SPEKTRUM GRAF SUBGRUP DAN KOMPLEMENNYA DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

OLEH
ALINUL LAYALI
NIM. 14610042

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

SPEKTRUM GRAF SUBGRUP DAN KOMPLEMENNYA DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
ALINUL LAYALI
NIM. 14610042

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

SPEKTRUM GRAF SUBGRUP DAN KOMPLEMENNYA DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Oleh
ALINUL LAYALI
NIM. 14610042

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 09 Maret 2018

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Dr. Abdussakir, M.Pd	Ach. Nashichuddin, M.A
NIP. 19751006 200312 1 001	NIP. 19730705 200003 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

SPEKTRUM GRAF SUBGRUP DAN KOMPLEMENNYA DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Oleh
ALINUL LAYALI
NIM. 14610042

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 26 Maret 2018

Penguji Utama	: H. Wahyu H. Irawan, M.Pd	.....
Ketua Penguji	: Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D	.....
Sekretaris Penguji	: Dr. Abdussakir, M.Pd	.....
Anggota Penguji	: Ach. Nashichuddin, M.A	.....

Mengetahui,
Ketua Jurusan

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	Alinul Layali
NIM	:	14610042
Jurusan	:	Matematika
Fakultas	:	Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	:	Spektrum Graf Subgrup dan Komplemennya dari Grup Dihedral

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 09 Maret 2018
Yang membuat pernyataan,



Alinul Layali
NIM. 14610042

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

MOTO

فَإِذَا فَرَغْتَ فَانْصَبْ (٧) وَإِلَى رَبِّكَ فَارْغَبْ (٨)

"*Maka apabila engkau telah selesai (dari sesuatu urusan), tetaplah bekerja keras (untuk urusan yang lain). Dan hanya kepada Tuhanmulah engkau berharap*"
(QS. Al-Insyirah/94:07-08).

"Jika dapat cepat berkualitas, kenapa harus berlama-lama dan mengulur-ulur waktu" (Habiburrahman El-Shirazy)

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda Muhammad Fatikh, ibunda Yeti Indahsari,
adik Umar Mukhtar, Zaidan Nafis Al-Asfahani (Alm.), dan Azkia Aqila

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt atas rahmat, taufik dan hidayahNya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat serta salam semoga tercurah kepada Rasulullah Muhammad Saw yang telah membimbing manusia kepada ajaran yang paling benar, yakni ajaran agama Islam.

Dalam penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu penulis menyampaikan terima kasih yang sebesar-besarnya dan juga doa agar segala sesuatu yang telah diberikan dibalas oleh Allah Swt dengan balasan yang lebih baik dan dapat menjadi pemberat timbangan amal kebaikan di akhirat kelak, yaitu kepada:

1. Prof. Dr. H. Abdul Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku dosen pembimbing I sekaligus dosen wali yang telah banyak memberikan ilmu, nasihat, motivasi dan arahan kepada penulis sejak semester 1 hingga pada saat penulisan skripsi di semester 7 dan 8.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

5. Ach. Nashichuddin, M.A, selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan ilmu, motivasi dan arahan kepada penulis.
6. Seluruh dosen Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah ikhlas dan sabar dalam mendidik, memberikan ilmu dan bimbingannya.
7. Ayah dan Ibu yang dengan ikhlas dan sabar merawat, mendidik dan membesarkan penulis hingga mengantarkan sampai pada pendidikan sarjana. Beliau yang tanpa diminta selalu memberikan doa, nasihat dan motivasi kepada penulis.
8. Teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2014 dan kos "*Excellent*" yang telah membersamai dalam mewujudkan cita-cita.
9. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan bagi pembaca.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, Maret 2018

Penulis

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL

HALAMAN PENGAJUAN

HALAMAN PERSETUJUAN

HALAMAN PENGESAHAN

HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

HALAMAN MOTO

HALAMAN PERSEMBAHAN

KATA PENGANTAR viii

DAFTAR ISI x

DAFTAR TABEL xii

DAFTAR GAMBAR xiv

ABSTRAK xv

ABSTRACT xvii

ملخص xix

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 4
1.3 Tujuan Penelitian 4
1.4 Manfaat Penelitian 5
1.5 Batasan Masalah 5
1.6 Metode Penelitian 5
1.7 Sistematika Penulisan 7

BAB II KAJIAN PUSTAKA

2.1 Teori Graf 9
2.1.1 Graf 9
2.1.2 Derajat Titik 9
2.1.3 Graf Terhubung 10
2.1.4 Graf Komplemen 11
2.2 Graf dan Matriks 11
2.2.1 Matriks *Adjacency* Titik 11
2.2.2 Matriks Laplace 12
2.2.3 Matriks *Signless* Laplace 12
2.2.4 Matriks *Detour* 12

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.3 Spektrum 13
2.3.1 Determinan 13
2.3.2 Polinomial Karakteristik 13
2.3.3 Eliminasi Gauss 14
2.3.4 Nilai Eigen dan Vektor Eigen 15
2.3.5 Spektrum 15
2.4 Grup dan Subgrup 16
2.4.1 Grup 16
2.4.2 Subgrup dan Subgrup Normal 16
2.5 Graf Subgrup dan Komplemennya 17
2.6 Grup Dihedral 18
2.7 Gambaran Ketelitian Allah dalam Al-Quran 19

BAB III PEMBAHASAN

3.1 Spektrum *Adjacency* Titik, Laplace, *Signless* Laplace dan *Detour* Graf Subgrup $\langle r^2, s \rangle$ dari Grup Dihedral D_{2n} 22
3.1.1 Grup Dihedral D_8 22
3.1.2 Grup Dihedral D_{12} 32
3.1.3 Grup Dihedral D_{16} 40
3.2 Spektrum *Adjacency* Titik, Laplace, *Signless* Laplace dan *Detour* Komplemen Graf Subgrup $\langle r^2, s \rangle$ dari Grup Dihedral D_{2n} 59
3.2.1 Grup Dihedral D_8 59
3.2.2 Grup Dihedral D_{12} 76
3.2.3 Grup Dihedral D_{16} 85
3.3 Perhitungan Spektrum dalam Pandangan Islam 111

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan 114
4.2 Saran 115

DAFTAR RUJUKAN 116

LAMPIRAN

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR TABEL

Tabel 3.1 Tabel Cayley Grup Dihedral D_8 22

Tabel 3.2 Tabel Cayley Subgrup dari Grup Dihedral D_8 22

Tabel 3.3 Tabel Cayley Grup Dihedral D_{12} 33

Tabel 3.4 Tabel Cayley Subgrup dari Grup Dihedral D_{12} 33

Tabel 3.5 Tabel Cayley Grup Dihedral D_{16} 40

Tabel 3.6 Tabel Cayley Subgrup dari Grup Dihedral D_{16} 41

Tabel 3.7 Polinomial Karakteristik Matriks *Adjacency* Titik dari Beberapa Graf Subgrup $\langle r^2, s\rangle$ dari Grup Dihedral D_{2n} 49

Tabel 3.8 Spektrum *Adjacency* Titik dari Beberapa Graf Subgrup $\langle r^2, s\rangle$ dari Grup Dihedral D_{2n} 49

Tabel 3.9 Polinomial Karakteristik Matriks Laplace dari Beberapa Graf Subgrup $\langle r^2, s\rangle$ dari Grup Dihedral D_{2n} 52

Tabel 3.10 Spektrum Laplace dari Beberapa Graf Subgrup $\langle r^2, s\rangle$ dari Grup Dihedral D_{2n} 52

Tabel 3.11 Polinomial Karakteristik Matriks *Signless* Laplace dari Beberapa Graf Subgrup $\langle r^2, s\rangle$ dari Grup Dihedral D_{2n} 55

Tabel 3.12 Spektrum *Signless* Laplace dari Beberapa Graf Subgrup $\langle r^2, s\rangle$ dari Grup Dihedral D_{2n} 56

Tabel 3.13 Tabel Cayley Komplemen Subgrup dari Grup Dihedral D_8 59

Tabel 3.14 Tabel Cayley Komplemen Subgrup dari Grup Dihedral D_{12} 76

Tabel 3.15 Tabel Cayley Komplemen Subgrup dari Grup Dihedral D_{16} 86

Tabel 3.16 Polinomial Karakteristik Matriks *Adjacency* Titik dari Beberapa Komplemen Graf Subgrup $\langle r^2, s\rangle$ dari Grup Dihedral D_{2n} 98

Tabel 3.17 Spektrum *Adjacency* Titik dari Beberapa Komplemen Graf Subgrup $\langle r^2, s\rangle$ dari Grup Dihedral D_{2n} 98

Tabel 3.18 Polinomial Karakteristik Matriks Laplace dari Beberapa Komplemen Graf Subgrup $\langle r^2, s\rangle$ dari Grup Dihedral D_{2n} 101

Tabel 3.19 Spektrum Laplace dari Beberapa Komplemen Graf Subgrup $\langle r^2, s\rangle$ dari Grup Dihedral D_{2n} 102

Tabel 3.20 Polinomial Karakteristik Matriks *Signless* Laplace dari Beberapa Komplemen Graf Subgrup $\langle r^2, s\rangle$ dari Grup Dihedral D_{2n} 103

Tabel 3.21 Spektrum *Signless* Laplace dari Beberapa Komplemen Graf Subgrup $\langle r^2, s\rangle$ dari Grup Dihedral D_{2n} 103

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Tabel 3.22 Polinomial Karakteristik Matriks *Detour* dari Beberapa Komplemen Graf Subgrup $\langle r^2, s\rangle$ dari Grup Dihedral D_{2n} 109

Tabel 3.23 Spektrum *Detour* dari Beberapa Komplemen Graf Subgrup $\langle r^2, s\rangle$ dari Grup Dihedral D_{2n} 109

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR GAMBAR

Gambar 3.1 Graf $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)$ 23

Gambar 3.2 Graf $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})$ 34

Gambar 3.3 Graf $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})$ 41

Gambar 3.4 Graf $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}$ 60

Gambar 3.5 Graf $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}$ 77

Gambar 3.6 Graf $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}$ 86

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ABSTRAK

Layali, Alinul. 2018. **Spektrum Graf Subgrup dan Komplemennya dari Grup Dihedral**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Abdussakir, M.Pd. (II) Ach. Nashichuddin, M.A.

Kata kunci: spektrum, graf subgrup, komplemen graf subgrup, grup dihedral

Misalkan G subgrup dan H subgrup normal dari G. Graf subgrup $\Gamma_H(G)$ adalah graf dengan himpunan titik semua unsur di G dan dua titik berbeda x dan y terhubung langsung jika dan hanya jika $xy \in H$. Pada penelitian ini ditentukan spektrum *adjacency* titik, Laplace, *signless* Laplace dan *detour* graf subgrup $\langle r^2, s\rangle$ dan komplemennya di grup dihedral D_{2n}. Hasil penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Pada graf subgrup hanya didapatkan spektrum *adjacency* titik, Laplace dan *signless* Laplace. Spektrum *detour* tidak dapat ditentukan karena graf yang diperoleh adalah graf tidak terhubung.
   a. Spektrum *adjacency* titik $\boldsymbol{A}\left(\Gamma_H(D_{2n})\right)$ dengan $H = \langle r^2, s\rangle$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah
   $$spec_{\boldsymbol{A}(\Gamma_H(D_{2n}))} = \begin{bmatrix} (n-1) & -1 \\ 2 & 2n-2 \end{bmatrix}$$
   b. Spektrum Laplace $\boldsymbol{L}\left(\Gamma_H(D_{2n})\right)$ dengan $H = \langle r^2, s\rangle$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah
   $$spec_{\boldsymbol{L}(\Gamma_H(D_{2n}))} = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 2n-2 & 2 \end{bmatrix}$$
   c. Spektrum *signless* Laplace $\boldsymbol{L}^+\left(\Gamma_H(D_{2n})\right)$ dengan $H = \langle r^2, s\rangle$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah
   $$spec_{\boldsymbol{L}^+(\Gamma_H(D_{2n}))} = \begin{bmatrix} 2n-2 & n-2 \\ 2 & 2n-2 \end{bmatrix}$$
2. Pada komplemen graf subgrup didapatkan spektrum *adjacency* titik, Laplace, *signless* Laplace dan *detour* karena graf yang diperoleh adalah graf terhubung.
   a. Spektrum *adjacency* titik $\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right)$ dengan $H = \langle r^2, s\rangle$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah
   $$spec_{\boldsymbol{A}(\overline{\Gamma_H(D_{2n})})} = \begin{bmatrix} n & 0 & -n \\ 1 & 2n-2 & 1 \end{bmatrix}$$
   b. Spektrum Laplace $\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right)$ dengan $H = \langle r^2, s\rangle$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah
   $$spec_{\boldsymbol{L}(\overline{\Gamma_H(D_{2n})})} = \begin{bmatrix} 2n & n & 0 \\ 1 & 2n-2 & 1 \end{bmatrix}$$
   c. Spektrum *signless* Laplace $\boldsymbol{L}^+\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right)$ dengan $H = \langle r^2, s\rangle$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah
   $$spec_{\boldsymbol{L}^+(\overline{\Gamma_H(D_{2n})})} = \begin{bmatrix} 2n & n & 0 \\ 1 & 2n-2 & 1 \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

d. Spektrum *detour* $\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right)$ dengan $H = \langle r^2, s\rangle$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$spec_{\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right)} = \begin{bmatrix} (4n^2 - 5n + 2) & -(2n-2) & -(3n-2) \\ 1 & 2n-2 & 1 \end{bmatrix}$$

Untuk penelitian selanjutnya diharapkan dapat menemukan teorema terkait spektrum yang diperoleh dari graf yang lainnya atau pada graf subgrup dari grup lainnya.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ABSTRACT

Layali, Alinul. 2018. **Spectrum of Subgroup Graph and their Complement of Dihedral Group**. Thesis. Departement of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Dr. Abdussakir, M.Pd. (II) Ach. Nashichuddin, M.A.

Keyword: spectrum, subgroup graph, complement subgroup graph, dihedral group

Let G be a subgroup and H is a normal subgroup of G. Subgroup graph $\Gamma_H(G)$ is a graph with a set of points of all elements in G and two distinct vertices x and y are directly connected if and only if $xy \in H$. This study determined the spectrum of adjacency, Laplace, signless Laplace and detour of subgroup graph $\langle r^2, s\rangle$ and their complement of dihedral group D_{2n}. The results of this study are as follows:

1. In the subgroup graph, the obtained spectrum is only the adjacency spectrum, the Laplacian spectrum, and the signless Laplacian spectrum. The detour spectrum can not be determined because the graph obtained is an unconnected graph.
   a. The adjacency spectrum $\boldsymbol{A}\left(\Gamma_H(D_{2n})\right)$ with $H = \langle r^2, s\rangle$ for even $n \geq 4$ is
   $$spec_{\boldsymbol{A}(\Gamma_H(D_{2n}))} = \begin{bmatrix} (n-1) & -1 \\ 2 & 2n-2 \end{bmatrix}$$
   b. The Laplacian spectrum $\boldsymbol{L}\left(\Gamma_H(D_{2n})\right)$ with $H = \langle r^2, s\rangle$ for even $n \geq 4$ is
   $$spec_{\boldsymbol{L}(\Gamma_H(D_{2n}))} = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 2n-2 & 2 \end{bmatrix}$$
   c. The signless Laplacian spectrum $\boldsymbol{L}^+\left(\Gamma_H(D_{2n})\right)$ with $H = \langle r^2, s\rangle$ for even $n \geq 4$ is
   $$spec_{\boldsymbol{L}^+(\Gamma_H(D_{2n}))} = \begin{bmatrix} 2n-2 & n-2 \\ 2 & 2n-2 \end{bmatrix}$$
2. In the complement subgroup graph, the obtained spectrum is the adjacency spectrum, the Laplacian spectrum, the signless Laplacian spectrum, and the detour spectrum because the graph obtained is a connected graph.
   a. The *adjacency* spektrum $\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right)$ with $H = \langle r^2, s\rangle$ for even $n \geq 4$ is
   $$spec_{\boldsymbol{A}(\overline{\Gamma_H(D_{2n})})} = \begin{bmatrix} n & 0 & -n \\ 1 & 2n-2 & 1 \end{bmatrix}$$
   b. The Laplacian spectrum $\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right)$ with $H = \langle r^2, s\rangle$ for even $n \geq 4$ is
   $$spec_{\boldsymbol{L}(\overline{\Gamma_H(D_{2n})})} = \begin{bmatrix} 2n & n & 0 \\ 1 & 2n-2 & 1 \end{bmatrix}$$
   c. The signless Laplacian spectrum $\boldsymbol{L}^+\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right)$ with $H = \langle r^2, s\rangle$ for even $n \geq 4$ is
   $$spec_{\boldsymbol{L}^+(\overline{\Gamma_H(D_{2n})})} = \begin{bmatrix} 2n & n & 0 \\ 1 & 2n-2 & 1 \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

d. The *detour* spectrum $\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right)$ with $H = \langle r^2, s\rangle$ for even $n \geq 4$ is

$$spec_{\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right)} = \begin{bmatrix} (4n^2 - 5n + 2) & -(2n-2) & -(3n-2) \\ 1 & 2n-2 & 1 \end{bmatrix}$$

For the further research the author suggests to determine the theorem related to the spectrum obtained from the other graphs or the spectrum subgroup graph and their complement of the other groups.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ملخص

ليالي، الينول. ٢٠١٨. **Spectrum لمخطط زمرة جزئية و مكملة مخطط زمرة جزئية من زمرة زوجية**. البحث الجامعي. شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج .المشرف: (١) الدكتور عبد الشاكر الماجستير (٢) احمد ناصيح الدين الماجستير.

الكلمات الرئيسية: spectrum، مخطط زمرة جزئية، مكملة مخطط زمرة جزئية، زمرة زوجية

على سبيل المثال G هو زمرة جزئية و H نورمل زمرة جزئية من G. مخطط زمرة جزئية $\Gamma_H(G)$ هو مخطط يحتوي على مجموعة من رؤوس لجميع العناصر G ويتم توصيل نقطتين مختلفين x و y متصل مباشرة اذا وفقط اذا $xy \in H$. في هذه الدراسة تحديد spectrum متجاورة، و لابلاجي، و signless Laplacian، و دتور مخطط زمرة جزئية $\langle r^2, s\rangle$ و مكملة مخطط زمرة جزئية من زمرة زوجية D_{2n}. نتائج هذه الدراسة هي على النحو التالي:

١.) في مخطط زمرة جزئية وجدت فقط spectrum متجاورة، و لابلاجي، و signless Laplacian. سفكتروم دتور لايوجد لان مخطط التي تم الحصول عليها هي غير متصل.

أ.) Spectrum متجاورة $\boldsymbol{A}(\Gamma_H(D_{2n}))$ بـ $H = \langle r^2, s\rangle$ لـ $n \geq 4$ هو

$$spec_{\boldsymbol{A}(\Gamma_H(D_{2n}))} = \begin{bmatrix} (n-1) & -1 \\ 2 & 2n-2 \end{bmatrix}$$

ب.) Spectrum لابلاجي $\boldsymbol{L}(\Gamma_H(D_{2n}))$ بـ $H = \langle r^2, s\rangle$ لـ $n \geq 4$ هو

$$spec_{\boldsymbol{L}(\Gamma_H(D_{2n}))} = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 2n-2 & 2 \end{bmatrix}$$

ت.) signless Laplacian Spectrum $\boldsymbol{L}^+(\Gamma_H(D_{2n}))$ بـ $H = \langle r^2, s\rangle$ لـ $n \geq 4$ هو

$$spec_{\boldsymbol{L}^+(\Gamma_H(D_{2n}))} = \begin{bmatrix} 2n-2 & n-2 \\ 2 & 2n-2 \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

٢.) في مكملة مخطط زمرة جزئية وجدت spectrum متجاورة، و لابلاجي، و signless Laplacian، و دتور لان مخطط التي تم الحصول عليها هي متصل.

أ.) Spectrum متجاورة $\boldsymbol{A}(\overline{\Gamma_H(D_{2n})})$ بـ $H = \langle r^2, s\rangle$ لـ $n \geq 4$ هو

$$spec_{\boldsymbol{A}(\overline{\Gamma_H(D_{2n})})} = \begin{bmatrix} n & 0 & -n \\ 1 & 2n-2 & 1 \end{bmatrix}$$

ب.) Spectrum لابلاجي $\boldsymbol{L}(\overline{\Gamma_H(D_{2n})})$ بـ $H = \langle r^2, s\rangle$ لـ $n \geq 4$ هو

$$spec_{\boldsymbol{L}(\overline{\Gamma_H(D_{2n})})} = \begin{bmatrix} 2n & n & 0 \\ 1 & 2n-2 & 1 \end{bmatrix}$$

ت.) signless Laplacian Spectrum $\boldsymbol{L}^+(\overline{\Gamma_H(D_{2n})})$ بـ $H = \langle r^2, s\rangle$ لـ $n \geq 4$ هو

$$spec_{\boldsymbol{L}^+(\overline{\Gamma_H(D_{2n})})} = \begin{bmatrix} 2n & n & 0 \\ 1 & 2n-2 & 1 \end{bmatrix}$$

ث.) Spectrum دتور $\boldsymbol{DD}(\overline{\Gamma_H(D_{2n})})$ بـ $H = \langle r^2, s\rangle$ لـ $n \geq 4$ هو

$$spec_{\boldsymbol{DD}(\overline{\Gamma_H(D_{2n})})} = \begin{bmatrix} (4n^2-5n+2) & -(2n-2) & -(3n-2) \\ 1 & 2n-2 & 1 \end{bmatrix}$$

لمزيد من البحث من المرغوب فيه العثور على النظريات المتعلقت spectrum التي تم الحصول عليها من مخطط الاخرى او على مخطط زمرة جزئية من زمرة الاخرى.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Al-Quran merupakan kitab suci umat Islam yang menjadi sumber hukum utama dalam ajaran Islam. Ketelitian Allah dalam menghitung amalan manusia juga telah dijelaskan dalam Al-Quran. Allah Swt berfirman dalam surat Yasin ayat 12:

إِنَّا نَحْنُ نُحْيِ الْمَوْتَى وَنَكْتُبُ مَاقَدَّمُوا وَءَاثَارَهُمْ وَكُلَّ شَيْءٍ أَحْصَيْنَاهُ فِي إِمَامٍ مُّبِينٍ

"*Sesungguhnya Kami menghidupkan orang-orang mati dan Kami menuliskan apa yang telah mereka kerjakan dan bekas-bekas yang mereka tinggalkan. Dan segala sesuatu Kami kumpulkan dalam kitab Induk yang nyata*".

Ayat di atas menjelaskan bahwasannya Allah telah menghidupkan orang yang telah mati dan menghitung seluruh amalan yang telah dilakukan dengan sangat teliti, baik berupa amalan kebaikan atau keburukan. Sehingga sebagai seorang hamba juga harus bisa mencontoh gambaran ketelitian Allah tersebut.

Graf adalah salah satu ilmu dalam matematika yang cara memperolehnya harus dikerjakan dengan perhitungan yang teliti. Graf G adalah pasangan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik, dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut sisi (Abdussakir, dkk, 2009).

Misalkan G graf dengan order p $(p \geq 1)$ dan ukuran q serta himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$. Matriks keterhubungan titik dari graf G dinotasikan dengan $A(G)$, adalah matriks $(p \times p)$ dengan unsur pada baris ke-i dan kolom ke-

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

j bernilai 1 jika titik v_i terhubung langsung dengan titik v_j serta bernilai 0 jika titik v_i tidak terhubung langsung dengan titik v_j. Dengan kata lain matriks keterhubungan titik dapat ditulis $\boldsymbol{A}(G) = [a_{ij}], 1 \leq i, j \leq p$ (Abdussakir, dkk, 2009).

Matriks derajat dari graf G, dinotasikan dengan $\boldsymbol{D}(G)$, adalah matriks diagonal yang elemen baris ke-i dan kolom ke-i adalah derajat dari $v_i, i = 1, 2, 3, \ldots, p$. Matriks $\boldsymbol{L}(G) = \boldsymbol{D}(G) - \boldsymbol{A}(G)$ disebut matriks Laplace dan matriks $\boldsymbol{L}^+(G) = \boldsymbol{D}(G) + \boldsymbol{A}(G)$ disebut matriks *signless* Laplace dari graf G (Brouwer & Haemers, 2011).

Pada graf G, lintasan-$v_1 v_n$ adalah barisan titik-titik berbeda $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sedemikian hingga titik yang berurutan terhubung langsung. Suatu graf disebut terhubung jika terdapat suatu lintasan antara sebarang dua titik di G. Misalkan G adalah graf terhubung dengan order p. Matriks *detour* dari G, dinotasikan dengan $\boldsymbol{DD}(G)$ adalah matriks $(p \times p)$ sedemikian hingga unsur pada baris ke-i dan kolom ke-j adalah bilangan yang menyatakan lintasan terpanjang dari v_i ke v_j di G (Ayyaswamy & Balachandran, 2010).

Spektrum graf G yang dinotasikan dengan Spec(G) adalah matriks berordo $(2 \times n)$ yang memuat $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ pada baris pertama dan $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \ldots, m(\lambda_n)$ pada baris kedua, dengan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ adalah nilai eigen berbeda dari A, dan $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n$, serta $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \ldots, m(\lambda_n)$ adalah banyaknya basis untuk ruang vektor Eigen masing-masing λ_i (Yin, 2008). Spektrum matriks *adjacency* titik dilambangkan dengan Spec($\boldsymbol{A}(G)$), spektrum matriks Laplace dilambangkan dengan Spec($\boldsymbol{L}(G)$), spektrum matriks *signless*

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Laplace dilambangkan dengan Spec($\boldsymbol{L}^{+}(G)$), dan spektrum matriks *detour* dilambangkan dengan Spec($\boldsymbol{DD}(G)$).

Graf juga dapat diperoleh dari grup. Anderson, dkk (2012) mengenalkan konsep baru terkait graf yang diperoleh dari grup yaitu graf subgrup. Graf $\Gamma_H(G)$ disebut graf subgrup dari G jika $xy \in H$ dan $yx \in H$ untuk suatu $x, y \in G$ dengan $x \neq y$ maka x dan y dihubungkan langsung oleh suatu sisi tak berarah. Dengan demikian, jika H subgrup normal di G, maka akan diperoleh graf $\Gamma_H(G)$ yang tidak memuat gelung (*loop*) dan sisi rangkap (*multiple edge*). Kakeri dan Erfanian (2015) juga menjelaskan bahwa jika H subgrup normal di G, maka $xy \in H$ berakibat $yx = x^{-1}(xy)x \in H$. Dengan demikian, komplemen dari graf subgrup $\Gamma_H(G)$ juga berbentuk graf (*graph*), bukan graf berarah (*digraph*).

Beberapa penelitian mengenai spektrum suatu graf yang sudah pernah dilakukan adalah spektrum keterhubungan titik dan spektrum Laplace pada graf G_1 yang diperoleh dari graf komplit K_1 dengan menambahkan pohon isomorfik berakar untuk masing-masing titik di K_1 oleh Shuhua Yin (2006). Penelitian spektrum keterhubungan titik pada graf komplit (K_n), graf star (S_n), graf bipartisi komplit $(K_{m,n})$, dan graf lintasan (P_n) oleh Abdussakir, dkk (2009). Penelitian spektrum *detour* pada beberapa graf yang meliputi graf $K(n,n)$, graf korona G dan K_1, graf perkalian kartesius G dengan K_2, graf perkalian leksikografik G dengan K_2, dan perluasan dobel kover dari graf beraturan oleh Ayyaswamy & Balachandran (2010).

