Dengan perbedaan karakteristik yang dimiliki Algoritma Kruskal dan Algoritma Prim, penulis ingin menjelaskan perbandingan antara EPDA yang dibangun dari Algoritma Kruskal dan EPDA yang dibangun dari Algoritma Prim.

Secara umum, baik EPDA dengan Algoritma Kruskal maupun EPDA dengan Algoritma Prim menghasilkan solusi yang sama. Adapun perbedaan yang dihasilkan terdapat pada indeks yang digunakan. Kemudian untuk memperkecil banyaknya kemungkinan solusi yang diberikan, maka pada saat pemilihan sisi baik untuk Algoritma Kruskal maupun Algoritma Prim tidak hanya memperhatikan kriteria yang dikerjakan, namun sekaligus memperhatikan pertimbangan bobot yang termuat dalam tabel *Edge List*. Oleh karena itu, dengan diperolehnya banyaknya kemungkinan solusi yang lebih sedikit, maka proses penyelesaian yang dilakukan menjadi lebih singkat.

ABSTRACT

Ulum, Moh Miftakhul. 2018. **The Construction of Extreme Point Deterministic Algorithm Through Kruskal's Algorithm and Prim's Algorithm on the Multi-Criteria Minimum Spanning Tree Problem.** Thesis. Mathematics Department, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisors: (I) Evawati Alisah, M.Pd. (II) Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd.

Keyword: Extreme Point Deterministic Algorithm (EPDA), Kruskal's Algorithm, Prim's Algorithm, Multi-Criteria Minimum Spanning Tree (MCMST)

The study of MCMST is the development of Minimum Spanning Tree (MST) optimization problem by containing two or more criteria. One of the algorithms that can solve the MCMST problems is EDPA. EPDA has three stages. As the initial foundation, the first stage is built from Kruskal's Algorithm or Prim's Algorithm by considering the corresponding criteria one by one. Then on the second and third stages the process of mutations are carried out until the new spanning trees that is the efficient solution or Pareto Front are obtained.

By the difference between the characteristic of Kruskal's Algorithm and Prim's Algorithm, the author will explain a comparison between EPDA constructed by Kruskal's Algorithm and EPDA constructed by Prim's Algorithm.

In general, either EPDA constructed by Kruskal's Algorithm or EPDA constructed by Prim's Algorithm produces the same solution. As for the difference found is the use of indexes. Then, to minimize the amount of the given solution, the better sides choosen by Kruskal's Algorithm or Prim's Algorithm not only consider to the criteria, but also consider to the weights contained in the table of Edge List. Therefore, by getting the amount of the given solution that is less, then the process of solving can be shorter.

ملخص

العلوم، محمد مفتاح. ٢٠١٨. **بناء** ***Extreme Point Deterministic Algorithm*** **باستخدام** ***Kruskal's Algorithm*** **و** ***Prim's Algortihm*** **في المسألة** ***Multi-Criteria Minimum Spanning Tree***. بحث جامعي. الشعبة الرياضيات. كليّة العلوم والتكنولوجيّا. الجامعة الإسلاميّة الحكوميّة مولانا مالك إبراهيم مالانج. مشرف: (١) ايياوتي أ ليسة الماجستير. (٢) الدكتور الحاج إمام سوجروى الماجستير.

الكلمة الرئيسية: *Extreme Point Deterministic Algorithm* (EPDA)، *Kruskal's Algorithm*، *Prim's Algorithm*، *Multi-Criteria Minimum Spanning Tree* (MCMST)

الدراسة MCMST هي تطوير الحد من المسألة الأمثل *Minimum Spanning Tree* (MST) باشتمال معيارين أو أكثر. إحد الخوارزميات التي قادرة على حل المسألة MCMST هي EPDA. كانت EPDA بثلاث مراحل. بنيت EPDA في المرحلة الأولى من *Kruskal's algorithm* أو *Prim's algorithm* بمراقبة المعايير المتوافقة واحدا واحدا. ثم في المرحلة الثانية والمرحلة الثالثة أرتكبت الطفرية حتى ان تحصل *spanning tree* الجديدة التي تصبح الحلول الفعالي أو *Pareto Front*.

باختلاف الخصائص بين *Kruskal's algorithm* و *Prim's algorithm*، سيبين المؤلف المقارنة بين EPDA بنيت من *Kruskal's algorithm* و EPDA بنيت من *Prim's algorithm*.

تنتج EPDA بنيت من *Kruskal's algorithm* و EPDA بنيت من *Prim's algorithm* الحلول مماثلة في الغالب. إما الاختلافات الموجودة في الإستخدام الفهارس. ثم للتقليل تعدد احتمال الحلول، حينما وقت الإختار الجانب من *Kruskal's algorithm* أو *Prim's algorithm* لا يهتم المعاير التحليلي فقط، لكن لازم على ان ينظر الأوزان الواردة في الجدول *Edge List*. ولذلك، إذا ينال تعدد احتمال الحلول أقل، فتكون عملية الإستكشاف تصبح أقصر.

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pada dasarnya, semua manusia memiliki beragam cara untuk menyelesaikan suatu masalah yang dihadapi. Banyak di antaranya, termasuk orang muslim, lebih mengedepankan ego dan nafsu tanpa berpegang teguh akan konsep-konsep yang diajarkan dalam Islam. Allah Swt telah menggambarkan bahwa seseorang yang menyandarkan dirinya pada prinsip-prinsip dalam al-Quran akan senantiasa dapat menyelesaikan masalah dalam hidupnya dan selalu bijaksana dalam bertindak tanpa merasa takut dan frustrasi. Mereka adalah *waliyullah* atau kekasih Allah. Sebagaimana firman Allah Swt, yaitu:

أَلَآ إِنَّ أَوْلِيَآءَ ٱللَّهِ لَا خَوْفٌ عَلَيْهِمْ وَلَا هُمْ يَحْزَنُونَ ﴿٦٢﴾ ٱلَّذِينَ ءَامَنُوا۟ وَكَانُوا۟ يَتَّقُونَ ﴿٦٣﴾

"Ingatlah, sesungguhnya wali-wali Allah itu, tidak ada kekhawatiran terhadap mereka dan tidak (pula) mereka bersedih hati. (Yaitu) orang-orang yang beriman dan mereka selalu bertakwa" (QS. Yunus/10:62-63).

Allah Swt memberikan suatu tuntunan dalam al-Quran surat Ali Imran ayat 159 terkait bagaimana sikap seorang muslim ketika mengambil keputusan. Allah Swt berfirman:

...فَإِذَا عَزَمْتَ فَتَوَكَّلْ عَلَى ٱللَّهِ ... ﴿١٥٩﴾

"...Kemudian apabila kamu telah membulatkan tekad, maka bertawakkallah kepada Allah..." (QS. Ali Imran/03:159).

Sebagai implementasi, ketika seorang manusia sudah membulatkan tekad dalam mengambil suatu keputusan, maka hendaknya tidak lupa untuk bertawakkal kepada Allah. Karena hal ini menjadi pembeda antara orang-orang yang berpegang teguh atas prinsip-prinsip yang diajarkan dalam Islam dan mereka yang melalaikannya.

Menurut Syamsi (2000:7), tujuan pengambilan keputusan itu bersifat tunggal, dalam arti bahwa sekali diputuskan, tidak akan ada kaitannya dengan masalah lain. Kemungkinan kedua adalah tujuan pengambilan keputusan dapat juga bersifat ganda, dalam arti bahwa satu keputusan yang diambilnya itu sekaligus memecahkan dua masalah (atau lebih) yang bersifat kontradiktif maupun tidak kontradiktif.

Pada umumnya, solusi yang dihasilkan dalam pemecahan suatu masalah adalah bersifat *unique* atau tunggal. Karena dengan diperolehnya solusi yang tunggal akan mengakibatkan tidak adanya perbedaan pendapat dalam pemecahan masalahnya. Namun hal ini akan berbeda jika solusi yang diperoleh tidak bersifat tunggal atau memuat beberapa solusi yang membentuk suatu kumpulan. Artinya terdapat beberapa kemungkinan solusi yang layak dilakukan dalam pengambilan keputusan.

Matematika merupakan salah satu cabang ilmu pengetahuan dengan peranan terhadap disiplin ilmu lain yang saling bersinergi. Dewasa ini, banyak masalah dunia nyata mampu diterjemahkan ke dalam bahasa matematika dengan tujuan untuk memperoleh pemecahan masalah secara sederhana. Abdusysyakir (2007:15) menambahkan bahwa matematika bersifat abstrak, yang berarti bahwa objek-objek matematika diperoleh melalui abstraksi dari fakta-fakta atau fenomena dunia nyata. Maka jelas sudah jika matematika dapat menyelesaikan masalah dalam kehidupan nyata, seperti salah satu cabang disiplin ilmunya yakni teori graf. Dengan berbekal mendefinisikan titik dan sisi pada suatu graf, teori graf mampu menerjemahkan masalah-masalah dalam kehidupan nyata. Salah satu masalah yang terkenal saat ini adalah pembahasan tentang *Minimum Spanning Tree* (MST).

Kajian MST bertujuan untuk menyelesaikan masalah bobot minimum suatu graf. Masalah ini dapat diselesaikan secara eksak menggunakan beberapa algoritma berikut, yakni Algortima Kruskal, Algoritma Prim, dan Algoritma Sollin. Algoritma tersebut telah populer untuk menyelesaikan masalah optimasi MST dalam kehidupan nyata, seperti konstruksi jalan dari beberapa lokasi berdasarkan jarak tempuh minimal, penentuan lintasan dengan biaya termurah, dan optimasi jaringan kabel listrik.

Menurut Chartrand dkk. (2016:82), Algoritma Kruskal telah ditemukan oleh Joseph Bernard Kruskal pada tahun 1956. Berselang satu tahun kemudian, Robert Clay Prim membangun Algoritma Prim dengan landasan utama yang sempat ditemukan oleh Vojtěch Jarník pada tahun 1930. Dengan sebutan *Greedy Algorithm*, kedua algoritma ini mampu menghadirkan pohon merentang minimum dalam suatu graf berbobot yang terhubung.

Algoritma Kruskal dan Algoritma Prim memiliki kelebihan dan kekurangan masing-masing. Dewi (2014) memberikan perbandingan bahwa Algoritma Kruskal lebih efektif dibandingkan dengan Algoritma Prim apabila graf yang diberikan memiliki banyak titik dengan jumlah sisinya lebih sedikit. Di sisi lain, Algoritma Prim lebih efektif dibandingkan dengan Algoritma Kruskal jika graf yang diselesaikan memiliki banyak sisi dengan jumlah titiknya lebih sedikit. Oleh karena itu, hal ini menarik untuk diperhatikan lebih lanjut.

Sebagai pengembangan dari masalah optimasi MST, masalah *Multi-Criteria Minimum Spanning Tree* (MCMST) memuat kriteria lebih dari satu. Kriteria tersebut merupakan fungsi bobot yang termuat dalam sisi suatu graf. Beragam kriteria dapat didefinisikan pada masalah MCMST, misalnya panjang lintasan antar titik, alokasi waktu yang dibutuhkan, dan estimasi dana. Vianna dkk. (2007) menambahkan bahwa kriteria-kriteria yang termuat dalam masalah MCMST sering didapati saling berlawanan, artinya fungsi bobot yang ada dalam graf tidak berbanding lurus, sehingga sulit untuk mendapatkan solusinya secara serempak.

Tujuan MCMST adalah untuk mendapatkan solusi yang memuat suatu himpunan solusi optimal yang diyakini bahwa tidak ada solusi lain yang lebih optimal dari solusi tersebut. Himpunan tersebut dikenal sebagai *Pareto Front* (PF) atau himpunan solusi efisien (Moradkhan, 2010). Untuk mendapatkan nilai PF dapat diperoleh melalui algoritma-algoritma berikut, yakni *Extreme Point Deterministic Algorithm* (EPDA), *Knowledge-based Evolutionary Algorithm* (KEA), Algoritma *Greedy Randomized Adaptive Search Problem* (GRAPS), Algoritma *Multiple Objective Network optimization based on the Ant Colony Optimization* (MONACO), dan Aproksimasi *Genetic Algorithm* (GA).

Moradkhan (2010) mengatakan bahwa EPDA dapat diterapkan untuk lebih dari dua kriteria dan mampu menentukan PF yang besar yang memuat solusi efisien yang *supported* dan *non-supported* serta dianggap sebagai algoritma yang lebih efisien untuk menyelesaikan masalah yang lebih luas seperti masalah konstruksi jaringan dengan memperhatikan biaya *hardware*, meminimalkan waktu tunda rata-rata, dan meningkatkan *traffic load*. Hal ini yang menjadi pembeda dari beberapa algoritma yang lain.

EPDA memiliki tiga tahap penyelesaian masalah MCMST (Moradkhan, 2010). Sebagai fondasi awal algoritma ini, tahap pertama dibangun dari Algoritma

Kruskal atau Algoritma Prim dengan memperhatikan kriteria yang bersesuaian satu per satu. Kemudian pada tahap kedua dan ketiga dilakukan proses mutasi sampai akhirnya diperoleh pohon merentang baru yang menjadi solusi efisien atau PF.

Dengan perbedaan karakteristik yang dimiliki Algoritma Kruskal dan Algoritma Prim, penulis ingin menjelaskan perbandingan antara EPDA yang dibangun dari Algoritma Kruskal dan EPDA yang dibangun dari Algoritma Prim. Oleh karena itu, judul yang diambil dalam penelitian ini adalah "Konstruksi *Extreme Point Deterministic Algorithm* Melalui Algoritma Kruskal dan Algoritma Prim pada Masalah *Multi-Criteria Minimum Spanning Tree*".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan sebelumnya, maka rumusan masalah yang diangkat adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana perbandingan konstruksi EPDA menggunakan Algoritma Kruskal dan Algoritma Prim?
2. Bagaimana perbandingan hasil penerapan Algoritma Kruskal dan Algoritma Prim untuk EPDA pada masalah MCMST?
3. Bagaimana implementasi masalah MST dan MCMST jika dikaitkan dengan kajian Islam?

1.3 Tujuan Penelitian

Dengan mengacu rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Untuk mengetahui perbandingan konstruksi EPDA menggunakan Algoritma Kruskal dan Algoritma Prim.
2. Untuk mengetahui perbandingan hasil penerapan Algoritma Kruskal dan Algoritma Prim untuk EPDA pada masalah MCMST.
3. Untuk mengetahui implementasi masalah MST dan MCMST jika dikaitkan dengan kajian Islam.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang diharapkan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mampu memberikan tambahan wawasan dan pengetahuan tentang perbandingan konstruksi EPDA menggunakan Algoritma Kruskal dan Algoritma Prim.
2. Mampu memberikan tambahan wawasan dan pengetahuan tentang perbandingan hasil penerapan Algoritma Kruskal dan Algoritma Prim untuk EPDA pada masalah MCMST.
3. Mampu memberikan tambahan wawasan dan pengetahuan tentang implementasi masalah MST dan MCMST jika dikaitkan dengan kajian Islam.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan dalam penelitian ini dibagi menjadi lima bab dan masing-masing bab dibagi dalam subbab sebagaimana berikut:

Bab I Pendahuluan

Bab ini berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bab ini penulis menjelaskan beberapa konsep atau teori yang berhubungan dengan penelitian ini, yaitu definisi graf, subgraf, *cycle*, graf berbobot, graf terhubung, pohon *(tree)*, pohon merentang *(spanning tree)*, *Minimum Spanning Tree* (MST), *Multi-Criteria Minimum Spanning Tree* (MCMST), Algoritma Kruskal, Algoritma Prim, *Extreme Point Deterministic Algorithm* (EPDA), EPDA dengan Algoritma Kruskal, EPDA dengan Algoritma Prim, dan kajian Islam tentang MST dan MCMST.

Bab III Metode Penelitian

Bab ini meliputi pendekatan penelitian, jenis dan sumber data, metode pengumpulan data, dan analisis data.

Bab IV Pembahasan

Bab ini penulis memberikan penjelasan bagaimana penggunaan Algoritma Kruskal dan Algoritma Prim dalam konstruksi EPDA. Setalah itu, keduanya diterapkan pada masalah optimasi jarak dan waktu. Hasil penerapan yang diperoleh selanjutnya dibandingkan. Kemudian dilanjutkan dengan implementasi masalah MST dan MCMST jika dikaitkan dengan kajian Islam pada masalah *ushuliyah* dan masalah *furu'iyah*.

Bab V Penutup

Bab ini berisi kesimpulan dari hasil pembahasan dan saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II
KAJIAN PUSTAKA

2.1 Graf

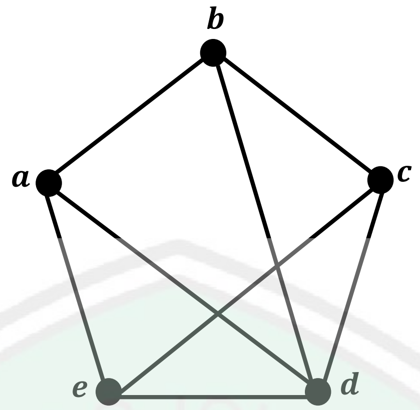
2.1.1 Definisi Graf

Graf G adalah pasangan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek yang disebut titik dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut sisi (Abdussakir, dkk, 2009:4).

Suatu graf G dapat disajikan dalam bentuk diagram atau gambar (Chartrand, dkk, 2016:4). Informasi secara menyeluruh dalam suatu graf dapat diperoleh ketika graf tersebut dituangkan dalam bentuk diagram atau gambar. Adapun setiap titik dari graf G disajikan dalam bentuk noktah atau lingkaran kecil, sedangkan garis atau kurva yang menghubungkan antara dua titik merupakan visualisasi sisi dari graf G.

Banyak titik di graf G disebut *order* dan banyak sisi di graf G disebut *size* atau ukuran. Adapun notasi yang digunakan untuk menyatakan *order* adalah n dan *size* adalah m (Chartrand, dkk, 2016:4).

Berikut adalah graf G yang memuat himpunan titik $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, e), (e, a), (a, d), (b, d), (c, e)\}$. Graf G dapat dinyatakan sebagai gambar berikut.



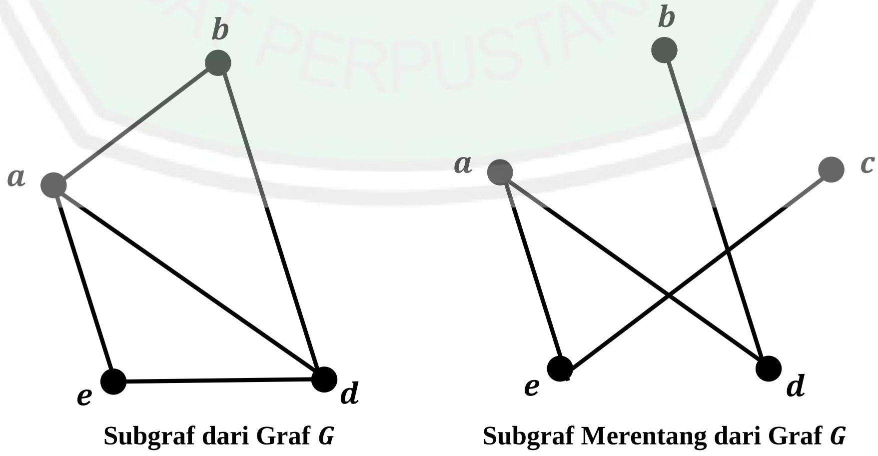
Gambar 2.1 Graf G

Graf G pada Gambar 2.1 memiliki 5 titik dan 8 sisi. Sehingga *order* dan *size* dari G adalah $n = 5$ dan $m = 8$.

2.1.2 Subgraf

Suatu graf H adalah subgraf dari graf G jika $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$, dinotasikan $H \subseteq G$. Jika $V(H) = V(G)$, maka H disebut sebagai *spanning subgraph* atau subgraf merentang dari G (Chartrand, dkk, 2016:10).

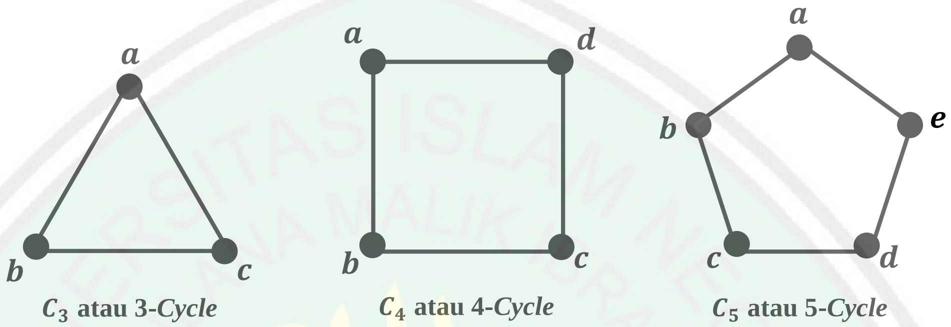
Gambar berikut merupakan subgraf dan subgraf merentang dari dari graf G pada Gambar 2.1.



Gambar 2.2 Subgraf dan Subgraf Merentang dari Graf G

2.1.3 *Cycle*

Untuk suatu bilangan bulat $n \geq 3$, *cycle* C_n adalah suatu graf dengan *order* n dan *size* n. *Cycle* C_n disebut juga n-*cycle*. Misalnya 3-*cycle* atau segitiga, 4-*cycle* atau segiempat, dan 5-*cycle* atau segilima (Chartrand, dkk, 2016:5).



Gambar 2.3 *Cycle*

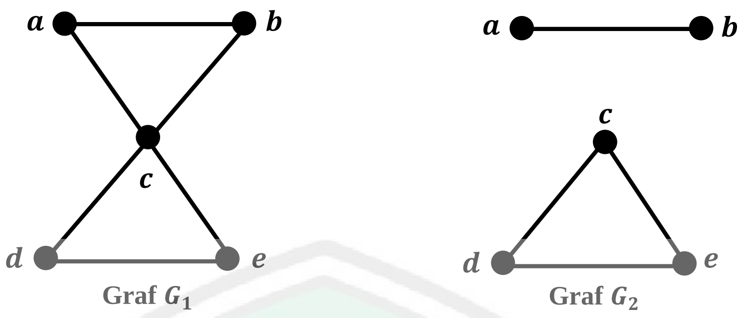
2.1.4 Graf Terhubung

Misalkan dua titik (tidak harus berbeda) u dan v di graf G. Jalan W di graf G adalah barisan dari titik-titik di graf G yang dimulai dari titik u dan berakhir pada titik v sedemikian sehingga dapat dinyatakan sebagai

$$W = (u = v_0, v_1, \dots, v_k = v)$$

dengan $(v_i, v_{i+1}) \in E(G)$ untuk $0 \leq i \leq k-1$ (Chartrand, dkk, 2016:37). Jika dalam jalan W di graf G titik $v_0, v_1, \dots, v_k$ yang berbeda, maka W disebut sebagai *path* atau lintasan (Bondy dan Murty, 1976:12).

Dua titik u dan v di graf G dikatakan terhubung jika G memuat suatu lintasan u-v. Suatu graf G dikatakan terhubung jika untuk setiap dua titik dari graf G adalah terhubung. Sedangkan jika graf G tidak terhubung, maka disebut sebagai *disconnected graph* (Chartrand, dkk, 2016:42).



Gambar 2.4 Graf Terhubung dan Tidak Terhubung

Graf G_1 adalah graf terhubung. Karena untuk setiap dua titik dari graf G_1 dapat dibuat lintasan sedemikian sehingga dua titik tersebut terhubung. Sedangkan graf G_2 termasuk ke dalam graf yang tidak terhubung karena terdapat setidaknya satu pasang titik yang tidak dapat dibuat suatu lintasan sedemikian sehingga dua titik tersebut terhubung. Misalnya antara titik a dan c di graf G_2 tidak terhubung.

2.1.5 Graf Berbobot

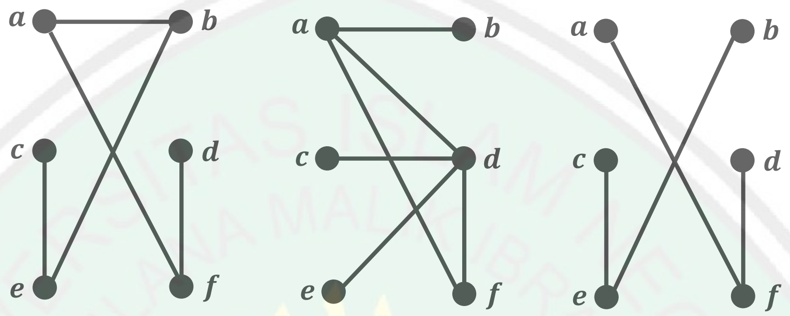
Graf berbobot adalah graf yang masing-masing sisinya diberi label bilangan riil positif yang disebut bobot. Misalkan G adalah graf dan e sisi di G. Bobot dari e, dinotasikan dengan $w(e)$, adalah bilangan riil positif yang dipasangkan pada e. Panjang lintasan pada graf berbobot adalah jumlah dari masing-masing bobot sisi yang terdapat pada lintasan tersebut (Abdussakir, dkk, 2009:62).

Untuk setiap graf G, bobot $w(G)$ dari G didefinisikan sebagai jumlah dari bobot-bobot yang termuat dalam sisi-sisinya, yakni:

$$w(G) = \sum_{e \in E(G)} w(e) \qquad \text{(Chartrand, dkk, 2016:81).}$$

2.1.6 Pohon *(Tree)*

Suatu pohon adalah graf terhubung yang tidak memuat *cylce* di dalamnya (Aldous dan Wilson, 2000:140). Karena pohon merupakan graf terhubung, maka pohon selalu memuat lintasan yang menghubungkan setiap dua titik dalam pohon.



G_1 Adalah Pohon **G_2 Bukan Pohon** **G_3 Bukan Pohon**

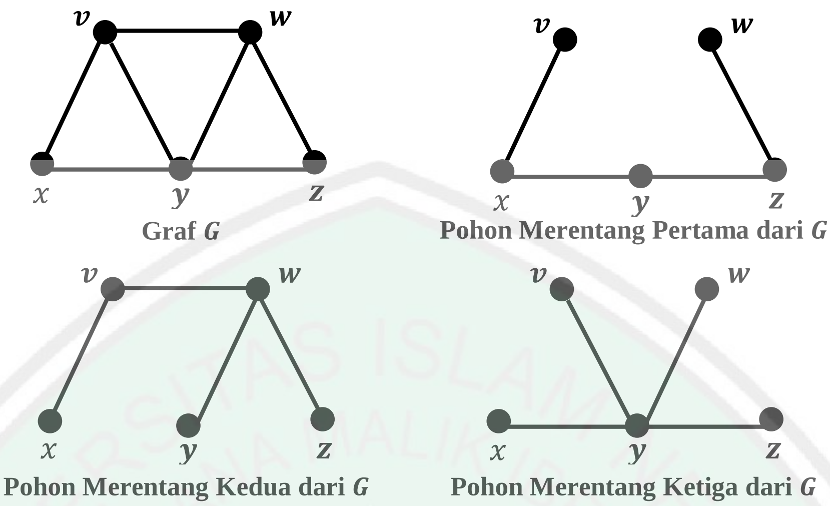
Gambar 2.5 Graf Pohon dan Graf Bukan Pohon

Pada Gambar 2.5, hanya G_1 yang merupakan pohon. Sedangkan G_2 dan G_3 bukan termasuk pohon. G_2 bukan pohon karena memuat *cycle* a, d, f, a sedangkan G_3 bukan pohon karena tidak terhubung.

2.1.7 Pohon Merentang *(Spanning Tree)*

Misalkan G adalah graf terhubung. Pohon merentang di G adalah subgraf dari G yang memuat semua titik di G dan juga merupakan pohon (Aldous dan Wilson, 2000:144).

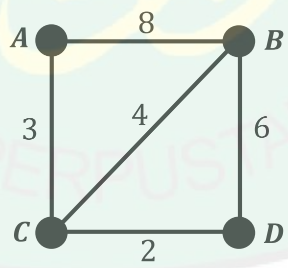
Diagram berikut menunjukkan graf dan tiga pohon merentangnya.



Gambar 2.6 Graf dan Pohon Merentangnya

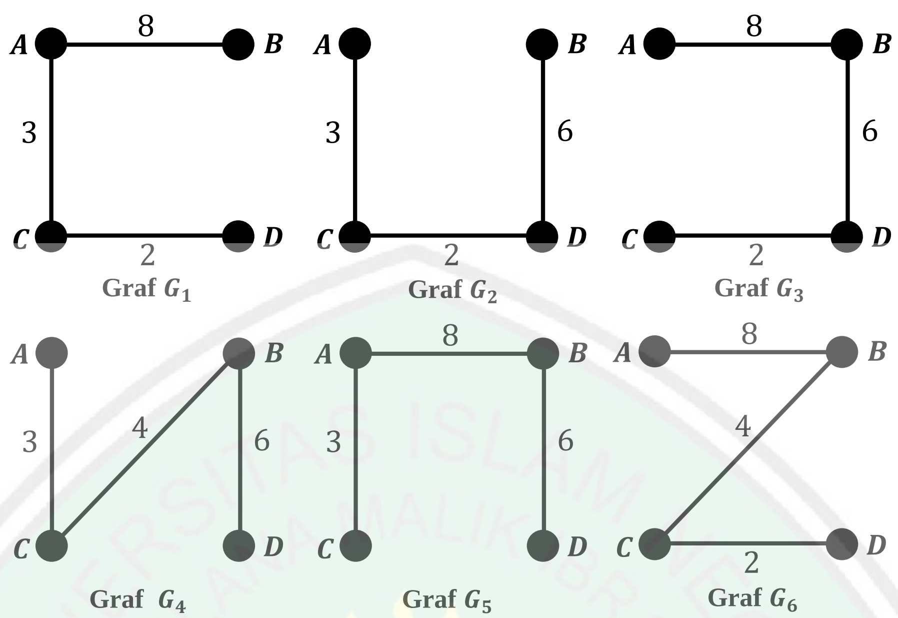
2.2 *Minimum Spanning Tree* (MST)

Misalkan G adalah suatu graf terhubung yang memiliki bobot pada setiap sisinya. *Minimum Spanning Tree* (MST) dari G adalah pohon merentang dengan bobot minimum di antara semua pohon merentang di G (Chartrand, dkk, 2016:81).



Gambar 2.7 Graf G dengan Bobot pada Setiap Sisi

Berdasarkan Gambar 2.7 graf G memiliki bobot sebesar 23. Kemudian akan ditentukan MST dari graf G dengan cara membandingkan semua pohon merentang dari graf G. Pohon merentang yang dipilih adalah pohon merentang dengan bobot minimum. Berikut adalah pohon merentang yang dapat dihasilkan dari graf G.



Gambar 2.8 Semua Pohon Merentang dari Graf G

Berdasarkan Gambar 2.8 jika graf G_1 memiliki bobot sebesar 13, graf G_2 memiliki bobot sebesar 11, graf G_3 memiliki bobot sebesar 16, graf G_4 memiliki bobot sebesar 13, graf G_5 memiliki bobot sebesar 17, dan graf G_6 memiliki bobot sebesar 14, maka pohon merentang yang dipilih adalah graf G_2 dengan bobot sebesar 11. Sehingga graf G_2 adalah MST dari draf G pada Gambar 2.7.

2.3 Algoritma Kruskal

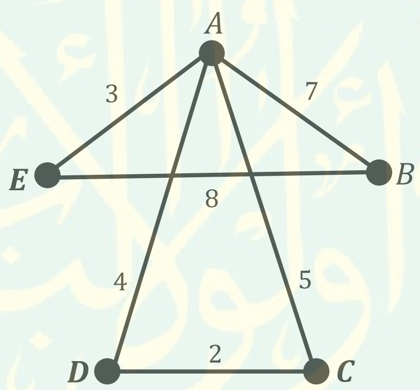
Sebagai salah satu algoritma yang dapat menyelesaikan masalah *Minimum Spanning Tree*, Algoritma Kruskal merupakan suatu prosedur untuk menyeleksi pilihan terbaik pada setiap langkah tanpa memperhatikan konsekuensi ke depannya (Chartrand, dkk, 2016:82).

Langkah-langkah penyelesaian Algoritma Kruskal dalam masalah optimasi MST adalah sebagai berikut:

1. Memilih sisi e_1 dengan memiliki bobot $w(e_1)$ sekecil mungkin.

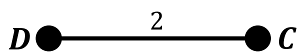
2. Jika sisi $e_1, e_2, \dots, e_i$ telah dipilih, maka pilih satu sisi e_{i+1} dari semua sisi pada graf yang belum dipilih dengan aturan:
   a. Ketika sisi e_{i+1} ditambahkan maka graf yang diperoleh tidak mengakibatkan adanya *cycle*.
   b. Bobot $w(e_{i+1})$ adalah sisi dengan bobot sekecil mungkin berdasarkan sisi ke i.
3. Ketika langkah 2 tidak bisa diterapkan lagi, maka algoritma ini berhenti (Bondy dan Murty, 1976:37).

Contoh:



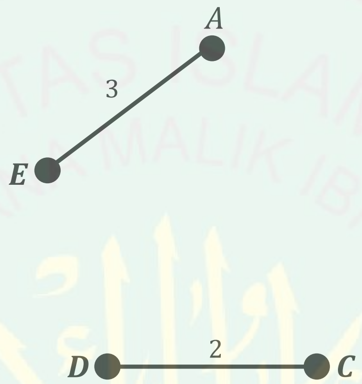
Gambar 2.9 Graf Berbobot dengan Satu Kriteria

Untuk mengawali proses penyelesaian masalah optimasi MST pada graf yang diberikan, mula-mula dipilih sisi e_1 dengan bobot sekecil mungkin. Maka dalam hal ini sisi CD dipilih sebagai sisi awal dengan bobot sebesar 2.



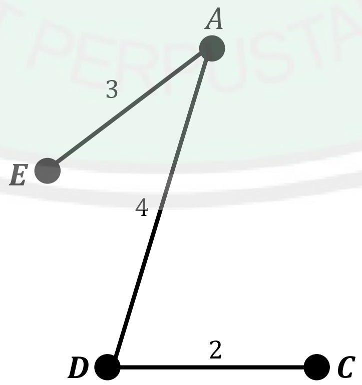
Gambar 2.10 Memilih Sisi CD sebagai Sisi Awal dengan Bobot Sekecil Mungkin

Kemudian sisi selanjutnya dipilih dengan memperhatikan bahwa jika sisi tersebut ditambahkan tidak menyebabkan adanya *cycle* dan sisi tersebut memiliki bobot sekecil mungkin berdasarkan bobot dari sisi sebelumnya. Maka dalam hal ini sisi AE merupakan sisi kedua dengan memiliki bobot sebesar 3. Bobot ini memiliki selisih terkecil dengan bobot dari sisi sebelumnya yakni sisi CD.



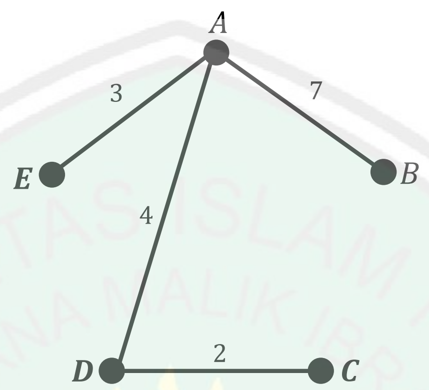
Gambar 2.11 Sisi AE Dipilih sebagai Sisi Kedua

Sisi selanjutnya yang dipilih adalah sisi AD dengan bobot sebesar 4. Sisi tersebut merupakan sisi dengan bobot sekecil mungkin terhadap sisi sebelumnya yakni sisi AE.



Gambar 2.12 Sisi AD Dipilih sebagai Sisi Ketiga

Sisi selanjutnya yang dipilih adalah sisi AB dengan bobot sebesar 7. Sisi tersebut merupakan sisi dengan bobot sekecil mungkin terhadap sisi ketiga yakni sisi AD.



Gambar 2.13 Sisi AB Dipilih sebagai Sisi Keempat

Setelah semua titik telah terhubung dan tidak ditemukan lagi sisi baru yang dapat ditambah sedemikian sehingga tidak menyebabkan adanya *cycle*, maka algoritma ini berhenti melakukan proses penyelesaian. Sehingga diperoleh solusi optimal dari masalah MST dari graf pada Gambar 2.9 adalah graf yang termuat pada Gambar 2.13. Graf tersebut memiliki bobot sebesar 16. Artinya terdapat bobot sebesar 13 yang dapat dipangkas menggunakan Algoritma Kruskal dengan bobot awal sebesar 29.

2.4 Algoritma Prim

Algoritma lain yang terkenal mampu untuk menemukan MST dalam suatu graf berbobot yang terhubung adalah Algoritma Prim. (Chartrand, dkk, 2016:84). Algoritma Prim menitikberatkan pada pemilihan bobot minimum berdasarkan titik yang diambil (Nugraha, 2011).

Langkah-langkah Algoritma Prim dimulai pada suatu himpunan titik-titik berhingga dengan memuat bobot pada setiap sisinya (Aldous dan Wilson, 2000:188).

Langkah 1

Memilih dan menggambar sebarang titik.

Langkah 2

Menemukan sisi dari bobot terkecil yang memuat suatu titik (yang telah dipilih sebelumnya) ke suatu titik yang belum dipilih. Kemudian sisi tersebut digambar. Langkah 2 diulangi sampai semua titik terhubung, kemudian berhenti.

Catatan:

1. Ketika terdapat dua atau lebih sisi dengan bobot yang sama, maka pilih salah satu dari mereka.
2. Dengan konstruksi ini, setiap langkah yang dilakukan akan menghasilkan suatu graf yang terhubung.

Contoh:

Untuk menerapkan Algoritma Prim tersebut, maka graf pada Gambar 2.9 akan dikerjakan kembali dengan menggunakan Algoritma Prim. Berikut adalah tahapan-tahapan penyelesaiannya secara rinci.

Langkah 1

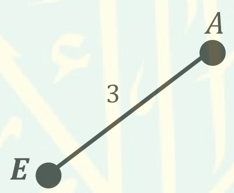
Langkah awal yang harus dilakukan adalah memilih sebarang titik dalam graf dan menggambarnya. Misalnya dipilih titik A sebagai titik awal.

Gambar 2.14 Titik A sebagai Langkah Awal pada Algoritma Prim

Langkah 2

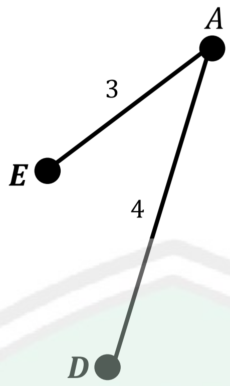
Langkah selanjutnya adalah menentukan sisi dengan bobot terkecil yang menghubungkan titik yang sudah dipilih dengan titik lainnya (titik yang belum dipilih). Kemudian sisi tersebut digambar. Langkah ini dilakukan sampai semua titik pada graf menjadi terhubung.

Dengan memperhatikan graf pada Gambar 2.9, titik A terhubung dengan titik B, C, D, dan E. Sehingga terdapat empat perbandingan bobot yakni membangun sisi AB dengan bobot 7, sisi AC dengan bobot 5, sisi AD dengan bobot 4, dan sisi AE dengan bobot 3. Maka dalam hal ini dipilih sisi AE dengan bobot lebih kecil.



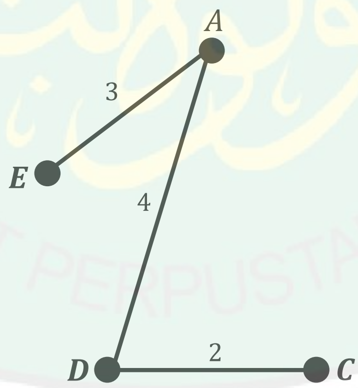
Gambar 2.15 Membangun Sisi AE

Selanjutnya antara titik A dan titik E dicari titik yang terhubung langsung dengan keduanya. Adapun titik A berkemungkinan terhubung dengan titik B dengan bobot 7, titik C dengan bobot 5, dan titik D dengan bobot 4. Sedangkan titik E dapat dibangun sisi BE dengan bobot 8. Maka sisi yang dipilih adalah sisi AD dengan bobot 4.



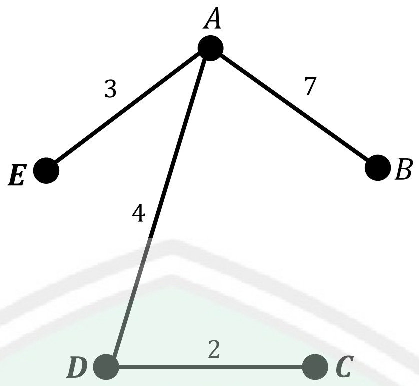
Gambar 2.16 Membangun Sisi AD

Selanjutnya antara titik A, D, dan E dicari titik yang terhubung sehingga diperoleh sisi baru dengan bobot terkecil. Untuk titik A dapat dibangun sisi AB dengan bobot 7 dan sisi AC dengan bobot 5 . Titik D berpeluang terhubung dengan titik C dengan bobot 2. Sedangkan titik E dapat dibangun sisi BE dengan bobot 8. Maka sisi yang dipilih adalah sisi CD dengan bobot 2.



Gambar 2.17 Membangun Sisi CD

Selanjutnya akan dibangun titik yang terhubung dengan titik B dengan bobot terkecil. Sisi yang dapat dibangun adalah sisi AB dengan bobot 7 dan sisi BE dengan bobot 8. Maka sisi yang dipilih adalah sisi AB dengan bobot 7.



Gambar 2.18 Membangun Sisi *AB*

Setelah semua titik sudah terhubung, maka algoritma ini berhenti. Adapun solusi optimal yang diperoleh adalah graf pada Gambar 2.18 dengan jumlah bobotnya yakni 16. Sehingga Algoritma Prim dapat memangkas bobot dari graf yang diberikan sebesar 13 dengan bobot awal sebesar 29.

2.5 *Multi-Criteria Minimum Spanning Tree* (MCMST)

Masalah *Multi-Criteria Minimum Spanning Tree* (MCMST) tidak semudah mengubah MST dengan satu kriteria ke multi kriteria. Pada umumnya, kriteria yang termuat dalam masalah MCMST saling bertentangan. Sehingga solusi optimal dari masalah tersebut tidak mudah untuk ditentukan (Zhou dan Gen, 1999). Banyak algoritma mereduksi masalah MCMST ke dalam fungsi bobot dengan satu kriteria dengan menetapkan hubungan yang rumit di antara objeknya (Moradkhan, 2010). Moradkhan (2010) menambahkan bahwa tipe fungsi bobot yang dikombinasi seperti ini memiliki kekurangan karena hubungan yang dimiliki antar kriteria menjadi terbatas atau penyelesaian masalah yang dihasilkan mungkin berkembang dan berubah seiring dengan waktu, sehingga hal ini menjadikan model tersebut menjadi kuno.

Misalkan $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ didefinisikan sebagai berikut:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{Jika sisi } e_i \text{ dipilih} \\ 0 & \text{Untuk yang lain} \end{cases}$$

Kemudian pohon merentang dari graf G dapat dinyatakan oleh vektor x. Misalkan X adalah himpunan dari setiap vektor yang bersesuaian terhadap pohon merentang dalam graf G, maka masalah MCMST dapat diformulasikan sebagai berikut:

$$\min z_1(x) = \sum_{i=1}^{m} w_{1i} x_i$$

$$\min z_2(x) = \sum_{i=1}^{m} w_{2i} x_i$$

$$\vdots$$

$$\min z_p(x) = \sum_{i=1}^{m} w_{pi} x_i \; ; \; x \in X$$

dengan $z_i(x)$ adalah objek ke-i untuk diminimalkan dalam masalah MCMST (Zhou dan Gen, 1999).

MCMST bertujuan untuk mendapatkan solusi yang memuat suatu himpunan solusi optimal yang diyakini bahwa tidak ada solusi lain yang lebih optimal dari solusi yang diperoleh. Kumpulan tersebut dikenal sebagai *Pareto Front* (PF) atau kumpulan solusi efisien (Moradkhan, 2010).

