

**ANALISIS KONSTRUKSI MODEL GERAK DAWAI PADA ALAT
MUSIK SASANDO**

SKRIPSI

**OLEH
DIAN NAN BRYLLIANT
NIM. 13610112**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018**

**ANALISIS KONSTRUKSI MODEL GERAK DAWAI PADA ALAT
MUSIK SASANDO**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
Dian Nan Brylliant
NIM. 13610112**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018**

**ANALISIS KONSTRUKSI MODEL GERAK DAWAI PADA ALAT
MUSIK SASANDO**

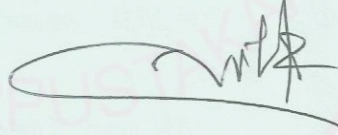
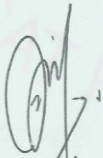
SKRIPSI

Oleh
Dian Nan Brylliant
NIM. 13610112

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 02 Oktober 2017

Pembimbing I,

Pembimbing II,



Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si
NIP. 19770521 200501 2 004

H. Wahyu H. Irawan, M.Pd
NIP. 19710420 2000 03 1 003

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 2003 12 1 001

**ANALISIS KONSTRUKSI MODEL GERAK DAWAI PADA ALAT
MUSIK SASANDO**

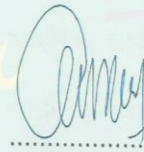
SKRIPSI

Oleh
Dian Nan Brylliant
NIM. 13610112

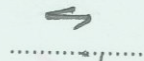
Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal 16 November 2017

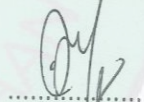
Penguji Utama : Mohammad Jamhuri, M.Si



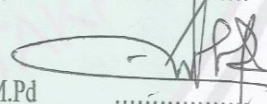
Ketua Penguji : Dr. Usman Pagalay, M.Si



Sekretaris Penguji : Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si



Anggota Penguji : H. Wahyu H. Irawan, M.Pd



Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 196504014 2003 12 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Dian Nan Brylliant

NIM : 13610112

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Analisis Konstruksi Model Gerak Dawai pada Alat Musik

Sasando

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan pengambilan data, tulisan atau pemikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan dan pemikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan saya sendiri.

Malang, 02 Oktober 2017
Yang membuat pernyataan,



Dian Nan Brylliant
NIM. 13610112

MOTO

إِنَّ اللَّهَ لَا يُغَيِّرُ مَا بِقَوْمٍ حَتَّىٰ يُغَيِّرُوا مَا بِأَنْفُسِهِمْ...-١١-

“Sesungguhnya Allah tidak merubah keadaan sesuatu kaum sehingga mereka merubah keadaan yang ada pada diri mereka sendiri”.

(QS. Ar-Ra'd/13:11)

“Ingatlah 3M

- Mulailah dari yang kecil
- Mulailah dari diri sendiri
- Mulailah dari sekarang”.

-Aa Gym-

KATA PENGANTAR

Assalamu 'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Alhamdulillah, puji syukur kepada Allah Swt. yang telah melimpahkan rahmat-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan skripsi yang berjudul “Analisis Konstruksi Model Gerak Dawai pada Alat Musik Sasando”. Shalawat serta salam selalu terlimpahkan kepada nabi Muhammad Saw. Yang telah menuntun manusia kejalan keselamatan.

Dalam kesempatan ini, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada semua pihak yang telah mendukung dan membantu secara langsung maupun tidak langsung dalam penyelesaian skripsi ini, yakni kepada:

1. Prof. Dr. Abdul Haris, M.Ag, selaku rector Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Ari Kusumastuti, M.Pd. ,M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasehat, dan pengalaman yang berharga kepada penulis.
5. H. Wahyu H. Irawan, M.Pd, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan pengalaman yang berharga kepada penulis.
6. Segenap civitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang,

terutama seluruh dosen, terima kasih untuk segenap ilmu dan bimbingan selama ini.

7. Ayahanda H. Bahruddin Hamzah dan Ibunda Hj. Nur'aini Abubakar yang selalu memberikan doa dan semangat dalam menyelesaikan skripsi ini.
8. Seluruh teman-teman “*Subset*” angkatan 2013 dan teman-teman “Wisma Seruni” yang selalu menemani di kala senang dan sedih dalam proses penyelesaian skripsi ini.
9. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik berupa moril maupun materil.

Semoga Allah Swt. melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat kepada para pembaca khususnya bagi penulis secara pribadi.

Wassalamu 'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Malang, Oktober 2017

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR TABEL	xiii
DAFTAR LAMPIRAN	xiv
DAFTAR SIMBOL	xv
ABSTRAK	xix
ABSTRACT	xx
ملخص	xxi
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	5
1.3 Tujuan Penelitian	5
1.4 Batasan Masalah	5
1.5 Manfaat Penelitian	6
1.6 Metode Penelitian	6
1.7 Sistematika Penulisan	7
BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Permodelan Matematika	9
2.2 Gerak Dawai pada Alat Musik Petik	11
2.3 Variabel, Parameter dan Energi yang Terlibat pada Masalah Gerak Dawai	13
2.3.1 Panjang Dawai	13
2.3.2 Massa Dawai dan Massa Jenis Dawai	13
2.3.3 Tegangan Dawai (<i>Stress</i>)	14
2.3.4 Regangan (<i>Strain</i>)	15

2.3.5	Modulus Elastisitas (<i>Modulus Young</i>)	17
2.3.6	Amplitudo	18
2.3.7	Cepat Rambat Gelombang	18
2.3.8	Energi Potensial	19
2.3.9	Energi Kinetik	20
2.4	Hukum-Hukum Fisika yang Terlibat pada Masalah Gerak Dawai .	22
2.4.1	Hukum Newton	22
2.4.2	Hukum Hooke	23
2.4.3	Hukum Stokes	24
2.5	Prinsip <i>Hamilton</i> dan Persamaan <i>Euler-Lagrange</i>	25
2.6	Kajian Keislaman tentang Gerak Dawai pada Alat Musik Sasando	26
 BAB III PEMBAHASAN		
3.1	Konstruksi Model Gerak Dawai pada Alat Musik Sasando	29
3.1.1	Identifikasi Masalah pada Dawai Penghasil Nada Dasar <i>do</i> Pada Alat Musik Sasando	29
3.1.2	Identifikasi Parameter, Variabel, dan Energi pada Dawai Sasando	34
3.1.3	Identifikasi Gaya-Gaya yang Bekerja pada Dawai Sasando	36
3.1.4	Membangun Asumsi	39
3.1.5	Identifikasi Energi Potensial dan Energi Kinetik pada Dawai Sasando	41
3.1.6	Menurunkan Persamaan <i>Lagrange</i>	57
3.2	Simulasi Model Gerak Dawai pada Alat Musik Sasando	61
3.3	Model Gerak Dawai pada Alat Musik Sasando dalam Islam	63
 BAB IV PENUTUP		
4.1	Kesimpulan	66
4.2	Saran	66
 DAFTAR RUJUKAN		67
LAMPIRAN-LAMPIRAN		68
RIWAYAT HIDUP		

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1	Alat Musik Sasando	1
Gambar 2.1	Model Gelombang Berdiri	11
Gambar 2.2	Pola Gelombang pada Alat Musik Petik yang Kedua Ujungnya Terikat	12
Gambar 2.3	Grafik Tegangan-Regangan	16
Gambar 3.1	Denah Alat Musik Sasando	29
Gambar 3.2	Dawai Penghasil Nada <i>do</i> pada Alat Musik Sasando	31
Gambar 3.3	Kondisi Dawai ketika Dipetik pada Posisi $\frac{1}{2}l$	31
Gambar 3.4	Partisi Gambar 3.3	32
Gambar 3.5	Kondisi Dawai setelah Dipetik	32
Gambar 3.6	Ilustrasi Gesekan antara Dawai dan Udara	33
Gambar 3.7	Tegangan pada Dawai Sasando	38
Gambar 3.8	Ilustrasi Gaya Gesek antara Dawai dan Udara	39
Gambar 3.9	Peregangan pada Dawai Sasando	41
Gambar 3.10	Peregangan di Sisi Kiri Dawai Sasando	43
Gambar 3.11	Peregangan di Sisi Kanan Dawai Sasando	44
Gambar 3.12	Grafik Simpangan Dawai Sasando $u(x, t)$	62
Gambar 3.13	Grafik Simpangan Dawai Sasando (x, u)	62

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Modulus Elastisitas dari Beberapa Material Dawai	18
Tabel 2.2 Kekentalan Zat Alir	25



DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. Solusi Model Gerak Dawai pada Alat Musik Sasando	68
Lampiran 2. Program Matlab untuk Simpangan Dawai Sasando $u(x, t)$	85
Lampiran 3. Program Matlab untuk Simpangan Dawai Sasando $u(x, t)$	91



DAFTAR SIMBOL

l	:	Panjang dawai Sasando.
A	:	Luas penampang dawai Sasando.
V	:	Volume dawai Sasando.
m	:	Massa dawai Sasando.
E	:	Modulus elastisitas dawai Sasando.
ρ	:	Massa jenis dawai Sasando.
c	:	Kecepatan elastisitas dawai Sasando.
k_p	:	Konstanta pegas.
k_b	:	Koefisien bentuk dawai Sasando.
k_d	:	Konstanta peredam.
η	:	Koefisien viskositas.
L	:	Persamaan <i>Lagrange</i> .
$u(x, t)$:	Simpangan yang bergantung pada keadaan x dan waktu t .
$\theta(x, t)$:	Sudut yang bergantung pada keadaan x dan waktu t .
v	:	Kecepatan dawai Sasando berosilasi, $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)$.
a	:	Percepatan dawai berosilasi, $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)$.
$\tan \theta$:	Koefisien garis singgung (kemiringan), $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$.
F_{pegas}	:	Gaya pegas pada dawai Sasando.
$F_{pegas\ kiri}$:	Gaya pegas di sisi kiri dawai Sasando.

$F_{Pegas\ Kanan}$:	Gaya pegas di sisi kanan dawai Sasando.
$F_{Tegangan}$:	Gaya tegangan pada dawai Sasando.
$F_{Tegangan\ kiri}$:	Gaya tegangan di sisi kiri dawai Sasando.
$F_{Tegangan\ Kanan}$:	Gaya tegangan di sisi kanan dawai Sasando.
F_{Gesek}	:	Gaya gesek pada dawai Sasando.
T	:	Tegangan pada dawai Sasando.
T^-	:	Tegangan di sisi kiri dawai Sasando.
T^+	:	Tegangan di sisi kanan dawai Sasando.
x_i^-	:	Panjang mula-mula dari sisi kiri dawai Sasando.
x_i^+	:	Panjang mula-mula dari sisi kanan dawai Sasando.
x_m	:	Panjang akhir dari sisi kiri dawai Sasando setelah dipetik.
x_n	:	Panjang akhir dari sisi kanan dawai Sasando setelah dipetik.
x	:	Pertambahan panjang pada dawai Sasando.
x^-	:	Pertambahan panjang di sisi kiri dawai Sasando.
x^+	:	Pertambahan panjang di sisi kanan dawai Sasando.
$x_{Setimbang}^-$:	Pertambahan panjang di sisi kiri dawai Sasando pada posisi setimbang.
$x_{Setimbang}^+$:	Pertambahan panjang di sisi kanan dawai Sasando pada posisi setimbang.
$x_{Setelah\ petikan}^-$:	Pertambahan panjang di sisi kiri dawai Sasando setelah petikan.

$x_{Setelah\ petikan}^+$:	Pertambahan panjang di sisi kanan dawai Sasando setelah petikan.
e	:	Peregangan pada dawai Sasando.
e^-	:	Peregangan di sisi kiri dawai Sasando.
e^+	:	Peregangan di sisi kanan dawai Sasando.
$e_{Setimbang}^-$:	Peregangan di sisi kiri dawai Sasando pada posisi setimbang.
$e_{Setimbang}^+$:	Peregangan di sisi kanan dawai Sasando pada posisi setimbang.
$e_{Setelah\ petikan}^-$:	Peregangan di sisi kiri dawai Sasando setelah petikan.
$e_{Setelah\ petikan}^+$:	Peregangan di sisi kanan dawai Sasando setelah petikan.
$u_{Setimbang}$:	Simpangan yang terbentuk pada dawai Sasando pada posisi setimbang.
$u_{Setelah\ petikan}$:	Simpangan yang terbentuk pada dawai Sasando setelah petikan.
E_p	:	Energi potensial pada dawai Sasando.
E_k	:	Energi kinetik pada dawai Sasando.
$E_{p_{Model}}$:	Energi potensial model pada dawai Sasando.
$E_{k_{Model}}$:	Energi kinetik model pada dawai Sasando.
$E_{p_{Pegas}}$:	Energi potensial pegas pada dawai Sasando.
$E_{p_{Pegas\ kiri}}$:	Energi potensial pegas di sisi kiri dawai Sasando.
$E_{p_{Pegas\ kanan}}$:	Energi potensial pegas di sisi kanan dawai Sasando.

- $E_{p_{Pegas\ kiri\ setimbang}}$: Perubahan energi potensial pegas di sisi kiri dawai Sasando pada posisi setimbang.
- $E_{p_{Pegas\ kanan\ setimbang}}$: Perubahan energi potensial pegas di sisi kanan dawai Sasando pada posisi setimbang.
- $E_{p_{Tegangan}}$: Energi potensial tegangan pada dawai Sasando.
- $E_{p_{Tegangan\ kiri}}$: Energi potensial tegangan di sisi kiri dawai Sasando.
- $E_{p_{Tegangan\ kanan}}$: Energi potensial tegangan di sisi kanan dawai Sasando.
- $E_{p_{Tegangan\ kiri\ setimbang}}$: Perubahan energi potensial tegangan di sisi kiri dawai Sasando pada posisi setimbang.
- $E_{p_{Tegangan\ kanan\ setimbang}}$: Perubahan energi potensial tegangan di sisi kanan dawai Sasando pada posisi setimbang.
- $E_{p_{Gesek}}$: Energi potensial gesek pada dawai Sasando.

ABSTRAK

Brylliant, Dian Nan. 2017. **Analisis Konstruksi Model Gerak Dawai pada Alat Musik Sasando**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si. (II) H. Wahyu H. Irawan, M.Pd.

Kata Kunci: Konstruksi, Model Matematika, Gerak Dawai, Sasando

Model matematika dalam penelitian ini merupakan suatu ukuran yang menggambarkan masalah gerak dawai pada alat musik Sasando yang ada dalam dunia nyata. Penelitian ini menfokuskan pada masalah analisis konstruksi model gerak dawai pada alat musik Sasando. Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui bentuk model matematika dari gerak dawai pada alat musik Sasando dan melakukan uji validasi model. Dengan mengidentifikasi masalah, variabel, parameter, energi, serta gaya-gaya yang bekerja pada dawai Sasando, peneliti dapat mengonstruksi suatu model matematika yang mewakili masalah gerak dawai pada alat musik Sasando kemudian melakukan uji validasi terhadap model yang telah dikonstruksi. Uji validasi model yang dilakukan adalah uji validasi tahap pertama yaitu melakukan simulasi dengan menggambarkan model matematika untuk masalah gerak dawai pada alat musik Sasando dengan bantuan aplikasi Matlab. Hasil yang diperoleh menunjukkan terjadi gerak osilasi selama dawai bergerak dan semakin lama menuju pada posisi setimbang dawai. Hal ini sesuai dengan keadaan riil dari gerak dawai pada alat musik Sasando dalam dunia nyata, sehingga model matematika yang telah dikonstruksi bersifat *reliable* untuk masalah gerak dawai pada alat musik Sasando. Namun hasil ini belum cukup untuk menunjukkan tingkat kevalidan model sehingga untuk penelitian selanjutnya dapat melakukan uji validasi pada langkah selanjutnya sehingga dapat diketahui sejauhmana tingkat kevalidan dari model matematika yang telah dikonstruksi.

ABSTRACT

Brylliant, Dian Nan. 2017. **Construction Analysis of The String Movement Model on Sasando Musical Instrument**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisor: (I) Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si. (II) H. Wahyu H. Irawan, M.Pd.

Keywords: Construction, Mathematics Model, String Movement, Sasando

The mathematical model in this research is a measure that describes the problem of string movements on Sasando instruments that exist in world. This research focuses on the problem of string movements model construction analysis on Sasando musical instrument. The purpose of this research is to know the form of mathematical model of string movements on Sasando musical instrument and to test the validation model. By identifying problems, the variables, parameters, energies, and forces acting on the Sasando strings, the researcher can construct a mathematical model that represents the strings on the Sasando musical instrument, then performs a validation test on the constructed model. The validation test of the model performed is the first stage, the first stage validation test that is simulated by describing the mathematical model for the string movement problem on Sasando instrument with Matlab. The result shows an oscillatory movement during the moving string and progressively toward the steady position of the string. The result obtained same with the real state of the strings on the Sasando musical instrument in the real, so the constructed mathematical model is reliable for movement problems on the Sasando musical instrument. But this result is not enough to show the level of validity and model, so for further research can do validation test in the next step to know the level of validity the mathematical model that has been constructed.

ملخص

بريليان، ديان نان. ٢٠١٧. تحليل البناء من نموذج الحركة الأسلاك على الآلات الموسيقية Sasando. البحث الجامعي. شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية بمالانج. المشرف الأول: آري كوسوماستوتي، الماجستير. المشرف الثاني: واهيو ه. إراوان، الحج، الماجستير.

الكلمات الرئيسية: البناء، النموذج الرياضي، الحركة الأسلاك، Sasando.

النموذج الرياضي في هذه البحث هو مقياس يصف مشكلة حركات السلسلة على أدوات Sasando الموجودة. ويركز هذا البحث على مشكلة تحليل بناء نموذج الدليل الموجي على آلة موسيقية Sasando. والغرض من هذا البحث هو معرفة شكل النموذج الرياضي للحركة سلسلة على الآلات الموسيقية Sasando واختبار التحقق من صحة النموذج. من خلال تحديد المشاكل والمتغيرات والمعلمات والطاقت والقوى التي تعمل على سلاسل Sasando ، يمكن للباحث بناء نموذج رياضي يمثل السلاسل على آلة موسيقية Sasando ثم ينفذ اختبار التحقق من صحة على النموذج الذي شيدت. اختبار التحقق من صحة النموذج الذي تم تنفيذه هو اختبار التحقق من المرحلة الأولى التي يتم محاكاتها من خلال وصف النموذج الرياضي لمشكلة الحركة السلسلة على أداة Sasando بمساعدة تطبيق Matlab. وتظهر النتيجة أن حركة متذبذبة خلال حبال تتحرك تدريجيا نحو موقف سلسلة الأسلاك. وهذا يتوافق مع الحالة الحقيقية للسلاسل على آلة موسيقية Sasando، بحيث النموذج الرياضي الذي شيدت هو موثوق بها لمشاكل الحركة على الآلات الموسيقية Sasando. ولكن هذه النتيجة ليست كافية لإظهار مستوى الصلاحية والنموذج بحيث لمزيد من البحث يمكن أن تفعل اختبار التحقق من الصحة في الخطوة التالية بحيث يمكن معرفة مدى صحة النموذج الرياضي الذي تم بناؤه.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Bangsa Indonesia memiliki beragam kebudayaan, suku dan bahasa yang tersebar diseluruh wilayah Nusantara. Salah satu bentuk kekayaan budaya yang dimiliki adalah alat musik. Dalam Pameran Keragaman Alat Musik Tradisional Nusantara 2016 di Semarang, terlihat salah satu alat musik tradisional yang terdaftar adalah Sasando.

Sasando merupakan salah satu alat musik tradisional yang berasal dari Pulau Rote Kabupaten Ndao Nusa Tenggara Timur.



Gambar 1.1 Alat Musik Sasando

Bunyinya yang khas dan indah membuat banyak orang, tidak hanya masyarakat lokal tetapi juga masyarakat mancanegara tertarik untuk mengkaji bagaimana alat musik ini mampu menciptakan alunan bunyi yang indah.

Allah Swt berfirman dalam QS. al-Isra/17:07 yaitu

إِنْ أَحْسَنْتُمْ أَحْسَنْتُمْ لِأَنْفُسِكُمْ وَإِنْ أَسَأْتُمْ فَلَهَا ... (٧)

Artinya: “Jika kamu berbuat baik (berarti) kamu berbuat baik bagi dirimu sendiri dan jika kamu berbuat jahat, maka (kejahatan) itu bagi dirimu sendiri, ...”(QS. al-Isra/17:07).

Ayat di atas menjelaskan bahwa jika seorang manusia berbuat kebaikan kepada orang lain maka sama halnya dengan berbuat baik untuk dirinya sendiri. Dan sebaliknya, jika seorang manusia berbuat kejahatan atau keburukan kepada orang lain maka sama halnya dengan berbuat kejahatan atau keburukan untuk dirinya sendiri. Sunnatullah yang termuat dalam QS. al-Isra/17:07 ini, analog dengan proses menciptakan alunan bunyi yang indah pada alat musik Sasando. Proses ini sangat bergantung pada gerak dawai pada alat musik Sasando. Jika dawai Sasando digerakkan dengan cara dipetik pada posisi yang tepat maka akan menghasilkan bunyi yang indah, dan sebaliknya jika dawai Sasando digerakkan dengan cara dipetik pada posisi yang tidak tepat maka bunyi yang dihasilkan menjadi kurang indah. Oleh karena itu, sebagai salah satu wujud aplikasi dengan merujuk pada QS. al-Isra/17:07 masalah gerak dawai pada alat musik Sasando menjadi peting untuk analisis secara lebih lanjut.

Masalah gerak dawai pada alat musik Sasando merupakan masalah yang sulit untuk dianalisis secara langsung. Oleh karena itu, diperlukan suatu upaya untuk memahami masalah tersebut, salah satunya adalah dengan membentuk suatu ukuran yang tepat yang dapat mewakili masalah tersebut pada keadaan riilnya. Dalam ilmu matematika, hal ini dikenal sebagai model matematika. Untuk kasus ini, model matematika merupakan representasi dari masalah gerak dawai pada alat musik Sasando ke dalam bahasa matematika. Artinya model matematika untuk masalah gerak dawai pada alat musik Sasando dipandang sebagai abstraksi dari masalah gerak dawai pada alat musik Sasando yang kompleks yang disajikan dalam bentuk bahasa matematika. Dengan memodelkan masalah gerak dawai pada alat musik Sasando, dapat diketahui bentuk gerak dawai pada alat musik

Sasando dalam persamaan matematika. Dengan begitu pemahaman mengenai masalah gerak dawai pada alat musik Sasando menjadi lebih sederhana dan lebih mudah untuk dianalisis lebih lanjut.