Penelitian spektrum graf yang diperoleh dari grup juga sudah pernah dilakukan. Penelitian spektrum *adjacency*, Laplace, *singless* Laplace, dan *detour* graf multipartisi komplit oleh Abdussakir, dkk (2012). Penelitian spektrum

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

keterhubungan titik, Laplace, *singless* Laplace, dan *detour* graf *commuting* dari grup dihedral oleh Abdussakir, dkk (2013). Penelitian spektrum keterhubungan titik, Laplace, *singless* Laplace graf *non commuting* dari grup dihedral oleh Rivatul Ridho Elvierayani (2014). Penelitian spektrum *detour* graf *non commuting* dari grup dihedral oleh Nafisah (2014), dan penelitian spektrum graf konjugasi dan komplemen graf konjugasi dari grup dihedral oleh Abdussakir dkk (2016). Penelitian terkait spektrum yang diperoleh dari graf subgrup dan komplemen graf subgrup dari grup dihedral dengan mengambil subgrup yang dibangun oleh $\langle r^2 \rangle$ dan $\langle r^2, rs \rangle$ juga pernah dilakukan.

Berdasarkan uraian di atas, maka belum ada penelitian terkait spektrum yang diperoleh dari graf subgrup dan komplemennya dari grup dihedral dengan mengambil subgrup yang dibangun oleh $\langle r^2, s \rangle$. Dengan demikian, penulis mengambil judul "Spektrum Graf Subgrup dan Komplemennya dari Grup Dihedral".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana spektrum graf subgrup dari grup dihedral?
2. Bagaimana spektrum komplemen graf subgrup dari grup dihedral?

1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai rumusan masalah, maka tujuan penelitian ini adalah:

1. Mengetahui spektrum graf subgrup dari grup dihedral.
2. Mengetahui spektrum komplemen graf subgrup dari grup dihedral.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut:

1. Memberikan informasi mengenai spektrum graf subgrup dari grup dihedral.
2. Memberikan informasi mengenai spektrum komplemen graf subgrup dari grup dihedral.

1.5 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini, spektrum yang akan dibahas dibatasi pada spektrum *adjacency* titik, Laplace, *signless* Laplace, dan *detour*. Subgrup yang diambil adalah subgrup normal $\langle r^2, s\rangle$. Dengan demikian, akan diperoleh graf $\Gamma_H(G)$ yang tidak memuat gelung (*loop*) dan sisi rangkap (*multiple edge*). Dikarenakan subgrup dari grup dihedral (D_{2n}) yang dibangun oleh $\langle r^2, s\rangle$ hanya terdapat pada n genap, maka grup dihedral yang diteliti adalah $D_{2n} \geq 4$.

1.6 Metode Penelitian

Penelitian ini termasuk ke dalam jenis penelitian kepustakaan (*library research*). Penelitian dilakukan dengan melakukan kajian terhadap buku-buku teori graf, aljabar linier, dan aljabar abstrak. Kajian pada buku teori graf dan jurnal terkait penelitian dikhususkan pada kajian mengenai graf. Kajian pada buku-buku aljabar linear berkaitan dengan topik matriks, khususnya tentang penentuan spektrum suatu matriks. Kajian pada buku aljabar abstrak berkaitan dengan topik grup dan subgrup normal.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif. Pola pembahasannya dimulai dari hal-hal khusus (induktif) menuju pada suatu generalisasi yang bersifat deduktif. Langkah-langkah penelitian ini adalah:

1. Menentukan spektrum *adjacecy* titik, Laplace, s*ignless* Laplace, dan *detour* graf subgrup $\langle r^2, s\rangle$ dari grup dihedral.
   a. Menentukan semua subgrup $\langle r^2, s\rangle$ pada suatu grup D_{2n} untuk beberapa kasus *n*, yaitu *n* = 4, 6, 8.
   b. Menggambar graf subgrup kemudian menyatakan keterhubungan titik ke dalam bentuk matriks *adjacency* titik, Laplace, dan *signless* Laplace.
   c. Menentukan spektrum matriks *adjacency* titik, Laplace, dan *signless* Laplace graf subgrup.
   d. Membuat dugaan (konjektur) tentang spektrum berdasarkan pola yang ditemukan untuk masing-masing kasus.
   e. Merumuskan konjektur tentang spektrum sebagai suatu teorema.
   f. Menghasilkan suatu teorema tentang spektrum yang dilengkapi dengan bukti secara deduktif.
2. Menentukan spektrum *adjacecy* titik, Laplace, s*ignless* Laplace, dan *detour* komplemen graf subgrup $\langle r^2, s\rangle$ dari grup dihedral.
   a. Menentukan komplemen subgrup $\langle r^2, s\rangle$ pada suatu grup D_{2n} untuk beberapa kasus *n*, yaitu *n* = 4, 6, 8.
   b. Menggambar komplemen graf subgrup kemudian menyatakan keterhubungan titik ke dalam bentuk matriks *adjacency* titik, Laplace, *signless* Laplace, dan *detour*.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

c. Menentukan spektrum matriks *adjacency* titik, Laplace, *signless* Laplace, dan *detour* komplemen graf subgrup.
d. Membuat dugaan (konjektur) tentang spektrum berdasarkan pola yang ditemukan untuk masing-masing kasus.
e. Merumuskan konjektur tentang spektrum sebagai suatu teorema.
f. Menghasilkan suatu teorema tentang spektrum yang dilengkapi dengan bukti secara deduktif.

1.7 Sistematika Penulisan

Agar penulisan skripsi lebih terarah dan mudah dipahami, digunakan sitematika penulisan yang terdiri dari empat bab, dan masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa subbab dengan sistematika sebagai berikut.

Bab I Pendahuluan

Pendahuluan meliputi: latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Kajian pustaka terdiri dari teori-teori yang dapat digunakan untuk menjawab rumusan masalah sehingga dapat mendukung pembahasan. Pada penelitian ini, teori yang digunakan meliputi: teori graf, matriks, spektrum, grup, dan subgrup. Juga disertai dengan tafsir ayat yang dapat dijadikan teladan dalam melakukan penelitian ini, yaitu tentang ketelitian Allah dalam Al-Qur'an.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Bab III Pembahasan

Pembahasan berisi tentang bagaimana spektrum *adjacency* titik, spektrum Laplace, spektrum *signless* Laplace, spektrum *detour* graf subgrup dan komplemen graf subgrup $\langle r^2, s \rangle$ dari grup dihedral, dan perhitungan spektrum dalam pandangan Islam.

Bab IV Penutup

Penutup berisi kesimpulan mengenai hasil dari pembahasan dan saran untuk penelitian selanjutnya.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Teori Graf

2.1.1 Graf

Graf G adalah pasangan $(V(G),\ E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut *titik*, dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut sisi. Banyaknya unsur di $V(G)$ disebut order dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$, dan banyaknya unsur di $E(G)$ disebut ukuran dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka order dan ukuran dari G masing-masing cukup ditulis p dan q (Abdussakir, dkk, 2009).

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung *(adjacent)*, v dan e serta u dan e disebut terkait langsung *(incident)*, dan titik u dan v disebut ujung dari e. Dua sisi berbeda e_1 dan e_2 disebut terhubung langsung (*adjacent*), jika terkait langsung pada satu titik yang sama. Untuk selanjutnya, sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = uv$ (Bondy & Murthy, 2008).

2.1.2 Derajat Titik

Jika v adalah titik pada graf G, maka himpunan semua titik di G yang terhubung langsung dengan v disebut lingkungan dari v dan ditulis $N_G(v)$. Derajat titik v di graf G, ditulis $deg_G(v)$, adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

dengan *v*. Dalam konteks pembicaraan hanya terdapat satu graf G, maka tulisan $deg_G(v)$ disingkat menjadi $deg(v)$ dan $N_G(v)$ disingkat menjadi $N(v)$. Jika dikaitkan dengan konsep lingkungan, derajat titik *v* di graf G adalah banyaknya anggota dalam $N(v)$. Jadi, $\deg(v) = |N(v)|$ (Abdussakir, dkk, 2009).

2.1.3 Graf Terhubung

Misalkan G graf. Misalkan u dan v adalah titik di G (yang tidak harus berbeda). Jalan u-v pada graf G adalah barisan berhingga yang berselang-seling

$W: u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n = v$

antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik dan diakhiri dengan titik, dengan

$e_i = v_{i-1}v_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$

adalah sisi di G. v_0 disebut titik awal, v_n disebut titik akhir, titik $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ disebut titik internal, dan *n* menyatakan panjang dari W. Jika $v_0 \neq v_n$, maka W disebut jalan terbuka. Jika $v_0 = v_n$, maka W disebut jalan tertutup. Jalan yang tidak mempunyai sisi disebut jalan trivial (Abdussakir, dkk, 2009).

Karena dalam graf dua titik hanya akan dihubungkan oleh tepat satu sisi, maka jalan $u - v$

$W: u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n = v$

dapat ditulis menjadi

$W: u = v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n = v.$

Jalan W yang semua sisinya berbeda disebut trail. Jalan terbuka yang semua titiknya berbeda disebut lintasan. Dengan demikian setiap lintasan pasti merupakan trail, tetapi tidak semua trail merupakan lintasan (Abdussakir, dkk, 2009).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Misalkan u dan v titik berbeda pada graf G. Titik u dan v dikatakan terhubung (*connected*), jika terdapat lintasan $u - v$ di G. Suatu graf G dikatakan terhubung (*connected*), jika untuk setiap titik u dan v yang berbeda di G terhubung. Dengan kata lain, suatu graf G dikatakan terhubung (*connected*), jika untuk setiap titik u dan v di G terdapat lintasan $u - v$ di G. Sebaliknya, jika ada dua titik u dan v di G, tetapi tidak ada lintasan $u - v$ di G, maka G dikatakan tak terhubung (*disconnected*) (Bondy & Murthy, 2008).

2.1.4 Graf Komplemen

Misalkan G graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Komplemen dari graf G, ditulis $\bar{G}$, adalah graf dengan himpunan titik $V(G)$ sedemikian hingga dua titik akan terhubung langsung jika dan hanya jika dua titik tersebut tidak terhubung langsung di G. Jadi, diperoleh bahwa $V(\bar{G}) = V(G)$ dan $uv \in E(\bar{G})$ jika dan hanya jika $uv \notin E(G)$ (Abdussakir, dkk, 2009).

2.2 Graf dan Matriks

2.2.1 Matriks *Adjacency* Titik

Misalkan G graf dengan order p $(p \geq 1)$ dan ukuran q serta himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$. Matriks keterhubungan titik (atau matriks keterhubungan) dari graf G dinotasikan dengan $\boldsymbol{A}(G)$, adalah matriks $(p \times p)$ dengan unsur pada baris ke-i dan kolom ke-j bernilai 1 jika titik v_i terhubung langsung dengan titik v_j serta bernilai 0 jika titik v_i tidak terhubung langsung dengan titik v_j. Dengan kata lain matriks keterhubungan dapat ditulis $\boldsymbol{A}(G) = [a_{ij}], 1 \leq i, j \leq p$, dengan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, jika } v_i v_j \in E(G) \\ 0 & \text{, jika } v_i v_j \notin E(G) \end{cases}$$

Matriks keterhubungan suatu graf G adalah matriks simetri dengan unsur 0 dan 1 dan memuat nilai 0 pada diagonal utamanya. Hal ini karena graf tidak memuat lup dan tidak memuat sisi paralel (Abdussakir, dkk, 2009).

2.2.2 Matriks Laplace

Misal $G(V, E)$ adalah graf dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E, dimisalkan $|V| = n$ dan $|E| = m$. Jadi, G adalah graf dengan n titik dan m sisi. Matriks Laplace dari G adalah matriks $\boldsymbol{L}(G) = \boldsymbol{D}(G) - \boldsymbol{A}(G)$; dengan $\boldsymbol{D}(G)$ adalah diagonal matriks yang entrinya adalah derajat titik dari G dan $\boldsymbol{A}(G)$ adalah matriks *adjacency* titik dari G (Biyikoglu, dkk, 2007).

2.2.3 Matriks *Signless* Laplace

Matriks *signless* Laplace dari G adalah matriks $\boldsymbol{L}^{+}(G) = \boldsymbol{D}(G) - \boldsymbol{A}(G)$; dengan $\boldsymbol{D}(G)$ adalah diagonal matriks yang entrinya adalah derajat titik dari G dan $\boldsymbol{A}(G)$ adalah matriks *adjacency* titik dari G (Biyikoglu, dkk, 2007).

2.2.4 Matriks *Detour*

Matriks *detour* dari G, ditulis $\boldsymbol{DD}(G)$, didefinisikan sebagai matriks yang unsur (i, j) adalah lintasan terpanjang antara titik i dan j (Ayyaswamy & Balachandran, 2010).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.3 Spektrum

2.3.1 Determinan

Determinan sebuah matriks dapat dihitung dengan mereduksi matriks tersebut pada bentuk eselon baris. Metode ini penting untuk menghindari perhitungan panjang yang terlibat dalam penerapan definisi determinan secara langsung. Jika $\boldsymbol{A}$ adalah sebarang matriks persegi yang mengandung sebaris bilangan nol, maka $\det(\boldsymbol{A}) = 0$. Karena hasil kali elementer bertanda dari $\boldsymbol{A}$ mengandung satu faktor dari setiap baris $\boldsymbol{A}$, maka tiap-tiap hasil kali elementer bertanda memuat faktor dari baris bilangan nol dan sebagai konsekuensinya juga akan mempunyai nilai nol. Karena $\det(\boldsymbol{A})$ adalah jumlah semua hasil kali elementer bertanda, maka didapatkan $\det(\boldsymbol{A}) = 0$ (Anton, 2000).

Matriks persegi dinamakan segitiga atas (*upper triangular*) jika semua entri di bawah diagonal utama adalah nol. Jika semua entri nol ada di atas diagonal utama, maka dinamakan segitiga bawah (*lower triangular*). Suatu matriks yang semua entrinya bernilai nol baik di atas maupun di bawah diagonal utama disebut segitiga (*triangular*). Jika $\boldsymbol{A}$ adalah suatu matriks segitiga $n \times n$ (segitiga atas, segitiga bawah, atau segitiga), maka $\det(\boldsymbol{A})$ adalah hasil kali anggota-anggota pada diagonal utamanya, yaitu $\det(\boldsymbol{A}) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$ (Anton, 2000).

2.3.2 Polinomial Karakteristik

Jika $\boldsymbol{A}$ adalah matriks $n \times n$, maka polinomial karakteristik $\boldsymbol{A}$ memiliki derajat n dan koefisien variabel λ^n adalah 1, maka polinomial karakteristik $p(x)$ dari suatu matriks $n \times n$ memiliki bentuk

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$p(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \ ... + c_n$$

Berdasarkan teorema dasar aljabar, maka persamaan karakteristik dapat ditulis sebagai berikut

$$p(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \ ... + c_n = 0$$

(Anton dan Rorres, 2004).

2.3.3 Eliminasi Gauss

Suatu matriks dikatakan dalam bentuk eselon baris tereduksi (*reduced row-echelon form*) jika mempunyai sifat-sifat berikut:

1. Jika baris tidak terdiri dari seluruhnya nol, maka bilangan tak nol pertama dalam baris tersebut adalah 1 (dinamakan 1 utama).
2. Jika terdapat baris yang seluruhnya terdiri dari nol, maka semua baris seperti itu dikelompokkan bersama-sama di bagian matriks paling bawah.
3. Dalam sebarang dua baris yang berurutan yang seluruhnya tidak terdiri dari nol, maka 1 utama dalam baris yang lebih rendah terdapat lebih jauh ke kanan dari 1 utama dalam baris yang lebih tinggi.
4. Masing-masing kolom yang mengandung 1 utama mempunyai nol di tempat lain.

Jika suatu matriks hanya mempunyai sifat sampai pada nomer 3, maka langkah yang telah dilakukan untuk mendapatkannya disebut eliminasi Gauss. Tetapi jika mempunyai sifat sampai nomer 4, maka langkah yang telah dilakukan untuk mendapatkannya disebut eliminasi Gauss Jordan (Anton & Rorres, 2004).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.3.4 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Misalkan G graf berorder p dan $\boldsymbol{A}$ adalah matriks keterhubungan titik dari graf G. Suatu vektor tak nol x disebut vektor Eigen *(Eigen vector)* dari $\boldsymbol{A}$ jika $\boldsymbol{A}x$ adalah suatu kelipatan skalar dari x; yakni, $\boldsymbol{A}x = \lambda x$, untuk sebarang skalar λ. Skalar λ disebut nilai Eigen (*Eigen value*) dari $\boldsymbol{A}$, dan x disebut sebagai vektor Eigen dari $\boldsymbol{A}$ yang bersesuaian dengan λ. Untuk menentukan nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{A}$, persamaan $\boldsymbol{A}x = \lambda x$ ditulis kembali dalam bentuk $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})x = 0$, dengan $\boldsymbol{I}$ adalah matriks identitas berordo $(p \times p)$. Persamaan ini akan mempunyai solusi taknol jika dan hanya jika $det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$. Persamaan $det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$ akan menghasilkan persamaan polinomial dalam variable λ dan disebut persamaan karakteristik dari matriks $\boldsymbol{A}$. Skalar-skalar λ yang memenuhi persamaan karakteristik ini tidak lain adalah nilai–nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{A}$ (Anton & Rorres, 2004).

2.3.5 Spektrum

Misalkan $\boldsymbol{A}$ adalah matriks *adjacency* titik dan misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ adalah nilai Eigen berbeda dari $\boldsymbol{A}$, dengan $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n$ dan $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \ldots, m(\lambda_n)$ adalah multiplisitas atau banyaknya basis untuk ruang vektor Eigen masing-masing λ_i, maka matriks berordo $(2 \times n)$ yang memuat $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ pada baris pertama dan $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \ldots, m(\lambda_n)$ pada baris kedua disebut spektrum graf G, dan dinotasikan dengan Spec(G). Jadi, spektrum graf G dapat ditulis dengan

$$Spec(G) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ m(\lambda_1) & m(\lambda_2) & \ldots & m(\lambda_n) \end{bmatrix}$$ (Yin, 2008).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.4 Grup dan Subgrup

2.4.1 Grup

Suatu sistem aljabar $(G,*)$ dengan G adalah himpunan tak kosong dengan operasi biner $*$ disebut grup jika memenuhi sifat-sifat berikut:

1. Hukum asosiatif berlaku pada operasi $*$

$$(a * b) * c = a * (b * c), \forall\, a, b, c \in G$$

2. Setiap unsur di G mempunyai identitas terhadap operasi $*$. Terdapat unsur di G yang dinotasikan dengan e sedemikian sehingga

$$e * a = a * e = a, \forall\, a \in G$$

3. Setiap unsur di G mempunyai invers terhadap operasi $*$. Setiap unsur $a \in G$, terdapat suatu unsur yang disebut invers dari a dan dinotasikan dengan $a^{-1} \in G$ sedemikian sehingga

$$a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$$

dengan e adalah unsur identitas di G.

Sebagai tambahan, grup $(G,*)$ disebut abelian atau grup komutatif jika

$$a * b = b * a, \forall\, a, b \in G$$

(Raisinghania, dkk, 1980).

2.4.2 Subgrup dan Subgrup Normal

Misalkan G grup dan H himpunan bagian di G. Jika H dengan operasi biner yang sama dengan di G membentuk grup, maka H disebut subgrup dari G dan dinotasikan dengan $H \leq G$ (Dummit dan Foote, 1991). Unsur identitas di subgrup H adalah unsur identitas di grup G. Dengan demikian, maka H subgrup G jika dan hanya jika $H \subseteq G$, $H \neq \emptyset$, dan $xy^{-1} \in H$ untuk semua $x, y \in H$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Subgrup H dari grup G disebut subgrup normal dari G jika $aH = Ha$ untuk semua $a \in G$ dan dinotasikan dengan $H \trianglelefteq G$. Jika G grup abelian maka semua subgrup di G adalah subgrup normal karena $h = eh = gg^{-1}h = ghg^{-1} \in H$ untuk semua $h \in H$ dan $g \in G$ (Gallian, 2012).

2.5 Graf Subgrup dan Komplemennya

Misalkan G grup dan H subgrup G. Misalkan $\Gamma_H(G)$ adalah graf berarah (*digraph*) dengan himpunan titik memuat semua unsur di G dan titik x terhubung langsung ke y (atau ada busur dari x ke y) jika dan hanya jika $x \neq y$ dan $xy \in H$. Jika $xy \in H$ dan $yx \in H$ untuk suatu $x, y \in G$ dengan $x \neq y$ maka x dan y dihubungkan langsung oleh suatu sisi tak berarah. Dengan demikian, akan diperoleh graf $\Gamma_H(G)$ yang tidak memuat gelung (*loop*) dan sisi rangkap (*multiple edge*). Graf $\Gamma_H(G)$ ini disebut graf subgrup dari G (Anderson, dkk, 2012).

Sebagai contoh, misalkan G adalah grup dihedral D_8 dan H adalah subgrup yang dibangun oleh $\langle r^2, s\rangle$, yaitu $H = \{1, r^2, s, sr^2\}$. Ambil 1 dan r^2 di D_8, $1 \circ r^2 = r^2 \in \{1, r^2, s, sr^2\}$, sehingga diperoleh gambar graf berikut

$$1 \longrightarrow r^2$$

Tetapi $r^2 \circ 1 = r^2 \in \{1, r^2, s, sr^2\}$, maka 1 dan r^2 dihubungkan langsung oleh suatu sisi tak berarah. sehingga diperoleh gambar graf berikut

$$1 \longrightarrow r^2$$

Begitu juga dengan elemen lainnya. Dengan demikian, didapatkan $\Gamma_{\langle r^2, s\rangle}(D_8)$ yang merupakan graf subgrup dari D_8.

Kakeri dan Erfanian (2015) menjelaskan bahwa graf subgrup $\Gamma_H(G)$ jelas eksistensinya ketika H adalah subgrup normal dari G. Jika $xy \in H$ maka belum

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

tentu $yx \in H$. Jika H subgrup normal di G, maka $xy \in H$ berakibat $yx = x^{-1}(xy)x \in H$. Dengan demikian, ketika H subgrup normal maka komplemen dari graf subgrup $\Gamma_H(G)$ juga berbentuk graf (*graph*), bukan graf berarah (*digraph*).

Sebagai contoh, misalkan G adalah grup dihedral D_8 dan H adalah subgrup yang dibangun oleh $\langle r^2, s\rangle$, yaitu $H = \{1, r^2, s, sr^2\}$. Karena $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)$ sudah jelas merupakan graf subgrup, maka $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}$ juga berbentuk graf, bukan graf berarah.

2.6 Grup Dihedral

Grup dihedral adalah grup dari himpunan simetri-simetri dari segi-n beraturan yang dinotasikan dengan D_{2n}, untuk setiap n bilangan bulat positif dan $n \geq 3$. Dalam buku lain ada yang menuliskan grup dihedral dengan D_n. Karena grup dihedral akan digunakan secara ekstensif, maka perlu beberapa notasi dan beberapa hitungan yang dapat menyederhanakan perhitungan selanjutnya dan membantu mengamati D_{2n} sebagai grup abstrak, yaitu:

(1) $1, r, r^2, \dots, r^{n-1}$ semuanya berbeda, dan $r^n = 1$. Jadi $|r| = n$.

(2) $|s| = 2$.

(3) $s \neq r^i$ untuk semua i.

(4) $sr^i \neq sr^j$, untuk semua $0 \leq j, j \leq n-1$ dengan $i \neq j$, jadi

$$D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$$

yaitu setiap elemen dapat dituliskan secara tunggal dalam bentuk $s^k r^i$ untuk $k = 0$ atau 1 dan $0 \leq i \leq n-1$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

(5) $rs = sr^{-1}$. Ini menunjukkan bahwa r dan s keduanya tidak komutatif sehingga D_{2n} tidak abelian.

$r^i s = sr^{-i}$, untuk semua $0 \leq i \leq n$ (Dummit dan Foote, 1991).

2.7 Gambaran Ketelitian Allah dalam Al-Quran

Menghitung pada dasarnya adalah pekerjaan yang sering dilakukan di dalam matematika, sehingga ilmu matematika juga sering disebut dengan ilmu hisab atau ilmu hitung. Dalam urusan hitung-menghitung ini, Allah adalah rajanya. Allah sangat cepat dalam menghitung dan sangat teliti (Abdusysyakir, 2007). Sebagaimana firman Allah Swt dalam surat Yasin ayat 12:

إِنَّا نَحْنُ نُحْيِ الْمَوْتَى وَنَكْتُبُ مَاقَدَّمُوا وَءَاثَارَهُمْ وَكُلَّ شَىْءٍ أَحْصَيْنَاهُ فِي إِمَامٍ مُّبِينٍ

"*Sesungguhnya Kami menghidupkan orang-orang mati dan Kami menuliskan apa yang telah mereka kerjakan dan bekas-bekas yang mereka tinggalkan. Dan segala sesuatu Kami kumpulkan dalam kitab Induk yang nyata*".

Berikut akan dijelaskan tafsir ayat dari surat Yasin ayat 12. Allah Swt berfirman

إِنَّا نَحْنُ نُحْيِي الْمَوْتَى

"*Sesungguhnya Kami menghidupkan orang-orang mati*".

Menurut Ibn Katsir bahwa pada hari kiamat semua yang telah mati akan dihidupkan kembali. Dijelaskan juga bahwa Allah akan menghidupkan hati siapa saja yang Dia kehendaki termasuk orang kafir yang hatinya mati karena kesesatan dan kemudian menunjukkannya kepada kebenaran (Katsir, 2006).

Selanjutnya, penjelasan bahwa Allah akan mencatat setiap amalan yang pernah dilakukan manusia, yaitu amalan kebaikan dan kejelekan terdapat pada ayat

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

وَنَكْتُبُ مَا قَدَّمُوا

"*dan Kami menuliskan apa yang telah mereka kerjakan*".

Dilanjutkan dengan ayat

وَءَاثَٰرَهُمْ

"*(dan Kami menuliskan apa yang telah mereka kerjakan) dan bekas-bekas yang mereka tinggalkan*".

Dalam tafsir Ibn Katsir terdapat dua makna, yang pertama adalah bahwa Allah akan mencatat amalan yang dilakukan diri sendiri, dan mendapatkan balasan amalan orang yang mengikutinya tanpa mengurangi sedikitpun balasan orang yang mengikuti tersebut. Jika yang dikerjakan adalah kebaikan, maka balasannya adalah pahala. Jika yang dikerjakan keburukan, maka balasannya adalah dosa. Kedua, bahwa bekas langkah kaki akan dicatat, baik langkah dalam kebaikan maupun keburukan sebagaimana penjelasan Qotadah (seorang *tabi'in*) yang disebutkan dalam tafsir Ibn Katsir. Qotadah mengatakan, "Seandainya Allah lalai dari urusan manusia, maka tentu saja bekas-bekas (kebaikan dan kejelekan) itu akan terhapus dengan hembusan angin. Akan tetapi Allah Swt menghitung seluruh amalan manusia, begitu pula bekas amalan-amalan mereka. Sampai-sampai Allah Swt akan menghitung bekas-bekas amalan mereka baik dalam ketaatan maupun dalam kemaksiatan (Katsir, 2006).

Suatu riwayat dari Imam Ahmad, bahwasanya ia berkata "terdapat bangunan di sekitar masjid, maka Bani Salamah ingin berpindah dekat masjid, lalu kabar tersebut sampai pada Rasulullah Saw dan kemudian bertanya kepada mereka "Apakah kalian ingin berpindah dekat masjid?". Bani Salamah menjawab "benar wahai Rasulullah, kami ingin berpindah dekat masjid". Kemudian Rasullullah Saw bersabda "wahai Bani Salamah, rumahmu adalah pahala

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

kebaikanmu" beliau mengulanginya sampai dua kali" (HR. Muslim dalam Katsir, 2006).