Keshavarz (2015) memberikan beberapa definisi terkait macam-macam solusi pada masalah optimasi multi tujuan. Misalkan S adalah himpunan dari solusi yang mungkin terjadi atau himpunan kemungkinan dalam ruang keputusan dan $Z = \{(cx, ty) | (x, y) \in S\}$ adalah himpunan kemungkinan dalam ruang tujuan maka:

a. Misalkan $(x, y), (x', y') \in S$. Jika $cx \leq cx'$, $ty \leq ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$ maka (x, y) mendominasi (x', y') dalam ruang keputusan dan (cx, ty) mendominasi (cx', ty') dalam ruang tujuan.

b. Solusi $(x^*, y^*) \in S$ disebut sebagai solusi efisien atau PF, jika tidak ada $(x, y) \in S$ sedemikian sehingga (x, y) mendominasi (x^*, y^*). Jika (x^*, y^*) adalah solusi efisien, maka vektor (cx^*, ty^*) dikatakan sebagai titik *non-dominated* dalam ruang tujuan. Himpunan solusi efisien dinotasikan sebagai S_E dan bayangan dari S_E di Z disebut sebagai himpunan *non-dominated* Z_N.

c. Solusi efisien $(x^*, y^*) \in S_E$ adalah sulusi efisien yang *supported* jika solusi tersebut merupakan solusi optimal dengan menjumlahkan bobotnya yang memenuhi kondisi berikut

$$\min\{\lambda_1 cx + \lambda_2 ty | (x, y) \in S\}$$

untuk $\lambda_1 > 0$ dan $\lambda_2 > 0$. Jika (x^*, y^*) adalah solusi efisien yang *supported*, maka (cx^*, ty^*) dinamakan titik *supported non-dominated*. Adapun titik *supported non-dominated* terletak pada batas tepi berbentuk lengkungan cembung.

d. Solusi efisien $(x^*, y^*) \in S_E$ adalah solusi efisien yang *non-supported* jika tidak terdapat nilai positif dari λ_1 dan λ_2 sedemikian sehingga (x^*, y^*) memenuhi kondisi pada poin c.

Contoh:

Misalnya diberikan enam solusi dalam masalah MCMST, yakni $A = (11, 19)$, $B = (12, 18)$, $C = (13, 14)$, $D = (15, 13)$, $E = (16, 12)$, dan $F = (14, 16)$. Setiap solusi yang mungkin terjadi akan dicek satu per satu apakah ia termasuk dalam solusi efisien atau tidak. Kemudian dicek juga apakah yang menjadi solusi efisien tersebut termasuk dalam solusi efisien yang *supported* atau *non-supported*.

Menentukan Solusi Efisien

1) Untuk solusi $A = (11, 19)$

   a) Cek $B = (12, 18)$. Jika $(cx, ty) = (11, 19)$ dan $(cx', ty') = (12, 18)$, maka $cx < cx'$, $ty > ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

   b) Cek $C = (13, 14)$. Jika $(cx, ty) = (11, 19)$ dan $(cx', ty') = (13, 14)$, maka $cx < cx'$, $ty > ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

   c) Cek $D = (15, 13)$. Jika $(cx, ty) = (11, 19)$ dan $(cx', ty') = (15, 13)$, maka $cx < cx'$, $ty > ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

   d) Cek $E = (16, 12)$. Jika $(cx, ty) = (11, 19)$ dan $(cx', ty') = (16, 12)$, maka $cx < cx'$, $ty > ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

   e) Cek $F = (14, 16)$. Jika $(cx, ty) = (11, 19)$ dan $(cx', ty') = (14, 16)$, maka $cx < cx'$, $ty > ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

   f) Misalkan $(x^*, y^*) = (11, 19)$. Karena tidak ada $(x, y) \in S$ sedemikian sehingga (x, y) mendominasi (x^*, y^*), maka solusi $A = (11, 19)$ merupakan solusi efisien atau PF.

2) Untuk solusi $B = (12, 18)$

   a) Cek $A = (11, 19)$. Jika $(cx, ty) = (12, 18)$ dan $(cx', ty') = (11, 19)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

b) Cek $C = (13, 14)$. Jika $(cx, ty) = (12, 18)$ dan $(cx', ty') = (13, 14)$, maka $cx < cx'$, $ty > ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

c) Cek $D = (15, 13)$. Jika $(cx, ty) = (12, 18)$ dan $(cx', ty') = (15, 13)$, maka $cx < cx'$, $ty > ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

d) Cek $E = (16, 12)$. Jika $(cx, ty) = (12, 18)$ dan $(cx', ty') = (16, 12)$, maka $cx < cx'$, $ty > ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

e) Cek $F = (14, 16)$. Jika $(cx, ty) = (12, 18)$ dan $(cx', ty') = (14, 16)$, maka $cx < cx'$, $ty > ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

f) Misalkan $(x^*, y^*) = (12, 18)$. Karena tidak ada $(x, y) \in S$ sedemikian sehingga (x, y) mendominasi (x^*, y^*), maka solusi $B = (12, 18)$ merupakan solusi efisien atau PF.

3) Untuk solusi $C = (13, 14)$

a) Cek $A = (11, 19)$. Jika $(cx, ty) = (13, 14)$ dan $(cx', ty') = (11, 19)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

b) Cek $B = (12, 18)$. Jika $(cx, ty) = (13, 14)$ dan $(cx', ty') = (12, 18)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

c) Cek $D = (15, 13)$. Jika $(cx, ty) = (13, 14)$ dan $(cx', ty') = (15, 13)$, maka $cx < cx'$, $ty > ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

d) Cek $E = (16, 12)$. Jika $(cx, ty) = (13, 14)$ dan $(cx', ty') = (16, 12)$, maka $cx < cx'$, $ty > ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

e) Cek $F = (14, 16)$. Jika $(cx, ty) = (13, 14)$ dan $(cx', ty') = (14, 16)$, maka $cx < cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga (x, y) mendominasi (x', y') dan (cx, ty) mendominasi (cx', ty'). Artinya solusi $F = (14, 16)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi $C = (13, 14)$.

f) Misalkan $(x^*, y^*) = (13, 14)$. Karena tidak ada $(x, y) \in S$ sedemikian sehingga (x, y) mendominasi (x^*, y^*), maka solusi $C = (13, 14)$ merupakan solusi efisien atau PF.

4) Untuk solusi $D = (15, 13)$

a) Cek $A = (11, 19)$. Jika $(cx, ty) = (15, 13)$ dan $(cx', ty') = (11, 19)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

b) Cek $B = (12, 18)$. Jika $(cx, ty) = (15, 13)$ dan $(cx', ty') = (12, 18)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

c) Cek $C = (13, 14)$. Jika $(cx, ty) = (15, 13)$ dan $(cx', ty') = (13, 14)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

d) Cek $E = (16, 12)$. Jika $(cx, ty) = (15, 13)$ dan $(cx', ty') = (16, 12)$, maka $cx < cx'$, $ty > ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

e) Cek $F = (14, 16)$. Jika $(cx, ty) = (15, 13)$ dan $(cx', ty') = (14, 16)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

f) Misalkan $(x^*, y^*) = (15, 13)$. Karena tidak ada $(x, y) \in S$ sedemikian sehingga (x, y) mendominasi (x^*, y^*), maka solusi $D = (15, 13)$ merupakan solusi efisien atau PF.

5) Untuk solusi $E = (16, 12)$

a) Cek $A = (11, 19)$. Jika $(cx, ty) = (16, 12)$ dan $(cx', ty') = (11, 19)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

b) Cek $B = (12, 18)$. Jika $(cx, ty) = (16, 12)$ dan $(cx', ty') = (12, 18)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

c) Cek $C = (13, 14)$. Jika $(cx, ty) = (16, 12)$ dan $(cx', ty') = (13, 14)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

d) Cek $D = (15, 13)$. Jika $(cx, ty) = (16, 12)$ dan $(cx', ty') = (15, 13)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

e) Cek $F = (14, 16)$. Jika $(cx, ty) = (16, 12)$ dan $(cx', ty') = (14, 16)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

f) Misalkan $(x^*, y^*) = (16, 12)$. Karena tidak ada $(x, y) \in S$ sedemikian sehingga (x, y) mendominasi (x^*, y^*), maka solusi $E = (16, 12)$ merupakan solusi efisien atau PF.

6) Untuk solusi $F = (14, 16)$

a) Cek $A = (11, 19)$. Jika $(cx, ty) = (14, 16)$ dan $(cx', ty') = (11, 19)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

b) Cek $B = (12, 18)$. Jika $(cx, ty) = (14, 16)$ dan $(cx', ty') = (12, 18)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

c) Cek $C = (13, 14)$. Jika $(cx, ty) = (14, 16)$ dan $(cx', ty') = (13, 14)$, maka $cx > cx'$, $ty > ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga (x', y') mendominasi (x, y) dan (cx', ty') mendominasi (cx, ty). Artinya solusi $F = (14, 16)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi $C = (13, 14)$.

d) Cek $D = (15, 13)$. Jika $(cx, ty) = (14, 16)$ dan $(cx', ty') = (15, 13)$, maka $cx < cx'$, $ty > ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

e) Cek $E = (16, 12)$. Jika $(cx, ty) = (14, 16)$ dan $(cx', ty') = (16, 12)$, maka $cx < cx'$, $ty > ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

f) Misalkan $(x, y) = (14, 16)$. Karena terdapat $(x', y') = (13, 14)$ sedemikian sehingga (x', y') mendominasi (x, y), maka solusi $F = (14, 16)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi $C = (13, 14)$.

Berdasarkan verifikasi yang telah dilakukan, maka yang menjadi solusi efisien adalah $A = (11, 19)$, $B = (12, 18)$, $C = (13, 14)$, $D = (15, 13)$, dan $E = (16, 12)$. Kelima solusi tersebut kemudian akan dicek kembali apakah termasuk dalam solusi efisien yang *supported* atau *non-supported*.

Menentukan Solusi Efisien yang *Supported* dan *Non-Supported*

1) Misalkan $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = 1$

a) $A = (\lambda_1 \times 11 + \lambda_2 \times 19) = (1 \times 11 + 1 \times 19) = 30$

b) $B = (\lambda_1 \times 12 + \lambda_2 \times 18) = (1 \times 12 + 1 \times 18) = 30$

c) $C = (\lambda_1 \times 13 + \lambda_2 \times 14) = (1 \times 13 + 1 \times 14) = 27$

d) $D = (\lambda_1 \times 15 + \lambda_2 \times 13) = (1 \times 15 + 1 \times 13) = 28$

e) $E = (\lambda_1 \times 16 + \lambda_2 \times 12) = (1 \times 16 + 1 \times 12) = 28$

f) Bobot minimum dari solusi A, B, C, D, dan E adalah solusi C dengan jumlah bobot sebesar 27.

2) Misalkan $\lambda_1 = 10$ dan $\lambda_2 = 1$

a) $A = (\lambda_1 \times 11 + \lambda_2 \times 19) = (10 \times 11 + 1 \times 19) = 129$

b) $B = (\lambda_1 \times 12 + \lambda_2 \times 18) = (10 \times 12 + 1 \times 18) = 138$

c) $C = (\lambda_1 \times 13 + \lambda_2 \times 14) = (10 \times 13 + 1 \times 14) = 144$

d) $D = (\lambda_1 \times 15 + \lambda_2 \times 13) = (10 \times 15 + 1 \times 13) = 163$

e) $E = (\lambda_1 \times 16 + \lambda_2 \times 12) = (10 \times 16 + 1 \times 12) = 172$

f) Bobot minimum dari solusi A, B, C, D, dan E adalah solusi A dengan jumlah bobot sebesar 129.

3) Misalkan $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = 10$

a) $A = (\lambda_1 \times 11 + \lambda_2 \times 19) = (1 \times 11 + 10 \times 19) = 201$

b) $B = (\lambda_1 \times 12 + \lambda_2 \times 18) = (1 \times 12 + 10 \times 18) = 192$

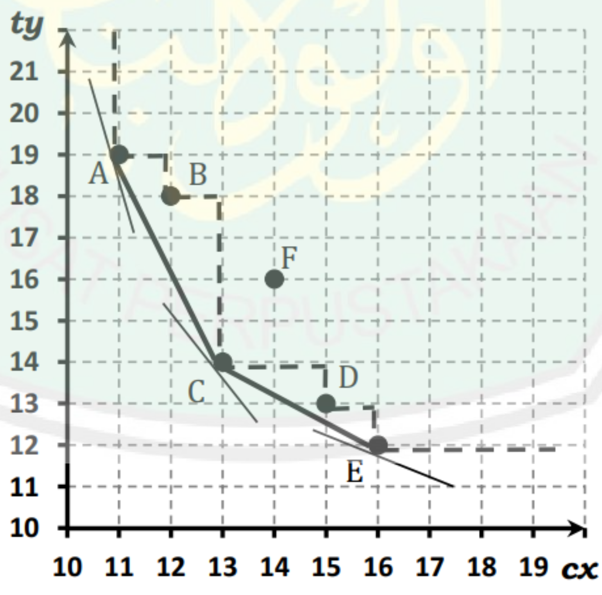
c) $C = (\lambda_1 \times 13 + \lambda_2 \times 14) = (1 \times 13 + 10 \times 14) = 153$

d) $D = (\lambda_1 \times 15 + \lambda_2 \times 13) = (1 \times 15 + 10 \times 13) = 145$

e) $E = (\lambda_1 \times 16 + \lambda_2 \times 12) = (1 \times 16 + 10 \times 12) = 136$

f) Bobot minimum dari solusi A, B, C, D, dan E adalah solusi E dengan jumlah bobot sebesar 136.

Berdasarkan verifikasi yang telah dilakukan, maka diperoleh solusi A, C, dan E adalah solusi efisien yang *supported* dan membentuk lengkungan cembung. Adapun solusi B dan D merupakan solusi efisien yang *non-supported*. Sedangkan solusi F adalah solusi yang *dominated*.



Gambar 2.19 Macam-macam Solusi dalam MCMST (Sumber Keshavarz dan Toloo, 2015)

2.6 *Extreme Deterministic Point Algorithm* (EPDA)

EPDA memiliki tujuan untuk mengatasi limitasi atau batasan-batasan yang terdapat pada algoritma-algoritma sebelumnya (algoritma yang mampu untuk menyelesaikan masalah MCMST) dengan memiliki keuntungan sebagai berikut (Moradkhan, 2010):

1. EPDA mampu menghitung solusi efisien yang *supported* dan *non-suppported*.
2. EPDA dapat diaplikasikan ke dalam graf komplit dengan titik lebih dari 100 dan lebih dari dua kriteria.
3. EPDA memuat himpunan solusi optimal yang terpercaya dan dapat dijadikan sebagai tolok ukur alternatif algoritma, khususnya yang berbasis evolusi.
4. Karakteristik lain yang dimiliki EPDA adalah dapat diulang-ulang, cepat, menyebar, terukur, dan memiliki performa yang efektif.

2.6.1 EPDA dengan Algoritma Kruskal

Terdapat tiga tahapan yang dimiliki oleh EPDA dalam menyelesaikan masalah MCMST. Berikut adalah tahapan-tahapan yang perlu dilakukan (Moradkhan, 2010).

Tahap 1

Membuat daftar semua sisi dari graf yang bersesuaian ke dalam suatu tabel dengan memperhatikan kriteria p. Tabel tersebut diberi nama *Edge List*$[i]$, dengan i adalah indeks dari banyaknya tabel yang digunakan. Tabel *Edge List* diurutkan berdasarkan kriteria yang dikerjakan dengan catatan jika terdapat bobot yang sama maka daftar tersebut diurutkan berdasarkan kriteria yang lain. Kemudian MST sementara (MSTs) ditemukan menggunakan Algoritma Kruskal dengan memperhatikan kriteria satu per satu yang termuat dalam *Edge List*. Dengan menggunakan *Boolean flag*, untuk setiap sisi yang tidak dipilih bernilai 0 dan yang terpilih bernilai 1. Keduanya termuat dalam *Edge List*. Adapun kumpulan sisi yang terpilih didefinisikan sebagai *In Tree* (Moradkhan, 2010).

Tahap 2

Himpunan pertama dari pohon merentang sementara atau STs dibuat dengan mengganti hanya satu sisi dari MSTs. STs yang baru ini adalah tetangga dari MSTs yang disebut sebagai sisi karakteristik dengan ketentuan bahwa ia tidak akan tergantikan pada langkah selanjutnya agar tidak terjadi duplikasi. Semua tetangga dari $\text{MST}_i, i = 1, \dots, p$ yang *non-dominated* dihitung dengan aturan berikut. Untuk setiap $(u, v) \in \text{MST}_i$ yang dilepas, algoritma ini memindai sisi (r, s) dalam *Edge List*$[i]$ sebanyak mungkin yang akan menggantikan (u, v) dengan ketentuan bahwa (r, s) memenuhi tiga kondisi berikut:

1. $(r, s) \notin In\, Tree$.
2. Menambahkan (r, s) tidak mengakibatkan adanya *cycle*.
3. $C_j(r, s) < C_j(u, v)$ untuk setidaknya satu j, dengan $j = 1, \dots, p$ dan $j \neq i$.

Jika (r, s) memenuhi kondisi di atas, maka (r, s) ditandai sebagai sisi karakteristik dengan mengatur *flag* karakteristiknya sama dengan indeks dari sisi (u, v). Sehingga diperoleh STs yang baru. Kemudian *Total Costs* (TC) dari STs yang baru dihitung dengan menggunakan relasi berikut:

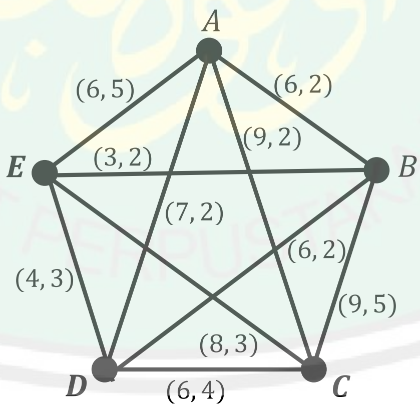
$$\forall j, TC_j(\text{STs baru}) = TC_j(\text{MST}_i) - C_j(u, v) + C_j(r, s)$$

Kemudian TC dari STs baru dibandingkan dengan TC dari STs *non-dominated* pada *Approximate Pareto Set* (APS) atau hampiran dari PF. Jika STs baru tidak didominasi, maka ia ditambahkan ke APS. Jika STs yang baru mendominasi satu atau lebih STs pada APS, maka STs yang didominasi dibuang dari APS (Moradkhan, 2010).

Tahap 3

Setiap pohon merentang dalam APS dipilih untuk membuat STs yang baru, seperti pada tahap 2, kecuali bahwa untuk $j \neq i$ pada kondisi ketiga ditiadakan dalam tahap ini. Semua STs yang dibuat dalam tahap sebelumnya secara berangsur-angsur dipilih pada tahap ini. Untuk masing-masing STs yang dipilih, sisi yang dimutasi adalah sisi yang bukan karakteristik. Sisi tersebut diganti dengan sisi yang cocok dari daftar sisi yang bersesuaian. Langkah tersebut dilakukan sampai diperoleh STs yang valid dan *non-dominated* sebanyak mungkin. Sehingga solusi tersebut masuk ke dalam APS dan menjadi solusi efisien atau PF (Moradkhan, 2010).

Contoh:



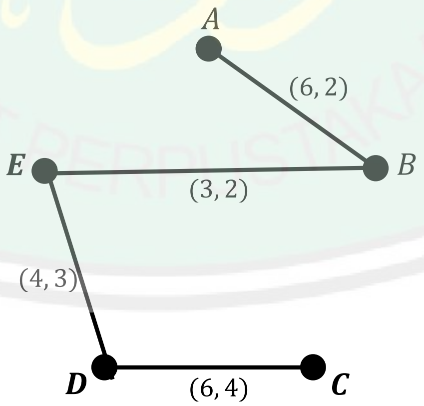
Gambar 2.20 Graf Berbobot dengan Dua Kriteria (Sumber Moradkhan, 2010)

Untuk mendapatkan solusi efisien dari graf pada Gambar 2.20, EPDA menyelesaikannya dengan tiga tahapan yang dimiliki. Adapun tahap pertama diselesaikan dengan menggunakan Algoritma Kruskal. Sedangkan tahap kedua dan ketiga diselesaikan dengan memutasi setiap MST yang diperoleh pada tahap pertama. Berikut ini penyelesaian yang dilakukan oleh EPDA dengan Algoritma Kruskal secara rinci.

Tahap 1

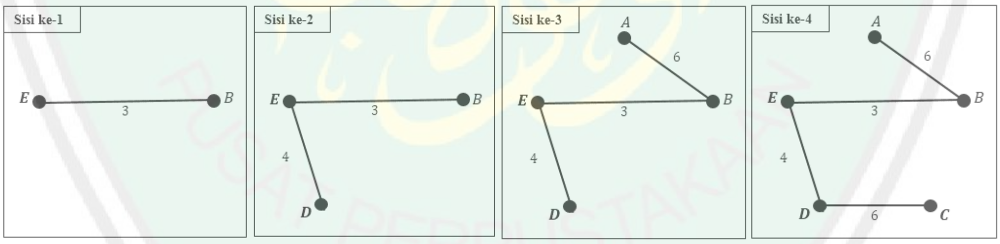
Langkah awal yang harus dilakukan adalah mendaftar semua sisi pada graf dan dimasukkan ke dalam tabel *Edge List*$[i]$. Tabel tersebut diurutkan berdasarkan kriteria yang dikerjakan. Tabel *Edge List*$[1]$ berisi daftar sisi dengan bobot yang diurutkan berdasarkan kriteria pertama atau C_1. Sedangkan tabel *Edge List*$[2]$ berisi daftar sisi dengan bobot yang diurutkan berdasarkan kriteria kedua atau C_2.

Selanjutnya menentukan MSTs atau MST sementara melalui Algoritma Kruskal dengan memperhatikan satu kriteria yang termuat dalam *Edge List* secara bergantian. Dengan menggunakan *Boolean flag*, untuk sisi yang dipilih bernilai 1 dan yang tidak dipilih bernilai 0. Kemudian nilai tersebut dimasukkan ke dalam tabel *Edge List*$[i]$. Berikut ini dua MST yang diperoleh dari graf pada Gambar 2.20, yakni MST_1 dan MST_2.



Gambar 2.21 MST_1 Berdasarkan Algoritma Kruskal

MST_1 diperoleh melalui Algoritma Kruskal dengan memperhatikan kriteria C_1. *Total Costs* yang dimiliki adalah $TC = (19, 11)$. Adapun proses secara rinci untuk mendapatkan graf pada Gambar 2.21 adalah sebagai berikut. Sebagai langkah awal, sisi pertama yang dipilih adalah sisi BE dengan bobot sebesar 3. Kemudian sisi kedua yang dipilih dengan bobot sekecil mungkin adalah sisi DE dengan bobot sebesar 4. Selanjutnya sisi ketiga yang dipilih adalah sisi yang tidak mengakibatkan adanya *cycle* dan sisi tersebut memiliki selisih bobot sekecil mungkin dengan sisi yang dipilih sebelumnya. Maka sisi ketiga yang dipilih adalah sisi AB dengan bobot sebesar 6. Kemudian sisi BD tidak dipilih karena akan mengakibatkan adanya *cycle*. Maka sisi selanjutnya yang dipilih yakni sisi keempat adalah sisi CD dengan bobot sebesar 6. Karena semua titik sudah terhubung dan jika dilanjutkan akan mengakibatkan adanya *cycle*, maka Algoritma Kruskal menghentikan proses penyelesaiannya. Adapun bobot keseluruhan dari MST yang diperoleh untuk kriteria C_1 adalah 19 dan untuk kriteria C_2 adalah 11. Sehingga untuk sementara dapat disimpulkan bahwa MST_1 memiliki bobot terkecil berdasarkan kriteria C_1. Gambar berikut merupakan ilustrasi langkah-langkah penyelesaian yang dilakukan.



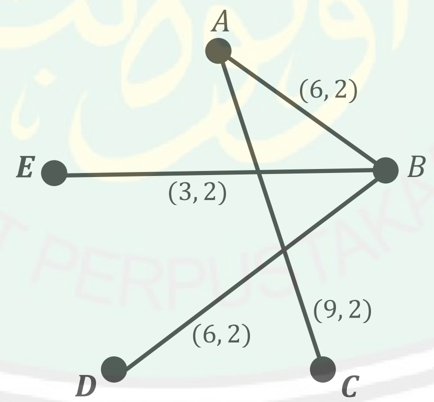
Gambar 2.22 Langkah-langkah Algoritma Kruskal untuk MST_1

Langkah selanjutnya, setelah diperoleh MST_1 melalui Algoritma Kruskal, maka sisi yang termuat di dalamnya diberi nilai 1. Sisi tersebut adalah BE, DE, AB, dan CD. Adapun untuk sisi yang lain, yakni sisi BD, AE, AD, CE, AC, dan BC diberi nilai 0. Karena sisi-sisi tersebut tidak termuat dalam MST_1. Kemudian semua sisi tersebut dimasukkan ke dalam tabel *Edge List*[1] yang diurutkan berdasarkan kriteria C_1.

Tabel 2.1 *Edge List*[1] dari EPDA dengan Algoritma Kruskal

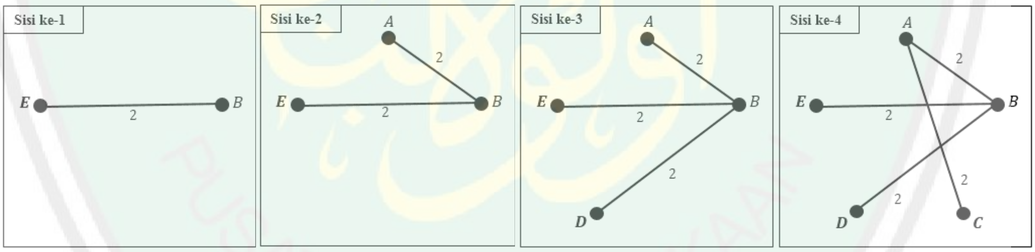
Indeks	Sisi	C_1	C_2	$In\ Tree$
1	BE	3	2	1
2	DE	4	3	1
3	AB	6	2	1
4	BD	6	2	0
5	CD	6	4	1
6	AE	6	5	0
7	AD	7	2	0
8	CE	8	3	0
9	AC	9	2	0
10	BC	9	5	0

Setelah mendapatkan MST_1 dan *Edge List*[1] melalui Algoritma Kruskal, maka Algoritma Kruskal diterapkan kembali untuk mendapatkan MST baru dengan memperhatikan kriteria yang kedua, yakni C_2.



Gambar 2.23 MST_2 Berdasarkan Algoritma Kruskal

MST_2 diperoleh melalui Algoritma Kruskal dengan memperhatikan kriteria C_2. *Total Costs* yang dimiliki adalah $TC = (24, 8)$. Adapun proses secara rinci untuk mendapatkan graf pada Gambar 2.23 adalah sebagai berikut. Sebagai langkah awal, sisi pertama yang dipilih adalah sisi BE dengan bobot sebesar 2. Kemudian sisi kedua yang dipilih dengan bobot sekecil mungkin adalah sisi AB dengan bobot sebesar 2. Selanjutnya sisi ketiga yang dipilih adalah sisi yang tidak mengakibatkan adanya *cycle* dan sisi tersebut memiliki selisih bobot sekecil mungkin dengan sisi yang dipilih sebelumnya. Maka sisi ketiga yang dipilih adalah sisi BD dengan bobot sebesar 2. Kemudian sisi AD tidak dipilih karena akan mengakibatkan adanya *cycle*. Maka sisi selanjutnya yang dipilih yakni sisi keempat adalah sisi AC dengan bobot sebesar 2. Karena semua titik sudah terhubung dan jika dilanjutkan akan mengakibatkan adanya *cycle*, maka Algoritma Kruskal menghentikan proses penyelesaiannya. Adapun bobot keseluruhan dari MST yang diperoleh untuk kriteria C_1 adalah 24 dan untuk kriteria C_2 adalah 8. Sehingga untuk sementara dapat disimpulkan bahwa MST_2 memiliki bobot terkecil berdasarkan kriteria C_2. Gambar berikut merupakan ilustrasi langkah-langkah penyelesaian yang dilakukan.



Gambar 2.24 Langkah-langkah Algoritma Kruskal untuk MST_2

Langkah selanjutnya, setelah diperoleh MST_2 melalui Algoritma Kruskal, maka sisi yang termuat di dalamnya diberi nilai 1. Sisi tersebut adalah BE, AB, BD, dan AC. Adapun untuk sisi yang lain, yakni sisi AD, DE, CE, CD, AE, dan BC diberi nilai 0. Karena sisi-sisi tersebut tidak termuat dalam MST_2. Kemudian semua sisi tersebut dimasukkan ke dalam tabel *Edge List*[2] yang diurutkan berdasarkan kriteria C_2.

Tabel 2.2 *Edge List*[2] dari EPDA dengan Algoritma Kruskal

Indeks	Sisi	C_1	C_2	*In Tree*
1	BE	3	2	1
2	AB	6	2	1
3	BD	6	2	1
4	AD	7	2	0
5	AC	9	2	1
6	DE	4	3	0
7	CE	8	3	0
8	CD	6	4	0
9	AE	6	5	0
10	BC	9	5	0

Menentukan Solusi Efisien

1) Untuk solusi MST_1 dengan $TC = (19, 11)$
   a) Cek MST_2 dengan $TC = (24, 8)$. Jika $(cx, ty) = (19, 11)$ dan $(cx', ty') = (24, 8)$, maka $cx < cx'$, $ty > ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.
   b) Misalkan $(x^*, y^*) = (19, 11)$. Karena tidak ada $(x, y) \in S$ sedemikian sehingga (x, y) mendominasi (x^*, y^*), maka solusi MST_1 dengan $TC = (19, 11)$ merupakan solusi efisien atau PF
2) Untuk solusi MST_2 dengan $TC = (24, 8)$
   a) Cek MST_1 dengan $TC = (19, 11)$. Jika $(cx, ty) = (24, 8)$ dan $(cx', ty') = (19, 14)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.
   b) Misalkan $(x^*, y^*) = (24, 8)$. Karena tidak ada $(x, y) \in S$ sedemikian sehingga (x, y) mendominasi (x^*, y^*), maka solusi MST_2 dengan $TC = (24, 8)$ merupakan solusi efisien atau PF.

Tahap 2

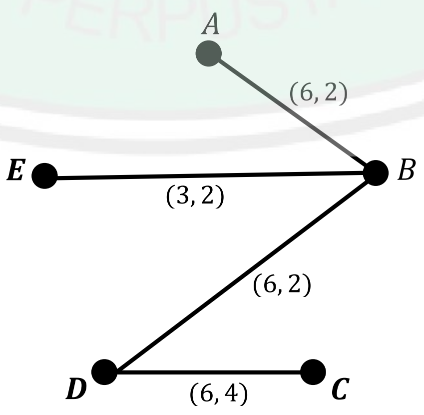
Menentukan solusi efisien dari MST_1 dan MST_2 dengan cara memutasikan setiap sisinya satu per satu. Misal sisi $(u, v) \in \text{MST}_i$, untuk membentuk STs baru maka sisi yang akan menggantikan (u, v) yakni (r, s) harus memenuhi tiga kondisi berikut:

1. $(r, s) \neq In\,Tree$.
2. Menambahkan (r, s) tidak mengakibatkan adanya *cycle*.
3. $C_j(r, s) < C_j(u, v)$ untuk setidaknya satu j, dengan $j = 1, \dots, p$ dan $j \neq i$.

Jika (r, s) memenuhi kondisi di atas, maka (r, s) ditandai sebagai sisi karakteristik dengan mengatur *flag* karakteristiknya sama dengan indeks dari sisi (u, v).

Mutasi MST_1

1) Hapus sisi (1) BE
    a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.
    b) Kembalikan sisi (1) BE.
2) Hapus sisi (2) DE
    a) Masukkan sisi (4) BD dan bangun MST_3 dengan $TC = (21, 10)$.



Gambar 2.25 MST_3 Melalui EPDA dengan Algoritma Kruskal

b) MST_3 adalah solusi efisien dengan karakteristik sisi = 2.

c) Tidak ditemukan lagi sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

d) Kembalikan sisi (2) DE.

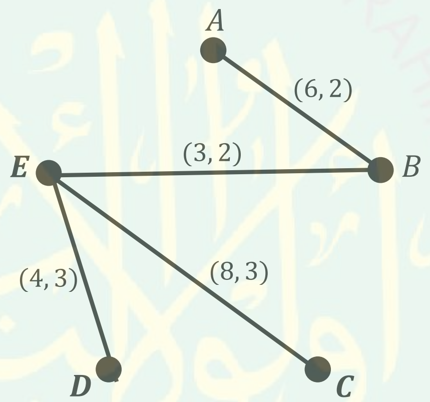
3) Hapus sisi (3) AB

a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

b) Kembalikan sisi (3) AB.

4) Hapus Sisi (5) CD

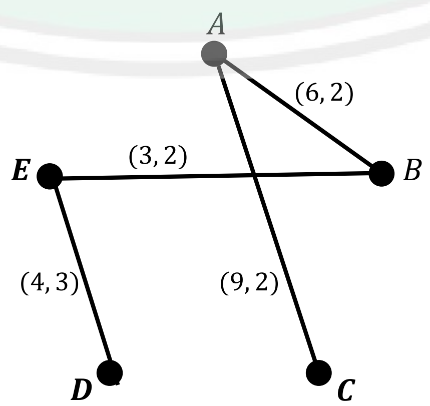
a) Masukkan sisi (8) CE dan bangun MST_4 dengan $TC = (21, 10)$.



Gambar 2.26 MST_4 Melalui EPDA dengan Algoritma Kruskal

b) MST_4 adalah solusi *dominated* karena memiliki TC sama dengan MST_3.

c) Masukkan sisi (9) AC dan bangun MST_5 dengan $TC = (22, 9)$.



Gambar 2.27 MST_5 Melalui EPDA dengan Algoritma Kruskal

d) MST_5 adalah solusi efisien dengan karakteristik sisi = 5.

e) Tidak ditemukan lagi sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

f) Kembalikan sisi (5) CD.

Mutasi MST_2

1) Hapus sisi (1) BE

a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

b) Kembalikan sisi (1) BE.

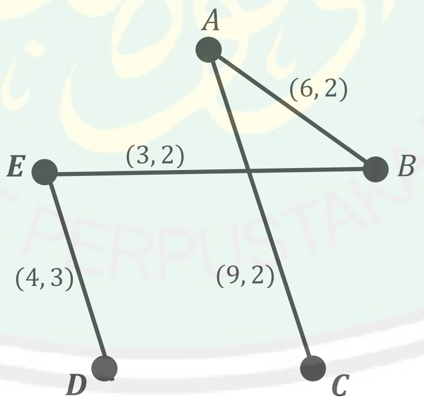
2) Hapus sisi (2) AB

a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

b) Kembalikan sisi (2) AB.

3) Hapus sisi (3) BD

a) Masukkan sisi (5) DE dan bangun MST_6 dengan $TC = (22, 9)$.



Gambar 2.28 MST_6 Melalui EPDA dengan Algoritma Kruskal

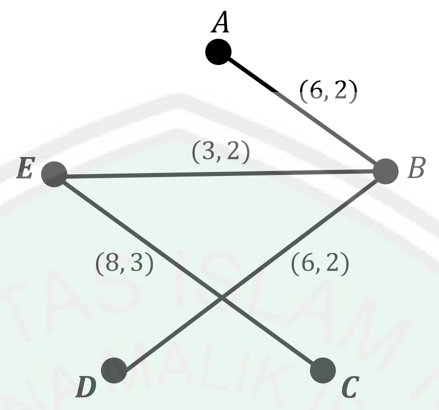
b) MST_6 adalah solusi *dominated* karena memiliki TC sama dengan MST_5.

c) Tidak ditemukan lagi sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

d) Kembalikan sisi (2) BD.

4) Hapus sisi (5) AC

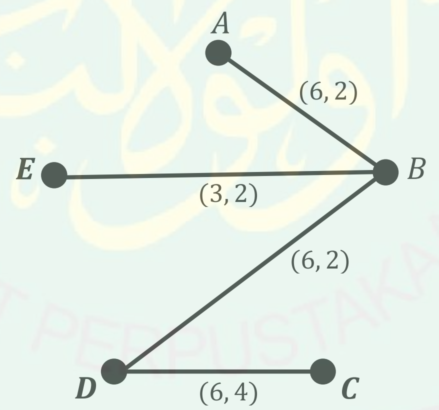
a) Masukkan sisi (7) CE dan bangun MST_7 dengan $TC = (23, 9)$.



Gambar 2.29 MST_7 Melalui EPDA dengan Algoritma Kruskal

b) MST_7 adalah solusi *dominated* karena memiliki TC lebih besar dari MST_5.

c) Masukkan sisi (8) CD dan bangun MST_8 dengan $TC = (21, 10)$.



Gambar 2.30 MST_8 Melalui EPDA dengan Algoritma Kruskal

d) MST_8 adalah solusi *dominated* karena memiliki TC sama dengan MST_3.

e) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

f) Kembalikan sisi (5) AC.

<u>**Menentukan Solusi Efisien**</u>

1) Untuk solusi MST_3 dengan $TC = (21, 10)$

   a) Cek MST_1 dengan $TC = (19, 11)$. Jika $(cx, ty) = (21, 10)$ dan $(cx', ty') = (19, 11)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

   b) Cek MST_2 dengan $TC = (24, 8)$. Jika $(cx, ty) = (21, 10)$ dan $(cx', ty') = (24, 8)$, maka $cx < cx'$, $ty > ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

   c) Cek MST_4 dengan $TC = (21, 10)$. Jika $(cx, ty) = (21, 10)$ dan $(cx', ty') = (21, 10)$, maka $cx = cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x, y) mendominasi (x', y') dan (cx, ty) mendominasi (cx', ty'). Artinya solusi MST_4 dengan $TC = (21, 10)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_3 dengan $TC = (21, 10)$.

   d) Cek MST_5 dengan $TC = (22, 9)$. Jika $(cx, ty) = (21, 10)$ dan $(cx', ty') = (22, 9)$, maka $cx < cx'$, $ty > ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

   e) Cek MST_6 dengan $TC = (22, 9)$. Jika $(cx, ty) = (21, 10)$ dan $(cx', ty') = (22, 9)$, maka $cx < cx'$, $ty > ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

   f) Cek MST_7 dengan $TC = (23, 9)$. Jika $(cx, ty) = (21, 10)$ dan $(cx', ty') = (23, 9)$, maka $cx < cx'$, $ty > ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

   g) Cek MST_8 dengan $TC = (21, 10)$. Jika $(cx, ty) = (21, 10)$ dan $(cx', ty') = (21, 10)$, maka $cx = cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x, y) mendominasi (x', y')

dan (cx, ty) mendominasi (cx', ty'). Artinya solusi MST_8 dengan $TC = (21, 10)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_3 dengan $TC = (21, 10)$.

h) Misalkan $(x^*, y^*) = (21, 10)$. Karena tidak ada $(x, y) \in S$ sedemikian sehingga (x, y) mendominasi (x^*, y^*), maka solusi MST_3 dengan $TC = (21, 10)$ merupakan solusi efisien atau PF.

2) Untuk solusi MST_4 dengan $TC = (21, 10)$

a) Cek MST_3 dengan $TC = (21, 10)$. Jika $(cx, ty) = (21, 10)$ dan $(cx', ty') = (21, 10)$, maka $cx = cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x', y') mendominasi (x, y) dan (cx', ty') mendominasi (cx, ty). Artinya solusi MST_4 dengan $TC = (21, 10)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_3 dengan $TC = (21, 10)$.

b) Misalkan $(x, y) = (21, 10)$. Karena terdapat $(x', y') = (21, 10)$ sedemikian sehingga (x', y') mendominasi (x, y), maka solusi MST_4 dengan $TC = (21, 10)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_3 dengan $TC = (21, 10)$.

3) Untuk solusi MST_5 dengan $TC = (22, 9)$

a) Cek MST_1 dengan $TC = (19, 11)$. Jika $(cx, ty) = (22, 9)$ dan $(cx', ty') = (19, 11)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

b) Cek MST_2 dengan $TC = (24, 8)$. Jika $(cx, ty) = (22, 9)$ dan $(cx', ty') = (24, 8)$, maka $cx < cx'$, $ty > ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

c) Cek MST_3 dengan $TC = (21, 10)$. Jika $(cx, ty) = (22, 9)$ dan $(cx', ty') = (21, 10)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

d) Cek MST_4 dengan $TC = (21, 10)$. Jika $(cx, ty) = (22, 9)$ dan $(cx', ty') = (21, 10)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

e) Cek MST_6 dengan $TC = (22, 9)$. Jika $(cx, ty) = (22, 9)$ dan $(cx', ty') = (22, 9)$, maka $cx = cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x, y) mendominasi (x', y') dan (cx, ty) mendominasi (cx', ty'). Artinya solusi MST_6 dengan $TC = (22, 9)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_5 dengan $TC = (22, 9)$.

f) Cek MST_7 dengan $TC = (23, 9)$. Jika $(cx, ty) = (22, 9)$ dan $(cx', ty') = (23, 9)$, maka $cx < cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x, y) mendominasi (x', y') dan (cx, ty) mendominasi (cx', ty'). Artinya solusi MST_7 dengan $TC = (23, 9)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_5 dengan $TC = (22, 9)$.

g) Cek MST_8 dengan $TC = (21, 10)$. Jika $(cx, ty) = (22, 9)$ dan $(cx', ty') = (21, 10)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

h) Misalkan $(x^*, y^*) = (22, 9)$. Karena tidak ada $(x, y) \in S$ sedemikian sehingga (x, y) mendominasi (x^*, y^*), maka solusi MST_5 dengan $TC = (22, 9)$ merupakan solusi efisien atau PF.

4) Untuk solusi MST_6 dengan $TC = (22, 9)$

a) Cek MST_5 dengan $TC = (22, 9)$. Jika $(cx, ty) = (22, 9)$ dan $(cx', ty') = (22, 9)$, maka $cx = cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x', y') mendominasi (x, y) dan (cx', ty') mendominasi (cx, ty). Artinya solusi MST_6 dengan $TC = (22, 9)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_5 dengan $TC = (22, 9)$.

b) Misalkan $(x, y) = (22, 9)$. Karena terdapat $(x', y') = (22, 9)$ sedemikian sehingga (x', y') mendominasi (x, y), maka solusi MST_6 dengan $TC = (22, 9)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_5 dengan $TC = (22, 9)$.

5) Untuk solusi MST_7 dengan $TC = (23, 9)$

a) Cek MST_5 dengan $TC = (22, 9)$. Jika $(cx, ty) = (23, 9)$ dan $(cx', ty') = (22, 9)$, maka $cx > cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x', y') mendominasi (x, y) dan (cx', ty') mendominasi (cx, ty). Artinya solusi MST_7 dengan $TC = (23, 9)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_5 dengan $TC = (22, 9)$.

b) Misalkan $(x, y) = (23, 9)$. Karena terdapat $(x', y') = (22, 9)$ sedemikian sehingga (x', y') mendominasi (x, y), maka solusi MST_7 dengan $TC = (23, 9)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_5 dengan $TC = (22, 9)$.

6) Untuk solusi MST_8 dengan $TC = (21, 10)$

a) Cek MST_3 dengan $TC = (21, 10)$. Jika $(cx, ty) = (21, 10)$ dan $(cx', ty') = (21, 10)$, maka $cx = cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x', y') mendominasi (x, y) dan (cx', ty') mendominasi (cx, ty). Artinya solusi MST_8 dengan $TC =$

$(21, 10)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_3 dengan $TC = (21, 10)$.

b) Misalkan $(x, y) = (21, 10)$. Karena terdapat $(x', y') = (21, 10)$ sedemikian sehingga (x', y') mendominasi (x, y), maka solusi MST_8 dengan $TC = (21, 10)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_3 dengan $TC = (21, 10)$.