Penelitian ini difokuskan pada masalah konstruksi model matematika untuk gerak dawai pada alat musik Sasando. Dalam penelitian ini pendekatan permodelan matematika yang digunakan adalah pendekatan secara teoritik yaitu dengan memperhatikan hukum-hukum fisika yang terlibat dalam masalah gerak dawai pada alat musik Sasando seperti hukum Hooke dan hukum-hukum Newton. Kemudian juga melibatkan energi potensial (E_p) dan energi kinetik (E_k) pada dawai Sasando. Serta variabel dan parameter yang terkait seperti panjang dawai (l), massa jenis dawai (ρ) yang didefinisikan sebagai massa (m) per satuan panjang dawai (l), modulus elastisitas dawai (E), besar simpangan (u) yang terbentuk akibat petikan, serta cepat rambat gelombang (v) yang terjadi pada dawai Sasando. Dan asumsi yang digunakan adalah asumsi-asumsi untuk membangun persamaan gelombang karena gerak dawai yang terjadi pada alat musik Sasando adalah berupa gelombang berdiri disepanjang dawai Sasando.

Selanjutnya konstruksi model matematika untuk masalah gerak dawai pada alat musik Sasando dimulai dari (1) mengidentifikasi masalah dawai dan gerak dawai pada alat musik Sasando berdasarkan keadaan riilnya. (2) Secara spesifik mengidentifikasi masalah terkait besaran, lambang dan satuan, parameter dan variabel, serta gaya-gaya yang bekerja. (3) Membangun asumsi, yaitu merinci semua hasil identifikasi masalah dengan memperhatikan kemungkinan-kemungkinan serta akibat yang mungkin terjadi berdasarkan kondisi fisis dawai. Kemudian (4) konstruksi model, dilakukan dengan memanfaatkan persamaan

Lagrange untuk mendapatkan model matematika. Dan (5) melakukan simulasi model, yaitu menggambarkan model matematika yang diperoleh dengan bantuan *software* Matlab atau Maple.

Agus Purwanto (2006), pernah melakukan penelitian mengenai analisis dan sintesa sinyal suara yang dihasilkan dari alat musik gitar semi-akustik. Dalam penelitian tersebut dawai gitar dipetik kemudian suara yang dihasilkan direkam dengan menggunakan program *SOUND FORGE*. Data suara hasil perekaman tersebut kemudian dianalisis dengan *FFT* untuk memperoleh spektrum sinyal suara, dan komponen-komponen penyusun sinyal suara, seperti frekuensi fundamental, frekuensi harmonik, amplitudo, dan rasio amplitudo. Kemudian dilakukan konstruksi sinyal suara berdasarkan komponen-komponen yang telah diperoleh. Dan hasilnya menunjukkan bahwa dengan menambahkan faktor peredam pada model sinyal suara yang digunakan diperoleh suara yang hampir sama dengan suara asli dari petikan gitar. Sedangkan untuk penelitian ini dilakukan karena belum ditemukan penelitian sebelumnya yang melakukan konstruksi model matematika untuk masalah gerak dawai pada alat musik Sasando. Manfaat yang dapat diperoleh adalah selain dapat mengetahui model dari gerak dawai pada alat musik Sasando, dapat juga digunakan sebagai bahan pertimbangan dalam merancang dawai untuk alat musik Sasando. Selain itu, model matematika yang diperoleh dapat digunakan untuk memprediksi ketepatan posisi pemetikan dawai sehingga dapat menghasilkan nada tanpa *noise* dan juga dapat digunakan untuk memprediksi besar simpangan maksimal yang diberikan ketika menggerakkan dawai Sasando, sehingga dapat mencegah dawai Sasando agar tidak putus di tengah permainan.

Berdasarkan uraian di atas, maka penelitian ini mengangkat tema *Analisis Konstruksi Model Gerak Dawai pada Alat Musik Sasando* sebagai judul dalam penelitian ini.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana mengkonstruksi model gerak dawai pada alat musik Sasando?
2. Bagaimana simulasi model gerak dawai pada alat musik Sasando?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan perumusan masalah di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Untuk mengetahui konstruksi model gerak dawai pada alat musik Sasando.
2. Untuk mengetahui simulasi model gerak dawai pada alat musik Sasando.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah dapat menambah wawasan keilmuan, khususnya dalam pengetahuan tentang bagaimana mengkonstruksi model gerak dawai pada alat musik Sasando. Selain itu juga model matematika yang dihasilkan dapat dijadikan sebagai bahan literatur dalam pengembangan keilmuan yang berkaitan dengan analisis model gerak dawai pada alat musik Sasando atau sejenisnya.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Model yang dikonstruksi adalah model matematika khusus untuk masalah gerak dawai pada alat musik Sasando.
2. Alat musik Sasando yang digunakan merupakan Sasando jenis modern yaitu Sasando jenis biola dengan jumlah dawai sebanyak 32 dan jenis dawai yang digunakan adalah dawai yang biasa digunakan pada gitar akustik jenis klasik yang berbahan nilon.
3. Konstruksi model matematika untuk masalah gerak dawai pada alat musik Sasando adalah menggunakan dawai penghasil nada *do* yang dipetik pada posisi tengah-tengah dawai.

1.6 Metode Penelitian

Dalam melakukan penelitian ini, penelitian menggunakan metode studi literatur dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Mengonstruksi model gerak dawai pada alat musik Sasando, dilakukan dengan:
 - a. Identifikasi masalah gerak dawai penghasil nada *do* pada alat musik Sasando.
 - b. Identifikasi masalah terkait variabel, parameter dan energi pada dawai Sasando.
 - c. Identifikasi masalah gaya-gaya yang bekerja pada dawai Sasando.
 - d. Membangun asumsi.

- e. Mengidentifikasi energi potensial (E_p) dan energi kinetik (E_k) pada dawai Sasando.
 - f. Membentuk persamaan *Lagrange* dari energi potensial (E_p) dan energi kinetik (E_k) pada dawai Sasando.
 - g. Menurunkan persamaan *Lagrange* terhadap $x, t, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}$ untuk mendapat model matematika.
2. Simulasi model gerak dawai pada alat musik Sasando dilakukan dengan menggambarkan model matematika yang diperoleh dengan bantuan Matlab.

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam penelitian ini terdiri dari empat bagian, yaitu:

Bab I Pendahuluan

Bab ini memuat latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, metode penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bab ini menyajikan kajian-kajian kepustakaan yang menjadi landasan dan dasar teori dalam pembahasan terkait mengonstruksi model gerak dawai pada alat musik Sasando serta kajian keagamaan mengenai gerak dawai pada alat musik Sasando.

Bab III Pembahasan

Bab ini menguraikan kaidah mengonstruksi model matematika untuk masalah gerak dawai alat musik Sasando dan simulasi dari model

matematika yang diperoleh serta kajian keislaman mengenai model matematika untuk masalah gerak dawai alat musik Sasando.

Bab IV Penutup

Bab ini berisi kesimpulan dari hasil penelitian yang dilakukan dan saran terkait penelitian selanjutnya.



BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Pemodelan Matematika

Pemodelan matematika merupakan bidang matematika yang berusaha memformulasikan, memproses dan menampilkan kembali persepsi yang ada dalam dunia nyata ke dalam suatu model matematika (Pagalay, 2009). Menurut Pagalay (2009), model matematika yang diperoleh dari suatu masalah dalam dunia nyata harus bersifat *reliable* artinya dapat mewakili keadaan riilnya dalam dunia nyata, sehingga model matematika yang diperoleh dapat diyakini kebenarannya. Dengan demikian, Pagalay (2009) menjelaskan langkah-langkah dalam mengonstruksi suatu model matematika sebagai berikut:

1. Mengidentifikasi masalah

Mengidentifikasi masalah merupakan tahapan awal dalam membangun suatu model matematika. Tahapan ini merupakan tahapan mengenali masalah, yang dimulai dengan menjabarkan kondisi riil dari masalah tersebut. Selanjutnya melakukan identifikasi terhadap variabel, parameter, dan energi-energi yang terlibat serta melakukan identifikasi terhadap gaya-gaya yang bekerja.

2. Membangun asumsi

Setelah mengenali masalah dengan mengidentifikasi aspek-aspek penting terkait variabel dan parameter, energi-energi yang terlibat maupun gaya-gaya yang bekerja, tahapan selanjutnya adalah membangun asumsi. Hasil dari mengidentifikasi masalah tersebut kemudian dirinci dengan memperhatikan

kemungkinan-kemungkinan dan akibat yang mungkin terjadi berdasarkan kondisi riil dari masalah tersebut.

3. Manipulasi matematik

Tahapan manipulasi matematika tidak lain adalah tahapan membangun atau mengonstruksi model itu sendiri. Kontruksi model dilakukan dengan menganalisis kemudian menentukan hubungan matematis antara variabel dan parameter, energi-energi yang terlibat maupun gaya-gaya yang bekerja. Dalam proses menganalisis dan menentukan hubungan matematis ini dilakukan dengan memanfaatkan hukum-hukum fisika yang sudah ada, seperti hukum Hooke yang berkaitan dengan elastisitas dan hukum-hukum Newton yang berkaitan dengan dinamika gerak.

4. Validasi Model

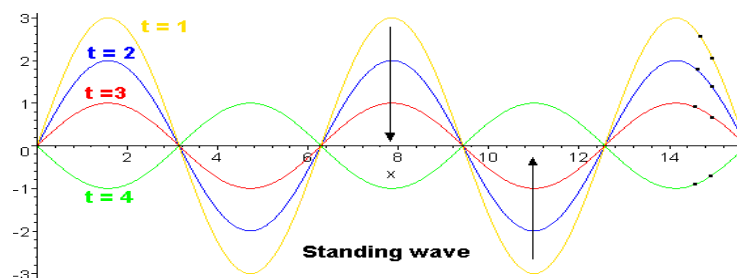
Tahapan validasi model merupakan tahap penguatan model yang telah dirancang. Apakah model yang diperoleh sudah valid ataukah belum. Tahapan validasi model ini meliputi tiga tahapan. Tahapan pertama simulasi model, menggambarkan model matematika yang telah diperoleh dengan tujuan melihat perilaku dari model matematika yang telah diperoleh tersebut. Tahapan kedua simulasi masalah yang dimodelkan, menggambarkan perilaku dari masalah yang dimodelkan dalam dunia nyata dengan memanfaatkan *hard system* seperti komputer atau alat bantu lainnya. Tahapan ketiga adalah verifikasi, membandingkan perilaku dari model yang diperoleh dan perilaku dari masalah yang dimodelkan dengan tujuan melihat apakah perilaku model mendekati kesesuaian atau bersesuaian dengan perilaku dari masalah yang dimodelkan. Jika perilaku model mendekati keesuaian atau bersesuaian dengan perilaku dari masalah

yang dimodelkan maka model dapat dikatakan valid, dan jika belum maka model harus dikonstruksi ulang.

2.2 Gerak Dawai pada Alat Musik Petik

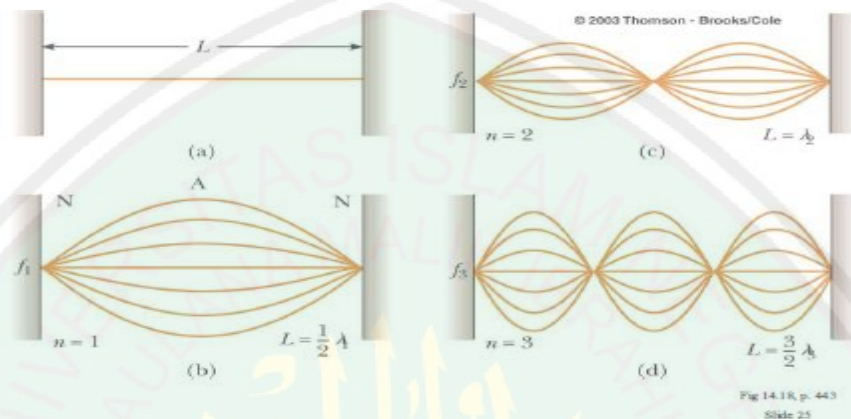
Menurut Kamus Besar Bahasa Indonesia (KBBI), dawai adalah kawat yang memiliki bentuk yang halus. Dalam dunia alat musik petik seperti Sasando, dawai memiliki peranan yang sangat penting, yaitu sebagai sumber bunyi. Proses menggerakkan dawai pada alat musik petik pun, tentunya dilakukan dengan cara dipetik. Ketika dawai dipetik, terjadi vibrasi yang merambat disepanjang dawai sehingga terciptalah gelombang bunyi. Gelombang bunyi yang dihasilkan dari petikan pada dawai ini merupakan gelombang berdiri atau lebih sering dikenal sebagai gelombang stasioner. Gelombang-gelombang tersebut tercipta akibat adanya gabungan atau superposisi yang berkelanjutan dari gelombang datang dan gelombang pantul dari ujung-ujung dawai (Serwey dan Jewett, 2009).

Dalam gelombang berdiri, semua elemen ruang (yaitu (x, y, z) koordinat) beresilasi pada frekuensi yang sama dan pada fase (mencapai titik ekuilibrium) bersama-sama, tetapi masing-masing memiliki amplitudo yang berbeda (Serwey dan Jewett, 2009). Model gelombang berdiri dapat dilihat pada Gambar 2.1 berikut



Gambar 2.1 Model Gelombang Berdiri
(Sumber: Giambattista, dkk., 2007)

Seperti yang diketahui, dawai pada alat musik petik adalah dawai yang kedua ujungnya terikat pada dua pengait yang berbeda. Serwey dan Jewett (2009) menjelaskan ketika dawai yang kedua ujungnya terikat diberikan perlakuan berupa petikan, terjadilah pola-pola gelombang seperti pada Gambar 2.2 berikut



Gambar 2.2 Pola Gelombang pada Alat Musik Petik yang Kedua Ujungnya Terikat
(Sumber: Serwey dan Jewett, 2009)

Pada Gambar 2.2 (a), menunjukkan gelombang berdiri pada dawai dengan panjang dawai l dan ($n = 0$). Gambar 2.2 (b), menunjukkan pola setengah artinya panjang dawai menjadi $l = 1/2\lambda$ dengan frekuensi alaminya membentuk deret harmoni ke satu atau frekuensi nada dasar ($n = 1$). Pola ini dihasilkan ketika dawai dipetik pada posisi tengah-tengah atau $1/2l$ dari panjang dawai l . Pada pola ini terbentuk 2 simpul dan 1 perut.

Pada Gambar 2.2 (c), terdapat 3 simpul dan 2 perut artinya membentuk satu gelombang (satu gunung dan satu lembah). Pola ini dinamakan nada atas pertama dengan frekuensi nada atas atau harmonik kedua ($n = 2$). Pola nada atas pertama dihasilkan ketika dawai dipetik pada posisi $1/4l$ dari panjang dawai l . Pada pola ini panjang dawai menjadi sama dengan panjang gelombang $l = \lambda$.

Pada Gambar 2.2 (d), pola gelombang yang terbentuk dinamakan frekuensi nada atas kedua atau harmonik ketiga ($n = 3$) yang dihasilkan ketika

dawai dipetik pada posisi $1/6l$ dari panjang dawai l . Pada pola ini terbentuk 3 perut dan 4 simpul dan panjang dawai menjadi $l = 3/2\lambda$.

2.3 Variabel, Parameter dan Energi yang Terlibat pada Masalah Gerak

Dawai

Dalam menganalisis masalah gerak dawai pada alat musik Sasando, terdapat variabel, parameter dan energi-energi penting yang terlibat, diantaranya adalah:

2.3.1 Panjang Dawai

Panjang dawai adalah besarnya jarak antara dua buah ujung dawai. Panjang biasa disimbolkan dengan (l) dan memiliki satuan berdasarkan standar SI adalah meter (m) (Serwey dan Jewett, 2009).

2.3.2 Massa Dawai dan Massa Jenis Dawai

Massa dawai merupakan suatu sifat dawai yang menggambarkan kekuatan atau daya tahan dawai untuk menolak terjadinya suatu perubahan dalam setiap kecepatannya. Artinya semakin besar massa dawai maka semakin kecil percepatan dawai jika diberikan suatu gaya. Massa dawai bersifat intrinsik artinya tidak dipengaruhi oleh lingkungan ataupun metode yang digunakan untuk mengukurnya. Serwey dan Jewett (2009) menyatakan massa (m) sebagai sebuah besaran skalar yang memiliki satuan berdasarkan standar SI adalah kilogram (kg). Dan massa jenis (ρ) didefinisikan sebagai massa per satuan volume. Secara matematis dituliskan sebagai berikut

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (2.1)$$

dengan

ρ : Massa jenis ($\frac{kg}{m^3}$)

m : Massa (kg)

V : Volume (m^3)

2.3.3 Tegangan Dawai (*Stress*)

Tegangan adalah reaksi yang timbul diseluruh bagian spesimen sepanjang dawai dalam rangka menahan gaya tarik yang diberikan dengan besar yang sebanding dengan gaya tersebut. Satuan gaya yang dihasilkan karena adanya tegangan yang terjadi pada dawai didefinisikan sebagai perkalian antara luas penampang dawai dengan besar tegangan yang terjadi. Sehingga tegangan dijabarkan sebagai satuan gaya dibagi dengan luas penampang dawai. Dalam standar SI, gaya diukur dalam Newton (N), luas penampang diukur dalam satuan meter kuadrat (m^2) dan tegangan yang biasa dinotasikan dengan (T) diukur dalam satuan (N/m^2) yang setara dengan 1 Pascal (Pa). Secara matematika konsep tegangan (*stress*) dituliskan sebagai berikut

$$T = \frac{F}{A} \quad (2.2)$$

dengan

F : Satuan gaya (N)

A : Luas penampang (m^2)

T : Tegangan/*Stress* (N/m^2)

(Kanginan, 2006).

2.3.4 Regangan (*Strain*)

Yang dimaksud dengan regangan adalah perubahan panjang dawai sebagai efek dari adanya pergeseran internal pada setiap titik-titik disepanjang dawai. Regangan biasa dinotasikan dengan (e). Dalam ilmu fisika, regangan didefinisikan sebagai hasil bagi antara pertambahan panjang (Δl) dengan panjang awalnya (l_0). Secara matematis konsep regangan (*Strain*) dinyatakan sebagai berikut

$$e = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (2.3)$$

dengan

Δl : Pertambahan panjang dawai (m)

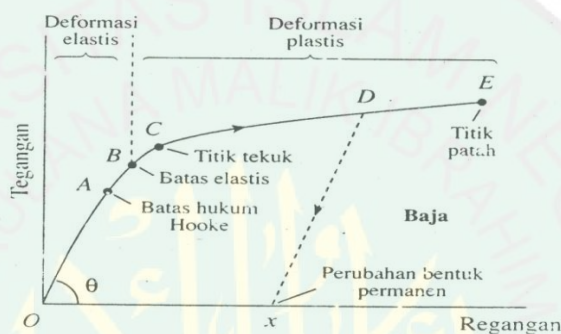
l_0 : Panjang mula-mula (m)

e : Regangan/*Strain*.

(Kanginan, 2006).

Ketika dawai diberikan suatu gaya, maka kondisi dawai secara otomatis akan menegang dan meregang. Kedua hal ini merupakan satu kesatuan yang tidak dapat dipisahkan. Hubungan antara keduanya dalam cabang fisika disebut dengan *teori elastisitas*. Tingkat keelastisan pada dawai terbatas pada suatu besar gaya tertentu, yang dinamakan batas elastisitas. Jika gaya yang diberikan pada dawai lebih kecil dari pada batas elastisitasnya, maka ketika gaya dihilangkan, dawai akan kembali ke bentuk semula. Tetapi, jika gaya yang diberikan melampaui batas elastisitas, maka ketika gaya dihilangkan, dawai tidak akan kembali ke bentuk semula melainkan secara permanen berubah bentuk (Kanginan, 2006).

Hubungan tegangan dan regangan dapat digambarkan dalam suatu grafik. Grafik tegangan-regangan menggambarkan sifat dan karakteristik dari masing-masing material dawai, sehingga setiap grafik tegangan-regangan dari dawai berbeda-beda bergantung pada material penyusun dawai (Kanginan, 2006). Berikut salah satu contoh grafik tegangan-regangan pada dawai dengan material baja.



Gambar 2.3 Grafik Tegangan-Rengggangan
(Sumber: Kanginan, 2006)

Grafik tegangan-regangan pada Gambar 2.3 di atas, menunjukkan variasi dari tegangan terhadap regangan pada seutas dawai dengan material baja saat dikenai suatu gaya. Kanginan (2006) menjelaskan, dari titik O ke B adalah daerah deformasi dawai yang bersifat elastik. Artinya jika tegangan dihilangkan, maka dawai akan dapat kembali ke bentuk semula. Titik B adalah batas elastis dawai, di atas titik tersebut merupakan daerah deformasi dawai yang bersifat plastis. Artinya jika tegangan dihilangkan dalam daerah deformasi plastis, misalnya pada titik D , maka dawai tidak akan kembali ke bentuk semula, melainkan mengalami deformasi permanen.

Selanjutnya dijelaskan titik C adalah titik tekuk (*yield point*), di mana jika pada titik ini diberikan tambahan tekanan walaupun kecil tetap akan menghasilkan

pertambahan panjang yang besar. Dan titik E adalah titik patah, di mana jika tegangan yang kita berikan mencapai titik E , maka dawai akan patah.