Riwayat tersebut menjelaskan bahwa setiap langkah menuju masjid yang merupakan amalan kebaikan akan dihitung dan dicatat. Begitu pula para penuntut ilmu yang harus menaiki kendaraan karena sangat jauhnya tempat menuntut ilmu, maka putaran roda pun akan dihitung dan dicatat sebagai kebaikan. Sungguh Maha Besar karunia Allah. Namun banyak dari kita yang tidak menyadari akan hal ini (Al-Qurthubi, 2007).

Selanjutnya, segala sesuatu akan dicatat di Lauhul Mahfuzh (lembaran yang terjaga). Allah Swt menyebutkan dalam firmanNya

وَكُلَّ شَيْءٍ أَحْصَيْنَاهُ فِي إِمَامٍ مُبِينٍ

"*Dan segala sesuatu Kami kumpulkan dalam kitab induk yang nyata (Lauh Mahfuzh)*".

Dalam tafsir Al-Qurthubi, kata وَكُلَّ dimanshub dengan *fi'il mudhmar* yang menunjukkan padanya. Ayat أَحْصَيْنَاهُ, seolah-olah Allah berkata, "Dan kami menghitung segala sesuatu yang Kami menghitungnya". Kemudian ayat فِي إِمَامٍ مُبِينٍ, Mujahidah, Qatadah, dan Ibn Zaid berkata, "maksudnya adalah al-lauh al-mahfuzh" (Al-Qurthubi, 2007).

Berdasarkan penjelasan di dalam tafsir Ibn katsir dan Al-Qurthubi pada firman Allah Swt surat Yasin ayat 12 bahwa Allah sangat teliti dalam menghitung amalan manusia, bahkan menghitung amalan orang-orang yang telah mengikuti amalannya tersebut untuk diberikan kepadanya tanpa tertinggal sedikitpun. Inilah gambaran ketelitian Allah di dalam Al-Quran yang dapat dijadikan sebagai contoh, termasuk ahli matematika dalam melakukan perhitungan.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Spektrum *Adjacency* Titik, Laplace, *Singless* Laplace, dan *Detour* Graf Subgrup $\langle r^2, s\rangle$ dari Grup Dihedral (D_{2n})

3.1.1 Grup Dihedral D_8

Dua unsur di grup dihedral D_8 jika dioperasikan menggunakan operasi komposisi $(\circ)$ dapat disajikan dengan Tabel Cayley berikut.

Tabel 3.1 Tabel Cayley Grup Dihedral D_8

$\circ$	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
1	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
r	r	r^2	r^3	1	sr^3	s	sr	sr^2
r^2	r^2	r^3	1	r	sr^2	sr^3	s	sr
r^3	r^3	1	r	r^2	sr	sr^2	sr^3	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	1	r	r^2	r^3
sr	sr	sr^2	sr^3	s	r^3	1	r	r^2
sr^2	sr^2	sr^3	s	sr	r^2	r^3	1	r
sr^3	sr^3	s	sr	sr^2	r	r^2	r^3	1

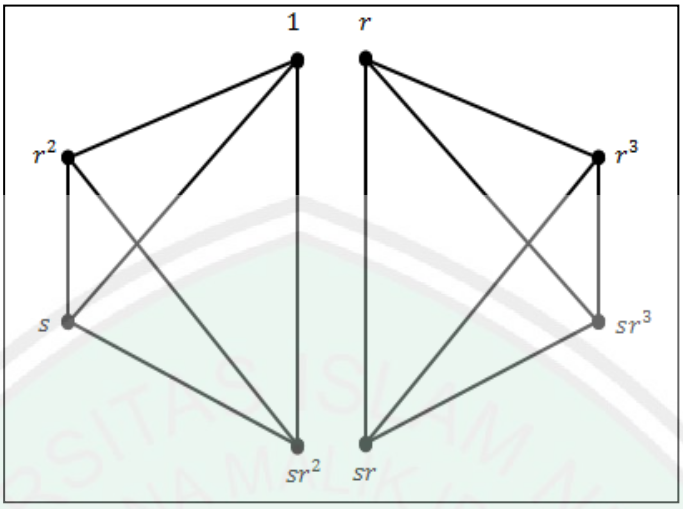
Subgrup dari grup dihedral D_8 yang dibangun oleh $\langle r^2, s\rangle$ adalah $\{1, r^2, s, sr^2\}$. Titik graf subgrup $\langle r^2, s\rangle$ dari grup dihedral (D_8) adalah $V\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)\right) = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$. $\forall\, x, y \in D_8 \ni x \circ y \in \{1, r^2, s, sr^2\}$, maka x terhubung y, dapat dilihat pada Tabel 3.2.

Tabel 3.2 Tabel Cayley Subgrup dari Grup Dihedral D_8

$\circ$	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
1	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
r	r	r^2	r^3	1	sr^3	s	sr	sr^2
r^2	r^2	r^3	1	r	sr^2	sr^3	s	sr
r^3	r^3	1	r	r^2	sr	sr^2	sr^3	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	1	r	r^2	r^3
sr	sr	sr^2	sr^3	s	r^3	1	r	r^2
sr^2	sr^2	sr^3	s	sr	r^2	r^3	1	r
sr^3	sr^3	s	sr	sr^2	r	r^2	r^3	1

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dari Tabel 3.2 dapat digambarkan graf subgrup berikut.



Gambar 3.1 Graf $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)$

Dari Gambar 3.1 dapat diperoleh matriks *adjacency* titik dari $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{A}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$det\left(\boldsymbol{A}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)\right) - \lambda\boldsymbol{I}\right) =$$

$$det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) =$$

$$det\begin{pmatrix} 0-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0-\lambda \end{pmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat pada *software* Maple 18, diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-1}{\lambda} & 0 & \frac{\lambda+1}{\lambda} & 0 & \frac{\lambda+1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-1}{\lambda} & 0 & \frac{\lambda+1}{\lambda} & 0 & \frac{\lambda+1}{\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-\lambda-2}{\lambda-1} & 0 & \frac{\lambda+1}{\lambda-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-\lambda-2}{\lambda-1} & 0 & \frac{\lambda+1}{\lambda-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-2\lambda-3}{\lambda-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-2\lambda-3}{\lambda-2} \end{bmatrix}$$

Sehingga polinomial karakteristik $\boldsymbol{A}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)\right)$ diperoleh dari perkalian diagonal matriks segitiga atas sebagai berikut

$$p(\lambda) = (-\lambda)^2\left(-\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)^2\left(-\frac{\lambda^2-\lambda-2}{\lambda-1}\right)^2\left(-\frac{\lambda^2-2\lambda-3}{\lambda-2}\right)^2$$

$$= (\lambda-3)^2(\lambda+1)^6$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 3$ dan $\lambda_2 = -1$. Kemudian akan dicari multiplisitas dari nilai Eigen tersebut.

Untuk $\lambda_1 = 3$ disubstitusikan ke dalam $\left(\boldsymbol{A}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)\right) - \lambda\boldsymbol{I}\right)$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Selanjutnya hasil matriks tersebut akan direduksi dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat dalam *software* Maple 18, sehingga diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} & 0 & \frac{4}{3} & 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{8}{3} & 0 & \frac{4}{3} & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat diperoleh $m(\lambda_1) = 2$.

Untuk $\lambda_2 = -1$ disubstitusikan ke dalam $\left(\boldsymbol{A}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)\right) - \lambda \boldsymbol{I}\right)$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut akan direduksi dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat dalam *software* Maple 18, maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dari matriks yang tereduksi tersebut dapat diperoleh $m(\lambda_2) = 6$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dengan demikian spektrum *adjacency* titik dari $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)$ adalah sebagai berikut

$$spec_{\boldsymbol{A}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)\right)} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{A}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)\right)$ adalah 3 dan -1. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 2 dan 6.

Selanjutnya, dari Gambar 4.1 dapat diperoleh matriks derajat dari $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{D}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)\right) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh matriks Laplace dari $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)$

$$\boldsymbol{L}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)\right) = \boldsymbol{D}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)\right) - \boldsymbol{A}(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8))$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$det\left(\boldsymbol{L}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)\right)-\lambda\boldsymbol{I}\right)=$$

$$det\left(\begin{bmatrix}3&0&-1&0&-1&0&-1&0\\0&3&0&-1&0&-1&0&-1\\-1&0&3&0&-1&0&-1&0\\0&-1&0&3&0&-1&0&-1\\-1&0&-1&0&3&0&-1&0\\0&-1&0&-1&0&3&0&-1\\-1&0&-1&0&-1&0&3&0\\0&-1&0&-1&0&-1&0&3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda&0&0&0&0&0&0&0\\0&\lambda&0&0&0&0&0&0\\0&0&\lambda&0&0&0&0&0\\0&0&0&\lambda&0&0&0&0\\0&0&0&0&\lambda&0&0&0\\0&0&0&0&0&\lambda&0&0\\0&0&0&0&0&0&\lambda&0\\0&0&0&0&0&0&0&\lambda\end{bmatrix}\right)=$$

$$det\begin{pmatrix}3-\lambda&0&-1&0&-1&0&-1&0\\0&3-\lambda&0&-1&0&-1&0&-1\\-1&0&3-\lambda&0&-1&0&-1&0\\0&-1&0&3-\lambda&0&-1&0&-1\\-1&0&-1&0&3-\lambda&0&-1&0\\0&-1&0&-1&0&3-\lambda&0&-1\\-1&0&-1&0&-1&0&3-\lambda&0\\0&-1&0&-1&0&-1&0&3-\lambda\end{pmatrix}$$

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat pada *software* Maple 18, diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{bmatrix}3-\lambda&0&-1&0&-1&0&-1&0\\0&3-\lambda&0&-1&0&-1&0&-1\\0&0&-\frac{\lambda^2-6\lambda+8}{-3+\lambda}&0&-\frac{-4+\lambda}{-3+\lambda}&0&-\frac{-4+\lambda}{-3+\lambda}&0\\0&0&0&-\frac{\lambda^2-6\lambda+8}{-3+\lambda}&0&-\frac{-4+\lambda}{-3+\lambda}&0&-\frac{-4+\lambda}{-3+\lambda}\\0&0&0&0&-\frac{\lambda^2-5\lambda+4}{\lambda-2}&0&-\frac{-4+\lambda}{\lambda-2}&0\\0&0&0&0&0&-\frac{\lambda^2-5\lambda+4}{\lambda-2}&0&-\frac{-4+\lambda}{\lambda-2}\\0&0&0&0&0&0&-\frac{(-4+\lambda)\lambda}{\lambda-1}&0\\0&0&0&0&0&0&0&-\frac{(-4+\lambda)\lambda}{\lambda-1}\end{bmatrix}$$

Sehingga polinomial karakteristik $\boldsymbol{L}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)\right)$ diperoleh dari perkalian diagonal matriks segitiga sebagai berikut

$$p(\lambda)=(3-\lambda)^2\left(-\frac{\lambda^2-6\lambda+8}{-3+\lambda}\right)^2\left(-\frac{\lambda^2-5\lambda+4}{\lambda-2}\right)^2\left(-\frac{(-4+\lambda)\lambda}{\lambda-1}\right)^2$$

$$=(\lambda-4)^6\lambda^2$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 4$ dan $\lambda_2 = 0$. Kemudian akan dicari multiplisitas dari nilai Eigen tersebut.

Untuk $\lambda_1 = 4$ disubstitusikan ke dalam $\left(\boldsymbol{L}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)\right) - \lambda \boldsymbol{I}\right)$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

selanjutnya hasil matriks tersebut akan direduksi dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat dalam *software* Maple 18, sehingga diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat diperoleh $m(\lambda_1) = 6$.

Untuk $\lambda_2 = 0$ disubstitusikan ke dalam $\left(\boldsymbol{L}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)\right) - \lambda \boldsymbol{I}\right)$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Selanjutnya hasil matriks tersebut akan direduksi dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat dalam *software* Maple 18, maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} & 0 & -\frac{4}{3} & 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{8}{3} & 0 & -\frac{4}{3} & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat diperoleh $m(\lambda_2) = 2$.

Dengan demikian terbentuklah spektrum Laplace dari $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)$ sebagai berikut

$$spec_{\boldsymbol{L}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)\right)} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{L}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)\right)$ adalah 4 dan 0. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 6 dan 2.

Kemudian matriks *signless* Laplace dari $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)$ dapat ditentukan dengan menggunakan cara berikut

$$\boldsymbol{L}^+\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)\right) = \boldsymbol{D}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)\right) + \boldsymbol{A}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$det\left(\boldsymbol{L}^{+}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)\right) - \lambda \boldsymbol{I}\right) =$$

$$det\left(\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) =$$

$$det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat pada *software* Maple 18, diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-6\lambda+8}{-3+\lambda} & 0 & \frac{-2+\lambda}{-3+\lambda} & 0 & \frac{-2+\lambda}{-3+\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-6\lambda+8}{-3+\lambda} & 0 & \frac{-2+\lambda}{-3+\lambda} & 0 & \frac{-2+\lambda}{-3+\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-7\lambda+10}{\lambda-4} & 0 & \frac{-2+\lambda}{\lambda-4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-7\lambda+10}{\lambda-4} & 0 & \frac{-2+\lambda}{\lambda-4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-8\lambda+12}{\lambda-5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-8\lambda+12}{\lambda-5} \end{bmatrix}$$

Sehingga polinomial karakteristik $\boldsymbol{L}^{+}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)\right)$ diperoleh dari perkalian diagonal matriks segitiga sebagai berikut

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$p(\lambda) = (3-\lambda)^2\left(-\frac{\lambda^2-6\lambda+8}{-3+\lambda}\right)^2\left(-\frac{\lambda^2-7\lambda+10}{\lambda-4}\right)^2\left(-\frac{\lambda^2-8\lambda+12}{\lambda-5}\right)^2$$

$$= (\lambda-6)^2(\lambda-2)^6$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 6$ dan $\lambda_2 = 2$. Kemudian akan dicari multiplisitas dari nilai Eigen tersebut.

Untuk $\lambda_1 = 6$ disubstitusikan ke dalam $\left(\boldsymbol{L}^+\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)\right) - \lambda\boldsymbol{I}\right)$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut akan direduksi dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat dalam *software* Maple 18, sehingga diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} & 0 & \frac{4}{3} & 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{8}{3} & 0 & \frac{4}{3} & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat diperoleh $m(\lambda_1) = 2$.

Untuk $\lambda_2 = 2$ disubstitusikan ke dalam $\left(\boldsymbol{L}^+\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)\right) - \lambda\boldsymbol{I}\right)$, sehingga diperoleh

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut akan direduksi dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat dalam *software* Maple 18, maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat diperoleh $m(\lambda_2) = 6$.

Dengan demikian spektrum *signless* Laplace dari $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)$ adalah sebagai berikut

$$spec_{\boldsymbol{L}^+\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)\right)} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{L}^+\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)\right)$ adalah 6 dan 2. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 2 dan 6.

3.1.2 Grup Dihedral D_{12}

Dua unsur di grup dihedral D_{12} jika dioperasikan menggunakan operasi komposisi $(\circ)$ dapat disajikan dengan Tabel Cayley berikut.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Tabel 3.3 Tabel Cayley Grup Dihedral D_{12}

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3
r^3	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2
r^4	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr
r^5	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2
sr^4	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r
sr^5	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1

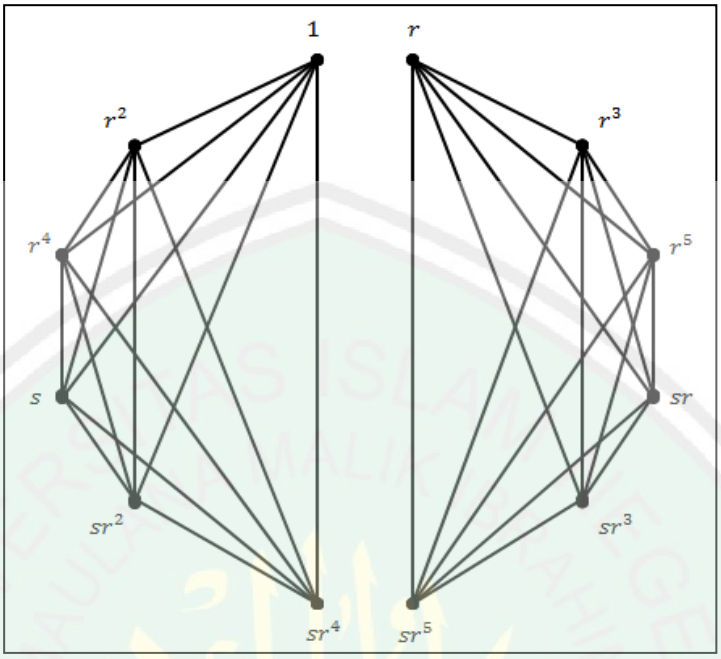
Subgrup dari grup dihedral D_{12} yang dibangun oleh $\langle r^2, s\rangle$ adalah $\{1, r^2, r^4, s, sr^2, sr^4\}$. Titik graf subgrup $\langle r^2, s\rangle$ dari grup dihedral (D_{12}) adalah $V\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})\right) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$. $\forall\, x, y \in D_{12} \ni x \circ y \in \{1, r^2, r^4, s, sr^2, sr^4\}$, maka x terhubung y, dapat dilihat pada Tabel 3.4.

Tabel 3.4 Tabel Cayley Subgrup dari Grup Dihedral D_{12}

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3
r^3	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2
r^4	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr
r^5	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2
sr^4	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r
sr^5	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dari Tabel 3.4 dapat digambarkan graf subgrup berikut.



Gambar 3.2 Graf $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})$

Dari Gambar 3.2 dapat diperoleh matriks *adjacency* titik dari $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})$ sebagai berikut

$$A(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$det\left(\boldsymbol{A}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})\right)-\lambda\boldsymbol{I}\right)=$$

$$det\left(\begin{bmatrix}0&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\0&0&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\1&0&0&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\0&1&0&0&0&1&0&1&0&1&0&1\\1&0&1&0&0&0&1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&0&0&1&0&1&0&1\\1&0&1&0&1&0&0&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&1&0&0&0&1&0&1\\1&0&1&0&1&0&1&0&0&0&1&0\\0&1&0&1&0&1&0&1&0&0&0&1\\1&0&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0\\0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda\end{bmatrix}\right)=$$

$$det\begin{pmatrix}0-\lambda&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\0&0-\lambda&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\1&0&0-\lambda&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\0&1&0&0-\lambda&0&1&0&1&0&1&0&1\\1&0&1&0&0-\lambda&0&1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&0-\lambda&0&1&0&1&0&1\\1&0&1&0&1&0&0-\lambda&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&1&0&0-\lambda&0&1&0&1\\1&0&1&0&1&0&1&0&0-\lambda&0&1&0\\0&1&0&1&0&1&0&1&0&0-\lambda&0&1\\1&0&1&0&1&0&1&0&0&0&0-\lambda&0\\0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&0-\lambda\end{pmatrix}$$

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan menggunakan cara yang sama pada grup dihedral (D_8), diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut.

$$p(\lambda)=(-\lambda)^2\left(-\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)^2\left(-\frac{\lambda^2-\lambda-2}{\lambda-1}\right)^2\left(-\frac{\lambda^2-2\lambda-3}{\lambda-2}\right)^2$$

$$\left(-\frac{\lambda^2-3\lambda-4}{\lambda-3}\right)^2\left(-\frac{\lambda^2-4\lambda-5}{\lambda-4}\right)^2$$

$$=(\lambda-5)^2(\lambda+1)^{10}$$

Dengan menetapkan $p(\lambda)=0$ maka diperoleh $\lambda_1=5,\lambda_2=-1$. Dengan cara yang sama pada grup dihedral (D_8) dapat ditentukan multiplisitas masing-masing nilai Eigen dari matriks tersebut, yaitu multiplisitas untuk nilai Eigen $m(\lambda_1)=2$ dan $m(\lambda_2)=10$.

Dengan demikian terbentuklah spektrum *adjacency* titik dari $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})$ sebagai berikut

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$spec_{\boldsymbol{A}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})\right)} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{A}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})\right)$ adalah 5 dan -1. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 2 dan 10.

Selanjutnya, dari Gambar 4.2 dapat diperoleh matriks derajat dari $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})$ sebagai berikut.

$$\boldsymbol{D}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})\right) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh matriks Laplace dari $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})$

$$\boldsymbol{L}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})\right) = \boldsymbol{D}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})\right) - \boldsymbol{A}(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12}))$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 5 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 5 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 5 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 5 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 5 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 5 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 5 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$det\left(\boldsymbol{L}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})\right)-\lambda\boldsymbol{I}\right)=$$

$$det\left(\begin{bmatrix}
5 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0\\
0 & 5 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1\\
-1 & 0 & 5 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0\\
0 & -1 & 0 & 5 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1\\
-1 & 0 & -1 & 0 & 5 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0\\
0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 5 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1\\
-1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 5 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0\\
0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 5 & 0 & -1 & 0 & -1\\
-1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 5 & 0 & -1 & 0\\
0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 5 & 0 & -1\\
-1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 5 & 0\\
0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 5
\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}
\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda
\end{bmatrix}\right)=$$

$$det\begin{pmatrix}
5-\lambda & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0\\
0 & 5-\lambda & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1\\
-1 & 0 & 5-\lambda & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0\\
0 & -1 & 0 & 5-\lambda & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1\\
-1 & 0 & -1 & 0 & 5-\lambda & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0\\
0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 5-\lambda & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1\\
-1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 5-\lambda & 0 & -1 & 0 & -1 & 0\\
0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 5-\lambda & 0 & -1 & 0 & -1\\
-1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 5-\lambda & 0 & -1 & 0\\
0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 5-\lambda & 0 & -1\\
-1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 5-\lambda & 0\\
0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 5-\lambda
\end{pmatrix}$$

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan menggunakan cara yang sama pada grup dihedral (D_8), diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut.

$$p(\lambda)=(5-\lambda)^2\left(-\frac{\lambda^2-10\lambda+24}{-5+\lambda}\right)^2\left(-\frac{\lambda^2-9\lambda+18}{\lambda-4}\right)^2$$

$$\left(-\frac{\lambda^2-8\lambda+12}{\lambda-3}\right)^2\left(-\frac{\lambda^2-7\lambda+6}{\lambda-2}\right)^2\left(-\frac{(-6+\lambda)\lambda}{\lambda-1}\right)^2$$

$$=(\lambda-6)^{10}\lambda^2$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 6$ dan $\lambda_2 = 0$. Dengan cara yang sama pada grup dihedral (D_8) dapat ditentukan multiplisitas masing-masing nilai Eigen dari matriks tersebut, yaitu $m(\lambda_1) = 10$ dan $m(\lambda_2) = 2$.

Dengan demikian terbentuklah spektrum Laplace dari $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})$ sebagai berikut

$$spec_{\boldsymbol{L}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})\right)} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{L}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})\right)$ adalah 6 dan 0. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 10 dan 2.

Kemudian matriks *signless* Laplace dari $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})$ dapat ditentukan dengan menggunakan cara berikut

$$\boldsymbol{L}^{+}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})\right) = \boldsymbol{D}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})\right) + \boldsymbol{A}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 5&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&5&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&5&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&5&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&5&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&5&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&5&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&5&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&5&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&5&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&5&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0 \\ 0&0&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1 \\ 1&0&0&0&1&0&1&0&1&0&1&0 \\ 0&1&0&0&0&1&0&1&0&1&0&1 \\ 1&0&1&0&0&0&1&0&1&0&1&0 \\ 0&1&0&1&0&0&0&1&0&1&0&1 \\ 1&0&1&0&1&0&0&0&1&0&1&0 \\ 0&1&0&1&0&1&0&0&0&1&0&1 \\ 1&0&1&0&1&0&1&0&0&0&1&0 \\ 0&1&0&1&0&1&0&1&0&0&0&1 \\ 1&0&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0 \\ 0&5&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1 \\ 1&0&5&0&1&0&1&0&1&0&1&0 \\ 0&1&0&5&0&1&0&1&0&1&0&1 \\ 1&0&1&0&5&0&1&0&1&0&1&0 \\ 0&1&0&1&0&5&0&1&0&1&0&1 \\ 1&0&1&0&1&0&5&0&1&0&1&0 \\ 0&1&0&1&0&1&0&5&0&1&0&1 \\ 1&0&1&0&1&0&1&0&5&0&1&0 \\ 0&1&0&1&0&1&0&1&0&5&0&1 \\ 1&0&1&0&1&0&1&0&0&0&5&0 \\ 0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&5 \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$det\left(\boldsymbol{L}^{+}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})\right)-\lambda\boldsymbol{I}\right)=$$

$$det\left(\begin{bmatrix}5&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\0&5&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\1&0&5&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\0&1&0&5&0&1&0&1&0&1&0&1\\1&0&1&0&5&0&1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&5&0&1&0&1&0&1\\1&0&1&0&1&0&5&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&1&0&5&0&1&0&1\\1&0&1&0&1&0&1&0&5&0&1&0\\0&1&0&1&0&1&0&1&0&5&0&1\\1&0&1&0&1&0&1&0&0&0&5&0\\0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda\end{bmatrix}\right)=$$

$$det\begin{pmatrix}5-\lambda&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\0&5-\lambda&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\1&0&5-\lambda&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\0&1&0&5-\lambda&0&1&0&1&0&1&0&1\\1&0&1&0&5-\lambda&0&1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&5-\lambda&0&1&0&1&0&1\\1&0&1&0&1&0&5-\lambda&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&1&0&5-\lambda&0&1&0&1\\1&0&1&0&1&0&1&0&5-\lambda&0&1&0\\0&1&0&1&0&1&0&1&0&5-\lambda&0&1\\1&0&1&0&1&0&1&0&0&0&5-\lambda&0\\0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&5-\lambda\end{pmatrix}$$

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan menggunakan cara yang sama pada grup dihedral (D_8), diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut.

$$p(\lambda)=(5-\lambda)^2\left(-\frac{\lambda^2-10\lambda+24}{-5+\lambda}\right)^2\left(-\frac{\lambda^2-11\lambda+28}{\lambda-6}\right)^2$$

$$\left(-\frac{\lambda^2-12\lambda+32}{\lambda-7}\right)^2\left(-\frac{\lambda^2-13\lambda+36}{\lambda-8}\right)^2\left(-\frac{\lambda^2-14\lambda+40}{\lambda-9}\right)^2$$

$$=(\lambda-10)^2(\lambda-4)^{10}$$

Dengan menetapkan $p(\lambda)=0$ maka diperoleh $\lambda_1=10$ dan $\lambda_2=4$. Dengan cara yang sama pada grup dihedral (D_8) dapat ditentukan multiplisitas masing-masing nilai Eigen dari matriks tersebut, yaitu $m(\lambda_1)=2$ dan $m(\lambda_2)=10$.

Dengan demikian terbentuklah spektrum *signless* Laplace dari $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})$ sebagai berikut

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$spec_{\boldsymbol{L}^{+}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})\right)} = \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{L}^{+}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})\right)$ adalah 10 dan 4. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 2 dan 10.

3.1.3 Grup Dihedral D_{16}

Dua unsur di grup dihedral D_{16} jika dioperasikan menggunakan operasi komposisi $(\circ)$ dapat disajikan dengan Tabel Cayley berikut.