Tahap 3

Mutasi kembali sesuai dengan tahap 2 dengan meniadakan syarat $j \neq i$ dalam kondisi ketiga. Kemudian setiap MSTs di APS digunakan untuk membuat STs baru dengan memilih setiap sisi non-karakteristik diganti dengan sisi yang bersesuaian. Kemudian seluruh MSTs yang diperoleh menjadi solusi efisien dari masalah MCMST. Adapun MSTs yang diperoleh dari tahap 1 dan tahap 2 adalah sebagai berikut:

1. MST_1 dengan $TC = (19, 11)$
2. MST_2 dengan $TC = (24, 8)$
3. MST_3 dengan $TC = (21, 10)$
4. MST_5 dengan $TC = (22, 9)$

Untuk sementara, keempat MST yang diperoleh merupakan solusi efisien dan masuk ke dalam APS. Selanjutnya semua MST yang termuat dalam APS dimutasi kembali kecuali MST_1 dan MST_2. Karena kedua MST tersebut sudah dimutasi dan optimal jika syarat $j \neq i$ dalam kondisi ketiga tidak diberlakukan. Sehingga dalam tahapan ini yang dimutasi adalah MST_3 dan MST_5. Adapun indeks yang digunakan sesuai dengan *Edge List*[1]. Karena keduanya diperoleh melalui MST_1.

Mutasi MST$_3$

1) Hapus sisi (1) BE

   a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

   b) Kembalikan sisi (1) BE.

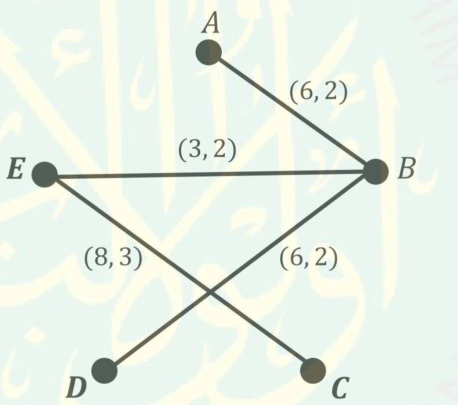
2) Hapus sisi (3) AB

   a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

   b) Kembalikan sisi (3) AB.

3) Hapus sisi (5) CD

   a) Masukkan sisi (8) CE dan bangun MST$_9$ dengan $TC = (23, 9)$.



Gambar 2.31 MST$_9$ Melalui EPDA dengan Algoritma Kruskal

   b) MST$_9$ adalah solusi *dominated* karena memiliki TC lebih besar dari MST$_7$.

   c) Tidak ditemukan lagi sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

   d) Kembalikan sisi (5) CD.

4) Adapun sisi (4) tidak dihapus karena sisi BD merupakan sisi karakteristik.

Mutasi MST$_5$

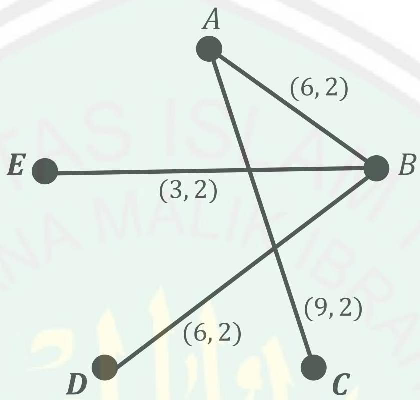
1) Hapus sisi (1) BE

   a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

b) Kembalikan sisi (1) BE.

2) Hapus sisi (2) DE

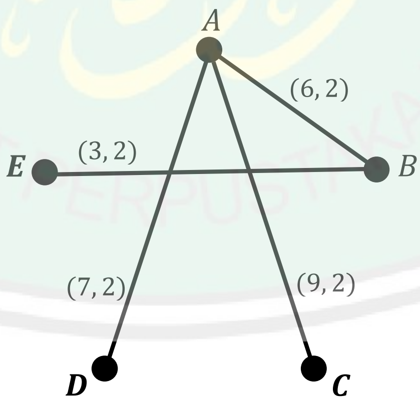
a) Masukkan sisi (4) BD dan bangun MST_{10} dengan $TC = (24, 8)$.



Gambar 2.32 MST_{10} Melalui EPDA dengan Algoritma Kruskal

b) MST_{10} adalah solusi *dominated* karena memiliki TC sama dengan MST_2.

c) Masukkan sisi (7) AD dan bangun MST_{11} dengan $TC = (25, 8)$.



Gambar 2.33 MST_{11} Melalui EPDA dengan Algoritma Kruskal

d) MST_{11} adalah solusi *dominated* karena memiliki TC lebih besar dari MST_2.

e) Tidak ditemukan lagi sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

f) Kembalikan sisi (2) DE.

3) Hapus sisi (3) AB

a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

b) Kembalikan sisi (3) AB.

4) Adapun sisi (8) tidak dihapus karena sisi AC merupakan sisi karakteristik.

Menentukan Solusi Efisien

1) Untuk solusi MST_9 dengan $TC = (23, 9)$

a) Cek MST_5 dengan $TC = (22, 9)$. Jika $(cx, ty) = (23, 9)$ dan $(cx', ty') = (22, 9)$, maka $cx > cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x', y') mendominasi (x, y) dan (cx', ty') mendominasi (cx, ty). Artinya solusi MST_9 dengan $TC = (23, 9)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_5 dengan $TC = (22, 9)$.

b) Misalkan $(x, y) = (23, 9)$. Karena terdapat $(x', y') = (22, 9)$ sedemikian sehingga (x', y') mendominasi (x, y), maka solusi MST_9 dengan $TC = (23, 9)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_5 dengan $TC = (22, 9)$.

2) Untuk solusi MST_{10} dengan $TC = (24, 8)$

a) Cek MST_2 dengan $TC = (24, 8)$. Jika $(cx, ty) = (24, 8)$ dan $(cx', ty') = (24, 8)$, maka $cx = cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x', y') mendominasi (x, y) dan (cx', ty') mendominasi (cx, ty). Artinya solusi MST_{10} dengan $TC = (24, 8)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_2 dengan $TC = (24, 8)$.

b) Misalkan $(x, y) = (24, 8)$. Karena terdapat $(x', y') = (24, 8)$ sedemikian sehingga (x', y') mendominasi (x, y), maka solusi MST_{10} dengan $TC =$

$(24, 8)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_2 dengan $TC = (24, 8)$.

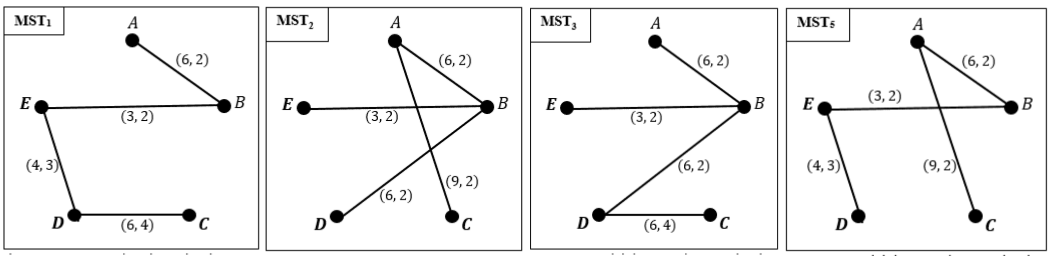
3) Untuk solusi MST_{11} dengan $TC = (25, 8)$

a) Cek MST_2 dengan $TC = (24, 8)$. Jika $(cx, ty) = (25, 8)$ dan $(cx', ty') = (24, 8)$, maka $cx > cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x', y') mendominasi (x, y) dan (cx', ty') mendominasi (cx, ty). Artinya solusi MST_{11} dengan $TC = (25, 8)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_2 dengan $TC = (24, 8)$.

b) Misalkan $(x, y) = (25, 8)$. Karena terdapat $(x', y') = (24, 8)$ sedemikian sehingga (x', y') mendominasi (x, y), maka solusi MST_{11} dengan $TC = (25, 8)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_2 dengan $TC = (24, 8)$.

Setelah dilakukan mutasi kembali dan semua kemungkinan solusi telah dicek, maka MST yang menjadi solusi efisien atau PF untuk masalah MCMST dari graf pada Gambar 2.20 adalah sebagai berikut:

1. MST_1 dengan $TC = (19, 11)$
2. MST_2 dengan $TC = (24, 8)$
3. MST_3 dengan $TC = (21, 10)$
4. MST_5 dengan $TC = (22, 9)$



Gambar 2.34 Solusi Efisien Menurut EPDA dengan Algortima Kruskal

Setelah diperoleh empat solusi efisien atau PF, maka selanjutnya semua solusi tersebut akan dicek apakah termasuk ke dalam solusi efisien yang *supported* atau *non-supported*.

Menentukan Solusi Efisien yang *Supported* dan *Non-Supported*

1) Misalkan $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = 1$
   a) MST_1 dengan $TC = (\lambda_1 \times 19 + \lambda_2 \times 11) = (1 \times 19 + 1 \times 11) = 30$
   b) MST_2 dengan $TC = (\lambda_1 \times 24 + \lambda_2 \times 8) = (1 \times 24 + 1 \times 8) = 32$
   c) MST_3 dengan $TC = (\lambda_1 \times 21 + \lambda_2 \times 10) = (1 \times 21 + 1 \times 10) = 31$
   d) MST_5 dengan $TC = (\lambda_1 \times 22 + \lambda_2 \times 9) = (1 \times 22 + 1 \times 9) = 31$
   e) Bobot minimum dari keempat solusi tersebut adalah solusi MST_1 dengan jumlah bobot sebesar 30.
2) Misalkan $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = 1{,}75$
   a) MST_1 dengan $TC = (\lambda_1 \times 19 + \lambda_2 \times 11) = (1 \times 19 + 1{,}75 \times 11) = 38{,}25$
   b) MST_2 dengan $TC = (\lambda_1 \times 24 + \lambda_2 \times 8) = (1 \times 24 + 1{,}75 \times 8) = 38{,}00$
   c) MST_3 dengan $TC = (\lambda_1 \times 21 + \lambda_2 \times 10) = (1 \times 21 + 1{,}75 \times 10) = 38{,}50$
   d) MST_5 dengan $TC = (\lambda_1 \times 22 + \lambda_2 \times 9) = (1 \times 22 + 1{,}75 \times 9) = 37{,}75$
   e) Bobot minimum dari keempat solusi tersebut adalah solusi MST_5 dengan jumlah bobot sebesar 37,75.
3) Misalkan $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = 10$
   a) MST_1 dengan $TC = (\lambda_1 \times 19 + \lambda_2 \times 11) = (1 \times 19 + 10 \times 11) = 129$
   b) MST_2 dengan $TC = (\lambda_1 \times 24 + \lambda_2 \times 8) = (1 \times 24 + 10 \times 8) = 104$
   c) MST_3 dengan $TC = (\lambda_1 \times 21 + \lambda_2 \times 10) = (1 \times 21 + 10 \times 10) = 121$
   d) MST_5 dengan $TC = (\lambda_1 \times 22 + \lambda_2 \times 9) = (1 \times 22 + 10 \times 9) = 112$

e) Bobot minimum dari keempat solusi tersebut adalah solusi MST_2 dengan jumlah bobot sebesar 104.

Berdasarkan verifikasi yang telah dilakukan, maka diperoleh solusi MST_1, MST_2, dan MST_5 adalah solusi efisien yang *supported*. Sedangkan MST_3 merupakan solusi efisien yang *non-supported*.

2.6.2 EPDA dengan Algoritma Prim

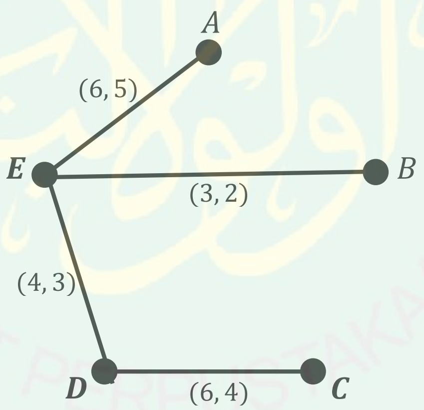
Sebagaimana EPDA yang termuat dalam subbab 2.6.1, EPDA dalam subbab ini secara umum memiliki prosedur yang sama baik dari tahap 1, tahap 2, dan tahap 3. Namun terdapat satu perbedaan yang mendasari proses penyelesaian masalah MCMST yang dilakukan oleh EPDA yakni pada tahap 1. Sebagaimana Moradkhan (2010) menjelaskan bahwa sebagai fondasi awal, EPDA pada tahap pertama dibangun dari Algoritma Kruskal dengan memperhatikan kriteria satu per satu yang termuat dalam *Edge List*. Di samping itu, algoritma lain yang serupa dengan Algoritma Kruskal dan memiliki tujuan yang sama adalah Algoritma Prim. Sehingga dalam subbab ini akan dihadirkan EPDA yang dibangun melalui Algoritma Prim. Adapun dalam penelitian ini, Algoritma Prim dikerjakan tanpa memperhatikan tabel *Edge List*. Hal ini bertujuan untuk menunjukkan bahwa banyaknya kemungkinan solusi yang dihasilkan akan lebih banyak.

Untuk mengetahui langkah-langkah penyelesaian EPDA dengan Algoritma Prim, maka graf yang terdapat pada Gambar 2.20 akan dikerjakan kembali sebagai contoh penerapan algoritma ini. Berikut ini penyelesaian yang dilakukan oleh EPDA dengan Algoritma Prim secara rinci.

Tahap 1

Langkah awal yang harus dilakukan adalah mendaftar semua sisi pada graf dan dimasukkan ke dalam tabel *Edge List*$[i]$. Tabel tersebut diurutkan berdasarkan kriteria yang dikerjakan. Tabel *Edge List*[1] berisi daftar sisi dengan bobot yang diurutkan berdasarkan kriteria pertama atau C_1. Sedangkan tabel *Edge List*[2] berisi daftar sisi dengan bobot yang diurutkan berdasarkan kriteria kedua atau C_2.

Selanjutnya menentukan MSTs atau MST sementara melalui Algoritma Prim dengan memperhatikan satu kriteria secara bergantian. Dengan menggunakan *Boolean flag*, untuk sisi yang dipilih bernilai 1 dan yang tidak dipilih bernilai 0. Kemudian nilai tersebut dimasukkan ke dalam tabel *Edge List*$[i]$. Berikut ini dua MST yang diperoleh dari graf pada Gambar 2.20, yakni MST_1 dan MST_2.



Gambar 2.35 MST_1 Berdasarkan Algoritma Prim

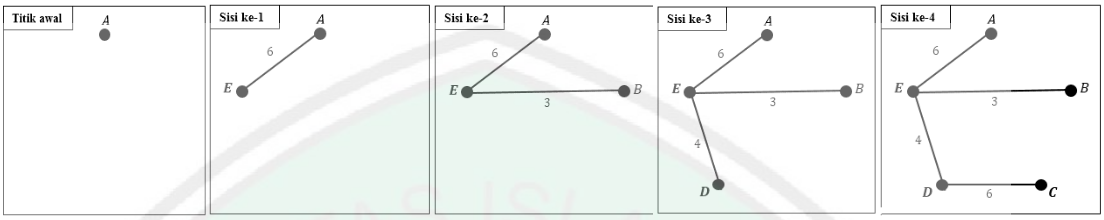
MST_1 diperoleh melalui Algoritma Prim dengan memperhatikan kriteria C_1. *Total Costs* yang dimiliki adalah $TC = (19, 14)$. Adapun proses secara rinci untuk mendapatkan graf pada Gambar 2.35 adalah sebagai berikut. Langkah awal yang dilakukan adalah menentukan satu titik, adapun dalam hal ini titik yang dipilih adalah titik A. Kemudian langkah selanjutnya adalah menentukan sisi dengan bobot terkecil yang menghubungkan titik yang sudah dipilih dengan titik lainnya (titik yang belum dipilih). Dengan memperhatikan graf pada Gambar 2.20, titik A terhubung dengan titik B, C, D, dan E. Sehingga terdapat empat perbandingan bobot yakni membangun sisi AB dengan bobot 6, membangun sisi AC dengan bobot 9, membangun sisi AD dengan bobot 7, dan membangun sisi AE dengan bobot 6. Maka dalam hal ini dipilih sisi AE dengan bobot terkecil yakni 6.

Selanjutnya, antara titik A dan titik E dicari titik yang terhubung langsung dengan keduanya. Adapun titik A dapat dibangun sisi AB dengan bobot 6, sisi AC dengan bobot 9, dan sisi AD dengan bobot 7. Sedangkan titik E dapat dibangun sisi BE dengan bobot 3, sisi CE dengan bobot 8, dan sisi DE dengan bobot 4. Maka sisi yang dipilih adalah sisi BE dengan bobot 4.

Kemudian sisi ketiga yang dipilih adalah sisi dengan bobot terkecil dari kemungkinan sisi yang dapat dihubungkan dan juga sisi tersebut tidak mengakibatkan adanya *cycle*. Untuk saat ini terdapat tiga titik yakni titik A, B, dan E. Titik A dapat dibangun sisi AC dengan bobot 9 dan sisi AD dengan bobot 7. Sedangkan titik B dapat dibangun sisi BC dengan bobot 9 dan sisi BD dengan bobot 6. Selanjutnya untuk titik E dapat dibangun sisi CE dengan bobot 8 dan sisi DE dengan bobot 4. Berdasarkan kemungkinan sisi yang ada maka dipilih sisi DE sebagai sisi dengan bobot terkecil yakni 4.

Selanjutnya akan dibangun titik yang terhubung dengan titik C dengan bobot terkecil. Sisi yang dapat dibangun adalah sisi AC dengan bobot 9, sisi BC dengan bobot 9, sisi CD dengan bobot 6, dan sisi CE dengan bobot 8. Maka sisi yang dipilih adalah sisi CD dengan bobot 6. Karena semua titik sudah terhubung, maka Algoritma Prim menghentikan proses penyelesaiannya. Adapun bobot keseluruhan dari MST yang diperoleh untuk kriteria C_1 adalah 19 dan untuk kriteria C_2 adalah

14. Sehingga untuk sementara dapat disimpulkan bahwa MST_1 memiliki bobot terkecil berdasarkan kriteria C_1. Gambar berikut merupakan ilustrasi langkah-langkah penyelesaian yang dilakukan.



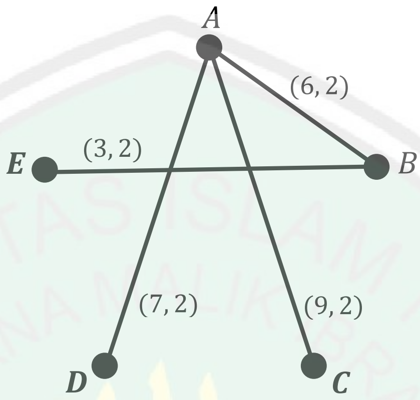
Gambar 2.36 Langkah-langkah Algoritma Prim untuk MST_1

Langkah selanjutnya, setelah diperoleh MST_1 melalui Algoritma Prim, maka sisi yang termuat di dalamnya diberi nilai 1. Sisi tersebut adalah BE, AE, DE, dan CD. Adapun untuk sisi yang lain, yakni sisi AB, BD, AD, CE, AC, dan BC diberi nilai 0. Karena sisi-sisi tersebut tidak termuat dalam MST_1. Kemudian semua sisi tersebut dimasukkan ke dalam tabel *Edge List*[1] yang diurutkan berdasarkan kriteria C_1.

Tabel 2.3 *Edge List*[1] dari EPDA dengan Algoritma Prim

Indeks	Sisi	C_1	C_2	*In Tree*
1	BE	3	2	1
2	DE	4	3	1
3	AB	6	2	0
4	BD	6	2	0
5	CD	6	4	1
6	AE	6	5	1
7	AD	7	2	0
8	CE	8	3	0
9	AC	9	2	0
10	BC	9	5	0

Setelah mendapatkan MST_1 dan *Edge List*[1] melalui Algoritma Prim, maka Algoritma Prim diterapkan kembali untuk mendapatkan MST baru dengan mengacu pada kriteria yang kedua, yakni C_2.



Gambar 2.37 MST_2 Berdasarkan Algoritma Prim

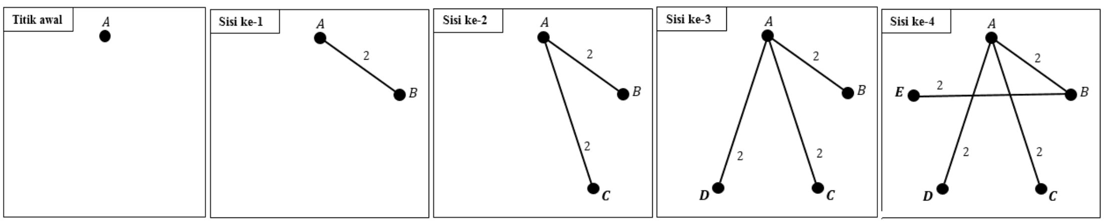
MST_2 diperoleh melalui Algoritma Prim dengan memperhatikan kriteria C_2. *Total Costs* yang dimiliki adalah $TC = (25, 8)$. Adapun proses secara rinci untuk mendapatkan graf pada Gambar 2.37 adalah sebagai berikut. Langkah awal yang dilakukan adalah menentukan satu titik, adapun dalam hal ini titik yang dipilih adalah titik A. Kemudian langkah selanjutnya adalah menentukan sisi dengan bobot terkecil yang menghubungkan titik yang sudah dipilih dengan titik lainnya (titik yang belum dipilih). Dengan memperhatikan graf pada Gambar 2.20, titik A terhubung dengan titik B, C, D, dan E. Sehingga terdapat empat perbandingan bobot yakni membangun sisi AB dengan bobot 2, membangun sisi AC dengan bobot 2, membangun sisi AD dengan bobot 2, dan membangun sisi AE dengan bobot 5. Maka dalam hal ini dipilih sisi AB dengan bobot terkecil yakni 2.

Selanjutnya, antara titik A dan titik B dicari titik yang terhubung langsung dengan keduanya. Adapun titik A dapat dibangun sisi AC dengan bobot 2, sisi AD

dengan bobot 2, dan sisi AE dengan bobot 5. Sedangkan titik B dapat dibangun sisi BC dengan bobot 5, sisi BD dengan bobot 2, dan sisi BE dengan bobot 2. Maka sisi yang dipilih adalah sisi AC dengan bobot 2.

Kemudian sisi ketiga yang dipilih haruslah sisi dengan bobot terkecil dari kemungkinan sisi yang dapat dihubungkan dan juga sisi tersebut tidak mengakibatkan adanya *cycle*. Untuk saat ini terdapat tiga titik yakni titik A, B, dan C. Titik A dapat dibangun sisi AD dengan bobot 2 dan sisi AE dengan bobot 5. Sedangkan titik B dapat dibangun sisi BD dengan bobot 2 dan sisi BE dengan bobot 2. Selanjutnya untuk titik C dapat dibangun sisi CD dengan bobot 4 dan sisi CE dengan bobot 3. Maka sisi yang dipilih adalah sisi AD dengan bobot 2.

Selanjutnya akan dibangun titik yang terhubung dengan titik E dengan bobot terkecil. Sisi yang dapat dibangun adalah sisi AE dengan bobot 5, sisi BE dengan bobot 2, sisi CE dengan bobot 3, dan sisi DE dengan bobot 3. Maka sisi yang dipilih adalah sisi BE dengan bobot 2. Karena semua titik sudah terhubung, maka Algoritma Prim menghentikan proses penyelesaiannya. Adapun bobot keseluruhan dari MST yang diperoleh untuk kriteria C_1 adalah 25 dan untuk kriteria C_2 adalah 8. Sehingga untuk sementara dapat disimpulkan bahwa MST_1 memiliki bobot terkecil berdasarkan kriteria C_2. Gambar berikut merupakan ilustrasi langkah-langkah penyelesaian yang dilakukan.



Gambar 2.38 Langkah-langkah Algoritma Prim untuk MST_2

Langkah selanjutnya, setelah diperoleh MST_2 melalui Algoritma Prim, maka sisi yang termuat di dalamnya diberi nilai 1. Sisi tersebut adalah BE, AB, AD, dan AC. Adapun untuk sisi yang lain, yakni sisi DE, BD, CD, AE, CE, dan BC diberi nilai 0. Karena sisi-sisi tersebut tidak termuat dalam MST_2. Kemudian semua sisi tersebut dimasukkan ke dalam tabel *Edge List*[2] yang diurutkan berdasarkan kriteria C_2.

Tabel 2.4 *Edge List*[2] dari EPDA dengan Algoritma Prim

Indeks	**Sisi**	C_1	C_2	***In Tree***
1	BE	3	2	1
2	AB	6	2	1
3	BD	6	2	0
4	AD	7	2	1
5	AC	9	2	1
6	DE	4	3	0
7	CE	8	3	0
8	CD	6	4	0
9	AE	6	5	0
10	BC	9	5	0

Menentukan Solusi Efisien

1) Untuk solusi MST_1 dengan $TC = (19, 14)$
   a) Cek MST_2 dengan $TC = (25, 8)$. Jika $(cx, ty) = (19, 14)$ dan $(cx', ty') = (25, 8)$, maka $cx < cx'$, $ty > ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.
   b) Misalkan $(x^*, y^*) = (19, 14)$. Karena tidak ada $(x, y) \in S$ sedemikian sehingga (x, y) mendominasi (x^*, y^*), maka solusi MST_1 dengan $TC = (19, 11)$ merupakan solusi efisien atau PF.

2) Untuk solusi MST_2 dengan $TC = (25, 8)$

   a) Cek MST_1 dengan $TC = (19, 14)$. Jika $(cx, ty) = (25, 8)$ dan $(cx', ty') = (19, 14)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

   b) Misalkan $(x^*, y^*) = (25, 8)$. Karena tidak ada $(x, y) \in S$ sedemikian sehingga (x, y) mendominasi (x^*, y^*), maka solusi MST_2 dengan $TC = (25, 8)$ merupakan solusi efisien atau PF.

Tahap 2

Menentukan solusi efisien dari MST_1 dan MST_2 dengan cara memutasikan setiap sisinya satu per satu. Misal sisi $(u, v) \in \text{MST}_i$, untuk membentuk STs baru maka sisi yang akan menggantikan (u, v) yakni (r, s) harus memenuhi tiga kondisi berikut:

1. $(r, s) \neq In\ Tree$.
2. Menambahkan (r, s) tidak mengakibatkan adanya *cycle*.
3. $C_j(r, s) < C_j(u, v)$ untuk setidaknya satu j, dengan $j = 1, \dots, p$ dan $j \neq i$.

Jika (r, s) memenuhi kondisi di atas, maka (r, s) ditandai sebagai sisi karakteristik dengan mengatur *flag* karakteristiknya sama dengan indeks dari sisi (u, v).

Mutasi MST_1

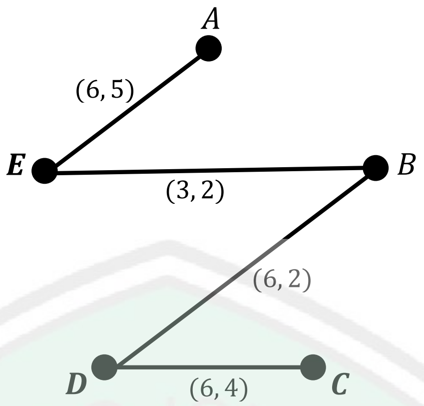
1) Hapus sisi (1) BE

   a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

   b) Kembalikan sisi (1) BE.

2) Hapus sisi (2) DE

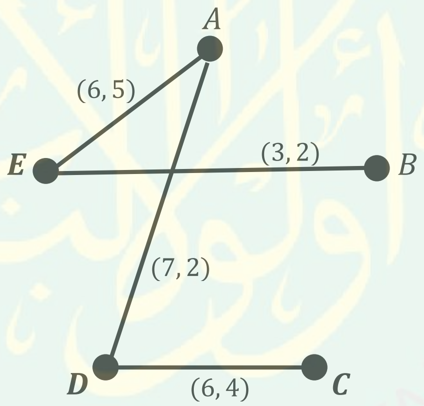
   a) Masukkan sisi (4) BD dan bangun MST_3 dengan $TC = (21, 13)$.



Gambar 2.39 MST_3 Melalui EPDA dengan Algoritma Prim

b) MST_3 adalah solusi *dominated* karena memiliki TC lebih besar dari MST_8.

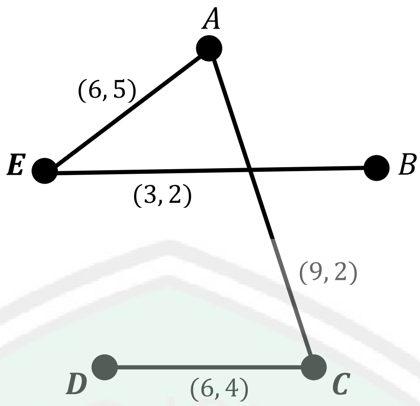
c) Masukkan sisi (7) AD dan bangun MST_4 dengan $TC = (22, 13)$.



Gambar 2.40 MST_4 Melalui EPDA dengan Algoritma Prim

d) MST_4 adalah solusi *dominated* karena memiliki TC lebih besar dari MST_8.

e) Masukkan sisi (9) AC dan bangun MST_5 dengan $TC = (24, 13)$.



Gambar 2.41 MST_5 Melalui EPDA dengan Algoritma Prim

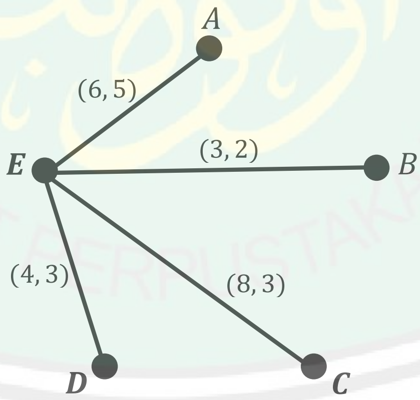
f) MST_5 adalah solusi dominated karena memiliki TC lebih besar dari MST_8

g) Tidak ditemukan lagi sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

h) Kembalikan sisi (2) DE.

3) Hapus sisi (5) CD

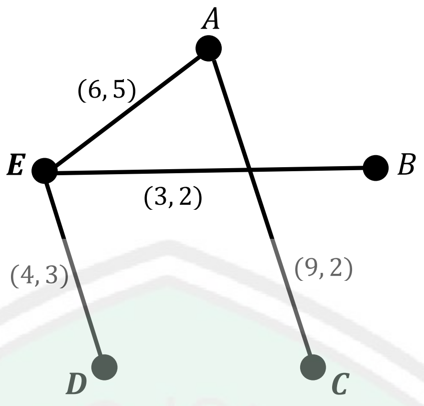
a) Masukkan sisi (8) CE dan bangun MST_6 dengan $TC = (21, 13)$.



Gambar 2.42 MST_6 Melalui EPDA dengan Algoritma Prim

b) MST_6 adalah solusi *dominated* karena memiliki TC lebih besar dari MST_8.

c) Masukkan sisi (9) AC dan bangun MST_7 dengan $TC = (22, 12)$.



Gambar 2.43 MST_7 Melalui EPDA dengan Algoritma Prim

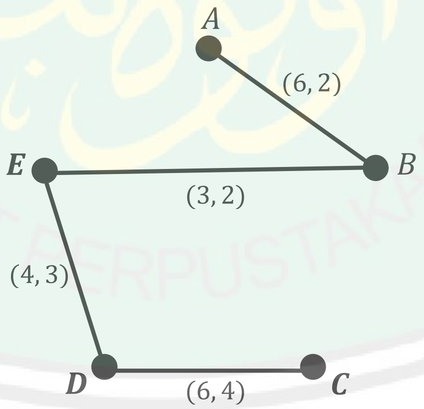
d) MST_7 adalah solusi *dominated* karena memiliki TC lebih besar dari MST_8.

e) Tidak ditemukan lagi sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

f) Kembalikan sisi (5) CD.

4) Hapus sisi (6) AE

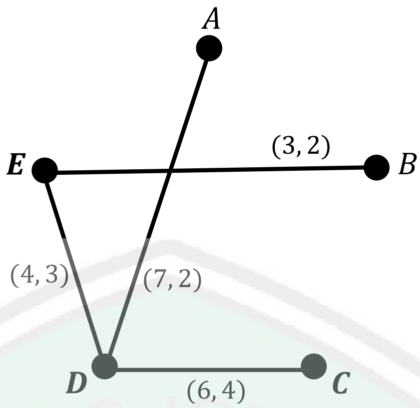
a) Masukkan sisi (3) AB dan bangun MST_8 dengan $TC = (19, 11)$.



Gambar 2.44 MST_8 Melalui EPDA dengan Algoritma Prim

b) MST_8 adalah solusi efisien dengan karakteristik sisi = 6.

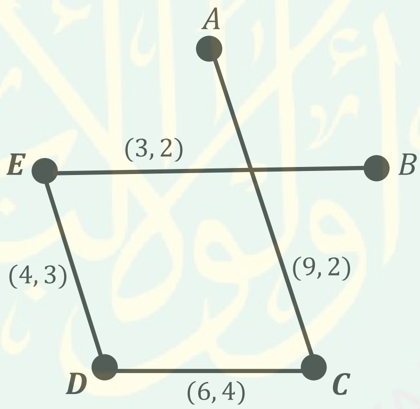
c) Masukkan sisi (7) AD dan bangun MST_9 dengan $TC = (20, 11)$.



Gambar 2.45 MST_9 Melalui EPDA dengan Algoritma Prim

d) MST_9 adalah solusi *dominated* karena memiliki TC lebih besar dari MST_8.

e) Masukkan sisi (9) AC dan bangun MST_{10} dengan $TC = (22, 11)$.



Gambar 2.46 MST_{10} Melalui EPDA dengan Algoritma Prim

f) MST_{10} adalah solusi dominated karena memiliki TC lebih besar dari MST_8.

g) Tidak ditemukan lagi sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

h) Kembalikan sisi (6) AE.

Mutasi $\mathbf{MST_2}$

1) Hapus sisi (1) BE

a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

b) Kembalikan sisi (1) BE.

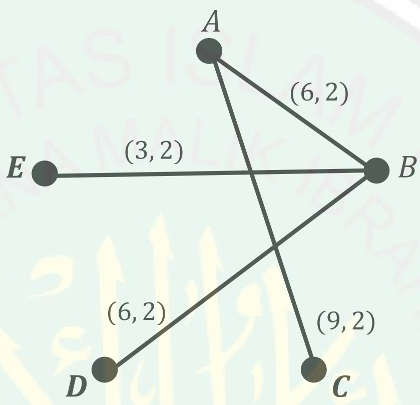
2) Hapus sisi (2) AB

a) Tidak ditemukan lagi sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

b) Kembalikan sisi (2) AB.

3) Hapus sisi (4) AD

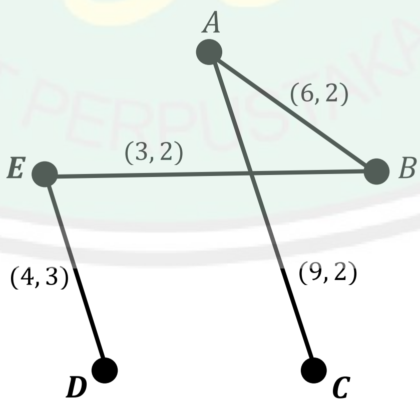
a) Masukkan sisi (3) BD dan bangun MST_{11} dengan $TC = (24, 8)$.



Gambar 2.47 MST_{11} Melalui EPDA dengan Algoritma Prim

b) MST_{11} adalah solusi efisien dengan karakteristik sisi = 4.

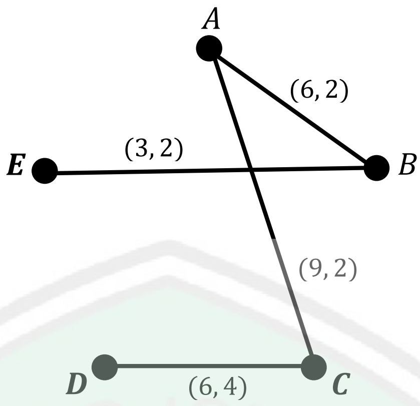
c) Masukkan sisi (6) DE dan bangun MST_{12} dengan $TC = (22, 9)$.



Gambar 2.48 MST_{12} Melalui EPDA dengan Algoritma Prim

d) MST_{12} adalah solusi efisien dengan karakteristik sisi = 4.

e) Masukkan sisi (8) CD dan bangun MST_{13} dengan $TC = (24, 10)$.



Gambar 2.49 MST_{13} Melalui EPDA dengan Algoritma Prim

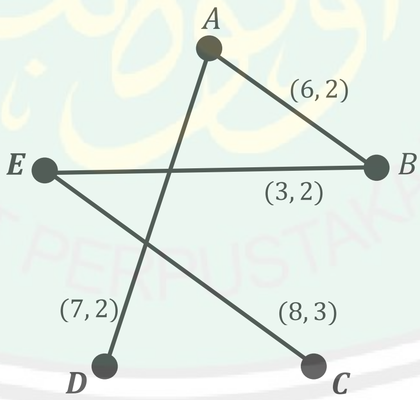
f) MST_{13} adalah solusi *dominated* karena memiliki TC lebih besar dari MST_{11}.

g) Tidak ditemukan lagi sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

h) Kembalikan sisi (4) AD.

4) Hapus sisi (5) AC

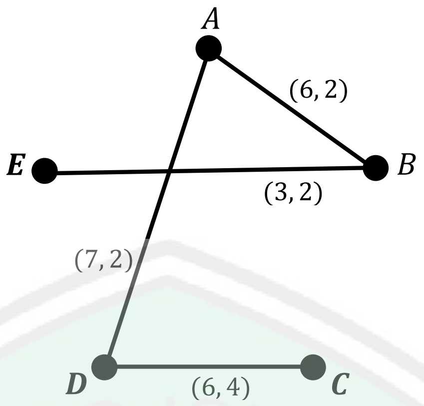
a) Masukkan sisi (7) CE dan bangun MST_{14} dengan $TC = (24, 9)$.



Gambar 2.50 MST_{14} Melalui EPDA dengan Algoritma Prim

b) MST_{14} adalah solusi *dominated* karena memiliki TC lebih besar dari MST_{11}.

c) Masukkan sisi (8) CD dan bangun MST_{15} dengan $TC = (22, 10)$.



Gambar 2.51 MST_{15} Melalui EPDA dengan Algoritma Prim

d) MST_{15} adalah solusi *dominated* karena memiliki TC lebih besar dari MST_{12}.

e) Tidak ditemukan lagi sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

f) Kembalikan sisi (5) AC.

Menentukan Solusi Efisien

1) Untuk solusi MST_3 dengan $TC = (21, 13)$

a) Cek MST_8 dengan $TC = (19, 11)$. Jika $(cx, ty) = (21, 13)$ dan $(cx', ty') = (19, 11)$, maka $cx > cx'$, $ty > ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga (x', y') mendominasi (x, y) dan (cx', ty') mendominasi (cx, ty). Artinya solusi MST_3 dengan $TC = (21, 13)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_8 dengan $TC = (19, 11)$.

b) Misalkan $(x, y) = (21, 13)$. Karena terdapat $(x', y') = (19, 11)$ sedemikian sehingga (x', y') mendominasi (x, y), maka solusi MST_3 dengan $TC = (21, 13)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_8 dengan $TC = (19, 11)$.

2) Untuk solusi MST_4 dengan $TC = (22, 13)$

a) Cek MST_8 dengan $TC = (19, 11)$. Jika $(cx, ty) = (22, 13)$ dan $(cx', ty') = (19, 11)$, maka $cx > cx'$, $ty > ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga (x', y') mendominasi (x, y) dan (cx', ty') mendominasi (cx, ty). Artinya solusi MST_4 dengan $TC = (22, 13)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_8 dengan $TC = (19, 11)$.

b) Misalkan $(x, y) = (22, 13)$. Karena terdapat $(x', y') = (19, 11)$ sedemikian sehingga (x', y') mendominasi (x, y), maka solusi MST_4 dengan $TC = (22, 13)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_8 dengan $TC = (19, 11)$.

3) Untuk solusi MST_5 dengan $TC = (24, 13)$

a) Cek MST_8 dengan $TC = (19, 11)$. Jika $(cx, ty) = (24, 13)$ dan $(cx', ty') = (19, 11)$, maka $cx > cx'$, $ty > ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga (x', y') mendominasi (x, y) dan (cx', ty') mendominasi (cx, ty). Artinya solusi MST_5 dengan $TC = (24, 13)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_8 dengan $TC = (19, 11)$.

b) Misalkan $(x, y) = (24, 13)$. Karena terdapat $(x', y') = (19, 11)$ sedemikian sehingga (x', y') mendominasi (x, y), maka solusi MST_5 dengan $TC = (24, 13)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_8 dengan $TC = (19, 11)$.

4) Untuk solusi MST_6 dengan $TC = (21, 13)$

a) Cek MST_8 dengan $TC = (19, 11)$. Jika $(cx, ty) = (21, 13)$ dan $(cx', ty') = (19, 11)$, maka $cx > cx'$, $ty > ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga (x', y') mendominasi (x, y) dan (cx', ty') mendominasi (cx, ty). Artinya solusi MST_6 dengan $TC = (21, 13)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_8 dengan $TC = (19, 11)$.

b) Misalkan $(x, y) = (21, 13)$. Karena terdapat $(x', y') = (19, 11)$ sedemikian sehingga (x', y') mendominasi (x, y), maka solusi MST_6 dengan $TC = (21, 13)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_8 dengan $TC = (19, 11)$.

5) Untuk solusi MST_7 dengan $TC = (22, 12)$

a) Cek MST_8 dengan $TC = (19, 11)$. Jika $(cx, ty) = (22, 12)$ dan $(cx', ty') = (19, 11)$, maka $cx > cx'$, $ty > ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga (x', y') mendominasi (x, y) dan (cx', ty') mendominasi (cx, ty). Artinya solusi MST_7 dengan $TC = (22, 12)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_8 dengan $TC = (19, 11)$.

b) Misalkan $(x, y) = (22, 12)$. Karena terdapat $(x', y') = (19, 11)$ sedemikian sehingga (x', y') mendominasi (x, y), maka solusi MST_7 dengan $TC = (22, 12)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_8 dengan $TC = (19, 11)$.