2.3.5 Modulus Elastisitas (*Modulus Young*)

Modulus elastisitas adalah suatu besaran yang menggambarkan tingkat elastisitas dari material penyusun dawai. Modulus elastisitas disebut juga *Modulus Young*. Jika diperhatikan kembali Gambar 2.3 pada daerah OA , yaitu daerah di mana grafik tegangan-regangan berbentuk garis lurus. Hal ini berarti hubungan antara tegangan dengan regangan ditunjukkan oleh kemiringan garis OA yang biasa didefinisikan sebagai $\tan \theta$ adalah konstan. Konstanta inilah yang disebut *Modulus elastis*. Oleh karena itu, modulus elastisitas juga didefinisikan sebagai perbandingan tegangan (*Stress*) dengan regangan (*Strain*). Yang berarti semakin besar modulus elastik, semakin besar pula tegangan yang diperlukan untuk suatu regangan tertentu. Secara matematis konsep modulus elastisitas dituliskan sebagai berikut

$$E = \frac{T}{e} \quad (2.4)$$

dengan

E : Modulus elastis (N/m^2)

T : Tegangan/ *Stress* (N/m^2)

e : Regangan/*Strain*

(Kanginan, 2006).

Berikut modulus elastisitas dari beberapa material dawai.

Tabel 2.1 Modulus Elastis dari Beberapa Material

Material	Modulus Elastis (E) (N/m^2)
Besi	100×10^9
Baja	200×10^9
Perunggu	100×10^9
Aluminium	70×10^9
Beton	20×10^9
Batu bara	14×10^9
Marmar	50×10^9
Granit	45×10^9
Kayu (Pinus)	10×10^9
Nilon	5×10^9
Tulang Muda	15×10^9

(Sumber: Kanginan, 2006)

2.3.6 Amplitudo

Amplitudo merupakan simpangan terjauh dari titik kesetimbangan. Pada alat musik dawai, gelombang yang tercipta ketika dawai dipetik adalah gelombang stasioner dengan amplitudo yang berubah-ubah. Titik amplitudo yang maksimum disebut perut dan titik-titik yang amplitudonya sama dengan nol disebut simpul (Serwey dan Jewett, 2009).

2.3.7 Cepat Rambat Gelombang

Cepat rambat gelombang merupakan jarak yang ditempuh oleh gelombang per satuan waktu. Pada dawai sendiri, cepat rambat gelombang bergantung pada tegangan dan massa jenis linier pada dawai. Semakin besar tegangan pada dawai, maka semakin besar cepat rambat gelombang pada dawai, dan semakin besar massa jenis linier dawai maka semakin kecil cepat rambat gelombangnya. Hal ini sesuai dengan hukum Melde yang menyatakan bahwa:

Cepat rambat gelombang transversal dalam dawai adalah sebanding dengan akar kuadrat gaya tegangan (F) dawai dan berbanding terbalik dengan akar kuadrat massa per panjang dawai (μ).

Secara matematis dapat dituliskan sebagai berikut:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad (2.5)$$

dengan

v : Cepat rambat gelombang pada dawai (m/s)

F : Gaya tegangan dawai (N)

μ : Massa per satuan panjang dawai

(Kanginan, 2006).

Cepat rambat gelombang untuk dawai yang elastis linier didefinisikan sebagai

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2.6)$$

dengan

c : Cepat rambat gelombang pada dawai elastis linier (m/s)

E : Modulus elastisitas dawai (N/m^2)

ρ : Massa jenis linier dawai (m/V)

2.3.8 Energi Potensial

Sebagaimana yang diketahui dalam kajian ilmu fisika, konsep usaha yang dilakukan oleh suatu gaya yang konstan (F) didefinisikan sebagai $W = F \Delta x$. Sedangkan untuk kasus gaya konservatif yaitu gaya yang berubah-ubah, besar usaha (W) yang dilakukan adalah

$$W = \int_{x_i}^{x_j} F(x) dx \quad (2.7)$$

Dengan catatan kerja yang dilakukan oleh gaya konservatif hanya bergantung pada titik awal perpindahan dan titik akhir setelah perpindahan dan tidak bergantung pada cara partikel melakukan perpindahan dari titik awal ke titik

akhir. Akibatnya besar usaha yang dilakukan untuk setiap jalus atau lintasan perpindahan akan sama (Halliday, dkk., 2010).

Selama partikel melakukan perpindahan terjadi perubahan energi potensial (ΔE_p) dalam sistem yang berlawanan arah dengan usaha yang dilakukan. Sehingga perubahan energi potensial yang terjadi dalam sistem selama perpindahan didefinisikan sebagai pengurangan atau minus dari besar usaha yang dilakukan

$$\Delta E_p = -W \quad (2.8)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.8) ke dalam (2.9) maka diperoleh bentuk umum dari perubahan energi potensial sebagai berikut

$$\Delta E_p = - \int_{x_i}^{x_j} F(x) dx \quad (2.9)$$

Energi potensial memiliki satuan (*Joule*) atau setara dengan ($kg \ m^2/s^2$) (Halliday, dkk., 2010).

2.3.9 Energi Kinetik

Energi kinetik dari sebuah benda merupakan energi yang terkait dengan keadaan gerak dari benda tersebut yang dinyatakan sebagai selisih dari energi total benda jika diukur dari sebarang kerangka acuan (E) dengan energi benda jika diukur dari kerangka diamnya (E_0) (Rosyid, 2015). Berdasarkan teori relativitas khusus Einstein, energi total dari sebuah benda bermassa m dengan satuan (kg) jika diukur dari sebarang kerangka acuan adalah

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.10)$$

dengan

E : Energi total kinetik ($kg\ m^2/s^2$) atau (*Joule*)

m : Massa benda (kg)

c : Kecepatan cahaya dalam ruang hampa ($299.792.458\ m/s$)

v : Kecepatan benda bergerak (m/s)

Dan jika energi tersebut diukur dari kerangka diamnya, maka besar energi tersebut adalah

$$E_0 = mc^2 \quad (2.11)$$

Dengan demikian energi kinetik dari benda tersebut adalah

$$\begin{aligned} Ek &= E - E_0 \\ &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 \\ &= c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Pada persamaan (2.13), suku yang berada di dalam kurung dapat diekspansi menggunakan deret Taylor, sebagai berikut

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 = \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots \right) - 1 = \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots$$

Sehingga energi kinetik benda tersebut menjadi

$$\begin{aligned} Ek &= mc^2 \left(\frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{2} mv^2 + \dots \end{aligned}$$

Karena kecepatan benda sangatlah kecil jika dibandingkan dengan cepat rambat cahaya dalam ruang hampa, maka energi kinetik dari benda tersebut cukup dituliskan sebagai

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \quad (3.13)$$

Satuan internasional energi kinetik adalah (*Joule*) atau ($kg\ m^2/s^2$) (Halliday, dkk., 2010).

2.4 Hukum-Hukum Fisika yang Terlibat pada Masalah Gerak Dawai

2.4.1 Hukum Newton

Seperti yang diketahui bahwa Newton mencetuskan tiga hukum Newton yang berkaitan dengan dinamika gerak, yaitu:

1. Hukum I Newton

Hukum I Newton menyatakan bahwa jika tidak ada gaya eksternal, maka sebuah benda yang berada dalam keadaan diam akan tetap diam dan benda yang bergerak akan terus bergerak dengan percepatan tetap (yaitu dengan kelajuan tetap sepanjang garis lurus). Giancoli (2001) menjelaskan bahwa, hukum I Newton tentang gerak dikenal juga sebagai hukum inersia. Karena dalam pengamatannya menggunakan kerangka acuan inersia, yaitu suatu kerangka acuan di mana benda memiliki percepatan nol.

2. Hukum II Newton

Hukum II Newton menyatakan bahwa percepatan sebuah benda berbanding lurus dengan gaya *netto* yang bekerja padanya dan berbanding terbalik dengan massanya. Secara matematis Dengan demikian dapat kita hubungkan

massa, percepatan, dan gaya melalui rumusan matematika dari hukum II Newton adalah:

$$\sum F = m \cdot a \quad (2.14)$$

Rumusan matematika dari hukum II Newton di atas, menunjukkan bahwa percepatan disebabkan oleh gaya *netto* ($\sum F$) yang bekerja pada benda. Gaya *netto* yang bekerja pada benda adalah jumlah vektor dari semua gaya yang bekerja pada benda tersebut (Giancoli, 2001).

3. Hukum III Newton

Hukum III Newton tentang gerak mengatakan bahwa jika sebuah benda A melakukan gaya pada benda B, maka benda B juga akan melakukan gaya pada benda A yang besarnya sama namun arahnya berlawanan dengan arah gaya benda A. Giancoli (2001) menyebutkan bahwa, pernyataan hukum III Newton di atas, dapat dinyatakan juga sebagai “untuk setiap aksi selalu ada reaksi yang sama dan berlawanan arah”.

$$F_{aksi} = -F_{reaksi} \quad (2.15)$$

Tanda minus menyatakan gaya reaksi memiliki arah yang berlawanan dengan gaya aksinya. Dengan catatan bahwa setiap gaya aksi dan gaya reaksi bekerja pada benda yang berbeda.

2.4.2 Hukum Hooke

Bueche dan Hecht (2006) menjelaskan bahwa, hukum Hooke berlaku pada suatu gaya pegas yang bekerja untuk memulihkan pegas ke keadaan relaks. Secara umum, gaya dari suatu pegas (F_s) sebanding dengan perpindahan (d) ujung bebas pegas dari posisinya (ketika pegas dalam keadaan relaks) atau dapat dinyatakan sebagai berikut

$$F_s = -kx \quad (2.16)$$

dengan

F_s : Gaya pegas dawai (N) atau ($kg\ m/s^2$)

k : Konstanta pegas atau ukuran kekakuan pegas (N/m)

x : Pertambahan panjang dawai (m)

Tanda minus pada persamaan (2.13) mengindikasikan bahwa gaya pemulih selalu berlawanan arah dengan perpindahan (Holliday, dkk., 2010).

Menurut Holliday, dkk. (2006), konstanta pegas yang merupakan ukuran kekakuan dari dawai tersebut dapat dicari dengan menggunakan rumus sebagai berikut

$$k = \frac{EA}{l} \quad (2.17)$$

dengan

k : Konstanta pegas dawai (N/m)

E : Modulus elastisitas dawai (N/m^2)

A : Luas penampang dawai (m^2)

l : Panjang dawai (m)

2.4.2 Hukum Stokes

Rosyid (2015) menjelaskan bahwa, hukum Stokes berlaku ketika pada suatu benda bekerja suatu gaya yang timbul akibat adanya gesekan yang terjadi antara benda tersebut dengan fluida. Besar gaya Stokes dinyatakan sebagai

$$F_s = k\eta v \quad (2.18)$$

dengan

F_s : Gaya gesek antara fluida dengan benda (N) atau ($kg\ m/s^2$)

k : Konstanta yang mewakili bentuk benda (m)

η : Kekentalan (viskositas) dinamis zat alir (Ns/m^2)

v : Kecepatan relatif benda terhadap zat alir (m/s)

Selanjutnya dijelaskan, jika suatu benda bergerak dalam suatu zat alir atau fluida, maka benda tersebut akan mengalami gaya hambat oleh zat alir tersebut. Terdapat dua kemungkinan jenis gaya hambat oleh zat alir, yaitu: pertama, gaya gesekan karena zat alir yang kental (*viscous*) dengan permukaan benda. Kedua, gaya pengereman (*drag force*) oleh zat alir.

Daftar kekentalan dari beberapa zat alir dapat dilihat pada Tabel 2.2 berikut

Tabel 2.2 Kekentalan Zat Alir

No.	Bahan	Kekentalan Dinamik (Ns/m^2)
1.	Air	0,010
2.	Udara	0,000018
3.	Alkohol	0,018
4.	Gliserin	8,5
5.	Air Raksa	0,0156

(Sumber: Arifudin, 2007)

2.5 Prinsip *Hamilton* dan Persamaan *Euler-Lagrange*

Prinsip *Hamilton* untuk benda relativistik mendefinisikan persamaan *Lagrange* sebagai selisih antara energi kinetik (E_k) dengan energi potensial (E_p) seperti persamaan berikut

$$L \equiv EK - EP \quad (2.19)$$

Jika sistem yang digunakan dalam pengamatan adalah $u(x, t)$, yang menyatakan suatu fungsi posisi yang bergantung pada keadaan x dan waktu t maka bentuk umum fungsi *Lagrange*-nya adalah:

$$L \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, t), \frac{\partial u}{\partial x}(x, t), u(x, t), x, t \right) \quad (2.20)$$

Dan persamaan gerak-nya adalah:

$$S = \int_{t_0}^{t_f} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx L \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, t), \frac{\partial u}{\partial x}(x, t), u(x, t), x, t \right) \quad (2.21)$$

Persamaan gerak untuk fungsi *Lagrange* pada suatu sistem yang bergerak disebut juga sebagai persamaan *Euler-Lagrange* (Arfken dan Hans, 2005). Persamaan *Euler-Lagrange* untuk sistem ini dituliskan sebagai berikut

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)} \right) = \frac{\partial L}{\partial u} \quad (2.22)$$

2.6 Kajian Keislaman untuk Masalah Gerak Dawai pada Alat Musik

Sasando

Secara fisis, bunyi yang dihasilkan oleh alat musik Sasando tercipta karena adanya gerak yang terjadi pada dawai Sasando. Proses menggerakkan dawai pada alat musik Sasando dilakukan dengan cara dipetik. Jika dawai Sasando dipetik pada posisi yang tepat maka akan menghasilkan bunyi yang indah. Dan sebaliknya jika petikan diberikan pada posisi yang tidak tepat maka bunyi yang dihasilkan menjadi kurang indah.

Gambaran proses penciptaan alunan bunyi yang indah pada alat musik Sasando beserta hasil yang diperoleh di atas, merupakan salah satu contoh fenomena dalam dunia nyata yang merefleksikan kehidupan manusia yang berjalan berdasarkan sunnatullah yang telah ditetapkan oleh Allah Swt. bahwasanya segala macam bentuk perbuatan, baik itu perbuatan baik maupun perbuatan buruk yang dilakukan hasilnya akan kembali kepada diri sendiri. Sebagaimana firman Allah Swt. dalam QS. al-Zalzalah/99:7-8 berikut

فَمَنْ يَعْمَلْ مِثْقَالَ ذَرَّةٍ خَيْرًا يَرَهُ. (٧) وَمَنْ يَعْمَلْ مِثْقَالَ ذَرَّةٍ شَرًّا يَرَهُ. (٨)

Artinya: “Barangsiapa yang mengerjakan kebaikan seberat dzarrahpun, niscaya dia akan melihat (balasan)nya. Dan barangsiapa yang mengerjakan kejahatan sebesar dzarrahpun, niscaya dia akan melihat (balasan)nya pula”. (QS. al-Zalzalah/99:7-8).

Dalam kedua ayat di atas, Allah Swt. memperincikan balasan atas masing-masing amal perbuatan yang dilakukan. Bahwa barangsiapa beramal baik, walaupun amalnya itu seberat *dzarrah* (atom) yang sangat kecil niscaya akan menerima balasannya, dan begitu pula yang beramal jahat walaupun seberat *dzarrah* (atom) akan merasakan balasannya.

Dalam sebagian hadist, *dzahrrah* diartikan sebagai “sesuatu yang tidak ada timbangannya”. Hal ini merupakan perumpamaan yang dibuat oleh Allah Swt., bahwasanya Dia tidaklah lalai dari perbuatan anak Adam as, baik itu untuk hal yang kecil ataupun besar. Dalam tafsir Al-Misbah, kata *dzarrah* ada yang memahaminya dalam arti semut yang kecil pada awal kehidupan, atau kepala semut. Ada juga yang menyatakannya sebagai debu yang terlihat beterbangan di celah cahaya matahari yang masuk melalui lubang atau jendela. Sebenarnya kata ini digunakan untuk menggambarkan sesuatu yang terkecil, sehingga apapun makna kebahasaannya, yang jelas adalah ayat ini menegaskan bahwa manusia akan melihat balasan amal perbuatannya sekecil apapun amal itu.

Penjelasan di atas, seperti nasehat Luqman pada anak-anaknya bahwasanya setiap kejelekan dan kebaikan walau amat kecil, ditambah lagi amat tersembunyi, pasti akan dihadirkan dan dibalas oleh Allah Swt. pada hari kiamat. Nasehat ini termuat dalam QS. al-Luqman/31:16 berikut

يٰۤاَيُّهَا اِبْنِيَّ اِنَّهَا اِنْ تَكَ مِثْقَالَ حَبَّةٍ مِّنْ حَرْدَلٍ فَتَكُنْ فِيْ صَحْرَةٍ اَوْ فِي السَّمٰوٰتِ اَوْ فِي الْاَرْضِ يٰۤاْت بِهَا
 اَللّٰهُ اِنَّ اَللّٰهَ لَطِيْفٌ حَبِيْرٌ (١٦)

Artinya: “(Luqman berkata): "Hai anakku, sesungguhnya jika ada (sesuatu perbuatan) seberat biji sawi, dan berada dalam batu atau di langit atau di dalam bumi, niscaya Allah akan mendatangkannya (membalasinya). Sesungguhnya Allah Maha Halus lagi Maha Mengetahui”. (QS. al-Lukman/31:16).

Dalam tafsir Ibnu Katsir, ayat ini merupakan nasehat dan wasiat Luqman kepada kepada anak-anaknya. Berkata Luqman: “Hai anakku, perbuatan dosa dan maksiat walaupun seberat dan sekecil biji sawi dan berada di dalam batu, di langit, atau di bumi akan didatangkan oleh Allah di hari kiamat untuk memperoleh balasannya, baik atau buruk perbuatan tersebut akan mendapatkan balasan yang setimpal, sesungguhnya Allah Maha halus, ilmu-Nya meliputi segala sesuatu bagaimanapun kecilnya, sehingga seekor semut yang melata di malam yang gelap-gulitapun tidak akan luput dari pengetahuan-Nya”.

Sebagaimana dalam kasus menggerakkan dawai Sasando, jika Allah menghendaki petikan terjadi pada posisi yang tidak tepat dengan tingkat eror yang besar atau bahkan yang sangat kecil maka bunyi yang dihasilkan menjadi kurang indah (*noise*) dan jika Allah menghendaki petikan terjadi pada posisi yang tepat maka akan menghasilkan alunan bunyi yang indah (jernih). Dengan demikian dari penjelasan tersebut, semua kejadian atau fenomena yang ada di alam semesta ini hanya Allah yang berkuasa atas segalanya dan Dia Maha Menentukan segala sesuatu sesuai kehendak-Nya.

BAB III

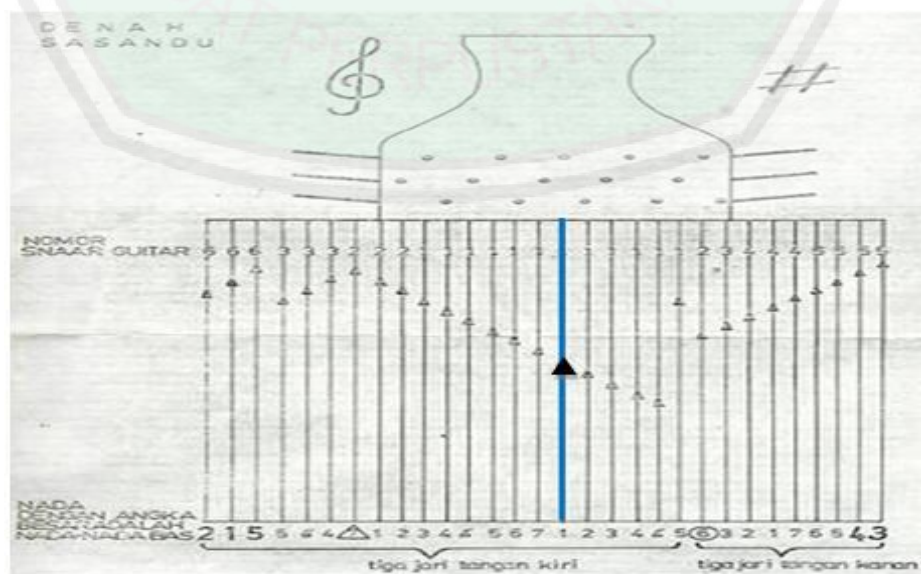
PEMBAHASAN

3.1 Konstruksi Model Gerak Dawai pada Alat Musik Sasando

Model yang akan dikonstruksi merupakan model matematika untuk masalah gerak dawai pada alat musik Sasando. Lebih khususnya konstruksi model dilakukan pada dawai penghasil nada dasar *do*. Langkah-langkah dalam mengonstruksi model gerak dawai pada alat musik Sasando ini dimulai dari (1) identifikasi masalah pada dawai penghasil nada dasar *do*, (2) identifikasi masalah variabel, parameter dan energi, (3) identifikasi gaya-gaya yang bekerja, (4) membangun asumsi, (5) identifikasi energi potensial dan energi kinetik dawai, (6) menurunkan persamaan *Lagrange* dan (7) simulasi model.

3.1.1 Identifikasi Masalah pada Dawai Penghasil Nada Dasar *do* pada Alat Musik Sasando

Secara umum, denah dawai pada alat musik Sasando diperlihatkan pada Gambar 3.1 berikut



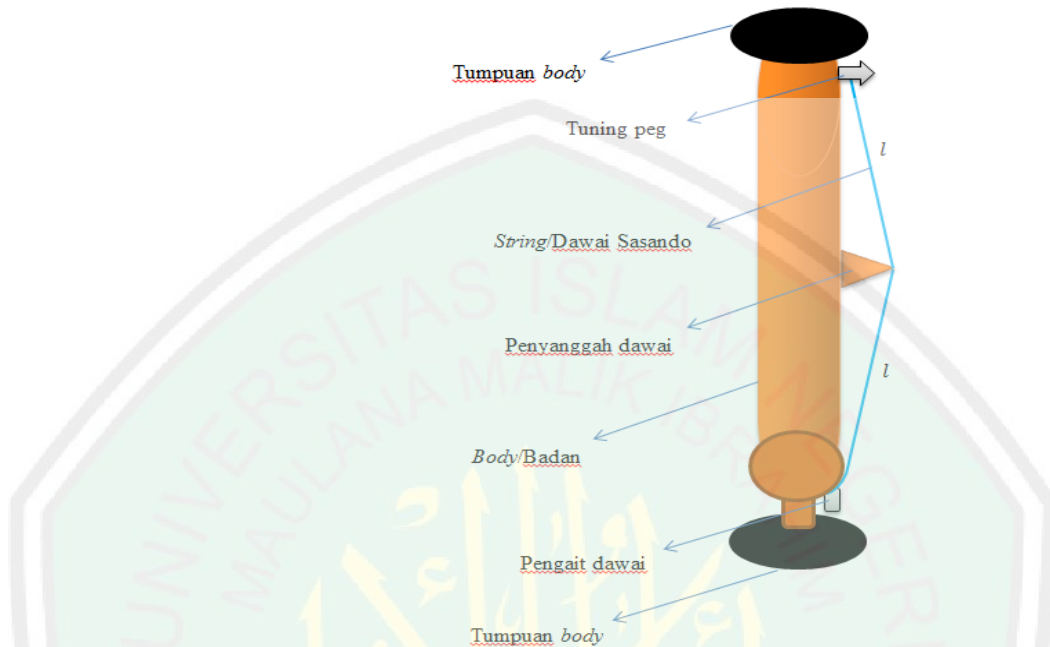
Gambar 3.1 Denah Alat Musik Sasando

Bedasarkan denah dawai pada alat musik Sasando pada Gambar 3.1, dawai penghasil nada dasar *do* berada di tengah-tengah, yaitu dawai ke-16 yang diberi warna biru. Kedua ujung dawai ini terikat pada dua pengait dawai yang berbeda, yaitu pengait dibagian kepala Sasando yang disebut *tuning peg* dan pengait dibagian dudukan Sasando. Jarak antara kedua pengait dawai ini adalah 35 cm. Selanjutnya, ciri yang paling membedakan antara dawai penghasil nada dasar *do* dengan dawai penghasil nada lainnya adalah pada letak penyangga dawai. Pada dawai penghasil nada dasar *do*, letak penyangga dawainya berada di tengah-tengah, sehingga panjang di kedua sisi dawai adalah sama (l). Kondisi ini juga menyebabkan ketika dawai dipetik menghasilkan nada dasar *do*.