Tabel 3.5 Tabel Cayley Grup Dihedral D_{16}

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r^3	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^4	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3
r^5	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2
r^6	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr
r^7	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^4	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3
sr^5	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2
sr^6	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r
sr^7	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1

Subgrup dari grup dihedral D_{16} yang dibangun oleh $\langle r^2, s\rangle$ adalah $\{1, r^2, r^4, r^6, s, sr^2, sr^4, sr^6\}$. Titik graf subgrup $\langle r^2, s\rangle$ dari grup dihedral (D_{16}) adalah $V\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})\right) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}$. $\forall\, x, y \in D_{16} \ni x \circ y \in \{1, r^2, r^4, r^6, s, sr^2, sr^4, sr^6\}$, maka x terhubung y, dapat dilihat pada Tabel 3.6.

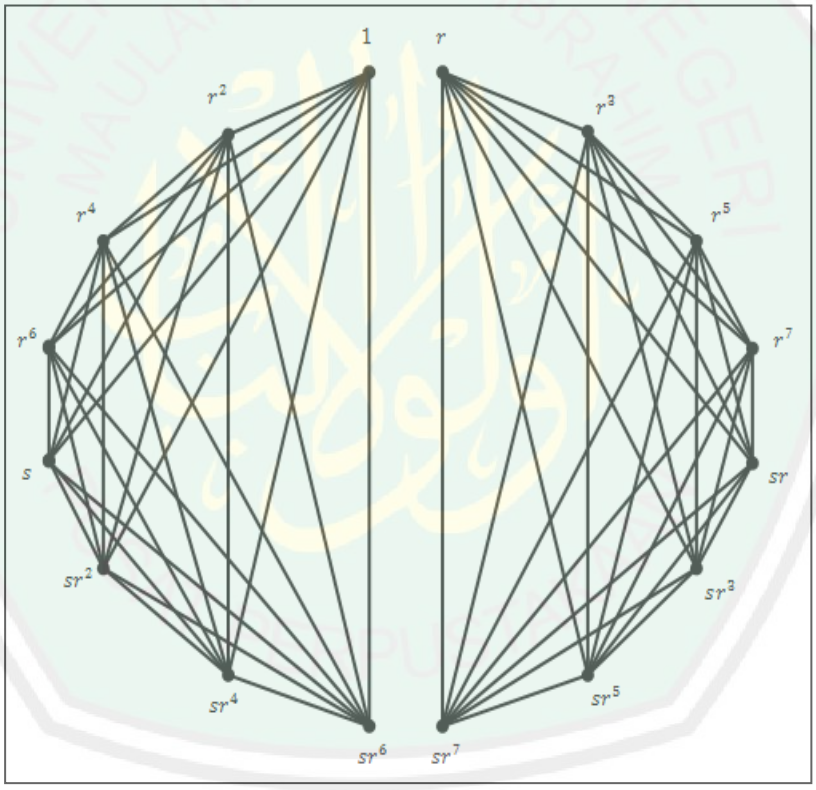
Tabel 3.6 Tabel Cayley Subgrup dari Grup Dihedral D_{16}

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r^3	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^4	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3
r^5	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2
r^6	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr
r^7	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^4	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3
sr^5	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2
sr^6	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r
sr^7	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1

Dari Tabel 3.6 dapat digambarkan graf subgrup berikut.



Gambar 3.3 Graf $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dari Gambar 3.3 dapat diperoleh matriks *adjacency* titik dari $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{A}(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})) = \begin{bmatrix}
0&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\
0&0&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\
1&0&0&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\
0&1&0&0&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\
1&0&1&0&0&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\
0&1&0&1&0&0&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\
1&0&1&0&1&0&0&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\
0&1&0&1&0&1&0&0&0&1&0&1&0&1&0&1\\
1&0&1&0&1&0&1&0&0&0&1&0&1&0&1&0\\
0&1&0&1&0&1&0&1&0&0&0&1&0&1&0&1\\
1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&0&0&1&0&1&0\\
0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&0&0&1&0&1\\
1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&0&0&1&0\\
0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&0&0&1\\
1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&0&0\\
0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&0
\end{bmatrix}$$

$$det\left(\boldsymbol{A}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})\right) - \lambda\boldsymbol{I}\right) =$$

$$det\left(\begin{bmatrix}
0&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\
0&0&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\
1&0&0&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\
0&1&0&0&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\
1&0&1&0&0&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\
0&1&0&1&0&0&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\
1&0&1&0&1&0&0&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\
0&1&0&1&0&1&0&0&0&1&0&1&0&1&0&1\\
1&0&1&0&1&0&1&0&0&0&1&0&1&0&1&0\\
0&1&0&1&0&1&0&1&0&0&0&1&0&1&0&1\\
1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&0&0&1&0&1&0\\
0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&0&0&1&0&1\\
1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&0&0&1&0\\
0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&0&0&1\\
1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&0&0\\
0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&0
\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}
\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda
\end{bmatrix}\right) =$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$det\begin{pmatrix}
0-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\
1 & 0 & 0-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\
1 & 0 & 1 & 0 & 0-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1\\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0-\lambda & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0-\lambda & 0 & 1\\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0-\lambda & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0-\lambda
\end{pmatrix}$$

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan menggunakan cara yang sama pada grup dihedral (D_8), diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut.

$$p(\lambda) = (-\lambda)^2\left(-\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)^2\left(-\frac{\lambda^2-\lambda-2}{\lambda-1}\right)^2\left(-\frac{\lambda^2-2\lambda-3}{\lambda-2}\right)^2$$

$$\left(-\frac{\lambda^2-3\lambda-4}{\lambda-3}\right)^2\left(-\frac{\lambda^2-4\lambda-5}{\lambda-4}\right)^2\left(-\frac{\lambda^2-5\lambda-6}{\lambda-5}\right)^2\left(-\frac{\lambda^2-6\lambda-7}{\lambda-6}\right)^2$$

$$= (\lambda-7)^2(\lambda+1)^{14}$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 7$ dan $\lambda_2 = -1$. Dengan cara yang sama pada grup dihedral (D_8) dapat ditentukan multiplisitas masing-masing nilai Eigen dari matriks tersebut, yaitu $m(\lambda_1) = 2$ dan $m(\lambda_2) = 14$.

Dengan demikian terbentuklah spektrum *adjacency* titik dari $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})$ sebagai berikut

$$spec_{\boldsymbol{A}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})\right)} = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 14 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{A}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})\right)$ adalah 7 dan -1. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 2 dan 14.

Selanjutnya, dari Gambar 3.3 dapat diperoleh matriks derajat dari $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})$ sebagai berikut.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\boldsymbol{D}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})\right) = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

dengan demikian diperoleh matriks Laplace dari $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})$

$$\boldsymbol{L}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})\right) = \boldsymbol{D}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})\right) - \boldsymbol{A}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \begin{bmatrix} 7 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 7 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 7 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 7 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 7 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 7 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 7 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 7 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 7 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 7 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 7 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 7 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 7 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$det\left(\boldsymbol{L}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})\right) - \lambda \boldsymbol{I}\right) =$$

$$det\left(\begin{bmatrix} 7 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 7 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 7 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 7 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 7 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 7 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 7 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 7 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 7 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 7 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 7 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 7 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 7 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) =$$

$$det\begin{pmatrix} 7-\lambda & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7-\lambda & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 7-\lambda & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 7-\lambda & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 7-\lambda & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 7-\lambda & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 7-\lambda & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 7-\lambda & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 7-\lambda & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 7-\lambda & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 7-\lambda & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 7-\lambda & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 7-\lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 7-\lambda & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 7-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 7-\lambda \end{pmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan menggunakan cara yang sama pada grup dihedral (D_8), diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut.

$$p(\lambda) = (7-\lambda)^2\left(-\frac{\lambda^2-14\lambda+48}{-7+\lambda}\right)^2\left(-\frac{\lambda^2-13\lambda+40}{\lambda-6}\right)^2\left(-\frac{\lambda^2-12\lambda+32}{\lambda-5}\right)^2$$
$$\left(-\frac{\lambda^2-11\lambda+24}{\lambda-4}\right)^2\left(-\frac{\lambda^2-10\lambda+16}{\lambda-3}\right)^2\left(-\frac{\lambda^2-9\lambda+8}{\lambda-2}\right)^2\left(-\frac{(-8+\lambda)\lambda}{\lambda-1}\right)^2$$
$$= (\lambda-8)^{14}\lambda^2$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 8$ dan $\lambda_2 = 0$. Dengan cara yang sama pada grup dihedral (D_8) dapat ditentukan multiplisitas masing-masing nilai Eigen dari matriks tersebut, yaitu $m(\lambda_1) = 14$ dan $m(\lambda_2) = 2$.

Dengan demikian terbentuklah spektrum Laplace dari $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})$ sebagai berikut

$$spec_{\boldsymbol{L}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})\right)} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 14 & 2 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{L}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})\right)$ adalah 8 dan 0. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 14 dan 2.

Kemudian matriks *signless* Laplace dari $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})$ dapat ditentukan dengan menggunakan cara berikut

$$\boldsymbol{L}^+\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})\right) = \boldsymbol{D}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})\right) + \boldsymbol{A}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})\right)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \begin{bmatrix}
7&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&7&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&7&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&7&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&7&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&7&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&7&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&7&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&7&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&7&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&7&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&7&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&7&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&7&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&7&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&7
\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}
0&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\
0&0&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\
1&0&0&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\
0&1&0&0&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\
1&0&1&0&0&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\
0&1&0&1&0&0&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\
1&0&1&0&1&0&0&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\
0&1&0&1&0&1&0&0&0&1&0&1&0&1&0&1\\
1&0&1&0&1&0&1&0&0&0&1&0&1&0&1&0\\
0&1&0&1&0&1&0&1&0&0&0&1&0&1&0&1\\
1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&0&0&1&0&1&0\\
0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&0&0&1&0&1\\
1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&0&0&1&0\\
0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&0&0&1\\
1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&0&0\\
0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&0
\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}
7&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\
0&7&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\
1&0&7&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\
0&1&0&7&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\
1&0&1&0&7&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\
0&1&0&1&0&7&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\
1&0&1&0&1&0&7&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\
0&1&0&1&0&1&0&7&0&1&0&1&0&1&0&1\\
1&0&1&0&1&0&1&0&7&0&1&0&1&0&1&0\\
0&1&0&1&0&1&0&1&0&7&0&1&0&1&0&1\\
1&0&1&0&1&0&1&0&0&0&7&0&1&0&1&0\\
0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&7&0&1&0&1\\
1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&7&0&1&0\\
0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&7&0&1\\
1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&7&0\\
0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&7
\end{bmatrix}$$

$$det\left(\boldsymbol{L}^{+}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})\right) - \lambda \boldsymbol{I}\right) =$$

$$det\left(\begin{bmatrix}
7&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\
0&7&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\
1&0&7&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\
0&1&0&7&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\
1&0&1&0&7&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\
0&1&0&1&0&7&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\
1&0&1&0&1&0&7&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\
0&1&0&1&0&1&0&7&0&1&0&1&0&1&0&1\\
1&0&1&0&1&0&1&0&7&0&1&0&1&0&1&0\\
0&1&0&1&0&1&0&1&0&7&0&1&0&1&0&1\\
1&0&1&0&1&0&1&0&0&0&7&0&1&0&1&0\\
0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&7&0&1&0&1\\
1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&7&0&1&0\\
0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&7&0&1\\
1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&7&0\\
0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&7
\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}
\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda
\end{bmatrix}\right) =$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$det\begin{pmatrix}
7-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 7-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\
1 & 0 & 7-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 7-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\
1 & 0 & 1 & 0 & 7-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 7-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 7-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 7-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 7-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 7-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 7-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 7-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1\\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 7-\lambda & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 7-\lambda & 0 & 1\\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 7-\lambda & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 7-\lambda
\end{pmatrix}$$

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan menggunakan cara yang sama pada grup dihedral (D_8), diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut.

$$p(\lambda) = (7-\lambda)^2\left(-\frac{\lambda^2-14\lambda+48}{-7+\lambda}\right)^2\left(-\frac{\lambda^2-15\lambda+54}{\lambda-8}\right)^2\left(-\frac{\lambda^2-16\lambda+60}{\lambda-9}\right)^2$$

$$\left(-\frac{\lambda^2-17\lambda+66}{\lambda-10}\right)^2\left(-\frac{\lambda^2-18\lambda+72}{\lambda-11}\right)^2\left(-\frac{\lambda^2-19\lambda+78}{\lambda-12}\right)^2\left(-\frac{\lambda^2-20\lambda+84}{\lambda-13}\right)^2$$

$$= (\lambda-14)^2(\lambda-6)^{14}$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 14$ dan $\lambda_2 = 6$. Dengan cara yang sama pada grup dihedral (D_8) dapat ditentukan multiplisitas masing-masing nilai Eigen dari matriks tersebut, yaitu $m(\lambda_1) = 2$ dan $m(\lambda_2) = 14$.

Dengan demikian terbentuklah spektrum *signless* Laplace dari $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})$ sebagai berikut

$$spec_{L^+\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})\right)} = \begin{bmatrix}14 & 6\\ 2 & 14\end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{L^+}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})\right)$ adalah 14 dan 6. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 2 dan 14.

Dari spektrum yang telah ditemukan, diperoleh bentuk polinomial karakteristik dan spektrum *adjacency* titik graf subgrup dari beberapa grup dihedral, diantaranya

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Tabel 3.7 Polinomial Karakteristik Matriks *Adjacency* Titik dari Beberapa Graf Subgrup $\langle r^2, s\rangle$ dari Grup Dihedral (D_{2n})

n	Grup Dihedral D_{2n}	Polinomial Karakteristik Matriks *Adjacency* Titik
4	Grup Dihedral D_8	$(\lambda-3)^2(\lambda+1)^6$
6	Grup Dihedral D_{12}	$(\lambda-5)^2(\lambda+1)^{10}$
8	Grup Dihedral D_{16}	$(\lambda-7)^2(\lambda+1)^{14}$
⋮		
n	Grup Dihedral D_{2n}	$\big(\lambda-(n-1)\big)^2(\lambda+1)^{2(n-1)}$

Tabel 3.8 Spektrum *Adjacency* Titik dari Beberapa Graf Subgrup $\langle r^2, s\rangle$ dari Grup Dihedral (D_{2n})

n	Grup Dihedral D_{2n}	Spektrum *Adjacency* Titik
4	Grup Dihedral D_8	$\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & 6\end{bmatrix}$
6	Grup Dihedral D_{12}	$\begin{bmatrix}5 & -1\\ 2 & 10\end{bmatrix}$
8	Grup Dihedral D_{16}	$\begin{bmatrix}7 & -1\\ 2 & 14\end{bmatrix}$
⋮		
n	Grup Dihedral D_{2n}	$\begin{bmatrix}(n-1) & -1\\ 2 & 2(n-1)\end{bmatrix}$

Teorema 1

Polinomial karakteristik matriks *adjacency* titik $\boldsymbol{A}\big(\Gamma_H(D_{2n})\big)$ dengan $H = \langle r^2, s\rangle \trianglelefteq D_{2n}$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$p(\lambda) = \big(\lambda-(n-1)\big)^2(\lambda+1)^{2n-2}$$

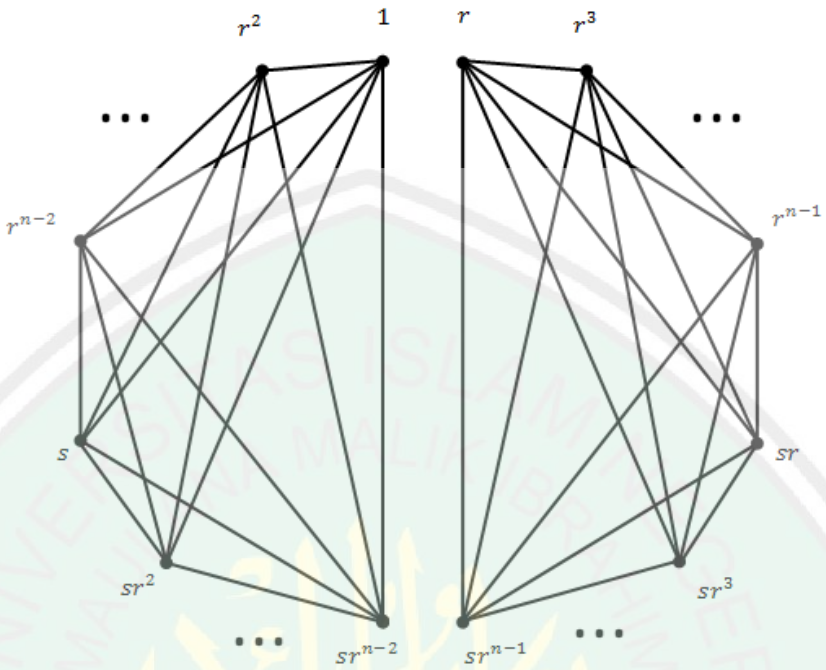
Bukti

Misalkan grup dihedral $(D_{2n}) = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$. Untuk n genap dan $n \geq 4$, ambil

$H = \langle r^2, s\rangle \trianglelefteq D_{2n}, H = \{1, r^2, \dots, r^{n-2}, s, sr^2, \dots, sr^{n-2}\}$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Sesuai definisi graf subgrup, maka diperoleh graf $\Gamma_H(D_{2n})$ sebagai berikut.



Sehingga diperoleh matriks *adjacency* titik dari $\Gamma_H(D_{2n})$ sebagai berikut

$$A(\Gamma_H(D_{2n})) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ r^3 \\ \vdots \\ r^{n-2} \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ sr^3 \\ \vdots \\ sr^{n-2} \\ sr^{n-1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccc} 1 & r & r^2 & r^3 & \dots & r^{n-2} & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & sr^3 & \dots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Polinomial karakteristik $\boldsymbol{A}(\Gamma_H(D_{2n}))$ diperoleh dari $det(\boldsymbol{A}(\Gamma_H(D_{2n})) - \lambda \boldsymbol{I})$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dengan eliminasi Gauss pada $\boldsymbol{A}\left(\Gamma_H(D_{2n})\right) - \lambda \boldsymbol{I}$ diperoleh matriks segitiga atas berikut

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & r & r^2 & \ldots & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} -\lambda & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & -\lambda & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & -\dfrac{(\lambda-1)(\lambda+1)}{\lambda} & \ldots & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\dfrac{(\lambda-(n-1))(\lambda+1)}{\lambda-(n-2)} \end{bmatrix} \end{array}$$

Maka $det\left(\boldsymbol{A}\left(\Gamma_H(D_{2n})\right) - \lambda \boldsymbol{I}\right)$ tidak lain adalah perkalian unsur-unsur diagonal utama matriks segitiga atas tersebut. Maka diperoleh polinomial karakteristik dari $\boldsymbol{A}\left(\Gamma_H(D_{2n})\right)$ adalah

$$p(\lambda) = \left(\lambda - (n-1)\right)^2 (\lambda+1)^{2n-2}. \blacksquare$$

Teorema 2

Spektrum *adjacency* titik $\boldsymbol{A}\left(\Gamma_H(D_{2n})\right)$ dengan $H = \langle r^2, s\rangle \trianglelefteq D_{2n}$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$spec_{\boldsymbol{A}(\Gamma_H(D_{2n}))} = \begin{bmatrix} (n-1) & -1 \\ 2 & 2n-2 \end{bmatrix}$$

Bukti

Berdasarkan teorema 1, polinomial karakteristik dari $\boldsymbol{A}\left(\Gamma_H(D_{2n})\right)$, n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$p(\lambda) = \left(\lambda - (n-1)\right)^2 (\lambda+1)^{2n-2}$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = (n-1)$ dan $\lambda_2 = -1$ dan diperoleh multiplisitas $m(\lambda_1) = 2$ dan $m(\lambda_2) = 2n-2$.

Spektrum *adjacency* titik graf subgrup $H = \langle r^2, s\rangle$ dari grup dihedral D_{2n} untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$spec_{\boldsymbol{A}(\Gamma_H(D_{2n}))} = \begin{bmatrix} (n-1) & -1 \\ 2 & 2n-2 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{A}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})\right)$ adalah $(n-1)$ dan -1. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 2 dan $2n-2$. ■

Dari spektrum yang telah ditemukan, diperoleh bentuk polinomial karakteristik dan spektrum Laplace graf subgrup dari beberapa grup dihedral diantaranya

Tabel 3.9 Polinomial Karakteristik Matriks Laplace dari Beberapa Graf Subgrup $\langle r^2, s\rangle$ dari Grup Dihedral (D_{2n})

n	Grup Dihedral D_{2n}	Polinomial Karakteristik Matriks Laplace
4	Grup Dihedral D_8	$(\lambda-4)^6\lambda^2$
6	Grup Dihedral D_{12}	$(\lambda-6)^{10}\lambda^2$
8	Grup Dihedral D_{16}	$(\lambda-8)^{14}\lambda^2$
⋮		
n	Grup Dihedral D_{2n}	$p(\lambda)=(\lambda-n)^{2n-2}\lambda^2$

Tabel 3.10 Spektrum Laplace dari Beberapa Graf Subgrup $\langle r^2, s\rangle$ dari Grup Dihedral (D_{2n})

n	Grup Dihedral D_{2n}	Spektrum Laplace
4	Grup Dihedral D_8	$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$
6	Grup Dihedral D_{12}	$\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$
8	Grup Dihedral D_{16}	$\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 14 & 2 \end{bmatrix}$
⋮		
n	Grup Dihedral D_{2n}	$\begin{bmatrix} n & 0 \\ 2n-2 & 2 \end{bmatrix}$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Teorema 3

Polinomial karakteristik matriks Laplace $\boldsymbol{L}\big(\Gamma_H(D_{2n})\big)$ dengan $H = \langle r^2, s\rangle \trianglelefteq D_{2n}$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$p(\lambda) = (\lambda - n)^{2n-2}\lambda^2$$

Bukti

Misalkan grup dihedral $(D_{2n}) = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$. Untuk n genap dan $n \geq 4$, ambil

$H = \langle r^2, s\rangle \trianglelefteq D_{2n}, H = \{1, r^2, \dots, r^{n-2}, s, sr^2, \dots, sr^{n-2}\}$.

Sesuai definisi graf subgrup, maka diperoleh graf $\Gamma_H(D_{2n})$ seperti pada teorema 1. Sehingga diperoleh matriks *adjacency* titik dari $\Gamma_H(D_{2n})$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{A}\big(\Gamma_H(D_{2n})\big) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ r^3 \\ \vdots \\ r^{n-2} \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ sr^3 \\ \vdots \\ sr^{n-2} \\ sr^{n-1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccc} 1 & r & r^2 & r^3 & \dots & r^{n-2} & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & sr^3 & \dots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

dan matriks derajat dari $\Gamma_H(D_{2n})$ adalah

$$\boldsymbol{D}(\Gamma_H(D_{2n})) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ r^3 \\ \vdots \\ r^{n-2} \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ sr^3 \\ \vdots \\ sr^{n-2} \\ sr^{n-1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccc} 1 & r & r^2 & r^3 & \dots & r^{n-2} & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & sr^3 & \dots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} n-1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n-1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n-1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & n-1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & n-1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & n-1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n-1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n-1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matriks Laplace graf subgrup dari grup dihedral (D_{2n}) adalah sebagai berikut

$$\boldsymbol{L}(\Gamma_H(D_{2n})) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ r^3 \\ \vdots \\ r^{n-2} \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ sr^3 \\ \vdots \\ sr^{n-2} \\ sr^{n-1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccc} 1 & r & r^2 & r^3 & \dots & r^{n-2} & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & sr^3 & \dots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} n-1 & 0 & -1 & 0 & \dots & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & -1 & \dots & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & \dots & 0 & -1 \\ -1 & 0 & n-1 & 0 & \dots & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & n-1 & \dots & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & \dots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & -1 & 0 & \dots & n-1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & \dots & 0 & n-1 & 0 & -1 & 0 & -1 & \dots & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & \dots & -1 & 0 & n-1 & 0 & -1 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & \dots & 0 & -1 & 0 & n-1 & 0 & -1 & \dots & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & \dots & -1 & 0 & -1 & 0 & n-1 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & \dots & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & n-1 & \dots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & -1 & 0 & \dots & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & \dots & n-1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & \dots & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & \dots & 0 & n-1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Polinomial karakteristik $\boldsymbol{L}(\Gamma_H(D_{2n}))$ diperoleh dari $det(\boldsymbol{L}(\Gamma_H(D_{2n})) - \lambda \boldsymbol{I})$. Dengan eliminasi Gauss pada $\boldsymbol{L}(\Gamma_H(D_{2n})) - \lambda \boldsymbol{I}$ diperoleh matriks segitiga atas berikut

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & r & r^2 & \dots & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} -(\lambda-(n-1)) & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -(\lambda-(n-1)) & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -\dfrac{(\lambda-n)(\lambda-(n-2))}{\lambda-(n-1)} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\dfrac{(\lambda-n)\lambda}{\lambda-1} \end{bmatrix} \end{array}$$

Maka $det(\boldsymbol{L}(\Gamma_H(D_{2n})) - \lambda \boldsymbol{I})$ tidak lain adalah perkalian diagonal matriks segitiga atas. Sehingga diperoleh polinomial karakteristik dari $\boldsymbol{L}(\Gamma_H(D_{2n}))$ adalah

$$p(\lambda) = (\lambda - n)^{2n-2}\lambda^2. \quad \blacksquare$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Teorema 4

Spektrum Laplace $\boldsymbol{L}\left(\Gamma_H(D_{2n})\right)$ dengan $H = \langle r^2, s\rangle \trianglelefteq D_{2n}$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$spec_{\boldsymbol{L}(\Gamma_H(D_{2n}))} = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 2n-2 & 2 \end{bmatrix}$$

Bukti

Berdasarkan teorema 3, polinomial karakteristik dari $\boldsymbol{L}\left(\Gamma_H(D_{2n})\right)$, n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$p(\lambda) = (\lambda - n)^{2n-2}\lambda^2$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = n$ dan $\lambda_2 = 0$ dan diperoleh multiplisitas $m(\lambda_1) = 2n - 2$ dan $m(\lambda_2) = 2$.

Spektrum Laplace graf subgrup $H = \langle r^2, s\rangle$ dari grup dihedral D_{2n} untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$spec_{\boldsymbol{L}(\Gamma_H(D_{2n}))} = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 2n-2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{L}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})\right)$ adalah n dan 0. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak $2n - 2$ dan 2. ■

Dari spektrum yang telah ditemukan, diperoleh bentuk polinomial karakteristik dan spektrum *signless* Laplace graf subgrup dari beberapa grup dihedral diantaranya

Tabel 3.11 Polinomial Karakteristik Matriks *Signless* Laplace dari Beberapa Graf Subgrup $\langle r^2, s\rangle$ dari Grup Dihedral (D_{2n})

n	Grup Dihedral D_{2n}	Polinomial Karakteristik Matriks *Signless* Laplace
4	Grup Dihedral D_8	$(\lambda-6)^2(\lambda-2)^6$
6	Grup Dihedral D_{12}	$(\lambda-10)^2(\lambda-4)^{10}$
8	Grup Dihedral D_{16}	$(\lambda-14)^2(\lambda-6)^{14}$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

⋮		
n	Grup Dihedral D_{2n}	$\left(\lambda-(2n-2)\right)^2\left(\lambda-(n-2)\right)^{2n-2}$

Tabel 3.12 Spektrum *Signless* Laplace dari Beberapa Graf Subgrup $\langle r^2, s\rangle$ dari Grup Dihedral (D_{2n})

n	Grup Dihedral D_{2n}	Spektrum *Signless* Laplace
4	Grup Dihedral D_8	$\begin{bmatrix}6 & 2\\ 2 & 6\end{bmatrix}$
6	Grup Dihedral D_{12}	$\begin{bmatrix}10 & 4\\ 2 & 10\end{bmatrix}$
8	Grup Dihedral D_{16}	$\begin{bmatrix}14 & 6\\ 2 & 14\end{bmatrix}$
⋮		
n	Grup Dihedral D_{2n}	$\begin{bmatrix}2n-2 & n-2\\ 2 & 2n-2\end{bmatrix}$

Teorema 5

Polinomial karakteristik matriks *signless* Laplace $\boldsymbol{L}^+\left(\Gamma_H(D_{2n})\right)$ dengan $H = \langle r^2, s\rangle \trianglelefteq D_{2n}$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$p(\lambda) = \left(\lambda-(2n-2)\right)^2\left(\lambda-(n-2)\right)^{2n-2}$$

Bukti

Misalkan grup dihedral $(D_{2n}) = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$. Untuk n genap dan $n \geq 4$, ambil

$H = \langle r^2, s\rangle \trianglelefteq D_{2n}, H = \{1, r^2, \dots, r^{n-2}, s, sr^2, \dots, sr^{n-2}\}$.