6) Untuk solusi MST_8 dengan $TC = (19, 11)$

a) Cek MST_1 dengan $TC = (19, 14)$. Jika $(cx, ty) = (19, 11)$ dan $(cx', ty') = (19, 14)$, maka $cx = cx'$ dan $ty < ty'$. Sehingga (x, y) mendominasi (x', y') dan (cx, ty) mendominasi (cx', ty'). Artinya solusi MST_1 dengan $TC = (19, 14)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_8 dengan $TC = (19, 11)$.

b) Cek MST_2 dengan $TC = (25, 8)$. Jika $(cx, ty) = (19, 11)$ dan $(cx', ty') = (25, 8)$, maka $cx < cx'$, $ty > ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

c) Cek MST_3 dengan $TC = (21, 13)$. Jika $(cx, ty) = (19, 11)$ dan $(cx', ty') = (21, 13)$, maka $cx < cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga (x, y) mendominasi (x', y') dan (cx, ty) mendominasi (cx', ty'). Artinya solusi MST_3 dengan $TC = (21, 13)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_8 dengan $TC = (19, 11)$.

d) Cek MST_4 dengan $TC = (22, 13)$. Jika $(cx, ty) = (19, 11)$ dan $(cx', ty') = (22, 13)$, maka $cx < cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga (x, y) mendominasi (x', y') dan (cx, ty) mendominasi (cx', ty'). Artinya solusi MST_4 dengan $TC = (22, 13)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_8 dengan $TC = (19, 11)$.

e) Cek MST_5 dengan $TC = (24, 13)$. Jika $(cx, ty) = (19, 11)$ dan $(cx', ty') = (24, 13)$, maka $cx < cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga (x, y) mendominasi (x', y') dan (cx, ty) mendominasi (cx', ty'). Artinya solusi MST_5 dengan $TC = (24, 13)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_8 dengan $TC = (19, 11)$.

f) Cek MST_6 dengan $TC = (21, 13)$. Jika $(cx, ty) = (19, 11)$ dan $(cx', ty') = (21, 13)$, maka $cx < cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga (x, y) mendominasi (x', y') dan (cx, ty) mendominasi (cx', ty'). Artinya solusi MST_6 dengan $TC = (21, 13)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_8 dengan $TC = (19, 11)$.

g) Cek MST_7 dengan $TC = (22, 12)$. Jika $(cx, ty) = (19, 11)$ dan $(cx', ty') = (22, 12)$, maka $cx < cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga (x, y) mendominasi (x', y') dan (cx, ty) mendominasi (cx', ty'). Artinya solusi MST_7 dengan $TC = (22, 12)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_8 dengan $TC = (19, 11)$.

h) Cek MST_9 dengan $TC = (20, 11)$. Jika $(cx, ty) = (19, 11)$ dan $(cx', ty') = (20, 11)$, maka $cx < cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x, y) mendominasi (x', y') dan (cx, ty) mendominasi (cx', ty'). Artinya solusi MST_9 dengan $TC = (20, 11)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_8 dengan $TC = (19, 11)$.

i) Cek MST_{10} dengan $TC = (22, 11)$. Jika $(cx, ty) = (19, 11)$ dan $(cx', ty') = (22, 11)$, maka $cx < cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x, y) mendominasi (x', y') dan (cx, ty) mendominasi (cx', ty'). Artinya solusi MST_{10} dengan $TC = (22, 11)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_8 dengan $TC = (19, 11)$.

j) Cek MST_{11} dengan $TC = (24, 8)$. Jika $(cx, ty) = (19, 11)$ dan $(cx', ty') = (24, 8)$, maka $cx < cx'$, $ty > ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

k) Cek MST_{12} dengan $TC = (22, 9)$. Jika $(cx, ty) = (19, 11)$ dan $(cx', ty') = (22, 9)$, maka $cx < cx'$, $ty > ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

l) Cek MST_{13} dengan $TC = (24, 10)$. Jika $(cx, ty) = (19, 11)$ dan $(cx', ty') = (24, 10)$, maka $cx < cx'$, $ty > ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

m) Cek MST_{14} dengan $TC = (24, 9)$. Jika $(cx, ty) = (19, 11)$ dan $(cx', ty') = (24, 9)$, maka $cx < cx'$, $ty > ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

n) Cek MST_{15} dengan $TC = (22, 10)$. Jika $(cx, ty) = (19, 11)$ dan $(cx', ty') = (22, 10)$, maka $cx < cx'$, $ty > ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

o) Misalkan $(x^*, y^*) = (19, 11)$. Karena tidak ada $(x, y) \in S$ sedemikian sehingga (x, y) mendominasi (x^*, y^*), maka solusi MST_8 dengan $TC = (19, 11)$ merupakan solusi efisien atau PF.

7) Untuk solusi MST_9 dengan $TC = (20, 11)$

a) Cek MST_8 dengan $TC = (19, 11)$. Jika $(cx, ty) = (20, 11)$ dan $(cx', ty') = (19, 11)$, maka $cx > cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x', y') mendominasi (x, y) dan (cx', ty') mendominasi (cx, ty). Artinya solusi MST_9 dengan $TC = (20, 11)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_8 dengan $TC = (19, 11)$.

b) Misalkan $(x, y) = (20, 11)$. Karena terdapat $(x', y') = (19, 11)$ sedemikian sehingga (x', y') mendominasi (x, y), maka solusi MST_9 dengan $TC = (20, 11)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_8 dengan $TC = (19, 11)$.

8) Untuk solusi MST_{10} dengan $TC = (22, 11)$

a) Cek MST_8 dengan $TC = (19, 11)$. Jika $(cx, ty) = (22, 11)$ dan $(cx', ty') = (19, 11)$, maka $cx > cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x', y') mendominasi (x, y) dan (cx', ty') mendominasi (cx, ty). Artinya solusi MST_{10} dengan $TC =$

$(22, 11)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_8 dengan $TC = (19, 11)$.

b) Misalkan $(x, y) = (22, 11)$. Karena terdapat $(x', y') = (19, 11)$ sedemikian sehingga (x', y') mendominasi (x, y), maka solusi MST_{10} dengan $TC = (22, 11)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_8 dengan $TC = (19, 11)$.

9) Untuk solusi MST_{11} dengan $TC = (24, 8)$

a) Cek MST_1 dengan $TC = (19, 14)$. Jika $(cx, ty) = (24, 8)$ dan $(cx', ty') = (19, 14)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

b) Cek MST_2 dengan $TC = (25, 8)$. Jika $(cx, ty) = (24, 8)$ dan $(cx', ty') = (25, 8)$, maka $cx < cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x, y) mendominasi (x', y') dan (cx, ty) mendominasi (cx', ty'). Artinya solusi MST_2 dengan $TC = (25, 8)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_{11} dengan $TC = (24, 8)$.

c) Cek MST_3 dengan $TC = (21,13)$. Jika $(cx, ty) = (24, 8)$ dan $(cx', ty') = (21, 13)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

d) Cek MST_4 dengan $TC = (22, 13)$. Jika $(cx, ty) = (24, 8)$ dan $(cx', ty') = (22, 13)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

e) Cek MST_5 dengan $TC = (24, 13)$. Jika $(cx, ty) = (24, 8)$ dan $(cx', ty') = (24, 13)$, maka $cx = cx'$ dan $ty < ty'$. Sehingga (x, y) mendominasi (x', y') dan (cx, ty) mendominasi (cx', ty'). Artinya solusi MST_5 dengan $TC =$

$(24, 13)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_{11} dengan $TC = (24, 8)$.

f) Cek MST_6 dengan $TC = (21, 13)$. Jika $(cx, ty) = (24, 8)$ dan $(cx', ty') = (21, 13)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

g) Cek MST_7 dengan $TC = (22, 12)$. Jika $(cx, ty) = (24, 8)$ dan $(cx', ty') = (22, 12)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

h) Cek MST_8 dengan $TC = (19, 11)$. Jika $(cx, ty) = (24, 8)$ dan $(cx', ty') = (19, 11)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

i) Cek MST_9 dengan $TC = (20, 11)$. Jika $(cx, ty) = (24, 8)$ dan $(cx', ty') = (20, 11)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

j) Cek MST_{10} dengan $TC = (22, 11)$. Jika $(cx, ty) = (24, 8)$ dan $(cx', ty') = (22, 11)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

k) Cek MST_{12} dengan $TC = (22, 9)$. Jika $(cx, ty) = (24, 8)$ dan $(cx', ty') = (22, 9)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

l) Cek MST_{13} dengan $TC = (24, 10)$. Jika $(cx, ty) = (24, 8)$ dan $(cx', ty') = (24, 10)$, maka $cx = cx'$ dan $ty < ty'$. Sehingga (x, y) mendominasi (x', y') dan (cx, ty) mendominasi (cx', ty'). Artinya solusi MST_{13} dengan $TC =$

$(24, 10)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_{11} dengan $TC = (24, 8)$.

m) Cek MST_{14} dengan $TC = (24, 9)$. Jika $(cx, ty) = (24, 8)$ dan $(cx', ty') = (24, 9)$, maka $cx = cx'$ dan $ty < ty'$. Sehingga (x, y) mendominasi (x', y') dan (cx, ty) mendominasi (cx', ty'). Artinya solusi MST_{14} dengan $TC = (24, 9)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_{11} dengan $TC = (24, 8)$.

n) Cek MST_{15} dengan $TC = (22, 10)$. Jika $(cx, ty) = (24, 8)$ dan $(cx', ty') = (22, 10)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

o) Misalkan $(x^*, y^*) = (24, 8)$. Karena tidak ada $(x, y) \in S$ sedemikian sehingga (x, y) mendominasi (x^*, y^*), maka solusi MST_{11} dengan $TC = (24, 8)$ merupakan solusi efisien atau PF.

10) Untuk solusi MST_{12} dengan $TC = (22, 9)$

a) Cek MST_1 dengan $TC = (19, 14)$. Jika $(cx, ty) = (22, 9)$ dan $(cx', ty') = (19, 14)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

b) Cek MST_2 dengan $TC = (25, 8)$. Jika $(cx, ty) = (22, 9)$ dan $(cx', ty') = (25, 8)$, maka $cx < cx'$, $ty > ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

c) Cek MST_3 dengan $TC = (21, 13)$. Jika $(cx, ty) = (22, 9)$ dan $(cx', ty') = (21, 13)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

d) Cek MST_4 dengan $TC = (22, 13)$. Jika $(cx, ty) = (22, 9)$ dan $(cx', ty') = (22, 13)$, maka $cx = cx'$ dan $ty < ty'$. Sehingga (x, y) mendominasi (x', y') dan (cx, ty) mendominasi (cx', ty'). Artinya solusi MST_4 dengan $TC = (22, 13)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_{12} dengan $TC = (22, 9)$.

e) Cek MST_5 dengan $TC = (24, 13)$. Jika $(cx, ty) = (22, 9)$ dan $(cx', ty') = (24, 13)$, maka $cx < cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga (x, y) mendominasi (x', y') dan (cx, ty) mendominasi (cx', ty'). Artinya solusi MST_5 dengan $TC = (24, 13)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_{12} dengan $TC = (22, 9)$.

f) Cek MST_6 dengan $TC = (21, 13)$. Jika $(cx, ty) = (22, 9)$ dan $(cx', ty') = (21, 13)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

g) Cek MST_7 dengan $TC = (22, 12)$. Jika $(cx, ty) = (22, 9)$ dan $(cx', ty') = (22, 12)$, maka $cx = cx'$ dan $ty < ty'$. Sehingga (x, y) mendominasi (x', y') dan (cx, ty) mendominasi (cx', ty'). Artinya solusi MST_7 dengan $TC = (22, 12)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_{12} dengan $TC = (22, 9)$.

h) Cek MST_8 dengan $TC = (19, 11)$. Jika $(cx, ty) = (22, 9)$ dan $(cx', ty') = (19, 11)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

i) Cek MST_9 dengan $TC = (20, 11)$. Jika $(cx, ty) = (22, 9)$ dan $(cx', ty') = (20, 11)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

j) Cek MST_{10} dengan $TC = (22, 11)$. Jika $(cx, ty) = (22, 9)$ dan $(cx', ty') = (22, 11)$, maka $cx = cx'$ dan $ty < ty'$. Sehingga (x, y) mendominasi (x', y') dan (cx, ty) mendominasi (cx', ty'). Artinya solusi MST_{10} dengan $TC = (22, 11)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_{12} dengan $TC = (22, 9)$.

k) Cek MST_{11} dengan $TC = (24, 8)$. Jika $(cx, ty) = (22, 9)$ dan $(cx', ty') = (24, 8)$, maka $cx < cx'$, $ty > ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

l) Cek MST_{13} dengan $TC = (24, 10)$. Jika $(cx, ty) = (22, 9)$ dan $(cx', ty') = (24, 10)$, maka $cx < cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga (x, y) mendominasi (x', y') dan (cx, ty) mendominasi (cx', ty'). Artinya solusi MST_{13} dengan $TC = (24, 10)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_{12} dengan $TC = (22, 9)$.

m) Cek MST_{14} dengan $TC = (24, 9)$. Jika $(cx, ty) = (22, 9)$ dan $(cx', ty') = (24, 9)$, maka $cx < cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x, y) mendominasi (x', y') dan (cx, ty) mendominasi (cx', ty'). Artinya solusi MST_{14} dengan $TC = (24, 9)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_{12} dengan $TC = (22, 9)$.

n) Cek MST_{15} dengan $TC = (22, 10)$. Jika $(cx, ty) = (22, 9)$ dan $(cx', ty') = (22, 10)$, maka $cx = cx'$ dan $ty < ty'$. Sehingga (x, y) mendominasi (x', y') dan (cx, ty) mendominasi (cx', ty'). Artinya solusi MST_{15} dengan $TC = (22, 10)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_{12} dengan $TC = (22, 9)$.

o) Misalkan $(x^*, y^*) = (22, 9)$. Karena tidak ada $(x, y) \in S$ sedemikian sehingga (x, y) mendominasi (x^*, y^*), maka solusi MST_{12} dengan $TC = (22, 9)$ merupakan solusi efisien atau PF.

11) Untuk solusi MST_{13} dengan $TC = (24, 10)$

a) Cek MST_{11} dengan $TC = (24, 8)$. Jika $(cx, ty) = (24, 10)$ dan $(cx', ty') = (24, 8)$, maka $cx = cx'$ dan $ty > ty'$. Sehingga (x', y') mendominasi (x, y) dan (cx', ty') mendominasi (cx, ty). Artinya solusi MST_{13} dengan $TC = (24, 10)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_{11} dengan $TC = (24, 8)$.

b) Misalkan $(x, y) = (24, 10)$. Karena terdapat $(x', y') = (24, 8)$ sedemikian sehingga (x', y') mendominasi (x, y), maka solusi MST_{13} dengan $TC = (24, 10)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_{11} dengan $TC = (24, 8)$.

12) Untuk solusi MST_{14} dengan $TC = (24, 9)$

a) Cek MST_{11} dengan $TC = (24, 8)$. Jika $(cx, ty) = (24, 9)$ dan $(cx', ty') = (24, 8)$, maka $cx = cx'$ dan $ty > ty'$. Sehingga (x', y') mendominasi (x, y) dan (cx', ty') mendominasi (cx, ty). Artinya solusi MST_{14} dengan $TC = (24, 9)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_{11} dengan $TC = (24, 8)$.

b) Misalkan $(x, y) = (24, 9)$. Karena terdapat $(x', y') = (24, 8)$ sedemikian sehingga (x', y') mendominasi (x, y), maka solusi MST_{14} dengan $TC = (24, 9)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_{11} dengan $TC = (24, 8)$.

13) Untuk solusi MST_{15} dengan $TC = (22, 10)$

a) Cek MST_{12} dengan $TC = (22, 9)$. Jika $(cx, ty) = (22, 10)$ dan $(cx', ty') = (22, 9)$, maka $cx = cx'$ dan $ty > ty'$. Sehingga (x', y') mendominasi (x, y) dan (cx', ty') mendominasi (cx, ty). Artinya solusi MST_{15} dengan $TC = (22, 10)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_{12} dengan $TC = (22, 9)$.

b) Misalkan $(x, y) = (22, 10)$. Karena terdapat $(x', y') = (22, 9)$ sedemikian sehingga (x', y') mendominasi (x, y), maka solusi MST_{15} dengan $TC = (22, 10)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_{12} dengan $TC = (22, 9)$.

<u>Tahap 3</u>

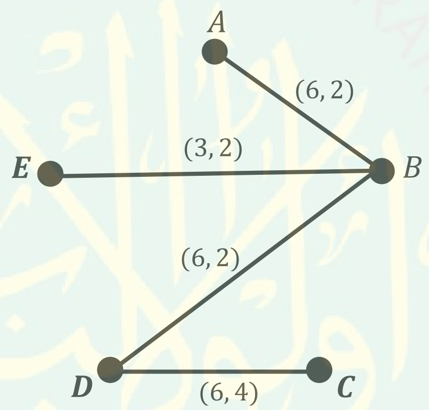
Mutasi kembali sesuai dengan tahap 2 dengan meniadakan syarat $j \neq i$ dalam kondisi ketiga. Kemudian setiap MSTs di APS digunakan untuk membuat STs baru dengan memilih setiap sisi non-karakteristik diganti dengan sisi yang bersesuaian. Kemudian seluruh MSTs yang diperoleh menjadi solusi efisien dari masalah MCMST. Adapun MSTs yang diperoleh dari tahap 1 dan tahap 2 adalah sebagai berikut:

1. MST_{8} dengan $TC = (19, 11)$
2. MST_{11} dengan $TC = (24, 8)$
3. MST_{12} dengan $TC = (21, 10)$

Untuk sementara, ketiga MST yang diperoleh merupakan solusi efisien dan masuk ke dalam APS. Selanjutnya semua MST yang termuat dalam APS dimutasi kembali. Adapun untuk MST_{8} indeks yang digunakan sesuai dengan *Edge List*[1] karena diperoleh dari mutasi MST_1. Sedangkan MST_{11} dan MST_{12} menggunakan indeks pada *Edge List*[2] karena dihasilkan oleh mutasi MST_2

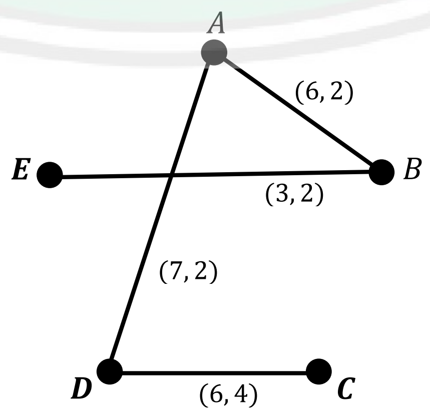
Mutasi MST_8

1) Hapus sisi (1) BE
   a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.
   b) Kembalikan sisi (1) BE.
2) Hapus sisi (2) DE
   a) Masukkan sisi (4) BD dan bangun MST_{16} dengan $TC = (21, 10)$.



Gambar 2.52 MST_{16} Melalui EPDA dengan Algoritma Prim

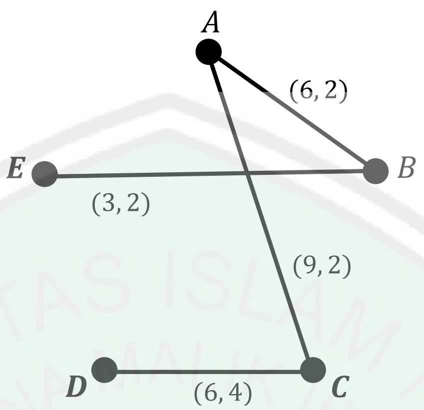
   b) MST_{16} adalah solusi efisien dengan karakteristik sisi = 4.
   c) Masukkan sisi (7) AD dan bangun MST_{17} dengan $TC = (21, 10)$.



Gambar 2.53 MST_{17} Melalui EPDA dengan Algoritma Prim

d) MST_{17} adalah solusi *dominated* karena memiliki TC sama dengan MST_{16}.

e) Masukkan sisi (9) AC dan bangun MST_{18} dengan $TC = (24, 10)$.



Gambar 2.54 MST_{18} Melalui EPDA dengan Algoritma Prim

f) MST_{18} adalah solusi *dominated* karena memiliki TC lebih besar dari MST_{16}.

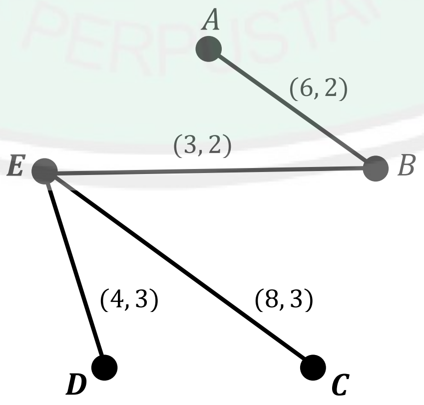
g) Tidak ditemukan lagi sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

h) Kembalikan sisi (2) DE.

3) Adapun sisi (3) tidak dihapus karena sisi AB merupakan sisi karakteristik.

4) Hapus sisi (5) CD

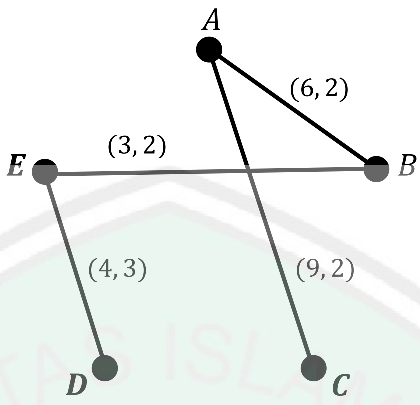
a) Masukkan sisi (8) CE dan bangun MST_{19} dengan $TC = (21, 10)$.



Gambar 2.55 MST_{19} Melalui EPDA dengan Algoritma Prim

b) MST_{19} adalah solusi *dominated* karena memiliki TC sama dengan MST_{16}.

c) Masukkan sisi (9) AC dan bangun MST_{20} dengan $TC = (22, 9)$.



Gambar 2.56 MST_{20} Melalui EPDA dengan Algoritma Prim

d) MST_{20} adalah solusi *dominated* karena memiliki TC sama dengan MST_{12}.

e) Tidak ditemukan lagi sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

f) Kembalikan sisi (5) CD.

Mutasi MST_{11}

1) Hapus sisi (1) BE

   a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

   b) Kembalikan sisi (1) BE.

2) Hapus sisi (2) AB

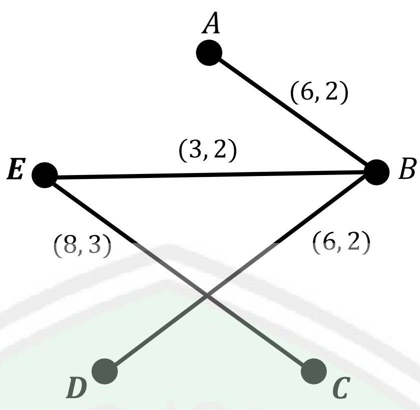
   a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

   b) Kembalikan sisi (2) AB.

3) Adapun sisi (3) tidak dihapus karena sisi BD merupakan sisi karakteristik.

4) Hapus sisi (5) AC

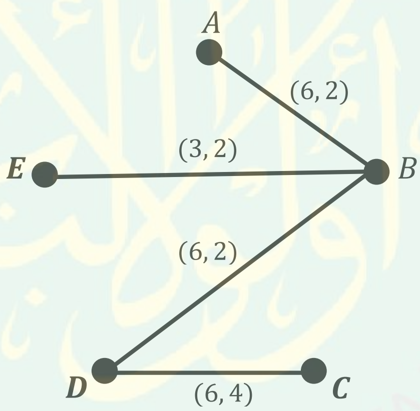
   a) Masukkan sisi (7) CE dan bangun MST_{21} dengan $TC = (23, 9)$.



Gambar 2.57 MST_{21} Melalui EPDA dengan Algoritma Prim

b) MST_{21} adalah solusi *dominated* karena memiliki TC lebih besar dari MST_{12}.

c) Masukkan sisi (8) CD dan bangun MST_{22} dengan $TC = (21, 10)$.



Gambar 2.58 MST_{22} Melalui EPDA dengan Algoritma Prim

d) MST_{22} adalah solusi *dominated* karena memiliki TC sama dengan MST_{16}.

e) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

f) Kembalikan sisi (5) AC.

Mutasi $\mathbf{MST}_{12}$

1) Hapus sisi (1) BE

a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

b) Kembalikan sisi (1) BE.

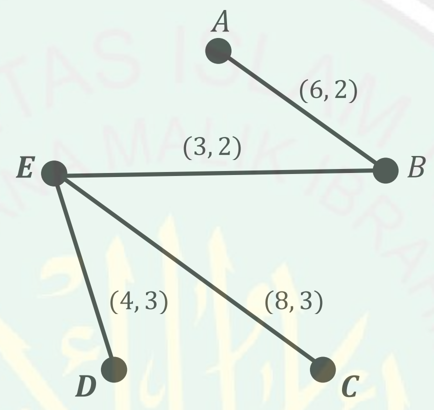
2) Hapus sisi (2) AB

a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

b) Kembalikan sisi (2) AB.

3) Hapus sisi (5) AC

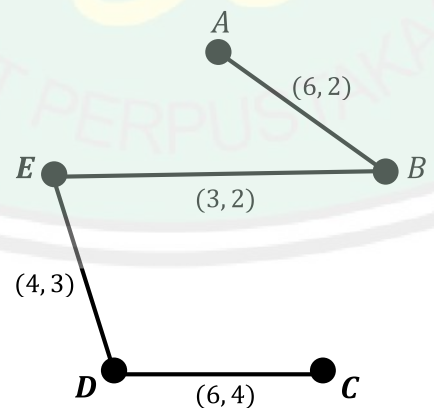
a) Masukkan sisi (7) CE dan bangun MST_{23} dengan $TC = (21, 10)$.



Gambar 2.59 MST_{23} Melalui EPDA dengan Algoritma Prim

b) MST_{23} adalah solusi *dominated* karena memiliki TC sama dengan MST_{16}.

c) Masukkan sisi (8) CD dan bangun MST_{24} dengan $TC = (19, 11)$.



Gambar 2.60 MST_{24} Melalui EPDA dengan Algoritma Prim

d) MST_{24} adalah solusi *dominated* karena memiliki TC sama dengan MST_8.

e) Tidak ditemukan lagi sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

f) Kembalikan sisi (5) AC.

4) Adapun sisi (6) tidak dihapus karena sisi DE merupakan sisi karakteristik.

Menentukan Solusi Efisien

1) Untuk solusi MST_{16} dengan $TC = (21, 10)$

a) Cek MST_8 dengan $TC = (19, 11)$. Jika $(cx, ty) = (21, 10)$ dan $(cx', ty') = (19, 11)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga tidak saling mendominasi.

b) Cek MST_{11} dengan $TC = (24, 8)$. Jika $(cx, ty) = (21, 10)$ dan $(cx', ty') = (24, 8)$, maka $cx < cx'$, $ty > ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga tidak saling mendominasi.

c) Cek MST_{12} dengan $TC = (22, 9)$. Jika $(cx, ty) = (21, 10)$ dan $(cx', ty') = (22, 9)$, maka $cx < cx'$, $ty > ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga tidak saling mendominasi.

d) Misalkan $(x^*, y^*) = (21, 10)$. Karena tidak ada $(x, y) \in S$ sedemikian sehingga (x, y) mendominasi (x^*, y^*), maka solusi MST_{16} dengan $TC = (21, 10)$ merupakan solusi efisien atau PF.

2) Untuk solusi MST_{17} dengan $TC = (22, 10)$

a) Cek MST_{16} dengan $TC = (21, 10)$. Jika $(cx, ty) = (22, 10)$ dan $(cx', ty') = (21, 10)$, maka $cx > cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x', y') mendominasi (x, y) dan (cx', ty') mendominasi (cx, ty). Artinya solusi MST_{17} dengan $TC = (22, 10)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_{16} dengan $TC = (21, 10)$.

b) Misalkan $(x, y) = (22, 10)$. Karena terdapat $(x', y') = (21, 10)$ sedemikian sehingga (x', y') mendominasi (x, y), maka solusi MST_{17} dengan $TC =$

$(22, 10)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_{16} dengan $TC = (21, 10)$.

3) Untuk solusi MST_{18} dengan $TC = (24, 10)$
   a) Cek MST_{16} dengan $TC = (21, 10)$. Jika $(cx, ty) = (24, 10)$ dan $(cx', ty') = (21, 10)$, maka $cx > cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x', y') mendominasi (x, y) dan (cx', ty') mendominasi (cx, ty). Artinya solusi MST_{18} dengan $TC = (24, 10)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_{16} dengan $TC = (21, 10)$.
   b) Misalkan $(x, y) = (24, 10)$. Karena terdapat $(x', y') = (21, 10)$ sedemikian sehingga (x', y') mendominasi (x, y), maka solusi MST_{18} dengan $TC = (24, 10)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_{16} dengan $TC = (21, 10)$.
4) Untuk solusi MST_{19} dengan $TC = (21, 10)$
   a) Cek MST_{16} dengan $TC = (21, 10)$. Jika $(cx, ty) = (21, 10)$ dan $(cx', ty') = (21, 10)$, maka $cx = cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x', y') mendominasi (x, y) dan (cx', ty') mendominasi (cx, ty). Artinya solusi MST_{19} dengan $TC = (21, 10)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_{16} dengan $TC = (21, 10)$.
   b) Misalkan $(x, y) = (21, 10)$. Karena terdapat $(x', y') = (21, 10)$ sedemikian sehingga (x', y') mendominasi (x, y), maka solusi MST_{19} dengan $TC = (21, 10)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_{16} dengan $TC = (21, 10)$.

5) Untuk solusi MST_{20} dengan $TC = (22, 9)$

a) Cek MST_{12} dengan $TC = (22, 9)$. Jika $(cx, ty) = (22, 9)$ dan $(cx', ty') = (22, 9)$, maka $cx = cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x', y') mendominasi (x, y) dan (cx', ty') mendominasi (cx, ty). Artinya solusi MST_{20} dengan $TC = (22, 9)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_{12} dengan $TC = (22, 9)$.

b) Misalkan $(x, y) = (22, 9)$. Karena terdapat $(x', y') = (22, 9)$ sedemikian sehingga (x', y') mendominasi (x, y), maka solusi MST_{20} dengan $TC = (22, 9)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_{12} dengan $TC = (22, 9)$.

6) Untuk solusi MST_{21} dengan $TC = (23, 9)$

a) Cek MST_{12} dengan $TC = (22, 9)$. Jika $(cx, ty) = (23, 9)$ dan $(cx', ty') = (22, 9)$, maka $cx > cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x', y') mendominasi (x, y) dan (cx', ty') mendominasi (cx, ty). Artinya solusi MST_{21} dengan $TC = (23, 9)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_{12} dengan $TC = (22, 9)$.

b) Misalkan $(x, y) = (23, 9)$. Karena terdapat $(x', y') = (22, 9)$ sedemikian sehingga (x', y') mendominasi (x, y), maka solusi MST_{21} dengan $TC = (23, 9)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_{12} dengan $TC = (22, 9)$.

7) Untuk solusi MST_{22} dengan $TC = (21, 10)$

a) Cek MST_{16} dengan $TC = (21, 10)$. Jika $(cx, ty) = (21, 10)$ dan $(cx', ty') = (21, 10)$, maka $cx = cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x', y') mendominasi (x, y) dan (cx', ty') mendominasi (cx, ty). Artinya solusi MST_{22} dengan $TC =$

$(21, 10)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_{16} dengan $TC = (21, 10)$.

b) Misalkan $(x, y) = (21, 10)$. Karena terdapat $(x', y') = (21, 10)$ sedemikian sehingga (x', y') mendominasi (x, y), maka solusi MST_{22} dengan $TC = (21, 10)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_{16} dengan $TC = (21, 10)$.

8) Untuk solusi MST_{23} dengan $TC = (21, 10)$

a) Cek MST_{16} dengan $TC = (21, 10)$. Jika $(cx, ty) = (21, 10)$ dan $(cx', ty') = (21, 10)$, maka $cx = cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x', y') mendominasi (x, y) dan (cx', ty') mendominasi (cx, ty). Artinya solusi MST_{23} dengan $TC = (21, 10)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_{16} dengan $TC = (21, 10)$.

b) Misalkan $(x, y) = (21, 10)$. Karena terdapat $(x', y') = (21, 10)$ sedemikian sehingga (x', y') mendominasi (x, y), maka solusi MST_{23} dengan $TC = (21, 10)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_{16} dengan $TC = (21, 10)$.

9) Untuk solusi MST_{24} dengan $TC = (19, 11)$

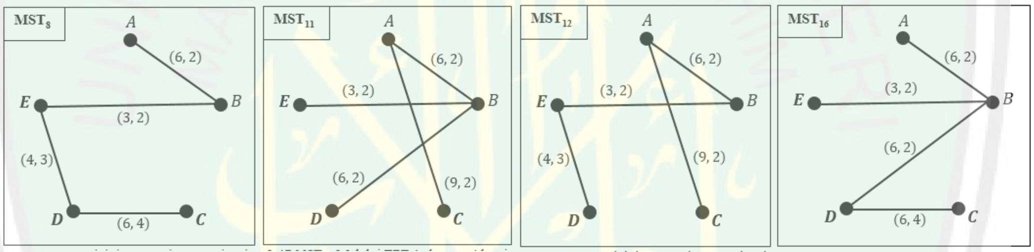
a) Cek MST_{8} dengan $TC = (19, 11)$. Jika $(cx, ty) = (19, 11)$ dan $(cx', ty') = (19, 11)$, maka $cx = cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x', y') mendominasi (x, y) dan (cx', ty') mendominasi (cx, ty). Artinya solusi MST_{24} dengan $TC = (19, 11)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_{8} dengan $TC = (19, 11)$.

b) Misalkan $(x, y) = (19, 11)$. Karena terdapat $(x', y') = (19, 11)$ sedemikian sehingga (x', y') mendominasi (x, y), maka solusi MST_{24} dengan $TC =$

$(19, 11)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_8 dengan $TC = (19, 11)$.

Setelah dilakukan mutasi kembali dan semua kemungkinan solusi telah dicek, maka MST yang menjadi solusi efisien atau PF untuk masalah MCMST dari graf pada Gambar 2.20 adalah sebagai berikut:

1. MST_8 dengan $TC = (19, 11)$
2. MST_{11} dengan $TC = (24, 8)$
3. MST_{12} dengan $TC = (22, 9)$
4. MST_{16} dengan $TC = (21, 10)$



Gambar 2.61 Solusi Efisien Menurut EPDA dengan Algortima Prim

Setelah diperoleh empat solusi efisien atau PF, maka selanjutnya semua solusi tersebut akan dicek apakah termasuk ke dalam solusi efisien yang *supported* atau *non-supported*.

Menentukan Solusi Efisien yang *Supported* dan *Non-Supported*

1) Misalkan $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = 1$

   a) MST_8 dengan $TC = (\lambda_1 \times 19 + \lambda_2 \times 11) = (1 \times 19 + 1 \times 11) = 30$

   b) MST_{11} dengan $TC = (\lambda_1 \times 24 + \lambda_2 \times 8) = (1 \times 24 + 1 \times 8) = 32$

   c) MST_{12} dengan $TC = (\lambda_1 \times 22 + \lambda_2 \times 9) = (1 \times 22 + 1 \times 9) = 31$

   d) MST_{16} dengan $TC = (\lambda_1 \times 21 + \lambda_2 \times 10) = (1 \times 21 + 1 \times 10) = 31$

e) Bobot minimum dari keempat solusi tersebut adalah solusi MST_8 dengan jumlah bobot sebesar 30.

2) Misalkan $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = 1{,}75$

a) MST_8 dengan $TC = (\lambda_1 \times 19 + \lambda_2 \times 11) = (1 \times 19 + 1{,}75 \times 11) = 38{,}25$

b) MST_{11} dengan $TC = (\lambda_1 \times 24 + \lambda_2 \times 8) = (1 \times 24 + 1{,}75 \times 8) = 38{,}00$

c) MST_{12} dengan $TC = (\lambda_1 \times 22 + \lambda_2 \times 9) = (1 \times 22 + 1{,}75 \times 9) = 37{,}75$

d) MST_{16} dengan $TC = (\lambda_1 \times 21 + \lambda_2 \times 10) = (1 \times 21 + 1{,}75 \times 10) = 38{,}5$

e) Bobot minimum dari keempat solusi tersebut adalah solusi MST_{12} dengan jumlah bobot sebesar 37,75.

3) Misalkan $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = 10$

a) MST_8 dengan $TC = (\lambda_1 \times 19 + \lambda_2 \times 11) = (1 \times 19 + 10 \times 11) = 129$

b) MST_{11} dengan $TC = (\lambda_1 \times 24 + \lambda_2 \times 8) = (1 \times 24 + 10 \times 8) = 104$

c) MST_{12} dengan $TC = (\lambda_1 \times 22 + \lambda_2 \times 9) = (1 \times 22 + 10 \times 9) = 112$

d) MST_{16} dengan $TC = (\lambda_1 \times 21 + \lambda_2 \times 10) = (1 \times 21 + 10 \times 10) = 121$

e) Bobot minimum dari keempat solusi tersebut adalah solusi MST_{11} dengan jumlah bobot sebesar 104.

Berdasarkan verifikasi yang telah dilakukan, maka diperoleh solusi MST_8, MST_{11}, dan MST_{12} adalah solusi efisien yang *supported*. Sedangkan MST_{16} merupakan solusi efisien yang *non-supported*.

2.7 Kajian Islam tentang MST dan MCMST

Secara garis besar kajian ilmu dalam Islam dibagi menjadi dua bagian, yakni masalah *ushuliyah* dan masalah *furu'iyah*. Kedua masalah tersebut, baik masalah *ushuliyah* dan masalah *furu'iyah* memiliki karakteristik yang sama sesuai dengan karakteristik yang dimiliki MST dan MCMST. Adapun pembahasan secara rinci akan dipaparkan pada bab selanjutnya.

2.7.1 Masalah *Ushuliyah*

Pembahasan tentang masalah yang bersifat *ushuliyah* atau pokok memiliki sifat yang mendasar dan pasti. Artinya kebenaran yang dimiliki bernilai tunggal. Sebagai contoh adalah Ilmu Akidah. Perintah Allah Swt pada surat al-Anam ayat 153 sebagai berikut:

وَأَنَّ هَٰذَا صِرَٰطِي مُسْتَقِيْمًا فَٱتَّبِعُوهُۖ وَلَا تَتَّبِعُواْ ٱلسُّبُلَ فَتَفَرَّقَ بِكُمْ عَنْ سَبِيلِهِۦۚ ذَٰلِكُمْ وَصَّىٰكُمْ بِهِۦ لَعَلَّكُمْ تَتَّقُونَ ﴿١٥٣﴾

"Dan bahwa (yang Kami perintahkan ini) adalah jalan-Ku yang lurus, maka ikutilah dia, dan janganlah kamu mengikuti jalan-jalan (yang lain), karena jalan-jalan itu mencerai beraikan kamu dari jalan-Nya. Yang demikian itu diperintahkan Allah agar kamu bertakwa" (QS. al-An'am/06:153).

Kemudian Rasulullah Saw menambahkan melalui hadits yang diriwayatkan dari Abu Amir al-Hauzaniy Abdillah Ibn Luhai, dari Muawiyah Ibn Abi Sufyan bahwasanya ia (Muawiyah) pernah berdiri dihadapan kami, lalu ia berkata: "Ketahuilah, sesungguhnya Rasulullah Saw pernah berdiri di hadapan kami, kemudian beliau bersabda:

أَلَاَ إِنَّ مَنْ قَبْلَكُمْ مِنْ أَهْلِ الْكِتَابِ اِفْتَرَقُوْا عَلَى ثِنْتَيْنِ وَسَبْعِيْنَ مِلَّةً وَإِنَّ هَذِهِ الْمِلَّةَ سَتَفْتَرِقُ عَلَى ثَلَاثٍ وَسَبْعِيْنَ. ثِنْتَانِ وَسَبْعُوْنَ فِي النَّارِ وَوَاحِدَةٌ فِي الْجَنَّةِ وَهِيَ الْجَمَاعَةُ.

"Ketahuilah sesungguhnya orang-orang sebelum kamu dari Ahli Kitab (Yahudi dan Nasrani) terpecah menjadi 72 golongan dan sesungguhnya umat ini akan berpecah belah menjadi 73 golongan, (adapun) yang tujuh puluh dua akan masuk Neraka dan yang satu golongan akan masuk Surga, yaitu al-Jamaah" (HR. Abu Dawud, no. 4597).

2.7.2 Masalah *Furu'iyah*

Berikutnya adalah masalah *furu'iyah* atau cabang. Cakupan pembahasan dalam masalah *furu'iyah* ini adalah semua hal di luar masalah *ushuliyah*, seperti bagaimana cara beribadah, bermuamalah, dan lain-lain yang terangkum dalam Ilmu Fikih. Seorang muslim yang berakidah *Ahlus Sunnah Wal Jama'ah* diwajibkan untuk bermadzhab, dengan landasan firman Allah Swt dalam al-Quran surat al-Anbiya ayat 7 berikut:

...فَسئلُوٓاْ أَهْلَ ٱلذِّكْرِ إِنْ كُنْتُمْ لَا تَعْلَمُوْنَ ۝٧

"...maka tanyakanlah olehmu kepada orang-orang yang berilmu, jika kamu tiada mengetahui" (QS. al-Anbiya/21:07).

Nabi Muhammad Saw juga menegaskan dalam hadits yang diriwayatkan oleh Imran Ibn Hushain, bahwa dia mendengar Rasulullah Saw bersabda:

خَيْرَ أُمَّتِيْ قَرْنِيْ ثُمَّ الَّذِيْنَ يَلُوْنَهُمْ ثُمَّ الَّذِيْنَ يَلُوْنَهُمْ

"Sebaik-baik umatku adalah pada masaku. Kemudian orang-orang yang setelah mereka (generasi berikutnya), lalu orang-orang yang setelah mereka" (HR. Bukhari, no. 3650).

BAB III
METODE PENELITIAN

3.1 Pendekatan Penelitian

Pendekatan penelitian yang digunakan pada penelitian ini adalah pendekatan kuantitatif atau penelitian aplikatif. Penelitian aplikatif merupakan penelitian yang bertujuan untuk menerapkan teori-teori ilmiah ke dalam suatu permasalah. Pada penelitian ini teori yang diuji adalah EPDA yang dibangun melalui Algoritma Kruskal dan Algoritma Prim pada masalah MCMST dengan dua kriteria yakni optimasi berdasarkan jarak dan waktu.

3.2 Jenis dan Sumber Data

Jenis data pada penelitian ini adalah data sekunder. Data sekunder adalah data yang diperoleh dari buku, jurnal, hasil penelitian, atau sarana lainnya yang dapat digunakan untuk mengakses data yang dibutuhkan. Data yang digunakan adalah data beberapa ruas jalan di sekitar kampus UIN Maulana Malik Ibrahim Malang yang diakses secara *online* melalui aplikasi Waze pada tanggal 26 November 2017 pukul 11.30 WIB sampai dengan 13.00 WIB.

Aplikasi Waze merupakan aplikasi yang serupa dengan Google Maps, namun memiliki kelebihan bahwa ia dapat menampilkan kecepatan rata-rata yang dapat ditempuh pada setiap titik akibat adanya kepadatan lalu lintas yang terjadi pada saat itu. Sehingga tidak heran jika data yang diperoleh antara jarak tempuh dan waktu yang dibutuhkan tidak berbanding lurus.

3.3 Metode Pengumpulan Data

Data beberapa ruas jalan di sekitar kampus UIN Maulana Malik Ibrahim Malang yang diakses melalui aplikasi Waze diperoleh dengan cara menarik suatu garis dari satu titik ke titik lainnya. Kemudian secara otomatis aplikasi tersebut akan memunculkan panjang dari lintasan yang dibuat (dalam satuan meter) beserta waktu tempuh yang dibutuhkan (dalam satuan menit) berdasarkan kepadatan lalu lintas yang terjadi pada saat itu.

3.4 Analisis Data

Adapun langkah-langkah yang digunakan untuk mengetahui perbedaan konstruksi EPDA melalui Algoritma Kruskal dan Algoritma Prim pada masalah MCMST adalah sebagai berikut:

1. Menerapkan Algoritma Kruskal dan Algoritma Prim untuk membangun MST sementara pada tahap pertama.
2. Melakukan uji coba EPDA yang dibangun dari Algoritma Kruskal dan Algoritma Prim.
3. Membandingkan hasil penerapan antara EPDA dengan Algoritma Kruskal dan EPDA dengan Algoritma Prim.
4. Menganalisis prosedur penerapan EPDA dengan Algoritma Kruskal dan EPDA dengan Algoritma Prim.
5. Menyelesaikan masalah optimasi jarak dan waktu yang terjadi dalam dunia nyata melalui EPDA yang dibangun dari Algoritma Kruskal dan Algoritma Prim.

6. Membandingkan hasil penerapan EPDA dengan Algroitma Kruskal dan EPDA dengan Algoritma Prim pada masalah optimasi jarak dan waktu.
7. Memberikan kesimpulan atas perbandingan hasil penerapan EPDA dengan Algoritma Kruskal dan EPDA dengan Algoritma Prim.