Merujuk pada batasan masalah dalam penelitian ini, dawai yang digunakan pada alat musik Sasando adalah dawai yang biasa digunakan pada alat musik gitar akustik jenis klasik. Khusus pada dawai penghasil nada dasar *do*, dawai gitar yang digunakan adalah dawai gitar bernomor 1 yang memiliki luas penampang dawai (A) yang sangat kecil. Karena itu, volume dawai (V) menjadi sebanding dengan panjang dawai itu sendiri. Akibatnya massa jenis dawai (ρ) didefinisikan sebagai massa per satuan panjang dawai (l). Secara umum, diameter dawai yang digunakan pada alat musik Sasando berkisar antara 0.08 – 0.56 mm.

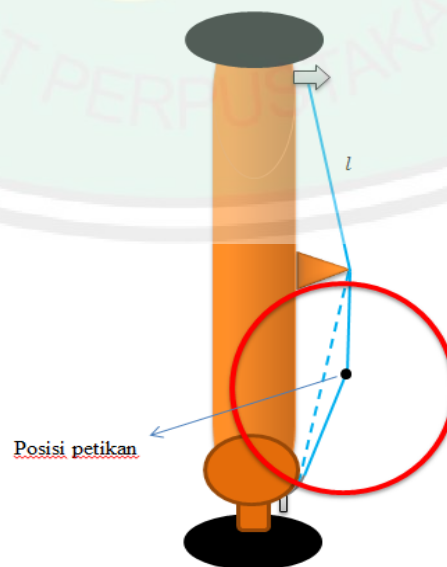
Jenis material dawai yang digunakan pada alat musik Sasando adalah berbahan nilon yang memiliki modulus elastisitas (E) sebesar $5 \times 10^9 \text{ N/m}^2$. Konstanta modulus elastisitas dari dawai Sasando menunjukkan tingkat keelastisan atau kelenturan dari dawai Sasando. Sehingga untuk mencegah dawai Sasando agar tidak putus ditengah permainan, besar gaya tarikan yang diberikan ketika dawai Sasando dipetik tidak boleh melebihi batas keelastisan dari dawai.

Kondisi dawai penghasil nada dasar *do* pada alat musik Sasando dapat dilihat pada Gambar 3.2 berikut



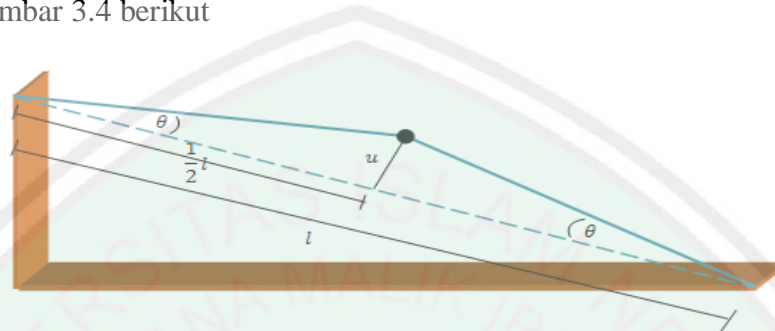
Gambar 3.2 Dawai Penghasil Nada Dasar *do* pada Alat Musik Sasando

Selanjutnya ketika dawai penghasil nada dasar *do* pada alat musik Sasando ini dipetik pada posisi $\frac{1}{2}l$ dari pajang dawai l , maka kondisi dawainya akan terlihat seperti Gambar 3.3 berikut



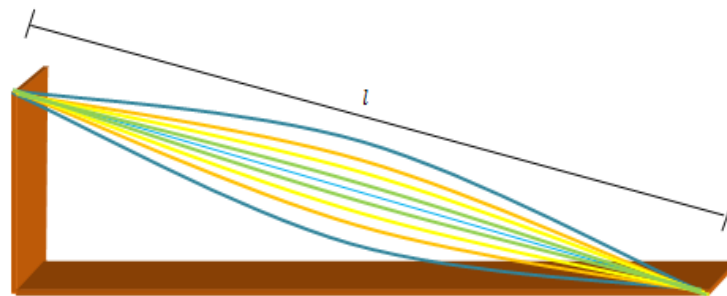
Gambar 3.3 Kondisi Dawai ketika Dipetik pada Posisi $\frac{1}{2}l$

Untuk lebih jelas melihat kondisi dawai penghasil nada dasar *do* ketika dipetik pada posisi $\frac{1}{2}l$ dari panjang dawai l , maka dilakukan partisi terhadap Gambar 3.3. Kondisi dawai yang berada dalam lingkaran merah pada Gambar 3.3, tampak seperti Gambar 3.4 berikut



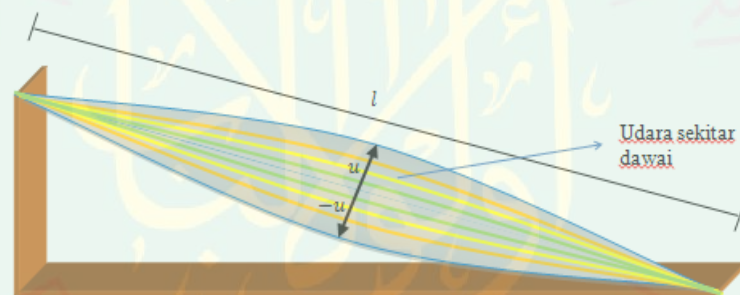
Gambar 3.4 Partisi Gambar 3.3

Dari Gambar 3.4, menunjukan kondisi dawai penghasil nada dasar *do* pada alat musik Sasando ketika dipetik pada posisi $\frac{1}{2}l$ dari panjang dawai l , terbentuk simpangan sebesar u dengan besar sudut θ . Selanjutnya setelah petikan dilepas terjadi vibrasi disepanjang dawai berupa gerak bolak balik pada posisi setimbang dawai yang terjadi secara berulang-ulang sampai dawai kembali ke posisi setimbang atau berhenti. Dalam kajian ilmu fisika, gerak seperti ini dikenal sebagai gerak osilasi. Karena posisi petikan terjadi pada posisi $\frac{1}{2}l$ dari panjang dawai l , maka gerak osilasi yang terjadi pada dawai ditunjukkan seperti Gambar 3.5 berikut



Gambar 3.5 Kondisi Dawai setelah Dipetik

Sesuai kajian ilmu fisika, proses vibrasi berupa gerak osilasi pada dawai penghasil nada dasar *do* pada alat musik Sasando adalah berbentuk gelombang stasioner untuk nada dasar, dimana terjadi 2 simpul dan 1 perut. Kondisi ini menyebabkan panjang dawai yang bervibrasi menjadi $\frac{1}{2}\lambda$, dengan λ adalah panjang gelombang. Selain itu juga selama dawai bervibrasi atau berosilasi terjadi gesekan antara dawai dan udara disekitar dawai. Kondisi ini mempengaruhi kecepatan dawai dalam berosilasi. Gesekan antara dawai dan udara disekitar dawai terjadi disepanjang kurva u yang bergantung pada keadaan x dan waktu t . Ilustrasi gesekan antara dawai dan udara disekitar dawai dapat dilihat pada Gambar 3.6 berikut



Gambar 3.6 Ilustrasi Gesekan antara Dawai dan Udara

Selain terjadi gesekan antara dawai dan udara sekitar dawai, selama osilasi terjadi juga energi kinetik dan energi potensial. Energi kinetik dipengaruhi oleh kecepatan dawai berosilasi dan energi potensial dipengaruhi oleh reaksi yang timbul dari partikel-partikel penyusun dawai, dalam rangka melawan gaya tarikan yang diberikan ketika dawai dipetik. Reaksi yang timbul dari partikel-partikel penyusun dawai ini dipancarkan sebagai gaya-gaya yang bekerja pada dawai Sasando. Selain itu juga, selama dawai berosilasi terdapat faktor peredam k_d yang mempengaruhi kecepatan dawai berosilasi sehingga dawai dapat berhenti pada

suatu waktu t tertentu. Faktor peredam k_d ini datang dari gesekan-gesekan internal dari dalam dawai sendiri.

3.1.2 Identifikasi Parameter, Variabel dan Energi pada Dawai Sasando

Langkah selanjutnya yang dilakukan adalah mengidentifikasi parameter, variabel dan energi pada dawai Sasando. Berdasarkan hasil identifikasi masalah pada sub bab (3.1.1), terdapat beberapa parameter yang terlibat dalam masalah gerak dawai pada alat musik Sasando, diantaranya adalah:

1. Panjang dawai Sasando (l), merupakan jarak antara dua buah ujung dawai Sasando. Panjang dawai Sasando yang digunakan dalam penelitian ini adalah 35 cm .
2. Luas penampang dawai Sasando (A) sangatlah kecil, sehingga volume dawai akan sebanding dengan panjang dawai akibatnya massa jenis linier dawai (ρ) didefinisikan sebagai massa (m) per satuan panjang dawai (l).
3. Massa dawai Sasando (m) adalah suatu besaran yang menyatakan kekuatan dawai Sasando dalam satuan kg . Massa dawai Sasando (m) didefinisikan sebagai perkalian antara massa jenis dawai (ρ) dan satuan panjang dawai (l).
4. Modulus elastisitas dawai Sasando (E), merupakan konstanta yang menyatakan tingkat keelastisan atau kelenturan dawai Sasando yang berbahan nilon dengan satuan N/m^2 . Besar modulus elastisitas dawai Sasando yang berbahan nilon adalah $5 \times 10^9\text{ N/m}^2$.
5. Konstanta pegas (k_p), merupakan konstanta yang menyatakan ukuran kekakuan dari dawai Sasando yang berbahan nilon. Konstanta ini memiliki nilai sebesar $k_p = \frac{E}{l}$ dengan satuannya adalah N/m .

6. Konstanta k_b yang menyatakan koefisien bentuk dawai yang bergesekan dengan udara. Konstanta k_b memiliki nilai sebesar $k_b = 6\pi r$, dengan r adalah jari-jari dawai.
7. Koefisien viskositas (η), merupakan besaran yang menunjukkan tingkat kekentalan fluida atau zat alir. Dalam penelitian ini, jenis fluida atau zat alir yang dipertimbangkan adalah udara yang memiliki koefisien viskositas sebesar $0,000018 \text{ Ns/m}^2$.
8. Kecepatan elastisitas (c) yang didefinisikan sebagai akar kuadrat dari modulus elastisitas (E) per massa jenis dawai (ρ), dengan satuannya adalah m/s .
9. Konstanta peredam k_d yang mempengaruhi kecepatan dawai selama dawai berosilasi.

Selanjutnya adalah mengidentifikasi variabel yang terlibat dalam masalah gerak dawai pada alat musik Sasando. Variabel-variabel yang digunakan terbagi menjadi dua macam, yakni variabel bebas dan variabel terikat. Dalam penelitian ini, model matematika untuk masalah gerak dawai pada alat musik Sasando yang akan dikonstruksi bergantung pada keadaan x dan waktu t . Sehingga terdapat dua variabel bebas dalam penelitian ini yaitu x yang menyatakan keadaan dan t yang menyatakan waktu. Sedangkan untuk variabel terikatnya terdapat beberapa, diantaranya adalah:

1. Besar simpangan u dan besar sudut θ yang terbentuk ketika dawai Sasando diberikan petikan. Keduanya bergantung pada keadaan x dan waktu t .
2. Kecepatan dawai berosilasi (v) yang didefinisikan sebagai perubahan simpangan u terhadap waktu t , $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)$ dengan satuannya adalah m/s .

3. Percepatan dawai berosilasi, yang merupakan perubahan kecepatan terhadap waktu t , $\left(\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)$ dengan satuannya adalah m/s^2 .
4. Nilai $\tan \theta$ yang merupakan koefisien garis singgung atau kemiringan didefinisikan sebagai perubahan besar simpangan u terhadap keadaan x , $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$.

Kemudian langkah selanjutnya adalah mengidentifikasi energi-energi yang bekerja pada dawai Sasando. Energi-energi yang bekerja pada dawai Sasando adalah sebagai berikut:

1. Energi potensial (E_p), energi ini timbul karena adanya reaksi dari partikel-partikel penyusun dawai dalam rangka melawan gaya tarikan yang diberikan ketika dawai Sasando dipetik. Satuan energi potensial adalah *Joule* atau setara dengan $kg\ m^2/s^2$.
2. Energi kinetik (E_k), energi ini dipengaruhi oleh kecepatan dawai berosilasi. Satuan energi kinetik adalah *Joule* atau setara dengan $kg\ m^2/s^2$.

3.1.3 Identifikasi Gaya-Gaya yang Bekerja pada Dawai Sasando

Dalam rangka menggambarkan proses vibrasi yang disebabkan oleh petikan pada dawai Sasando, terlebih dahulu menentukan gaya-gaya yang bekerja pada dawai Sasando. Berdasarkan identifikasi masalah gerak dawai pada alat musik Sasando dalam sub bab (3.1.1), bahwa ketika dawai Sasando dipetik terjadi gerak osilasi disepanjang dawai yang berupa gerak bolak balik disekitar titik kesetimbangan. Gerak osilasi yang terjadi tersebut menandakan adanya reaksi dari partikel-partikel penyusun dawai Sasando yang berupaya mempertahankan dan mengembalikan dawai pada posisi setimbang, yang berarti bahwa terdapat gaya

pegas (F_{Pegas}) yang bekerja pada dawai Sasando selama dawai Sasando beresilasi. F_{Pegas} ini dinyatakan hukum Hooke sebagai

$$F_{Pegas} = -k_p x \quad (3.1)$$

dengan k_p adalah konstanta pegas dawai dan x adalah pertambahan panjang dawai.

Dalam kasus dawai Sasando, petikan dilakukan di tengah-tengah dawai sehingga terdapat gaya pegas di sisi kiri dan di sisi kanan dawai. Gaya pegas di sisi kiri dawai ($F_{Pegas\ kiri}$) dinyatakan sebagai berikut

$$F_{Pegas\ kiri} = -k_p x^- \quad (3.2)$$

dengan x^- adalah pertambahan panjang di sisi kiri dawai. Sedangkan gaya pegas yang terjadi di sisi kanan dawai ($F_{Pegas\ kanan}$) dinyatakan sebagai berikut

$$F_{Pegas\ kanan} = -k_p x^+ \quad (3.3)$$

dengan x^+ adalah pertambahan panjang di sisi kanan dawai.

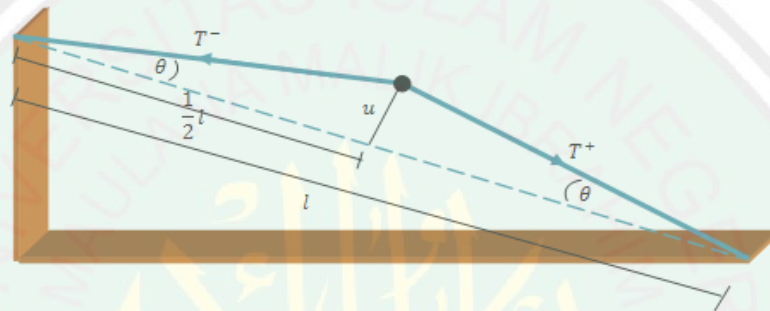
Selain gaya pegas (F_{Pegas}), juga terdapat gaya tegangan ($F_{Tegangan}$) yang bekerja pada dawai Sasando. $F_{Tegangan}$ merupakan gaya tarikan dari dawai Sasando yang melawan gaya tarikan akibat dawai dipetik. $F_{Tegangan}$ ini terjadi karena adanya tegangan yang berupa reaksi dari ikatan partikel-partikel penyusun dawai yang melawan gaya tarikan ketika dawai dipetik. Berdasarkan konsep tegangan bahwa satuan gaya yang dihasilkan karena adanya tegangan yang terjadi didefinisikan sebagai perkalian antara besarnya tegangan (T) dan luas penampang (A). Dalam kasus dawai Sasando, luas penampang dawai sangatlah kecil, sehingga $F_{Tegangan}$ sebanding dengan besar tegangan pada dawai Sasando.

$$-F_{Tegangan} = T \quad (3.4)$$

Tanda minus menunjukkan $F_{Tegangan}$ bekerja pada arah berlawanan dengan gaya tarikan ketika dawai dipetik. Sehingga $F_{Tegangan}$ yang terjadi pada dawai Sasando dapat dituliskan sebagai berikut

$$-F_{Tegangan} = T \quad (3.5)$$

Ketika dawai Sasando dipetik terjadi tegangan disepanjang dawai Sasando seperti Gambar 3.7 berikut



Gambar 3.7 Tegangan pada Dawai Sasando

Dari Gambar 3.7 terlihat terjadi tegangan di sisi kiri dan di sisi kanan dawai. Oleh karena itu, terdapat $F_{Tegangan}$ yang bekerja di sisi kiri dan di sisi kanan dawai.

Gaya tegangan di sisi kiri dawai ($F_{Tegangan\ kiri}$) dinyatakan sebagai

$$F_{Tegangan\ kiri} = -T^- \quad (3.6)$$

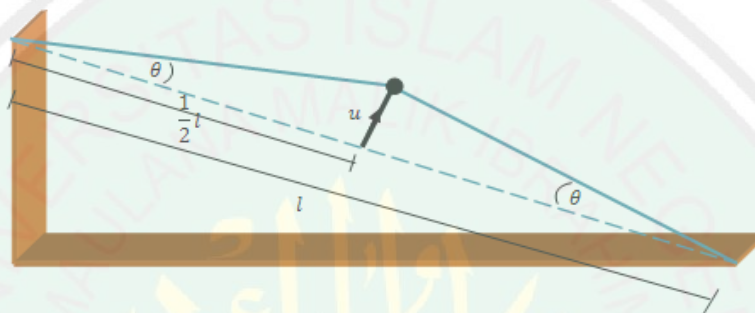
dengan T^- adalah besar tegangan di sisi kiri dawai Sasando. Dan gaya tegangan di sisi kanan dawai ($F_{Tegangan\ kanan}$) dinyatakan sebagai

$$F_{Tegangan\ kanan} = -T^+ \quad (3.7)$$

Gaya selanjutnya yang bekerja pada dawai Sasando adalah gaya gesek (F_{Gesek}). Ketika dawai Sasando dipetik, terjadi gesekan antara dawai Sasando dan udara disekitar dawai. Oleh karena itu, gaya gesek yang bekerja pada dawai Sasando adalah gaya gesek antara dawai dan udara. Gesekan antara dawai dan udara terjadi disepanjang kurva u dan mengikuti kaidah hukum Stokes, yaitu

$$F_{Gesekek} = k_b \eta \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \quad (3.8)$$

dengan k_b adalah koefisien yang menyatakan bentuk dawai, η adalah koefisien viskositas udara dan $\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)$ adalah kecepatan dawai berosilasi yang dapat didefinisikan sebagai perubahan simpangan u terhadap waktu t . Secara lebih jelas ilustrasi gaya gesek antara dawai dan udara digambarkan sebagai berikut



Gambar 3.8 Ilustrasi Gaya Gesek antara Dawai dan Udara

3.1.4 Membangun Asumsi

Berdasarkan identifikasi masalah dawai pada alat musik Sasando dalam sub bab (3.1.1) maka, asumsi-asumsi dasar yang digunakan dalam mengonstruksi model matematika untuk masalah gerak dawai pada alat musik Sasando adalah sebagai berikut:

1. Dawai Sasando merupakan dawai yang lentur sempurna yang berada pada posisi setimbang disepanjang sumbu- x .
2. Gerak dawai pada alat musik Sasando adalah berupa vibrasi disepanjang dawai yang dapat berhenti pada suatu waktu t tertentu, artinya tidak berlangsung selama-lamanya. Hal ini dikarenakan terdapat gaya peredam yang secara dinamis bekerja pada dawai Sasando.
3. Vibrasi yang terjadi pada dawai Sasando adalah berupa gelombang bolak balik yang merupakan perpaduan antara gelombang transversal datang dan

gelombang transversal pantul sebagai akibat dari kedua ujung dawai yang terikat.