Sesuai definisi graf subgrup, maka diperoleh graf $\Gamma_H(D_{2n})$ seperti pada teorema 1. Sehingga diperoleh matriks *adjacency* titik dari $\Gamma_H(D_{2n})$ sebagai berikut

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\boldsymbol{A}\left(\Gamma_H(D_{2n})\right) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ r^3 \\ \vdots \\ r^{n-2} \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ sr^3 \\ \vdots \\ sr^{n-2} \\ sr^{n-1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccc} 1 & r & r^2 & r^3 & \dots & r^{n-2} & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & sr^3 & \dots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

dan matriks derajat dari $\Gamma_H(D_{2n})$ adalah

$$\boldsymbol{D}\left(\Gamma_H(D_{2n})\right) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ r^3 \\ \vdots \\ r^{n-2} \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ sr^3 \\ \vdots \\ sr^{n-2} \\ sr^{n-1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccc} 1 & r & r^2 & r^3 & \dots & r^{n-2} & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & sr^3 & \dots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} n-1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n-1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n-1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & n-1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & n-1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & n-1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n-1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n-1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matriks *signless* Laplace graf subgrup dari grup dihedral (D_{2n}) adalah sebagai berikut

$$\boldsymbol{L}^{+}\left(\Gamma_H(D_{2n})\right) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ r^3 \\ \vdots \\ r^{n-2} \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ sr^3 \\ \vdots \\ sr^{n-2} \\ sr^{n-1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccc} 1 & r & r^2 & r^3 & \dots & r^{n-2} & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & sr^3 & \dots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} n-1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & n-1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & n-1 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & n-1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & n-1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & n-1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & n-1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & n-1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & n-1 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & n-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & n-1 \end{bmatrix} \end{array}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Polinomial karakteristik $\boldsymbol{L}^{+}\left(\Gamma_H(D_{2n})\right)$ diperoleh dari $det\left(\boldsymbol{L}^{+}\left(\Gamma_H(D_{2n})\right) - \lambda \boldsymbol{I}\right)$. Dengan eliminasi Gauss pada $\boldsymbol{L}^{+}\left(\Gamma_H(D_{2n})\right) - \lambda \boldsymbol{I}$ diperoleh matriks segitiga atas berikut

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & r & r^2 & \dots & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \lambda-(n-1) & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \lambda-(n-1) & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -\dfrac{(\lambda-n)(\lambda-(n-2))}{\lambda-(n-1)} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\dfrac{(\lambda-(2n-2))(\lambda-(n-2))}{\lambda-(2n-3)} \end{bmatrix} \end{array}$$

Maka $det\left(\boldsymbol{L}^{+}\left(\Gamma_H(D_{2n})\right) - \lambda \boldsymbol{I}\right)$ tidak lain adalah perkalian diagonal matriks segitiga atas. Maka diperoleh polinomial karakteristik dari $\boldsymbol{L}^{+}\left(\Gamma_H(D_{2n})\right)$ adalah

$$p(\lambda) = \left(\lambda-(2n-2)\right)^2\left(\lambda-(n-2)\right)^{2n-2}. \quad \blacksquare$$

Teorema 6

Spektrum *signless* Laplace $\boldsymbol{L}^{+}\left(\Gamma_H(D_{2n})\right)$ dengan $H = \langle r^2, s\rangle \trianglelefteq D_{2n}$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$spec_{\boldsymbol{L}^{+}(\Gamma_H(D_{2n}))} = \begin{bmatrix} 2n-2 & n-2 \\ 2 & 2n-2 \end{bmatrix}$$

Bukti

Dari teorema 5, polinomial karakteristik dari $\boldsymbol{L}^{+}\left(\Gamma_H(D_{2n})\right)$, n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$p(\lambda) = \left(\lambda-(2n-2)\right)^2\left(\lambda-(n-2)\right)^{2n-2}$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 2n-2$ dan $\lambda_2 = n-2$ dan diperoleh multiplisitas $m(\lambda_1) = 2$ dan $m(\lambda_2) = 2n-2$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Spektrum *signless* Laplace graf subgrup $H = \langle r^2, s\rangle$ dari grup dihedral D_{2n} untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$spec_{\boldsymbol{L}^+(\Gamma_H(D_{2n}))} = \begin{bmatrix} 2n-2 & n-2 \\ 2 & 2n-2 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{L}^+\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})\right)$ adalah $2n-2$ dan $n-2$. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 2 dan $2n-2$. ■

3.2 Spektrum *Adjacency* Titik, Laplace, *signless* Laplace, dan *Detour* Komplemen Graf Subgrup $\langle r^2, s\rangle$ dari Grup Dihedral (D_{2n})

3.2.1 Grup Dihedral D_8

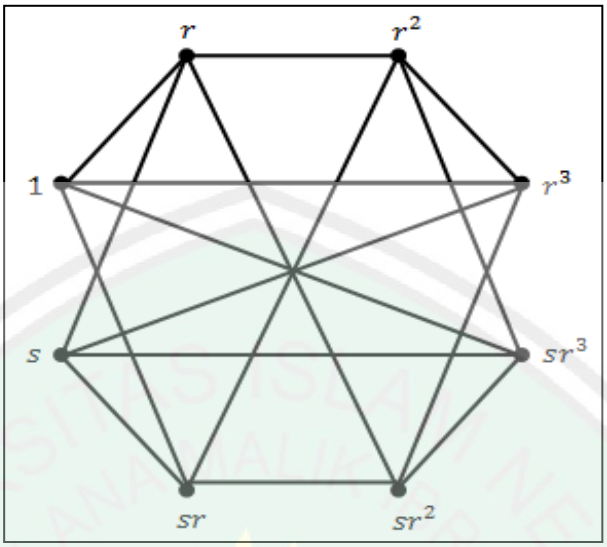
Komplemen subgrup dari grup dihedral D_8 yang dibangun oleh $\langle r^2, s\rangle$ adalah $\{r, r^3, sr, sr^3\}$. Titik komplemen graf subgrup $\langle r^2, s\rangle$ dari grup dihedral (D_8) adalah $V\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}\right) = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$. $\forall\, x, y \in D_8 \ni x \circ y \in \{r, r^3, sr, sr^3\}$, maka x terhubung y, dapat dilihat pada Tabel 3.13.

Tabel 3.13 Tabel Cayley Komplemen Subgrup dari Grup Dihedral D_8

$\circ$	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
1	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
r	r	r^2	r^3	1	sr^3	s	sr	sr^2
r^2	r^2	r^3	1	r	sr^2	sr^3	s	sr
r^3	r^3	1	r	r^2	sr	sr^2	sr^3	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	1	r	r^2	r^3
sr	sr	sr^2	sr^3	s	r^3	1	r	r^2
sr^2	sr^2	sr^3	s	sr	r^2	r^3	1	r
sr^3	sr^3	s	sr	sr^2	r	r^2	r^3	1

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dari Tabel 3.13 dapat digambarkan komplemen graf subgrup berikut.



Gambar 3.4 Graf $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}$

Dari Gambar 3.4 dapat diperoleh matriks *adjacency* titik dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}$ sebagai berikut

$$A\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}\right) = \begin{bmatrix} 0&1&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0&1&0 \end{bmatrix}$$

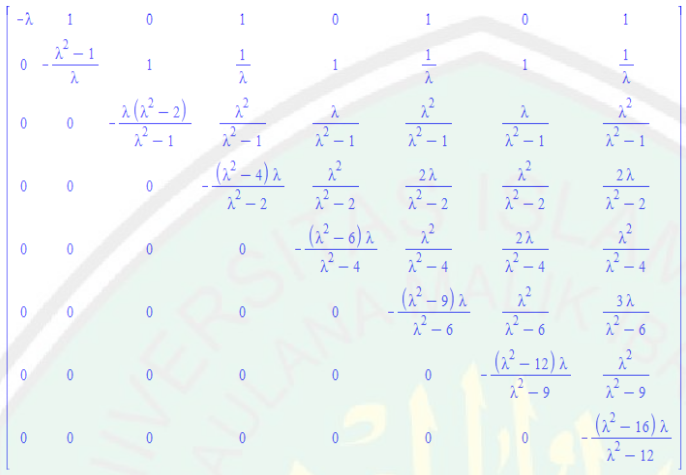
$$det\left(A\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}\right) - \lambda I\right) =$$

$$det\left(\begin{bmatrix} 0&1&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0&1&0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&\lambda&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&\lambda&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&\lambda&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&\lambda&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\lambda&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&\lambda&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&\lambda \end{bmatrix}\right) =$$

$$det\begin{pmatrix} 0-\lambda&1&0&1&0&1&0&1\\ 1&0-\lambda&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0-\lambda&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0-\lambda&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0-\lambda&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0-\lambda&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0-\lambda&1\\ 1&0&1&0&1&0&1&0-\lambda \end{pmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat pada *software* Maple 18, diperoleh hasil sebagai berikut



Sehingga polinomial karakteristik $\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}\right)$ diperoleh dari perkalian diagonal matriks segitiga atas sebagai berikut

$$p(\lambda) = -\lambda\left(-\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)\left(-\frac{\lambda(\lambda^2-2)}{\lambda^2-1}\right)\left(-\frac{(\lambda^2-4)\lambda}{\lambda^2-2}\right)$$

$$\left(-\frac{(\lambda^2-6)\lambda}{\lambda^2-4}\right)\left(-\frac{(\lambda^2-9)\lambda}{\lambda^2-6}\right)\left(-\frac{(\lambda^2-12)\lambda}{\lambda^2-9}\right)\left(-\frac{(\lambda^2-16)\lambda}{\lambda^2-12}\right)$$

$$= (\lambda-4)\lambda^6(\lambda+4)$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 0$, dan $\lambda_3 = -4$. Kemudian akan dicari multiplisitas dari nilai Eigen tersebut.

Untuk $\lambda_1 = 4$ disubstitusikan ke dalam $\left(\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}\right) - \lambda\boldsymbol{I}\right)$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Selanjutnya hasil matriks tersebut akan direduksi dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat dalam *software* Maple 18, sehingga diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{15}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{56}{15} & \frac{16}{15} & \frac{4}{15} & \frac{16}{15} & \frac{4}{15} & \frac{16}{15} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{24}{7} & \frac{8}{7} & \frac{4}{7} & \frac{8}{7} & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{10}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{14}{5} & \frac{8}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{16}{7} & \frac{16}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat diperoleh $m(\lambda_1) = 1$.

Untuk $\lambda_2 = 0$ disubstitusikan ke dalam $\left(\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}\right) - \lambda \boldsymbol{I}\right)$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut akan direduksi dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat dalam *software* Maple 18, maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat diperoleh $m(\lambda_2) = 6$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Untuk $\lambda_3 = -4$ disubstitusikan ke dalam $\left(\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}\right) - \lambda \boldsymbol{I}\right)$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut akan direduksi dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat dalam *software* Maple 18, maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{15}{4} & 1 & -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{56}{15} & \frac{16}{15} & -\frac{4}{15} & \frac{16}{15} & -\frac{4}{15} & \frac{16}{15} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{24}{7} & \frac{8}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{8}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{10}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{14}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{16}{7} & \frac{16}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dari matriks yang tereduksi tersebut dapat diperoleh $m(\lambda_3) = 1$.

Dengan demikian spektrum *adjacency* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}$ adalah sebagai berikut

$$spec_{\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}\right)} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 1 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}\right)$ adalah 4, 0, dan -4. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 1, 6, dan 1.

Selanjutnya, dari Gambar 4.4 dapat diperoleh matriks derajat dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}$ sebagai berikut

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\boldsymbol{D}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}\right) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh Matriks Laplace dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}$

$$\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}\right) = \boldsymbol{D}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}\right) - \boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$det\left(\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}\right) - \lambda\boldsymbol{I}\right) =$$

$$det\left(\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) =$$

$$det\begin{pmatrix} 4-\lambda & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4-\lambda & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4-\lambda & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4-\lambda & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4-\lambda & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4-\lambda & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat pada *software* Maple 18, diperoleh hasil sebagai berikut

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\left[\left[4-\lambda,-1,0,-1,0,-1,0,-1\right],\right.$$
$$\left[0,-\frac{\lambda^2-8\lambda+15}{-4+\lambda},-1,\frac{1}{-4+\lambda},-1,\frac{1}{-4+\lambda},-1,\frac{1}{-4+\lambda}\right],$$
$$\left[0,0,-\frac{\lambda^3-12\lambda^2+46\lambda-56}{\lambda^2-8\lambda+15},-\frac{\lambda^2-8\lambda+16}{\lambda^2-8\lambda+15},\frac{-4+\lambda}{\lambda^2-8\lambda+15},-\frac{\lambda^2-8\lambda+16}{\lambda^2-8\lambda+15},\frac{-4+\lambda}{\lambda^2-8\lambda+15},-\frac{\lambda^2-8\lambda+16}{\lambda^2-8\lambda+15}\right],$$
$$\left[0,0,0,-\frac{\lambda^3-12\lambda^2+44\lambda-48}{\lambda^2-8\lambda+14},-\frac{\lambda^2-8\lambda+16}{\lambda^2-8\lambda+14},\frac{2(-4+\lambda)}{\lambda^2-8\lambda+14},-\frac{\lambda^2-8\lambda+16}{\lambda^2-8\lambda+14},\frac{2(-4+\lambda)}{\lambda^2-8\lambda+14}\right],$$
$$\left[0,0,0,0,-\frac{\lambda^3-12\lambda^2+42\lambda-40}{\lambda^2-8\lambda+12},-\frac{\lambda^2-8\lambda+16}{\lambda^2-8\lambda+12},\frac{2(-4+\lambda)}{\lambda^2-8\lambda+12},-\frac{\lambda^2-8\lambda+16}{\lambda^2-8\lambda+12}\right],$$
$$\left[0,0,0,0,0,-\frac{\lambda^3-12\lambda^2+39\lambda-28}{\lambda^2-8\lambda+10},-\frac{\lambda^2-8\lambda+16}{\lambda^2-8\lambda+10},\frac{3(-4+\lambda)}{\lambda^2-8\lambda+10}\right],$$
$$\left[0,0,0,0,0,0,-\frac{\lambda^3-12\lambda^2+36\lambda-16}{\lambda^2-8\lambda+7},-\frac{\lambda^2-8\lambda+16}{\lambda^2-8\lambda+7}\right],$$
$$\left.\left[0,0,0,0,0,0,0,-\frac{(\lambda^2-12\lambda+32)\lambda}{\lambda^2-8\lambda+4}\right]\right]$$

Sehingga polinomial karakteristik $\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}\right)$ diperoleh dari perkalian diagonal matriks segitiga atas sebagai berikut

$$p(\lambda)=(4-\lambda)\left(-\frac{\lambda^2-8\lambda+15}{-4+\lambda}\right)\left(-\frac{\lambda^3-12\lambda^2+46\lambda-56}{\lambda^2-8\lambda+15}\right)$$
$$\left(-\frac{\lambda^3-12\lambda^2+44\lambda-48}{\lambda^2-8\lambda+14}\right)\left(-\frac{\lambda^3-12\lambda^2+42\lambda-40}{\lambda^2-8\lambda+12}\right)\left(-\frac{\lambda^3-12\lambda^2+39\lambda-28}{\lambda^2-8\lambda+10}\right)$$
$$\left(-\frac{\lambda^3-12\lambda^2+36\lambda-16}{\lambda^2-8\lambda+7}\right)\left(-\frac{(\lambda^2-12\lambda+32)\lambda}{\lambda^2-8\lambda+4}\right)$$
$$=(\lambda-8)(\lambda-4)^6\lambda$$

Dengan menetapkan $p(\lambda)=0$ maka diperoleh $\lambda_1=8,\lambda_2=4,$ dan $\lambda_3=0$. Kemudian akan dicari multiplisitas dari nilai Eigen tersebut.

Untuk $\lambda_1=8$ disubstitusikan ke dalam $\left(\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}\right)-\lambda\boldsymbol{I}\right)$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix}-4&-1&0&-1&0&-1&0&-1\\-1&-4&-1&0&-1&0&-1&0\\0&-1&-4&-1&0&-1&0&-1\\-1&0&-1&-4&-1&0&-1&0\\0&-1&0&-1&-4&-1&0&-1\\-1&0&-1&0&-1&-4&-1&0\\0&-1&0&-1&0&-1&-4&-1\\-1&0&-1&0&-1&0&-1&-4\end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Selanjutnya hasil matriks tersebut akan direduksi dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat dalam *software* Maple 18, sehingga diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} -4 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{15}{4} & -1 & \frac{1}{4} & -1 & \frac{1}{4} & -1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{56}{15} & -\frac{16}{15} & \frac{4}{15} & -\frac{16}{15} & \frac{4}{15} & -\frac{16}{15} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{24}{7} & -\frac{8}{7} & \frac{4}{7} & -\frac{8}{7} & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{10}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{14}{5} & -\frac{8}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{16}{7} & -\frac{16}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat diperoleh $m(\lambda_1) = 1$.

Untuk $\lambda_2 = 4$ disubstitusikan ke dalam $\left(\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}\right) - \lambda \boldsymbol{I}\right)$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut akan direduksi dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat dalam *software* Maple 18, maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat diperoleh $m(\lambda_2) = 6$.

Untuk $\lambda_3 = 0$ disubstitusikan ke dalam $\left(\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}\right) - \lambda \boldsymbol{I}\right)$, sehingga diperoleh

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut akan direduksi dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat dalam *software* Maple 18, maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{15}{4} & -1 & -\frac{1}{4} & -1 & -\frac{1}{4} & -1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{56}{15} & -\frac{16}{15} & -\frac{4}{15} & -\frac{16}{15} & -\frac{4}{15} & -\frac{16}{15} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{24}{7} & -\frac{8}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{8}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{10}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{14}{5} & -\frac{8}{5} & -\frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{16}{7} & -\frac{16}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat diperoleh $m(\lambda_3) = 1$.

Dengan demikian terbentuklah spektrum Laplace dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}$ sebagai berikut

$$spec_{\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}\right)} = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}\right)$ adalah 8, 4, dan 0. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 1, 6, dan 1.

Kemudian matriks *signless* Laplace dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}$ dapat ditentukan dengan menggunakan cara berikut

$$\boldsymbol{L}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}\right) = \boldsymbol{D}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}\right) + \boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}\right)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$det\left(\boldsymbol{L}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}\right) - \lambda \boldsymbol{I}\right) =$$

$$det\left(\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) =$$

$$det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4-\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4-\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4-\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4-\lambda & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat pada *software* Maple 18, diperoleh hasil sebagai berikut

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\left[\left[4-\lambda,1,0,1,0,1,0,1\right],\left[0,-\frac{\lambda^2-8\lambda+15}{-4+\lambda},1,\frac{1}{-4+\lambda},1,\frac{1}{-4+\lambda},1,\frac{1}{-4+\lambda}\right],\left[0,0,-\frac{\lambda^3-12\lambda^2+46\lambda-56}{\lambda^2-8\lambda+15},\frac{\lambda^2-8\lambda+16}{\lambda^2-8\lambda+15},\frac{-4+\lambda}{\lambda^2-8\lambda+15},\frac{\lambda^2-8\lambda+16}{\lambda^2-8\lambda+15},\frac{-4+\lambda}{\lambda^2-8\lambda+15},\frac{\lambda^2-8\lambda+16}{\lambda^2-8\lambda+15}\right],\left[0,0,0,-\frac{\lambda^3-12\lambda^2+44\lambda-48}{\lambda^2-8\lambda+14},\frac{\lambda^2-8\lambda+16}{\lambda^2-8\lambda+14},\frac{2(-4+\lambda)}{\lambda^2-8\lambda+14},\frac{\lambda^2-8\lambda+16}{\lambda^2-8\lambda+14},\frac{2(-4+\lambda)}{\lambda^2-8\lambda+14}\right],\left[0,0,0,0,-\frac{\lambda^3-12\lambda^2+42\lambda-40}{\lambda^2-8\lambda+12},\frac{\lambda^2-8\lambda+16}{\lambda^2-8\lambda+12},\frac{2(-4+\lambda)}{\lambda^2-8\lambda+12},\frac{\lambda^2-8\lambda+16}{\lambda^2-8\lambda+12}\right],\left[0,0,0,0,0,-\frac{\lambda^3-12\lambda^2+39\lambda-28}{\lambda^2-8\lambda+10},\frac{\lambda^2-8\lambda+16}{\lambda^2-8\lambda+10},\frac{3(-4+\lambda)}{\lambda^2-8\lambda+10}\right],\left[0,0,0,0,0,0,-\frac{\lambda^3-12\lambda^2+36\lambda-16}{\lambda^2-8\lambda+7},\frac{\lambda^2-8\lambda+16}{\lambda^2-8\lambda+7}\right],\left[0,0,0,0,0,0,0,-\frac{(\lambda^2-12\lambda+32)\lambda}{\lambda^2-8\lambda+4}\right]\right]$$

sehingga polinomial karakteristik $\boldsymbol{L}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}\right)$ diperoleh dari perkalian diagonal matriks segitiga atas sebagai berikut

$$p(\lambda)=(4-\lambda)\left(-\frac{\lambda^2-8\lambda+15}{-4+\lambda}\right)\left(-\frac{\lambda^3-12\lambda^2+46\lambda-56}{\lambda^2-8\lambda+15}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^3-12\lambda^2+44\lambda-48}{\lambda^2-8\lambda+14}\right)\left(-\frac{\lambda^3-12\lambda^2+42\lambda-40}{\lambda^2-8\lambda+12}\right)\left(-\frac{\lambda^3-12\lambda^2+39\lambda-28}{\lambda^2-8\lambda+10}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^3-12\lambda^2+36\lambda-16}{\lambda^2-8\lambda+7}\right)\left(-\frac{(\lambda^2-12\lambda+32)\lambda}{\lambda^2-8\lambda+4}\right)$$

$$=(\lambda-8)(\lambda-4)^6\lambda$$

Dengan menetapkan $p(\lambda)=0$ maka diperoleh $\lambda_1=8,\lambda_2=4,$ dan $\lambda_3=0$. Kemudian akan dicari multiplisitas dari nilai Eigen tersebut.

Untuk $\lambda_1=8$ disubstitusikan ke dalam $\left(\boldsymbol{L}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}\right)-\lambda\boldsymbol{I}\right)$, sehingga diperoleh

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut akan direduksi dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat dalam *software* Maple 18, sehingga diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} -4 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{15}{4} & -1 & \frac{1}{4} & -1 & \frac{1}{4} & -1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{56}{15} & -\frac{16}{15} & \frac{4}{15} & -\frac{16}{15} & \frac{4}{15} & -\frac{16}{15} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{24}{7} & -\frac{8}{7} & \frac{4}{7} & -\frac{8}{7} & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{10}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{14}{5} & -\frac{8}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{16}{7} & -\frac{16}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat diperoleh $m(\lambda_1) = 1$.

Untuk $\lambda_2 = 4$ disubstitusikan ke dalam $\left(\boldsymbol{L}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}\right) - \lambda \boldsymbol{I}\right)$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut akan direduksi dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat dalam *software* Maple 18, maka diperoleh

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat diperoleh $m(\lambda_2) = 6$.

Untuk $\lambda_3 = 0$ disubstitusikan ke dalam $\left(\boldsymbol{L}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,S\rangle}(D_8)}\right) - \lambda \boldsymbol{I}\right)$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut akan direduksi dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat dalam *software* Maple 18, maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{15}{4} & 1 & -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{56}{15} & \frac{16}{15} & -\frac{4}{15} & \frac{16}{15} & -\frac{4}{15} & \frac{16}{15} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{24}{7} & \frac{8}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{8}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{10}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{14}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{16}{7} & \frac{16}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat diperoleh $m(\lambda_3) = 1$.

Dengan demikian spektrum *signless* Laplace dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,S\rangle}(D_8)}$ adalah sebagai berikut

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$spec_{\boldsymbol{L}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}\right)} = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{L}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}\right)$ adalah 8, 4, dan 0. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 1, 6, dan 1.

Selanjutnya, dari Gambar 4.4 dapat diperoleh matriks *detour* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 \\ 7 & 0 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 6 \\ 6 & 7 & 0 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 7 & 0 & 7 & 6 & 7 & 6 \\ 6 & 7 & 6 & 7 & 0 & 7 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 0 & 7 & 6 \\ 6 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 0 & 7 \\ 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$det\left(\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}\right) - \lambda \boldsymbol{I}\right) =$$

$$det\left(\begin{bmatrix} 0 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 \\ 7 & 0 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 6 \\ 6 & 7 & 0 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 7 & 0 & 7 & 6 & 7 & 6 \\ 6 & 7 & 6 & 7 & 0 & 7 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 0 & 7 & 6 \\ 6 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 0 & 7 \\ 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) =$$

$$det\begin{pmatrix} 0-\lambda & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 \\ 7 & 0-\lambda & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 6 \\ 6 & 7 & 0-\lambda & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 7 & 0-\lambda & 7 & 6 & 7 & 6 \\ 6 & 7 & 6 & 7 & 0-\lambda & 7 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 0-\lambda & 7 & 6 \\ 6 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 0-\lambda & 7 \\ 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 0-\lambda \end{pmatrix}$$

matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat pada *software* Maple 18, diperoleh hasil sebagai berikut

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\left[\left[-\lambda, 7, 6, 7, 6, 7, 6, 7\right],\right.$$
$$\left[0, -\frac{\lambda^2-49}{\lambda}, \frac{7(\lambda+6)}{\lambda}, \frac{6\lambda+49}{\lambda}, \frac{7(\lambda+6)}{\lambda}, \frac{6\lambda+49}{\lambda}, \frac{7(\lambda+6)}{\lambda}, \frac{6\lambda+49}{\lambda}\right],$$
$$\left[0, 0, -\frac{\lambda^3-134\lambda-588}{\lambda^2-49}, \frac{7(\lambda+6)^2}{\lambda^2-49}, \frac{(\lambda+6)(6\lambda+49)}{\lambda^2-49}, \frac{7(\lambda+6)^2}{\lambda^2-49},\right.$$
$$\left.\frac{(\lambda+6)(6\lambda+49)}{\lambda^2-49}, \frac{7(\lambda+6)^2}{\lambda^2-49}\right],$$
$$\left[0, 0, 0, -\frac{\lambda^3-6\lambda^2-232\lambda-960}{\lambda^2-6\lambda-98}, \frac{7(\lambda+6)^2}{\lambda^2-6\lambda-98}, \frac{2(3\lambda+31)(\lambda+6)}{\lambda^2-6\lambda-98},\right.$$
$$\left.\frac{7(\lambda+6)^2}{\lambda^2-6\lambda-98}, \frac{2(3\lambda+31)(\lambda+6)}{\lambda^2-6\lambda-98}\right],$$
$$\left[0, 0, 0, 0, -\frac{\lambda^3-12\lambda^2-330\lambda-1332}{\lambda^2-12\lambda-160}, \frac{7(\lambda+6)^2}{\lambda^2-12\lambda-160}, \frac{2(3\lambda+31)(\lambda+6)}{\lambda^2-12\lambda-160},\right.$$
$$\left.\frac{7(\lambda+6)^2}{\lambda^2-12\lambda-160}\right],$$
$$\left[0, 0, 0, 0, 0, -\frac{\lambda^3-18\lambda^2-441\lambda-1782}{\lambda^2-18\lambda-222}, \frac{7(\lambda+6)^2}{\lambda^2-18\lambda-222}, \frac{3(2\lambda+25)(\lambda+6)}{\lambda^2-18\lambda-222}\right],$$
$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, -\frac{\lambda^3-24\lambda^2-552\lambda-2232}{\lambda^2-24\lambda-297}, \frac{7(\lambda+6)^2}{\lambda^2-24\lambda-297}\right],$$
$$\left.\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -\frac{\lambda^3-30\lambda^2-676\lambda-2760}{\lambda^2-30\lambda-372}\right]\right]$$

Sehingga polinomial karakteristik $\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}\right)$ diperoleh dari perkalian diagonal matriks segitiga atas sebagai berikut

$$p(\lambda) = -\lambda\left(-\frac{\lambda^2-49}{\lambda}\right)\left(-\frac{\lambda^3-134\lambda-588}{\lambda^2-49}\right)\left(-\frac{\lambda^3-6\lambda^2-232\lambda-960}{\lambda^2-6\lambda-98}\right)$$
$$\left(-\frac{\lambda^3-12\lambda^2-330\lambda-1332}{\lambda^2-12\lambda-160}\right)\left(-\frac{\lambda^3-18\lambda^2-441\lambda-1782}{\lambda^2-18\lambda-222}\right)$$
$$\left(-\frac{\lambda^3-24\lambda^2-552\lambda-2232}{\lambda^2-24\lambda-297}\right)\left(-\frac{\lambda^3-30\lambda^2-676\lambda-2760}{\lambda^2-30\lambda-372}\right)$$
$$= (\lambda-46)(\lambda+6)^6(\lambda+10)$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 46$, $\lambda_2 = -6$, dan $\lambda_3 = -10$. Kemudian akan dicari multiplisitas dari nilai Eigen tersebut.