BAB IV
PEMBAHASAN

4.1 Penggunaan Algoritma Kruskal dan Algoritma Prim pada EPDA

Sebagaimana yang temuat dalam subbab 2.4 bahwa dalam Algoritma Kruskal terdapat aturan yakni sisi yang dipilih adalah sisi dengan bobot sekecil mungkin terhadap bobot dari sisi yang telah dipilih sebelumnya. Jika aturan tersebut diterapkan pada EPDA, maka sisi yang dipilih harus mengacu pada *Edge List*. Karena jika hanya memperhatikan satu kriteria dalam pemilihan sisinya maka akan dimungkinkan MST yang diperoleh pada tahap pertama menjadi solusi *dominated*. Artinya ia akan tergantikan dengan MST yang lain pada tahap berikutnya.

Misalkan MST_1 dengan $TC = (19, 14)$ yang diperoleh tanpa memperhatikan *Edge List*. Maka jika MST_1 dimutasi sehingga ditemukan TC yang lebih kecil yakni $TC = (19, 11)$, maka MST_1 menjadi solusi *dominated*. Akibatnya jika MST yang diperoleh pada tahap pertama bukan solusi efisien maka akan ditemukan banyaknya kemungkinan solusi yang semakin banyak sebagaimana yang terjadi pada EPDA dengan Algoritma Prim. Hal tersebut dikarenakan dalam pemilihan sisinya tidak mengacu pada *Edge List*. Namun hanya memperhatikan satu kriteria yang diselesaikan.

Membahas lebih lanjut tentang Algoritma Prim, dalam pemilihan sisi yang dilakukan oleh Algoritma Prim disyaratkan bahwa sisi yang dipilih adalah sisi dengan bobot terkecil dari kemungkinan sisi yang dapat menghubungkan pada titik yang baru. Pada dasarnya, pemilihan ini hanya memperhatikan satu kriteria saja, karena algoritma tersebut bekerja untuk masalah optimasi MST. Namun jika syarat ini diberlakukan dalam penggunaan EPDA, maka akan ditemukan banyaknya kemungkinan solusi yang diberikan menjadi lebih banyak. Kemungkinan solusi yang dimaksud adalah banyaknya MST yang diperoleh. Jika mengacu pada subbab 2.6.1 dan subbab 2.6.2, banyaknya MST yang dihasilkan oleh Algoritma Prim lebih banyak dari pada Algoritma Kruskal yakni 21 MST berbanding 11 MST. Hal ini dikarenakan pada pemilihan sisi yang dilakukan oleh Algoritma Kruskal tidak hanya memperhatikan satu kriteria yang dikerjakan saja, namun juga memperhatikan sisi yang termuat dalam *Edge List*. Oleh karena itu, baik untuk Algoritma Kruskal dan Algoritma Prim jika ingin mendapatkan banyaknya kemungkinan solusi yang lebih sedikit maka harus memperhatikan tabel *Edge List* dalam pemilihan setiap sisinya.

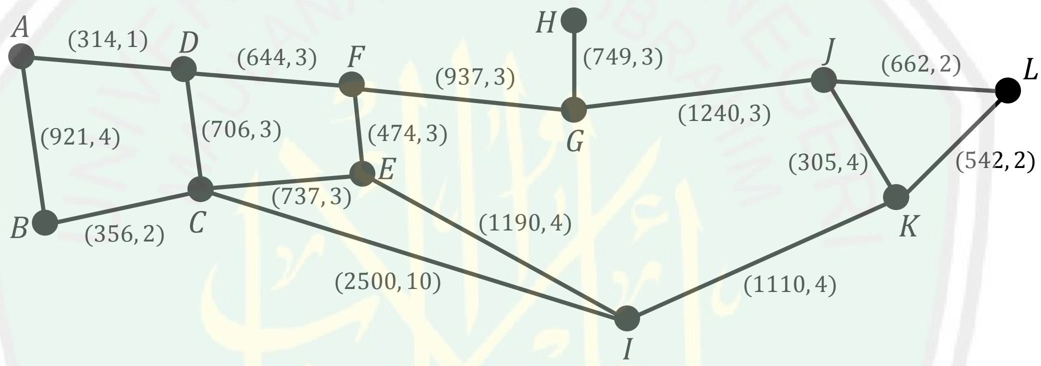
4.2 Penerapan EPDA pada Masalah Optimasi Jarak dan Waktu

Di dalam subbab ini, EPDA akan diimplementasikan pada masalah optimasi jarak dan waktu. Adapun data yang digunakan adalah data beberapa ruas jalan di sekitar kampus UIN Maulana Malik Ibrahim Malang. Kemudian data tersebut disederhanakan ke dalam bentuk graf.

Tabel 4.1 Beberapa Jalan di Sekitar UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Sisi	Nama Jalan	Jarak (m)	Waktu (menit)
AB	Jl. Tlogo Indah	921	4
BC	Jl. Joyo Utomo	356	2
CD	Jl. Mertojoyo	706	3
AD	Jl. MT. Hariono 1	314	1
CE	Jl. Joyo Tambaksari	737	3
CI	Jl. Sunan Kalijaga – Jl. Bend. Sigura-gura	2500	10
EI	Jl. Sumbersari	1190	4
DF	Jl. MT. Hariono 2	644	3

EF	Jl. Gajayana	474	3
FG	Jl. MT. Hariono 3	937	3
GH	Jl. Soekarno Hatta	749	3
GJ	Jl. DI. Panjaitan 1	1240	3
JK	Jl. Bogor	305	4
JL	Jl. DI. Panjaitan 2	662	2
LK	Jl. Bandung	542	2
IK	Jl. Veteran	1110	4
Jumlah		13387	54



Gambar 4.1 Beberapa Jalan di Sekitar UIN Maulana Malik Ibrahim Malang dalam Bentuk Graf

Graf pada Gambar 4.1 merupakan representasi dari masalah MCMST dengan memuat dua kriteria. Adapun kriteria pertama ditinjau dari panjang lintasannya. Sedangkan kriteria kedua ditinjau dari waktu yang harus ditempuh. Adapun bobot keseluruhan dari graf tersebut adalah $TC = (13387, 54)$. Kemudian graf tersebut akan diselesaikan menggunakan EPDA dengan Algoritma Kruskal dan EPDA dengan Algoritma Prim. Lalu hasil yang diperoleh dibandingkan pada subbab selanjutnya.

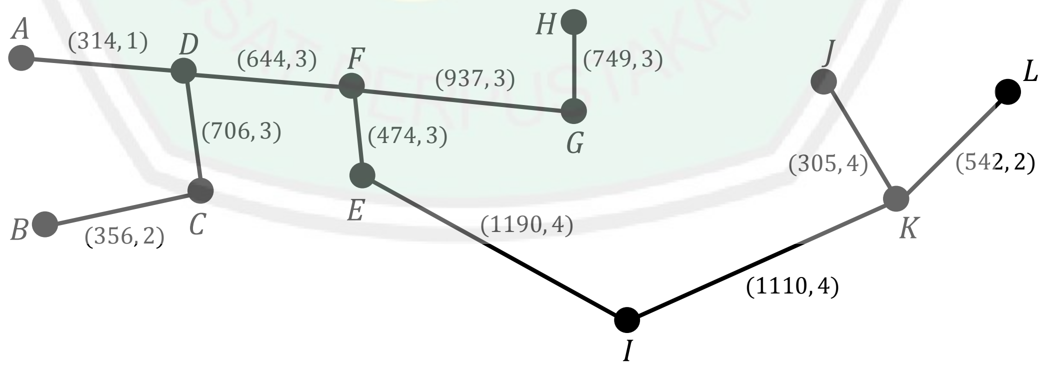
4.2.1 EPDA dengan Algoritma Kruskal

Pada bagian ini, graf pada Gambar 4.1 akan diselesaikan menggunakan EPDA yang dibangun dari Algoritma Kruskal. Adapun langkah-langkah penyelesaian yang dilakukan adalah sebagai berikut:

Tahap 1

Langkah awal yang harus dilakukan adalah mendaftar semua sisi pada graf dan dimasukkan ke dalam tabel *Edge List*$[i]$. Tabel *Edge List*$[1]$ berisi daftar sisi dengan bobot yang diurutkan berdasarkan kriteria pertama atau C_1. Sedangkan Tabel *Edge List*$[2]$ berisi daftar sisi dengan bobot yang diurutkan berdasarkan kriteria kedua atau C_2.

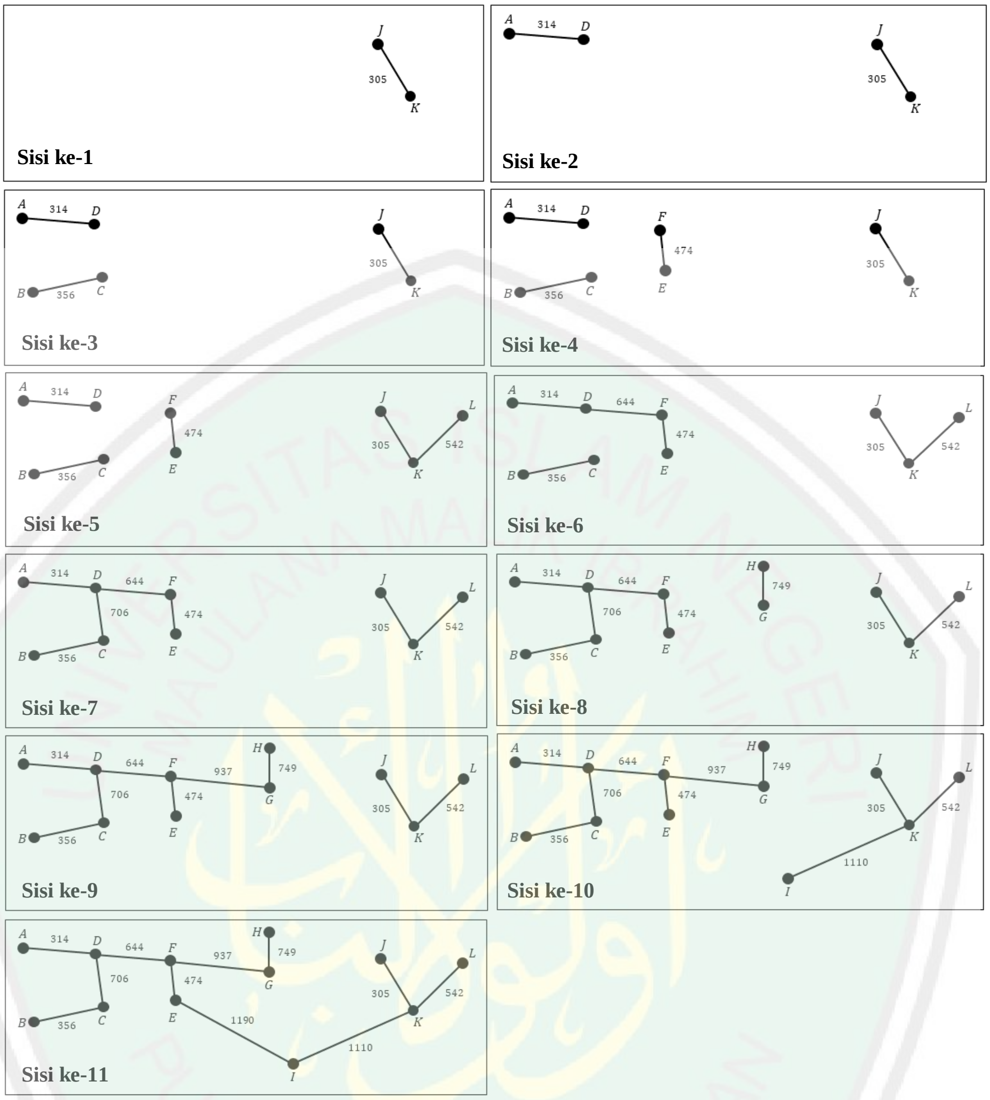
Selanjutnya menentukan MSTs atau MST sementara melalui Algoritma Kruskal dengan memperhatikan satu kriteria secara bergantian. Dengan menggunakan *Boolean flag*, untuk sisi yang dipilih bernilai 1 dan yang tidak dipilih bernilai 0. Kemudian nilai tersebut dimasukkan ke dalam tabel *Edge List*$[i]$. Berikut ini dua MST yang diperoleh dari graf pada Gambar 4.1, yakni MST_1 dan MST_2.



Gambar 4.2 MST_1 Berdasarkan Algoritma Kruskal

MST_1 diperoleh melalui Algoritma Kruskal dengan memperhatikan kriteria C_1. *Total Costs* yang dimiliki adalah $TC = (7327, 32)$. Adapun proses secara rinci untuk mendapatkan graf pada Gambar 4.2 adalah sebagai berikut. Sebagai langkah awal, sisi pertama yang dipilih adalah sisi JK dengan bobot sebesar 305. Kemudian sisi kedua yang dipilih dengan bobot sekecil mungkin adalah sisi AD dengan bobot sebesar 314. Selanjutnya untuk sisi ketiga dan seterusnya sisi yang dipilih haruslah sisi yang tidak mengakibatkan adanya *cycle* dan sisi tersebut memiliki selisih bobot sekecil mungkin dengan sisi yang dipilih sebelumnya. Maka sisi ketiga yang dipilih adalah sisi BC dengan bobot sebesar 356.

Kemudian sisi keempat yang dipilih adalah sisi EF dengan bobot sebesar 474. Sisi kelima yang dipilih adalah sisi LK dengan bobot sebesar 542. Sisi keenam yang dipilih adalah sisi DF dengan bobot sebesar 644. Adapun untuk sisi JL tidak dipilih karena jika ia dipasang maka akan mengakibatkan adanya *cycle*. Sehingga sisi ketujuh yang dipilih adalah sisi CD dengan bobot sebesar 706. Adapun untuk sisi CE tidak dipilih karena jika ia dipasang maka akan mengakibatkan adanya *cycle*. Sisi kedelapan yang dipilih adalah sisi GH dengan bobot sebesar 749. Adapun untuk sisi AB tidak dipilih karena jika ia dipasang maka akan mengakibatkan adanya *cycle*. Sisi kesembilan yang dipilih adalah sisi FG dengan bobot sebesar 937. Sisi kesepuluh yang dipilih adalah sisi IK dengan bobot sebesar 1110. Sisi kesebelas yang dipilih adalah sisi EI dengan bobot sebesar 1190. Karena semua titik sudah terhubung dan jika dilanjutkan akan mengakibatkan adanya *cycle*, maka Algoritma Kruskal menghentikan proses penyelesaiannya. Adapun bobot keseluruhan dari MST yang diperoleh untuk kriteria C_1 adalah 7327 dan untuk kriteria C_2 adalah 32. Sehingga untuk sementara dapat disimpulkan bahwa MST_1 memimiliki bobot terkecil berdasarkan kriteria C_1. Gambar berikut merupakan ilustrasi langkah-langkah penyelesaian yang dilakukan.



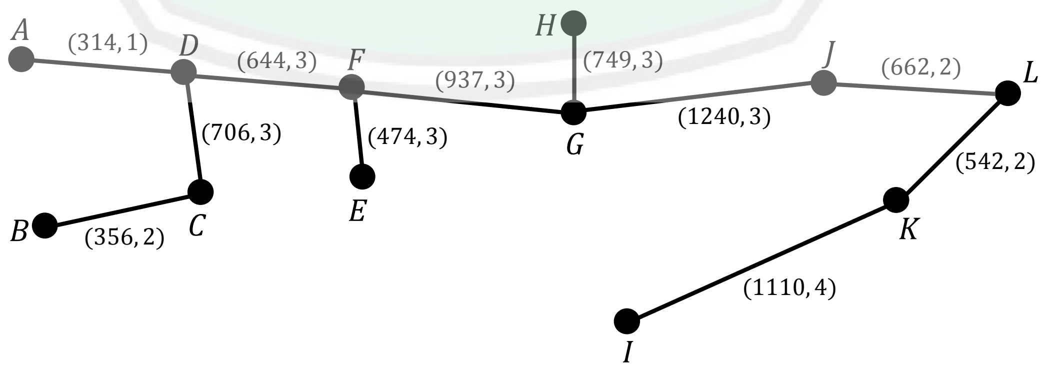
Gambar 4.3 Langkah-langkah Algoritma Kruskal untuk MST_1

Langkah selanjutnya, setelah diperoleh MST_1 melalui Algoritma Kruskal, maka sisi yang termuat di dalamnya diberi nilai 1. Sisi tersebut adalah JK, AD, BC, EF, LK, DF, CD, GH, FG, IK, dan EI. Adapun untuk sisi yang lain, yakni sisi JL, CE, AB, GJ, dan CI diberi nilai 0. Karena sisi-sisi tersebut tidak termuat dalam MST_1. Kemudian semua sisi tersebut dimasukkan ke dalam tabel *Edge List*[1]. Adapun tabel tersebut diurutkan berdasarkan kriteria C_1

Tabel 4.2 *Edge List*[1] dari EPDA dengan Algoritma Kruskal.

Indeks	Sisi	C_1	C_2	$In\ Tree$
1	JK	305	4	1
2	AD	314	1	1
3	BC	356	2	1
4	EF	474	3	1
5	LK	542	2	1
6	DF	644	3	1
7	JL	662	2	0
8	CD	706	3	1
9	CE	737	3	0
10	GH	749	3	1
11	AB	921	4	0
12	FG	937	3	1
13	IK	1110	4	1
14	EI	1190	4	1
15	GJ	1240	3	0
16	CI	2500	10	0

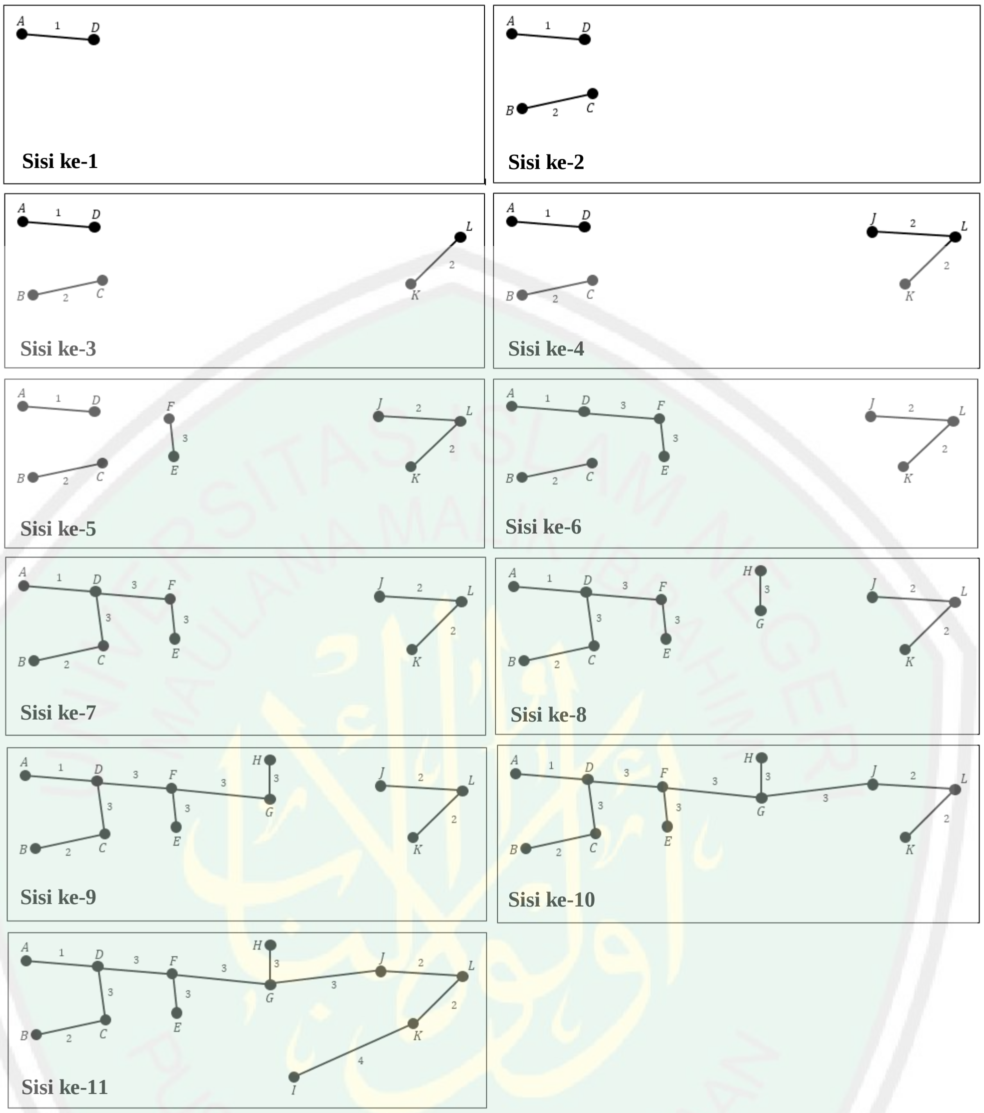
Setelah mendapatkan MST_1 dan *Edge List*[1] melalui Algoritma Kruskal, maka Algoritma Kruskal diterapkan kembali untuk mendapatkan MST baru dengan memperhatikan kriteria yang kedua, yakni C_2.



Gambar 4.4 MST_2 Berdasarkan Algoritma Kruskal

MST_2 diperoleh melalui Algoritma Kruskal dengan memperhatikan kriteria C_2. *Total Costs* yang dimiliki adalah $TC = (7734, 29)$. Adapun proses secara rinci untuk mendapatkan graf pada Gambar 4.4 adalah sebagai berikut. Sebagai langkah awal, sisi pertama yang dipilih adalah sisi AD dengan bobot sebesar 1. Kemudian sisi kedua yang dipilih dengan bobot sekecil mungkin adalah sisi BC dengan bobot sebesar 2. Selanjutnya untuk sisi ketiga dan seterusnya sisi yang dipilih haruslah sisi yang tidak mengakibatkan adanya *cycle* dan sisi tersebut memiliki selisih bobot sekecil mungkin dengan sisi yang dipilih sebelumnya. Maka sisi ketiga yang dipilih adalah sisi LK dengan bobot sebesar 2.

Kemudian sisi keempat yang dipilih adalah sisi JL dengan bobot sebesar 2. Sisi kelima yang dipilih adalah sisi EF dengan bobot sebesar 3. Sisi keenam yang dipilih adalah sisi DF dengan bobot sebesar 3. Sisi ketujuh yang dipilih adalah sisi CD dengan bobot sebesar 3. Adapun untuk sisi CE tidak dipilih karena jika ia dipasang maka akan mengakibatkan adanya *cycle*. Sehingga sisi kedelapan yang dipilih adalah sisi GH dengan bobot sebesar 3. Sisi kesembilan yang dipilih adalah sisi FG dengan bobot sebesar 3. Sisi kesepuluh yang dipilih adalah sisi GJ dengan bobot sebesar 3. Adapun untuk sisi JK dan AB tidak dipilih karena jika ia dipasang maka akan mengakibatkan adanya *cycle*. Sisi kesebelas yang dipilih adalah sisi IK dengan bobot sebesar 4. Karena semua titik sudah terhubung dan jika dilanjutkan akan mengakibatkan adanya *cycle*, maka Algoritma Kruskal menghentikan proses penyelesaiannya. Adapun bobot keseluruhan dari MST yang diperoleh untuk kriteria C_1 adalah 7734 dan untuk kriteria C_2 adalah 29. Sehingga untuk sementara dapat disimpulkan bahwa MST_2 mememiliki bobot terkecil berdasarkan kriteria C_2. Gambar berikut merupakan ilustrasi langkah-langkah penyelesaian yang dilakukan.



Gambar 4.5 Langkah-langkah Algoritma Kruskal untuk MST_2

Langkah selanjutnya, setelah diperoleh MST_2 melalui Algoritma Kruskal, maka sisi yang termuat di dalamnya diberi nilai 1. Sisi tersebut adalah AD, BC, LK, JL, EF, DF, CD, GH, FG, GJ, dan IK. Adapun untuk sisi yang lain, yakni sisi CE, JK, AB, EI, dan CI diberi nilai 0. Karena sisi-sisi tersebut tidak termuat dalam MST_2. Kemudian semua sisi tersebut dimasukkan ke dalam tabel *Edge List*[2]. Adapun tabel tersebut diurutkan berdasarkan kriteria C_2.

Tabel 4.3 *Edge List*[2] dari EPDA dengan Algoritma Kruskal

Indeks	**Sisi**	C_1	C_2	$In\ Tree$
1	AD	314	1	1
2	BC	356	2	1
3	LK	542	2	1
4	JL	662	2	1
5	EF	474	3	1
6	DF	644	3	1
7	CD	706	3	1
8	CE	737	3	0
9	GH	749	3	1
10	FG	937	3	1
11	GJ	1240	3	1
12	JK	305	4	0
13	AB	921	4	0
14	IK	1110	4	1
15	EI	1190	4	0
16	CI	2500	10	0

Menentukan Solusi Efisien

1) Untuk solusi MST_1 dengan $TC = (7327, 32)$

   a) Cek MST_2 dengan $TC = (7734, 29)$. Jika $(cx, ty) = (7327, 32)$ dan $(cx', ty') = (7734, 29)$, maka $cx < cx'$, $ty > ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

   b) Misalkan $(x^*, y^*) = (7327, 32)$. Karena tidak ada $(x, y) \in S$ sedemikian sehingga (x, y) mendominasi (x^*, y^*), maka solusi MST_1 dengan $TC = (7327, 32)$ untuk merupakan solusi efisien atau PF.

2) Untuk solusi MST_2 dengan $TC = (7734, 29)$

   a) Cek MST_1 dengan $TC = (7327, 32)$. Jika $(cx, ty) = (7734, 29)$ dan $(cx', ty') = (7327, 32)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

   b) Misalkan $(x^*, y^*) = (7734, 29)$. Karena tidak ada $(x, y) \in S$ sedemikian sehingga (x, y) mendominasi (x^*, y^*), maka solusi MST_2 dengan $TC = (7734, 29)$ untuk merupakan solusi efisien atau PF.

Tahap 2

Menentukan solusi efisien dari MST_1 dan MST_2 dengan cara memutasikan setiap sisinya satu per satu. Misal sisi $(u, v) \in \text{MST}_i$, untuk membentuk STs baru maka sisi yang akan menggantikan (u, v) yakni (r, s) harus memenuhi tiga kondisi berikut:

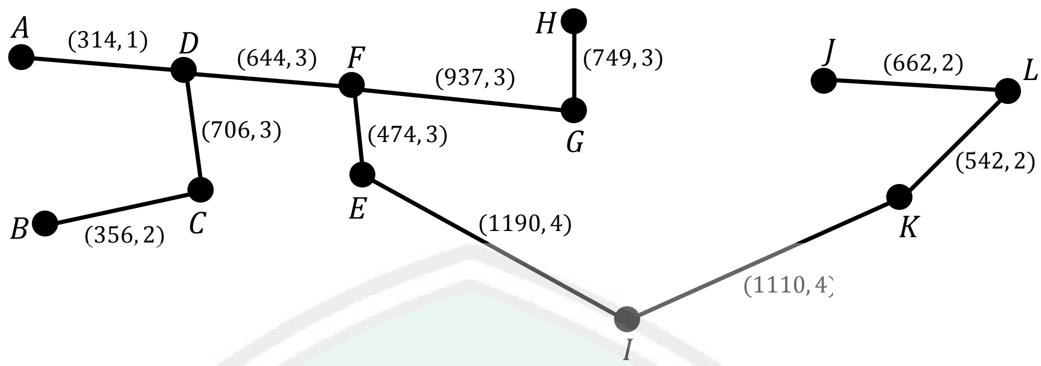
1. $(r, s) \neq In\,Tree$.
2. Menambahkan (r, s) tidak mengakibatkan adanya *cycle*.
3. $C_j(r, s) < C_j(u, v)$ untuk setidaknya satu j, dengan $j = 1, \dots, p$ dan $j \neq i$.

Jika (r, s) memenuhi kondisi di atas, maka (r, s) ditandai sebagai sisi karakteristik dengan mengatur *flag* karakteristiknya sama dengan indeks dari sisi (u, v).

Mutasi MST_1

1) Hapus sisi (1) JK

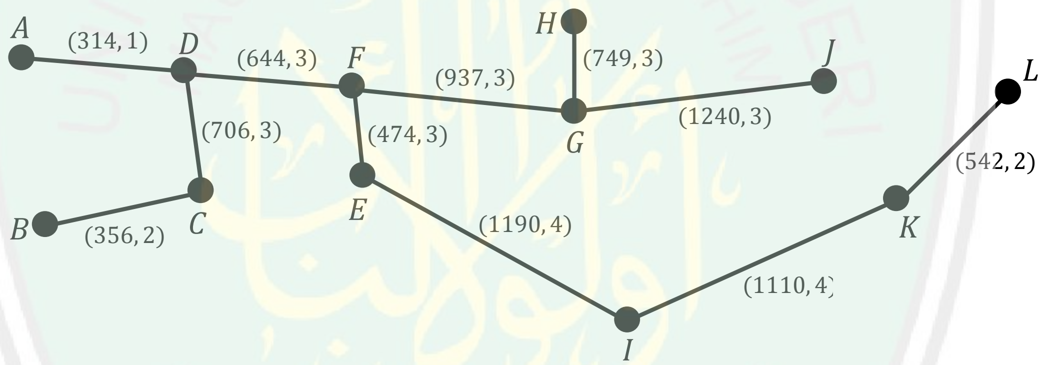
   a) Masukkan sisi (7) JL dan bangun MST_3 dengan $TC = (7684, 30)$.



Gambar 4.6 MST_3 Melalui EPDA dengan Algoritma Kruskal

b) MST_3 adalah solusi efisien dengan karakteristik sisi = 1.

c) Masukkan sisi (15) GJ dan bangun MST_4 dengan $TC = (8262, 31)$.



Gambar 4.7 MST_4 Melalui EPDA dengan Algoritma Kruskal

d) MST_4 adalah solusi *dominated* karena memiliki TC lebih besar dari MST_6.

e) Tidak ditemukan lagi sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

f) Kembalikan sisi (1) JK.

2) Hapus sisi (2) AD

a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

b) Kembalikan sisi (2) AD.

3) Hapus sisi (3) BC

a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

b) Kembalikan sisi (3) BC.

4) Hapus sisi (4) EF

a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

b) Kembalikan sisi (4) EF.

5) Hapus sisi (5) LK

a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

b) Kembalikan sisi (5) LK.

6) Hapus sisi (6) DF

a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

b) Kembalikan sisi (6) DF.

7) Hapus sisi (8) CD

a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

b) Kembalikan sisi (8) CD.

8) Hapus sisi (10) GH

a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

b) Kembalikan sisi (10) GH.

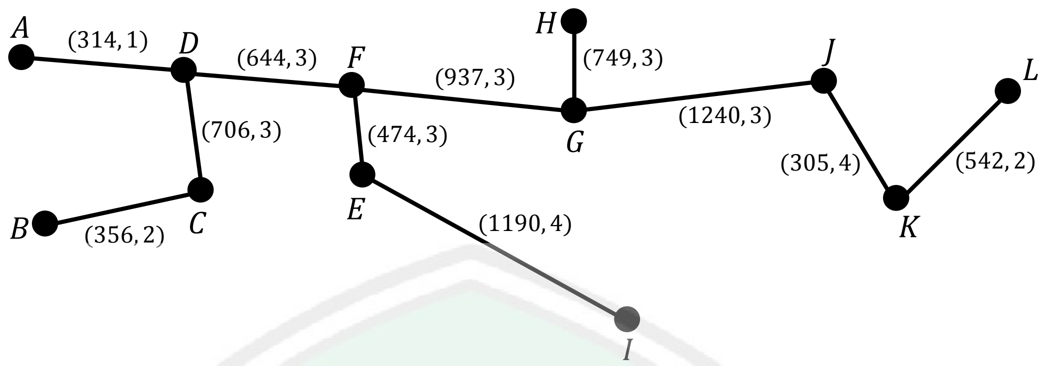
9) Hapus sisi (12) FG

a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

b) Kembalikan sisi (12) FG.

10) Hapus sisi (13) IK

a) Masukkan sisi (15) GJ dan bangun MST_5 dengan $TC = (7457, 31)$.



Gambar 4.8 MST_5 Melalui EPDA dengan Algoritma Kruskal

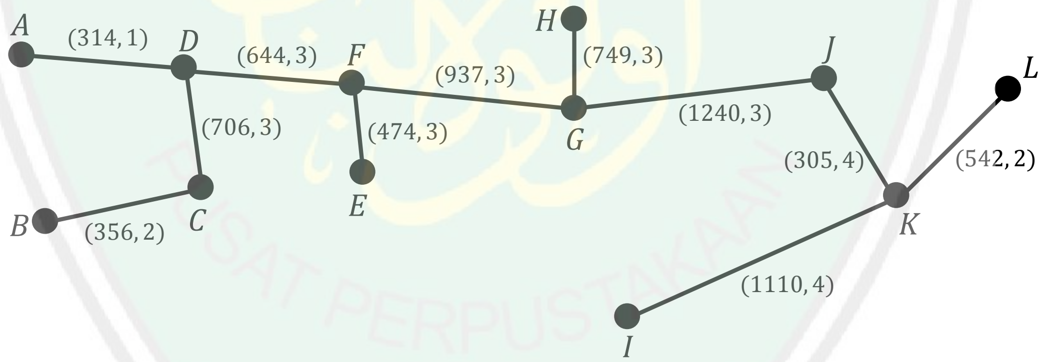
b) MST_5 adalah solusi *dominated* karena memiliki TC lebih besar dari MST_6.

c) Tidak ditemukan lagi sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

d) Kembalikan sisi (13) IK.

11) Hapus sisi (14) EI

a) Masukkan sisi (15) GJ dan bangun MST_6 dengan $TC = (7377, 31)$.



Gambar 4.9 MST_6 Melalui EPDA dengan Algoritma Kruskal

b) MST_6 adalah solusi efisien karakteristik sisi = 14.

c) Tidak ditemukan lagi sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

d) Kembalikan sisi (14) EI.

Mutasi MST_2

1) Hapus sisi (1) AD

   a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

   b) Kembalikan sisi (1) AD.

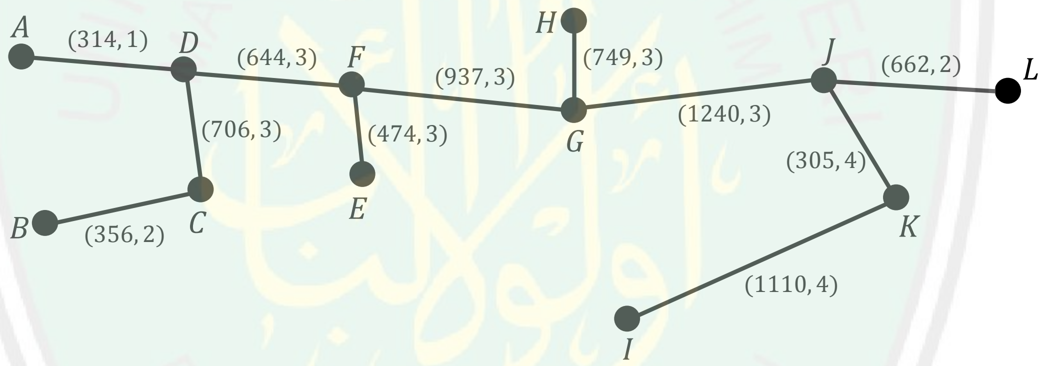
2) Hapus sisi (2) BC

   a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

   b) Kembalikan sisi (2) BC.

3) Hapus sisi (3) LK

   a) Masukkan sisi (12) JK dan bangun MST_7 dengan $TC = (7497, 31)$.



Gambar 4.10 MST_7 Melalui EPDA dengan Algoritma Kruskal

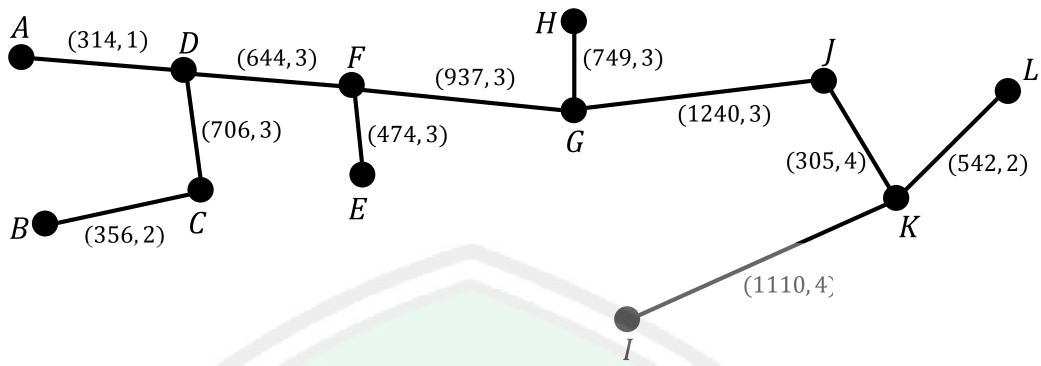
   b) MST_7 adalah solusi *dominated* karena memiliki TC lebih besar dari MST_6.

   c) Tidak ditemukan lagi sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

   d) Kembalikan sisi (3) LK.

4) Hapus sisi (4) JL

   a) Masukkan sisi (12) JK dan bangun MST_8 dengan $TC = (7377, 31)$.



Gambar 4.11 MST_8 Melalui EPDA dengan Algoritma Kruskal

b) MST_8 adalah solusi dominated karena memiliki TC sama dengan MST_6.

c) Tidak ditemukan lagi sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

d) Kembalikan sisi (4) JL.

5) Hapus sisi (5) EF

a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

b) Kembalikan sisi (5) EF.

6) Hapus sisi (6) DF

a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

b) Kembalikan sisi (6) DF.

7) Hapus sisi (7) CD

a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

b) Kembalikan sisi (7) CD.

8) Hapus sisi (9) GH

a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

b) Kembalikan sisi (9) GH.

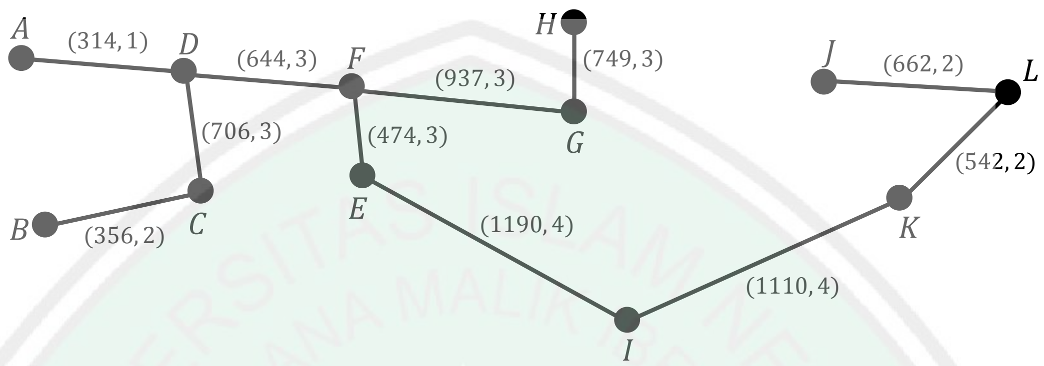
9) Hapus sisi (10) FG

a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

b) Kembalikan sisi (10) FG.

10) Hapus sisi (11) GJ

a) Masukkan sisi (15) EI dan bangun MST_9 dengan $TC = (7684, 30)$.



Gambar 4.12 MST_9 Melalui EPDA dengan Algoritma Kruskal

b) MST_9 adalah solusi *dominated* karena memiliki TC sama dengan MST_3.

c) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

d) Kembalikan sisi (11) GJ.

11) Hapus sisi (14) IK

a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

b) Kembalikan sisi (14) IK.

Menentukan Solusi Efisien

1) Untuk solusi MST_3 dengan $TC = (7684, 30)$

a) Cek MST_1 dengan $TC = (7327, 32)$. Jika $(cx, ty) = (7684, 30)$ dan $(cx', ty') = (7327, 32)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

b) Cek MST_2 dengan $TC = (7734, 29)$. Jika $(cx, ty) = (7684, 30)$ dan $(cx', ty') = (7734, 29)$, maka $cx < cx'$, $ty > ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

c) Cek MST_4 dengan $TC = (8262, 31)$. Jika $(cx, ty) = (7684, 30)$ dan $(cx', ty') = (8262, 31)$, maka $cx < cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga (x, y) mendominasi (x', y') dan (cx, ty) mendominasi (cx', ty'). Artinya solusi MST_4 dengan $TC = (8262, 31)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_3 dengan $TC = (7684, 30)$.

d) Cek MST_5 dengan $TC = (7457, 31)$. Jika $(cx, ty) = (7684, 30)$ dan $(cx', ty') = (7457, 31)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

e) Cek MST_6 dengan $TC = (7377, 31)$. Jika $(cx, ty) = (7684, 30)$ dan $(cx', ty') = (7377, 31)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

f) Cek MST_7 dengan $TC = (7497, 31)$. Jika $(cx, ty) = (7684, 30)$ dan $(cx', ty') = (7497, 31)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

g) Cek MST_8 dengan $TC = (7377, 31)$. Jika $(cx, ty) = (7684, 30)$ dan $(cx', ty') = (7377, 31)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

h) Cek MST_9 dengan $TC = (7684, 30)$. Jika $(cx, ty) = (7684, 30)$ dan $(cx', ty') = (7684, 30)$, maka $cx = cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x, y) mendominasi (x', y') dan (cx, ty) mendominasi (cx', ty'). Artinya solusi MST_9 dengan $TC = (7684, 30)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_3 dengan $TC = (7684, 30)$.

i) Misalkan $(x^*, y^*) = (7684, 30)$. Karena tidak ada $(x, y) \in S$ sedemikian sehingga (x, y) mendominasi (x^*, y^*), maka solusi MST_3 dengan $TC = (7684, 30)$ merupakan solusi efisien atau PF.

2) Untuk solusi MST_4 dengan $TC = (8262, 31)$

a) Cek MST_6 dengan $TC = (7377, 31)$. Jika $(cx, ty) = (8262, 31)$ dan $(cx', ty') = (7377, 31)$, maka $cx > cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x', y') mendominasi (x, y) dan (cx', ty') mendominasi (cx, ty). Artinya solusi MST_4 dengan $TC = (8262, 31)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_6 dengan $TC = (7377, 31)$.

b) Misalkan $(x, y) = (8262, 31)$. Karena terdapat $(x', y') = (7377, 31)$ sedemikian sehingga (x', y') mendominasi (x, y), maka solusi MST_4 dengan $TC = (8262, 31)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_6 dengan $TC = (7377, 31)$.

3) Untuk solusi MST_5 dengan $TC = (7457, 31)$

a) Cek MST_6 dengan $TC = (7377, 31)$. Jika $(x, y) = (7457, 31)$ dan $(cx', ty') = (7377, 31)$, maka $cx > cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x', y') mendominasi (x, y) dan (cx', ty') mendominasi (cx, ty). Artinya solusi MST_5 dengan $TC = (7457, 31)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_6 dengan $TC = (7377, 31)$.

b) Misalkan $(x, y) = (7457, 31)$. Karena terdapat $(x', y') = (7377, 31)$ sedemikian sehingga (x', y') mendominasi (x, y), maka solusi MST_5 dengan $TC = (7457, 31)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_6 dengan $TC = (7377, 31)$.