4. Selama dawai Sasando bervibrasi terbentuk simpangan sebesar u yang bergantung pada keadaan x dan waktu t . Diasumsikan simpangan (u) yang terbentuk tersebut, sangatlah kecil sehingga kemiringan di setiap titik disepanjang dawai Sasando juga sangatlah kecil.
5. Berlaku hukum I Newton selama dawai Sasando berada pada posisi setimbang dan hukum II Newton selama dawai Sasando bervibrasi.
6. Tegangan yang disebabkan oleh peregangan pada dawai sebelum diikat kedua ujungnya lebih besar dibandingkan dengan gaya gravitasi, sehingga dalam kasus dawai Sasando gaya gravitasi dapat diabaikan.
7. Reaksi dari partikel-partikel penyusun dawai yang melawan gaya tarikan ketika dawai Sasando dipetik dipancarkan sebagai gaya tegangan disepanjang dawai dan reaksi dari partikel-partikel penyusun dawai Sasando yang berupaya mempertahankan dan mengembalikan dawai pada posisi setimbang dipancarkan sebagai gaya pegas pada dawai.
8. Terjadi gaya gesek antara dawai Sasando dengan udara disekitar dawai selama dawai berosilasi. Gaya gesek yang terjadi memperlambat laju dawai Sasando berosilasi.
9. Penampang dawai Sasando dianggap sangat kecil sehingga volume dawai akan sebanding dengan panjang dawai itu sendiri, akibatnya massa jenis linier dawai (ρ) didefinisikan sebagai massa per satuan panjang dawai (l).
10. Dawai Sasando merupakan dawai yang homogen sehingga massa jenis linier dawai (ρ) untuk setiap titik disepanjang dawai Sasando adalah konstan.

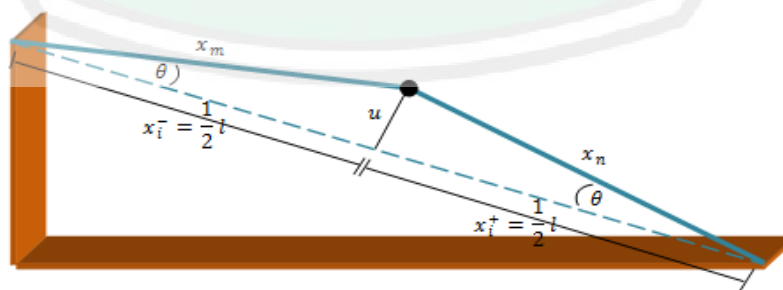
11. Dawai Sasando merupakan dawai yang elastis sempurna namun memiliki batas elastisitas sebesar $5 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ yang merupakan konstanta elastisitas dawai atau yang dikenal sebagai modulus elastisitas.

3.1.5 Identifikasi Energi Potensial dan Energi Kinetik pada Dawai Sasando

Petikan yang diberikan pada dawai Sasando menimbulkan adanya energi potensial (E_p) dan energi kinetik (E_k) pada dawai. Dalam proses mengidentifikasi kedua energi ini, melibatkan besar peregangan (e) yang terjadi pada dawai sebagai akibat dari petikan yang diberikan pada dawai Sasando. Sehingga langkah pertama yang harus dilakukan dalam mengidentifikasi energi potensial (E_p) dan energi kinetik (E_k) pada dawai Sasando adalah menganalisis besar peregangan (e) yang terjadi pada dawai Sasando. Kemudian dilanjutkan dengan identifikasi energi potensial (E_p) pada dawai Sasando dan identifikasi energi kinetik (E_k) pada dawai Sasando.

a. Analisis Besar Peregangan (e) pada Dawai Sasando

Ketika dawai Sasando dipetik pada posisi $\frac{1}{2}l$ dari panjang dawai l , terjadi peregangan (e) pada dawai seperti pada Gambar 3.9 berikut



Gambar 3.9 Peregangan pada Dawai Sasando

Dari Gambar 3.9, terlihat peregangan terjadi di sisi kiri dan di sisi kanan dawai. Peregangan di sisi kiri dawai Sasando (e^-) menyebabkan pertambahan panjang

dawai sepanjang $x_i^- = -\frac{1}{2}l$ menjadi x_m , dimana x_i^- adalah panjang mula-mula dari sisi kiri dawai Sasando sebelum dipetik dan x_m adalah panjang akhir dari sisi kiri dawai Sasando setelah dipetik. Sedangkan peregangan di sisi kanan dawai Sasando (e^+) menyebabkan pertambahan panjang dawai sepanjang $x_i^+ = \frac{1}{2}l$ menjadi x_n , dimana x_i^+ adalah panjang mula-mula dari sisi kanan dawai Sasando sebelum dipetik dan x_n adalah panjang akhir dari sisi kanan dawai Sasando setelah dipetik.

Selain terjadi peregangan, pada dawai Sasando juga terbentuk simpangan sebesar u yang bergantung pada keadaan x dan waktu t . Sebagaimana Gambar 3.9 di atas, besar simpangan u yang terbentuk jika ditinjau dari sisi kiri dawai Sasando adalah

$$\begin{aligned} u &= x_i^- \tan \theta \\ &= -\frac{1}{2}l \tan \theta \end{aligned}$$

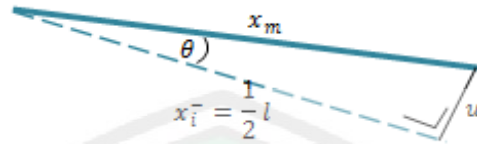
dan jika ditinjau dari sisi kanan dawai Sasando adalah

$$\begin{aligned} u &= x_i^+ \tan \theta \\ &= \frac{1}{2}l \tan \theta \end{aligned}$$

Nilai $\tan \theta$ merupakan koefisien garis singgung atau kemiringan yang didefinisikan sebagai $\frac{\partial u}{\partial x}$. Sehingga besar simpangan u yang ditinjau dari sisi kiri dawai Sasando menjadi $u = -\frac{1}{2}l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$ dan dari sisi kanan dawai Sasando menjadi $u = \frac{1}{2}l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$.

Selanjutnya menentukan panjang x_m sebagai akibat dari peregangan yang terjadi di sisi kiri dawai. Untuk lebih mudah menentukan panjang x_m maka

dilakukan partisi terhadap Gambar 3.9 dari sisi kiri menjadi seperti Gambar 3.10 berikut



Gambar 3.10 Peregangan di Sisi Kiri Dawai Sasando

Dari Gambar 3.10, panjang x_m dapat ditentukan berdasarkan kaidah *Phytagoras* sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 x_m &= \sqrt{u^2 + (x_i^-)^2} \\
 &= \sqrt{u^2 + \left(-\frac{1}{2}l\right)^2} \\
 &= \sqrt{u^2 + \frac{1}{4}l^2} \tag{3.9}
 \end{aligned}$$

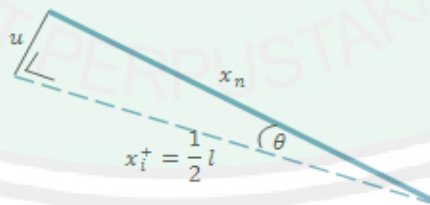
Jika nilai $u = -\frac{1}{2}l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ yang ditinjau dari sisi kiri dawai disubstitusikan ke persamaan (3.9) maka diperoleh

$$\begin{aligned}
 x_m &= \sqrt{\left(-\frac{1}{2}l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right)^2 + \frac{1}{4}l^2} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{4}l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{4}l^2} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{4}l^2 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1\right)} \\
 &= \frac{1}{2}l \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} \tag{3.10}
 \end{aligned}$$

Dengan panjang x_m yang diperoleh, dapat diketahui pertambahan panjang dari sisi kiri dawai Sasando. Besar pertambahan panjang di sisi kiri dawai Sasando yang disimbolkan dengan x^- merupakan selisih antara x_m dengan x_i^- , atau dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 x^- &= x_m - x_i^- \\
 &= \frac{1}{2}l \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} - \left(-\frac{1}{2}l\right) \\
 &= \frac{1}{2}l \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} + \frac{1}{2}l \\
 &= \frac{1}{2}l \left(\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} + 1 \right) \quad (3.11)
 \end{aligned}$$

Selanjutnya menentukan panjang x_n sebagai akibat dari peregangan yang terjadi di sisi kanan dawai. Untuk lebih mudah menentukan panjang x_n maka dilakukan partisi terhadap Gambar 3.9 dari sisi kanan menjadi seperti Gambar 3.11 berikut



Gambar 3.11 Peregangan di Sisi Kanan Dawai Sasando

Dari Gambar 3.11, panjang x_n dapat ditentukan menggunakan kaidah *Phytagoras* sebagai berikut

$$x_n = \sqrt{u^2 + (x_i^+)^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{u^2 + \left(\frac{1}{2}l\right)^2} \\
&= \sqrt{u^2 + \frac{1}{4}l} \tag{3.12}
\end{aligned}$$

Jika nilai $u = \frac{1}{2}l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ yang ditinjau dari sisi kanan dawai disubstitusikan ke persamaan (3.12), maka diperoleh

$$\begin{aligned}
x_n &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right)^2 + \frac{1}{4}L} \\
&= \sqrt{\frac{1}{4}l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{4}L} \\
&= \sqrt{\frac{1}{4}l^2 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1\right)} \\
&= \frac{1}{2}l \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} \tag{3.13}
\end{aligned}$$

Selanjutnya dengan panjang x_n yang diperoleh, dapat ditentukan pertambahan panjang di sisi kanan dawai Sasando. Besar pertambahan panjang di sisi kanan dawai Sasando yang disimbolkan dengan x^+ merupakan selisih antara x_m dengan x_i^+ , atau dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
x^+ &= x_n - x_i^+ \\
&= \frac{1}{2}l \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} - \left(\frac{1}{2}L\right) \\
&= \frac{1}{2}l \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} - \frac{1}{2}L
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}l \left(\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} - 1 \right) \quad (3.14)$$

Dengan nilai x^- dan x^+ yang diperoleh pada persaaan (3.11) dan (3.14), dapat ditentukan besar peregangan (e) yang terjadi dawai Sasando. Berdasarkan konsep elastisitas, besar regangan (e) didefinisikan sebagai

$$e = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (3.15)$$

dengan Δl adalah pertambahan panjang dawai yang dalam pembahasan ini disimbolkan dengan x^- untuk pertambahan panjang yang terjadi di sisi kiri dawai dan x^+ untuk pertambahan panjang yang terjadi di sisi kanan dawai. Dan l_0 adalah panjang mula-mula dari dawai Sasando yang dalam pembahasan ini disimbolkan dengan x_i^- untuk panjang mula-mula di sisi kiri dawai dan x_i^+ untuk panjang mula-mula di sisi kanan dawai. Dengan demikian, besar peregangan yang terjadi di sisi kiri dawai (e^-) dapat diperoleh sebagai berikut

$$\begin{aligned} e^- &= \frac{x^-}{x_i^-} \\ &= \frac{\frac{1}{2}l \left(\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} - 1 \right)}{-\frac{1}{2}l} \\ &= - \left(\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} + 1 \right) \end{aligned} \quad (3.16)$$

dan besar peregangan yang terjadi di sisi kanan dawai (e^+) dapat diperoleh sebagai berikut

$$e^+ = \frac{x^+}{x_i^+}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{1}{2}l \left(\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} - 1 \right)}{\frac{1}{2}l} \\
&= \left(\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} - 1 \right) \tag{3.17}
\end{aligned}$$

b. Identifikasi Energi Potensial (E_p) pada Dawai Sasando

Energi potensial (E_p) pada dawai Sasando merupakan keseluruhan dari total masing-masing energi potensial yang terjadi pada dawai Sasando. Dalam kasus dawai Sasando yang dipetik ini, terdapat beberapa energi potensial yang terjadi pada dawai Sasando, diantaranya adalah (1) energi potensial pegas ($E_{p_{Pegas}}$), (2) energi potensial tegangan ($E_{p_{Tegangan}}$) dan (3) energi potensial gesek ($E_{p_{Gesek}}$). Sehingga untuk memperoleh keseluruhan energi potensial pada dawai Sasando harus dilakukan analisis terhadap masing-masing energi potensial tersebut.

1. Analisis energi potensial pegas ($E_{p_{Pegas}}$)

Analisis $E_{p_{Pegas}}$ dilakukan terhadap beberapa *point* penting berikut: pertama, $E_{p_{Pegas}}$ timbul akibat adanya gaya pegas (F_{Pegas}) yang bekerja pada dawai Sasando ketika dawai dipetik. Perubahan energi potensial pegas ($\Delta E_{p_{Pegas}}$) sendiri merupakan minus integral dari F_{Pegas} yang didefinisikan mengikuti hukum Hooke, yaitu:

$$F_p = -k_p \tag{3.18}$$

dengan k_p adalah konstanta pegas dan x adalah pertambahan panjang dawai. Oleh karena itu, dalam penentuan $E_{p_{Pegas}}$ melibatkan x^- pada persamaan (3.11) dan x^+ pada persamaan (3.14).

Kedua, Ep_{Pegas} pada dawai Sasando terjadi selama dawai mengalami pertambahan panjang akibat petikan. Sehingga dalam penentuan Ep_{Pegas} melibatkan besar pertambahan panjang di sisi kiri maupun di sisi kanan dawai pada posisi setimbang $(x_{Setimbang}^-, x_{Setimbang}^+)$ dan besar pertambahan panjang di sisi kiri maupun di sisi kanan dawai setelah petikan $(x_{Setelah\ petikan}^-, x_{Setelah\ petikan}^+)$.

Ketiga, sebelum dawai Sasando dipetik, belum terjadi pertambahan panjang baik di sisi kiri maupun di sisi kanan dawai. Sehingga (1) besar pertambahan panjang baik di sisi kiri maupun di sisi kanan dawai Sasando pada posisi setimbang adalah sebesar nol ($x_{setimbang}^- = 0, x_{setimbang}^+ = 0$), akibatnya $x_{Setelah\ petikan}^- = x^-$ pada persamaan (3.11) dan $x_{Setelah\ petikan}^+ = x^+$ pada persamaan (3.14). Dan (2) besar energi potensial pegas selama pertambahan panjang di sisi kiri maupun di sisi kanan dawai Sasando pada posisi setimbang adalah sebesar nol ($Ep_{Pegas\ kiri\ setimbang} = 0, Ep_{Pegas\ kanan\ setimbang} = 0$).

Kemudian keempat, Ep_{Pegas} pada dawai Sasando terjadi di sisi kiri dan di sisi kanan dawai. Sehingga dalam menentukan Ep_{Pegas} pada dawai Sasando terlebih dahulu menentukan energi potensial pegas di sisi kiri dawai ($Ep_{Pegas\ kiri}$) dan energi potensial pegas di sisi kanan dawai ($Ep_{Pegas\ kanan}$).

Setelah menganalisis beberapa *point* penting di atas, langkah selanjutnya adalah menentukan Ep_{Pegas} pada dawai Sasando. Penentuan Ep_{Pegas} pada dawai Sasando dilakukan dengan memanfaatkan *point-point* yang telah dianalisis di atas. Langkah pertama, menentukan $Ep_{Pegas\ kiri}$ yang terjadi di sisi kiri dawai selama pertambahan panjang sebagai berikut

$$\Delta E_{p_{Pegas\ kiri}} = - \int_{x_{setimbang}^-}^{x_{setelah\ petikan}^-} F_{Pegas}(x^-) d(x^-)$$

$$\Delta E_{p_{Pegas\ kiri}} = - \int_0^{\frac{1}{2}l \left(\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1 + 1} \right)} -k_p x^- d(x^-)$$

$$E_{p_{Pegas\ kiri}} - E_{p_{Pegas\ kiri\ setimbang}} = \left[\frac{1}{2} k_p (x^-)^2 \right]_0^{\frac{1}{2}l \left(\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1 + 1} \right)}$$

$$E_{p_{Pegas\ kiri}} - (0) = \frac{1}{2} k \left[\left(\frac{1}{2} l \left(\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1 + 1} \right) \right)^2 - (0)^2 \right]$$

$$E_{p_{Pegas\ kiri}} = \frac{1}{2} k_p \left(\frac{1}{2} l \left(\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1 + 1} \right) \right)^2 \quad (3.19)$$

Langkah kedua, menentukan $E_{p_{Pegas\ kanan}}$ yang terjadi di sisi kanan dawai selama pertambahan panjang sebagai berikut

$$\Delta E_{p_{Pegas\ kanan}} = - \int_{x_{setimbang}^+}^{x_{setelah\ petikan}^+} F_{Pegas}(x^-) d(x^-)$$

$$\Delta E_{p_{Pegas\ kanan}} = - \int_0^{\frac{1}{2}l \left(\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1 - 1} \right)} -k_p x^- d(x^-)$$

$$E_{p_{Pegas\ kanan}} - E_{p_{Pegas\ kanan\ setimbang}} = \left[\frac{1}{2} k_p (x^-)^2 \right]_0^{\frac{1}{2}l \left(\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1 - 1} \right)}$$

$$E_{p_{Pegas\ kanan}} - (0) = \frac{1}{2} k_p \left[\left(\frac{1}{2} l \left(\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1 - 1} \right) \right)^2 - (0)^2 \right]$$

$$E p_{Pegas\ kanan} = \frac{1}{2} k_p \left(\frac{1}{2} l \left(\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1} - 1 \right) \right)^2 \quad (3.20)$$

Dengan nilai $E p_{Pegas\ kiri}$ pada persamaan (3.19) dan $E p_{Pegas\ kanan}$ pada persamaan (3.20), dapat ditentukan total $E p_{Pegas}$ yang terjadi disepanjang dawai Sasando selama pertambahan panjang sebagai berikut

$$\begin{aligned} E p_{Pegas} &= E p_{Pegas\ kiri} + E p_{Pegas\ kanan} \\ &= \frac{1}{2} k_p \left(\frac{1}{2} l \left(\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1 + 1} \right) \right)^2 + \frac{1}{2} k_p \left(\frac{1}{2} l \left(\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1 - 1} \right) \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} k_p \left(\left(\frac{1}{2} l \left(\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1 + 1} \right) \right)^2 + \left(\frac{1}{2} l \left(\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1 - 1} \right) \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} k_p \left(\left(\frac{1}{4} l^2 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1 + 2 \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1 + 1} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{4} l^2 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1 - 2 \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1 - 1} \right) \right) \right) \\ &= \frac{1}{8} k_p l^2 \left(\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1 + 2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - 2 \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1 - 2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{8} k_p l^2 \left(2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 4 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}k_p l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}k_p l^2 \\
&= \frac{1}{2}k_p l^2 \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1\right)
\end{aligned} \tag{3.21}$$

2. Analisis energi potensial tegangan ($Ep_{Tegangan}$)

Seperti halnya pada energi potensial pegas (Ep_{Pegas}), analisis $Ep_{Tegangan}$ juga dilakukan terhadap beberapa *point* penting berikut: pertama $Ep_{Tegangan}$ timbul akibat adanya gaya tegangan ($F_{Tegangan}$) yang bekerja pada dawai Sasando ketika dawai dipetik. Perubahan energi potensial tegangan ($\Delta Ep_{Tegangan}$) sendiri merupakan minus integral dari $F_{Tegangan}$. Dari identifikasi gaya-gaya yang bekerja pada dawai Sasando pada sub bab (3.1.3), $F_{Tegangan}$ didefinisikan sebagai

$$F_{Tegangan} = -T \tag{3.22}$$

dengan T adalah besar tegangan yang terjadi pada dawai Sasando. Berdasarkan konsep elastisitas, besar tegangan pada dawai didefinisikan sebagai perkalian antara besar peregangan (e) dan modulus elastisitas (E). Sehingga dalam menentukan $Ep_{Tegangan}$ melibatkan e^- pada persamaan (3.16) dan e^+ pada persamaan (3.17).

Kedua, $Ep_{Tegangan}$ pada dawai Sasando terjadi selama dawai mengalami peregangan akibat petikan. Sehingga dalam penentuan $Ep_{Tegangan}$ melibatkan besar peregangan di sisi kiri maupun di sisi kanan dawai pada posisi setimbang ($e_{Setimbang}^-$, $e_{Setimbang}^+$) dan besar peregangan di sisi kanan maupun di sisi kanan dawai setelah petikan ($e_{Setelah\ petikan}^-$, $e_{Setelah\ petikan}^+$).

Ketiga, sebelum dawai Sasando dipetik, belum terjadi peregangan baik di sisi kiri maupun di sisi kanan dawai. Sehingga (1) besar peregangan yang terjadi di sisi kiri maupun di sisi kanan dawai pada posisi setimbang adalah sebesar nol ($e_{Setimbang}^- = 0, e_{Setimbang}^+ = 0$) akibatnya $e_{Setelah\ petikan}^- = e^-$ pada persamaan (3.16) dan $e_{Setelah\ petikan}^- = e^+$ pada persamaan (3.17). Dan (2) besar energi potensial tegangan yang terjadi selama peregangan di sisi kiri maupun di sisi kanan dawai pada posisi setimbang adalah sebesar nol ($Ep_{Tegangan\ kiri\ setimbang} = 0, Ep_{Tegangan\ kanan\ setimbang} = 0$).

Kemudian keempat, $Ep_{Tegangan}$ pada dawai Sasando terjadi di sisi kiri dan di sisi kanan dawai. Sehingga dalam menentukan $Ep_{Tegangan}$ pada dawai Sasando terlebih dahulu menentukan energi potensial tegangan di sisi kiri dawai ($Ep_{Tegangan\ kiri}$) dan energi potensial tegangan di sisi kanan dawai ($Ep_{Tegangan\ kanan}$).

Setelah menganalisis beberapa *point* penting di atas, langkah selanjutnya adalah menentukan $Ep_{Tegangan}$ pada dawai Sasando. Penentuan $Ep_{Tegangan}$ pada dawai Sasando dilakukan dengan memanfaatkan *point-point* yang telah dianalisis di atas. Langkah pertama, menentukan $Ep_{Tegangan\ kiri}$ yang terjadi di sisi kiri dawai selama peregangan sebagai berikut

$$\Delta Ep_{Tegangan\ kiri} = - \int_{e_{Setimbang}^-}^{e_{Setelah\ petikan}^-} F_{Tegangan\ kiri}(e^-) d(e^-)$$

$$\Delta Ep_{Tegangan\ kiri} = - \int_0^{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} + 1} -Ee^- d(e^-)$$

$$\begin{aligned}
Ep_{Tegangan\ kiri} - Ep_{Tegangan\ kiri\ setimbang} &= \left[\frac{1}{2} E (e^-)^2 \right]_0^{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1 + 1}} \\
Ep_{Tegangan\ kiri} - (0) &= \frac{1}{2} E \left[\left(\left(\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1 + 1} \right)^2 \right) - 0 \right] \\
Ep_{Tegangan\ kiri} &= \frac{1}{2} E \left(\left(\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1 + 1} \right)^2 \right) \tag{3.23}
\end{aligned}$$

Langkah kedua, menentukan $Ep_{Tegangan\ kanan}$ yang terjadi di sisi kanan dawai selama peregangannya sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\Delta Ep_{Tegangan\ kanan} &= - \int_{e^-_{Setimbang}}^{e^+_{Setelah\ petikan}} F_{Tegangan\ kiri}(e^-) d(e^-) \\
\Delta Ep_{Tegangan\ kanan} &= - \int_0^{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1 - 1}} -Ee^+ d(e^+) \\
Ep_{Tegangan\ kanan} - Ep_{Tegangan\ kanan\ setimbang} &= \left[\frac{1}{2} E (e^+)^2 \right]_0^{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1 - 1}} \\
Ep_{Tegangan\ kanan} - (0) &= \frac{1}{2} E \left[\left(\left(\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1 - 1} \right)^2 \right) - 0 \right] \\
Ep_{Tegangan\ kanan} &= \frac{1}{2} E \left(\left(\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1 - 1} \right)^2 \right) \tag{3.24}
\end{aligned}$$

Dengan nilai $Ep_{Pegas\ Tegangan}$ pada persamaan (3.23) dan $Ep_{Tegangan\ kanan}$ pada persamaan (3.24), dapat ditentukan $Ep_{Tegangan}$ yang terjadi disepanjang dawai Sasando selama peregangannya sebagai berikut

$$Ep_{Tegangan} = Ep_{Tegangan\ kiri} + Ep_{Tegangan\ kanan}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}E \left(\left(\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1 + 1} \right)^2 \right) + \frac{1}{2}E \left(\left(\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1 - 1} \right)^2 \right) \\
&= \frac{1}{2}E \left(\left(\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1 + 1} \right)^2 + \left(\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1 - 1} \right)^2 \right) \\
&= \frac{1}{2}E \left(\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1 + 2\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1 + 1} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1 - 2\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1 + 1} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2}E \left(\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1 + 2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - 2\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1 + 2} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2}E \left(2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 4 \right) \\
&= E \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2E \\
&= 2E \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1 \right) \tag{3.25}
\end{aligned}$$

3. Analisis energi potensial gesek ($E_{p_{Gesek}}$)

Analisis energi potensi gesek ($E_{p_{Gesek}}$) dilakukan dengan mempertimbangkan beberapa *point* berikut: pertama ($E_{p_{Gesek}}$) timbul karena adanya gaya gesek (F_{Gesek}) yang terjadi pada dawai Sasando ketika dipetik.

Perubahan energi potensial gesek (ΔEp_{Gesek}) sendiri merupakan minus integral dari F_{Gesek} yang bekerja pada dawai Sasando. F_{Gesek} yang bekerja pada dawai Sasando adalah F_{Gesek} yang terjadi antara dawai Sasando dengan udara yang didefinisikan mengikuti hukum Stokes, yaitu:

$$F_{Gesek} = k_b \eta \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \quad (3.26)$$

dengan $\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)$ adalah kecepatan dawai berosilasi.

Kedua, Ep_{Gesek} pada dawai Sasando terjadi selama dawai berosilasi membentuk simpangan akibat petikan. Sehingga dalam menentukan Ep_{Gesek} melibatkan besar simpangan yang terbentuk pada posisi setimbang ($u_{Setimbng}$) dan besar simpangan yang terbentuk setelah petikan ($u_{Setelah\ petikan}$).

Ketiga, sebelum dawai Sasando dipetik maka jelas belum terjadi osilasi pada dawai Sasando. Sehingga (1) besar simpangan yang terbentuk pada posisi setimbang adalah sebesar nol ($u_{Setimbang} = 0$), akibatnya $u_{Setelah\ petikan} = u$. Dan (2) besar energi potensial gesek yang terjadi selama dawai berosilasi pada posisi setimbang adalah sebesar nol ($Ep_{Gesek\ setimbang} = 0$).

Setelah menganalisis beberapa *point* penting di atas, langkah selanjutnya adalah menentukan Ep_{Gesek} pada dawai Sasando. Penentuan Ep_{Gesek} pada dawai Sasando dilakukan dengan memanfaatkan *point-point* yang telah dianalisis di atas sebagai berikut

$$\Delta Ep_{Gesek} = - \int_{u_{Setimbang}}^{u_{Setelah\ petikan}} F_G(u) d(u)$$

$$\Delta Ep_{Gesek} = - \int_0^u k_b \eta \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) d(u)$$

$$Ep_{Gesek} - Ep_{Gesek \text{ setimbang}} = -k_b \eta \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) [u]_0^u$$

$$Ep_{Gesek} - (0) = -k_b \eta \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) [u - 0]$$

$$Ep_{Gesek} = -k_b \eta \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) u \quad (3.27)$$

Dengan masing-masing total energi potensial yang diperoleh pada persamaan (3.21), (3.25) dan (3.27), dapat dibentuk energi potensial model (EP_{Model}) yang merupakan energi potensial keseluruhan dari total energi potensial yang telah dianalisis sebelumnya. Dengan demikian, energi potensial model (EP_{Model}) pada dawai Sasando dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned} EP_{Model} &= EP_{Pegas} + EP_{Tegangan} + EP_{Gesek} \\ &= \frac{1}{2} k_p l^2 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1 \right) + 2E \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1 \right) + \left(-k_b \eta \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) u \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} k_p l^2 + 2E \right) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1 \right) + \left(-k_b \eta \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) u \right) \end{aligned} \quad (3.28)$$

c. Energi Kinetik (Ek) pada Dawai Sasando

Setelah mengidentifikasi seluruh energi potensial yang terjadi, langkah selanjutnya adalah mengidentifikasi energi kinetik yang terjadi pada Sasando. ketika dawai Sasando dipetik terjadi gerak osilasi pada dawai, sehingga terdapat energi kinetik pada dawai Sasando. Energi kinetik pada dawai Sasando didefinisikan sebagai

$$Ek = \frac{1}{2} m \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \quad (3.29)$$

dengan m adalah massa dawai dan $\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)$ adalah kecepatan dawai berosilasi.

Berdasarkan asumsi no.9 bahwa luas penampang dawai sangatlah kecil sehingga

volume dawai sebanding dengan panjang dawai itu sendiri, akibatnya massa jenis linier dawai (ρ) didefinisikan sebagai massa per satuan panjang dawai (l). Alhasil massa dawai dapat didefinisikan sebagai perkalian antara massa jenis linier dawai (ρ) dan satuan panjang dawai (l), yaitu:

$$m = \rho l$$

Sehingga energi kinetik yang terjadi disepanjang dawai Sasando adalah:

$$Ek_{Model} = \frac{1}{2} \rho l \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \quad (3.30)$$

Energi kinetik di atas merupakan energi kinetik total model yang terjadi disepanjang dawai Sasando. Setelah mendapatkan energi potensial model dan energi kinetik model.

Langkah selanjutnya adalah menentukan persamaan *Lagrange*. Persamaan *Lagrange* didefinisikan sebagai selisih antara energi kinetik model (Ek_{Model}) dan energi potensial model (Ep_{Model}), atau dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned} L &= Ek_{Model} - Ep_{Model} \\ &= \frac{1}{2} \rho l \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \left(\left(\frac{1}{2} k_p l^2 + 2E \right) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1 \right) + \left(-k_b \eta \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) u \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \rho l \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{1}{2} k_p l^2 + 2E \right) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1 \right) + k_b \eta \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) u \end{aligned} \quad (3.31)$$

3.1.6 Menurunkan Persamaan *Lagrange*

Dari formula *Lagrange* pada persamaan (3.31), gerak dawai pada alat musik Sasando merujuk pada persamaan *Euler-Lagrange* seperti berikut ini

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)} \right) = \frac{\partial L}{\partial u} \quad (3.32)$$

Untuk memperoleh bentuk yang memenuhi persamaan (3.32) di atas, pertama persamaan (3.31) diturunkan terhadap variabel u sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial u} &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{2} \rho l \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{1}{2} k_p l^2 + 2E \right) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1 \right) \right. \\ &\quad \left. + k_b \eta \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) u \right) \\ &= k \eta \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)\end{aligned}$$

Kedua, menurunkan persamaan (3.31) terhadap variabel $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$ sebagai berikut

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)} &= \frac{\partial}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)} \left(\frac{1}{2} \rho l \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{1}{2} k_p l^2 + 2E \right) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1 \right) \right. \\ &\quad \left. + k_b \eta \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) u \right) \\ &= - \left(\frac{1}{2} k_p l^2 + 2E \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)\end{aligned}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(- \left(\frac{1}{2} k_p l^2 + 2E \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) \\ &= - \left(\frac{1}{2} k_p l^2 + 2E \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\end{aligned}$$

Selanjutnya ketiga, menurunkan persamaan (3.31) terhadap variabel $\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)$ sebagai berikut

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)} &= \frac{\partial}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)} \left(\frac{1}{2} \rho l \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{1}{2} k_p l^2 + 2E \right) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1 \right) \right. \\ &\quad \left. + k_b \eta \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) u \right)\end{aligned}$$

$$= \rho l \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) + k_b \eta u$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho l \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) + k_b \eta u \right) \\ &= \rho l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k_b \eta \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

Dari sini, diperoleh persamaan (3.31) yang memenuhi persamaan (3.32)

adalah:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)} \right) &= \frac{\partial L}{\partial u} \\ \rho l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k_b \eta \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) - \left(\frac{1}{2} k_p l^2 + 2E \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= k_b \eta \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \\ \rho l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k_b \eta \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) - \left(\frac{1}{2} k_p l^2 + 2E \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k_b \eta \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) &= 0 \\ \rho l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{1}{2} k_p l^2 + 2E \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \\ \rho l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{2} k_p l^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{2} \frac{k_p l^2}{\rho l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{E}{\rho l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned}$$

Ingat bahwa dalam sub bab (3.1.2) telah diidentifikasi parameter c yang menyatakan kecepatan elastisitas sebagai akar kuadrat dari modulus elastisitas per massa jenis dawai. Sehingga nilai modulus elastisitas (E) per massa jenis dawai (ρ) adalah c^2 , sehingga dapat ditulis

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{2} \frac{k_p l}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{c^2}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Kemudian ingat juga bahwa dalam sub bab (3.1.2) telah diidentifikasi parameter k_p yang menyatakan ukuran kekakuan dari dawai sebagai perbandingan antara modulus elastisitas (E) dan panjang dawai (l), maka perkalian antara k_p dan panjang dawai (l) adalah Modulus elastisitas (E). Dari sini, diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{2} \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{c^2}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{2} c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{c^2}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{1}{2} c^2 + 2 \frac{c^2}{l} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

Selanjutnya berdasarkan asumsi no. 2 bahwa gerak yang terjadi pada dawai Sasando akibat dipetik tidak berlangsung selama-lamanya artinya dapat berhenti pada suatu waktu t tertentu. Hal ini berarti bahwa terdapat pertambahan gaya yaitu gaya peredam yang bekerja secara dinamis pada dawai. Dalam kasus dawai Sasando yang kedua ujungnya terikat, gaya peredam didefinisikan sebagai $F_d = k_d \frac{\partial u}{\partial t}$ dengan k_d adalah faktor peredam. Sehingga persamaan (3.33) menjadi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{1}{2} c^2 + 2 \frac{c^2}{l} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_d \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (3.34)$$

Persamaan (3.34) inilah yang merupakan model matematika yang menggambarkan gerak dawai pada alat musik Sasando.

3.2 Simulasi Model Matematika Gerak Dawai pada Alat Musik Sasando

Setelah mendapat model matematika untuk masalah gerak dawai pada alat musik Sasando, langkah selanjutnya adalah melakukan uji validasi terhadap model matematika tersebut. Uji validasi yang dilakukan dalam penelitian ini merupakan uji validasi tahap awal yaitu melakukan simulasi terhadap model yang diperoleh. Simulasi model dimulai dengan mengidentifikasi parameter-parameter yang termuat dalam model, dan selanjutnya menggambarkan model matematika untuk masalah gerak dawai pada alat musik Sasando yang telah dikonstruksi dengan bantuan Matlab, kemudian menganalisis perilaku dari gerak dawai pada alat musik Sasando yang ditampilkan.

Bentuk model matematika yang telah dikonstruksi untuk masalah gerak dawai pada alat musik Sasando adalah sebagai berikut

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_d \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (3.35)$$

Selanjutnya solusi penyelesaian untuk persamaan (3.34) ditunjukkan pada persamaan berikut dengan proses penyelesaian dapat dilihat pada Lampiran 1.

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8h}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) e^{\frac{-k_d}{2}t} \left[\cos \sqrt{k_d^2 - 4\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)t} \right. \\ &\quad \left. + \frac{k_d}{2\sqrt{k_d^2 - 4\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}} \sin \sqrt{k_d^2 - 4\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)t} \right] \quad (3.36) \end{aligned}$$

Dengan nilai

$$h = 2 \text{ cm}$$

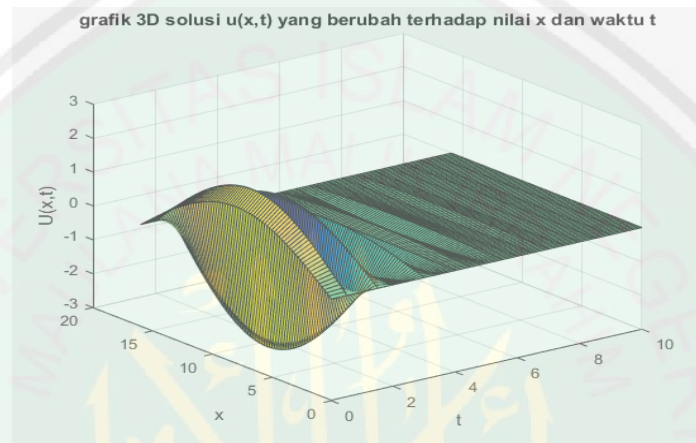
$$l = 16 \text{ cm}$$

$$k_d = 1.5$$

$$c = 1 \text{ m/s}^2$$

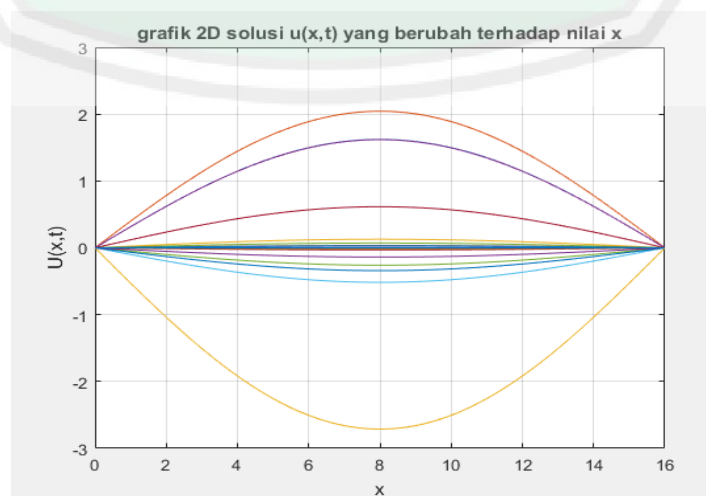
$$n = 1$$

Maka grafik *output* untuk persamaan (3.36) menggunakan aplikasi Matlab adalah sebagai berikut:



Gambar 3. 12 Grafik simpangan dawai Sasando $u(x, t)$

Gambar 3.12 menunjukkan hasil simulasi untuk solusi $u(x, t)$ yang menggambarkan pergerakan simpangan dawai Sasando yang berubah terhadap nilai x dan waktu t pada interval $x = \{x | 0 \leq x \leq 16\}$ dan $t = \{t | 0 \leq t \leq 7\}$. Terlihat semakin lama, pergerakan solusi $u(x, t)$ menuju posisi setimbang $(0,0)$. Tampilan grafik selanjutnya sebagai berikut



Gambar 3. 13 Grafik simpangan dawai Sasando (x, u)

Gambar 3.13 menunjukkan hasil simulasi untuk solusi (x, u) yang menggambarkan pergerakan simpangan dawai Sasando yang berubah terhadap nilai x pada interval $x = \{x | 0 \leq x \leq 16\}$. Terlihat terjadi gerak bolak balik atau gerak osilasi yang disertai dengan perubahan pergerakan simpangan dawai $u(x, t)$ yang semakin kecil menuju titik kesetimbangan $(0,0)$.

Dari kedua hasil simulasi ini, dapat kita simpulkan perilaku gerak dawai pada alat musik Sasando semakin lama bergerak kembali ke keadaan semula yakni pada posisi setimbang dawai. Hal ini sesuai dengan keadaan riil untuk gerak dawai pada alat musik Sasando dalam dunia nyata yakni gerak dawai tidak berlangsung selama-lamanya artinya dapat berhenti pada suatu waktu tertentu. Sehingga dapat dikatakan model yang kita peroleh sudah bersifat *reliable* untuk masalah gerak dawai pada alat musik Sasando. Namun hasil ini belum cukup untuk menunjukkan tingkat kevalidan dari model yang dikonstruksi, sehingga untuk penelitian selanjutnya diharapkan dapat meneruskan uji validasi pada tabap selanjutnya sehingga dapat diketahui sejauhmana tingkat kevalidan dari model matematika yang telah dikonstruksi.

3.3 Konstruksi Model Gerak Dawai pada Alat Musik Sasando dalam Islam

Model matematika untuk masalah gerak dawai pada alat musik Sasando merupakan suatu ukuran yang merepresentasikan masalah gerak dawai pada alat musik Sasando dalam bentuk persamaan matematika. Model matematika tersebut harus memiliki kesesuaian antara variabel, parameter dan gaya-gaya yang bekerja dengan hukum-hukum fisika yang berlaku. Selain itu, model matematika tersebut juga harus melawati uji validasi, jika perilaku model mendekati keesuaian atau

bersesuaian dengan perilaku gerak dawai pada alat musik Sasando dalam dunia nyata maka model matematika tersebut dapat dikatakan valid, dan jika belum maka harus dilakukan *upgrading*, yaitu merevisi ulang, meninjau ulang atau bahkan melakukan konstruksi ulang yang dilakukan secara berulang-ulang terhadap model matematika yang diperoleh sampai memenuhi uji validasi.

Jika dipahami secara mendalam konsep konstruksi model matematika untuk masalah gerak dawai pada alat musik Sasando yang digambarkan di atas, memberikan pelajaran bagi kita sebagai manusia untuk tidak berputus asa dan selalu berlomba-lomba dalam menggapai ridho Allah Swt.. Seruan ini termuat dalam QS. al-Baqarah/2:148 berikut

... فَاسْتَبِقُوا الْخَيْرَاتِ ... (١٤٨)

Artinya: "... Maka berlomba-lombalah (dalam membuat) kebaikan, ... ". (QS. al-Baqarah/2:148).

Perbedaan ahli tafsir dalam menafsirkan potongan ayat di atas hanya terletak pada perspektif kebahasaanya sedangkan dalam makna sama, yaitu bersegeralah atau berloma-lombalah dalam kebaikan, baik itu kebaikan yang dilakukan langsung kepada Allah maupun kebaikan kepada sesama manusia dan alam semesta.

Berbuat kebaikan bukan saja untuk orang lain tetapi kebaikan itu juga untuk diri kita sendiri. Karena kebaikan yang kita lakukan suatu saat akan dipertanggung jawabkan di hari kiamat ketika semua manusia dikumpulkan dan mendapatkan balasan sesuai amal perbuatan selama hidup di dunia. Sehingga tidak ada perbuatan yang sia-sia. Demikian pula dengan memodelkan masalah gerak dawai pada alat musik Sasando, kita dapat mengetahui perilaku dari gerak dawai Sasando dalam menghasilkan bunyi. Dari hasil simulasi model yang diperoleh menunjukkan gerak dawai pada alat musik Sasando semakin lama akan

kembali pada posisi setimbangnya. Hal ini bersesuaian dengan firman Allah Swt. dalam QS. al-Ankabut/29:5, yaitu

مَنْ كَانَ يَرْجُوا لِقَاءَ اللَّهِ فَإِنَّ أَجَلَ اللَّهِ لَآتٍ وَهُوَ السَّمِيعُ الْعَلِيمُ (٥)

Artinya: "Barangsiapa yang mengharap pertemuan dengan Allah, maka sesungguhnya waktu (yang dijanjikan) Allah itu, pasti datang. Dan Dialah Yang Maha mendengar lagi Maha Mengetahui". (QS.al-Ankabut/29:5).

Ayat tersebut menjelaskan bahwasanya semua pasti ada waktunya untuk kembali kepada Allah Swt.. Allah telah menentukan waktu untuk semuanya masing-masing, sebagaimana Allah menentukan waktu gerak dawai Sasando untuk berhenti yakni kembali ke posisi setimbangnya. Dengan memperhatikan semua ini, memberikan pelajaran bagi kita bahwasanya segala sesuatu yang ada di alam semesta ini memiliki waktunya masing-masing yang telah ditetapkan oleh Allah dan pada akhirnya semuanya akan kembali kepada Allah Swt.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada bab sebelumnya, diperoleh beberapa kesimpulan mengenai analisis konstruksi model gerak dawai pada alat musik Sasando, yaitu:

1. Model matematika yang diperoleh berbentuk persamaan diferensial parsial orde dua, yakni:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{1}{2} c^2 + 2 \frac{c^2}{l} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_d \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

2. Terjadi gerak osilasi selama dawai bergerak dan semakin lama menuju pada posisi setimbang dawai. Hal ini sesuai dengan keadaan riil dari gerak dawai pada alat musik Sasando dalam dunia nyata, sehingga model matematika yang telah dikonstruksi bersifat *reliable* untuk masalah gerak dawai pada alat musik Sasando.

4.2 Saran

Dalam penelitian ini, uji validasi hanya dilakukan pada tahap pertama. Hasil yang diperoleh menunjukkan model matematika yang telah dikonstruksi bersifat *reliable* untuk masalah gerak dawai pada alat musik Sasando. Namun hasil ini belum cukup untuk menunjukkan tingkat kevalidan model sehingga untuk penelitian selanjutnya dapat melakukan uji validasi pada tahap berikutnya guna mengetahui sejauhmana tingkat kevalidan dari model matematika yang telah dikonstruksi.

DAFTAR RUJUKAN

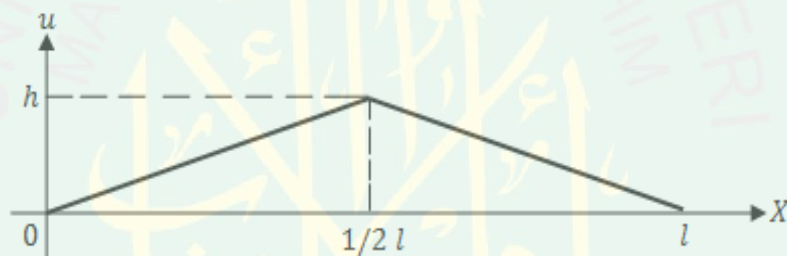
- Arfken, G.B dan Hans, J.W. 2005. *Mathematical Methods for Physicists, Sixth Edition*. London: Elsevier Inc.
- Arifudin, A.M. 2007. *Fisika untuk SMA*. Jakarta: Interplus.
- Bahreisy, H.Salim. 2000. *Tafsir Ibnu Katsir, Jilid IV*. Surabaya: PT. Bima Ilmu
- Bueche, J.F & Hecht, E. 2006. *Fisika Universitas (Terjemahan), Edisi Kesepuluh*. Jakarta: Erlangga.
- Giambattista, Alan, dkk. 2007. *College Physics Second Edition*. New York: Mc. Graw Hill.
- Giancoli, Douglas C. 2001. *Fisika*. Jakarta: Erlangga.
- Halliday D., dkk. 2010. *Fisika Dasar Edisi Ketujuh, Jilid II*. Jakarta: Erlangga.
- Kanginan, Marthen. 2006. *Fisika untuk SMA Kelas XI*. Jakarta: Erlangga.
- Kanginan, Marthen. 2006. *Fisika untuk SMA Kelas XII*. Jakarta: Erlangga.
- Pagalay, Usman. 2009. *Mathematical Modelling*. Malang: UIN Maliki Press.
- Purwanto, Agus. 2006. Analisis dan Sintesa Bunyi Dawai pada Gitar Semi-Akustik. *Seminar Nasional MIPA*, (240-246).
- Rosyid, M.F. 2015. *Fisika Dasar Mekanika, Jilid I*. Yogyakarta: Periuk.
- Shihab, M.Q. 2000. *Tafsir al-Misbah (Pesan, Kesan, dan Keserasian al-Qur'an)*. Jakarta: Lentera Hati.
- Serway, R.A & Jewett, Jr., John W. 2009. *Fisika untuk Sains dan Teknik*. Jakarta: Salemba Teknika.

Lampiran 1. Solusi Model Gerak Dawai pada Alat Musik Sasando

Bentuk model matematika untuk masalah gerak dawai pada alat musik Sasando adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{1}{2} c^2 + 2 \frac{c^2}{l} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_d \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (L.1)$$

Sebelum menyelesaikan persamaan (L.1) di atas terlebih dahulu menentukan kondisi awal dan kondisi batas. Ketika dawai Sasando dipetik pada posisi $1/2 l$ dengan simpangan sebesar h dari posisi kesetimbangan dawai maka bentuk dawai akan menjadi seperti gambar di bawah ini:



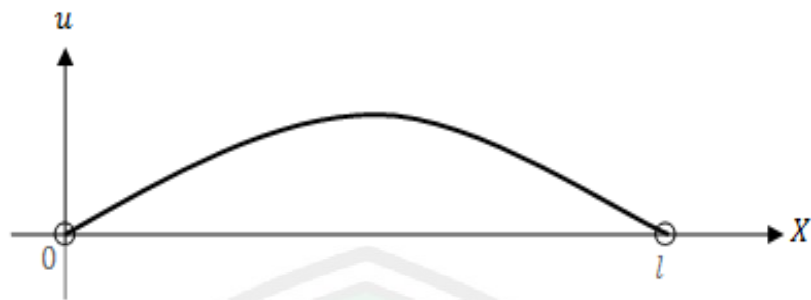
Gambar Lampiran 1.1 Kondisi awal dawai Sasando ketika dipetik

Bentuk awal dawai yakni pada $t = 0$ ketika dawai dipetik didefinisikan sebagai suatu fungsi $f(x)$ dan mula-mula dawai adalah diam (tidak mempunyai kecepatan), sehingga kondisi awal dawai ditentukan sebagai berikut:

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{untuk setiap,} \quad 0 < x < l$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = 0 \quad \text{untuk setiap,} \quad 0 < x < l$$

Selanjutnya adalah menentukan kondisi batas dari dawai Sasando. Dawai Sasando memiliki panjang yang berhingga yakni dari $x = 0$ dan $x = l$ yang membentang sepanjang sumbu x , jika digambarkan sebagai berikut:



Gambar Lampiran 1.2 Kondisi dawai Sasando setelah dipetik

Kedua ujung dawai terikat pada $x = 0$ dan $x = l$ sehingga simpangan yang terjadi pada kedua ujung dawai sama dengan nol. Maka dawai mempunyai dua kondisi batas yakni sebagai berikut:

$$u(0, t) = 0 \quad \text{untuk setiap,} \quad t > 0$$

$$u(l, t) = 0 \quad \text{untuk setiap,} \quad t > 0$$

Selanjutnya untuk menyelesaikan masalah ini, menggunakan metode separasi variabel sebagai berikut:

Asumsikan persamaan (L. 1) mempunyai penyelesaian berikut

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

Maka turunan pertama dan kedua dari $u(x, t)$ terhadap x dan t berturut-turut adalah

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = X(x)T'(t)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = X''(x)T(t)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = X(x)T''(t)$$

Kemudian substitusikan turunan pertama dan kedua dari $u(x, t)$ tersebut di atas ke persamaan (L. 1), maka diperoleh persamaan baru sebagai berikut

$$X(x)T''(t) - \left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l} \right) X''(x)T(t) + (k_d) X(x)T'(t) = 0$$

$$\begin{aligned}
X(x)T''(t) + (k_d) X(x)T'(t) &= \left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right) X''(x)T(t) \\
X(x)(T''(t) + (k_d) T'(t)) &= \left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right) X''(x)T(t) \\
\frac{T''(t) + (k_d) T'(t)}{\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right) T(t)} &= \frac{X''(x)}{X(x)} \tag{L.2}
\end{aligned}$$

Karena kedua ruas masing-masing hanya bergantung pada satu variabel maka dapat dipecahkan menjadi persamaan diferensial biasa dengan menambahkan konstanta pemisah. Misalkan dipilih $-p$ sebagai konstanta pemisah, maka dapat ditulis

$$\frac{T''(t) + (k_d) T'(t)}{\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right) T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -p$$

Sehingga diperoleh dua persamaan diferensial biasa sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\frac{X''(x)}{X(x)} &= -p \\
X''(x) &= -pX(x) \\
X''(x) + pX(x) &= 0 \tag{L.3}
\end{aligned}$$

Dan

$$\begin{aligned}
\frac{T''(t) + (k_d) T'(t)}{\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right) T(t)} &= -p \\
T''(t) + (k_d) T'(t) &= -p \left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right) T(x) \\
T''(t) + (k_d) T'(t) + p \left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right) T(x) &= 0 \tag{L.4}
\end{aligned}$$

Selanjutnya menyelesaikan persamaan (L.3) terlebih dahulu. Persamaan karakteristik yang bersesuaian dengan persamaan (L.3) di atas adalah:

$$\begin{aligned}
m^2 + p &= 0 \\
m^2 &= -p \\
m &= \pm\sqrt{-p}, \quad \forall p
\end{aligned}$$

Terdapat tiga kemungkinan nilai p yang memenuhi solusi di atas yakni $p < 0$, $p = 0$ dan $p > 0$. (Catatan, nilai p yang memenuhi solusi adalah nilai p yang tidak menghasilkan solusi trivial).

Kasus I: Untuk $p < 0$.

Untuk $p < 0$, maka $m = \pm\sqrt{-(-p)} = \pm\sqrt{p}$ artinya $m_1 = \sqrt{p}$ dan $m_2 = -\sqrt{p}$.

Dari sini diketahui bahwa akar-akar dari persamaan karakteristik di atas adalah real dan berbeda. Sehingga bentuk umum solusinya adalah:

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{p} x} + C_2 e^{-\sqrt{p} x} \quad (L.5)$$

Selanjutnya menggunakan syarat batas yang diberikan untuk mengecek apakah solusi untuk $p < 0$ trivial ataukah tidak.

$$\text{Ketika } x = 0 \rightarrow X(0) = C_1 e^{\sqrt{p}(0)} + C_2 e^{-\sqrt{p}(0)}$$

$$0 = C_1 e^0 + C_2 e^0$$

$$0 = C_1 (1) + C_2 (1)$$

$$0 = C_1 + C_2$$

$$-C_1 = C_2$$

$$\text{Ketika } x = l \rightarrow X(l) = C_1 e^{\sqrt{p}(l)} + C_2 e^{-\sqrt{p}(l)}$$

$$0 = C_1 e^{\sqrt{p}l} - C_1 e^{-\sqrt{p}l}$$

$$0 = C_1 (e^{\sqrt{p}l} - e^{-\sqrt{p}l})$$

Dari sini terdapat dua kemungkinan nilai yakni nilai $C_1 = 0$ atau nilai $e^{\sqrt{p}l} - e^{-\sqrt{p}l} = 0$. Karena nilai $e^{\sqrt{p}l} - e^{-\sqrt{p}l} \neq 0$ (tidak akan pernah sama dengan nol) maka haruslah $C_1 = 0$. Karena $C_1 = 0$ maka $-C_1 = C_2 = 0$, artinya $C_1 = 0$ dan $C_2 = 0$. Dengan mensubstitusikan nilai C_1 dan C_2 ke solusi umum untuk setiap $p > 0$, diperoleh:

$$\begin{aligned}
 X(x) &= C_1 e^{\sqrt{p}x} + C_2 e^{-\sqrt{p}x} \\
 &= (0) e^{\sqrt{p}x} + (0) e^{-\sqrt{p}x} \\
 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{L.6}$$

Ini berarti solusi untuk setiap $p < 0$ adalah trivial.

Kasus II: Untuk $p = 0$.

Untuk $p = 0$ maka $m = \pm\sqrt{0}$ artinya $m_1 = 0$ dan $m_2 = 0$. Dari sini diketahui bahwa akar-akar persamaan karakteristiknya adalah kembar. Sehingga bentuk umum solusinya adalah:

$$X(x) = C_1 + x C_2 \tag{L.7}$$

Selanjutnya menggunakan syarat batas yang diberikan untuk mengecek apakah untuk solusi $k = 0$ trivial ataukah tidak.

$$\begin{aligned}
 \text{Ketika } x = 0 \quad \rightarrow \quad X(0) &= C_1 + x C_2 \\
 0 &= C_1 + (0) C_2 \\
 0 &= C_1 + 0 \\
 0 &= C_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Ketika } x = l \quad \rightarrow \quad X(l) &= C_1 + l C_2 \\
 0 &= 0 + l C_2 \\
 0 &= l C_2 \\
 \frac{0}{l} &= C_2 \\
 0 &= C_2
 \end{aligned}$$

Dari sini jelas diperoleh $C_1 = 0$ dan $C_2 = 0$. Dengan mensubstitusikan nilai C_1 dan C_2 ke solusi untuk setiap $p = 0$, diperoleh:

$$\begin{aligned}
 X(x) &= C_1 + X C_2 \\
 &= 0 + X (0) \\
 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{L.8}$$

Ini berarti, solusi untuk setiap $p = 0$ adalah trivial.

Kasus III: Untuk $p > 0$.

Untuk $p > 0$ maka $m = \pm\sqrt{-p} = \pm i\sqrt{p}$ artinya $m_1 = i\sqrt{p}$ dan $m_2 = -i\sqrt{p}$.

Dari sini diketahui bahwa akar-akar dari persamaan karakteristiknya adalah kompleks. Sehingga bentuk umum solusinya adalah:

$$X(x) = C_1 e^{i\sqrt{p}x} + C_2 e^{-i\sqrt{p}x} \quad (L.9)$$

Menggunakan definisi $e^{(a+bi)t} = e^{at}(\cos bt + i \sin bt)$, maka bentuk umum solusi $X(x)$ menjadi:

$$\begin{aligned} X(x) &= C_1(\cos \sqrt{p}x + i \sin \sqrt{p}x) + C_2(\cos(-\sqrt{p}x) + i \sin(-\sqrt{p}x)) \\ &= C_1 \cos \sqrt{p}x + C_1 i \sin \sqrt{p}x + C_2 \cos(-\sqrt{p}x) + C_2 i \sin(-\sqrt{p}x) \end{aligned} \quad (L.10)$$

Berdasarkan aturan sudut $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$ dan $-\sin(\theta) = \sin(-\theta)$, maka solusi $X(x)$ menjadi:

$$\begin{aligned} X(x) &= C_1 \cos \sqrt{p}x + C_1 i \sin \sqrt{p}x + C_2 \cos \sqrt{p}x - C_2 i \sin \sqrt{p}x \\ &= (C_1 + C_2) \cos \sqrt{p}x + (C_1 - C_2) i \sin \sqrt{p}x \\ &= C \cos \sqrt{p}x + D i \sin \sqrt{p}x \end{aligned} \quad (L.11)$$

Selanjutnya menggunakan syarat batas yang diberikan untuk mengecek apakah untuk solusi $p < 0$ trivial ataukah tidak.

$$\text{Ketika } x = 0 \rightarrow X(0) = C \cos \sqrt{p}(0) + D i \sin \sqrt{p}(0)$$

$$0 = C \cos(0) + D i \sin(0)$$

$$0 = C(1) + D(0)$$

$$0 = C + 0$$

$$0 = C$$

$$\text{Ketika } x = l \rightarrow X(l) = C \cos \sqrt{p}l + D i \sin \sqrt{p}l$$

$$0 = (0) \cos \sqrt{p}l + D i \sin \sqrt{p}l$$

$$0 = 0 + D i \sin \sqrt{p}l$$

$$0 = D i \sin \sqrt{p}l$$

Dari sini terdapat dua kemungkinan nilai yakni nilai $D = 0$ atau nilai $\sin \sqrt{p} l = 0$. Karena nilai $D \neq 0$ (tidak boleh sama dengan nol karena tidak akan ditemukan solusinya) maka haruslah nilai $\sin \sqrt{p} l = 0$. Nilai $\sin \sqrt{p} l = 0$ terjadi jika dan hanya jika $\sqrt{p} l = n\pi, \forall n = 1, 2, 3 \dots$. Oleh karena itu, haruslah $\sqrt{p} l = n\pi$, sehingga:

$$\sqrt{p} = \frac{n\pi}{l}$$

$$p = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$$

$$p = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$$

Dari sini diperoleh nilai $C = 0, D = C$ dan $p = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$. Dengan mensubstitusikan ketiga nilai tersebut ke solusi untuk setiap $p > 0$, diperoleh:

$$\begin{aligned} X(x) &= C \cos \sqrt{p} x + D i \sin \sqrt{p} x \\ &= (0) \cos \left(\sqrt{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2} x \right) + C i \sin \left(\sqrt{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2} x \right) \\ &= 0 + C i \sin \left(\sqrt{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2} x \right) \\ &= C i \sin \left(\sqrt{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2} x \right) \\ &= C i \sin \left(\frac{n\pi}{l} x \right) \end{aligned} \tag{L.12}$$

Selanjutnya menyelesaikan persamaan (L.4) untuk mendapatkan nilai solusi $T(t)$. Dengan mensubstitusikan nilai p ke persamaan (L.4) maka persamaan karakteristik yang sesuai dengan persamaan (L.4) adalah:

$$r^2 + k_d r + \left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) \left(\frac{1}{2} c^2 + 2 \frac{c^2}{l}\right) = 0$$

Akar-akar persamaannya adalah:

$$r_{1,2} = \frac{-k_d \pm \sqrt{(k_d)^2 - 4(1) \left(\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l} \right) \right)}}{2(1)}$$

$$r_{1,2} = \frac{-k_d \pm \sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l} \right) \right)}}{2}$$

Karena nilai $k_d^2 < 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l} \right) \right)$, maka akar-akar persamaannya

kompleks, yaitu $r_1 = \frac{-k_d}{2} + \sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l} \right) \right)} i$ dan $r_2 = \frac{-k_d}{2} -$

$\sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l} \right) \right)} i$. Sehingga bentuk umum solusinya adalah:

$$T(t) = C_1 e^{\left(\frac{-k_d}{2} + \sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l} \right) \right)} i \right) t} + C_2 e^{\left(\frac{-k_d}{2} - \sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l} \right) \right)} i \right) t} \quad (L.13)$$

Menggunakan definisi $e^{(a+bi)t} = e^{at}(\cos bt + i \sin bt)$, maka solusi $T(t)$ menjadi:

$$T(t) = C_1 e^{\frac{-k_d}{2}t} \left(\cos \sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l} \right) \right)} t + i \sin \sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l} \right) \right)} t \right) + C_2 e^{\frac{-k_d}{2}t} \left(\cos \left(-\sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l} \right) \right)} t \right) + i \sin \left(-\sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l} \right) \right)} t \right) \right) \quad (L.14)$$

Berdasarkan aturan sudut $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$ dan $-\sin(\theta) = \sin(-\theta)$, maka solusi $T(t)$ menjadi:

$$\begin{aligned}
 T(t) &= C_1 e^{\frac{-k_d t}{2}} \left(\cos \sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \right) \left(\frac{1}{2} c^2 + 2 \frac{c^2}{l} \right) t} \right. \\
 &\quad \left. + i \sin \sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \right) \left(\frac{1}{2} c^2 + 2 \frac{c^2}{l} \right) t} \right) \\
 &\quad + C_2 e^{\frac{-k_d t}{2}} \left(\cos \sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \right) \left(\frac{1}{2} c^2 + 2 \frac{c^2}{l} \right) t} \right. \\
 &\quad \left. - i \sin \sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \right) \left(\frac{1}{2} c^2 + 2 \frac{c^2}{l} \right) t} \right) \\
 &= e^{\frac{-k_d t}{2}} \left[C_1 \cos \sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \right) \left(\frac{1}{2} c^2 + 2 \frac{c^2}{l} \right) t} \right. \\
 &\quad \left. + C_1 i \sin \sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \right) \left(\frac{1}{2} c^2 + 2 \frac{c^2}{l} \right) t} \right. \\
 &\quad \left. + C_2 \cos \sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \right) \left(\frac{1}{2} c^2 + 2 \frac{c^2}{l} \right) t} \right. \\
 &\quad \left. - C_2 i \sin \sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \right) \left(\frac{1}{2} c^2 + 2 \frac{c^2}{l} \right) t} \right] \\
 &= e^{\frac{-k_d t}{2}} \left[(C_1 + C_2) \cos \sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \right) \left(\frac{1}{2} c^2 + 2 \frac{c^2}{l} \right) t} \right. \\
 &\quad \left. + (C_1 - C_2) i \sin \sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \right) \left(\frac{1}{2} c^2 + 2 \frac{c^2}{l} \right) t} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{\frac{-k_d t}{2}} \left[C_3 \cos \sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \right) \left(\frac{1}{2} c^2 + 2 \frac{c^2}{l} \right) t} \right. \\
&\quad \left. + C_4 i \sin \sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \right) \left(\frac{1}{2} c^2 + 2 \frac{c^2}{l} \right) t} \right] \quad (L. 15)
\end{aligned}$$

Dari solusi $X(x)$ pada persamaan (L. 12) dan solusi $T(t)$ pada persamaan (L. 15) maka diperoleh solusi $u(x, t)$ sebagai berikut

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= X(x)T(t) \\
&= \left(Ci \sin \left(\frac{n\pi}{l} x \right) \right) e^{\frac{-k_d t}{2}} \left[C_3 \cos \sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \right) \left(\frac{1}{2} c^2 + 2 \frac{c^2}{l} \right) t} \right. \\
&\quad \left. + C_4 i \sin \sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \right) \left(\frac{1}{2} c^2 + 2 \frac{c^2}{l} \right) t} \right] \\
&= \sin \left(\frac{n\pi}{l} x \right) e^{\frac{-k_d t}{2}} \left[(Ci \times C_3) \cos \sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \right) \left(\frac{1}{2} c^2 + 2 \frac{c^2}{l} \right) t} \right. \\
&\quad \left. + (Ci \times C_4 i) \sin \sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \right) \left(\frac{1}{2} c^2 + 2 \frac{c^2}{l} \right) t} \right] \\
&= \sin \left(\frac{n\pi}{l} x \right) e^{\frac{-k_d t}{2}} \left[(Ci \times C_3) \cos \sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \right) \left(\frac{1}{2} c^2 + 2 \frac{c^2}{l} \right) t} \right. \\
&\quad \left. + (C \times C_4) \sin \sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \right) \left(\frac{1}{2} c^2 + 2 \frac{c^2}{l} \right) t} \right] \\
&= \sin \left(\frac{n\pi}{l} x \right) e^{\frac{-k_d t}{2}} \left[\alpha_n \cos \sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \right) \left(\frac{1}{2} c^2 + 2 \frac{c^2}{l} \right) t} \right. \\
&\quad \left. + \beta_n \sin \sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \right) \left(\frac{1}{2} c^2 + 2 \frac{c^2}{l} \right) t} \right] \quad (L. 16)
\end{aligned}$$

Dengan $\alpha_n = Ci \times C_3$ dan $\beta_n = C \times C_4$, dan karena persamaan (L. 1) dan kondisi batas untuk masalah gerak dawai Sasando adalah linier dan homogen maka

berdasarkan prinsip superposisi bahwa kombinasi linier dari suatu persamaan diferensial yang linier dan homogen adalah juga merupakan solusi. Sehingga solusi $u(x, t)$ dapat juga dituliskan sebagai berikut

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) e^{-\frac{k_d}{2}t} \left[\alpha_n \cos \sqrt{k_d^2 - 4\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)t} + \beta_n \sin \sqrt{k_d^2 - 4\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)t} \right] \quad (L.17)$$

Selanjutnya mencari nilai α_n dan β_n dengan kondisi awal yang diberikan sebelumnya, yakni:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x) && \text{untuk setiap, } 0 < x < l \\ \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) &= 0 && \text{untuk setiap, } 0 < x < l \end{aligned}$$

Dengan menggunakan kondisi awal di atas, diperoleh

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) e^{-\frac{k_d}{2}t} \left[\alpha_n \cos \sqrt{k_d^2 - 4\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)(0)} + \beta_n \sin \sqrt{k_d^2 - 4\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)(0)} \right] \\ f(x) &= \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) [\alpha_n (1) - \beta_n (0)] \\ &= \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \end{aligned} \quad (L.18)$$

Berdasarkan definisi konverensi deret Fourier sinus, diperoleh:

$$\alpha_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx$$

Selanjutnya untuk kasus dawai Sasando telah didefinisikan bahwa fungsi $f(x)$ menggambarkan bentuk kondisi awal dawai Sasando ketika dipetik sebagaimana

Gambar Lampiran 1.1 sebelumnya, maka fungsi $f(x)$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2hx}{l}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}l \\ 2h - \frac{2hx}{l}, & \frac{1}{2}l \leq x \leq l \end{cases}$$

dengan h adalah besar simpangan yang terjadi. Dari sini nilai α_n dapat dicari sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx \\ &= \frac{2}{l} \left[\int_0^{\frac{1}{2}l} \frac{2hx}{l} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx + \int_{\frac{1}{2}l}^l \left(2h - \frac{2hx}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx \right] \end{aligned}$$

Dengan aturan rantai dapat kita selesaikan integral di atas sebagai berikut:

$$\begin{aligned} &\int_0^{\frac{1}{2}l} \frac{2hx}{l} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx \\ &= \left[\frac{2hx}{l} \left(-\frac{l}{n\pi}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \right]_0^{\frac{1}{2}l} - \int_0^{\frac{1}{2}l} \left(-\frac{l}{n\pi}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \frac{2h}{l} dx \\ &= \left[\left(-\frac{2hx}{n\pi}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \right]_0^{\frac{1}{2}l} - \int_0^{\frac{1}{2}l} \left(-\frac{2h}{n\pi}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx \\ &= \left[\left(-\frac{2hx}{n\pi}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \right]_0^{\frac{1}{2}l} \\ &\quad - \left[\left[\left(-\frac{2h}{n\pi}\right) \left(\frac{l}{n\pi}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \right]_0^{\frac{1}{2}l} - \int_0^{\frac{1}{2}l} \left(\frac{l}{n\pi}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) (0) dx \right] \\ &= \left[\left(-\frac{2hx}{n\pi}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \right]_0^{\frac{1}{2}l} - \left[\left[\left(-\frac{2hl}{n^2\pi^2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \right]_0^{\frac{1}{2}l} - (0) \right] \\ &= \left[\left(-\frac{2hx}{n\pi}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \right]_0^{\frac{1}{2}l} - \left[\left(-\frac{2hl}{n^2\pi^2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \right]_0^{\frac{1}{2}l} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\left(\left(-\frac{hl}{n\pi} \right) \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) \right) - \left(\left(-\frac{2h(0)}{n\pi} \right) \cos \left(\frac{n\pi}{l} (0) \right) \right) \right] \\
&\quad - \left[\left(\left(-\frac{2hl}{n^2\pi^2} \right) \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right) \right) - \left(\left(-\frac{2hl}{n^2\pi^2} \right) \sin \left(\frac{n\pi}{l} (0) \right) \right) \right] \\
&= \left[\left(\left(-\frac{hl}{n\pi} \right) \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) \right) - (0) \right] - \left[\left(\left(-\frac{2hl}{n^2\pi^2} \right) \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right) \right) - (0) \right] \\
&= \left[\left(-\frac{hl}{n\pi} \right) \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) \right] - \left[\left(-\frac{2hl}{n^2\pi^2} \right) \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right) \right] \\
&= \left(-\frac{hl}{n\pi} \right) \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) + \left(\frac{2hl}{n^2\pi^2} \right) \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right)
\end{aligned}$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned}
&\int_{\frac{1}{2}l}^l 2h - \frac{2hx}{l} \sin \left(\frac{n\pi}{l} x \right) dx \\
&= \left[\left(2h - \frac{2hx}{l} \right) \left(-\frac{l}{n\pi} \right) \cos \left(\frac{n\pi}{l} x \right) \right]_{\frac{1}{2}l}^l \\
&\quad - \int_{\frac{1}{2}l}^l \left(-\frac{l}{n\pi} \right) \cos \left(\frac{n\pi}{l} \cdot x \right) \left(-\frac{2h}{l} \right) dx \\
&= \left[\left(-\frac{2hl}{n\pi} + \frac{2hx}{n\pi} \right) \cos \left(\frac{n\pi}{l} x \right) \right]_{\frac{1}{2}l}^l - \int_{\frac{1}{2}l}^l \left(\frac{2h}{n\pi} \right) \cos \left(\frac{n\pi}{l} x \right) dx \\
&= \left[\left(-\frac{2hl}{n\pi} + \frac{2hx}{n\pi} \right) \cos \left(\frac{n\pi}{l} x \right) \right]_{\frac{1}{2}l}^l \\
&\quad - \left[\left[\left(\frac{2h}{n\pi} \right) \left(\frac{l}{n\pi} \right) \sin \left(\frac{n\pi}{l} x \right) \right]_{\frac{1}{2}l}^l - \int_{\frac{1}{2}l}^l \left(\frac{l}{n\pi} \right) \sin \left(\frac{n\pi}{l} x \right) (0) dx \right] \\
&= \left[\left(-\frac{2hl}{n\pi} + \frac{2hx}{n\pi} \right) \cos \left(\frac{n\pi}{l} x \right) \right]_{\frac{1}{2}l}^l - \left[\left[\left(\frac{2hl}{n^2\pi^2} \right) \sin \left(\frac{n\pi}{l} x \right) \right]_{\frac{1}{2}l}^l - (0) \right] \\
&= \left[\left(-\frac{2hl}{n\pi} + \frac{2hx}{n\pi} \right) \cos \left(\frac{n\pi}{l} x \right) \right]_{\frac{1}{2}l}^l - \left[\left(\frac{2hl}{n^2\pi^2} \right) \sin \left(\frac{n\pi}{l} x \right) \right]_{\frac{1}{2}l}^l \\
&= \left[\left(\left(-\frac{2hl}{n\pi} + \frac{2hl}{n\pi} \right) \cos \left(\frac{n\pi}{l} (l) \right) \right) - \left(\left(-\frac{2hl}{n\pi} + \frac{hl}{n\pi} \right) \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) \right) \right] \\
&\quad - \left[\left(\left(\frac{2hl}{n^2\pi^2} \right) \sin \left(\frac{n\pi}{l} (l) \right) \right) - \left(\left(\frac{2hl}{n^2\pi^2} \right) \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right) \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\left((0) \cos(n\pi) \right) - \left(\left(-\frac{hl}{n\pi} \right) \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right) \right] \\
&\quad - \left[\left(\left(\frac{2hl}{n^2\pi^2} \right) \sin(n\pi) \right) - \left(\left(\frac{2hl}{n^2\pi^2} \right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right) \right] \\
&= \left[(0) - \left(\left(-\frac{hl}{n\pi} \right) \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right) \right] - \left[(0) - \left(\left(\frac{2hl}{n^2\pi^2} \right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right) \right] \\
&= \left(\frac{hl}{n\pi} \right) \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \left(\frac{2hl}{n^2\pi^2} \right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \frac{2}{l} \left[\left(-\frac{hl}{n\pi} \right) \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \left(\frac{2hl}{n^2\pi^2} \right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \left(\frac{hl}{n\pi} \right) \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{2hl}{n^2\pi^2} \right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] \\
&= \frac{2}{l} \left[\left(-\frac{hl}{n\pi} \right) \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \left(\frac{hl}{n\pi} \right) \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \left(\frac{2hl}{n^2\pi^2} \right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{2hl}{n^2\pi^2} \right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] \\
&= \frac{2}{l} \left[\left(\frac{2hl}{n^2\pi^2} \right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \left(\frac{2hl}{n^2\pi^2} \right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] \\
&= \frac{2}{l} \left[\left(\frac{4hl}{n^2\pi^2} \right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] \\
&= \frac{8h}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \tag{L.19}
\end{aligned}$$

Selanjutnya menggunakan kondisi awal pada *point* ke dua, untuk mendapatkan nilai β_n sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) e^{-\frac{k_d}{2}t} \left[\alpha_n \cos \sqrt{k_d^2 - 4\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)t} \right. \\
&\quad \left. - \beta_n \sin \sqrt{k_d^2 - 4\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)t} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \left[e^{\frac{-k_d t}{2}} \alpha_n \cos \sqrt{k_d^2 - 4\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)t} \right. \\
&\quad \left. - e^{\frac{-k_d t}{2}} \beta_n \sin \sqrt{k_d^2 - 4\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)t} \right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \frac{\partial}{\partial t} \left[e^{\frac{-k_d t}{2}} \alpha_n \cos \sqrt{k_d^2 - 4\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)t} \right. \\
&\quad \left. - e^{\frac{-k_d t}{2}} \beta_n \sin \sqrt{k_d^2 - 4\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)t} \right] \\
\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \left[e^{\frac{-k_d t}{2}} \left(\frac{-k_d}{2}\right) \alpha_n \cos \sqrt{k_d^2 - 4\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)t} \right. \\
&\quad \left. - e^{\frac{-k_d t}{2}} \alpha_n \sqrt{k_d^2 - 4\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)} \sin \sqrt{k_d^2 - 4\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)t} \right] \\
&\quad + \left[e^{\frac{-k_d t}{2}} \left(\frac{-k_d}{2}\right) \alpha_n \sin \sqrt{k_d^2 - 4\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)t} \right. \\
&\quad \left. - e^{\frac{-k_d t}{2}} \beta_n \sqrt{k_d^2 - 4\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)} \cos \sqrt{k_d^2 - 4\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)t} \right] \\
\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \left[\left(e^{\frac{-k_d(0)}{2}} \left(\frac{-k_d}{2}\right) \alpha_n \cos \sqrt{k_d^2 - 4\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)(0)} \right) \right. \\
&\quad \left. - e^{\frac{-k_d(0)}{2}} \alpha_n \sqrt{k_d^2 - 4\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)} \sin \sqrt{k_d^2 - 4\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)(0)} \right) \\
&\quad + \left(e^{\frac{-k_d(0)}{2}} \left(\frac{-k_d}{2}\right) \alpha_n \sin \sqrt{k_d^2 - 4\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)(0)} \right) \\
&\quad \left. - e^{\frac{-k_d(0)}{2}} \beta_n \sqrt{k_d^2 - 4\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)} \cos \sqrt{k_d^2 - 4\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)(0)} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \left[\left(\alpha_n \left(\frac{-k_d}{2}\right) (1) (1) - 0 \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(0 + \beta_n (1) \sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) \left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)} (1) \right) \right] \\
0 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \left[\alpha_n \left(\frac{-k_d}{2}\right) - \beta_n \sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) \left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)} \right] \\
0 &= \alpha_n \left(\frac{-k_d}{2}\right) - \beta_n \sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) \left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)} \\
\alpha_n \left(\frac{k_d}{2}\right) &= -\beta_n \sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) \left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)} \\
\beta_n &= -\frac{\alpha_n k_d}{2\sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) \left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}} \\
\beta_n &= -\frac{\frac{8h}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) k_d}{2\sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) \left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}} \tag{L.20}
\end{aligned}$$

Selanjutnya substitusikan nilai α_n pada persamaan (L.19) dan β_n pada persamaan (L.20) ke solusi umum $u(x, t)$ pada persamaan (L.17) untuk memperoleh solusi khusus untuk $u(x, t)$, sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
&u(x, t) \\
&= \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) e^{\frac{-k_d}{2}t} \left[\frac{8h}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos \sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) \left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)} t \right. \\
&\quad \left. + \frac{\frac{8h}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) k_d}{2\sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) \left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}} \sin \sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) \left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)} t \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& u(x, t) \\
&= \frac{8h}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) e^{-\frac{k_d}{2}t} \left[\cos \sqrt{k_d^2 - 4\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)t} \right. \\
& \left. + \frac{k_d}{2\sqrt{k_d^2 - 4\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}} \sin \sqrt{k_d^2 - 4\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)t} \right] \quad (L.21)
\end{aligned}$$

Persamaan (L.21) merupakan solusi khusus dari persamaan (L.1) yang menggambarkan gerak yang terjadi dawai Sasando.

Lampiran 2: Cek Kevalidan Solusi $u(x, t)$

Solusi $u(x, t)$ yang menggambarkan gerak dawai pada alat musik Sasando dinyatakan valid jika memenuhi kondisi awal dari dawai Sasando. Kondisi awal dawai yang diberikan adalah:

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{untuk setiap,} \quad 0 < x < l$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = 0 \quad \text{untuk setiap,} \quad 0 < x < l$$

dengan $f(x)$ adalah suatu fungsi yang mewakili bentuk awal dawai Sasando ketika dipetik yang nilainya telah diperoleh pada persamaan (L. 18), yaitu

$$f(x) = \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

Selanjutnya mengecek kevalidan solusi $u(x, t)$ terhadap kondisi awal

- $u(x, 0) = f(x)$

$$u(x, t)$$

$$= \frac{8h}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) e^{\frac{-k_d t}{2}} \left[\cos \sqrt{k_d^2 - 4\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)t} \right. \\ \left. + \frac{k_d}{2\sqrt{k_d^2 - 4\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}} \sin \sqrt{k_d^2 - 4\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)t} \right]$$

$$\begin{aligned}
& u(x, 0) \\
&= \frac{8h}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) e^{-\frac{k_d}{2}(0)} \left[\cos \sqrt{k_d^2 - 4\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}(0) \right. \\
& \left. + \frac{k_d}{2\sqrt{k_d^2 - 4\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}} \sin \sqrt{k_d^2 - 4\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}(0) \right] \\
& f(x) = \frac{8h}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) e^{(0)} \left[\cos(0) \right. \\
& \left. + \frac{k_d}{2\sqrt{k_d^2 - 4\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}} \sin(0) \right] \\
&= \frac{8h}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) (1) \left[(1) \right. \\
& \left. + \frac{k_d}{2\sqrt{k_d^2 - 4\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}} (0) \right] \\
&= \frac{8h}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) [1 + 0] \\
&= \frac{8h}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) [1] \\
&= \frac{8h}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \\
&= \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)
\end{aligned}$$

- $\frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = 0$

$$\begin{aligned}
& u(x, t) \\
&= \frac{8h}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) e^{-\frac{k_d}{2}t} \left[\cos \sqrt{k_d^2 - 4\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)t} \right. \\
&\quad \left. + \frac{k_d}{2\sqrt{k_d^2 - 4\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}} \sin \sqrt{k_d^2 - 4\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)t} \right] \\
&\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{8h}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) e^{-\frac{k_d}{2}t} \left[\cos \sqrt{k_d^2 - 4\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)t} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{k_d}{2\sqrt{k_d^2 - 4\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}} \sin \sqrt{k_d^2 - 4\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)t} \right] \right) \\
&\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) \\
&= \frac{8h}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \frac{\partial}{\partial t} \left(e^{-\frac{k_d}{2}t} \left[\cos \sqrt{k_d^2 - 4\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)t} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{k_d}{2\sqrt{k_d^2 - 4\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}} \sin \sqrt{k_d^2 - 4\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)t} \right] \right) \\
&\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) \\
&= \frac{8h}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \frac{\partial}{\partial t} \left(e^{-\frac{k_d}{2}t} \cos \sqrt{k_d^2 - 4\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)t} \right) \\
&\quad + e^{-\frac{k_d}{2}t} \frac{k_d}{2\sqrt{k_d^2 - 4\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}} \sin \sqrt{k_d^2 - 4\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)t} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) \\
&= \frac{8h}{n^2 \pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \left[\left(e^{-\frac{k_d}{2} t} \left(\frac{-k_d}{2}\right) \cos \sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) \left(\frac{1}{2} c^2 + 2 \frac{c^2}{l}\right)} t \right. \right. \\
&\quad - e^{-\frac{k_d}{2} t} \sin \sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) \left(\frac{1}{2} c^2 + 2 \frac{c^2}{l}\right)} t \sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) \left(\frac{1}{2} c^2 + 2 \frac{c^2}{l}\right)} \\
&\quad + \left(e^{-\frac{k_d}{2} t} \left(\frac{-k_d}{2}\right) \frac{k_d}{2 \sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) \left(\frac{1}{2} c^2 + 2 \frac{c^2}{l}\right)}} \sin \sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) \left(\frac{1}{2} c^2 + 2 \frac{c^2}{l}\right)} t \right. \\
&\quad \left. \left. + e^{-\frac{k_d}{2} t} \frac{k_d \left(\sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) \left(\frac{1}{2} c^2 + 2 \frac{c^2}{l}\right)} \right)}{2 \sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) \left(\frac{1}{2} c^2 + 2 \frac{c^2}{l}\right)}} \cos \sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) \left(\frac{1}{2} c^2 + 2 \frac{c^2}{l}\right)} t \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) \\
&= \frac{8h}{n^2 \pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \left[\left(e^{-\frac{k_d}{2}(0)} \left(\frac{-k_d}{2}\right) \cos \sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) \left(\frac{1}{2} c^2 + 2 \frac{c^2}{l}\right)} (0) \right. \right. \\
&\quad - e^{-\frac{k_d}{2}(0)} \sin \sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) \left(\frac{1}{2} c^2 + 2 \frac{c^2}{l}\right)} (0) \sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) \left(\frac{1}{2} c^2 + 2 \frac{c^2}{l}\right)} \\
&\quad + \left(e^{-\frac{k_d}{2}(0)} \left(\frac{-k_d}{2}\right) \frac{k_d}{2 \sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) \left(\frac{1}{2} c^2 + 2 \frac{c^2}{l}\right)}} \sin \sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) \left(\frac{1}{2} c^2 + 2 \frac{c^2}{l}\right)} (0) \right. \\
&\quad \left. \left. + e^{-\frac{k_d}{2}(0)} \frac{k_d \left(\sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) \left(\frac{1}{2} c^2 + 2 \frac{c^2}{l}\right)} \right)}{2 \sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) \left(\frac{1}{2} c^2 + 2 \frac{c^2}{l}\right)}} \cos \sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) \left(\frac{1}{2} c^2 + 2 \frac{c^2}{l}\right)} (0) \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{8h}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \left[\left(e^{(0)} \left(\frac{-k_d}{2}\right) \cos(0) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - e^{(0)} \sin(0) \sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) \left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(e^{(0)} \left(\frac{-k_d}{2}\right) \frac{k_d}{2\sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) \left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}} \sin(0) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + e^{(0)} \left(\frac{k_d}{2}\right) \cos(0) \right) \right] \\
&= \frac{8h}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \left[\left((1) \left(\frac{-k_d}{2}\right) (1) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (1) (0) \sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) \left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left((1) \left(\frac{-k_d}{2}\right) \frac{k_d}{2\sqrt{k_d^2 - 4 \left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) \left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)}} (0) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (1) \left(\frac{k_d}{2}\right) (1) \right) \right] \\
&= \frac{8h}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \left[\left(\left(\frac{-k_d}{2}\right) - (0) \right) + \left((0) + \left(\frac{k_d}{2}\right) \right) \right] \\
&= \frac{8h}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \left[\left(\frac{-k_d}{2}\right) + \left(\frac{k_d}{2}\right) \right] \\
&= \frac{8h}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) [(0)] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Dari kedua *point* di atas menunjukkan bahwa solusi $u(x,t)$ yang menggambarkan masalah gerak dawai Sasando memenuhi kondisi awal dan kondisi batas yang ditentukan. Dari sini dapat disimpulkan bahwa solusi $u(x,t)$ yang menggambarkan masalah gerak dawai Sasando valid.



Lampiran 3: Program Matlab untuk Simpangan Dawai Sasando $u(x, t)$

```

clc,clear;
h=2;
c=1;
l=16;
k=1.5;
x=0:0.2:16;
t=0:0.5:10;
t=[t 10];
% solusi persamaan metode karakteristik
U=zeros(length(x), length(t));
for j=1:length(t)
    for i=2:length(x)
        for b=1:1
            U(i,j)=((8*h)/(((2*b-1)^2)*(pi^2)))*sin(((2*b-1)*pi)/l)*x(i))*exp((-k/2)*t(j))*cos(sqrt((k^2)-4*((2*b-1)*pi/l)^2)*(0.5*(c*1)^2-(2/l)*c^2))*t(j))+((k/2*sqrt((k^2)-4*((2*b-1)*pi/l)^2)*(0.5*(c*1)^2-(2/l)*c^2)))*sin(sqrt((k^2)-4*((2*b-1)*pi/l)^2)*(0.5*(c*1)^2-(2/l)*c^2))*t(j)))));
        end
    end
end
% menampilkan grafik (1) solusi persamaan
figure(1)
plot(x,U,'-')
ylim([-3 3])
title('grafik 2D solusi u(x,t) yang berubah terhadap nilai x')
xlabel('x')
ylabel('U(x,t)')
grid on
% menyimpan gambar
print('gambar_1','-dpng')

% menampilkan grafik (2) solusi persamaan
figure(2)
surf(t,x,U)
title('grafik 3D solusi u(x,t) yang berubah terhadap nilai x dan waktu t')
xlabel('t')
ylabel('x')
zlabel('U(x,t)')
print('gambar_2','-dpng')

```



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Dian Nan Brylliant
NIM : 13610112
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Analisis Konstruksi Model Gerak Dawai pada Alat Musik Sasando
Pembimbing I : Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si
Pembimbing II : H. Wahyu H. Irawan, M.Pd

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1	14 Februari 2017	Konsultasi Bab I Bab II	1. [Signature]
2	03 Maret 2017	Konsultasi Bab II	2. [Signature]
3	10 April 2017	Konsultasi Bab III	3. [Signature]
4	10 April 2017	Konsultasi Keagamaan Bab I	4. [Signature]
5	13 April 2017	Konsultasi Keagamaan Bab II	5. [Signature]
6	01 Agustus 2017	Konsultasi Bab III	6. [Signature]
7	06 Septembar 2017	Konsultasi Bab III	7. [Signature]
8	16 Septembar 2017	Konsultasi Bab III	8. [Signature]
9	02 Oktober 2017	Konsultasi keseluruhan	9. [Signature]
10	02 Oktober 2017	Konsultasi keagamaan Keseluruhan	10. [Signature]

Malang, 02 Oktober 2017
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 2003 12 1 001