Untuk $\lambda_1 = 46$ disubstitusikan ke dalam $\left(\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}\right) - \lambda\boldsymbol{I}\right)$, sehingga diperoleh

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\begin{bmatrix} -46 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 \\ 7 & -46 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 6 \\ 6 & 7 & -46 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 7 & -46 & 7 & 6 & 7 & 6 \\ 6 & 7 & 6 & 7 & -46 & 7 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & -46 & 7 & 6 \\ 6 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & -46 & 7 \\ 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & -46 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut akan direduksi dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat dalam *software* Maple 18, sehingga diperoleh hasil sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} -46 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 \\ 0 & -\frac{2067}{46} & \frac{182}{23} & \frac{325}{46} & \frac{182}{23} & \frac{325}{46} & \frac{182}{23} & \frac{325}{46} \\ 0 & 0 & -\frac{6968}{159} & \frac{1456}{159} & \frac{1300}{159} & \frac{1456}{159} & \frac{1300}{159} & \frac{1456}{159} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2808}{67} & \frac{728}{67} & \frac{676}{67} & \frac{728}{67} & \frac{676}{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1066}{27} & \frac{364}{27} & \frac{338}{27} & \frac{364}{27} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1430}{41} & \frac{728}{41} & \frac{702}{41} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1456}{55} & \frac{1456}{55} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat diperoleh $m(\lambda_1) = 1$.

Untuk $\lambda_2 = -6$ disubstitusikan ke dalam $\left(\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}\right) - \lambda \boldsymbol{I}\right)$, sehingga diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 6 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 6 \\ 6 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 6 \\ 6 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 6 \\ 6 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut akan direduksi dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat dalam *software* Maple 18, maka diperoleh

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\begin{bmatrix} 6 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 \\ 0 & -\frac{13}{6} & 0 & -\frac{13}{6} & 0 & -\frac{13}{6} & 0 & -\frac{13}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat diperoleh $m(\lambda_2) = 6$.

Untuk $\lambda_3 = -10$ disubstitusikan ke dalam $\left(\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}\right) - \lambda \boldsymbol{I}\right)$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 10 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 \\ 7 & 10 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 6 \\ 6 & 7 & 10 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 7 & 10 & 7 & 6 & 7 & 6 \\ 6 & 7 & 6 & 7 & 10 & 7 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 10 & 7 & 6 \\ 6 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 10 & 7 \\ 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 10 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut akan direduksi dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat dalam *software* Maple 18, maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} 10 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 \\ 0 & \frac{51}{10} & \frac{14}{5} & \frac{11}{10} & \frac{14}{5} & \frac{11}{10} & \frac{14}{5} & \frac{11}{10} \\ 0 & 0 & \frac{248}{51} & \frac{112}{51} & \frac{44}{51} & \frac{112}{51} & \frac{44}{51} & \frac{112}{51} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{120}{31} & \frac{56}{31} & -\frac{4}{31} & \frac{56}{31} & -\frac{4}{31} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{58}{15} & \frac{28}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{28}{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{86}{29} & \frac{56}{29} & -\frac{30}{29} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{112}{43} & \frac{112}{43} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat diperoleh $m(\lambda_3) = 1$.

Dengan demikian spektrum *detour* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}$ adalah sebagai berikut

$$spec_{\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}\right)} = \begin{bmatrix} 46 & -6 & -10 \\ 1 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}\right)$ adalah 46, -6, dan -10. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 1, 6, dan 1.

3.2.2 Grup Dihedral D_{12}

Komplemen subgrup dari grup dihedral D_{12} yang dibangun oleh $\langle r^2, s\rangle$ adalah $\{r, r^3, r^5, sr, sr^3, sr^5\}$. Titik komplemen graf subgrup $\langle r^2, s\rangle$ dari grup dihedral (D_{12}) adalah

$V\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}\right) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$.

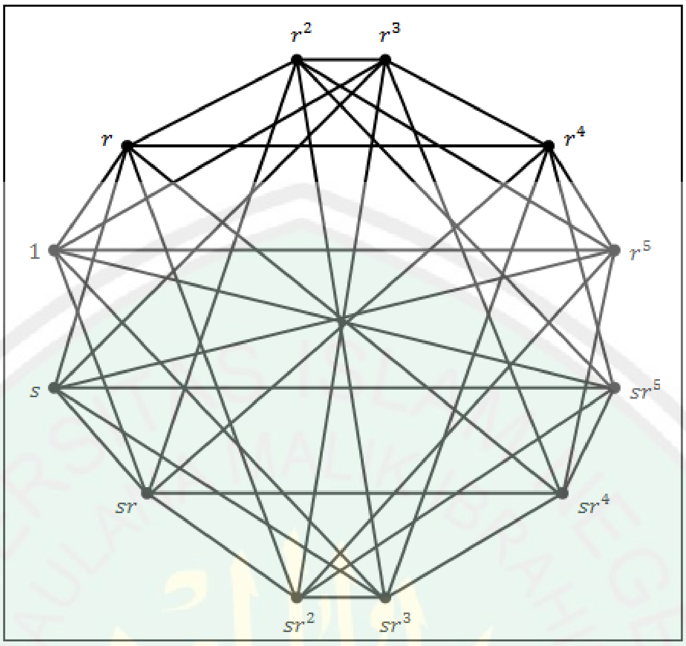
$\forall\, x, y \in D_{12} \ni x \circ y \in \{r, r^3, r^5, sr, sr^3, sr^5\}$, maka x terhubung y, dapat dilihat pada Tabel 3.14.

Tabel 3.14 Tabel Cayley Komplemen Subgrup dari Grup Dihedral D_{12}

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3
r^3	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2
r^4	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr
r^5	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2
sr^4	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r
sr^5	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dari Tabel 3.14 dapat digambarkan komplemen graf subgrup berikut.



Gambar 3.5 Graf $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}$

dari Gambar 3.5 dapat diperoleh matriks *adjacency* titik dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{A}(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$det\left(\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}\right)-\lambda\boldsymbol{I}\right)=$$

$$det\left(\begin{bmatrix}0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda\end{bmatrix}\right)=$$

$$det\begin{pmatrix}0-\lambda&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\1&0-\lambda&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\0&1&0-\lambda&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\1&0&1&0-\lambda&1&0&1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0-\lambda&1&0&1&0&1&0&1\\1&0&1&0&1&0-\lambda&1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&1&0-\lambda&1&0&1&0&1\\1&0&1&0&1&0&1&0-\lambda&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&1&0&1&0-\lambda&1&0&1\\1&0&1&0&1&0&1&0&1&0-\lambda&1&0\\0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0-\lambda&1\\1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0-\lambda\end{pmatrix}$$

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan menggunakan cara yang sama pada grup dihedral (D_8), diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut

$$p(\lambda)=-\lambda\left(-\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)\left(-\frac{\lambda(\lambda^2-2)}{\lambda^2-1}\right)\left(-\frac{(\lambda^2-4)\lambda}{\lambda^2-2}\right)$$

$$\left(-\frac{(\lambda^2-6)\lambda}{\lambda^2-4}\right)\left(-\frac{(\lambda^2-9)\lambda}{\lambda^2-6}\right)\left(-\frac{(\lambda^2-12)\lambda}{\lambda^2-9}\right)\left(-\frac{(\lambda^2-16)\lambda}{\lambda^2-12}\right)$$

$$\left(-\frac{(\lambda^2-20)\lambda}{\lambda^2-16}\right)\left(-\frac{(\lambda^2-25)\lambda}{\lambda^2-20}\right)\left(-\frac{(\lambda^2-30)\lambda}{\lambda^2-25}\right)\left(-\frac{(\lambda^2-36)\lambda}{\lambda^2-30}\right)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= (\lambda - 6)\lambda^{10}(\lambda + 6)$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 0,$ dan $\lambda_2 = -6.$ Dengan cara yang sama pada grup dihedral (D_8) dapat ditentukan multiplisitas masing-masing nilai Eigen dari matriks tersebut, yaitu $m(\lambda_1) = 1$, $m(\lambda_2) = 10,$ dan $m(\lambda_3) = 1.$

Dengan demikian spektrum *adjacency* titik dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}$ adalah sebagai berikut

$$spec_{\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}\right)} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 1 & 10 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}\right)$ adalah 6, 0, dan -6. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 1, 10, dan 1.

Selanjutnya, dari Gambar 3.5 dapat diperoleh matriks derajat dari $\Gamma_{H_2}(D_{12})$ sebagai berikut.

$$\boldsymbol{D}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}\right) = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

dengan demikian diperoleh matriks Laplace dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}$

$$\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}\right) = \boldsymbol{D}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}\right) - \boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}\right)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \begin{bmatrix} 6&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&6&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&6&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&6&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&6&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&6&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&6&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&6&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&6&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&6&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&6&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1\\ -1&6&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0\\ 0&-1&6&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1\\ -1&0&-1&6&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0\\ 0&-1&0&-1&6&-1&0&-1&0&-1&0&-1\\ -1&0&-1&0&-1&6&-1&0&-1&0&-1&0\\ 0&-1&0&-1&0&-1&6&-1&0&-1&0&-1\\ -1&0&-1&0&-1&0&-1&6&-1&0&-1&0\\ 0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&6&-1&0&-1\\ -1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&6&-1&0\\ 0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&6&-1\\ -1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&6 \end{bmatrix}$$

$$det\left(\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}\right) - \lambda\boldsymbol{I}\right) =$$

$$det\left(\begin{bmatrix} 6&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1\\ -1&6&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0\\ 0&-1&6&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1\\ -1&0&-1&6&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0\\ 0&-1&0&-1&6&-1&0&-1&0&-1&0&-1\\ -1&0&-1&0&-1&6&-1&0&-1&0&-1&0\\ 0&-1&0&-1&0&-1&6&-1&0&-1&0&-1\\ -1&0&-1&0&-1&0&-1&6&-1&0&-1&0\\ 0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&6&-1&0&-1\\ -1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&6&-1&0\\ 0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&6&-1\\ -1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda \end{bmatrix}\right) =$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$det\begin{pmatrix} 6-\lambda & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 6-\lambda & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 6-\lambda & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 6-\lambda & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 6-\lambda & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 6-\lambda & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 6-\lambda & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 6-\lambda & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 6-\lambda & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 6-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 6-\lambda & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 6-\lambda \end{pmatrix}$$

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan menggunakan cara yang sama pada grup dihedral (D_8), diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut.

$$p(\lambda) = (6-\lambda)\left(-\frac{\lambda^2-12\lambda+35}{-6+\lambda}\right)\left(-\frac{\lambda^3-18\lambda^2+106\lambda-204}{\lambda^2-12\lambda+35}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^3-18\lambda^2+104\lambda-192}{\lambda^2-12\lambda+34}\right)\left(-\frac{\lambda^3-18\lambda^2+102\lambda-180}{\lambda^2-12\lambda+32}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^3-18\lambda^2+99\lambda-162}{\lambda^2-12\lambda+30}\right)\left(-\frac{\lambda^3-18\lambda^2+96\lambda-144}{\lambda^2-12\lambda+27}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^3-18\lambda^2+92\lambda-120}{\lambda^2-12\lambda+24}\right)\left(-\frac{\lambda^3-18\lambda^2+88\lambda-96}{\lambda^2-12\lambda+20}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^3-18\lambda^2+83\lambda-66}{\lambda^2-12\lambda+16}\right)\left(-\frac{\lambda^3-18\lambda^2+78\lambda-36}{\lambda^2-12\lambda+11}\right)\left(-\frac{(\lambda^2-18\lambda+72)\lambda}{\lambda^2-12\lambda+6}\right)$$

$$= (\lambda-12)(\lambda-6)^{10}\lambda$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 12$, $\lambda_2 = 6$, dan $\lambda_3 = 0$. Dengan cara yang sama pada grup dihedral (D_8) dapat ditentukan multiplisitas masing-masing nilai Eigen dari matriks tersebut, yaitu $m(\lambda_1) = 1$, $m(\lambda_2) = 10$, dan $m(\lambda_3) = 1$.

Dengan demikian spektrum Laplace dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}$ adalah sebagai berikut

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$spec_{\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}\right)} = \begin{bmatrix} 12 & 6 & 0 \\ 1 & 10 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}\right)$ adalah 12, 6, dan 0. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 1, 10, dan 1.

Kemudian matriks *signless* Laplace dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}$ dapat ditentukan dengan menggunakan cara berikut

$$\boldsymbol{L}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}\right) = \boldsymbol{D}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}\right) + \boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 6&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&6&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&6&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&6&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&6&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&6&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&6&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&6&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&6&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&6&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&6&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1 \\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0 \\ 0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1 \\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0 \\ 0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1 \\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0 \\ 0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1 \\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0 \\ 0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1 \\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0 \\ 0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1 \\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1 \\ 1&6&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0 \\ 0&1&6&1&0&1&0&1&0&1&0&1 \\ 1&0&1&6&1&0&1&0&1&0&1&0 \\ 0&1&0&1&6&1&0&1&0&1&0&1 \\ 1&0&1&0&1&6&1&0&1&0&1&0 \\ 0&1&0&1&0&1&6&1&0&1&0&1 \\ 1&0&1&0&1&0&1&6&1&0&1&0 \\ 0&1&0&1&0&1&0&1&6&1&0&1 \\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1&6&1&0 \\ 0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&6&1 \\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&6 \end{bmatrix}$$

$$det\left(\boldsymbol{L}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}\right) - \lambda \boldsymbol{I}\right) =$$

$$det\left(\begin{bmatrix} 6&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1 \\ 1&6&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0 \\ 0&1&6&1&0&1&0&1&0&1&0&1 \\ 1&0&1&6&1&0&1&0&1&0&1&0 \\ 0&1&0&1&6&1&0&1&0&1&0&1 \\ 1&0&1&0&1&6&1&0&1&0&1&0 \\ 0&1&0&1&0&1&6&1&0&1&0&1 \\ 1&0&1&0&1&0&1&6&1&0&1&0 \\ 0&1&0&1&0&1&0&1&6&1&0&1 \\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1&6&1&0 \\ 0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&6&1 \\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda \end{bmatrix}\right) =$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$det\begin{pmatrix}
6-\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\
1 & 6-\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 6-\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\
1 & 0 & 1 & 6-\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & 6-\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 6-\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 6-\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 6-\lambda & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 6-\lambda & 1 & 0 & 1\\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 6-\lambda & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 6-\lambda & 1\\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 6-\lambda
\end{pmatrix}$$

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh persamaan karakteristik. Dengan menggunakan cara yang sama pada grup dihedral (D_8), diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut.

$$p(\lambda) = (6-\lambda)\left(-\frac{\lambda^2-12\lambda+35}{-6+\lambda}\right)\left(-\frac{\lambda^3-18\lambda^2+106\lambda-204}{\lambda^2-12\lambda+35}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^3-18\lambda^2+104\lambda-192}{\lambda^2-12\lambda+34}\right)\left(-\frac{\lambda^3-18\lambda^2+102\lambda-180}{\lambda^2-12\lambda+32}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^3-18\lambda^2+99\lambda-162}{\lambda^2-12\lambda+30}\right)\left(-\frac{\lambda^3-18\lambda^2+96\lambda-144}{\lambda^2-12\lambda+27}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^3-18\lambda^2+92\lambda-120}{\lambda^2-12\lambda+24}\right)\left(-\frac{\lambda^3-18\lambda^2+88\lambda-96}{\lambda^2-12\lambda+20}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^3-18\lambda^2+83\lambda-66}{\lambda^2-12\lambda+16}\right)\left(-\frac{\lambda^3-18\lambda^2+78\lambda-36}{\lambda^2-12\lambda+11}\right)\left(-\frac{(\lambda^2-18\lambda+72)\lambda}{\lambda^2-12\lambda+6}\right)$$

$$= (\lambda-12)(\lambda-6)^{10}\lambda$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 12$, $\lambda_2 = 6$, dan $\lambda_3 = 0$. Dengan cara yang sama pada grup dihedral (D_8) dapat ditentukan multiplisitas masing-masing nilai Eigen dari matriks tersebut, yaitu $m(\lambda_1) = 1$, $m(\lambda_2) = 10$, dan $m(\lambda_3) = 1$.

Dengan demikian spektrum *signless* Laplace grup $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}$ adalah sebagai berikut

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$spec_{\boldsymbol{L}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}\right)} = \begin{bmatrix} 12 & 6 & 0 \\ 1 & 10 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{L}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}\right)$ adalah 12, 6, dan 0. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 1, 10, dan 1.

Selanjutnya, dari graf 3.5 dapat diperoleh Matriks *detour* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 \\ 11 & 0 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 \\ 10 & 11 & 0 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 \\ 11 & 10 & 11 & 0 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 \\ 10 & 11 & 10 & 11 & 0 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 \\ 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 0 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 \\ 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 0 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 \\ 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 0 & 11 & 10 & 11 & 10 \\ 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 0 & 11 & 10 & 11 \\ 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 0 & 11 & 10 \\ 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 0 & 11 \\ 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 0 \end{bmatrix}$$

$$det\left(\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}\right) - \lambda \boldsymbol{I}\right) =$$

$$det\left(\begin{bmatrix} 0 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 \\ 11 & 0 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 \\ 10 & 11 & 0 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 \\ 11 & 10 & 11 & 0 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 \\ 10 & 11 & 10 & 11 & 0 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 \\ 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 0 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 \\ 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 0 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 \\ 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 0 & 11 & 10 & 11 & 10 \\ 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 0 & 11 & 10 & 11 \\ 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 0 & 11 & 10 \\ 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 0 & 11 \\ 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) =$$

$$det\begin{pmatrix} 0-\lambda & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 \\ 11 & 0-\lambda & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 \\ 10 & 11 & 0-\lambda & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 \\ 11 & 10 & 11 & 0-\lambda & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 \\ 10 & 11 & 10 & 11 & 0-\lambda & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 \\ 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 0-\lambda & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 \\ 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 0-\lambda & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 \\ 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 0-\lambda & 11 & 10 & 11 & 10 \\ 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 0-\lambda & 11 & 10 & 11 \\ 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 0-\lambda & 11 & 10 \\ 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 0-\lambda & 11 \\ 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 0-\lambda \end{pmatrix}$$

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan menggunakan cara yang sama pada grup dihedral (D_8), diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$p(\lambda) = -\lambda\left(-\frac{\lambda^2-121}{\lambda}\right)\left(-\frac{\lambda^3-342\lambda-2420}{\lambda^2-121}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^3-10\lambda^2-584\lambda-3840}{\lambda^2-10\lambda-242}\right)\left(-\frac{\lambda^3-20\lambda^2-826\lambda-5260}{\lambda^2-20\lambda-384}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^3-30\lambda^2-1089\lambda-6890}{\lambda^2-30\lambda-526}\right)\left(-\frac{\lambda^3-40\lambda^2-1352\lambda-8520}{\lambda^2-40\lambda-689}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^3-50\lambda^2-1636\lambda-10360}{\lambda^2-50\lambda-852}\right)\left(-\frac{\lambda^3-60\lambda^2-1920\lambda-12200}{\lambda^2-60\lambda-1036}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^3-70\lambda^2-2225\lambda-14250}{\lambda^2-70\lambda-1220}\right)\left(-\frac{\lambda^3-80\lambda^2-2530\lambda-16300}{\lambda^2-80\lambda-1425}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^3-90\lambda^2-2856\lambda-18560}{\lambda^2-90\lambda-1630}\right)$$

$$= (\lambda-116)(\lambda+10)^{10}(\lambda+16)$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 116$, $\lambda_2 = -10$, dan $\lambda_3 = -16$. Dengan cara yang sama pada grup dihedral (D_8) dapat ditentukan multiplisitas masing-masing nilai Eigen dari matriks tersebut, yaitu $m(\lambda_1) = 1$, $m(\lambda_2) = 10$, dan $m(\lambda_3) = 1$.

Dengan demikian spektrum *detour* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}$ adalah sebagai berikut

$$spec_{\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}\right)} = \begin{bmatrix} 116 & -10 & -16 \\ 1 & 10 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}\right)$ adalah 116, -10, dan -16. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 1, 10, dan 1.

3.2.3 Grup Dihedral D_{16}

Komplemen subgrup dari grup dihedral D_{16} yang dibangun oleh $\langle r^2, s\rangle$ adalah $\{r, r^3, r^5, r^7, sr, sr^3, sr^5, sr^7\}$. Titik komplemen graf subgrup $\langle r^2, s\rangle$ dari grup dihedral (D_{16}) adalah

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

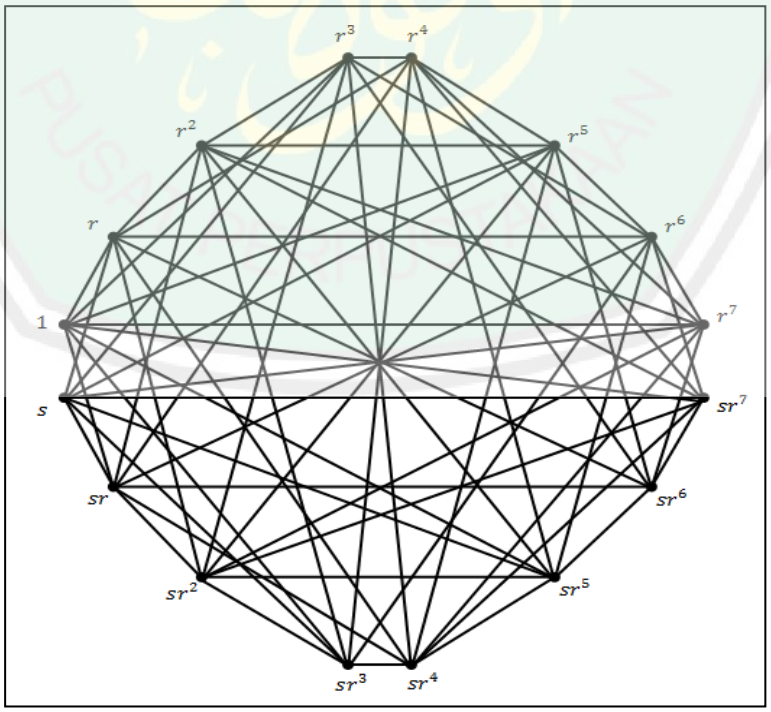
$V\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}\right) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}$.

$\forall\, x, y \in D_{16} \ni x \circ y \in \{r, r^3, r^5, r^7, sr, sr^3, sr^5, sr^7\}$, maka x terhubung y, dapat dilihat pada Tabel 3.15

Tabel 3.15 Tabel Cayley Komplemen Subgrup dari Grup Dihedral D_{16}

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r^3	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^4	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3
r^5	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2
r^6	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr
r^7	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^4	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3
sr^5	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2
sr^6	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r
sr^7	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1

Dari Tabel 3.15 dapat digambarkan komplemen graf subgrup berikut.



Gambar 3.6 Graf $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dari Gambar 3.6 dapat diperoleh matriks *adjacency* titik dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}$ sebagai berikut

$$A(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}) = \begin{bmatrix} 0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0 \end{bmatrix}$$

$$det\left(A\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}\right) - \lambda I\right) =$$

$$det\left(\begin{bmatrix} 0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda \end{bmatrix}\right) =$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$det\begin{pmatrix}
0-\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\
1 & 0-\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0-\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\
1 & 0 & 1 & 0-\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0-\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0-\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0-\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0-\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0-\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0-\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0-\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0-\lambda & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0-\lambda & 1 & 0 & 1\\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0-\lambda & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0-\lambda & 1\\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0-\lambda
\end{pmatrix}$$

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan menggunakan cara yang sama pada grup dihedral (D_8), diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut.

$$p(\lambda) = -\lambda\left(-\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)\left(-\frac{\lambda(\lambda^2-2)}{\lambda^2-1}\right)\left(-\frac{(\lambda^2-4)\lambda}{\lambda^2-2}\right)$$

$$\left(-\frac{(\lambda^2-6)\lambda}{\lambda^2-4}\right)\left(-\frac{(\lambda^2-9)\lambda}{\lambda^2-6}\right)\left(-\frac{(\lambda^2-12)\lambda}{\lambda^2-9}\right)\left(-\frac{(\lambda^2-16)\lambda}{\lambda^2-12}\right)$$

$$\left(-\frac{(\lambda^2-20)\lambda}{\lambda^2-16}\right)\left(-\frac{(\lambda^2-25)\lambda}{\lambda^2-20}\right)\left(-\frac{(\lambda^2-30)\lambda}{\lambda^2-25}\right)\left(-\frac{(\lambda^2-36)\lambda}{\lambda^2-30}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^3-8\lambda^2-42\lambda+288}{\lambda^2-36}\right)\left(-\frac{(\lambda^3-8\lambda^2-49\lambda+336)\lambda}{\lambda^3-8\lambda^2-42\lambda+288}\right)$$

$$\left(-\frac{(\lambda^3-8\lambda^2-56\lambda+392)\lambda}{\lambda^3-8\lambda^2-49\lambda+336}\right)\left(-\frac{(\lambda^3-8\lambda^2-64\lambda+448)\lambda}{\lambda^3-8\lambda^2-56\lambda+392}\right)$$

$$= (\lambda-8)\lambda^{10}(\lambda+8)$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 0$, dan $\lambda_3 = -8$. Dengan cara yang sama pada grup dihedral (D_8) dapat ditentukan multiplisitas masing-masing nilai Eigen dari matriks tersebut, yaitu $m(\lambda_1) = 1$, $m(\lambda_2) = 14$, dan $m(\lambda_3) = 1$.