4) Untuk solusi MST_6 dengan $TC = (7377, 31)$

a) Cek MST_1 dengan $TC = (7327, 32)$. Jika $(cx, ty) = (7377, 31)$ dan $(cx', ty') = (7327, 32)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

b) Cek MST_2 dengan $TC = (7734, 29)$. Jika $(cx, ty) = (7377, 31)$ dan $(cx', ty') = (7734, 29)$, maka $cx < cx'$, $ty > ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

c) Cek MST_3 dengan $TC = (7684, 30)$. Jika $(cx, ty) = (7377, 31)$ dan $(cx', ty') = (7684, 30)$, maka $cx < cx'$, $ty > ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

d) Cek MST_4 dengan $TC = (8262, 31)$. Jika $(cx, ty) = (7377, 31)$ dan $(cx', ty') = (8262, 31)$, maka $cx < cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x, y) mendominasi (x', y') dan (cx, ty) mendominasi (cx', ty'). Artinya solusi MST_4 dengan $TC = (8262, 31)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_6 dengan $TC = (7377, 31)$.

e) Cek MST_5 dengan $TC = (7457, 31)$. Jika $(cx, ty) = (7377, 31)$ dan $(cx', ty') = (7457, 31)$, maka $cx < cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x, y) mendominasi (x', y') dan (cx, ty) mendominasi (cx', ty'). Artinya solusi MST_5 dengan $TC = (7457, 31)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_6 dengan $TC = (7377, 31)$.

f) Cek MST_7 dengan $TC = (7497, 31)$. Jika $(cx, ty) = (7377, 31)$ dan $(cx', ty') = (7497, 31)$, maka $cx < cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x, y) mendominasi (x', y') dan (cx, ty) mendominasi (cx', ty'). Artinya solusi

MST$_7$ dengan $TC = (7497, 31)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST$_6$ dengan $TC = (7377, 31)$.

g) Cek MST$_8$ dengan $TC = (7377, 31)$. Jika $(cx, ty) = (7377, 31)$ dan $(cx', ty') = (7377, 31)$, maka $cx = cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x, y) mendominasi (x', y') dan (cx, ty) mendominasi (cx', ty'). Artinya solusi MST$_8$ dengan $TC = (7377, 31)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST$_6$ dengan $TC = (7377, 31)$.

h) Cek MST$_9$ dengan $TC = (7684, 30)$. Jika $(cx, ty) = (7377, 31)$ dan $(cx', ty') = (7684, 30)$, maka $cx < cx'$, $ty > ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

i) Misalkan $(x^*, y^*) = (7377, 31)$. Karena tidak ada $(x, y) \in S$ sedemikian sehingga (x, y) mendominasi (x^*, y^*), maka solusi MST$_6$ dengan $TC = (7377, 31)$ merupakan solusi efisien atau PF.

5) Untuk solusi MST$_7$ dengan $TC = (7497, 31)$

a) Cek MST$_6$ dengan $TC = (7377, 31)$. Jika $(cx, ty) = (7497, 31)$ dan $(cx', ty') = (7377, 31)$, maka $cx > cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x', y') mendominasi (x, y) dan (cx', ty') mendominasi (cx, ty). Artinya solusi MST$_7$ dengan $TC = (7497, 31)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST$_6$ dengan $TC = (7377, 31)$.

b) Misalkan $(x, y) = (7497, 31)$. Karena terdapat $(x', y') = (7377, 31)$ sedemikian sehingga (x', y') mendominasi (x, y), maka solusi MST$_7$ dengan $TC = (7497, 31)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST$_6$ dengan $TC = (7377, 31)$.

6) Untuk solusi MST_8 dengan $TC = (7377, 31)$

a) Cek MST_6 dengan $TC = (7377, 31)$. Jika $(cx, ty) = (7377, 31)$ dan $(cx', ty') = (7377, 31)$, maka $cx = cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x', y') mendominasi (x, y) dan (cx', ty') mendominasi (cx, ty). Artinya solusi MST_8 dengan $TC = (7377, 31)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_6 dengan $TC = (7377, 31)$.

b) Misalkan $(x, y) = (7377, 31)$. Karena terdapat $(x', y') = (7377, 31)$ sedemikian sehingga (x', y') mendominasi (x, y), maka solusi MST_8 dengan $TC = (7377, 31)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_6 dengan $TC = (7377, 31)$.

7) Untuk solusi MST_9 dengan $TC = (7684, 30)$

a) Cek MST_3 dengan $TC = (7684, 30)$. Jika $(cx, ty) = (7684, 30)$ dan $(cx', ty') = (7684, 30)$, maka $cx = cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x', y') mendominasi (x, y) dan (cx', ty') mendominasi (cx, ty). Artinya solusi MST_9 dengan $TC = (7684, 30)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_3 dengan $TC = (7684, 30)$.

b) Misalkan $(x, y) = (7684, 30)$. Karena terdapat $(x', y') = (7684, 30)$ sedemikian sehingga (x', y') mendominasi (x, y), maka solusi MST_9 dengan $TC = (7684, 30)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_3 dengan $TC = (7684, 30)$.

Tahap 3

Mutasi kembali sesuai dengan tahap 2 dengan meniadakan syarat $j \neq i$ dalam kondisi ketiga. Kemudian setiap MSTs di APS digunakan untuk membuat STs baru dengan memilih setiap sisi non-karakteristik diganti dengan sisi yang bersesuaian. Kemudian seluruh MSTs yang diperoleh menjadi solusi efisien dari masalah MCMST. Adapun MSTs yang diperoleh dari tahap 1 dan tahap 2 adalah sebagai berikut:

1. MST_1 dengan $TC = (7327, 32)$
2. MST_2 dengan $TC = (7734, 29)$
3. MST_3 dengan $TC = (7684, 30)$
4. MST_6 dengan $TC = (7377, 31)$

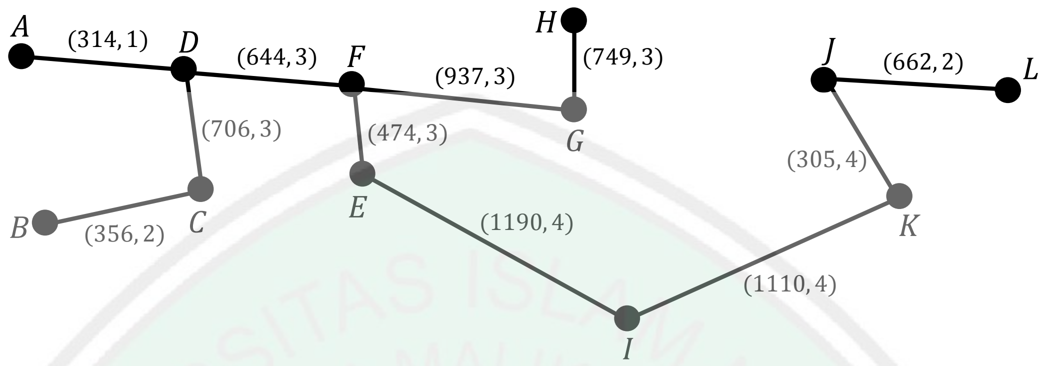
Untuk sementara, keempat MST yang diperoleh merupakan solusi efisien dan masuk ke dalam APS. Selanjutnya semua MST yang termuat dalam APS dimutasi kembali. Kecuali MST_1 dan MST_2. Karena kedua MST tersebut sudah dimutasi dan optimal jika syarat $j \neq i$ dalam kondisi ketiga tidak diberlakukan. Sehingga dalam tahapan ini yang dimutasi adalah MST_3 dan MST_6. Adapun indeks yang digunakan sesuai dengan *Edge List*[1]. Karena keduanya diperoleh melalui MST_1.

Mutasi MST_3

1) Hapus sisi (2) AD
    a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.
    b) Kembalikan sisi (2) AD.
2) Hapus sisi (3) BC
    a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.
    b) Kembalikan sisi (3) BC.
3) Hapus sisi (4) EF
    a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.
    b) Kembalikan sisi (4) EF.

4) Hapus sisi (5) LK

a) Masukkan sisi (1) JK dan bangun MST_{10} dengan $TC = (7447, 32)$.



Gambar 4.13 MST_{10} Melalui EPDA dengan Algoritma Kruskal

b) MST_{10} adalah solusi *dominated* karena memiliki TC lebih besar dari MST_1.

c) Tidak ditemukan lagi sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

d) Kembalikan sisi (5) LK.

5) Hapus sisi (6) DF

a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

b) Kembalikan sisi (6) DF.

6) Hapus sisi (7) JL

a) Adapun sisi (7) tidak dihapus karena sisi JL merupakan sisi karakteristik.

7) Hapus sisi (8) CD

a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

b) Kembalikan sisi (8) CD.

8) Hapus sisi (10) GH

a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

b) Kembalikan sisi (10) GH.

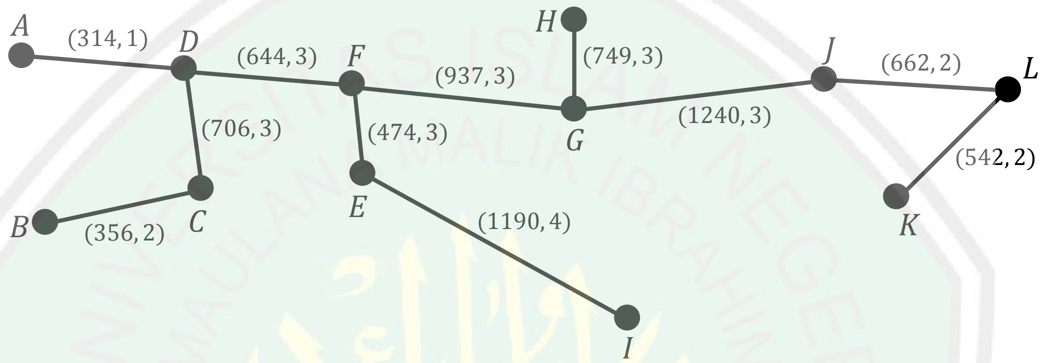
9) Hapus sisi (12) FG

a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

b) Kembalikan sisi (12) FG.

10) Hapus sisi (13) IK

a) Masukkan sisi (15) GJ dan bangun MST_{11} dengan $TC = (7814, 29)$.



Gambar 4.14 MST_{11} Melalui EPDA dengan Algoritma Kruskal

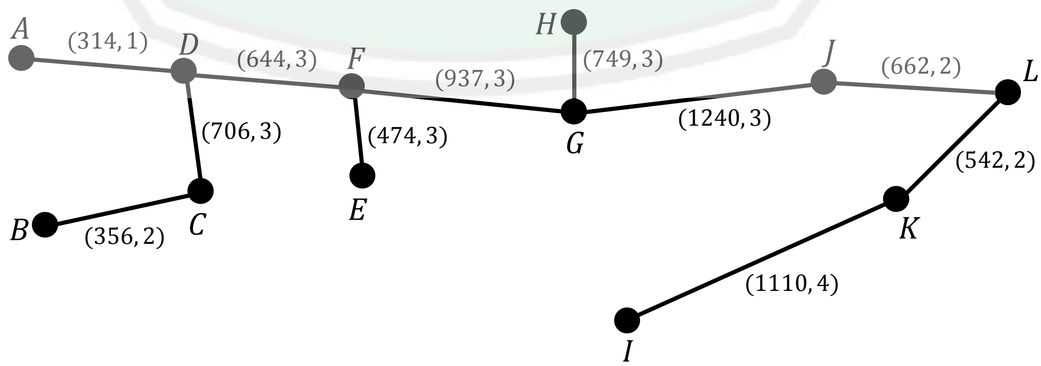
b) MST_{11} adalah solusi *dominated* karena memiliki TC lebih besar dari MST_2.

c) Tidak ditemukan lagi sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

d) Kembalikan sisi (13) IK.

11) Hapus sisi (14) EI

a) Masukkan sisi (15) GJ dan bangun MST_{12} dengan $TC = (7734, 29)$.



Gambar 4.15 MST_{12} Melalui EPDA dengan Algoritma Kruskal

b) MST_{12} adalah solusi *dominated* karena memiliki TC sama dengan MST_2.

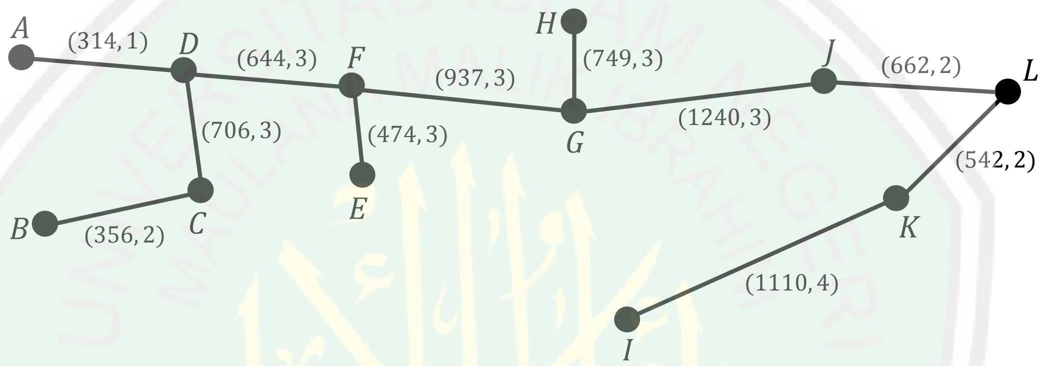
c) Tidak ditemukan lagi sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

d) Kembalikan sisi (14) EI.

Mutasi $\mathbf{MST_6}$

1) Hapus sisi (1) JK

a) Masukkan sisi (7) JL dan bangun MST_{13} dengan $TC = (7734, 29)$.



Gambar 4.16 MST_{13} Melalui EPDA dengan Algoritma Kruskal

b) MST_{13} adalah solusi *dominated* karena memiliki TC sama dengan MST_2.

c) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

d) Kembalikan sisi (1) JK.

2) Hapus sisi (2) AD

a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

b) Kembalikan sisi (2) AD.

3) Hapus sisi (3) BC

a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

b) Kembalikan sisi (3) BC.

4) Hapus sisi (4) EF

a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

b) Kembalikan sisi (4) EF.

5) Hapus sisi (5) LK

a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

b) Kembalikan sisi (5) LK.

6) Hapus sisi (6) DF

a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

b) Kembalikan sisi (6) DF.

7) Hapus sisi (8) CD

a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

b) Kembalikan sisi (8) CD.

8) Hapus sisi (10) GH

a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

b) Kembalikan sisi (10) GH.

9) Hapus sisi (12) FG

a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

b) Kembalikan sisi (12) FG.

10) Hapus sisi (13) IK

a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

b) Kembalikan sisi (13) IK.

11) Hapus sisi (15) GJ

a) Adapun sisi (15) tidak dihapus karena sisi GJ merupakan sisi karakteristik.

<u>Menentukan Solusi Efisien</u>

1) Untuk solusi MST_{10} dengan $TC = (7447, 32)$

   a) Cek MST_1 dengan $TC = (7327, 32)$. Jika $(cx, ty) = (7447, 32)$ dan $(cx', ty') = (7327, 32)$, maka $cx > cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x', y') mendominasi (x, y) dan (cx', ty') mendominasi (cx, ty). Artinya solusi MST_{10} dengan $TC = (7447, 32)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_1 dengan $TC = (7327, 32)$.

   b) Misalkan $(x, y) = (7447, 32)$. Karena terdapat $(x', y') = (7327, 32)$ sedemikian sehingga (x', y') mendominasi (x, y), maka solusi MST_{10} dengan $TC = (7447, 32)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_1 dengan $TC = (7327, 32)$.

2) Untuk solusi MST_{11} dengan $TC = (7814, 29)$

   a) Cek MST_2 dengan $TC = (7734, 29)$. Jika $(cx, ty) = (7814, 29)$ dan $(cx', ty') = (7734, 29)$, maka $cx > cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x', y') mendominasi (x, y) dan (cx', ty') mendominasi (cx, ty). Artinya solusi MST_{11} dengan $TC = (7814, 29)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_2 dengan $TC = (7734, 29)$.

   b) Misalkan $(x, y) = (7814, 29)$. Karena terdapat $(x', y') = (7734, 29)$ sedemikian sehingga (x', y') mendominasi (x, y), maka solusi MST_{11} dengan $TC = (7814, 29)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_2 dengan $TC = (7734, 29)$.

3) Untuk solusi MST_{12} dengan $TC = (7734, 29)$

   a) Cek MST_2 dengan $TC = (7734, 29)$. Jika $(cx, ty) = (7734, 29)$ dan $(cx', ty') = (7734, 29)$, maka $cx = cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x', y')

mendominasi (x, y) dan (cx', ty') mendominasi (cx, ty). Artinya solusi MST_{12} dengan $TC = (7734, 29)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_2 dengan $TC = (7734, 29)$.

b) Misalkan $(x, y) = (7734, 29)$. Karena terdapat $(x', y') = (7734, 29)$ sedemikian sehingga (x', y') mendominasi (x, y), maka solusi MST_{12} dengan $TC = (7734, 29)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_2 dengan $TC = (7734, 29)$.

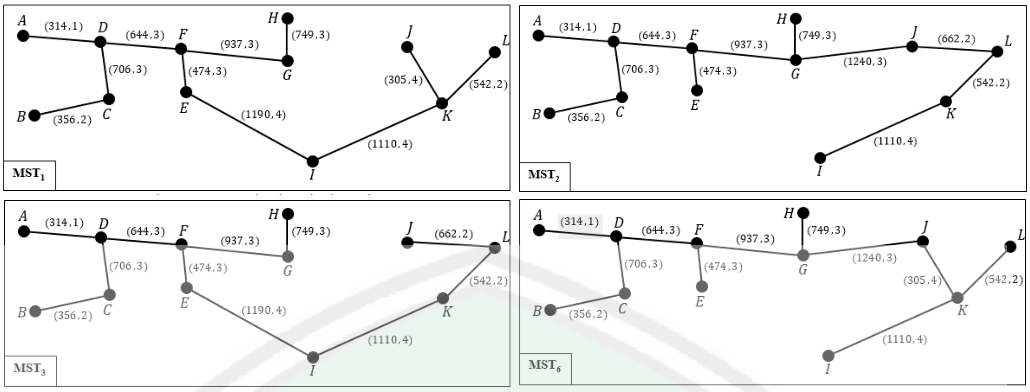
4) Untuk solusi MST_{13} dengan $TC = (7734, 29)$

a) Cek MST_2 dengan $TC = (7734, 29)$. Jika $(cx, ty) = (7734, 29)$ dan $(cx', ty') = (7734, 29)$, maka $cx = cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x', y') mendominasi (x, y) dan (cx', ty') mendominasi (cx, ty). Artinya solusi MST_{13} dengan $TC = (7734, 29)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_2 dengan $TC = (7734, 29)$.

b) Misalkan $(x, y) = (7734, 29)$. Karena terdapat $(x', y') = (7734, 29)$ sedemikian sehingga (x', y') mendominasi (x, y), maka solusi MST_{13} dengan $TC = (7734, 29)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_2 dengan $TC = (7734, 29)$.

Setelah dilakukan mutasi kembali dan semua kemungkinan solusi telah dicek, maka MST yang menjadi solusi efisien atau PF untuk masalah MCMST dari graf pada Gambar 4.1 adalah sebagai berikut:

1. MST_1 dengan $TC = (7327, 32)$
2. MST_2 dengan $TC = (7734, 29)$
3. MST_3 dengan $TC = (7684, 30)$
4. MST_6 dengan $TC = (7377, 31)$



Gambar 4.17 Solusi Efisien Menurut EPDA dengan Algortima Kruskal

Setelah diperoleh empat solusi efisien atau PF, maka selanjutnya semua solusi tersebut akan dicek apakah termasuk ke dalam solusi efisien yang *supported* atau *non-supported*.

Menentukan Solusi Efisien yang *Supported* dan *Non-Supported*

1) Misalkan $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = 1$

   a) MST_1 dengan $TC = (\lambda_1 \times 7327 + \lambda_2 \times 32) = (1 \times 7327 + 1 \times 32) = 7349$

   b) MST_2 dengan $TC = (\lambda_1 \times 7734 + \lambda_2 \times 29) = (1 \times 7734 + 1 \times 29) = 7763$

   c) MST_3 dengan $TC = (\lambda_1 \times 7684 + \lambda_2 \times 30) = (1 \times 7684 + 1 \times 30) = 7714$

   d) MST_6 dengan $TC = (\lambda_1 \times 7377 + \lambda_2 \times 31) = (1 \times 7377 + 1 \times 31) = 7408$

   e) Bobot minimum dari keempat solusi tersebut adalah solusi MST_1 dengan jumlah bobot sebesar 7359.

2) Misalkan $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = 100$

   a) MST_1 dengan $TC = (\lambda_1 \times 7327 + \lambda_2 \times 32) = (100 \times 7327 + 1 \times 32) = 10527$

   b) MST_2 dengan $TC = (\lambda_1 \times 7734 + \lambda_2 \times 29) = (100 \times 7734 + 1 \times 29) = 10634$

   c) MST_3 dengan $TC = (\lambda_1 \times 7684 + \lambda_2 \times 30) = (100 \times 7684 + 1 \times 30) = 10684$

   d) MST_6 dengan $TC = (\lambda_1 \times 7377 + \lambda_2 \times 31) = (100 \times 7377 + 1 \times 31) = 10477$

   e) Bobot minimum dari keempat solusi tersebut adalah solusi MST_6 dengan jumlah bobot sebesar 10477.

3) Misalkan $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = 1000$

   a) MST_1 dengan $TC = (\lambda_1 \times 7327 + \lambda_2 \times 32) = (1000 \times 7327 + 1 \times 32) = 39327$

   b) MST_2 dengan $TC = (\lambda_1 \times 7734 + \lambda_2 \times 29) = (1000 \times 7734 + 1 \times 29) = 36734$

   c) MST_3 dengan $TC = (\lambda_1 \times 7684 + \lambda_2 \times 30) = (1000 \times 7684 + 1 \times 30) = 37684$

   d) MST_6 dengan $TC = (\lambda_1 \times 7377 + \lambda_2 \times 31) = (1000 \times 7377 + 1 \times 31) = 38377$

   e) Bobot minimum dari keempat solusi tersebut adalah solusi MST_2 dengan jumlah bobot sebesar 36734.

Berdasarkan verifikasi yang telah dilakukan, maka diperoleh solusi MST_1, MST_2, dan MST_6 adalah solusi efisien yang *supported*. Sedangkan MST_3 merupakan solusi efisien yang *non-supported*.

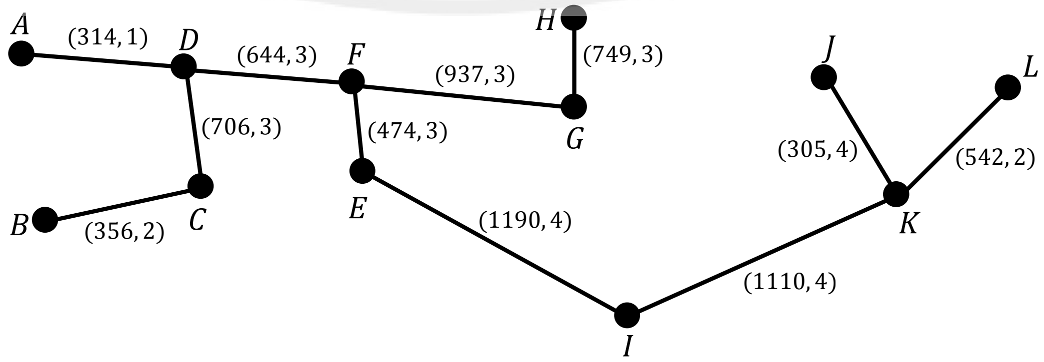
4.2.2 EPDA dengan Algoritma Prim

Pada bagian ini, graf pada Gambar 4.1 akan diselesaikan menggunakan EPDA yang dibangun dari Algoritma Prim. Adapun langkah-langkah penyelesaian yang dilakukan adalah sebagai berikut:

Tahap 1

Langkah awal yang harus dilakukan adalah mendaftar semua sisi pada graf dan dimasukkan ke dalam tabel *Edge List*$[i]$. Tabel *Edge List*$[1]$ berisi daftar sisi dengan bobot yang diurutkan berdasarkan kriteria pertama atau C_1. Sedangkan Tabel *Edge List*$[2]$ berisi daftar sisi dengan bobot yang diurutkan berdasarkan kriteria kedua atau C_2.

Selanjutnya menentukan MSTs atau MST sementara melalui Algoritma Prim dengan memperhatikan satu kriteria secara bergantian. Dengan menggunakan *Boolean flag*, untuk sisi yang dipilih bernilai 1 dan yang tidak dipilih bernilai 0. Kemudian nilai tersebut dimasukkan ke dalam tabel *Edge List*$[i]$. Berikut ini dua MST yang diperoleh dari graf pada Gambar 4.1, yakni MST_1 dan MST_2.



Gambar 4.18 MST_1 Berdasarkan Algoritma Prim

MST_1 diperoleh melalui Algoritma Prim dengan memperhatikan kriteria C_1. *Total Costs* yang dimiliki adalah $TC = (7327, 32)$. Adapun proses secara rinci untuk mendapatkan graf pada Gambar 4.18 adalah sebagai berikut. Langkah awal yang dilakukan adalah menentukan satu titik, adapun dalam hal ini titik yang dipilih adalah titik A. Kemudian langkah selanjutnya adalah menentukan sisi dengan bobot terkecil yang menghubungkan titik yang sudah dipilih dengan titik lainnya (titik yang belum dipilih). Dengan memperhatikan graf pada Gambar 4.1, titik A terhubung dengan titik B dan D. Sehingga terdapat dua perbandingan bobot yakni membangun sisi AB dengan bobot 921 dan membangun sisi AD dengan bobot 314. Maka dalam hal ini dipilih sisi AD dengan bobot terkecil yakni 314.

Selanjutnya antara titik A dan titik D dicari titik yang terhubung langsung dengan keduanya. Adapun titik A dapat dibangun sisi AB dengan bobot 921. Sedangkan titik D dapat dibangun sisi DC dengan bobot 706 dan sisi DF dengan bobot 644. Maka sisi yang dipilih adalah sisi DF dengan bobot 644.

Kemudian sisi ketiga yang dipilih haruslah sisi dengan bobot terkecil dari kemungkinan sisi yang dapat dihubungkan dan juga sisi tersebut tidak mengakibatkan adanya *cycle*. Untuk saat ini terdapat tiga titik yakni titik A, D, dan F. Titik A dapat dibangun sisi AB dengan bobot 921. Sedangkan titik D dapat dibangun sisi CD dengan bobot 706. Selanjutnya untuk titik F dapat dibangun sisi EF dengan bobot 474 dan sisi FG dengan bobot 937. Berdasarkan kemungkinan sisi yang ada maka dipilih sisi EF sebagai sisi dengan bobot terkecil yakni 474.

Untuk sisi keempat dipilih antara titik A, D, E, dan F yang terhubung langsung dengannya. Adapun titik A dapat dibangun sisi AB dengan bobot 921. Sedangkan titik D dapat dibangun sisi DC dengan bobot 706. Untuk titik E dapat dibangun sisi CE dengan bobot 737 dan sisi EI dengan bobot 1190. Selanjutnya untuk sisi F dapat dibangun sisi FG dengan bobot 937. Maka sisi yang dipilih adalah sisi DC dengan bobot 706.

Selanjutnya kemungkinan sisi yang dapat dibangun dari lima titik yang diperoleh yakni titik A, C, D, E, dan F adalah sisi AB dengan bobot 921, sisi BC dengan bobot 356, sisi CI dengan bobot 2500, sisi EI dengan bobot 1190, dan sisi FG dengan bobot 937. Maka sisi yang dipilih adalah sisi BC dengan bobot terkecil yakni 356.

Selanjutnya antara titik C, E, dan F dipilih titik baru yang terhubung langsung dan memiliki bobot terkecil. Adapun untuk titik C dapat dibangun sisi CI dengan bobot 2500. Untuk titik E dapat dibangun sisi EI dengan bobot 1190. Sedangkan untuk titik F dapat dibangun sisi FG denagn bobot 937. Maka sisi yang dipilih adalah sisi FG dengan bobot 937.

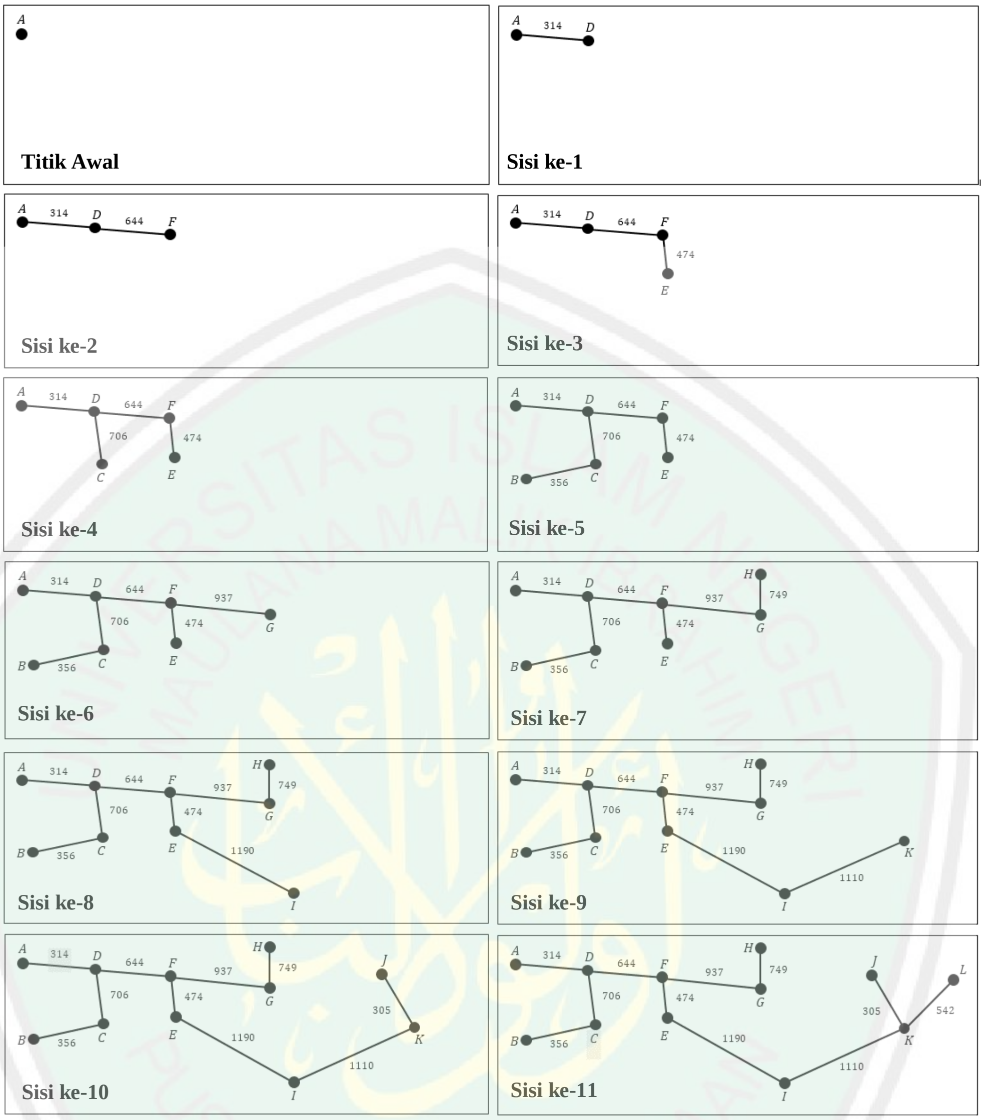
Selanjutnya antara titik C, E, dan G dipilih titik baru yang terhubung langsung dan memiliki bobot terkecil. Adapun untuk titik C dapat dibangun sisi CI dengan bobot 2500. Untuk titik E dapat dibangun sisi EI dengan bobot 1190. Sedangkan untuk titik G dapat dibangun sisi GH dengan bobot 749 dan sisi GJ dengan bobot 1240. Maka sisi yang dipilih adalah sisi GH dengan bobot 749.

Selanjutnya antara titik C, E, dan G dipilih titik baru yang terhubung langsung dan memiliki bobot terkecil. Adapun untuk titik C dapat dibangun sisi CI dengan bobot 2500. Untuk titik E dapat dibangun sisi EI dengan bobot 1190. Sedangkan untuk titik G dapat dibangun sisi GJ dengan bobot 1240. Maka sisi yang dipilih adalah sisi EI dengan bobot 1190.

Kemudian antara titik G dan I dipilih titik yang terhubung langsung dengan memiliki bobot terkecil. Adapun untuk titik G dapat dibangun sisi GJ dengan bobot 1240. Sedangkan titik I dapat dibangun sisi IK dengan bobot 1110. Maka sisi yang dipilih adalah sisi IK dengan bobot 1110.

Kemudian antara titik G dan K dipilih titik yang terhubung langsung dengan memiliki bobot terkecil. Adapun untuk titik G dapat dibangun sisi GJ dengan bobot 1240. Sedangkan titik K dapat dibangun sisi JK dengan bobot 305 dan sisi LK dengan bobot 542. Maka sisi yang dipilih adalah sisi JK dengan bobot 305.

Selanjutnya, untuk menghubungkan titik yang terakhir yakni titik L, maka kemungkinan sisi yang dapat dibangun adalah sisi JL dengan bobot 662 dan sisi KL dengan bobot 542. Sehingga sisi yang dipilih dengan bobot terkecil adalah sisi KL dengan bobot sebesar 542. Karena semua titik sudah terhubung, maka Algoritma Prim menghentikan proses penyelesaiannya. Adapun bobot keseluruhan dari MST yang diperoleh untuk kriteria C_1 adalah 7327 dan untuk kriteria C_2 adalah 32. Sehingga untuk sementara dapat disimpulkan bahwa MST_1 mememiliki bobot terkecil berdasarkan kriteria C_1. Gambar berikut merupakan ilustrasi langkah-langkah penyelesaian yang dilakukan.



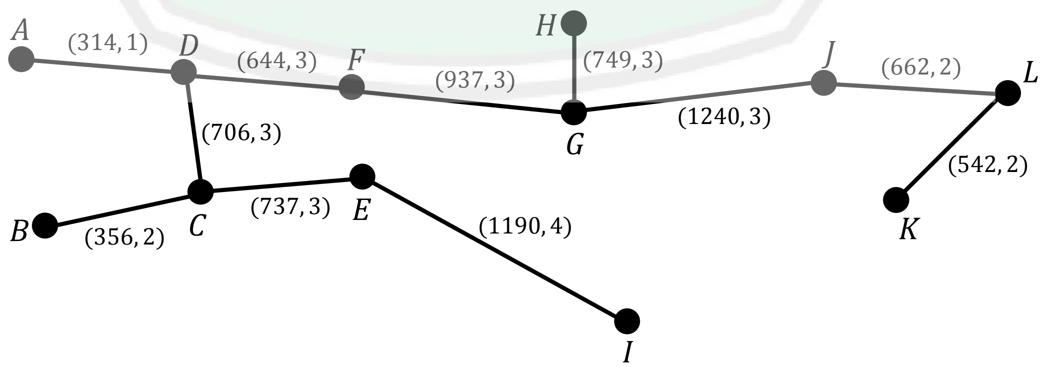
Gambar 4.19 Langkah-langkah Algoritma Prim untuk MST_1

Langkah selanjutnya, setelah diperoleh MST_1 melalui Algoritma Prim, maka sisi yang termuat di dalamnya diberi nilai 1. Sisi tersebut adalah JK, AD, BC, EF, LK, DF, CD, GH, FG, IK, dan EI. Adapun untuk sisi yang lain, yakni sisi JL, CE, AB, GJ, dan CI diberi nilai 0. Karena sisi-sisi tersebut tidak termuat dalam MST_1. Kemudian semua sisi tersebut dimasukkan ke dalam tabel *Edge List*[1]. Adapun tabel tersebut diurutkan berdasarkan kriteria C_1.

Tabel 4.4 *Edge List*[1] dari EPDA dengan Algoritma Prim

Indeks	**Sisi**	C_1	C_2	***In Tree***
1	JK	305	4	1
2	AD	314	1	1
3	BC	356	2	1
4	EF	474	3	1
5	LK	542	2	1
6	DF	644	3	1
7	JL	662	2	0
8	CD	706	3	1
9	CE	737	3	0
10	GH	749	3	1
11	AB	921	4	0
12	FG	937	3	1
13	IK	1110	4	1
14	EI	1190	4	1
15	GJ	1240	3	0
16	CI	2500	10	0

Setelah mendapatkan MST_1 dan *Edge List*[1] melalui Algoritma Prim, maka Algoritma Prim diterapkan kembali untuk mendapatkan MST baru dengan memperhatikan kriteria yang kedua, yakni C_2.



Gambar 4.20 MST_2 Berdasarkan Algoritma Prim

MST_2 diperoleh melalui Algoritma Prim dengan memperhatikan kriteria C_2. *Total Costs* yang dimiliki adalah $TC = (8645, 31)$. Adapun proses secara rinci untuk mendapatkan graf pada Gambar 4.20 adalah sebagai berikut. Langkah awal yang dilakukan adalah menentukan satu titik, adapun dalam hal ini titik yang dipilih adalah titik A. Kemudian langkah selanjutnya adalah menentukan sisi dengan bobot terkecil yang menghubungkan titik yang sudah dipilih dengan titik lainnya (titik yang belum dipilih). Dengan memperhatikan graf pada Gambar 4.1, titik A terhubung dengan titik B dan D. Sehingga terdapat dua perbandingan bobot yakni membangun sisi AB dengan bobot 4 dan membangun sisi AD dengan bobot 1. Maka dalam hal ini dipilih sisi AD dengan bobot terkecil yakni 1.

Selanjutnya antara titik A dan titik D dicari titik yang terhubung langsung dengan keduanya. Adapun titik A dapat dibangun sisi AB dengan bobot 4. Sedangkan titik D dapat dibangun sisi DC dengan bobot 3 dan sisi DF dengan bobot 3. Maka sisi yang dipilih adalah sisi DC dengan bobot 3.

Kemudian sisi ketiga yang dipilih haruslah sisi dengan bobot terkecil dari kemungkinan sisi yang dapat dihubungkan dan juga sisi tersebut tidak mengakibatkan adanya *cycle*. Untuk saat ini terdapat tiga titik yakni titik A, C, dan D. Titik A dapat dibangun sisi AB dengan bobot 4. Sedangkan titik C dapat dibangun sisi BC dengan bobot 2, sisi CE dengan bobot 3, dan sisi CI dengan bobot 10. Selanjutnya untuk titik D dapat dibangun sisi DF dengan bobot 3. Berdasarkan kemungkinan sisi yang ada maka dipilih sisi BC sebagai sisi dengan bobot terkecil yakni 2.

Untuk sisi keempat dipilih antara titik C dan D yang terhubung langsung dengannya. Adapun titik C dapat dibangun sisi CE dengan bobot 3 dan sisi CI

dengan bobot 10. Sedangkan titik D dapat dibangun sisi DF dengan bobot 3. Maka sisi yang dipilih adalah sisi CE dengan bobot 3.

Selanjutnya kemungkinan sisi yang dapat dibangun dari titik C, D, dan E adalah sisi CI dengan bobot 10, sisi DF dengan bobot 3, sisi EF dengan bobot 3, dan sisi EI dengan bobot 4. Maka sisi yang dipilih adalah sisi DF dengan bobot terkecil yakni 3.

Selanjutnya antara titik C, E, dan F dipilih titik baru yang terhubung langsung dan memiliki bobot terkecil. Adapun untuk titik C dapat dibangun sisi CI dengan bobot 10. Untuk titik E dapat dibangun sisi EI dengan bobot 4. Sedangkan untuk titik F dapat dibangun sisi FG denagn bobot 3. Maka sisi yang dipilih adalah sisi FG dengan bobot 3.

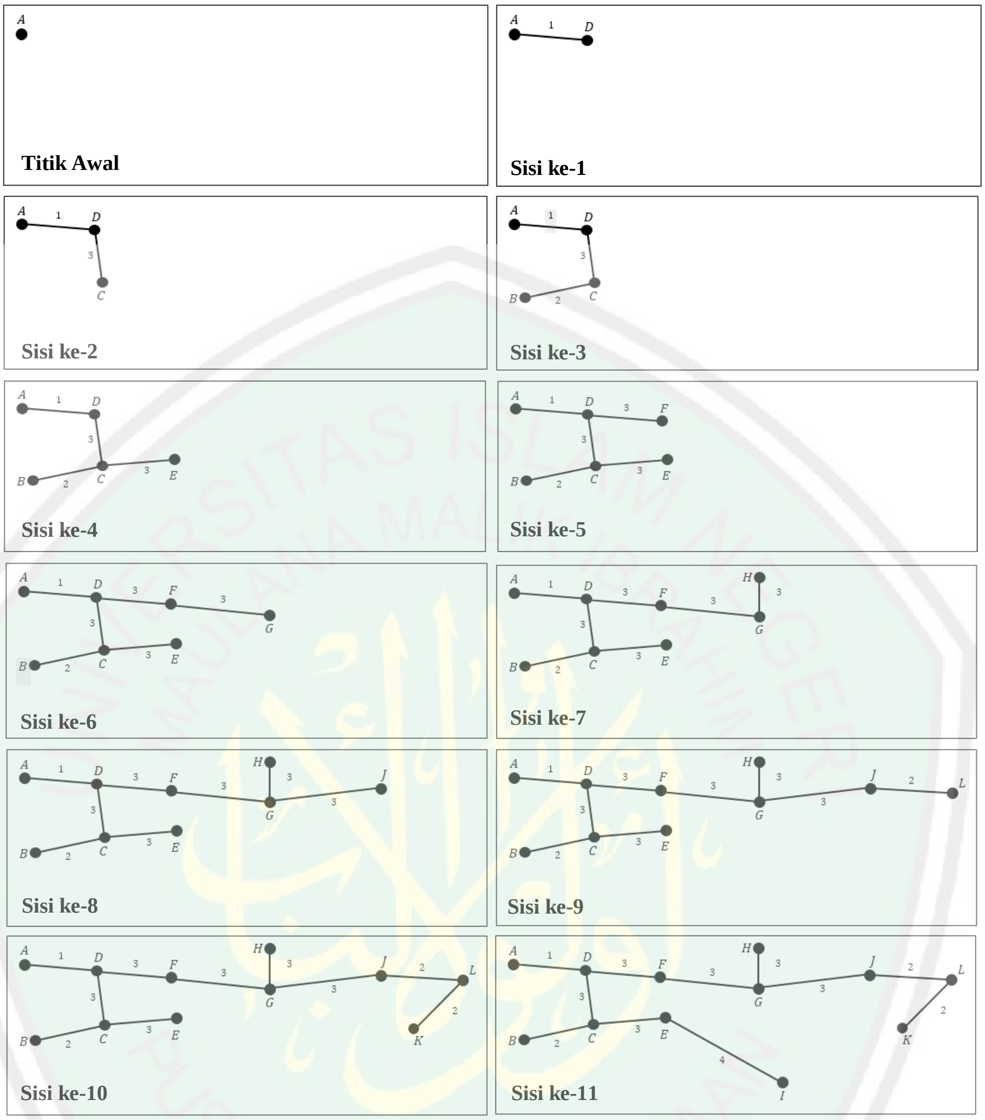
Selanjutnya antara titik C, E, dan G dipilih titik baru yang terhubung langsung dan memiliki bobot terkecil. Adapun untuk titik C dapat dibangun sisi CI dengan bobot 10. Untuk titik E dapat dibangun sisi EI dengan bobot 4. Sedangkan untuk titik G dapat dibangun sisi GH dengan bobot 3 dan sisi GJ dengan bobot 3. Maka sisi yang dipilih adalah sisi GH dengan bobot 3.

Selanjutnya antara titik C, E, dan G dipilih titik baru yang terhubung langsung dan memiliki bobot terkecil. Adapun untuk titik C dapat dibangun sisi CI dengan bobot 10. Untuk titik E dapat dibangun sisi EI dengan bobot 4. Sedangkan untuk titik G dapat dibangun sisi GJ dengan bobot 3. Maka sisi yang dipilih adalah sisi GJ dengan bobot 3.

Selanjutnya antara titik C, E, dan J dipilih titik baru yang terhubung langsung dan memiliki bobot terkecil. Adapun untuk titik C dapat dibangun sisi CI dengan bobot 10. Untuk titik E dapat dibangun sisi EI dengan bobot 4. Sedangkan untuk titik J dapat dibangun sisi JK dengan bobot 4 dan sisi JL dengan bobot 2. Maka sisi yang dipilih adalah sisi JL dengan bobot 2.

Selanjutnya antara titik C, E, J, dan L dipilih titik baru yang terhubung langsung dan memiliki bobot terkecil. Adapun untuk titik C dapat dibangun sisi CI dengan bobot 10. Untuk titik E dapat dibangun sisi EI dengan bobot 4. Untuk titik J dapat dibangun sisi JK dengan bobot 4. Sedangkan untuk titik L dapat dibangun sisi LK dengan bobot 2. Maka sisi yang dipilih adalah sisi LK dengan bobot 2.

Selanjutnya, untuk menghubungkan titik yang terakhir yakni titik I, maka kemungkinan sisi yang dapat dibangun adalah sisi CI dengan bobot 10, sisi EI dengan bobot 4, dan sisi IK dengan bobot 4. Sehingga sisi yang dipilih dengan bobot terkecil adalah sisi EI dengan bobot sebesar 4. Karena semua titik sudah terhubung, maka Algoritma Prim menghentikan proses penyelesaiannya. Adapun bobot keseluruhan dari MST yang diperoleh untuk kriteria C_1 adalah 8077 dan untuk kriteria C_2 adalah 29. Sehingga untuk sementara dapat disimpulkan bahwa MST_2 mememiliki bobot terkecil berdasarkan kriteria C_2. Gambar berikut merupakan ilustrasi langkah-langkah penyelesaian yang dilakukan.



Gambar 4.21 Langkah-langkah Algoritma Prim untuk MST_2

Langkah selanjutnya, setelah diperoleh MST_2 melalui Algoritma Prim, maka sisi yang termuat di dalamnya diberi nilai 1. Sisi tersebut adalah AD, BC, LK, JL, DF, CD, CE, GH, FG, GJ, dan EI. Adapun untuk sisi yang lain, yakni sisi EF, JK, AB, IK, dan CI diberi nilai 0. Karena sisi-sisi tersebut tidak termuat dalam MST_2. Kemudian semua sisi tersebut dimasukkan ke dalam tabel *Edge List*[2]. Adapun tabel tersebut diurutkan berdasarkan kriteria C_2.

Tabel 4.5 *Edge List*[2] dari EPDA dengan Algoritma Prim

Indeks	Sisi	C_1	C_2	$In\ Tree$
1	AD	314	1	1
2	BC	356	2	1
3	LK	542	2	1
4	JL	662	2	1
5	EF	474	3	0
6	DF	644	3	1
7	CD	706	3	1
8	CE	737	3	1
9	GH	749	3	1
10	FG	937	3	1
11	GJ	1240	3	1
12	JK	305	4	0
13	AB	921	4	0
14	IK	1110	4	0
15	EI	1190	4	1
16	CI	2500	10	0

Menentukan Solusi Efisien

1) Untuk solusi MST_1 dengan $TC = (7327, 32)$

   a) Cek MST_2 dengan $TC = (8077, 29)$. Jika $(cx, ty) = (7327, 32)$ dan $(cx', ty') = (8077, 29)$, maka $cx < cx', ty > ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

   b) Misalkan $(x^*, y^*) = (7327, 32)$. Karena tidak ada $(x, y) \in S$ sedemikian sehingga (x, y) mendominasi (x^*, y^*), maka solusi MST_1 dengan $TC = (7327, 32)$ merupakan solusi efisien atau PF.

2) Untuk solusi MST_2 dengan $TC = (8077, 29)$

   a) Cek MST_1 dengan $TC = (7327, 32)$. Jika $(cx, ty) = (8077, 29)$ dan $(cx', ty') = (7327, 32)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

   b) Misalkan $(x^*, y^*) = (8077, 29)$. Karena tidak ada $(x, y) \in S$ sedemikian sehingga (x, y) mendominasi (x^*, y^*), maka solusi MST_2 dengan $TC = (8077, 29)$ merupakan solusi efisien atau PF.

Tahap 2

Menentukan solusi efisien dari MST_1 dan MST_2 dengan cara memutasikan setiap sisinya satu per satu. Misal sisi $(u, v) \in \text{MST}_i$, untuk membentuk STs baru maka sisi yang akan menggantikan (u, v) yakni (r, s) harus memenuhi tiga kondisi berikut:

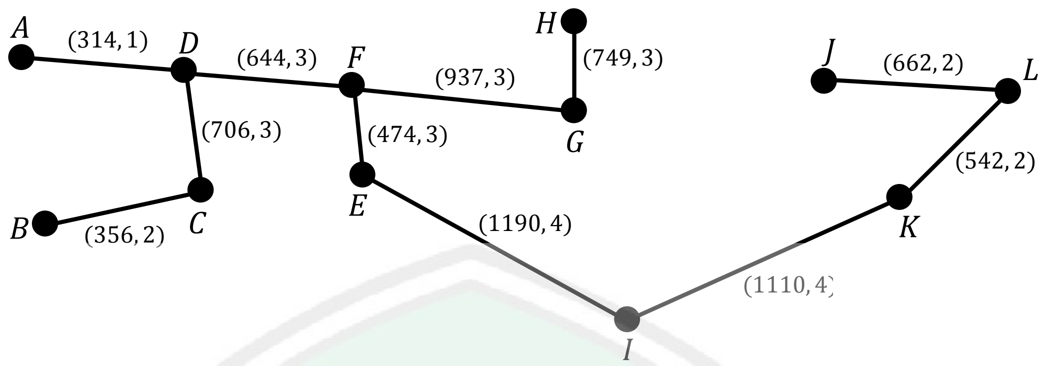
1. $(r, s) \neq In\,Tree$.
2. Menambahkan (r, s) tidak mengakibatkan adanya *cycle*.
3. $C_j(r, s) < C_j(u, v)$ untuk setidaknya satu j, dengan $j = 1, \dots, p$ dan $j \neq i$.

Jika (r, s) memenuhi kondisi di atas, maka (r, s) ditandai sebagai sisi karakteristik dengan mengatur *flag* karakteristiknya sama dengan indeks dari sisi (u, v).

Mutasi MST_1

1) Hapus sisi (1) JK

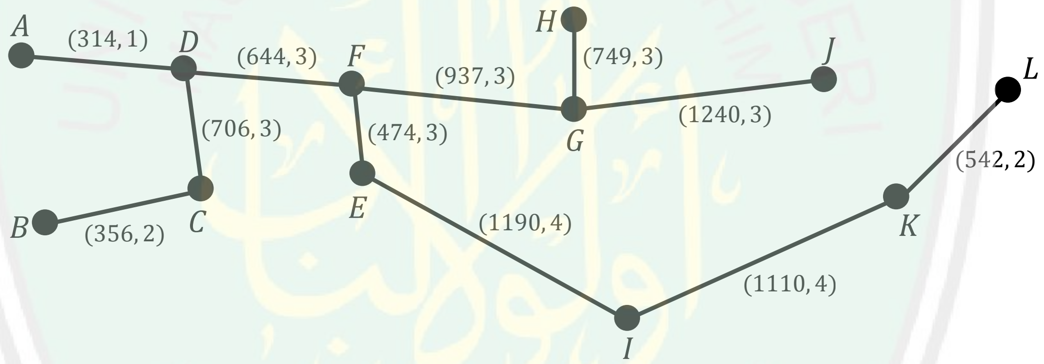
   a) Masukkan sisi (7) JL dan bangun MST_3 dengan $TC = (7684, 30)$.



Gambar 4.22 MST_3 Melalui EPDA dengan Algoritma Prim

b) MST_3 adalah solusi efisien dengan karakteristik sisi = 1.

c) Masukkan sisi (15) GJ dan bangun MST_4 dengan $TC = (8262, 31)$.



Gambar 4.23 MST_4 Melalui EPDA dengan Algoritma Prim

d) MST_4 adalah solusi *dominated* karena memiliki TC lebih besar dari MST_6.

e) Tidak ditemukan lagi sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

f) Kembalikan sisi (1) JK.

2) Hapus sisi (2) AD

a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

b) Kembalikan sisi (2) AD.

3) Hapus sisi (3) BC

a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

b) Kembalikan sisi (3) BC.

4) Hapus sisi (4) EF

a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

b) Kembalikan sisi (4) EF.

5) Hapus sisi (5) LK

a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

b) Kembalikan sisi (5) LK.

6) Hapus sisi (6) DF

a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

b) Kembalikan sisi (6) DF.

7) Hapus sisi (8) CD

a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

b) Kembalikan sisi (8) CD.

8) Hapus sisi (10) GH

a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

b) Kembalikan sisi (10) GH.

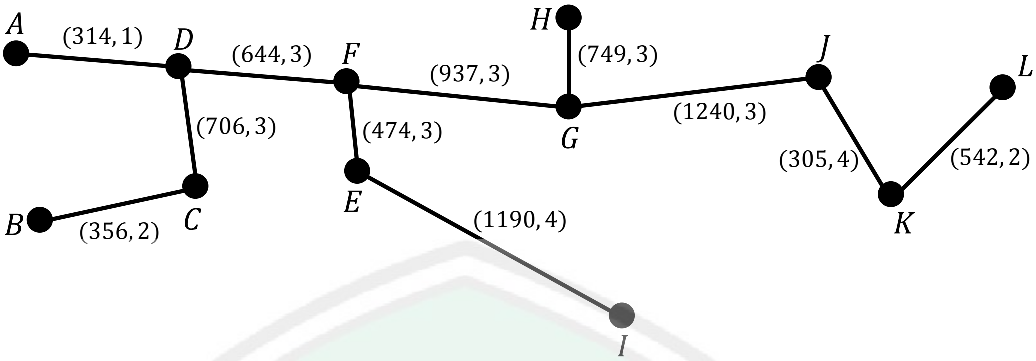
9) Hapus sisi (12) FG

a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

b) Kembalikan sisi (12) FG.

10) Hapus sisi (13) IK

a) Masukkan sisi (15) GJ dan bangun MST_5 dengan $TC = (7457, 31)$.



Gambar 4.24 MST_5 Melalui EPDA dengan Algoritma Prim

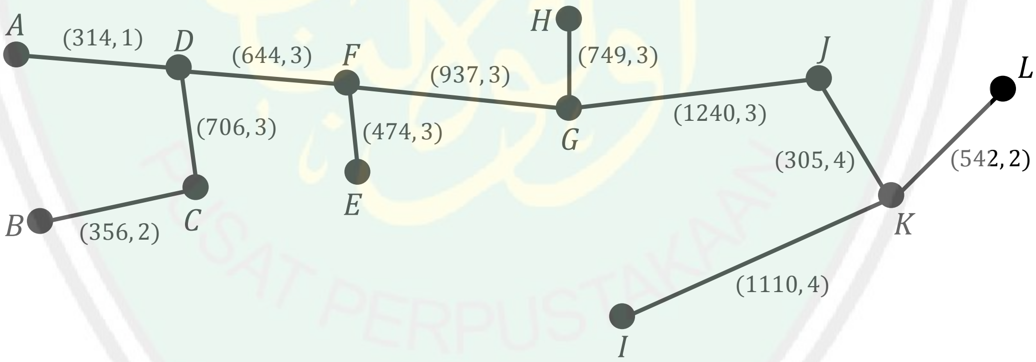
b) MST_5 adalah solusi *dominated* karena memiliki TC lebih besar dari MST_6.

c) Tidak ditemukan lagi sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

d) Kembalikan sisi (13) IK.

11) Hapus sisi (14) EI

a) Masukkan sisi (15) GJ dan bangun MST_6 dengan $TC = (7377, 31)$.



Gambar 4.25 MST_6 Melalui EPDA dengan Algoritma Prim

b) MST_6 adalah solusi efisien dengan karakteristik sisi = 14.

c) Tidak ditemukan lagi sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

d) Kembalikan sisi (14) EI.

Mutasi MST_2

1) Hapus sisi (1) AD

    a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

    b) Kembalikan sisi (1) AD.

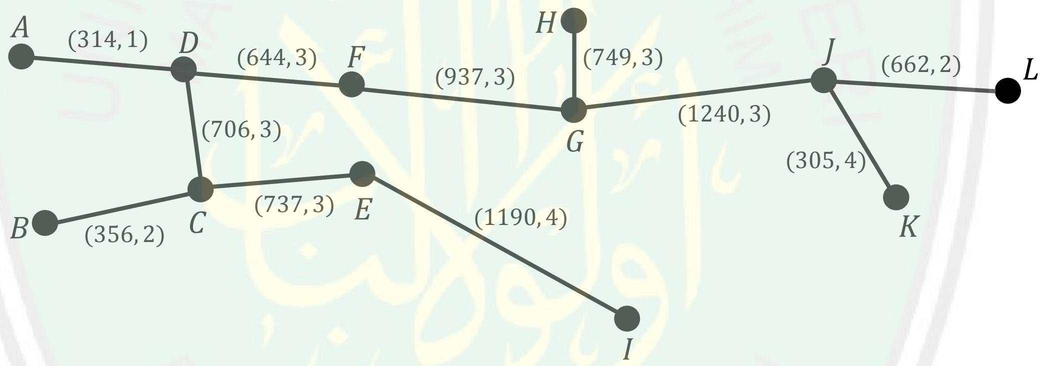
2) Hapus sisi (2) BC

    a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

    b) Kembalikan sisi (2) BC.

3) Hapus sisi (3) LK

    a) Masukkan sisi (12) JK dan bangun MST_7 dengan $TC = (7840, 31)$.



Gambar 4.26 MST_7 Melalui EPDA dengan Algoritma Prim

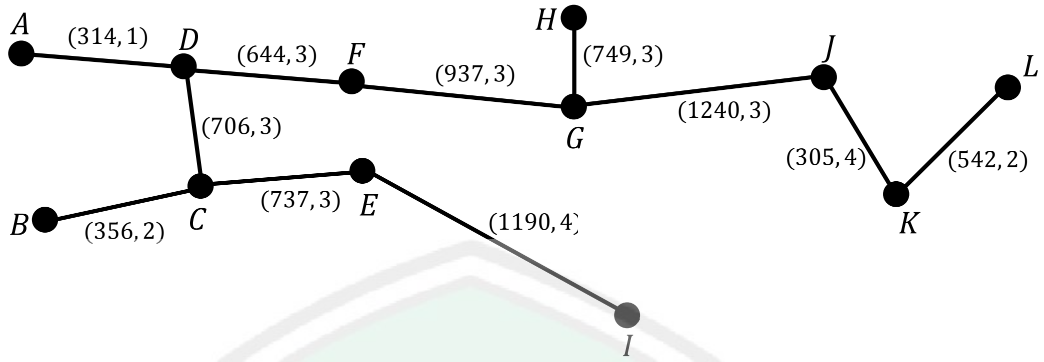
    b) MST_7 adalah solusi *dominated* karena memiliki TC lebih besar dari MST_6.

    c) Tidak ditemukan lagi sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

    d) Kembalikan sisi (3) LK.

4) Hapus sisi (4) JL

    a) Masukkan sisi (12) JK dan bangun MST_8 dengan $TC = (7720, 31)$.



Gambar 4.27 MST_8 Melalui EPDA dengan Algoritma Prim

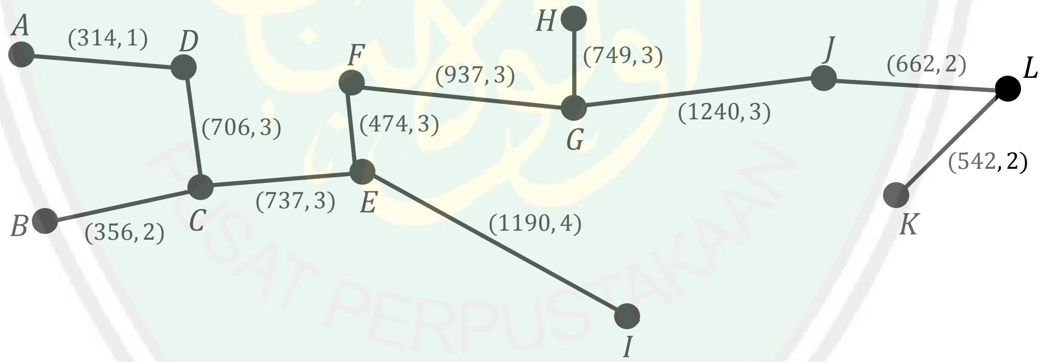
b) MST_8 adalah solusi *dominated* karena memiliki TC lebih besar dari MST_6.

c) Tidak ditemukan lagi sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

d) Kembalikan sisi (4) JL.

5) Hapus sisi (6) DF

a) Masukkan sisi (5) EF dan bangun MST_9 dengan $TC = (7907, 29)$.



Gambar 4.28 MST_9 Melalui EPDA dengan Algoritma Prim

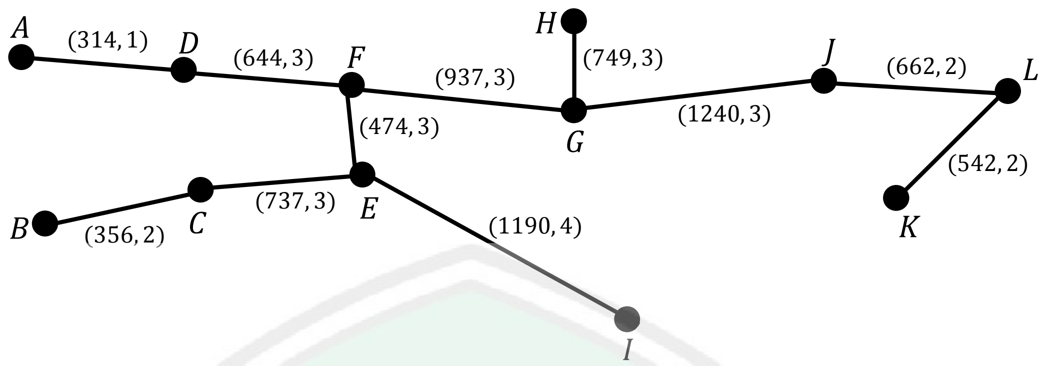
b) MST_9 adalah solusi *dominated* karena memiliki TC lebih besar dari MST_{11}.

c) Tidak ditemukan lagi sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

d) Kembalikan sisi (6) DF.

6) Hapus sisi (7) CD

a) Masukkan sisi (5) EF dan bangun MST_{10} dengan $TC = (7845, 29)$.



Gambar 4.29 MST_{10} Melalui EPDA dengan Algoritma Prim

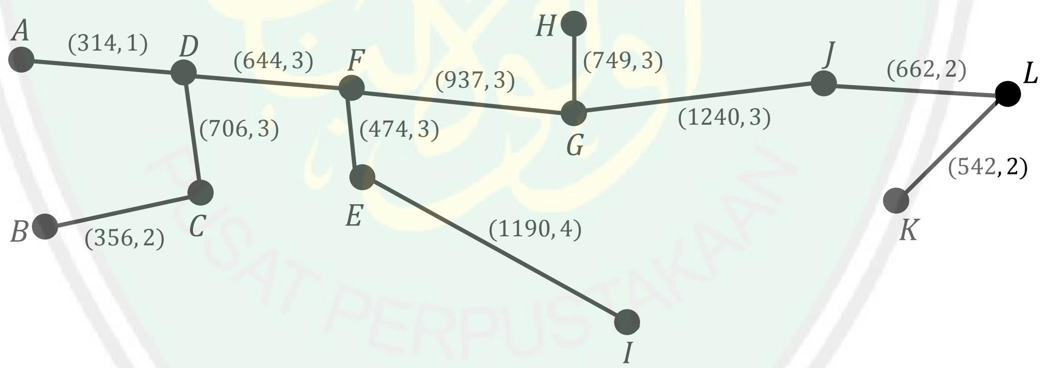
b) MST_{10} adalah solusi *dominated* karena memiliki TC lebih besar dari MST_{11}.

c) Tidak ditemukan lagi sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

d) Kembalikan sisi (7) CD.

7) Hapus sisi (8) CE

a) Masukkan sisi (5) EF dan bangun MST_{11} dengan $TC = (7814, 29)$.



Gambar 4.30 MST_{11} Melalui EPDA dengan Algoritma Prim

b) MST_{11} adalah solusi efisien dengan karakteristik sisi = 8.

c) Tidak ditemukan lagi sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

d) Kembalikan sisi (8) CE.

8) Hapus sisi (9) GH

a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

b) Kembalikan sisi (9) GH.

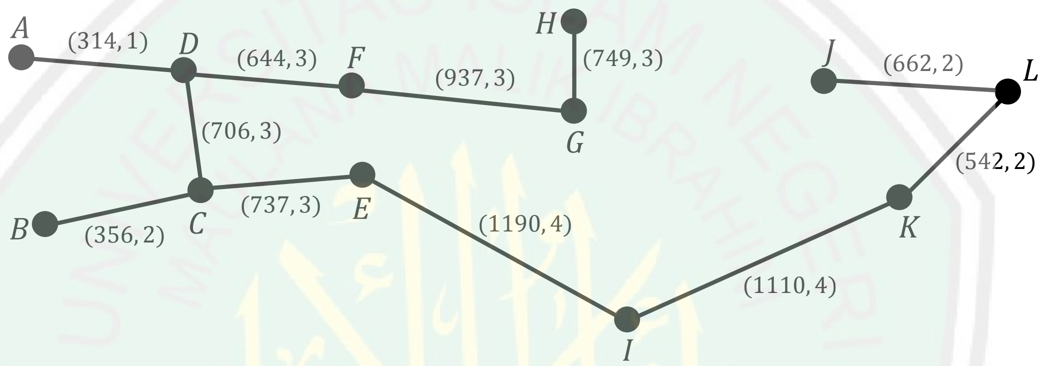
9) Hapus sisi (10) FG

a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

b) Kembalikan sisi (10) FG.

10) Hapus sisi (11) GJ

a) Masukkan sisi (14) IK dan bangun MST_{12} dengan $TC = (7947, 30)$.



Gambar 4.31 MST_{12} Melalui EPDA dengan Algoritma Prim

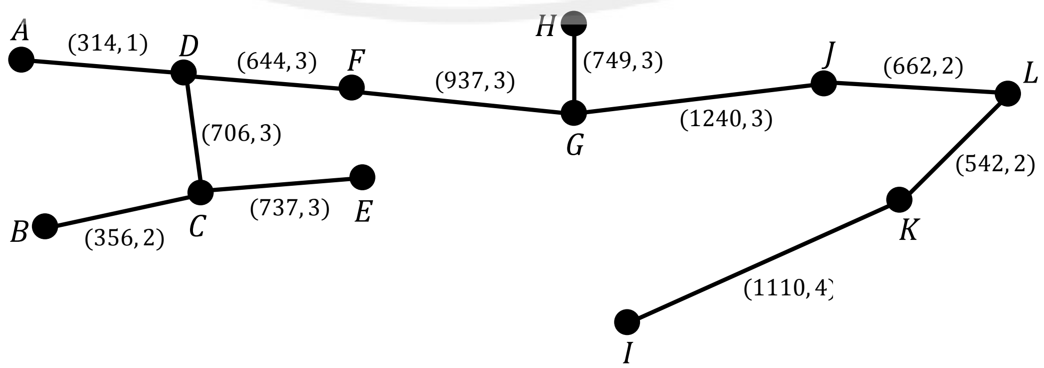
b) MST_{12} adalah solusi *dominated* karena memiliki TC lebih besar dari MST_3.

c) Tidak ditemukan lagi sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

d) Kembalikan sisi (11) GJ.

11) Hapus sisi (15) EI

a) Masukkan sisi (14) IK dan bangun MST_{13} dengan $TC = (7997, 29)$.



Gambar 4.32 MST_{13} Melalui EPDA dengan Algoritma Prim

b) MST_{13} adalah solusi *dominated* karena memiliki TC lebih besar dari MST_{11}.

c) Tidak ditemukan lagi sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 2.

d) Kembalikan sisi (15) EI.

Menentukan Solusi Efisien

1) Untuk solusi MST_3 dengan $TC = (7684, 30)$

a) Cek MST_1 dengan $TC = (7327, 32)$. Jika $(cx, ty) = (7684, 30)$ dan $(cx', ty') = (7327, 32)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

b) Cek MST_2 dengan $TC = (8077, 29)$. Jika $(cx, ty) = (7684, 30)$ dan $(cx', ty') = (8077, 29)$, maka $cx < cx'$, $ty > ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

c) Cek MST_4 dengan $TC = (8262, 31)$. Jika $(cx, ty) = (7684, 30)$ dan $(cx', ty') = (8262, 31)$, maka $cx < cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga (x, y) mendominasi (x', y') dan (cx, ty) mendominasi (cx', ty'). Artinya solusi MST_4 dengan $TC = (8262, 31)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_3 dengan $TC = (7684, 30)$.

d) Cek MST_5 dengan $TC = (7457, 31)$. Jika $(cx, ty) = (7684, 30)$ dan $(cx', ty') = (7457, 31)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

e) Cek MST_6 dengan $TC = (7377, 31)$. Jika $(cx, ty) = (7684, 30)$ dan $(cx', ty') = (7377, 31)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

f) Cek MST_7 dengan $TC = (7840, 31)$. Jika $(cx, ty) = (7684, 30)$ dan $(cx', ty') = (7840, 31)$, maka $cx < cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$.

Sehingga (x, y) mendominasi (x', y') dan (cx, ty) mendominasi (cx', ty'). Artinya solusi MST_7 dengan $TC = (7840, 31)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_3 dengan $TC = (7684, 30)$.

g) Cek MST_8 dengan $TC = (7720, 31)$. Jika $(cx, ty) = (7684, 30)$ dan $(cx', ty') = (7720, 31)$, maka $cx < cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga (x, y) mendominasi (x', y') dan (cx, ty) mendominasi (cx', ty'). Artinya solusi MST_8 dengan $TC = (7720, 31)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_3 dengan $TC = (7684, 30)$.

h) Cek MST_9 dengan $TC = (7907, 29)$. Jika $(cx, ty) = (7684, 30)$ dan $(cx', ty') = (7907, 29)$, maka $cx < cx'$, $ty > ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

i) Cek MST_{10} dengan $TC = (7845, 29)$. Jika $(cx, ty) = (7684, 30)$ dan $(cx', ty') = (7845, 29)$, maka $cx < cx'$, $ty > ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

j) Cek MST_{11} dengan $TC = (7814, 29)$. Jika $(cx, ty) = (7684, 30)$ dan $(cx', ty') = (7814, 29)$, maka $cx < cx'$, $ty > ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

k) Cek MST_{12} dengan $TC = (7947, 30)$. Jika $(cx, ty) = (7684, 30)$ dan $(cx', ty') = (7947, 30)$, maka $cx < cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x, y) mendominasi (x', y') dan (cx, ty) mendominasi (cx', ty'). Artinya solusi MST_{12} dengan $TC = (7947, 30)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_3 dengan $TC = (7684, 30)$.

l) Cek MST_{13} dengan $TC = (7997, 29)$. Jika $(cx, ty) = (7684, 30)$ dan $(cx', ty') = (7997, 29)$, maka $cx < cx'$, $ty > ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

m) Misalkan $(x^*, y^*) = (7684, 30)$. Karena tidak ada $(x, y) \in S$ sedemikian sehingga (x, y) mendominasi (x^*, y^*), maka solusi MST_3 dengan $TC = (7684, 30)$ merupakan solusi efisien atau PF.

2) Untuk solusi MST_4 dengan $TC = (8262, 31)$

a) Cek MST_6 dengan $TC = (7377, 31)$. Jika $(cx, ty) = (8262, 31)$ dan $(cx', ty') = (7377, 31)$, maka $cx > cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x', y') mendominasi (x, y) dan (cx', ty') mendominasi (cx, ty). Artinya solusi MST_4 dengan $TC = (8262, 31)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_6 dengan $TC = (7377, 31)$.

b) Misalkan $(x, y) = (8262, 31)$. Karena terdapat $(x', y') = (7377, 31)$ sedemikian sehingga (x', y') mendominasi (x, y), maka solusi MST_4 dengan $TC = (8262, 31)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_6 dengan $TC = (7377, 31)$.

3) Untuk solusi MST_5 dengan $TC = (7457, 31)$

a) Cek MST_6 dengan $TC = (7377, 31)$. Jika $(cx, ty) = (7457, 31)$ dan $(cx', ty') = (7377, 31)$, maka $cx > cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x', y') mendominasi (x, y) dan (cx', ty') mendominasi (cx, ty). Artinya solusi MST_5 dengan $TC = (7457, 31)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_6 dengan $TC = (7377, 31)$.

b) Misalkan $(x, y) = (7457, 31)$. Karena terdapat $(x', y') = (7377, 31)$ sedemikian sehingga (x', y') mendominasi (x, y), maka solusi MST_5 dengan

$TC = (7457, 31)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_6 dengan $TC = (7377, 31)$.

4) Untuk solusi MST_6 dengan $TC = (7377, 31)$

a) Cek MST_1 dengan $TC = (7327, 32)$. Jika $(cx, ty) = (7377, 31)$ dan $(cx', ty') = (7327, 32)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

b) Cek MST_2 dengan $TC = (8077, 29)$. Jika $(cx, ty) = (7377, 31)$ dan $(cx', ty') = (8077, 29)$, maka $cx < cx'$, $ty > ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

c) Cek MST_3 dengan $TC = (7684, 30)$. Jika $(cx, ty) = (7377, 31)$ dan $(cx', ty') = (7684, 30)$, maka $cx < cx'$, $ty > ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

d) Cek MST_4 dengan $TC = (8262, 31)$. Jika $(cx, ty) = (7377, 31)$ dan $(cx', ty') = (8262, 31)$, maka $cx < cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x, y) mendominasi (x', y') dan (cx, ty) mendominasi (cx', ty'). Artinya solusi MST_4 dengan $TC = (8262, 31)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_6 dengan $TC = (7377, 31)$.

e) Cek MST_5 dengan $TC = (7457, 31)$. Jika $(cx, ty) = (7377, 31)$ dan $(cx', ty') = (7457, 31)$, maka $cx < cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x, y) mendominasi (x', y') dan (cx, ty) mendominasi (cx', ty'). Artinya solusi MST_5 dengan $TC = (7457, 31)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_6 dengan $TC = (7377, 31)$.

f) Cek MST_7 dengan $TC = (7840, 31)$. Jika $(cx, ty) = (7377, 31)$ dan $(cx', ty') = (7840, 31)$, maka $cx < cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x, y)

mendominasi (x', y') dan (cx, ty) mendominasi (cx', ty'). Artinya solusi MST_7 dengan $TC = (7840, 31)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_6 dengan $TC = (7377, 31)$.

g) Cek MST_8 dengan $TC = (7720, 31)$. Jika $(cx, ty) = (7377, 31)$ dan $(cx', ty') = (7720, 31)$, maka $cx < cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x, y) mendominasi (x', y') dan (cx, ty) mendominasi (cx', ty'). Artinya solusi MST_8 dengan $TC = (7720, 31)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_6 dengan $TC = (7377, 31)$.

h) Cek MST_9 dengan $TC = (7907, 29)$. Jika $(cx, ty) = (7377, 31)$ dan $(cx', ty') = (7907, 29)$, maka $cx < cx'$, $ty > ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

i) Cek MST_{10} dengan $TC = (7845, 29)$. Jika $(cx, ty) = (7377, 31)$ dan $(cx', ty') = (7845, 29)$, maka $cx < cx'$, $ty > ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

j) Cek MST_{11} dengan $TC = (7814, 29)$. Jika $(cx, ty) = (7377, 31)$ dan $(cx', ty') = (7814, 29)$, maka $cx < cx'$, $ty > ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

k) Cek MST_{12} dengan $TC = (7947, 30)$. Jika $(cx, ty) = (7377, 31)$ dan $(cx', ty') = (7947, 30)$, maka $cx < cx'$, $ty > ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

l) Cek MST_{13} dengan $TC = (7997, 29)$. Jika $(cx, ty) = (7377, 31)$ dan $(cx', ty') = (7997, 29)$, maka $cx < cx'$, $ty > ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

m) Misalkan $(x^*, y^*) = (7377, 31)$. Karena tidak ada $(x, y) \in S$ sedemikian sehingga (x, y) mendominasi (x^*, y^*), maka solusi MST_6 dengan $TC = (7377, 31)$ merupakan solusi efisien atau PF.

5) Untuk solusi MST_7 dengan $TC = (7840, 31)$
   a) Cek MST_6 dengan $TC = (7377, 31)$. Jika $(cx, ty) = (7840, 31)$ dan $(cx', ty') = (7377, 31)$, maka $cx > cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x', y') mendominasi (x, y) dan (cx', ty') mendominasi (cx, ty). Artinya solusi MST_7 dengan $TC = (7840, 31)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_6 dengan $TC = (7377, 31)$.
   b) Misalkan $(x, y) = (7840, 31)$. Karena terdapat $(x', y') = (7377, 31)$ sedemikian sehingga (x', y') mendominasi (x, y), maka solusi MST_7 dengan $TC = (7840, 31)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_6 dengan $TC = (7377, 31)$.

6) Untuk solusi MST_8 dengan $TC = (7720, 31)$
   a) Cek MST_6 dengan $TC = (7377, 31)$. Jika $(cx, ty) = (7720, 31)$ dan $(cx', ty') = (7377, 31)$, maka $cx > cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x', y') mendominasi (x, y) dan (cx', ty') mendominasi (cx, ty). Artinya solusi MST_8 dengan $TC = (7720, 31)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_6 dengan $TC = (7377, 31)$.
   b) Misalkan $(x, y) = (7720, 31)$. Karena terdapat $(x', y') = (7377, 31)$ sedemikian sehingga (x', y') mendominasi (x, y), maka solusi MST_8 dengan $TC = (7720, 31)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_6 dengan $TC = (7377, 31)$.

7) Untuk solusi MST_9 dengan $TC = (7907, 29)$

a) Cek MST_{11} dengan $TC = (7814, 29)$. Jika $(cx, ty) = (7907, 29)$ dan $(cx', ty') = (7814, 29)$, maka $cx > cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x', y') mendominasi (x, y) dan (cx', ty') mendominasi (cx, ty). Artinya solusi MST_9 dengan $TC = (7907, 29)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_{11} dengan $TC = (7814, 29)$.

b) Misalkan $(x, y) = (7907, 29)$. Karena terdapat $(x', y') = (7814, 29)$ sedemikian sehingga (x', y') mendominasi (x, y), maka solusi MST_9 dengan $TC = (7907, 29)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_{11} dengan $TC = (7814, 29)$.

8) Untuk solusi MST_{10} dengan $TC = (7845, 29)$

a) Cek MST_{11} dengan $TC = (7814, 29)$. Jika $(cx, ty) = (7845, 29)$ dan $(cx', ty') = (7814, 29)$, maka $cx > cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x', y') mendominasi (x, y) dan (cx', ty') mendominasi (cx, ty). Artinya solusi MST_{10} dengan $TC = (7845, 29)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_{11} dengan $TC = (7814, 29)$.

b) Misalkan $(x, y) = (7845, 29)$. Karena terdapat $(x', y') = (7814, 29)$ sedemikian sehingga (x', y') mendominasi (x, y), maka solusi MST_{10} dengan $TC = (7845, 29)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_{11} dengan $TC = (7814, 29)$.

9) Untuk solusi MST_{11} dengan $TC = (7814, 29)$

a) Cek MST_1 dengan $TC = (7327, 32)$. Jika $(cx, ty) = (7814, 29)$ dan $(cx', ty') = (7327, 32)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

b) Cek MST_2 dengan $TC = (8077, 29)$. Jika $(cx, ty) = (7814, 29)$ dan $(cx', ty') = (8077, 29)$, maka $cx < cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x, y) mendominasi (x', y') dan (cx, ty) mendominasi (cx', ty'). Artinya solusi MST_2 dengan $TC = (8077, 29)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_{11} dengan $TC = (7814, 29)$.

c) Cek MST_3 dengan $TC = (7684, 30)$. Jika $(cx, ty) = (7814, 29)$ dan $(cx', ty') = (7684, 30)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

d) Cek MST_4 dengan $TC = (8262, 31)$. Jika $(cx, ty) = (7814, 29)$ dan $(cx', ty') = (8262, 31)$, maka $cx < cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga (x, y) mendominasi (x', y') dan (cx, ty) mendominasi (cx', ty'). Artinya solusi MST_4 dengan $TC = (8262, 31)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_{11} dengan $TC = (7814, 29)$.

e) Cek MST_5 dengan $TC = (7457, 31)$. Jika $(cx, ty) = (7814, 29)$ dan $(cx', ty') = (7457, 31)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

f) Cek MST_6 dengan $TC = (7377, 31)$. Jika $(cx, ty) = (7814, 29)$ dan $(cx', ty') = (7377, 31)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

g) Cek MST_7 dengan $TC = (7840, 31)$. Jika $(cx, ty) = (7814, 29)$ dan $(cx', ty') = (7840, 31)$, maka $cx < cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga (x, y) mendominasi (x', y') dan (cx, ty) mendominasi (cx', ty'). Artinya solusi MST_7 dengan $TC = (7840, 31)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_{11} dengan $TC = (7814, 29)$.

h) Cek MST_8 dengan $TC = (7720, 31)$. Jika $(cx, ty) = (7814, 29)$ dan $(cx', ty') = (7720, 31)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

i) Cek MST_9 dengan $TC = (7907, 29)$. Jika $(cx, ty) = (7814, 29)$ dan $(cx', ty') = (7907, 29)$, maka $cx < cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x, y) mendominasi (x', y') dan (cx, ty) mendominasi (cx', ty'). Artinya solusi MST_9 dengan $TC = (7907, 29)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_{11} dengan $TC = (7814, 29)$.

j) Cek MST_{10} dengan $TC = (7845, 29)$. Jika $(cx, ty) = (7814, 29)$ dan $(cx', ty') = (7845, 29)$, maka $cx < cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x, y) mendominasi (x', y') dan (cx, ty) mendominasi (cx', ty'). Artinya solusi MST_{10} dengan $TC = (7845, 29)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_{11} dengan $TC = (7814, 29)$.

k) Cek MST_{12} dengan $TC = (7947, 30)$. Jika $(cx, ty) = (7814, 29)$ dan $(cx', ty') = (7947, 30)$, maka $cx < cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga (x, y) mendominasi (x', y') dan (cx, ty) mendominasi (cx', ty'). Artinya solusi MST_{12} dengan $TC = (7947, 30)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_{11} dengan $TC = (7814, 29)$.

l) Cek MST_{13} dengan $TC = (7997, 29)$. Jika $(cx, ty) = (7814, 29)$ dan $(cx', ty') = (7997, 29)$, maka $cx < cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x, y) mendominasi (x', y') dan (cx, ty) mendominasi (cx', ty'). Artinya solusi MST_{13} dengan $TC = (7997, 29)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_{11} dengan $TC = (7814, 29)$.

m) Misalkan $(x^*, y^*) = (7814, 29)$. Karena tidak ada $(x, y) \in S$ sedemikian sehingga (x, y) mendominasi (x^*, y^*), maka solusi MST_{11} dengan $TC = (7814, 29)$ merupakan solusi efisien atau PF.

10) Untuk solusi MST_{12} dengan $TC = (7947, 30)$

a) Cek MST_3 dengan $TC = (7684, 30)$. Jika $(cx, ty) = (7947, 30)$ dan $(cx', ty') = (7684, 30)$, maka $cx > cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x', y') mendominasi (x, y) dan (cx', ty') mendominasi (cx, ty). Artinya solusi MST_{12} dengan $TC = (7947, 30)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_3 dengan $TC = (7684, 30)$.

b) Misalkan $(x, y) = (7947, 30)$. Karena terdapat $(x', y') = (7684, 30)$ sedemikian sehingga (x', y') mendominasi (x, y), maka solusi MST_{12} dengan $TC = (7947, 30)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_3 dengan $TC = (7684, 30)$.

11) Untuk solusi MST_{13} dengan $TC = (7997, 29)$

a) Cek MST_{11} dengan $TC = (7814, 29)$. Jika $(cx, ty) = (7997, 29)$ dan $(cx', ty') = (7814, 29)$, maka $cx > cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x', y') mendominasi (x, y) dan (cx', ty') mendominasi (cx, ty). Artinya solusi MST_{13} dengan $TC = (7997, 29)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_{11} dengan $TC = (7814, 29)$.

b) Misalkan $(x, y) = (7997, 29)$. Karena terdapat $(x', y') = (7814, 29)$ sedemikian sehingga (x', y') mendominasi (x, y), maka solusi MST_{13} dengan $TC = (7997, 29)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_{11} dengan $TC = (7814, 29)$.

Tahap 3

Mutasi kembali sesuai dengan tahap 2 dengan meniadakan syarat $j \neq i$ dalam kondisi ketiga. Kemudian setiap MSTs di APS digunakan untuk membuat STs baru dengan memilih setiap sisi non-karakteristik diganti dengan sisi yang bersesuaian. Kemudian seluruh MSTs yang diperoleh menjadi solusi efisien dari masalah MCMST. Adapun MSTs yang diperoleh dari tahap 1 dan tahap 2 adalah sebagai berikut:

1. MST_1 dengan $TC = (7327, 32)$
2. MST_3 dengan $TC = (7684, 30)$
3. MST_6 dengan $TC = (7377, 31)$
4. MST_{11} dengan $TC = (7814\ ,29)$

Untuk sementara, keempat MST yang diperoleh merupakan solusi efisien dan masuk ke dalam APS. Selanjutnya semua MST yang termuat dalam APS dimutasi kembali. Kecuali MST_1. Karena MST tersebut sudah dimutasi dan optimal jika syarat $j \neq i$ dalam kondisi ketiga tidak diberlakukan. Sehingga dalam tahapan ini yang dimutasi adalah MST_3, MST_6, dan MST_{11}. Adapun MST_3 dan MST_6 menggunakan indeks sesuai dengan *Edge List*[1]. Sedangkan MST_{11} menggunakan indeks sesuai dengan *Edge List*[2].

Mutasi MST_3

1) Hapus sisi (2) AD
   a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.
   b) Kembalikan sisi (2) AD.
2) Hapus sisi (3) BC
   a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

b) Kembalikan sisi (3) BC.

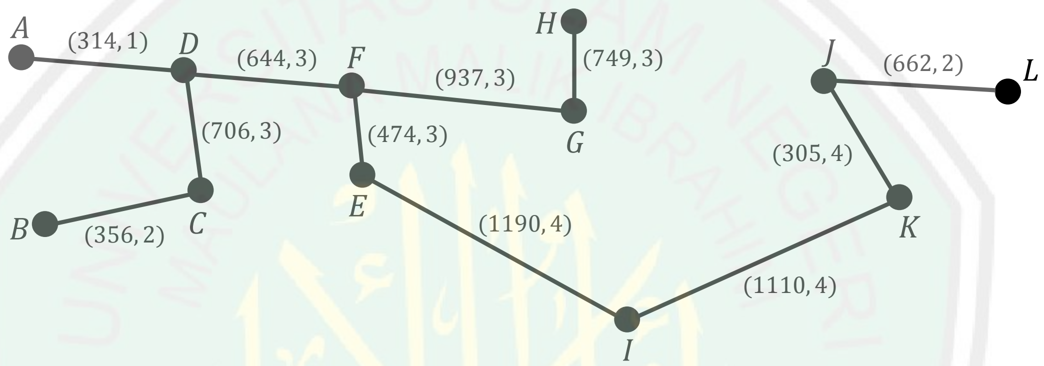
3) Hapus sisi (4) EF

a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

b) Kembalikan sisi (4) EF.

4) Hapus sisi (5) LK

a) Masukkan sisi (1) JK dan bangun MST_{14} dengan $TC = (7447, 32)$.



Gambar 4.33 MST_{14} Melalui EPDA dengan Algoritma Prim

b) MST_{14} adalah solusi *dominated* karena memiliki TC lebih besar dari MST_1.

c) Tidak ditemukan lagi sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

d) Kembalikan sisi (5) LK.

5) Hapus sisi (6) DF

a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

b) Kembalikan sisi (6) DF.

6) Adapun sisi (7) tidak dihapus karena sisi JL merupakan sisi karakteristik.

7) Hapus sisi (8) CD

a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

b) Kembalikan sisi (8) CD.

8) Hapus sisi (10) GH

a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

b) Kembalikan sisi (10) GH.

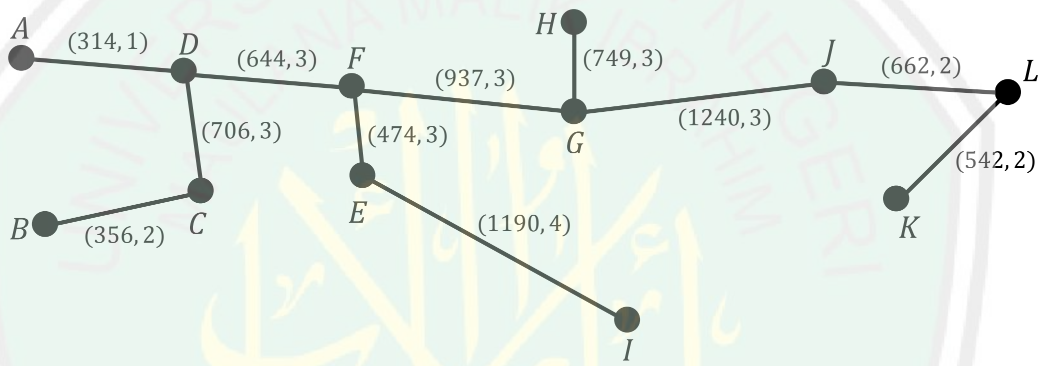
9) Hapus sisi (12) FG

a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

b) Kembalikan sisi (12) FG.

10) Hapus sisi (13) IK

a) Masukkan sisi (15) GJ dan bangun MST_{15} dengan $TC = (7814, 29)$.



Gambar 4.34 MST_{15} Melalui EPDA dengan Algoritma Prim

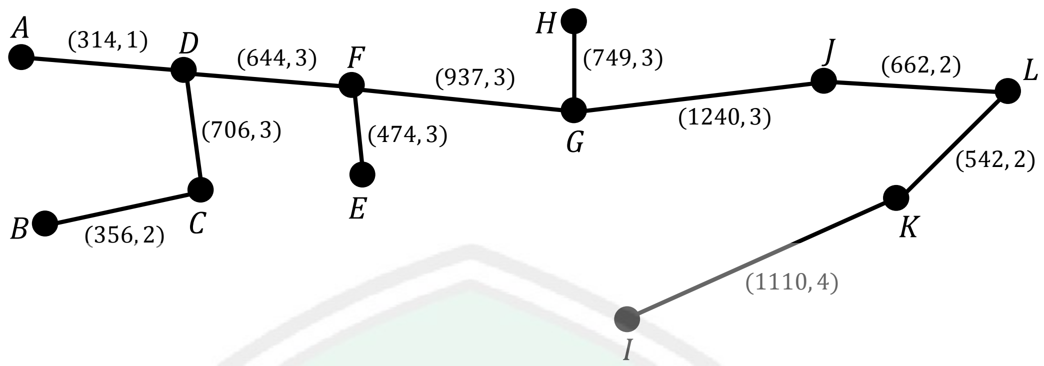
b) MST_{15} adalah solusi *dominated* karena memiliki TC lebih besar dari MST_2.

c) Tidak ditemukan lagi sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

d) Kembalikan sisi (13) IK.

11) Hapus sisi (14) EI

a) Masukkan sisi (15) GJ dan bangun MST_{16} dengan $TC = (7734, 29)$.



Gambar 4.35 MST_{16} Melalui EPDA dengan Algoritma Prim

b) MST_{16} adalah solusi efisien dengan karakteristik sisi = 14.

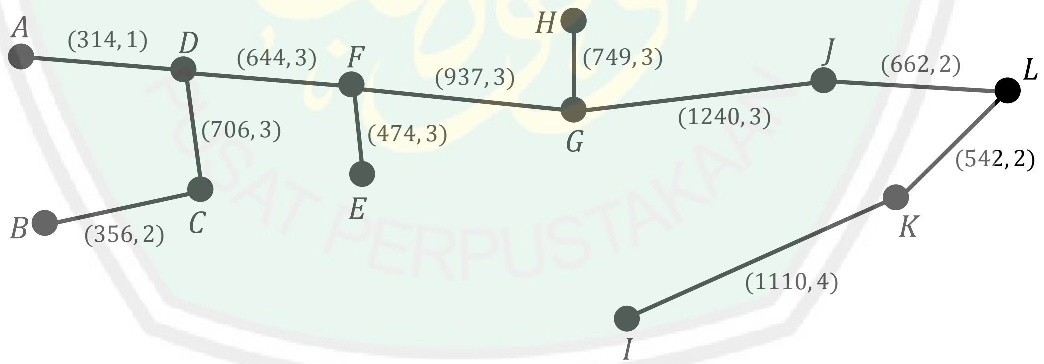
c) Tidak ditemukan lagi sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

d) Kembalikan sisi (14) EI.

Mutasi MST_6

1) Hapus sisi (1) JK

a) Masukkan sisi (7) JL dan bangun MST_{17} dengan $TC = (7734, 29)$.



Gambar 4.36 MST_{17} Melalui EPDA dengan Algoritma Prim

b) MST_{17} adalah solusi *dominated* karena memiliki TC sama dengan MST_{16}.

c) Tidak ditemukan lagi sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

d) Kembalikan sisi (1) JK.

2) Hapus sisi (2) AD

   a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

   b) Kembalikan sisi (2) AD.

3) Hapus sisi (3) BC

   a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

   b) Kembalikan sisi (3) BC.

4) Hapus sisi (4) EF

   a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

   b) Kembalikan sisi (4) EF.

5) Hapus sisi (5) LK

   a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

   b) Kembalikan sisi (5) LK.

6) Hapus sisi (6) DF

   a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

   b) Kembalikan sisi (6) DF.

7) Hapus sisi (8) CD

   a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

   b) Kembalikan sisi (8) CD.

8) Hapus sisi (10) GH

   a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

   b) Kembalikan sisi (10) GH.

9) Hapus sisi (12) FG

   a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

   b) Kembalikan sisi (12) FG.

10) Hapus sisi (13) IK

a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

b) Kembalikan sisi (13) IK.

11) Adapun sisi (15) tidak dihapus karena sisi GJ merupakan sisi karakteristik.

Mutasi MST_{11}

1) Hapus sisi (1) AD

a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

b) Kembalikan sisi (1) AD.

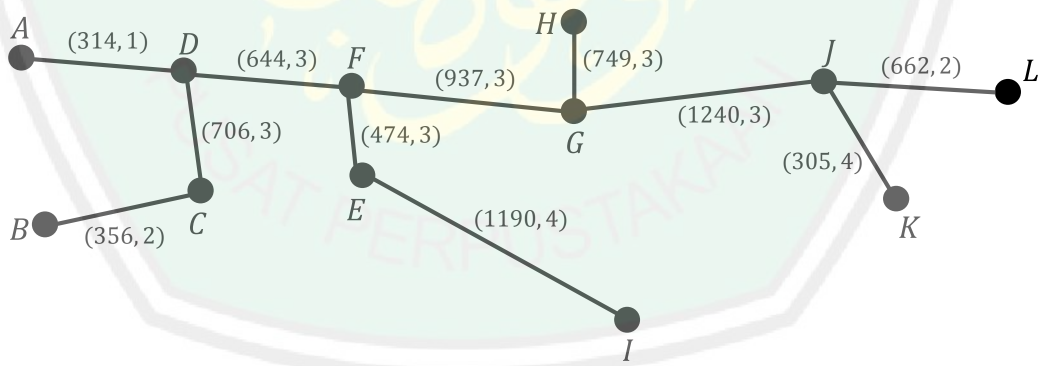
2) Hapus sisi (2) BC

a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

b) Kembalikan sisi (2) BC.

3) Hapus sisi (3) LK

a) Masukkan sisi (12) JK dan bangun MST_{18} dengan $TC = (7577, 31)$.



Gambar 4.37 MST_{18} Melalui EPDA dengan Algoritma Prim

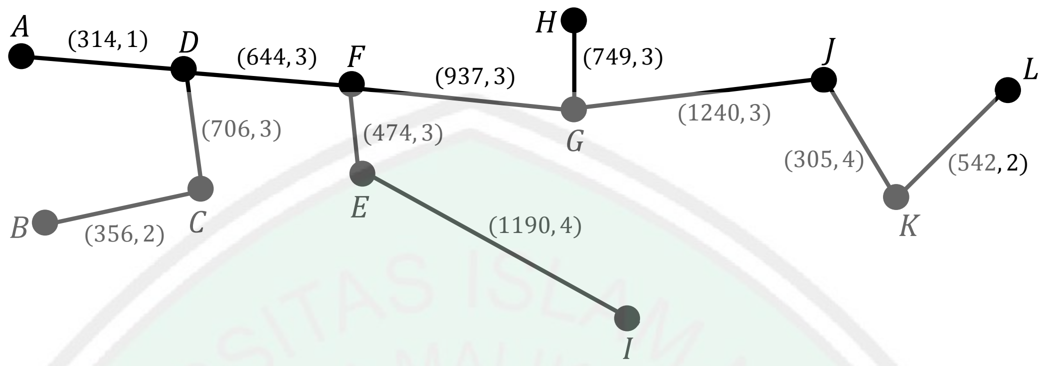
b) MST_{18} adalah solusi *dominated* karena memiliki TC lebih besar dari MST_6.

c) Tidak ditemukan lagi sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

d) Kembalikan sisi (3) LK.

4) Hapus sisi (4) JL

a) Masukkan sisi (12) JK dan bangun MST_{19} dengan $TC = (7457, 31)$.



Gambar 4.38 MST_{19} Melalui EPDA dengan Algoritma Prim

b) MST_{19} adalah solusi *dominated* karena memiliki TC lebih besar dari MST_6.

c) Tidak ditemukan lagi sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

d) Kembalikan sisi (4) JL.

5) Adapun sisi (5) tidak dihapus karena sisi EF merupakan sisi karakteristik.

6) Hapus sisi (6) DF

a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

b) Kembalikan sisi (6) DF.

7) Hapus sisi (7) CD

a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

b) Kembalikan sisi (7) CD.

8) Hapus sisi (9) GH

a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

b) Kembalikan sisi (9) GH.

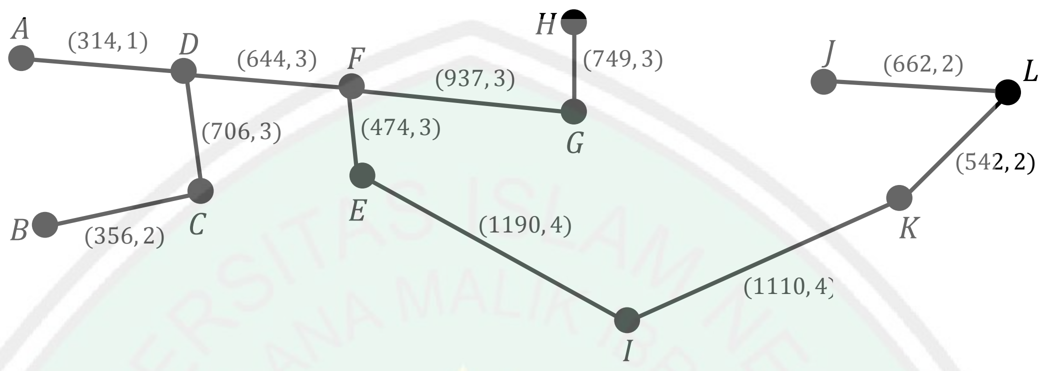
9) Hapus sisi (10) FG

a) Tidak ditemukan sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

b) Kembalikan sisi (10) FG.

10) Hapus sisi (11) GJ

a) Masukkan sisi (14) IK dan bangun MST_{20} dengan $TC = (7684, 30)$.



Gambar 4.39 MST_{20} Melalui EPDA dengan Algoritma Prim

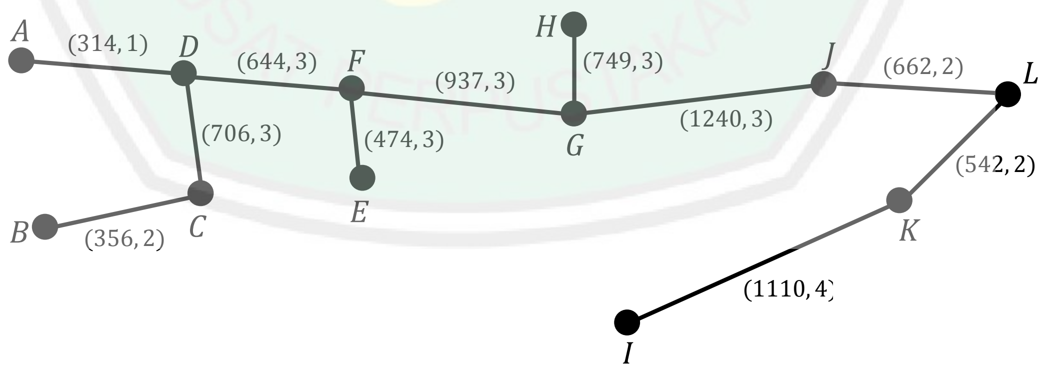
b) MST_{20} adalah solusi *dominated* karena memiliki TC sama dengan MST_3.

c) Tidak ditemukan lagi sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

d) Kembalikan sisi (11) GJ.

11) Hapus sisi (15) EI

a) Masukkan sisi (14) IK dan bangun MST_{21} dengan $TC = (7997, 29)$.



Gambar 4.40 MST_{21} Melalui EPDA dengan Algoritma Prim

b) MST_{21} adalah solusi *dominated* karena memiliki TC sama dengan MST_{16}.

c) Tidak ditemukan lagi sisi baru yang memenuhi tiga kondisi pada tahap 3.

d) Kembalikan sisi (15) EI.

Menentukan Solusi Efisien

1) Untuk solusi MST_{14} dengan $TC = (7447, 32)$

   a) Cek MST_1 dengan $TC = (7327, 32)$. Jika $(cx, ty) = (7447, 32)$ dan $(cx', ty') = (7327, 32)$, maka $cx > cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x', y') mendominasi (x, y) dan (cx', ty') mendominasi (cx, ty). Artinya solusi MST_{14} dengan $TC = (7447, 32)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_1 dengan $TC = (7327, 23)$.

   b) Misalkan $(x, y) = (7447, 32)$. Karena terdapat $(x', y') = (7327, 23)$ sedemikian sehingga (x', y') mendominasi (x, y), maka solusi MST_{14} dengan $TC = (7447, 32)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_1 dengan $TC = (7327, 23)$.

2) Untuk solusi MST_{15} dengan $TC = (7814, 29)$

   a) Cek MST_{16} dengan $TC = (7734, 29)$. Jika $(cx, ty) = (7814, 29)$ dan $(cx', ty') = (7734, 29)$, maka $cx > cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x', y') mendominasi (x, y) dan (cx', ty') mendominasi (cx, ty). Artinya solusi MST_{15} dengan $TC = (7814, 29)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_{16} dengan $TC = (7734, 29)$.

   b) Misalkan $(x, y) = (7814, 29)$. Karena terdapat $(x', y') = (7734, 29)$ sedemikian sehingga (x', y') mendominasi (x, y), maka solusi MST_{15} dengan $TC = (7814, 29)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_{16} dengan $TC = (7734, 29)$.

3) Untuk solusi MST_{16} dengan $TC = (7734, 29)$

a) Cek MST_1 dengan $TC = (7327, 32)$. Jika $(cx, ty) = (7734, 29)$ dan $(cx', ty') = (7327, 32)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

b) Cek MST_3 dengan $TC = (7684, 30)$. Jika $(cx, ty) = (7734, 29)$ dan $(cx', ty') = (7684, 30)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

c) Cek MST_6 dengan $TC = (7377, 31)$. Jika $(cx, ty) = (7734, 29)$ dan $(cx', ty') = (7377, 31)$, maka $cx > cx'$, $ty < ty'$, dan $(cx, ty) \neq (cx', ty')$. Sehingga keduanya tidak saling mendominasi.

d) Cek MST_{11} dengan $TC = (7814, 29)$. Jika $(cx, ty) = (7734, 29)$ dan $(cx', ty') = (7814, 29)$, maka $cx < cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x, y) mendominasi (x', y') dan (cx, ty) mendominasi (cx', ty'). Artinya solusi MST_{11} dengan $TC = (7814, 29)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_{16} dengan $TC = (7734, 29)$.

e) Misalkan $(x^*, y^*) = (7734, 29)$. Karena tidak ada $(x, y) \in S$ sedemikian sehingga (x, y) mendominasi (x^*, y^*), maka solusi MST_{16} dengan $TC = (7734, 29)$ merupakan solusi efisien atau PF.

4) Untuk solusi MST_{17} dengan $TC = (7734, 29)$

a) Cek MST_{16} dengan $TC = (7734, 29)$. Jika $(cx, ty) = (7734, 29)$ dan $(cx', ty') = (7734, 29)$, maka $cx = cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x', y') mendominasi (x, y) dan (cx', ty') mendominasi (cx, ty). Artinya solusi MST_{17} dengan $TC = (7734, 29)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_{16} dengan $TC = (7734, 29)$.

b) Misalkan $(x, y) = (7734, 29)$. Karena terdapat $(x', y') = (7734, 29)$ sedemikian sehingga (x', y') mendominasi (x, y), maka solusi MST_{17} dengan $TC = (7734, 29)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_{16} dengan $TC = (7734, 29)$.

5) Untuk solusi MST_{18} dengan $TC = (7577, 31)$

a) Cek MST_6 dengan $TC = (7377, 31)$. Jika $(cx, ty) = (7577, 31)$ dan $(cx', ty') = (7377, 31)$, maka $cx > cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x', y') mendominasi (x, y) dan (cx', ty') mendominasi (cx, ty). Artinya solusi MST_{18} dengan $TC = (7577, 31)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_6 dengan $TC = (7377, 31)$.

b) Misalkan $(x, y) = (7577, 31)$. Karena terdapat $(x', y') = (7377, 31)$ sedemikian sehingga (x', y') mendominasi (x, y), maka solusi MST_{18} dengan $TC = (7577, 31)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_6 dengan $TC = (7377, 31)$.

6) Untuk solusi MST_{19} dengan $TC = (7457, 31)$

a) Cek MST_6 dengan $TC = (7377, 31)$. Jika $(cx, ty) = (7457, 31)$ dan $(cx', ty') = (7377, 31)$, maka $cx > cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x', y') mendominasi (x, y) dan (cx', ty') mendominasi (cx, ty). Artinya solusi MST_{19} dengan $TC = (7457, 31)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_6 dengan $TC = (7377, 31)$.

b) Misalkan $(x, y) = (7457, 31)$. Karena terdapat $(x', y') = (7377, 31)$ sedemikian sehingga (x', y') mendominasi (x, y), maka solusi MST_{19} dengan $TC = (7457, 31)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_6 dengan $TC = (7377, 31)$.

7) Untuk solusi MST_{20} dengan $TC = (7684, 30)$

a) Cek MST_3 dengan $TC = (7684, 30)$. Jika $(cx, ty) = (7684, 30)$ dan $(cx', ty') = (7684, 30)$, maka $cx = cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x', y') mendominasi (x, y) dan (cx', ty') mendominasi (cx, ty). Artinya solusi MST_{20} dengan $TC = (7684, 30)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_3 dengan $TC = (7684, 30)$.

b) Misalkan $(x, y) = (7684, 30)$. Karena terdapat $(x', y') = (7684, 30)$ sedemikian sehingga (x', y') mendominasi (x, y), maka solusi MST_{20} dengan $TC = (7684, 30)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_3 dengan $TC = (7684, 30)$.

8) Untuk solusi MST_{21} dengan $TC = (7734, 29)$

a) Cek MST_{16} dengan $TC = (7734, 29)$. Jika $(cx, ty) = (7734, 29)$ dan $(cx', ty') = (7734, 29)$, maka $cx = cx'$ dan $ty = ty'$. Sehingga (x', y') mendominasi (x, y) dan (cx', ty') mendominasi (cx, ty). Artinya solusi MST_{21} dengan $TC = (7734, 29)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_{16} dengan $TC = (7734, 29)$.

b) Misalkan $(x, y) = (7734, 29)$. Karena terdapat $(x', y') = (7734, 29)$ sedemikian sehingga (x', y') mendominasi (x, y), maka solusi MST_{21} dengan $TC = (7734, 29)$ adalah solusi *dominated* atau didominasi oleh solusi MST_{16} dengan $TC = (7734, 29)$.

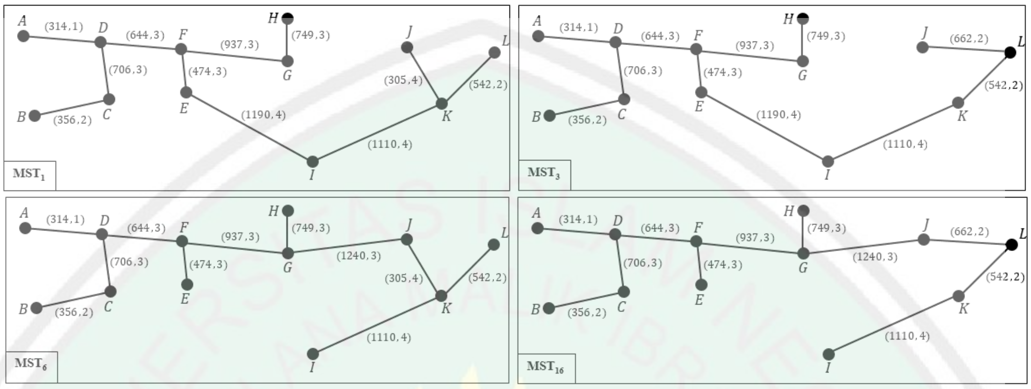
Setelah dilakukan mutasi kembali dan semua kemungkinan solusi telah dicek, maka MST yang menjadi solusi efisien atau solusi optimal Pareto untuk masalah MCMST dari graf pada Gambar 4.1 adalah sebagai berikut:

1. MST_1 dengan $TC = (7327, 32)$

2. MST_3 dengan $TC = (7684, 30)$

3. MST_6 dengan $TC = (7377, 31)$

4. MST_{16} dengan $TC = (7734, 29)$



Gambar 4.41 Solusi Efisien Menurut EPDA dengan Algortima Prim

Setelah diperoleh empat solusi efisien atau PF, maka selanjutnya semua solusi tersebut akan dicek apakah termasuk ke dalam solusi efisien yang *supported* atau *non-supported*.

Menentukan Solusi yang *Supported* dan *Non-Supported*

1) Misalkan $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = 1$

   a) MST_1 dengan $TC = (\lambda_1 \times 7327 + \lambda_2 \times 32) = (1 \times 7327 + 1 \times 32) = 7349$

   b) MST_3 dengan $TC = (\lambda_1 \times 7684 + \lambda_2 \times 30) = (1 \times 7684 + 1 \times 30) = 7714$

   c) MST_6 dengan $TC = (\lambda_1 \times 7377 + \lambda_2 \times 31) = (1 \times 7377 + 1 \times 31) = 7408$

   d) MST_{16} dengan $TC = (\lambda_1 \times 7734 + \lambda_2 \times 29) = (1 \times 7734 + 1 \times 29) = 7763$

e) Bobot minimum dari keempat solusi tersebut adalah solusi MST_1 dengan jumlah bobot sebesar 7359.

2) Misalkan $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = 100$

a) MST_1 dengan $TC = (\lambda_1 \times 7327 + \lambda_2 \times 32) = (100 \times 7327 + 1 \times 32) = 10527$

b) MST_3 dengan $TC = (\lambda_1 \times 7684 + \lambda_2 \times 30) = (100 \times 7684 + 1 \times 30) = 10684$

c) MST_6 dengan $TC = (\lambda_1 \times 7377 + \lambda_2 \times 31) = (100 \times 7377 + 1 \times 31) = 10477$

d) MST_{16} dengan $TC = (\lambda_1 \times 7734 + \lambda_2 \times 29) = (100 \times 7734 + 1 \times 29) = 10634$

e) Bobot minimum dari keempat solusi tersebut adalah solusi MST_6 dengan jumlah bobot sebesar 10477.

3) Misalkan $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = 1000$

a) MST_1 dengan $TC = (\lambda_1 \times 7327 + \lambda_2 \times 32) = (1000 \times 7327 + 1 \times 32) = 39327$

b) MST_3 dengan $TC = (\lambda_1 \times 7684 + \lambda_2 \times 30) = (1000 \times 7684 + 1 \times 30) = 37684$

c) MST_6 dengan $TC = (\lambda_1 \times 7377 + \lambda_2 \times 31) = (1000 \times 7377 + 1 \times 31) = 38377$

d) MST_{16} dengan $TC = (\lambda_1 \times 7734 + \lambda_2 \times 29) = (1000 \times 7734 + 1 \times 29) = 36734$

e) Bobot minimum dari keempat solusi tersebut adalah solusi MST_{16} dengan jumlah bobot sebesar 36734.

Berdasarkan verifikasi yang telah dilakukan, maka diperoleh solusi MST_1, MST_6, dan MST_{16} adalah solusi efisien yang *supported*. Sedangkan MST_3 merupakan solusi efisien yang *non-supported*.

4.3 Perbandingan EPDA dengan Algoritma Kruskal dan EPDA dengan Algoritma Prim pada Masalah Optimasi Jarak dan Waktu

Berdasarkan penyelesaian yang dilakukan EPDA yang diterapkan pada masalah optimasi jarak dan waktu untuk beberapa jalan di sekitar kampus UIN Maulana Malik Ibrahim Malang diperoleh bahwa antara EPDA dengan Algrotima Kruskal dan EPDA dengan Algoritma Prim memiliki solusi yang sama. Adapun untuk EPDA dengan Algoritma Kruskal hasil yang diperoleh adalah MST_1 dengan $TC = (7327, 32)$, MST_2 dengan $TC = (7734, 29)$, dan MST_6 dengan $TC = (7377, 31)$ sebagai solusi efisien yang *supported*. Sedangkan MST_3 dengan $TC = (7684, 30)$ merupakan solusi efisien yang *non-supported*. Sedangkan untuk EPDA dengan Algoritma Prim hasil yang diperoleh adalah MST_1 dengan $TC = (7327, 32)$, MST_6 dengan $TC = (7377, 31)$, dan MST_{16} dengan $TC = (7734, 29)$ sebagai solusi efisien yang *supported*. Sedangkan MST_3 dengan $TC = (7684, 30)$ merupakan solusi efisien yang *non-supported*. Sehingga secara sederhana dapat dikatakan bahwa meskipun terdapat perbedaan pada indeksnya, baik EPDA dibangun dari Algoritma Kruskal maupun Algoritma Prim menghasilkan solusi yang sama.

Selanjutnya jika memperhatikan banyaknya kemungkinan solusi yang dihasilkan, kedua algoritma ini terdapat perbedaan dalam segi kuantitasnya. Sebagaimana telah disinggung pada subbab 4.1 bahwa banyaknya kemungkinan solusi yang dihasilkan oleh EPDA dengan Algoritma Prim ditemukan lebih banyak dari pada EPDA dengan Kruskal. Adapun untuk EPDA dengan Algoritma Prim menghasilkan 21 MST. Sedangkan untuk EPDA dengan Algoritma Kruskal hanya menghasilkan MST sebanyak 13. Artinya EPDA dengan Algoritma Kruskal memiliki proses penyelesaian yang lebih singkat, karena banyaknya kemungkinan solusi yang dicek relatif lebih sedikit dibandingkan dengan EPDA menggunakan Algoritma Prim. Hal ini dikarenakan pada pemilihan sisi yang dilakukan oleh EPDA dengan Algoritma Kruskal tidak hanya memperhatikan kriteria yang dikerjakan, namun sekaligus memperhatikan pertimbangan bobot yang termuat dalam tabel *Edge List*. Hal ini bersesuaian dengan ulasan yang termuat dalam subbab 4.1.

4.4 Implementasi Masalah MST dan MCMST dalam Kajian Islam

4.4.1 Keterkaitan Masalah MST dengan Masalah *Ushuliyah*

Masalah *ushuliyah* memiliki sifat yang mendasar dan pasti dengan kebenaran yang dimiliki bersifat tunggal. Sehingga tidak ada keraguan atas pilihan-pilahan yang lainnya. Adapun ilmu yang termasuk dalam kategori ini adalah Ilmu Akidah. Sebagaimana Fiman Allah Swt dalam surat al-Anam ayat 153 sebagaimana yang tertuang pada subbab 2.7.1.

Syekh Imam al-Qurthubi berpendapat dalam Tafsir al-Qurthubi Jilid 7 (2008:337) bahwa ad-Darimi Abu Muhammad meriwayatkan dalam Musnadnya dengan sanad shahih, bahwa Affan memberitahukan kepada kami, Hammad bin Zaid menceritkan kepada kami, Ashim bin Bahdalah menceritakan kepada kami, dari Abu Wa'il, dari Abdullah bin Mas'ud, dia berkata, "Suatu hari Rasulullah Saw mengukir kepada kami suatu garis, kemudian beliau bersabda, "Ini adalah jalan

Allah”. Setelah itu beliau membuat garis di sebelah kanan beliau pada garis yang ada di tengah dan bersabda, “Ini adalah jalan Allah”. Rasulullah Saw kemudian membaca ayat 153 dalam surat al-An’am. Kemudian Rasulullah Saw menjelaskan bahwa jalan-jalan tersebut sifatnya umum, yaitu jalan orang-orang Yahudi, Nasrani, Majusi, seluruh aliran, ahli bidah dan kesesatan, para pengikut hawa nafsu, yang terlalu berlebihan dalam perdebatan dan terlalu terjerumus dalam ilmu kalam. Ini semua adalah jalan yang akan mengantarkan pada jalan ketergelinciran dan keyakinan yang buruk. Ini adalah ucapan Ibnu Athiyah.

Membahas lebih lanjut terkait akidah yang harus dipegangteguh oleh setiap muslim, Rasulullah Saw telah menginformasikan bahwa akidah yang benar dalam Islam adalah akidah *Ahlus Sunnah Wal Jama’ah*. Inilah satu-satunya akidah yang dibenarkan oleh Rasulullah Saw. Sehingga akidah di luar dari *Ahlus Sunnah Wal Jama’ah* dianggap menyimpang dari tuntunan Nabi Muhammad Saw. Sebagaimana hadits yang diriwayatkan dari Abu Amir al-Hauzaniy Abdillah Ibn Luhai, dari Muawiyah Ibn Abi Sufyan bahwasanya ia (Muawiyah) pernah berdiri di hadapan kami, lalu ia berkata: “Ketahuilah, sesungguhnya Rasulullah Saw pernah berdiri di hadapan kami, kemudian beliau bersabda:“Ketahuilah sesungguhnya orang-orang sebelum kamu dari Ahli Kitab (Yahudi dan Nasrani) terpecah menjadi 72 golongan dan sesungguhnya umat ini akan berpecah belah menjadi 73 golongan, (adapun) yang tujuh puluh dua akan masuk Neraka dan yang satu golongan akan masuk Surga, yaitu al-Jamaah” (HR. Abu Dawud, no. 4597).

Karakteristik yang dimiliki oleh masalah *ushuliyah* memiliki kesamaan dengan masalah MST yakni secara singkat masalah MST memiliki ciri khusus bahwa ia dapat diselesaikan secara eksak dan dapat ditemukan solusinya dalam bentuk tunggal. Artinya solusi yang diperoleh bersifat pasti dan tidak ada kemungkinan solusi lain yang lebih baik darinya. Oleh karena itu implementasi masalah MST berkoresponden dengan masalah *ushuliyah* terkait kajian ilmu dalam pandangan agama Islam.

4.4.2 Keterkaitan Masalah MCMST dengan Masalah *Furu'iyah*

Masalah *furu'iyah* ini dikenal sebagai cabang dari masalah *ushuliyah*. Dengan kata lain ilmu-ilmu yang tergolong pada masalah ini di luar dari Ilmu Akidah, misalnya bagaimana cara beribadah, bermuamalah, dan lain-lain yang secara khusus termuat dalam Ilmu Fikih. Sehingga wajar jika di antara ijtihad para ulama ditemukan beberapa perbedaan pendapat dalam menyikapi hal tersebut. Adapun kebenaran yang dihasilkan tidak tunggal, bisa jadi pendapat mujtahid ini yang benar atau pendapat dari ulama lain yang bernilai benar. Karena hanya Allah lah yang maha mengetahui mana di antaranya yang benar. Misalnya dalam akidah *Ahlus Sunnah Wal Jama'ah* seorang muslim diwajibkan untuk bermadzhab, yakni di antara madzhab Imam Hambali, Imam Maliki, Imam Syafii, dan Imam Hanafi. Alasan mengapa seorang muslim harus bermadzhab adalah sebagaimana firman Allah Swt dalam al-Quran surat al-Ambiya ayat 7 sebagaimana yang tertuang pada subbab 2.7.2.

Syekh Abu Bakar Jabir al-Jazairi dalam kitabnya *Aisar at-Tafaasir li al-Kalaami al-Aliyyi al-Kabiir* jilid 4 (2007:670) menjelaskan bahwa *lafadh ahlu al-dzikri* memiliki dua makna. Pertama ia dapat dimaknai sebagai ahli kitab yakni orang-orang yahudi dan nasrani. Di sisi lain ia dapat juga diartikan sebagai al-Quran atau orang-orang mukmin. Adapun pendapat yang kedua didukung oleh Teuku Muhammad Hasbi al-Shiddieqy dalam tafsirnya bahwa bertanyalah kamu kepada orang-orang yang mengetahui al-Quran dan beriman kepadanya jika kamu tidak mengetahui (Ash-Shiddieqy, 2000:2592).

Sebagai tambahan, Syekh Imam al-Qurthubi berpendapat dalam Tafsir al-Qurthubi (2008:728) bahwa tidak ada perbedaan pendapat di kalangan ulama, bahwa orang awam hanyalah mengikuti para ulamanya, dan mereka itulah yang dimaksud dalam firman Allah *'Azza wa Jalla*: "*Maka tanyakanlah olehmu kepada orang-orang yang berilmu, jika kamu tiada mengetahui*." Para ulama juga telah sependapat bahwa orang buta mesti mengikuti orang lain yang dipercayainya bisa membedakan arah ketika ia kesulitan meneukannya. Demikian juga orang yang tidak berilmu dan tidak mengerti makna agama yang dianutnya, maka semestinya ia mengikuti orang yang mengetahuinya. Sehingga pendapat seperti inilah yang menjadi dasar diwajibkannya bermadzhab bagi orang-orang awam yang tidak mampu untuk berijtihad sendiri karena keterbatasan ilmu yang dimiliki.

Dalam hal ini Nabi Muhammad Saw juga menegaskan dalam hadits yang diriwayatkan oleh Imran bin Hushain, bahwa dia mendengar Rasulullah Saw bersabda: "Sebaik-baik umatku adalah pada masaku. Kemudian orang-orang yang setelah mereka (generasi berikutnya), lalu orang-orang yang setelah mereka" (HR. Bukhari, no. 3650*)*. Maka jelas sudah bahwa kualitas dari generasi ke generasi selanjutnya mengalami penurunan. Oleh karenanya satu-satunya jalan bagi orang awam pada zaman ini khususnya hanyalah *itba'* kepada para ulama terdahulu dengan mengikuti pendapat-pendapat beliau dalam menanggapi masalah *furu'iyah* dalam kehidupan sehari-hari.

Karakteristik yang dimiliki dalam masalah *furu'iyah* memiliki kesamaan dengan kajian MCMST yakni dalam kajian MCMST memiliki sifat bahwa belum tentu solusi yang diperoleh bersifat tunggal namun berupa kumpulan beberapa solusi yang dimungkinkan memiliki nilai kebenaran yang sama. Hal ini sesuai dengan masalah fikih dalam kehidupan sehari-hari. Karena di antara beberapa madzhab yang ada dimungkinkan terjadi perbedaan pendapat. Sehingga membuat kebenaran yang dihasilkan tidaklah tunggal. Karena hanya Allah Swt yang mengetahui mana pendapat yang benar dan yang kurang tepat. Sehingga kesimpulan yang dapat diambil adalah bahwa kajian MST dan MCMST memiliki kesamaan karakteristik dengan masalah *ushuliyah* dan masalah *furu'iyah* dalam kajian Islam.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab III dan sebagai jawaban dari rumusan masalah, maka dapat ditarik beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Pemilihan sisi yang dilakukan oleh Algoritma Kruskal dalam konstruksi EPDA tidak hanya memperhatikan kriteria yang dikerjakan, namun sekaligus memperhatikan pertimbangan bobot yang termuat dalam tabel *Edge List*. Sedangkan untuk Algoritma Prim hanya memperhatikan kriteria yang dikerjakan. Akibatnya banyaknya kemungkinan solusi yang dihasilkan akan lebih banyak.
2. Secara umum, baik EPDA dengan Algoritma Kruskal maupun EPDA dengan Algoritma Prim menghasilkan solusi yang sama namun berbeda dalam penggunaan indeksnya. Selanjutnya banyaknya kemungkinan solusi yang diperoleh melalui EPDA dengan Algoritma Kruskal adalah sebesar 13 MST. Sedangkan banyaknya kemungkinan solusi yang dihasilkan oleh EPDA dengan Algoritma Prim adalah sebesar 21 MST.
3. Kajian MST dan MCMST memiliki kesamaan karakteristik dengan masalah *ushuliyah* dan masalah *furu'iyah* dalam kajian Islam. Ciri khusus yang terdapat pada kajian MST yakni dapat ditemukannya solusi yang tunggal bersesuaian dengan masalah *ushuliyah* yang memiliki sifat mendasar dan pasti sebagaimana dalam akidah yang harus dipegang yakni akidah *Ahlus Sunnah Wal Jama'ah*. Sedangkan pada kajian MCMST memiliki sifat bahwa belum tentu solusi yang diperoleh bersifat tunggal namun berupa kumpulan bebera solusi yang

dimungkinkan memiliki nilai kebenaran yang sama. Hal ini sesuai dengan masalah fikih dalam bingkai madzhab yang kebenarannya belum diketahui madzhab mana yang dianggap benar. Sehingga kebenaran antar madzhabnya didapatkan setara satu dengan lainnya.

5.2 Saran

Adapun saran yang dapat digunakan sebagai lanjutan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menggunakan algoritma lain yang setara dengan Algoritma Kruskal dan Algoritma Prim seperti Algoritma Sollin dan Algoritma Boruvka dalam konstruksi EPDA.
2. Menerapkan EPDA pada masalah MCMST yang lebih luas dan kompleks seperti masalah konstruksi jaringan dengan memperhatikan biaya *hardware*, meminimalkan waktu tunda rata-rata, dan meningkatkan *traffic load*.
3. Menggunakan sudut pandang yang berbeda dalam mengimplementasikan MST dan MCMST jika dikaitkan dengan kajian Islam.

DAFTAR RUJUKAN

Abdussakir, Azizah, N. N., dan Nofandika, F. F. 2009. *Teori Graf*. Malang: UIN-Malang Press.

Abdusysyakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN-Malang Press.

Aldous, J. M. dan Wilson, R. J. 2000. *Graphs and Applications (An Introductory Approach)*. London: Springer.

Al-Qurthubi. 2008a. *Tafsir Al-Qurthubi Jilid 7*. Jakarta: Pustaka Azzam.

Al-Qurthubi. 2008b. *Tafsir Al-Qurthubi Jilid 11*. Jakarta: Pustaka Azzam.

Ash-Shiddieqy, M. H. 2000. *Tafsir Al-Quran Majid An-Nuur Jilid 3*. Semarang: Pustaka Rizki Putra.

Bondy, J. A dan Murty, U. S. R. 1976. *Graph Theory With Applications*. London: MacMillan Press.

Chartrand, G., Lesniak, L., dan Zhang, P. 2016. *Graphs and Digraphs Sixth Edition*. Boca Raton: CRC Press.

Dewi, Y. A. dan Sunyoto, A. 2014. Perbandingan Algoritma Prim dan Algoritma Kruskal untuk Menyelesaikan Masalah Minimum Spanning Tree. *Jurnal Teknik Informatika*, 3-19.

Jabir, A. B. 2007. *Tafsir Al-Quran Al-Aisar Jilid 4*. Jakarta: Darus Sunnah Press.

Keshavarz, E. dan Toloo, M. 2015. A Bi-Objective Minimum Cost-Time Network Flow Problem. *Procedia Economics and Finance*, 3-8.

Levitin, A. 2007. *Pengantar Desain dan Analisis Algoritma Edisi Kedua*. Jakarta: Salemba Infotek.

Moradkhan, M. D. 2010. Multi-Criterion Optimization in Minimum Spanning Trees. *Studia Informatica Universalis*, 185-208.

Nugraha, D. W. 2011. Aplikasi Algoritma Prim untuk Menentukan Minimum Spanning Tree Suatu Graf Berbobot dengan Menggunakan Pemograman Berorientasi Objek. *Jurnal Ilmiah Foristek*, 70-79.

Syamsi, I. 2000. *Pengambilan Keputusan dan Sistem Informasi*. Jakarta: Bumi Aksara.

Vianna, D. S., Arroyo, J. E., Vieira, P. S., dan Azerado, T. R. 2007. Parallel Strategies for a Multi-criteria GRASP Algortihm. *Producao*, 84-93.

Zhou, G. dan Gen, M. 1999. Genetic Algorithm Approach on Multi-Criteria Minimum Spanning Tree Problem. *European Journal Operations Research*, 141-152.

RIWAYAT HIDUP

Moh. Miftakhul Ulum, lahir di Kabupaten Lamongan pada Tanggal 24 Juli 1994, dengan nama panggilan Ulum, beralamat di Dusun Sawahan Desa Selogabus Kecamatan Parengan Kabupaten Tuban Jawa Timur. Anak pertama dari empat bersaudara, putra bapak Abdul Wahid dan ibu Zulfa Ulyatin.

Pendidikan dasarnya ditempuh di SDN 01 Suciharjo, lulus pada tahun 2006. Setelah itu melanjutkan ke SMPN 2 Bojonegoro dan lulus pada tahun 2009. Pendidikan berikutnya dia tempuh di MA Mamba'us Sholihin Suci Manyar Gresik dan lulus pada tahun 2012. Kemudian dia melanjutkan pendidikannya di tingkat perguruan tinggi Institut Keislaman Abdullah Faqih (INKAFA) Suci Manyar Gresik dengan mengambil Jurusan Pendidikan Agama Islam pada tahun 2012-2013 dalam masa pengabdian. Selanjutnya, pada tahun 2013 dia menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil Jurusan Matematika.

Selama menjadi mahasiswa, dia mengikuti beberapa organisasi baik di dalam maupun di luar kampus. Organisasi yang diikutinya adalah Himpunan Mahasiswa Jurusan (HMJ) Matematika pada periode 2014/2015 dan 2015/2016 dan Himpunan Alumni Mamba'us Sholihin (HIMAM) pada periode 2015/2016.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Moh. Miftakhul Ulum
Nim : 13610095
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Konstruksi *Extreme Point Deterministic Algorithm* Melalui Algoritma Kruskal dan Algoritma Prim pada Masalah *Multi-Criteria Minimum Spanning Tree*
Pembimbing I : Evawati Alisah, M.Pd
Pembimbing II : Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan
1.	11 April 2017	Konsultasi Bab I	1.
2.	20 April 2017	Konsultasi Bab I dan Bab II	2.
3.	20 April 2017	Konsultasi Kajian Keagamaan Bab I dan Bab II	3.
4.	14 Juli 2017	Revisi Kajian Keagamaan Bab I dan Bab II	4.
5.	10 Agustus 2017	Konsultasi Bab III	5.
6.	14 Agustus 2017	Revisi Bab I, Bab II, dan Bab III	6.
7.	22 Agustus 2017	Konsultasi Bab IV	7.
8.	28 Agustus 2017	Konsultasi Seluruh Bab	8.
9.	8 September 2017	Konsultasi Kajian Kegamaan Bab III	9.
10.	14 September 2017	Revisi Kajian Keagamaan Bab III	10.
11.	27 September 2017	ACC Keseluruhan	11.
12.	27 September 2017	ACC Kajian Keagamaan Keseluruhan	12.

Malang, 2 Februari 2018
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001