Dengan demikian spektrum *adjacency* titik dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}$ adalah sebagai berikut

$$spec_{\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}\right)} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & -8 \\ 1 & 14 & 1 \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}\right)$ adalah 8, 0, dan -8. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 1, 14, dan 1.

Selanjutnya, dari Gambar 3.6 dapat diperoleh matriks derajat dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}$ sebagai berikut.

$$\boldsymbol{D}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}\right) = \begin{bmatrix} 8&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&8&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&8&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&8&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&8&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&8&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&8&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&8&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&8&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&8&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&8&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&8&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&8&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&8&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&8&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&8 \end{bmatrix}$$

dengan demikian diperoleh matriks Laplace dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}$

$$\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}\right) = \boldsymbol{D}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}\right) - \boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 8&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&8&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&8&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&8&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&8&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&8&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&8&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&8&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&8&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&8&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&8&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&8&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&8&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&8&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&8&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&8 \end{bmatrix} -$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}
8 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\
-1 & 8 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & -1 & 8 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\
-1 & 0 & -1 & 8 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & -1 & 8 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\
-1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 8 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 8 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\
-1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 8 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 8 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\
-1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 8 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 8 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\
-1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 8 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 8 & -1 & 0 & -1 \\
-1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 8 & -1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 8 & -1 \\
-1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 8
\end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$det\left(\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}\right)-\lambda\boldsymbol{I}\right)=$$

$$det\left(\begin{bmatrix}
8&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1\\
-1&8&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0\\
0&-1&8&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1\\
-1&0&-1&8&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0\\
0&-1&0&-1&8&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1\\
-1&0&-1&0&-1&8&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0\\
0&-1&0&-1&0&-1&8&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1\\
-1&0&-1&0&-1&0&-1&8&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0\\
0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&8&-1&0&-1&0&-1&0&-1\\
-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&8&-1&0&-1&0&-1&0\\
0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&8&-1&0&-1&0&-1\\
-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&8&-1&0&-1&0\\
0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&8&-1&0&-1\\
-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&8&-1&0\\
0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&8&-1\\
-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&8
\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}
\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda
\end{bmatrix}\right)=$$

$$det\begin{pmatrix}
8-\lambda&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1\\
-1&8-\lambda&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0\\
0&-1&8-\lambda&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1\\
-1&0&-1&8-\lambda&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0\\
0&-1&0&-1&8-\lambda&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1\\
-1&0&-1&0&-1&8-\lambda&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0\\
0&-1&0&-1&0&-1&8-\lambda&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1\\
-1&0&-1&0&-1&0&-1&8-\lambda&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0\\
0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&8-\lambda&-1&0&-1&0&-1&0&-1\\
-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&8-\lambda&-1&0&-1&0&-1&0\\
0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&8-\lambda&-1&0&-1&0&-1\\
-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&8-\lambda&-1&0&-1&0\\
0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&8-\lambda&-1&0&-1\\
-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&8-\lambda&-1&0\\
0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&8-\lambda&-1\\
-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&0&-1&8-\lambda
\end{pmatrix}$$

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan menggunakan cara yang sama pada grup dihedral (D_8), diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut.

$$p(\lambda)=(8-\lambda)\left(-\frac{\lambda^2-16\lambda+63}{-8+\lambda}\right)\left(-\frac{\lambda^3-24\lambda^2+190\lambda-496}{\lambda^2-16\lambda+63}\right)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\left(-\frac{\lambda^3-24\lambda^2+188\lambda-480}{\lambda^2-16\lambda+62}\right)\left(-\frac{\lambda^3-24\lambda^2+186\lambda-464}{\lambda^2-16\lambda+60}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^3-24\lambda^2+183\lambda-440}{\lambda^2-16\lambda+58}\right)\left(-\frac{\lambda^3-24\lambda^2+180\lambda-416}{\lambda^2-16\lambda+55}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^3-24+176\lambda-384}{\lambda^2-16\lambda+52}\right)\left(-\frac{\lambda^3-24+172\lambda-352}{\lambda^2-16\lambda+48}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^3-24+167\lambda-312}{\lambda^2-16\lambda+44}\right)\left(-\frac{\lambda^3-24+162\lambda-272}{\lambda^2-16\lambda+39}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^3-24+156\lambda-224}{\lambda^2-16\lambda+34}\right)\left(-\frac{\lambda^3-24+150\lambda-176}{\lambda^2-16\lambda+28}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^3-24+143\lambda-120}{\lambda^2-16\lambda+22}\right)\left(-\frac{\lambda^3-24+136\lambda-64}{\lambda^2-16\lambda+15}\right)\left(-\frac{\left(\lambda^2-24\lambda+128\right)\lambda}{\lambda^2-16\lambda+8}\right)$$

$$=(\lambda-16)(\lambda-8)^{14}\lambda$$

Dengan menetapkan $p(\lambda)=0$ maka diperoleh $\lambda_1=16$, $\lambda_2=8$, dan $\lambda_3=0$. Dengan cara yang sama pada grup dihedral (D_8) dapat ditentukan multiplisitas masing-masing nilai Eigen dari matriks tersebut, yaitu $m(\lambda_1)=1$, $m(\lambda_2)=14$, dan $m(\lambda_3)=1$.

Dengan demikian spektrum Laplace dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}$ adalah sebagai berikut

$$spec_{\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}\right)}=\begin{bmatrix}16 & 8 & 0\\ 1 & 14 & 1\end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}\right)$ adalah 16, 8, dan 0. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 1, 14, dan 1.

Matriks *signless* Laplace dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}$ dapat ditentukan dengan menggunakan cara berikut.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\boldsymbol{L}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}\right) = \boldsymbol{D}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}\right) + \boldsymbol{A}(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}) =$$

$$\begin{bmatrix}
8&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&8&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&8&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&8&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&8&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&8&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&8&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&8&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&8&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&8&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&8&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&8&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&8&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&8&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&8&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&8
\end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix}
0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\
1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\
0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\
1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\
0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\
1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\
0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\
1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\
0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\
1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\
0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\
1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\
0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\
1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\
0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\
1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0
\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}
8&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\
1&8&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\
0&1&8&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\
1&0&1&8&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\
0&1&0&1&8&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\
1&0&1&0&1&8&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\
0&1&0&1&0&1&8&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\
1&0&1&0&1&0&1&8&1&0&1&0&1&0&1&0\\
0&1&0&1&0&1&0&1&8&1&0&1&0&1&0&1\\
1&0&1&0&1&0&1&0&1&8&1&0&1&0&1&0\\
0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&8&1&0&1&0&1\\
1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&8&1&0&1&0\\
0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&8&1&0&1\\
1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&8&1&0\\
0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&8&1\\
1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&8
\end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$det\left(\boldsymbol{L}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}\right)-\lambda\boldsymbol{I}\right)=$$

$$det\left(\begin{bmatrix}
8&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\
1&8&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\
0&1&8&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\
1&0&1&8&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\
0&1&0&1&8&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\
1&0&1&0&1&8&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\
0&1&0&1&0&1&8&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\
1&0&1&0&1&0&1&8&1&0&1&0&1&0&1&0\\
0&1&0&1&0&1&0&1&8&1&0&1&0&1&0&1\\
1&0&1&0&1&0&1&0&1&8&1&0&1&0&1&0\\
0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&8&1&0&1&0&1\\
1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&8&1&0&1&0\\
0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&8&1&0&1\\
1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&8&1&0\\
0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&8&1\\
1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&8
\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}
\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda
\end{bmatrix}\right)=$$

$$det\begin{pmatrix}
8-\lambda&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\
1&8-\lambda&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\
0&1&8-\lambda&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\
1&0&1&8-\lambda&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\
0&1&0&1&8-\lambda&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\
1&0&1&0&1&8-\lambda&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\
0&1&0&1&0&1&8-\lambda&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\
1&0&1&0&1&0&1&8-\lambda&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\
0&1&0&1&0&1&0&1&8-\lambda&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\
1&0&1&0&1&0&1&0&1&8-\lambda&1&0&1&0&1&0&1&0\\
0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&8-\lambda&1&0&1&0&1&0&1\\
1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&8-\lambda&1&0&1&0&1&0\\
0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&8-\lambda&1&0&1&0&1\\
1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&8-\lambda&1&0&1&0\\
0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&8-\lambda&1&0&1\\
1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&8-\lambda&1&0\\
0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&8-\lambda&1\\
1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&8-\lambda
\end{pmatrix}$$

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan menggunakan cara yang sama pada grup dihedral (D_8), diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut.

$$p(\lambda)=(8-\lambda)\left(-\frac{\lambda^2-16\lambda+63}{-8+\lambda}\right)\left(-\frac{\lambda^3-24\lambda^2+190\lambda-496}{\lambda^2-16\lambda+63}\right)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\left(-\frac{\lambda^3-24\lambda^2+188\lambda-480}{\lambda^2-16\lambda+62}\right)\left(-\frac{\lambda^3-24\lambda^2+186\lambda-464}{\lambda^2-16\lambda+60}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^3-24\lambda^2+183\lambda-440}{\lambda^2-16\lambda+58}\right)\left(-\frac{\lambda^3-24\lambda^2+180\lambda-416}{\lambda^2-16\lambda+55}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^3-24+176\lambda-384}{\lambda^2-16\lambda+52}\right)\left(-\frac{\lambda^3-24+172\lambda-352}{\lambda^2-16\lambda+48}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^3-24+167\lambda-312}{\lambda^2-16\lambda+44}\right)\left(-\frac{\lambda^3-24+162\lambda-272}{\lambda^2-16\lambda+39}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^3-24+156\lambda-224}{\lambda^2-16\lambda+34}\right)\left(-\frac{\lambda^3-24+150\lambda-176}{\lambda^2-16\lambda+28}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^3-24+143\lambda-120}{\lambda^2-16\lambda+22}\right)\left(-\frac{\lambda^3-24+136\lambda-64}{\lambda^2-16\lambda+15}\right)\left(-\frac{\left(\lambda^2-24\lambda+128\right)\lambda}{\lambda^2-16\lambda+8}\right)$$

$$=(\lambda-16)(\lambda-8)^{14}\lambda$$

Dengan menetapkan $p(\lambda)=0$ maka diperoleh $\lambda_1=16$, $\lambda_2=8$, dan $\lambda_3=0$. Dengan cara yang sama pada grup dihedral (D_8) dapat ditentukan multiplisitas masing-masing nilai Eigen dari matriks tersebut, yaitu $m(\lambda_1)=1$, $m(\lambda_2)=14$, dan $m(\lambda_3)=1$.

Dengan demikian spektrum *signless* Laplace dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}$ adalah sebagai berikut

$$spec_{\boldsymbol{L}^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}\right)}=\begin{bmatrix}16 & 8 & 0\\ 1 & 14 & 1\end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{L}^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}\right)$ adalah 16, 8, dan 0. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 1, 14, dan 1.

Selanjutnya, dari Gambar 3.6 dapat diperoleh matriks *detour* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}$ sebagai berikut.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\boldsymbol{DD}(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}) = \begin{bmatrix}
0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 \\
15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 \\
14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 \\
15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 \\
14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 \\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 \\
14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 \\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 \\
14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 \\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 \\
14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 \\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 \\
14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 \\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 \\
14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 \\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0
\end{bmatrix}$$

$$det\left(\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}\right) - \lambda \boldsymbol{I}\right) =$$

$$det\left(\begin{bmatrix}
0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 \\
15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 \\
14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 \\
15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 \\
14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 \\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 \\
14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 \\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 \\
14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 \\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 \\
14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 \\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 \\
14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 \\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 \\
14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 \\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0
\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}
\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda
\end{bmatrix}\right) =$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$det\begin{pmatrix}
0-\lambda & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15\\
15 & 0-\lambda & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14\\
14 & 15 & 0-\lambda & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15\\
15 & 14 & 15 & 0-\lambda & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14\\
14 & 15 & 14 & 15 & 0-\lambda & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15\\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0-\lambda & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14\\
14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0-\lambda & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15\\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0-\lambda & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14\\
14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0-\lambda & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15\\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0-\lambda & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14\\
14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0-\lambda & 15 & 14 & 15 & 14 & 15\\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0-\lambda & 15 & 14 & 15 & 14\\
14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0-\lambda & 15 & 14 & 15\\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0-\lambda & 15 & 14\\
14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0-\lambda & 15\\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0-\lambda
\end{pmatrix}$$

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan menggunakan cara yang sama pada grup dihedral (D_8), diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut.

$$p(\lambda) = -\lambda\left(-\frac{\lambda^2-225}{\lambda}\right)\left(-\frac{\lambda^3-646\lambda-6300}{\lambda^2-225}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^3-14\lambda^2-1096\lambda-9856}{\lambda^2-14\lambda-450}\right)\left(-\frac{\lambda^3-28\lambda^2-1546\lambda-13412}{\lambda^2-28\lambda-704}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^3-42\lambda^2-2025\lambda-17374}{\lambda^2-42\lambda-958}\right)\left(-\frac{\lambda^3-56\lambda^2-2504\lambda-21336}{\lambda^2-56\lambda-1241}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^3-70\lambda^2-3012\lambda-25704}{\lambda^2-70\lambda-1524}\right)\left(-\frac{\lambda^3-84\lambda^2-3520\lambda-30072}{\lambda^2-84\lambda-1836}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^3-98\lambda^2-4057\lambda-34846}{\lambda^2-98\lambda-2148}\right)\left(-\frac{\lambda^3-112\lambda^2-4594\lambda-39620}{\lambda^2-112\lambda-2489}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^3-126\lambda^2-5160\lambda-44800}{\lambda^2-126\lambda-2830}\right)\left(-\frac{\lambda^3-140\lambda^2-5726\lambda-49980}{\lambda^2-140\lambda-3200}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^3-154\lambda^2-6321\lambda-55566}{\lambda^2-154\lambda-3570}\right)\left(-\frac{\lambda^3-168\lambda^2-6916\lambda-61152}{\lambda^2-168\lambda-3969}\right)$$

$$\left(-\frac{\lambda^3-182\lambda^2-7540\lambda-67144}{\lambda^2-182\lambda-4368}\right)$$

$$= (\lambda-218)(\lambda+14)^{10}(\lambda+22)$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 218$, $\lambda_2 = -14$, dan $\lambda_3 = -22$. Dengan cara yang sama pada grup dihedral (D_8) dapat ditentukan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

multiplisitas masing-masing nilai Eigen dari matriks tersebut, yaitu $m(\lambda_1) = 1$, $m(\lambda_2) = 14$, dan $m(\lambda_3) = 1$.

Dengan demikian spektrum *detour* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}$ adalah sebagai berikut

$$spec_{\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}\right)} = \begin{bmatrix} 218 & -14 & -22 \\ 1 & 14 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}\right)$ adalah 218, -14, dan -22. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 1, 14, dan 1.

Dari spektrum yang telah ditemukan, diperoleh bentuk polinomial karakteristik dan spektrum *adjacency* titik komplemen graf subgrup dari beberapa grup dihedral, diantaranya

Tabel 3.16 Polinomial Karakteristik Matriks *Adjacency* Titik dari Beberapa Komplemen Graf Subgrup $\langle r^2, s\rangle$ dari Grup Dihedral (D_{2n})

n	Grup Dihedral D_{2n}	Polinomial Karakteristik Matriks *Adjacency* Titik
4	Grup Dihedral D_8	$(\lambda-4)\lambda^6(\lambda+4)$
6	Grup Dihedral D_{12}	$(\lambda-6)\lambda^{10}(\lambda+6)$
8	Grup Dihedral D_{16}	$(\lambda-8)\lambda^{14}(\lambda+8)$
⋮		
n	Grup Dihedral D_{2n}	$(\lambda-n)\lambda^{2n-2}(\lambda+n)$

Tabel 3.17 Spektrum *Adjacency* Titik dari Beberapa Komplemen Graf Subgrup $\langle r^2, s\rangle$ dari Grup Dihedral (D_{2n})

n	Grup Dihedral D_{2n}	Spektrum *Adjacency* Titik
4	Grup Dihedral D_8	$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 1 & 6 & 1 \end{bmatrix}$
6	Grup Dihedral D_{12}	$\begin{bmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 1 & 10 & 1 \end{bmatrix}$
8	Grup Dihedral D_{16}	$\begin{bmatrix} 8 & 0 & -8 \\ 1 & 14 & 1 \end{bmatrix}$
⋮		
n	Grup Dihedral D_{2n}	$\begin{bmatrix} n & 0 & -n \\ 1 & 2n-2 & 1 \end{bmatrix}$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Teorema 7

Polinomial karakteristik matriks *adjacency* titik $\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right)$ dengan $H = \langle r^2, s\rangle \trianglelefteq D_{2n}$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

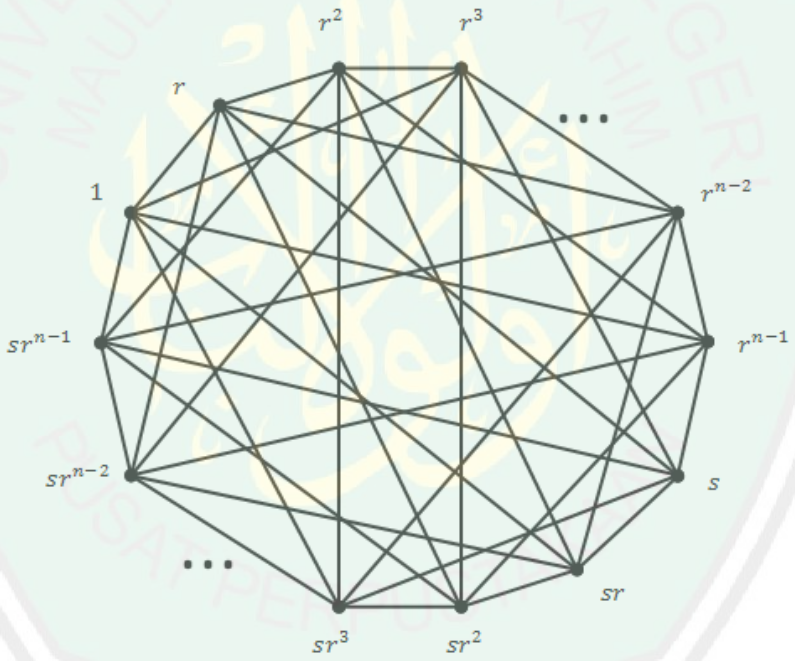
$$p(\lambda) = (\lambda - n)\lambda^{2n-2}(\lambda + n)$$

Bukti

Misalkan grup dihedral $(D_{2n}) = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$.

Untuk n genap dan $n \geq 4$, ambil $\bar{H} = \{r, r^3, \dots, r^{n-1}, sr, sr^3, \dots, sr^{n-1}\}$.

Sesuai definisi komplemen graf subgrup, maka diperoleh graf $\overline{\Gamma_H(D_{2n})}$.



CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Sehingga akan diperoleh matriks *adjacency* titik dari $\overline{\Gamma_H(D_{2n})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ r^3 \\ \vdots \\ r^{n-2} \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ sr^3 \\ \vdots \\ sr^{n-2} \\ sr^{n-1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccc} 1 & r & r^2 & r^3 & \dots & r^{n-2} & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & sr^3 & \dots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Polinomial karakteristik $\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right)$ diperoleh dari $det\left(\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right) - \lambda\boldsymbol{I}\right)$. Dengan eliminasi Gauss pada $\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right) - \lambda\boldsymbol{I}$ diperoleh matriks segitiga atas berikut

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & r & r^2 & \dots & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} -\lambda & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -\dfrac{(\lambda^2-1)}{\lambda} & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -\dfrac{\lambda(\lambda^2-2)}{\lambda^2-1} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\dfrac{\lambda(\lambda^2-n^2)}{\lambda^2-(n^2-n)} \end{bmatrix} \end{array}$$

Maka $det\left(\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right) - \lambda\boldsymbol{I}\right)$ tidak lain adalah perkalian matriks segitiga atas. Maka diperoleh polinomial karakteristik dari $\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right)$ adalah

$$p(\lambda) = (\lambda - n)\lambda^{2n-2}(\lambda + n). \quad \blacksquare$$

Teorema 8

Spektrum *adjacency* titik $\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right)$ dengan $H = \langle r^2, s\rangle \trianglelefteq D_{2n}$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$spec_{\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right)} = \begin{bmatrix} n & 0 & -n \\ 1 & 2n-2 & 1 \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Bukti

Berdasarkan teorema 7, polinomial karakteristik dari $\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right)$, n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$p(\lambda) = (\lambda - n)\lambda^{2n-2}(\lambda + n)$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 2n, \lambda_2 = 0$, dan $\lambda_3 = -n$ dan diperoleh multiplisitas $m(\lambda_1) = 1, m(\lambda_2) = 2n - 2$, dan $m(\lambda_3) = 1$.

Spektrum *adjacency* titik komplemen graf subgrup $H = \langle r^2, s\rangle$ dari grup dihedral D_{2n} untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$spec_{A\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right)} = \begin{bmatrix} n & 0 & -n \\ 1 & 2n-2 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right)$ adalah n, 0 dan $-n$. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 1, $2n - 2$ dan 1. ■

Dari spektrum yang telah ditemukan, diperoleh bentuk polinomial karakteristik dan spektrum Laplace komplemen graf subgrup dari beberapa grup dihedral diantaranya

Tabel 3.18 Polinomial Karakteristik Matriks Laplace dari Beberapa Komplemen Graf Subgrup $\langle r^2, s\rangle$ dari Grup Dihedral (D_{2n})

n	Grup Dihedral D_{2n}	Polinomial Karakteristik Matriks Laplace
4	Grup Dihedral D_8	$(\lambda - 8)(\lambda - 4)^6\lambda$
6	Grup Dihedral D_{12}	$(\lambda - 12)(\lambda - 6)^{10}\lambda$
8	Grup Dihedral D_{16}	$(\lambda - 16)(\lambda - 8)^{14}\lambda$
⋮		
n	Grup Dihedral D_{2n}	$(\lambda - 2n)(\lambda - n)^{2n-2}\lambda$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Tabel 3.19 Spektrum Laplace dari Beberapa Komplemen Graf Subgrup $\langle r^2, s\rangle$ dari Grup Dihedral (D_{2n})

n	Grup Dihedral D_{2n}	Spektrum Laplace
4	Grup Dihedral D_8	$\begin{bmatrix}8 & 4 & 0\\ 1 & 6 & 1\end{bmatrix}$
6	Grup Dihedral D_{12}	$\begin{bmatrix}12 & 6 & 0\\ 1 & 10 & 1\end{bmatrix}$
8	Grup Dihedral D_{16}	$\begin{bmatrix}16 & 8 & 0\\ 1 & 14 & 1\end{bmatrix}$
⋮		
n	Grup Dihedral D_{2n}	$\begin{bmatrix}2n & n & 0\\ 1 & 2n-2 & 1\end{bmatrix}$

Teorema 9

Polinomial karakteristik matriks Laplace $\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right)$ dengan $H = \langle r^2, s\rangle \trianglelefteq D_{2n}$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$p(\lambda) = (\lambda - 2n)(\lambda - n)^{2n-2}\lambda$$

Bukti

Misalkan grup dihedral $(D_{2n}) = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$.

Untuk n genap dan $n \geq 4$, ambil $\bar{H} = \{r, r^3, \dots, r^{n-1}, sr, sr^3, \dots, sr^{n-1}\}$.

Sesuai definisi komplemen graf subgrup, maka diperoleh graf $\overline{\Gamma_H(D_{2n})}$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Sehingga akan diperoleh matriks *adjacency* titik dari $\overline{\Gamma_H(D_{2n})}$ sebagai berikut

$$
\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right) = \begin{array}{c|cccccccccccccc|}
 & 1 & r & r^2 & r^3 & \dots & r^{n-2} & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & sr^3 & \dots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \\ \hline
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\
r & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\
r^2 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\
r^3 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
r^{n-2} & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\
r^{n-1} & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\
s & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\
sr & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\
sr^2 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\
sr^3 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
sr^{n-2} & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\
sr^{n-1} & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0
\end{array}
$$

dan matriks derajat dari $\overline{\Gamma_H(D_{2n})}$ adalah

$$
\boldsymbol{D}\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right) = \begin{array}{c|cccccccccccccc|}
 & 1 & r & r^2 & r^3 & \dots & r^{n-2} & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & sr^3 & \dots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \\ \hline
1 & n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
r & 0 & n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
r^2 & 0 & 0 & n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
r^3 & 0 & 0 & 0 & n & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
r^{n-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
r^{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
s & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
sr & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
sr^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & n & 0 & \dots & 0 & 0 \\
sr^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
sr^{n-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n & 0 \\
sr^{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n
\end{array}
$$

Matriks Laplace graf subgrup dari grup dihedral (D_{2n}) adalah sebagai berikut

$$
\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right) = \begin{array}{c|cccccccccccccc|}
 & 1 & r & r^2 & r^3 & \dots & r^{n-2} & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & sr^3 & \dots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \\ \hline
1 & n & -1 & 0 & -1 & \dots & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & \dots & 0 & -1 \\
r & -1 & n & -1 & 0 & \dots & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & \dots & -1 & 0 \\
r^2 & 0 & -1 & n & -1 & \dots & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & \dots & 0 & -1 \\
r^3 & -1 & 0 & -1 & n & \dots & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & \dots & -1 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
r^{n-2} & 0 & -1 & 0 & -1 & \dots & n & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & \dots & 0 & -1 \\
r^{n-1} & -1 & 0 & -1 & 0 & \dots & -1 & n & -1 & 0 & -1 & 0 & \dots & -1 & 0 \\
s & 0 & -1 & 0 & -1 & \dots & 0 & -1 & n & -1 & 0 & -1 & \dots & 0 & -1 \\
sr & -1 & 0 & -1 & 0 & \dots & -1 & 0 & -1 & n & -1 & 0 & \dots & -1 & 0 \\
sr^2 & 0 & -1 & 0 & -1 & \dots & 0 & -1 & 0 & -1 & n & -1 & \dots & 0 & -1 \\
sr^3 & -1 & 0 & -1 & 0 & \dots & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & n & \dots & -1 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
sr^{n-2} & 0 & -1 & 0 & -1 & \dots & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & \dots & n & -1 \\
sr^{n-1} & -1 & 0 & -1 & 0 & \dots & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & \dots & -1 & n
\end{array}
$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Polinomial karakteristik $\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right)$ diperoleh dari $det\left(\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right) - \lambda \boldsymbol{I}\right)$. Dengan eliminasi Gauss pada $\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right) - \lambda \boldsymbol{I}$ diperoleh matriks segitiga atas berikut

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & r & r^2 & \dots & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} -(\lambda - n) & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -\frac{(\lambda-(n+1))(\lambda-(n-1))}{\lambda-n} & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda^3-3n\lambda^2+(3n^2-2)\lambda-(n^3-2n)}{(\lambda-(n+1))(\lambda-(n-1))} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{(\lambda-2n)(\lambda-n)\lambda}{\lambda^2-2n\lambda+n} \end{bmatrix} \end{array}$$

Maka $det\left(\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right) - \lambda \boldsymbol{I}\right)$ tidak lain adalah perkalian matriks segitiga atas. Maka diperoleh polinomial karakteristik dari $\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right)$ adalah

$$p(\lambda) = (\lambda - 2n)(\lambda - n)^{2n-2}\lambda. \blacksquare$$

Teorema 10

Spektrum Laplace $\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right)$ dengan $H = \langle r^2, s\rangle \trianglelefteq D_{2n}$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$spec_{\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right)} = \begin{bmatrix} 2n & n & 0 \\ 1 & 2n-2 & 1 \end{bmatrix}$$

Bukti

Berdasarkan teorema 9, polinomial karakteristik dari $\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right)$, n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$p(\lambda) = (\lambda - 2n)(\lambda - n)^{2n-2}\lambda$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 2n, \lambda_2 = n$ dan $\lambda_3 = 0$ dan diperoleh multiplisitas $m(\lambda_1) = 1, m(\lambda_2) = 2n - 2$, dan $m(\lambda_3) = 1$.

Spektrum Laplace komplemen graf subgrup $H = \langle r^2, s\rangle$ dari grup dihedral D_{2n} untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Spektrum Laplace komplemen graf subgrup $H = \langle r^2, s\rangle$ dari grup dihedral D_{2n} untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$spec_{\boldsymbol{L}(\overline{\Gamma_H(D_{2n})})} = \begin{bmatrix} 2n & n & 0 \\ 1 & 2n-2 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right)$ adalah $2n$, n dan 0. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 1, $2n-2$ dan 1. ■

Dari spektrum yang telah ditemukan, diperoleh bentuk polinomial karakteristik dan spektrum *signless* Laplace komplemen graf subgrup dari beberapa grup dihedral diantaranya

Tabel 3.20 Polinomial Karakteristik Matriks *Signless* Laplace dari Beberapa Komplemen Graf Subgrup $\langle r^2, s\rangle$ dari Grup Dihedral (D_{2n})

n	Grup Dihedral D_{2n}	Polinomial Karakteristik Matriks *Signless* Laplace
4	Grup Dihedral D_8	$(\lambda-8)(\lambda-4)^6\lambda$
6	Grup Dihedral D_{12}	$(\lambda-12)(\lambda-6)^{10}\lambda$
8	Grup Dihedral D_{16}	$(\lambda-16)(\lambda-8)^{14}\lambda$
⋮		
n	Grup Dihedral $2n$	$(\lambda-2n)(\lambda-n)^{2n-2}\lambda$

Tabel 3.21 Spektrum *Signless* Laplace dari Beberapa Komplemen Graf Subgrup $\langle r^2, s\rangle$ dari Grup Dihedral (D_{2n})

n	Grup Dihedral D_{2n}	Spektrum *Signless* Laplace
4	Grup Dihedral D_8	$\begin{bmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \end{bmatrix}$
6	Grup Dihedral D_{12}	$\begin{bmatrix} 12 & 6 & 0 \\ 1 & 10 & 1 \end{bmatrix}$
8	Grup Dihedral D_{16}	$\begin{bmatrix} 16 & 8 & 0 \\ 1 & 14 & 1 \end{bmatrix}$
⋮		
n	Grup Dihedral $2n$	$\begin{bmatrix} 2n & n & 0 \\ 1 & 2n-2 & 1 \end{bmatrix}$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Teorema 11

Polinomial karakteristik matriks *signless* Laplace $\boldsymbol{L}^{+}\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right)$ dengan $H = \langle r^2, s\rangle \trianglelefteq D_{2n}$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$p(\lambda) = (\lambda - 2n)(\lambda - n)^{2n-2}\lambda$$

Bukti

Misalkan grup dihedral $(D_{2n}) = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$.

Untuk n genap dan $n \geq 4$, ambil $\overline{H} = \{r, r^3, \dots, r^{n-1}, sr, sr^3, \dots, sr^{n-1}\}$.

Sesuai definisi komplemen graf subgrup, maka diperoleh graf $\overline{\Gamma_H(D_{2n})}$.

Sehingga akan diperoleh matriks *adjacency* titik dari $\overline{\Gamma_H(D_{2n})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right) = \begin{array}{c|ccccccccccccccc|}
 & 1 & r & r^2 & r^3 & \dots & r^{n-2} & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & sr^3 & \dots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\
r & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\
r^2 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\
r^3 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
r^{n-2} & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\
r^{n-1} & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\
s & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\
sr & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\
sr^2 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\
sr^3 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
sr^{n-2} & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\
sr^{n-1} & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0
\end{array}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

dan matriks derajat dari $\overline{\Gamma_H(D_{2n})}$ adalah

$$\boldsymbol{D}\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ r^3 \\ \vdots \\ r^{n-2} \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ sr^3 \\ \vdots \\ sr^{n-2} \\ sr^{n-1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccc} 1 & r & r^2 & r^3 & \dots & r^{n-2} & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & sr^3 & \dots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{bmatrix} \end{array}$$

Matriks *signless* Laplace graf subgrup dari grup dihedral (D_{2n}) adalah sebagai berikut

$$\boldsymbol{L}^+\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ r^3 \\ \vdots \\ r^{n-2} \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ sr^3 \\ \vdots \\ sr^{n-2} \\ sr^{n-1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccc} 1 & r & r^2 & r^3 & \dots & r^{n-2} & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & sr^3 & \dots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} n & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & n & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & n & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & n & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & n & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & n & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & n & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & n & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & n & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & n & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & n & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & n \end{bmatrix} \end{array}$$

Polinomial karakteristik $\boldsymbol{L}^+\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right)$ diperoleh dari $det\left(\boldsymbol{L}^+\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right) - \lambda \boldsymbol{I}\right)$. Dengan eliminasi Gauss pada $\boldsymbol{L}^+\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right) - \lambda \boldsymbol{I}$ diperoleh matriks segitiga atas berikut

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & r & r^2 & \dots & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} -(\lambda - n) & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -\frac{(\lambda-(n+1))(\lambda-(n-1))}{\lambda-n} & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda^3-3n\lambda^2+(3n^2-2)\lambda-(n^3-2n)}{(\lambda-(n+1))(\lambda-(n-1))} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{(\lambda-2n)(\lambda-n)\lambda}{\lambda^2-2n\lambda+n} \end{bmatrix} \end{array}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Maka $det\left(\boldsymbol{L}^{+}\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right) - \lambda \boldsymbol{I}\right)$ tidak lain adalah perkalian matriks segitiga atas. Maka diperoleh polinomial karakteristik dari $\boldsymbol{L}^{+}\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right)$ adalah

$$p(\lambda) = (\lambda - 2n)(\lambda - n)^{2n-2}\lambda. \quad \blacksquare$$

Teorema 12

Spektrum *signless* Laplace $\boldsymbol{L}^{+}\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right)$ dengan $H = \langle r^2, s\rangle \trianglelefteq D_{2n}$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$spec_{\boldsymbol{L}^{+}\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right)} = \begin{bmatrix} 2n & n & 0 \\ 1 & 2n-2 & 1 \end{bmatrix}$$

Bukti

Berdasarkan teorema 11, polinomial karakteristik dari $\boldsymbol{L}^{+}\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right)$, n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$p(\lambda) = (\lambda - 2n)(\lambda - n)^{2n-2}\lambda$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 2n, \lambda_2 = n$ dan $\lambda_3 = 0$ dan diperoleh multiplisitas $m(\lambda_1) = 1,\ m(\lambda_2) = 2n - 2$, dan $m(\lambda_3) = 1$.

Spektrum *signless* Laplace komplemen graf subgrup $H = \langle r^2, s\rangle$ dari grup dihedral D_{2n} untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$spec_{\boldsymbol{L}^{+}\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right)} = \begin{bmatrix} 2n & n & 0 \\ 1 & 2n-2 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{L}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right)$ adalah $2n$, n dan 0. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 1, $2n - 2$ dan 1. $\blacksquare$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dari spektrum yang telah ditemukan, diperoleh bentuk polinomial karakteristik dan spektrum *detour* komplemen graf subgrup dari beberapa grup dihedral diantaranya

Tabel 3.22 Polinomial Karakteristik Matriks *Detour* dari Beberapa Komplemen Graf Subgrup $\langle r^2, s\rangle$ dari Grup Dihedral (D_{2n})

n	Grup Dihedral D_{2n}	Polinomial Karakteristik Matriks *Detour*
4	Grup Dihedral D_8	$(\lambda-46)(\lambda+16)^6(\lambda+10)$
6	Grup Dihedral D_{12}	$(\lambda-116)(\lambda+10)^{10}(\lambda+16)$
8	Grup Dihedral D_{16}	$(\lambda-218)(\lambda+14)^{14}(\lambda+22)$
⋮		
n	Grup Dihedral D_{2n}	$\big(\lambda-(4n^2-5n+2)\big)$ $\big(\lambda+(2n-2)\big)^{2n-2}\big(\lambda+(3n-2)\big)$

Tabel 3.23 Spektrum *Detour* dari Beberapa Komplemen Graf Subgrup $\langle r^2, s\rangle$ dari Grup Dihedral (D_{2n})

n	Grup Dihedral D_{2n}	Spektrum *Detour*
4	Grup Dihedral D_8	$\begin{bmatrix}46 & -16 & -10\\ 1 & 6 & 1\end{bmatrix}$
6	Grup Dihedral D_{12}	$\begin{bmatrix}116 & -10 & -16\\ 1 & 10 & 1\end{bmatrix}$
8	Grup Dihedral D_{16}	$\begin{bmatrix}218 & -14 & -22\\ 1 & 14 & 1\end{bmatrix}$
⋮		
n	Grup Dihedral D_{2n}	$\begin{bmatrix}(4n^2-5n+2) & -(2n-2) & -(3n-2)\\ 1 & 2n-2 & 1\end{bmatrix}$

Teorema 13

Polinomial karakteristik matriks *detour* $\boldsymbol{DD}\big(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\big)$ dengan $H=\langle r^2,s\rangle \trianglelefteq D_{2n}$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$p(\lambda)=\big(\lambda-(4n^2-5n+2)\big)\big(\lambda+(2n-2)\big)^{2n-2}\big(\lambda+(3n-2)\big)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Bukti

Graf $\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right)$ terhubung karena setiap titik-titiknya saling terhubung. Matrik *Detour* $\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right)$ adalah elemen pada baris ke-i dan kolom ke-j memuat bilangan yang menyatakan lintasan terpanjang dari v_i ke v_j di $\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right)$. Matriks *detour* yang dihasilkan adalah sebagai berikut

$\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right) =$

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ r^3 \\ \vdots \\ r^{n-2} \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ sr^3 \\ \vdots \\ sr^{n-2} \\ sr^{n-1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccccccc} 1 & r & r^2 & r^3 & \dots & r^{n-2} & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & sr^3 & \dots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & \dots & 2n-2 & 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & \dots & 2n-2 & 2n-1 \\ 2n-1 & 0 & 2n-1 & 2n-2 & \dots & 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & 2n-2 & \dots & 2n-1 & 2n-2 \\ 2n-2 & 2n-1 & 0 & 2n-1 & \dots & 2n-2 & 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & \dots & 2n-2 & 2n-1 \\ 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & 0 & \dots & 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & 2n-2 & \dots & 2n-1 & 2n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2n-2 & 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & \dots & 0 & 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & \dots & 2n-2 & 2n-1 \\ 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & 2n-2 & \dots & 2n-1 & 0 & 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & 2n-2 & \dots & 2n-1 & 2n-2 \\ 2n-2 & 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & \dots & 2n-2 & 2n-1 & 0 & 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & \dots & 2n-2 & 2n-1 \\ 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & 2n-2 & \dots & 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & 0 & 2n-1 & 2n-2 & \dots & 2n-1 & 2n-2 \\ 2n-2 & 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & \dots & 2n-2 & 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & 0 & 2n-1 & \dots & 2n-2 & 2n-1 \\ 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & 2n-2 & \dots & 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & 0 & \dots & 2n-1 & 2n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2n-2 & 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & \dots & 2n-2 & 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & \dots & 0 & 2n-1 \\ 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & 2n-2 & \dots & 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & 2n-2 & \dots & 2n-1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Polinomial karakteristik $\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right)$ diperoleh dari $det\left(\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right) - \lambda \boldsymbol{I}\right)$. Dengan eliminasi Gauss pada $\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right) - \lambda \boldsymbol{I}$ diperoleh matriks segitiga atas berikut

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & r & r^2 & \dots & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} -\lambda & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -\frac{\lambda^2-(2n-1)^2}{\lambda} & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda^3-(12n^2-16n+6)\lambda-(16n^3-32n^2+20n-4)}{\lambda^2-(2n-1)^2} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{\lambda^3-(4n^2-10n+6)\lambda^2-(20n^3-47n^2+40n-12)\lambda-(602n^3-6738n^2+29528n-46072)}{\lambda^2-(4n^2-10n+6)\lambda-(12n^3-31n^2+27n-8)} \end{bmatrix} \end{array}$$

Maka $det\left(\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right) - \lambda \boldsymbol{I}\right)$ tidak lain adalah perkalian matriks segitiga atas. Maka diperoleh polinomial karakteristik dari $\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right)$ adalah

$$p(\lambda) = \left(\lambda - (4n^2 - 5n + 2)\right)\left(\lambda + (2n-2)\right)^{2n-2}\left(\lambda + (3n-2)\right). \blacksquare$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Teorema 14

Spektrum *detour* $\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right)$ dengan $H = \langle r^2, s\rangle \trianglelefteq D_{2n}$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$spec_{\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right)} = \begin{bmatrix} (4n^2 - 5n + 2) & -(2n-2) & -(3n-2) \\ 1 & 2n-2 & 1 \end{bmatrix}$$

Bukti

Berdasarkan teorema 13, polinomial karakteristik dari $\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right)$, n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$p(\lambda) = \left(\lambda - (4n^2 - 5n + 2)\right)\left(\lambda + (2n-2)\right)^{2n-2}\left(\lambda + (3n-2)\right)$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = (4n^2 - 5n + 2), \lambda_2 = -(2n-2)$ dan $\lambda_3 = -(3n-2)$ dan diperoleh multiplisitas $m(\lambda_1) = 1$, $m(\lambda_2) = 2n-2$, dan $m(\lambda_3) = 1$.

Spektrum *detour* komplemen graf subgrup $H = \langle r^2, s\rangle$ dari grup dihedral D_{2n} untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$spec_{\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right)} = \begin{bmatrix} (4n^2 - 5n + 2) & -(2n-2) & -(3n-2) \\ 1 & 2n-2 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right)$ adalah $(4n^2 - 5n + 2)$, $-(2n-2)$ dan $-(3n-2)$. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 1, $2n-2$ dan 1. ■

3.3 Perhitungan Spektrum dalam Pandangan Islam

Gambaran ketelitian Allah telah dijelaskan dalam bab II, QS. Yasin ayat 12 di mana setiap amalan manusia dihitung dan dicatat dalam lauh mahfuzh tanpa tertinggal sedikitpun. Berdasarkan penjelasan ayat وَنَكْتُبُ مَا قَدَّمُوا "*dan Kami*

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

menuliskan apa yang telah mereka kerjakan" di dalam tafsir Ibn Katsir, bahwa Allah akan mencatat setiap amalan yang pernah dilakukan manusia. Jika tertinggal sedikit saja, maka yang akan terjadi adalah kekacauan. Tetapi Allah Swt yang Maha Kuasa benar-benar memperhatikan amalan kebaikan dan amalan keburukan manusia yang telah dilakukan di dunia untuk kemudian dicatat dalam buku catatan amal tanpa tertinggal sedikitpun dan tanpa tertukar antara manusia satu dengan yang lainnya. Jika yang dilakukan adalah amal baik, maka akan ditulis sebagai suatu kebaikan dan jika yang dilakukan adalah amal buruk, maka akan ditulis sebagai suatu keburukan. Al-Qurthubi (2007) juga menjelaskan dalam ayat أَحْصَيْنَاهُ, seolah-olah Allah berkata, "Dan Kami menghitung segala sesuatu yang Kami menghitungnya". Ini menunjukkan bahwa Allah benar-benar teliti dalam melakukan perhitungan.

Dengan meneladani gambaran ketelitian Allah dalam firmanNya tersebut, maka dalam menentukan spektrum, peneliti juga harus teliti dalam melakukan perhitungannya. Langkah pertama dalam menentukan spektrum suatu graf adalah dengan menggambar grafnya terlebih dahulu. Gambar graf dapat diperoleh dari hasil perhitungan komposisi unsur-unsur dalam grup. Jika hasil komposisi unsur-unsur dalam grup merupakan anggota subgrup, maka titik pada kedua unsur yang dikomposisikan tersebut dapat digambarkan graf yang terhubung. Sebaliknya, jika hasil komposisi unsur-unsur dalam grup bukan merupakan anggota subgrup, maka titik pada kedua unsur yang dikomposisikan tersebut tidak dapat digambarkan graf yang terhubung. Sehingga dibutuhkan ketelitian dalam menghitung komposisi unsur-unsur dalam grup tersebut agar diperoleh gambar graf yang benar. Gambar graf inilah yang selanjutnya mendasari perolehan matriks.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dalam menentukan matriks *adjacency* titik, peneliti harus teliti dalam memperhatikan titik yang terhubung dan tidak terhubung di dalam graf. Jika titik antara kedua unsur dalam graf terhubung, maka dapat dituliskan angka 1 dalam matriks. Sedangkan jika titik antara kedua unsur dalam graf tidak terhubung, maka dapat dituliskan angka 0 dalam matriks. Dan pada diagonal matriksnya bernilai 0 semua. Begitu juga dalam menentukan matriks derajat, matriks Laplace, *signless* Laplace, dan *detour*, yang harus diperhatikan dengan teliti adalah grafnya.

Perolehan suatu matriks dari graf itulah yang akan digunakan untuk menentukan nilai eigen dan multiplisitas dari masing-masing nilai eigen. Setelah nilai eigen dan multiplisitasnya didapatkan, selanjutnya dapat diperoleh spektrum graf tersebut dengan menuliskan nilai eigen pada baris pertama dan multiplisitas masing-masing nilai eigen pada baris kedua suatu matriks. Oleh karena itu, ketelitian dalam menggambar graf dan menentukan suatu matriks sangat diperlukan agar diperoleh ketepatan dalam memperoleh spektrum dari suatu graf.

Dengan demikian, berdasarkan penjelasan tafsir surat Yasin ayat 12 tentang gambaran ketelitian Allah, kita bisa melihat bagaimana Allah memberikan contoh kepada hambaNya melalui firmanNya tersebut. Sebagai seorang hamba yang tidak luput dari kesalahan, maka sepatutnya contoh tersebut diteladani dan diamalkan, termasuk oleh ilmuwan matematika dalam melakukan penelitian agar selalu teliti dalam melakukan perhitungan. Hal ini dimaksudkan untuk memperkecil kesalahan dalam menghasilkan teorema-teorema baru beserta pembuktiannya.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan maka dapat disimpulkan beberapa pola umum spektrum *adjacency* titik, Laplace, *signless* Laplace dan *detour* graf subgrup $\langle r^2, s\rangle$ dan komplemennya dari grup dihedral.

1. Pada graf subgrup hanya didapatkan spektrum *adjacency* titik, Laplace dan *signless* Laplace. Spektrum *detour* tidak dapat ditentukan karena graf yang diperoleh adalah graf tidak terhubung.
   a. Spektrum *adjacency* titik $\boldsymbol{A}\left(\Gamma_H(D_{2n})\right)$ dengan $H = \langle r^2, s\rangle$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

   $$spec_{\boldsymbol{A}(\Gamma_H(D_{2n}))} = \begin{bmatrix} (n-1) & -1 \\ 2 & 2n-2 \end{bmatrix}$$

   b. Spektrum Laplace $\boldsymbol{L}\left(\Gamma_H(D_{2n})\right)$ dengan $H = \langle r^2, s\rangle$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

   $$spec_{\boldsymbol{L}(\Gamma_H(D_{2n}))} = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 2n-2 & 2 \end{bmatrix}$$

   c. Spektrum *signless* Laplace $\boldsymbol{L}^+\left(\Gamma_H(D_{2n})\right)$ dengan $H = \langle r^2, s\rangle$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

   $$spec_{\boldsymbol{L}^+(\Gamma_H(D_{2n}))} = \begin{bmatrix} 2n-2 & n-2 \\ 2 & 2n-2 \end{bmatrix}$$

2. Pada komplemen graf subgrup didapatkan spektrum *adjacency* titik, Laplace, *signless* Laplace dan *detour* karena graf yang diperoleh adalah graf terhubung.
   a. Spektrum *adjacency* titik $\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right)$ dengan $H = \langle r^2, s\rangle$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$spec_{\boldsymbol{A}(\overline{\Gamma_H(D_{2n})})} = \begin{bmatrix} n & 0 & -n \\ 1 & 2n-2 & 1 \end{bmatrix}$$

b. Spektrum Laplace $\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right)$ dengan $H = \langle r^2, s\rangle$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$spec_{\boldsymbol{L}(\overline{\Gamma_H(D_{2n})})} = \begin{bmatrix} 2n & n & 0 \\ 1 & 2n-2 & 1 \end{bmatrix}$$

c. Spektrum *signless* Laplace $\boldsymbol{L}^+\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right)$ dengan $H = \langle r^2, s\rangle$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$spec_{\boldsymbol{L}^+(\overline{\Gamma_H(D_{2n})})} = \begin{bmatrix} 2n & n & 0 \\ 1 & 2n-2 & 1 \end{bmatrix}$$

d. Spektrum *detour* $\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_H(D_{2n})}\right)$ dengan $H = \langle r^2, s\rangle$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$spec_{\boldsymbol{DD}(\overline{\Gamma_H(D_{2n})})} = \begin{bmatrix} (4n^2-5n+2) & -(2n-2) & -(3n-2) \\ 1 & 2n-2 & 1 \end{bmatrix}$$

4.2 Saran

Berdasarkan kesimpulan, pada penelitian ini spektrum diperoleh dari graf subgrup dan komplemen graf subgrup dari grup dihedral. Penelitian selanjutnya diharapkan dapat:

1. Menemukan teorema terkait spektrum yang diperoleh dari graf yang lainnya atau pada graf subgrup dari grup lainnya.
2. Menemukan teorema terkait spektrum yang diperoleh dari komplemen graf yang lainnya atau pada komplemen graf subgrup dari grup lainnya.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR RUJUKAN

Abdusysyakir. 2007. Ketika Kiai Mengajar Matematika. Malang: UIN Malang Press.

Abdussakir, Azizah, N.N. & Nofandika, F.F. 2009. *Teori Graf*. Malang: UIN Malang Press.

Abdussakir, Sari, FNK. & Shandya, D. 2012. *Spektrum Adjacency, Spektrum Laplace, Spektrum Signless Laplace, dan Spektrum Detour Graf Multipartisi Komplit*. Laporan Penelitian Dosen Bersama Mahasiswa. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Abdussakir, Amalia, I. & Arifandi, Z. 2013. *Menentukan Spectrum Graf Commuting dari Grup Dihedral*. Laporan Penelitian Dosen Bersama Mahasiswa tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Abdussakir, Muzakir, dan Hasanah. 2016. *Spektrum Graf Konjugasi dan Komplemen Graf Konjugasi dari Grup Dihedral*. Laporan Penelitian Dosen Bersama Mahasiswa. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Al-Qurthubi, Syaikh Imam. 2007. *Tafsir Al-Qurthubi, Jilid 15*. Terjemahan Muhyiddin Mas Rida, Muhammad Rana Mengala, Ahmad Athaillah Mansur. Jakarta: Pustaka Azzam.

Anderson, D.F., Fasteen, J. dan LaGrange, J.D. 2012. The Subgroup Graphs of a Group. *Arab J Math.*1:17–27. DOI 10.1007/s40065-012-0018-1.

Anton, H. 2000. *Dasar-Dasar Aljabar Linear, Jilid 1*. Terjemahan Hari Suminto. Batam: Interaksara.

Anton, H. dan Rorres, Ch. 2004. *Elementary Linier Algebra, 8th Edition.* New York: John Willey & Sons, Inc.

Ayyaswamy, S.K. & Balachandran, S. 2010. On Detour Spectra of Some Graph. *International Journal of Computational and Mathematical Sciences*. 4(7): 1038-1040.

Bondy, J.A. & Murty, U.S.R. 2008. *Graph Theory*. New York: Springer.

Brouwer, A.E. & Haemers, W. H. 2011. *Spectra of graphs: Monograph*. New York: Springer.

Biyikoglu, Turker, Leydold, Josef, Stadler, dan Peter F. 2007. *Laplacian Eigenvectors of Graphs*. New York: Springer.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dummit, D.S. dan Foote, R.M. 1991. *Abstract Algebra*. New Jersey: Prentice Hall, Inc.

Elvierayani, R.R. 2014. *Spektrum Adjacency, Laplace, dan Signless Laplace Graf Non-Commuting dari Grup Dihedral*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Gallian, J.A. copyright 2012. *Contemporary Abstract Algebra, eight edition*. University of Minnesota Duluth.

Kakeri, F. & Erfanian, A. 2015. The Complement of Subgroup Graph of a Group. Journal of Prime Research in Mathematics Vol. 11(2015), 55-60.

Katsir, Ismail Ibnu. 2006. *Mukhtasor Tafsir Ibnu Katsir*. Libanon: Dar El-Marefah.

Nafisah, Muflihatun. 2014. *Spektrum Detour Graf Non-Commuting dari Grup Dihedral*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Raisinghania, M.D. & Aggarwal, R.S. 1980. *Modern Algebra*. New Delhi: S. Chand & Company Ltd.

Yin, Sh. 2008. Investigation on Spectrum of the Adjacency Matrix and Laplacian Matrix of Graph G_l. *WSEAS Transaction on Systems*. Vol 7, No 4, Hal: 362-372.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

RIWAYAT HIDUP

Alinul Layali, lahir di Gresik pada tanggal 4 Mei 1996, biasa dipanggil Alin. Anak pertama dari 4 bersaudara pasangan bapak Muhammad Fatikh dan ibu Yeti Indahsari.

Pendidikan dasarnya ditempuh di SD Muhammadiyah 1 Sidayu Gresik dan lulus pada tahun 2008. Setelah itu melanjutkan sekolah di MTs Muhammadiyah 4 Sidayu Gresik, lulus tahun 2011. Pendidikan selanjutnya ditempuh di MA YKUI Maskumambang Dukun Gresik di bawah naungan PP. Maskumambang Dukun Gresik dan lulus tahun 2014. Selanjutnya, pada tahun yang sama melanjutkan kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil Jurusan Matematika.

Selama menjadi mahasiswa telah mengikuti beberapa penelitian, di antaranya adalah penelitian bersama dosen (P3S) dan penelitian kompetitif mahasiswa (PKM). Selain itu, di sela-sela kuliahnya juga menyempatkan diri membimbing privat matematika di LBB PSBB MAN 3 Malang sejak semester 5.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Alinul Layali
NIM : 14610042
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Spektrum Graf Subgrup dan Komplemennya dari Grup Dihedral
Pembimbing I : Dr. Abdussakir, M.Pd
Pembimbing II : Ach. Nashichuddin, M.A

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	13 November 2017	Konsultasi Bab I dan Bab II	1.
2.	17 November 2017	Revisi Bab I, Bab II, dan Konsultasi Bab III	2.
3.	23 November 2017	Konsultasi Kajian Keagamaan	3.
4.	28 November 2017	Revisi Kajian Keagamaan Bab I dan Bab II	4.
5.	18 Januari 2018	ACC Bab I dan Revisi Bab II, Bab III	5.
6.	2 Februari 2018	ACC Bab II, Revisi Bab III, dan Konsultasi Bab IV	6.
7.	20 Februari 2018	ACC Kajian Keagamaan Bab I, Bab II, dan Konsultasi Bab III	7.
8.	26 Februari 2018	Revisi Kajian Keagamaan Bab III	8.
9.	27 Februari 2018	ACC Kajian Keagamaan Bab III	9.
10.	6 Maret 2018	ACC Bab III dan Bab IV	10.
11.	8 Maret 2018	ACC Keseluruhan	11.

Malang, 09 Maret 2018
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG