RAINBOW CONNECTION NUMBER GRAF LINTASAN, GRAF TANGGA, DAN HASIL PERKALIANNYA

SKRIPSI

OLEH
LU'LU'UL BARROH
NIM. 11610063

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018

RAINBOW CONNECTION NUMBER GRAF LINTASAN, GRAF TANGGA, DAN HASIL PERKALIANNYA

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Lu'lu'ul Barroh
NIM. 11610063

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018

***RAINBOW CONNECTION NUMBER* GRAF LINTASAN, GRAF TANGGA, DAN HASIL PERKALIANNYA**

SKRIPSI

Oleh
Lu'lu'ul Barroh
NIM. 11610063

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 12 Februari 2018

Pembimbing I,

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

Pembimbing II,

Dr. Ahmad Barizi, M.A
NIP. 19731212 199803 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

RAINBOW CONNECTION NUMBER GRAF LINTASAN, GRAF TANGGA, DAN HASIL PERKALIANNYA

SKRIPSI

Oleh
Lu'lu'ul Barroh
NIM. 11610063

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 20 Februari 2018

Penguji Utama	: Evawati Alisah, M.Pd	....
Ketua Penguji	: Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D	....
Sekretaris Penguji	: Dr. Abdussakir, M.Pd	....
Anggota Penguji	: Dr. Ahmad Barizi, M.A	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Lu'lu'ul Barroh

NIM : 11610063

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul : *Rainbow Connection Number* Graf Lintasan, Graf Tangga, dan Hasil Perkaliannya

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 12 Februari 2018
Yang membuat pernyataan

METERAI TEMPEL
2390EAEF095684350
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Lu'lu'ul Barroh
NIM. 11610063

MOTO

"Sesungguhnya Allah tidak akan mengubah nasib suatu kaum, kecuali kaum itu yang mengubahnya"

(Q.S. ar-Ra'du ayat 11)

PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

Dengan rasa syukur kepada Allah Swt penulis persembahkan skripsi ini kepada: Ayahanda Muhammad Su'udi, ibunda Fatimah Ambarwati, serta kedua adik tersayang Mishbahul Munir dan Fahmi Mubarok Dawam. Miftahkhul Khoiriyah yang selalu semangat mendorong penulis untuk menyelesaikan skripsi ini.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Alhamdulillahirrabbil 'alamin, segala puji bagi Allah Swt yang telah memberikan rahmat, berkah, dan hidayah-Nya sehingga sehingga penulis mampu menyelesaikan skripsi yang berjudul "*Rainbow Connection Number* Graf Lintasan, Graf Tangga, dan Hasil Perkaliannya" ini dengan baik. Sholawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada Baginda Nabi Muhammad Saw yang telah menunjukkan dan mengubah dari jalan jahiliyah/kegelapan ke jalan yang terang benderang seperti sekarang ini.

Penulis menyadari banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Oleh karena itu, iringan do'a dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan, terutama kepada:

1. Prof Dr. H. Abdul Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan bimbingan, nasihat dan arahan untuk segera menyelesaikan skripsi ini.
5. Dr. Ahmad Barizi, M.A, selaku pembimbing II yang telah memberikan arahan dan bimbingan selama penyusunan skripsi ini.

6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen yang telah memberikan bimbingan dalam perkuliahan.
7. Kedua orang tua dan seluruh keluarga yang memberikan dukungan berupa motivasi dan do’a sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik.
8. Teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2011 yang telah membantu dalam penyelesaian skripsi ini.
9. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik berupa materil maupun moril.

Akhir kata, semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat dan menambah wawasan keilmuan bagi yang membacanya.

Wassalamu’alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, Februari 2018

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Barroh, Lu'lu'ul. 2018. ***Rainbow Connection Number* Graf Lintasan, Graf Tangga, dan Hasil Perkaliannya**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Abdussakir, M.Pd. (II) Dr. Ahmad Barizi, M.A.

Kata kunci: pewarnaan sisi, *rainbow connection number*, graf lintasan, graf tangga

Misalkan G adalah graf terhubung tak trivial. Didefinisikan pewarnaan sisi $c : E(G) \rightarrow \{1,2,\dots,k\}, k \in \mathbb{N}$ adalah pewarnaan sedemikian sehingga setiap sisi bertetangga mungkin memiliki warna yang sama. Misalkan $u, v \in V(G)$ dan P adalah lintasan dari u ke v. Suatu lintasan u-v P dikatakan *rainbow path* jika tidak terdapat dua sisi di P yang memiliki warna sama. Graf G bersifat *rainbow connection* jika terdapat satu *rainbow path* yang menghubungkan setiap dua titik berbeda di G. Jadi, pewarnaan sisi yang menyebabkan G bersifat *rainbow connection* disebut *rainbow coloring* dari graf G. Minimum banyaknya k warna yang diperlukan untuk mewarnai sisi G sehingga terdapat *rainbow k-coloring* disebut *rainbow connection number* dari G, ditulis $rc(G)$.

Tujuan penelitian ini adalah mencari pola umum yang nantinya dijadikan suatu teorema dari *rainbow connection number* pada graf P_n, graf T_n, dan graf $P_n \times T_n$. Hasil penelitian ini adalah:

1. $rc(P_n) = n$-1 untuk $n \geq 2$.
2. $rc(T_n) = n$ untuk $n \geq 2$.
3. $rc(P_n \times T_n) = 2n$-1 untuk $n \geq 2$.

Untuk penelitian selanjutnya diharapkan dapat menemukan bermacam-macam teorema tentang *rainbow connection number* dari graf lainnya dan juga operasi lainnya.

ABSTRACT

Barroh, Lu'lu'ul. 2018. **Rainbow Connection Number of Path, Ladder, and its Product**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisor: (I) Dr. Abdussakir, M.Pd. (II) Dr. Ahmad Barizi, M.A.

Keywords: side coloring, rainbow connection number, graph path, graph ladder

Let G be a nontrivial connected graph and define a coloring $c: E(G) \to \{1,2,\dots,k\}, k \in \mathbb{N}$ of the edges of G, where adjacent edges may have the same colored. Let $u, v \in V(G)$ and P be the path from u to v. P is a rainbow path if no two edges of P are colored the same. The graph G is rainbow connected if G contains a rainbow path for every two vertices of G. Thus, the edge coloring that causes G is a rainbow connected is called rainbow coloring of G. The minimum k for which there exists a rainbow k-coloring of the edges of G is the rainbow connection number $rc(G)$ of G.

The purpose of this research is to find a general formula which will be used as theorems of rainbow connection number of P_n, T_n, and $P_n \times T_n$. The results from the research are:

1. $rc(P_n) = n$-1 for $n \geq 2$.
2. $rc(T_n) = n$ for $n \geq 2$.
3. $rc(P_n \times T_n) = 2n$-1 for $n \geq 2$.

For further research the writer suggest to determine other theorems about rainbow connection number from the other graphs and the other operations.

المخلص

برة، لؤلؤ. ٢٠١٨ . ***Rainbow Connection Number* من *Path*، *Ladder*، ومنتجها** .
بحث جامعي، ثعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعة الحكومية الإسلامية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف: (١) الدكتور عبد الشاكر الماجستير (٢) الدكتور أحمد باريزي الماجستير.

الكلمات الرئيسية: التلوين الأضلاع، *rainbow connection number*، *path*، *ladder*

مثال G يكون مخططات متصلا بديهي وتحديد التلوين $c : E(G) \rightarrow \{1,2,\dots,k\}$، $k \in \mathbb{N}$ من الأضلاع من G، حيث الأضلاع المجاورة قد يكون لها نفس اللون. مثال $u,v \in V(G)$ و P يكون *path* من u إلى v. P هو *rainbow path* إذ لم يكون هناك أضلاعان من P هما نفس اللون. المخطط G هو *rainbow connected* إذا كان G يحتوي على *rainbow path* لكل الرؤوسان من G. وهكذا التلوين الأضلاع ذلك يسبب G هو *rainbow connected* يسمى *rainbow coloring* من G. الحدالادنى k التي يوجدفيها *rainbow k-coloring* من الأضلاع من G هو $rc(G)$ *rainbow connection number* من G.

الغرض من هذه الدراسة هو لإيجاد صيغة عامية سوف تستخدم كمنظريات من *rainbow connection number* من P_n، T_n، و $P_n \times T_n$. تنائجا لدراسة هي:

١ $rc(P_n) = n-1$ ل $n \geq 2$.

٢ $rc(T_n) = n$ ل $n \geq 2$.

٣ $rc(P_n \times T_n) = 2n-1$ ل $n \geq 2$.

لمزيد من الدراسة يقترح الكاتب لتحديد المنظريات الأخرى حول *rainbow connection number* من المخططات الأخرى والعملية الأخرى.

BAB I

PENDAHULUAN`

1.1 Latar Belakang

Matematika pada dasarnya adalah ilmu tentang hitung menghitung atau dalam bahasa Arab disebut al-hisab. Banyak ayat dalam al-Quran yang menjelaskan tentang perhitungan (ukuran). Allah Swt berfirman di dalam al-Quran surat al-Furqân ayat 2 yang berbunyi:

ٱلَّذِى لَهُۥ مُلْكُ ٱلسَّمَـٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُن لَّهُۥ
شَرِيكٌ فِى ٱلْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَىْءٍ فَقَدَّرَهُۥ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

"Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan Dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu bagi-Nya dalam kekuasaan(Nya), dan Dia telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya" (Q.S. al-Furqân:2).

Ayat di atas menjelaskan bahwa segala sesuatu yang ada di alam ini ada ukurannya, ada hitungan-hitungannya, ada rumusnya, atau ada persamaannya. Alhi matematika atau fisika tidak membuat suatu rumus sedikit pun. Mereka hanya menemukan rumus atau persamaan. Rumus-rumus yang ada sekarang bukan diciptakan manusia sendiri, tetapi sudah disediakan. Manusia hanya menemukan dan menyimbolkan dalam bahasa matematika (Abdussakir, 2007:80).

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang dapat diterapkan dalam berbagai bidang ilmu dan juga dapat diterapkan untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari. Teori graf dapat merumuskan suatu permasalahan yang rumit menjadi sederhana. Graf dapat dipresentasikan dengan menyatakan objek dengan titik atau *vertex* dan hubungan antar objek dinyatakan dengan sisi atau *edge*. Menurut Abdussakir, dkk (2009:4) graf G adalah pasangan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik (*vertex*), dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut sisi (*edge*).

Masalah yang cukup menarik untuk dibahas dalam teori graf adalah pewarnaan sisi. Suatu pewarnaan sisi pada graf G adalah pewarnaan semua sisi G sedemikian hingga setiap 2 sisi yang terkait pada titik yang sama mendapatkan warna yang berbeda. Sebuah pewarnaan sisi di G dengan k buah warna disebut sebuah *pewarnaan-sisi-k* pada graf G diringkas dengan *pewarnaan-k*. Bilangan khromatik memiliki hubungan yang sangat erat dalam menentukan pewarnaan sisi suatu graf G. Bilangan khromatik graf G adalah bilangan yang menyatakan minimum banyaknya warna yang diperlukan untuk mewarnai semua sisi G sedemikian hingga setiap 2 sisi G yang terkait ke titik yang sama mendapatkan warna yang berbeda. Bilangan khromatik dari graf G dilambangkan dengan $\chi'(G)$, adalah bilangan k terkecil sehingga G dapat diwarnai dengan k warna (Budayasa, 2007:175).

Dalam teori graf konsep pewarnaan pada suatu graf terus mengalami perkembangan, salah satunya adalah tentang *rainbow connection number*. Menurut Chartrand, dkk (2008:85), misalkan G adalah graf terhubung tak trivial. Didefinisikan pewarnaan sisi $c : E(G) \to \{1,2,\ldots,k\}, k \in \mathbb{N}$ adalah pewarnaan sedemikian sehingga setiap sisi bertetangga mungkin memiliki warna yang sama. Misalkan $u, v \in V(G)$ dan P adalah lintasan dari u ke v. Suatu lintasan u-v *path* P dikatakan *rainbow path* jika tidak terdapat dua sisi di P yang memiliki warna sama. Graf G bersifat *rainbow connection number* jika terdapat satu *rainbow path* yang menghubungkan setiap dua titik berbeda di G. Jadi, pewarnaan sisi yang menyebabkan G bersifat *rainbow connection number* disebut *rainbow coloring* dari graf G. Minimum banyaknya k warna yang diperlukan untuk mewarnai sisi G sehingga terdapat *rainbow k-coloring* disebut *rainbow connection number* dari G, ditulis $rc(G)$. Suatu *rainbow coloring* yang menggunakan warna sebanyak $rc(G)$ disebut *minimum rainbow coloring*.

Eksentrisitas titik u di G adalah jarak terbesar dari u ke semua titik di G. Diameter dari graf G, dinotasikan dengan $diam(G)$, adalah eksentrisitas terbesar dari semua titik di G (abdussakir, dkk, 2009:56-57). Jika terdapat graf terhubung tak trivial G dan memiliki diameter yang dinotasikan dengan $diam(G)$ yaitu jarak maksimum antara dua titik di G maka $rc(G) \geq diam(G)$.

Beberapa studi tentang *rainbow connection number* telah banyak dikembangkan. Pada tahun 2013, Manu Basavaraju, L. Sunil Chandra, Deepak Rajendraprasad, dan Arunselvan Ramaswamy, telah mengembangkan *rainbow connection number* dengan tiga operasi *graph product* (yaitu *cartesian product*, *lexicographic product*, dan *strong product*) dan operasi graf berpangkat. Sedangkan pada tahun 2017, Maneesha Sakalle dan Richa Jain, menciptakan graf terhubung yang berbeda dan menentukan *rainbow connection number*nya.

Berdasarkan dua penelitian tersebut, penulis tertarik untuk meneliti tentang *rainbow connection number* pada graf lintasan, graf tangga, dan perkalian kartesius antara kedua graf tersebut. Oleh karena itu, penulis akan mengkaji *rainbow connection number* dengan mengambil judul skripsi "*Rainbow Connection Number* Graf Lintasan, Graf Tangga, dan Hasil Perkaliannya".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang permasalahan tersebut, rumusan masalah dari skripsi ini adalah bagaimana pola umum $rc(P_n), rc(T_n),$ dan $rc(P_n \times T_n)$?.

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah diatas, maka tujuan skripsi ini adalah untuk mengetahui pola umum $rc(P_n), rc(T_n),$ dan $rc(P_n \times T_n)$.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat mengetahui pola umum $rc(P_n), rc(T_n),$ dan $rc(P_n \times T_n)$ dalam penulisan skripsi ini adalah menambah pengetahuan baru dalam bidang teori graf, khususnya yang mempelajari tentang *rainbow connection number* dan memberikan motivasi pada peneliti lain untuk meneliti lebih luas tentang pencarian *rainbow connection number* pada graf-graf hasil operasi yang lain.

1.5 Batasan masalah

Adapun Batasan masalah dalam penulisan skripsi ini adalah:

1. Graf yang digunakan adalah graf lintasan dan graf tangga.
2. Operasi yang digunakan adalah perkalian kartesius.
3. Pewarnaan yang digunakan adalah pewarnaan sisi pada graf.
4. Penulis hanya membahas tentang *rainbow connection number*.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah penelitian kepustakaan (*library research*). Adapun langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menggambar graf lintasan, graf tangga satu persatu dengan order mulai dari dua sampai didapatkan pola umum dari $rc(P_n), rc(T_n)$, dan $rc(P_n \times T_n)$.
2. Mencari jarak untuk setiap dua titik berbeda pada graf tersebut.
3. Menentukan eksentrisitas titik dari masing-masing titik graf tersebut.
4. Menentukan diameter graf tersebut.
5. Melabeli sisi-sisi graf tersebut dengan warna 1,2,3,…,k.
6. Menentukan *rainbow path* dari graf tersebut.
7. Menentukan *rainbow connection number* graf tersebut.
8. Menentukan pola umum *rainbow connection number* graf tersebut, sehingga didapatkan suatu teorema.
9. Membuktikan teorema tersebut.
10. Kesimpulan

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan digunakan untuk mempermudah dalam memahami penelitian ini. Dalam sistematika penulisan penelitian ini terbagi menjadi empat bab dan masing-masing bab dibagi dalam subbab sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Bab ini berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bab ini menjelaskan tentang graf, graf terhubung, jarak, operasi pada graf, graf lintasan, graf tangga, pewarnaan sisi graf, *rainbow connection number*, dan ukuran dan formula dalam pandangan al-Quran.

Bab III Pembahasan

Bab ini menguraikan secara keseluruhan langkah-langkah yang disebutkan dalam metode penelitian dan menjawab semua rumusan masalah.

Bab IV Penutup

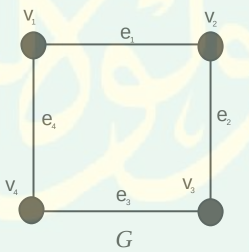
Bab ini berisi tentang kesimpulan penelitian dan saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Graf

Graf G adalah pasangan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut *titik*, dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut *sisi* (Abdussakir, dkk, 2009:4-5). Menurut Chartrand dan Lesniak (1996:1), banyaknya unsur di $V(G)$ disebut *order* dari G dan dilambangkan dengan $n(G)$, sedangkan banyaknya unsur di $E(G)$ disebut *size* (ukuran) dari G dan dilambangkan dengan $m(G)$.



Gambar 2.1 Graf G

Perhatikan Gambar 2.1, graf G mempunyai 4 titik sehingga order G adalah $n = 4$. Graf G mempunyai 4 sisi sehingga ukuran graf G adalah $m = 4$. Graf G dengan himpunan titik dan sisi masing-masing

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$E(G) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_1, v_4)\}$$

dapat juga ditulis dengan

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

dengan

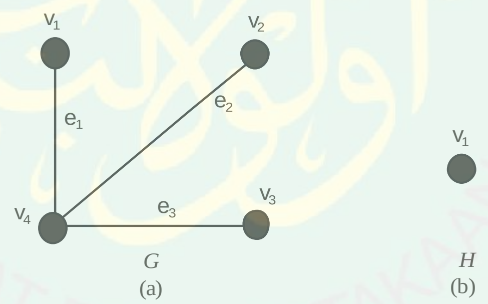
$e_1 = (v_1, v_2)$

$e_2 = (v_2, v_3)$

$e_3 = (v_3, v_4)$

$e_4 = (v_1, v_4)$

Mengacu pada definisi graf di atas, maka $V(G)$ tidak boleh kosong, sedangkan $E(G)$ boleh kosong. Jadi suatu graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu pun, tetapi titiknya harus ada, minimal satu. Graf yang hanya mempunyai satu titik tanpa sisi dinamakan graf trivial (Munir, 2009:356). Sedangkan graf yang memiliki dua titik atau lebih disebut dengan graf tak trivial.



Gambar 2.2: (a) Graf Tak Trivial G; (b) Graf Trivial H

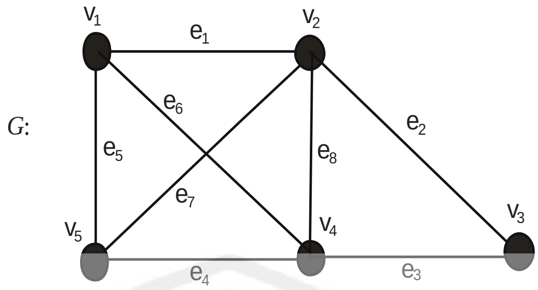
Gambar 2.2 menunjukkan bahwa $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $V(H) = \{v_1\}$ sehingga banyak titik pada graf G adalah 4 dan graf H adalah 1. Jadi graf G merupakan graf tak trivial sedangkan graf H merupakan graf trivial.

Chartrand dan Lesniak (1996:1) menyatakan bahwa sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G. Maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*), u dan e serta v dan e

disebut terkait langsung (*incident*). Selanjutnya, untuk memudahkan sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = uv$ atau $e = vu$. Contohnya, graf G pada Gambar 2.2 (a), titik v_1 dan v_4 terhubung langsung, demikian juga dengan titik v_2 dan v_4, serta titik v_3 dan v_4. Titik v_1 dan v_2 tidak terhubung langsung, demikian juga dengan titik v_1 dan v_3, serta titik v_2 dan v_3. Sedangkan sisi e_1 terkait langsung dengan titik v_1 dan v_4. Sisi e_2 terkait langsung dengan titik v_2 dan v_4. sisi e_3 terkait langsung dengan titik v_3 dan v_4. Sisi e_1 tidak terkait langsung dengan titik v_2 dan v_3.

2.2 Graf Terhubung

Menurut Chartrand dan Lesniak (1996:16-17), misalkan u dan v adalah titik di graf G (yang tidak harus berbeda). Suatu jalan (*walk*) u-v pada graf G adalah sebuah barisan berhingga (tak kosong) yang berselang-seling $W: u = (u_0, e_1, u_1, e_2, u_2, \dots, u_{k-1}, e_k, u_k) = v$ antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik u dan diakhiri dengan titik v, dengan $e_i = u_{i-1}u_i$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, k$ adalah sisi di G. u_0 disebut titik awal dan titik u_k disebut titik akhir. Sedangkan titik-titik $u_1, u_2, \dots, u_{k-1}$ disebut titik internal; dan k disebut panjang jalan W. Panjang jalan W adalah banyaknya sisi dalam W. Jika $u_0 \neq u_1$, maka W disebut jalan terbuka. Jika $u_0 = u_1$, maka W disebut jalan tertutup. Jalan yang tidak memiliki sisi disebut jalan trivial. Jalan u-v yang semua sisinya berbeda disebut jejak (*trail*) u-v. Jalan u-v yang semua sisi dan titiknya berbeda disebut lintasan (*path*) u-v. Jalan tertutup W tak trivial yang semua sisinya berbeda disebut sirkuit *(circuit)*. Jalan tertutup W tak trivial yang semua titiknya berbeda disebut sikel *(cycle)*.



Gambar 2.3 Graf Terhubung

Perhatikan Gambar 2.3. Untuk titik v_1 dan v_2, v_1, e_1, v_2 merupakan jalan v_1-v_2. Jika e_1 merupakan sisi rangkap maka jalan dinyatakan menggunakan barisan titik dan sisi. Oleh karena sisi e_1 bukan merupakan sisi rangkap maka jalan dinyatakan menggunakan barisan titik saja. Sehingga jalan v_1-v_2 bisa dinyatakan dengan v_1, v_2. Dari Gambar 2.3 di atas, maka:

a. $W_1 = v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_8, v_2, e_7, v_5$ adalah jalan dari titik v_1 ke titik v_5 atau bisa juga ditulis dengan jalan v_1-v_5. Jalan W_1 merupakan jalan terbuka karena $u_0 \neq u_1$ dan merupakan trail karena semua sisinya berbeda. Jalan W_1 mempunyai panjang 5.

b. $W_2 = v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_8, v_2, e_1, v_1$ adalah jalan tertutup karena $u_0 = u_1$ dan bukan trail karena ada sisi yang sama pada jalan W_2. Jalan W_2 mempunyai panjang 5.

c. $W_3 = v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_5$ adalah jalan terbuka dan merupakan lintasan karena semua sisi dan titiknya berbeda. Jalan W_3 mempunyai panjang 4.

d. $W_4 = v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_5, e_5, v_1$ adalah jalan tertutup dan merupakan sirkuit karena semua sisinya berbeda. Jalan W_4 adalah sikel karena jalan W_4 merupakan jalan tertutup tak trivial yang semua titiknya berbeda. Dengan demikian setiap sikel pasti merupakan sirkuit, tetapi tidak semua sirkuit merupakan sikel. Jalan W_4 mempunyai panjang 5.

Sebuah lintasan geodesik antara titik u dan titik v adalah lintasan u-v dengan panjang minimum. Lintasan geodesik antara titik u dan titik v disingkat dengan geodesik u-v. Misalnya, perhatikan Gambar 2.3. Untuk titik v_1 dan v_4, lintasan v_1, e_1, v_2, e_8, v_4 merupakan lintasan v_1-v_4 dengan panjang dua. Selanjutnya lintasan v_1, e_5, v_5, e_4, v_4 merupakan lintasan v_1-v_4 dengan panjang dua. Sedangkan lintasan v_1, e_6, v_4 merupakan lintasan v_1-v_4 dengan panjang satu. Oleh karena itu lintasan v_1, e_6, v_4 merupakan lintasan geodesik antara titik v_1 dan v_4, karena lintasan tersebut memiliki panjang yang paling minimal dibandingkan lintasan lainnya.

Misalkan u dan v adalah titik berbeda di graf G. Maka titik u dan v dapat dikatakan terhubung (*connected*), jika terdapat lintasan u-v di G. Suatu graf G dapat dikatakan terhubung, jika untuk setiap titik u dan v di G terhubung. Sebaliknya graf G disebut tidak terhubung (*disconnected graph*) (Chartrand dan Lesniak, 1996:18). Misalnya pada graf G pada Gambar 2.3, maka untuk titik v_1 dan v_5 terdapat lintasan $v_1, e_1, v_2, e_8, v_4, e_4, v_5$ dari v_1 ke v_5, sehingga titik v_1 dan v_5 dapat dikatakan terhubung.

2.3 Jarak

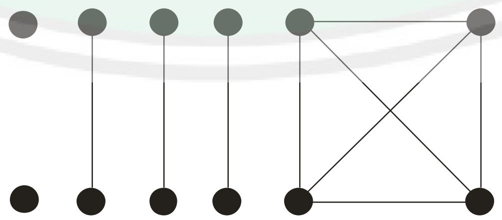
Abdussakir, dkk (2009:56) menyatakan misalkan G graf terhubung dan misalkan u dan v titik di G. Jarak (*distance*) dari u dan v di G, dinotasikan dengan $d(u, v)$, adalah panjang lintasan terpendek u-v di G.

Eksentrisitas (*eccentricity*) titik u di G, dinotasikan dengan $e(u)$, adalah jarak terbesar dari u ke semua titik di G. jadi, $e(u) = maks\ \{d(u,v)|v \in V(G)\}$ Jika u dan v adalah titik pada G sehingga $e(u) = d(u,v)$, maka v disebut titik eksentrik dari u. Dengan kata lain, titik v disebut titik eksentrik dari u jika jarak dari u ke v sama dengan eksentrisitas dari u. Radius dari graf G, dinotasikan dengan $rad(G)$, adalah eksentrisitas terkecil dari semua titik G. Jadi, $rad(G) = min\ \{e(v)|v \in V(G)\}$. Diameter dari graf G, dinotasikan dengan $diam(G)$, adalah eksentrisitas terbesar dari semua titik di G. Jadi, $diam(G) = maks\ \{e(v)|v \in V(G)\}$ (Abdussakir, dkk, 2009:56-57).

2.4 Operasi pada Graf

2.4.1. Gabungan (*Union*)

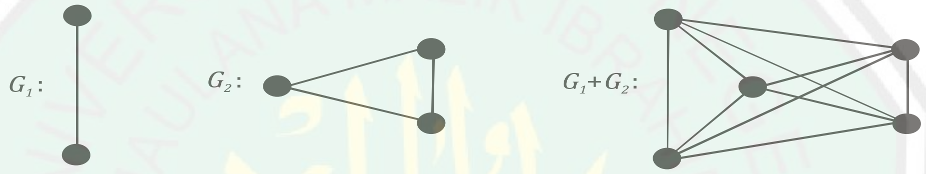
Gabungan dua graf G_1 dan G_2, ditulis $G = G_1 \cup G_2$, adalah graf dengan $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$. Jika graf G merupakan gabungan dari sebanyak n graf H, $n \geq 2$, maka ditulis $G = nH$. Graf $2K_1 \cup 3K_2 \cup K_4$ dapat digambarkan sebagai berikut (Abdussakir, dkk, 2009:33).



Gambar 2.4 Graf $2K_1 \cup 3K_2 \cup K_4$

2.4.2. Penjumlahan (*Join*)

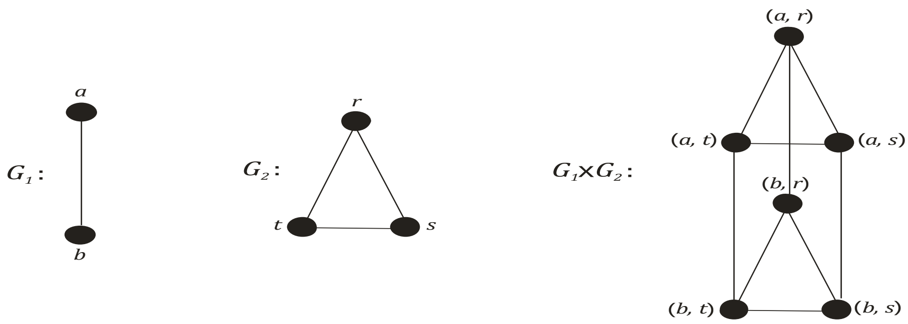
Penjumlahan dua graf G_1 dan G_2, ditulis $G = G_1 + G_2$, adalah graf dengan $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv | u \in V(G_1)\ dan\ v \in V(G_2)\}$. Menggunakan operasi penjumlahan, maka jelas bahwa $K_{m,n} \cong \overline{K}_m + \overline{K}_n$. Berikut ini adalah contoh lain untuk operasi penjumlahan dua graf (Abdussakir, dkk, 2009:33).



Gambar 2.5 Operasi Penjumlahan Graf G_1 dan G_2

2.4.3. Perkalian Kartesius

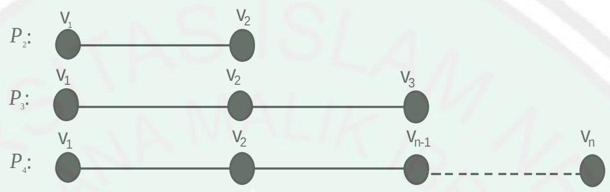
Perkalian kartesius dua graf G_1 dan G_2, ditulis $G = G_1 \times G_2$, adalah graf dengan $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$ dan dua titik (u_1, u_2) dan (v_1, v_2) dari G terhubung langsung (*adjacent*) jika dan hanya jika $u_1 = v_1$ dan $u_2v_2 \in E(G_2)$ atau $u_2 = v_2$ dan $u_1v_1 \in E(G_1)$. Berikut ini adalah contoh untuk perkalian kartesius dari G_1 dan G_2 (Abdussakir, dkk, 2009:34).



Gambar 2.6 Operasi Perkalian Kartesius antara Graf G_1 dan G_2

2.5 Graf Lintasan

Graf lintasan (*path*) adalah graf yang terdiri dari lintasan tunggal. Graf lintasan dengan n titik dinotasikan dengan P_n. P_n memiliki n-1 sisi (Budayasa, 2007:6).



Gambar 2.7 Graf Lintasan

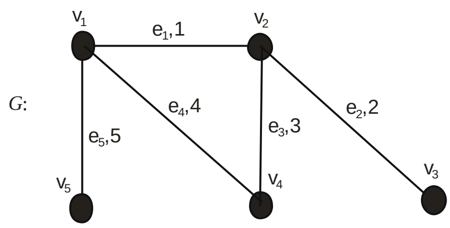
2.6 Graf Tangga

Graf Tangga yang dinotasikan sebagai T_n adalah suatu graf yang dibentuk dari operasi hasil kali kartesius antara graf lintasan dengan dua titik dan graf lintasan dengan n titik yaitu $T_n = P_2 \times P_n$ (Galian, 2007:12).

2.7 Pewarnaan Sisi Graf

Sebuah pewarnaan sisi pada graf G adalah pewarnaan semua sisi G sedemikian hingga setiap 2 sisi yang terkait pada titik yang sama mendapatkan warna yang berbeda. Sebuah pewarnaan sisi di G dengan k buah warna disebut sebuah *pewarnaan-sisi-k* pada graf G diringkas dengan *pewarnaan-k* (Budayasa, 2007:175).

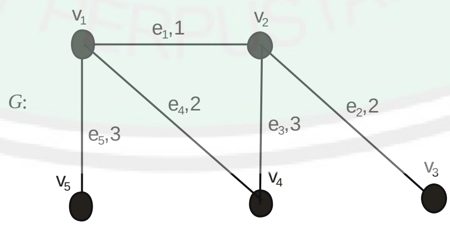
Misalnya, sebuah pewarnaan-5 graf G diperlihatkan pada gambar berikut.



Gambar 2.8 Pewarnaan-5 pada Graf G

Pilih warna 1 untuk sisi e_1. Sisi e_2 diwarnai dengan warna 2. Sisi e_3 diwarnai dengan warna 3. Sisi e_4 diwarnai dengan warna 4. Dan sisi e_5 diwarnai dengan warna 5.

Bilangan khromatik (*chromatic number*) memiliki hubungan yang sangat erat dalam menentukan pewarnaan sisi suatu graf G. Bilangan khromatik graf G adalah bilangan yang menyatakan minimum banyaknya warna yang diperlukan untuk mewarnai semua sisi G sedemikian hingga setiap 2 sisi G yang terkait ke titik yang sama mendapatkan warna yang berbeda. Bilangan khromatik dari graf G dilambangkan dengan $\chi'(G)$, adalah bilangan k terkecil sehingga G dapat diwarnai dengan k warna (Budayasa, 2007:175).



Gambar 2.9 Pewarnaan-3 pada Graf G

Perhatikan Gambar 2.9. Gambar tersebut menunjukkan bahwa graf G pada Gambar 2.8 dapat diwarnai menggunakan minimal 3 warna, sehingga bilangan kromatiknya atau $\chi'(G)$=3.

2.8 *Rainbow Connection Number*

Konsep *rainbow connection number* merupakan salah satu variasi dari pewarnaan sisi yang diperkenalkan oleh Chartrand, Johns, McKeon dan Zhang pada tahun 2008. Konsep baru ini dilatarbelakangi oleh ditemukannya kelemahan dalam pengiriman informasi pada agen pemerintah. Departemen Keamanan Dalam Negeri Amerika Serikat dibentuk pada tahun 2003 sebagai respon atas ditemukannya kelemahan dalam pengiriman informasi setelah terjadinya serangan teroris pada 11 September 2001. Keamanan informasi harus terjaga karena berhubungan langsung dengan keamanan nasional dan juga terdapat prosedur yang memungkinkan para agen pemerintah untuk mengakses informasi, sehingga setiap jalur pengiriman informasi membutuhkan kata sandi angka yang banyak. Muncul pertanyaan, berapa jumlah minimal angka yang dibutuhkan sedemikian sehingga tidak terjadi pengulangan kata sandi angka pada setiap satu lintasan komunikasi atau lebih antara dua agen pemerintah (Li, dkk, 2011:1-2).

Menurut Chartrand, dkk (2008:85), situasi tersebut dapat dimodelkan dengan konsep *rainbow connection number*. Misalkan G adalah graf terhubung tak trivial. Didefinisikan pewarnaan sisi $c : E(G) \to \{1,2,\ldots,k\}, k \in \mathbb{N}$ adalah pewarnaan sedemikian sehingga setiap sisi bertetangga mungkin memiliki warna yang sama. Misalkan $u, v \in V(G)$ dan P adalah lintasan dari u ke v. Suatu lintasan u-v P dikatakan *rainbow path* jika tidak terdapat dua sisi di P yang memiliki warna sama. Graf G bersifat *rainbow connection* jika terdapat satu *rainbow path* yang menghubungkan setiap dua titik berbeda di G. Jadi, pewarnaan sisi yang menyebabkan G bersifat *rainbow connection* disebut *rainbow coloring* dari graf G. Jika menggunakan k warna maka c disebut *rainbow k-coloring*.

Bilangan minimum k warna yang diperlukan untuk mewarnai sisi G sehingga terdapat *rainbow k-coloring* disebut *rainbow connection number* dari G, ditulis $rc(G)$. Suatu *rainbow coloring* yang menggunakan warna sebanyak $rc(G)$ disebut *minimum rainbow coloring*.

Selain dalam pengamanan informasi rahasia antar agen pemerintah, *rainbow connection number* juga diterapkan pada bidang jaringan. Misalkan G menyatakan suatu jaringan seluler. Misalkan akan dikirim suatu pesan antar dua titik, pengiriman informasi tersebut dengan syarat bahwa rute antar dua titik (direpresentasikan sebagai sisi pada lintasan di G) diberikan suatu saluran (saluran direpresentasikan dengan warna). Akan diminimalkan jumlah saluran berbeda yang digunakan. Jumlah saluran minimal yang digunakan dimodelkan dengan *rainbow connection number* pada graf G (Li, dkk, 2011:2). Permasalahannya adalah bagaimana cara untuk menentukan *rainbow connection number* tersebut. Selanjutnya akan diberikan Teorema 2.1 untuk mempermudah menentukan *rainbow connection number*.

Teorema 2.1

Misalkan G adalah graf terhubung tak trivial maka $rc(G) \geq diam(G)$.

Bukti:

Misalkan G adalah graf dengan pewarnaan sisi c dan $diam(G) = k$. Sehingga berdasarkan definisi dari jarak dan eksentrisitas maka

$k = diam(G) = maks\ \{e(v)|v \in V(G)\} = maks\ \{d(u,v)|v \in V(G)\}$

Hal ini berarti terdapat dua titik di graf G, misal titik u dan v yang dihubungkan jarak u-v dengan panjang k. Oleh karena jarak u-v adalah jarak terpanjang, sehingga minimal warna yang diperlukan untuk mewarnai graf G

sedemikian sehingga setiap dua titik u dan v di G terdapat *rainbow path* u-v adalah k-warna. Oleh karena itu $rc(G) \geq k$ maka $rc(G) \geq diam(G)$ (Hutami, 2017:50).

2.9 Ukuran dan Formula dalam Pandangan Al-Quran

Alam semesta memuat bentuk-bentuk dalam konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdussakir, 2007:79).

Dalam al-Quran surat al-Qamar ayat 49 disebutkan:

إِنَّا كُلَّ شَىْءٍ خَلَقْنَـٰهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

"Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran" (Q.S. al-Qamar:49).

Dalam ayat lain juga disebutkan:

ٱلَّذِى لَهُۥ مُلْكُ ٱلسَّمَـٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُن لَّهُۥ شَرِيكٌ فِى ٱلْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَىْءٍ فَقَدَّرَهُۥ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

"Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan Dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu bagi - Nya dalam kekuasaan (Nya), dan Dia telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya" (Q.S. al-Furqân:2).

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Graf Lintasan

3.1.1 *Rainbow Connection Number* pada Graf Lintasan P_2

Untuk $n = 2$ dinotasikan dengan P_2. Gambar dari graf P_2 adalah sebagai berikut:

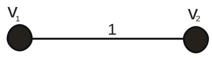
Gambar 3.1 Graf P_2

Sesuai Gambar 3.1, maka dapat dibuat tabel jarak untuk setiap dua titik u dan v pada graf P_2.

Tabel 3.1 Jarak Setiap Dua Titik dan Eksentrisitas Setiap Titik pada Graf P_2

<table>
<tr><td colspan="5">$d(u,v)$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Titik u</td><td colspan="3">Titik v</td><td rowspan="2">$e(u)$</td></tr>
<tr><td></td><td>v_1</td><td>v_2</td></tr>
<tr><td>v_1</td><td></td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>v_2</td><td>1</td><td></td><td>1</td></tr>
</table>

Berdasarkan Tabel 3.1, maka diperoleh $diam(P_2) = 1$. Sehingga menurut Teorema 2.1 diperoleh bahwa $rc(P_2) \geq 1$. Akan dibuktikan $rc(P_2) = 1$, berikan *rainbow* 1-*coloring* pada graf P_2, dengan himpunan warna $\{1\}$, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.2.



Gambar 3.2 Graf P_2 dengan Pewarnaan Sisi-1

Dari Gambar 3.2, maka akan dicari *rainbow path* untuk setiap dua titik u dan v pada graf P_2 dengan panjang (u, v) seperti yang dijelaskan pada Tabel 3.2.

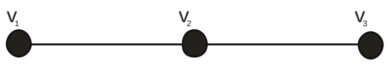
Tabel 3.2 *Rainbow Path* untuk Setiap Dua Titik pada Graf P_2

Rainbow Path u-v			
Titik u	Titik v		
		v_1	v_2
	v_1		$v_1 v_2$
	v_2	$v_2 v_1$	

Tabel 3.2 menunjukkan bahwa untuk setiap dua titik u dan v pada graf P_2 terdapat *rainbow path* u-v pada graf P_2. Jadi terdapat *rainbow* 1-*coloring* pada graf P_2 dengan kata lain $rc(P_2) \leq 1$. Karena $rc(P_2) \geq 1$ dan $rc(P_2) \leq 1$ maka $rc(P_2) = 1$.

3.1.2 *Rainbow Connection Number* pada Graf Lintasan P_3

Untuk $n = 3$ dinotasikan dengan P_3. Gambar dari graf P_3 adalah sebagai berikut:



Gambar 3.3 Graf P_3

Sesuai Gambar 3.3, maka dapat dibuat tabel jarak untuk setiap dua titik u dan v pada graf P_3.

Tabel 3.3 Jarak Setiap Dua Titik dan Eksentrisitas Setiap Titik pada Graf P_3

$d(u,v)$					
Titik u	Titik v				$e(u)$
		v_1	v_2	v_3	
	v_1		1	2	2
	v_2	1		1	1
	v_3	2	1		2

Berdasarkan Tabel 3.3, maka diperoleh $diam(P_3) = 2$. Sehingga menurut Teorema 2.1 diperoleh bahwa $rc(P_3) \geq 2$. Akan dibuktikan $rc(P_3) = 2$, berikan *rainbow* 2-*coloring* pada graf P_3, dengan himpunan warna {1, 2}, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.4.

Gambar 3.4 Graf P_3 dengan Pewarnaan Sisi-2

Dari Gambar 3.4, maka akan dicari *rainbow path* untuk setiap dua titik u dan v pada graf P_3 dengan panjang (u, v) seperti yang dijelaskan pada Tabel 3.4.

Tabel 3.4 *Rainbow Path* untuk Setiap Dua Titik pada Graf P_3

Rainbow Path u-v				
Titik u	Titik v			
		v_1	v_2	v_3
	v_1		$v_1 v_2$	$v_1 v_2 v_3$
	v_2	$v_2 v_1$		$v_2 v_3$
	v_3	$v_3 v_2 v_1$	$v_3 v_2$	

Tabel 3.4 menunjukkan bahwa untuk setiap dua titik u dan v pada graf P_3 terdapat *rainbow path* u-v pada graf P_3. Jadi terdapat *rainbow* 2-*coloring* pada graf P_3 dengan kata lain $rc(P_3) \leq 2$. Karena $rc(P_3) \geq 2$ dan $rc(P_3) \leq 2$ maka $rc(P_3) = 2$.

3.1.3 *Rainbow Connection Number* pada Graf Lintasan P_4

Untuk $n = 4$ dinotasikan dengan P_4. Gambar dari graf P_4 adalah sebagai berikut:

Gambar 3.5 Graf P_4

Sesuai Gambar 3.5, maka dapat dibuat tabel jarak untuk setiap dua titik u dan v pada graf P_4.

Tabel 3.5 Jarak Setiap Dua Titik dan Eksentrisitas Setiap Titik pada Graf P_4

$d(u,v)$					
Titik u	Titik v				$e(u)$
		v_1	v_2	v_3	v_4	
	v_1		1	2	3	3
	v_2	1		1	2	2
	v_3	2	1		1	2
	v_4	3	2	1		3

Berdasarkan Tabel 3.5, maka diperoleh $diam(P_4) = 3$. Sehingga menurut Teorema 2.1 diperoleh bahwa $rc(P_4) \geq 3$. Akan dibuktikan $rc(P_4) = 3$, berikan *rainbow* 3-*coloring* pada graf P_4, dengan himpunan warna $\{1, 2, 3\}$, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.6.

Gambar 3.6 Graf P_4 dengan Pewarnaan Sisi-3

Dari Gambar 3.6, maka akan dicari *rainbow path* untuk setiap dua titik u dan v pada graf P_4 dengan panjang (u, v) seperti yang dijelaskan pada Tabel 3.6.

Tabel 3.6 *Rainbow Path* untuk Setiap Dua Titik pada Graf P_4

Rainbow Path u-v					
Titik u	Titik v				
		v_1	v_2	v_3	v_4
	v_1		v_1v_2	$v_1v_2v_3$	$v_1v_2v_3v_4$
	v_2	v_2v_1		v_2v_3	$v_2v_3v_4$
	v_3	$v_3v_2v_1$	v_3v_2		v_3v_4
	v_4	$v_4v_3v_2v_1$	$v_4v_3v_2$	v_4v_3	

Tabel 3.6 menunjukkan bahwa untuk setiap dua titik u dan v pada graf P_4 terdapat *rainbow path* u-v pada graf P_4. Jadi terdapat *rainbow* 3-*coloring* pada graf P_4 dengan kata lain $rc(P_4) \leq 3$. Karena $rc(P_4) \geq 3$ dan $rc(P_4) \leq 3$ maka $rc(P_4) = 3$.

3.1.4 *Rainbow Connection Number* pada Graf Lintasan P_5

Untuk $n = 5$ dinotasikan dengan P_5. Gambar dari graf P_5 adalah sebagai berikut:

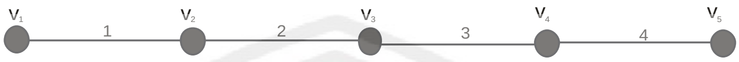
Gambar 3.7 Graf P_5

Sesuai Gambar 3.7, maka dapat dibuat tabel jarak untuk setiap dua titik u dan v pada graf P_5.

Tabel 3.7 Jarak Setiap Dua Titik dan Eksentrisitas Setiap Titik pada Graf P_5

$d(u,v)$							
Titik u	Titik v						$e(u)$
		v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	
	v_1		1	2	3	4	4
	v_2	1		1	2	3	3
	v_3	2	1		1	2	2
	v_4	3	2	1		1	3
	v_5	4	3	2	1		4

Berdasarkan Tabel 3.7, maka diperoleh $diam(P_5) = 4$. Sehingga menurut Teorema 2.1 diperoleh bahwa $rc(P_5) \geq 4$. Akan dibuktikan $rc(P_5) = 4$, berikan *rainbow* 4-*coloring* pada graf P_5, dengan himpunan warna {1, 2, 3, 4}, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.8.



Gambar 3.8 Graf P_5 dengan Pewarnaan Sisi-4

Dari Gambar 3.8, maka akan dicari *rainbow path* untuk setiap dua titik u dan v pada graf P_5 dengan panjang (u, v) seperti yang dijelaskan pada Tabel 3.8.

Tabel 3.8 *Rainbow Path* untuk Setiap Dua Titik pada Graf P_5

Rainbow Path u-v						
Titik u	Titik v					
		v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
	v_1		v_1v_2	$v_1v_2v_3$	$v_1v_2v_3v_4$	$v_1v_2v_3v_4v_5$
	v_2	v_2v_1		v_2v_3	$v_2v_3v_4$	$v_2v_3v_4v_5$
	v_3	$v_3v_2v_1$	v_3v_2		v_3v_4	$v_3v_4v_5$
	v_4	$v_4v_3v_2v_1$	$v_4v_3v_2$	v_4v_3		v_4v_5
	v_5	$v_5v_4v_3v_2v_1$	$v_5v_4v_3v_2$	$v_5v_4v_3$	v_5v_4	

Tabel 3.8 menunjukkan bahwa untuk setiap dua titik u dan v pada graf P_5 terdapat *rainbow path* u-v pada graf P_5. Jadi terdapat *rainbow* 4-*coloring* pada graf P_5 dengan kata lain $rc(P_5) \leq 4$. Karena $rc(P_5) \geq 4$ dan $rc(P_5) \leq 4$ maka $rc(P_5) = 4$.

Dari data *rainbow connection number* graf P_n maka dapat dibuat tabel sebagai berikut:

Tabel 3.9 *Rainbow Connection Number* Graf P_n

n	Graf	*Rainbow Connection Number*
2	P_2	$rc(P_2) = 1$
3	P_3	$rc(P_3) = 2$
4	P_4	$rc(P_4) = 3$
5	P_5	$rc(P_5) = 4$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	P_n	$rc(P_n) = n$-1, $\forall\, n \geq 2$

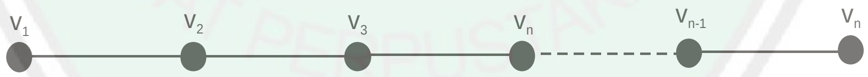
Dari Tabel 3.9 maka dapat dibuat pola umum sebagai berikut:

Teorema 3.1

Misal P_n adalah graf lintasan dengan n titik maka *rainbow connection number* pada graf lintasan P_n dengan $n \geq 2$ adalah $rc(P_n) = n$-1.

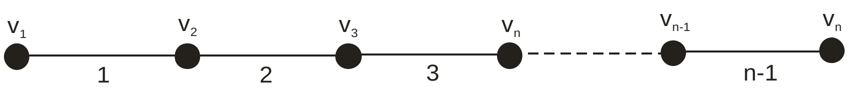
Bukti:

Misalkan graf P_n adalah graf dengan pewarnaan sisi c. Diketahui bahwa graf P_n memiliki $diam(P_n) = n$-1. Berdasarkan Teorema 2.1 maka diperoleh $rc(P_n) \geq n$-1. Graf P_n dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.9 Graf P_n

Dengan mewarnai setiap sisi pada graf P_n dengan $v_i v_{i+1}$ berwarna i ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$-1) maka diperoleh:



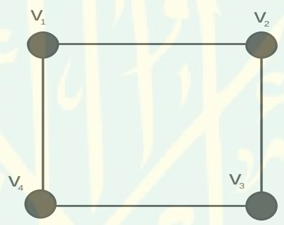
Gambar 3.10 Pewarnaan Sisi Graf P_n

Dapat dilihat bahwa antara dua titik berbeda di graf P_n terhubung oleh *rainbow path*. Jadi $rc(P_n) \leq n$-1. Karena $rc(P_n) \geq n$-1 dan $rc(P_n) \leq n$-1 maka $rc(P_n) = n$-1 untuk $n \geq 2$.

3.2 Graf Tangga

3.2.1 *Rainbow Connection Number* pada Graf Tangga T_2

Untuk $n = 2$ dinotasikan dengan T_2. Gambar dari graf T_2 adalah sebagai berikut:



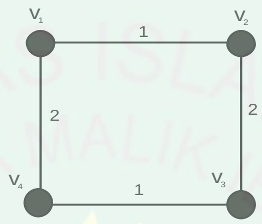
Gambar 3.11 Graf T_2

Sesuai Gambar 3.11, maka dapat dibuat tabel jarak untuk setiap dua titik u dan v pada graf T_2.

Tabel 3.10 Jarak Setiap Dua Titik dan Eksentrisitas Setiap Titik pada Graf T_2

$d(u,v)$						
Titik u	Titik v					$e(u)$
		v_1	v_2	v_3	v_4	
	v_1		1	2	1	2
	v_2	1		1	2	2
	v_3	2	1		1	2
	v_4	1	2	1		2

Berdasarkan Tabel 3.10, maka diperoleh $diam(T_2) = 2$. Sehingga menurut Teorema 2.1 diperoleh bahwa $rc(T_2) \geq 2$. Akan dibuktikan $rc(T_2) = 2$, berikan *rainbow* 2-*coloring* pada graf T_2, dengan himpunan warna {1, 2}, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.10.



Gambar 3.12 Graf T_2 dengan Pewarnaan Sisi-2

Dari Gambar 3.12, maka akan dicari *rainbow path* untuk setiap dua titik u dan v pada graf T_2 dengan panjang (u, v) seperti yang dijelaskan pada Tabel 3.11.

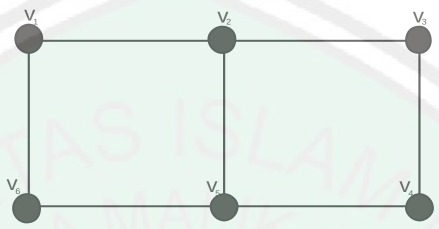
Tabel 3.11 *Rainbow Path* untuk Setiap Dua Titik pada Graf T_2

Rainbow Path u-v					
Titik u	Titik v				
		v_1	v_2	v_3	v_4
	v_1		v_1v_2	$v_1v_2v_3$	v_1v_4
	v_2	v_2v_1		v_2v_3	$v_2v_3v_4$
	v_3	$v_3v_2v_1$	v_3v_2		v_3v_4
	v_4	v_4v_1	$v_4v_3v_2$	v_4v_3	

Tabel 3.11 menunjukkan bahwa untuk setiap dua titik u dan v pada graf T_2 terdapat *rainbow path* u-v pada graf T_2. Jadi terdapat *rainbow* 2-*coloring* pada graf T_2 dengan kata lain $rc(T_2) \leq 2$. Karena $rc(T_2) \geq 2$ dan $rc(T_2) \leq 2$ maka $rc(T_2) = 2$.

3.2.2 *Rainbow Connection Number* pada Graf Tangga T_3

Untuk $n = 3$ dinotasikan dengan T_3. Gambar dari graf T_3 adalah sebagai berikut:



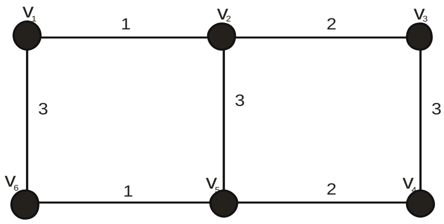
Gambar 3.13 Graf T_3

Sesuai Gambar 3.13, maka dapat dibuat tabel jarak untuk setiap dua titik u dan v pada graf T_3.

Tabel 3.12 Jarak Setiap Dua Titik dan Eksentrisitas Setiap Titik pada Graf T_3

$d(u,v)$								
Titik u	Titik v							$e(u)$
		v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	
	v_1		1	2	3	2	1	3
	v_2	1		1	2	1	2	2
	v_3	3	2		1	2	3	3
	v_4	3	2	1		1	2	3
	v_5	2	1	2	1		1	2
	v_6	1	2	3	2	1		3

Berdasarkan Tabel 3.12, maka diperoleh $diam(T_3) = 3$. Sehingga menurut Teorema 2.1 diperoleh bahwa $rc(T_3) \geq 3$. Akan dibuktikan $rc(T_3) = 3$, berikan *rainbow* 3-*coloring* pada graf T_3, dengan himpunan warna {1, 2, 3}, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.14.



Gambar 3.14 Graf T_3 dengan Pewarnaan Sisi-3

Dari Gambar 3.14, maka akan dicari *rainbow path* untuk setiap dua titik u dan v pada graf T_3 dengan panjang (u, v) seperti yang dijelaskan pada Tabel 3.13.

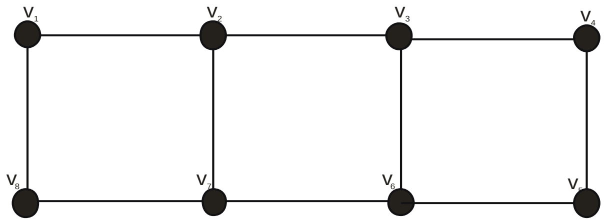
Tabel 3.13 *Rainbow Path* untuk Setiap Dua Titik pada Graf T_3

Rainbow Path u-v							
Titik u	Titik v						
		v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
	v_1		v_1v_2	$v_1v_2v_3$	$v_1v_2v_3v_4$	$v_1v_2v_5$	v_1v_6
	v_2	v_2v_1		v_2v_3	$v_2v_3v_4$	v_2v_5	$v_2v_5v_6$
	v_3	$v_3v_2v_1$	v_3v_2		v_3v_4	$v_3v_4v_5$	$v_3v_4v_5v_6$
	v_4	$v_4v_3v_2v_1$	$v_4v_3v_2$	v_4v_3		v_4v_5	$v_4v_5v_6$
	v_5	$v_5v_2v_1$	v_5v_2	$v_5v_2v_3$	v_5v_4		v_5v_6
	v_6	v_6v_1	$v_6v_1v_2$	$v_6v_1v_2v_3$	$v_6v_5v_4$	v_6v_5	

Tabel 3.13 menunjukkan bahwa untuk setiap dua titik u dan v pada graf T_3 terdapat *rainbow path u-v* pada graf T_3. Jadi terdapat *rainbow* 3-*coloring* pada graf T_3 dengan kata lain $rc(T_3) \leq 3$. Karena $rc(T_3) \geq 3$ dan $rc(T_3) \leq 3$ maka $rc(T_3) = 3$.

3.2.3 *Rainbow Connection Number* pada Graf Tangga T_4

Untuk $n = 4$ dinotasikan dengan T_4. Gambar dari graf T_4 adalah sebagai berikut:



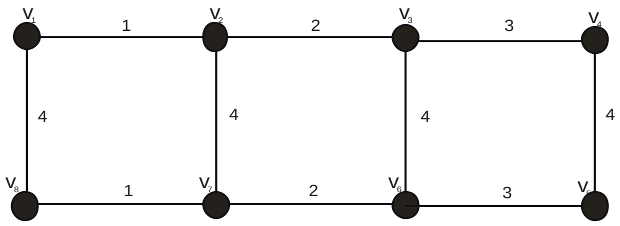
Gambar 3.15 Graf T_4

Sesuai Gambar 3.15, maka dapat dibuat tabel jarak untuk setiap dua titik u dan v pada graf T_4.

Tabel 3.14 Jarak Setiap Dua Titik dan Eksentrisitas Setiap Titik pada Graf T_4

$d(u,v)$										
Titik u	Titik v									$e(u)$
		v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	
	v_1		1	2	3	4	3	2	1	4
	v_2	1		1	2	3	2	1	2	3
	v_3	2	1		1	2	1	2	3	3
	v_4	3	2	1		1	2	3	4	4
	v_5	4	3	2	1		1	2	3	4
	v_6	3	2	1	2	1		1	2	3
	v_7	2	1	2	3	2	1		1	3
	v_8	1	2	3	4	3	2	1		4

Berdasarkan Tabel 3.14, maka diperoleh $diam(T_4) = 4$. Sehingga menurut Teorema 2.1 diperoleh bahwa $rc(T_4) \geq 4$. Akan dibuktikan $rc(T_4) = 4$, berikan *rainbow* 4-*coloring* pada graf T_4, dengan himpunan warna {1, 2, 3, 4}, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.16.



Gambar 3.16 Graf T_4 dengan Pewarnaan Sisi-4

Dari Gambar 3.16, maka akan dicari *rainbow path* untuk setiap dua titik u dan v pada graf T_4 dengan panjang (u, v) seperti yang dijelaskan pada Tabel 3.15.

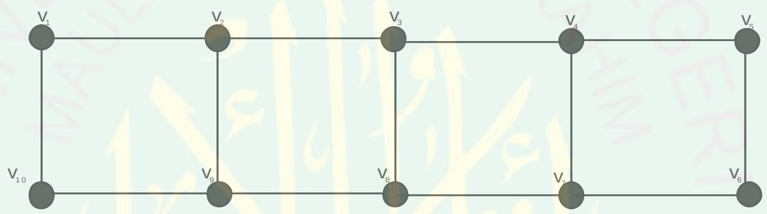
Tabel 3.15 *Rainbow Path* untuk Setiap Dua Titik pada Graf T_4

Rainbow Path u-v					
Titik u	Titik v				
		v_1	v_2	v_3	v_4
	v_1		v_1v_2	$v_1v_2v_3$	$v_1v_2v_3v_4$
	v_2	v_2v_1		v_2v_3	$v_2v_3v_4$
	v_3	$v_3v_2v_1$	v_3v_2		v_3v_4
	v_4	$v_4v_3v_2v_1$	$v_4v_3v_2$	v_4v_3	
	v_5	$v_5v_4v_3v_2v_1$	$v_5v_4v_3v_2$	$v_5v_4v_3$	v_5v_4
	v_6	$v_6v_3v_2v_1$	$v_6v_3v_2$	v_6v_3	$v_6v_3v_4$
	v_7	$v_7v_2v_1$	v_7v_2	$v_7v_2v_3$	$v_7v_2v_3v_4$
	v_8	v_8v_1	$v_8v_1v_2$	$v_8v_1v_2v_3$	$v_8v_1v_2v_3v_4$
Rainbow Path u-v					
Titik u	Titik v				
		v_5	v_6	v_7	v_8
	v_1	$v_1v_2v_3v_4v_5$	$v_1v_2v_3v_6$	$v_1v_2v_7$	v_1v_8
	v_2	$v_2v_3v_4v_5$	$v_2v_3v_6$	v_2v_7	$v_2v_7v_8$
	v_3	$v_3v_4v_5$	v_3v_6	$v_3v_6v_7$	$v_3v_6v_7v_8$
	v_4	v_4v_5	$v_4v_5v_6$	$v_4v_5v_6v_7$	$v_4v_5v_6v_7v_8$
	v_5		v_5v_6	$v_5v_6v_7$	$v_5v_6v_7v_8$
	v_6	v_6v_5		v_6v_7	$v_6v_7v_8$
	v_7	$v_7v_6v_5$	v_7v_6		v_7v_8
	v_8	$v_8v_7v_6v_5$	$v_8v_7v_6$	v_8v_7	

Tabel di atas menunjukkan bahwa untuk setiap dua titik u dan v pada graf T_4 terdapat *rainbow path* u-v pada graf T_4. Jadi terdapat *rainbow* 4-*coloring* pada graf T_4 dengan kata lain $rc(T_4) \leq 4$. Karena $rc(T_4) \geq 4$ dan $rc(T_4) \leq 4$ maka $rc(T_4) = 4$.

3.2.4 *Rainbow Connection Number* pada Graf Tangga T_5

Untuk $n = 5$ dinotasikan dengan T_5. Gambar dari graf T_5 adalah sebagai berikut:



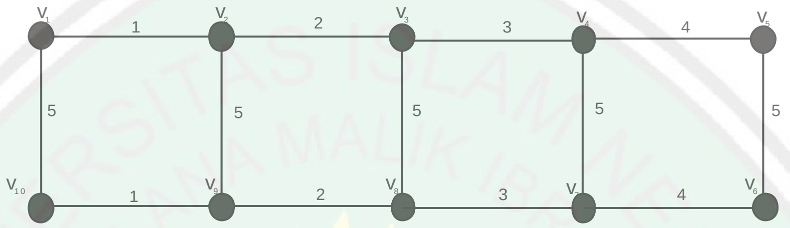
Gambar 3.17 Graf T_5

Sesuai Gambar 3.17, maka dapat dibuat tabel jarak untuk setiap dua titik u dan v pada graf T_5.

Tabel 3.16 Jarak Setiap Dua Titik dan Eksentrisitas Setiap Titik pada Graf T_5

$d(u,v)$											
Titik u	Titik v										e(u)
		v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	
	v_1		1	2	3	4	5	4	3	2	1	5
	v_2	1		1	2	3	4	3	2	1	2	4
	v_3	2	1		1	2	3	2	1	2	3	3
	v_4	3	2	1		1	2	1	2	3	4	4
	v_5	4	3	2	1		1	2	3	4	5	5
	v_6	5	4	3	2	1		1	2	3	4	5
	v_7	4	3	2	1	2	1		1	2	3	4
	v_8	3	2	1	2	3	2	1		1	2	3
	v_9	2	1	2	3	4	3	2	1		1	4
	v_{10}	1	2	3	4	5	4	3	2	1		5

Berdasarkan Tabel 3.16, maka diperoleh $diam(T_5) = 5$. Sehingga menurut Teorema 2.1 diperoleh bahwa $rc(T_5) \geq 5$. Akan dibuktikan $rc(T_5) = 5$, berikan *rainbow* 5-*coloring* pada graf T_5, dengan himpunan warna {1, 2, 3, 4, 5}, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.18.



Gambar 3.18 Graf T_5 dengan Pewarnaan Sisi-4

Dari Gambar 3.18, maka akan dicari *rainbow path* untuk setiap dua titik u dan v pada graf T_5 dengan panjang (u, v) seperti yang dijelaskan pada Tabel 3.17 dan Tabel 3.18.

Tabel 3.17 *Rainbow Path* untuk Setiap Dua Titik pada Graf T_5

Rainbow Path u-v						
Titik u	Titik v					
		v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
	v_1		v_1v_2	$v_1v_2v_3$	$v_1v_2v_3v_4$	$v_1v_2v_3v_4v_5$
	v_2	v_2v_1		v_2v_3	$v_2v_3v_4$	$v_2v_3v_4v_5$
	v_3	$v_3v_2v_1$	v_3v_2		v_3v_4	$v_3v_4v_5$
	v_4	$v_4v_3v_2v_1$	$v_4v_3v_2$	v_4v_3		v_4v_5
	v_5	$v_5v_4v_3v_2v_1$	$v_5v_4v_3v_2$	$v_5v_4v_3$	v_5v_4	
	v_6	$v_6v_5v_4v_3v_2v_1$	$v_6v_5v_4v_3v_2$	$v_6v_5v_4v_3$	$v_6v_5v_4$	v_6v_5
	v_7	$v_7v_4v_3v_2v_1$	$v_7v_4v_3v_2$	$v_7v_4v_3$	v_7v_4	$v_7v_6v_5$
	v_8	$v_8v_3v_2v_1$	$v_8v_3v_2$	v_8v_3	$v_8v_3v_4$	$v_8v_7v_6v_5$
	v_9	$v_9v_2v_1$	v_9v_2	$v_9v_2v_3$	$v_9v_2v_3v_4$	$v_9v_8v_7v_6v_5$
	v_{10}	$v_{10}v_1$	$v_{10}v_1v_2$	$v_{10}v_1v_2v_3$	$v_{10}v_1v_2v_3v_4$	$v_{10}v_1v_2v_3v_4v_5$

Tabel 3.18 Lanjutan Tabel 3.17

Rainbow Path u-v					
Titik u	Titik v				
	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}
v_1	$v_1v_2v_3v_4v_5v_6$	$v_1v_2v_3v_4v_7$	$v_1v_2v_3v_8$	$v_1v_2v_9$	v_1v_{10}
v_2	$v_2v_3v_4v_5v_6$	$v_2v_3v_4v_7$	$v_2v_3v_8$	v_2v_9	$v_2v_9v_{10}$
v_3	$v_3v_4v_5v_6$	$v_3v_4v_7$	v_3v_8	$v_3v_8v_9$	$v_3v_8v_9v_{10}$
v_4	$v_4v_5v_6$	v_4v_7	$v_4v_7v_8$	$v_4v_7v_8v_9$	$v_4v_7v_8v_9v_{10}$
v_5	v_5v_6	$v_5v_6v_7$	$v_5v_6v_7v_8$	$v_5v_6v_7v_8v_9$	$v_5v_6v_7v_8v_9v_{10}$
v_6		v_6v_7	$v_6v_7v_8$	$v_6v_7v_8v_9$	$v_6v_7v_8v_9v_{10}$
v_7	v_7v_6		v_7v_8	$v_7v_8v_9$	$v_7v_8v_9v_{10}$
v_8	$v_8v_7v_6$	v_8v_7		v_8v_9	$v_8v_9v_{10}$
v_9	$v_9v_8v_7v_6$	$v_9v_8v_7$	v_9v_8		v_9v_{10}
v_{10}	$v_{10}v_9v_8v_7v_6$	$v_{10}v_9v_8v_7$	$v_{10}v_9v_8$	$v_{10}v_9$	

Tabel-tabel di atas menunjukkan bahwa untuk setiap dua titik u dan v pada graf T_5 terdapat *rainbow path* u-v pada graf T_5. Jadi terdapat *rainbow* 5-*coloring* pada graf T_5 dengan kata lain $rc(T_5) \leq 5$. Karena $rc(T_5) \geq 5$ dan $rc(T_5) \leq 5$ maka $rc(T_5) = 5$.

Dari data *rainbow connection number* graf T_n maka dapat dibuat tabel sebagai berikut:

Tabel 3.19 *Rainbow Connection Number* Graf T_n

n	Graf	*Rainbow Connection Number*
2	T_2	$rc(T_2) = 2$
3	T_3	$rc(T_3) = 3$
4	T_4	$rc(T_4) = 4$
5	T_5	$rc(T_5) = 5$
⋮	⋮	⋮
n	T_n	$rc(T_n) = n, \forall\, n \geq 2$

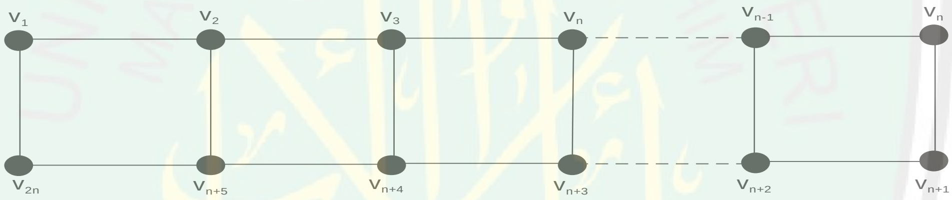
Dari Tabel 3.19 maka dapat dibuat pola umum sebagai berikut:

Teorema 3.2

Misal T_n adalah suatu graf yang dibentuk dari operasi hasil kali kartesius antara graf P_2 dan graf P_n maka *rainbow connection number* pada graf T_n dengan $n \geq 2$ adalah $rc(T_n) = n$.

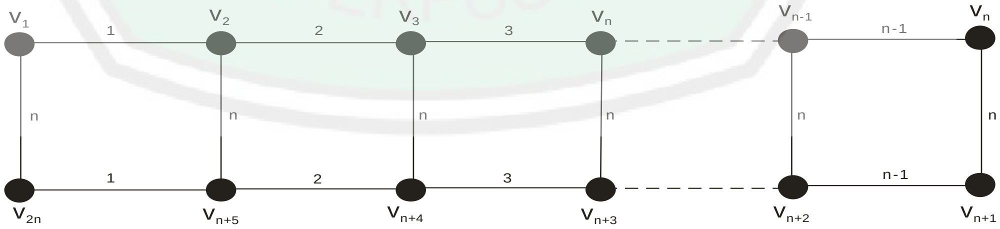
Bukti:

Misalkan graf T_n adalah graf dengan pewarnaan sisi c. Diketahui bahwa graf T_n memiliki $diam(T_n) = n$. Berdasarkan Teorema 2.1 maka diperoleh $rc(T_n) \geq n$. Graf T_n dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.19 Graf T_n

Dengan mewarnai setiap sisi pada graf T_n dengan $v_i v_{i+1}$ berwarna i (i = $1, 2, 3, \dots, n$-1, n) maka diperoleh:



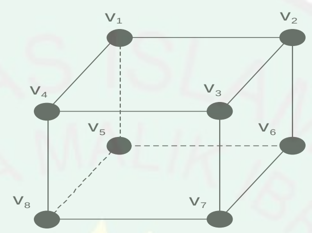
Gambar 3.20 Pewarnaan Sisi Graf T_n

Dapat dilihat bahwa antara dua titik berbeda di graf T_n terhubung oleh *rainbow path*. Jadi $rc(T_n) \leq n$. Karena $rc(T_n) \geq n$ dan $rc(T_n) \leq n$ maka $rc(T_n) = n$ untuk $n \geq 2$.

3.3 Hasil Perkalian Graf Lintasan dan Graf Tangga

3.3.1 *Rainbow Connection Number* pada Graf $P_2 \times T_2$

Untuk $n = 2$ dinotasikan dengan $P_2 \times T_2$. Gambar dari graf $P_2 \times T_2$ adalah sebagai berikut:



Gambar 3.21 Graf $P_2 \times T_2$

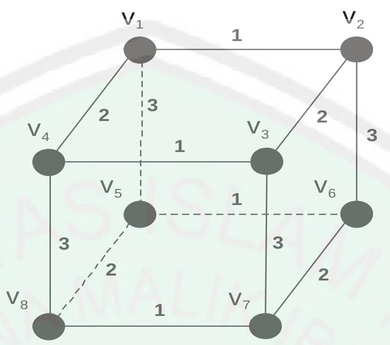
Sesuai Gambar 3.21, maka dapat dibuat tabel jarak untuk setiap dua titik u dan v pada graf $P_2 \times T_2$.

Tabel 3.20 Jarak Setiap Dua Titik dan Eksentrisitas Setiap Titik pada Graf $P_2 \times T_2$

$d(u,v)$										
Titik u	Titik v									$e(u)$
		v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	
	v_1		1	2	1	1	2	3	2	3
	v_2	1		1	2	2	1	2	3	3
	v_3	2	1		1	3	2	1	2	3
	v_4	1	2	1		2	3	2	1	3
	v_5	1	2	3	2		1	2	1	3
	v_6	2	1	2	3	1		1	2	3
	v_7	3	2	1	2	2	1		1	3
	v_8	2	3	2	1	1	2	1		3

Berdasarkan Tabel 3.20, maka diperoleh $diam(P_2 \times T_2) = 3$. Sehingga menurut Teorema 2.1 diperoleh bahwa $rc(P_2 \times T_2) \geq 3$. Akan dibuktikan

$rc(P_2 \times T_2) = 3$, berikan *rainbow* 3-*coloring* pada graf $P_2 \times T_2$, dengan himpunan warna $\{1, 2, 3\}$, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.22.



Gambar 3.22 Graf $P_2 \times T_2$ dengan Pewarnaan Sisi-3

Dari Gambar 3.22, maka akan dicari *rainbow path* untuk setiap dua titik u dan v pada graf $P_2 \times T_2$ dengan panjang (u, v) seperti yang dijelaskan pada tabel di bawah ini.

Tabel 3.21 *Rainbow Path* untuk Setiap Dua Titik pada Graf $P_2 \times T_2$

Rainbow Path u-v					
Titik u	Titik v				
		v_1	v_2	v_3	v_4
	v_1		v_1v_2	$v_1v_2v_3$	v_1v_4
	v_2	v_2v_1		v_2v_3	$v_2v_3v_4$
	v_3	$v_3v_2v_1$	v_3v_2		v_3v_4
	v_4	v_4v_1	$v_4v_3v_2$	v_4v_3	
	v_5	v_5v_1	$v_5v_1v_2$	$v_5v_1v_2v_3$	$v_5v_1v_4$
	v_6	$v_6v_2v_1$	v_6v_2	$v_6v_2v_3$	$v_6v_2v_3v_4$
	v_7	$v_7v_3v_2v_1$	$v_7v_3v_2$	v_7v_3	$v_7v_3v_4$
	v_8	$v_8v_4v_1$	$v_8v_4v_1v_2$	$v_8v_4v_3$	v_8v_4

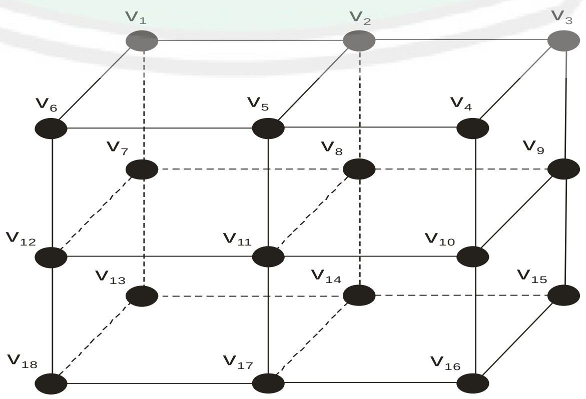
Tabel 3.22 Lanjutan Tabel 3.23

Rainbow Path u-v					
Titik u	Titik v				
		v_5	v_6	v_7	v_8
	v_1	v_1v_5	$v_1v_5v_6$	$v_1v_5v_6v_7$	$v_1v_5v_8$
	v_2	$v_2v_6v_5$	v_2v_6	$v_2v_6v_7$	$v_2v_6v_7v_8$
	v_3	$v_3v_2v_1v_5$	$v_3v_2v_6$	v_3v_7	$v_3v_7v_8$
	v_4	$v_4v_1v_5$	$v_4v_3v_2v_6$	$v_4v_3v_7$	v_4v_8
	v_5		v_5v_6	$v_5v_6v_7$	v_5v_8
	v_6	v_6v_5		v_6v_7	$v_6v_7v_8$
	v_7	$v_7v_6v_5$	v_7v_6		v_7v_8
	v_8	v_8v_5	$v_8v_7v_6$	v_8v_7	

Tabel-tabel di atas menunjukkan bahwa untuk setiap dua titik u dan v pada graf $P_2 \times T_2$ terdapat *rainbow path* u-v pada graf $P_2 \times T_2$. Jadi terdapat *rainbow* 3-*coloring* pada graf $P_2 \times T_2$ dengan kata lain $rc(P_2 \times T_2) \leq 3$. Karena $rc(P_2 \times T_2) \geq 3$ dan $rc(P_2 \times T_2) \leq 3$ maka $rc(P_2 \times T_2) = 3$.

3.3.2 *Rainbow Connection Number* pada Graf $P_3 \times T_3$

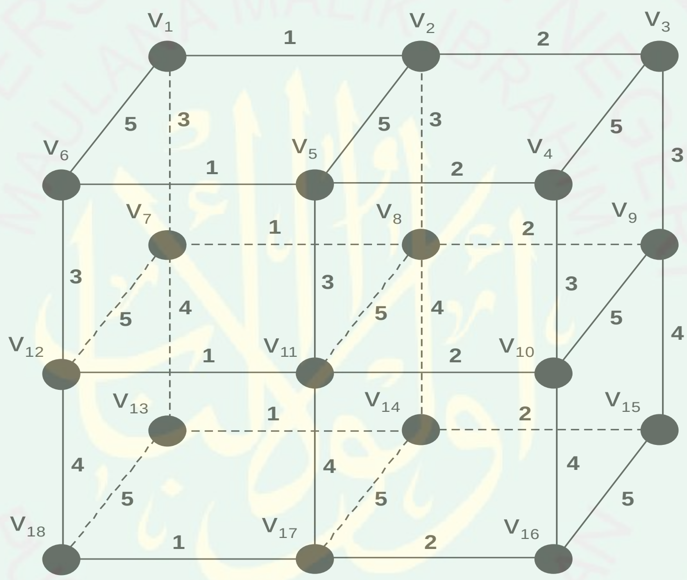
Untuk $n = 3$ dinotasikan dengan $P_3 \times T_3$. Gambar dari graf $P_3 \times T_3$ adalah sebagai berikut:



Gambar 3.23 Graf $P_3 \times T_3$

Sesuai Gambar 3.23, maka dapat dibuat tabel jarak untuk setiap dua titik u dan v pada graf $P_3 \times T_3$ yang terlampir pada Lampiran 1.

Berdasarkan Lampiran 1, maka diperoleh $diam(P_3 \times T_3) = 5$. Sehingga menurut Teorema 2.1 diperoleh bahwa $rc(P_3 \times T_3) \geq 5$. Akan dibuktikan $rc(P_3 \times T_3) = 5$, berikan *rainbow* 5-*coloring* pada graf $P_3 \times T_3$, dengan himpunan warna $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.24.



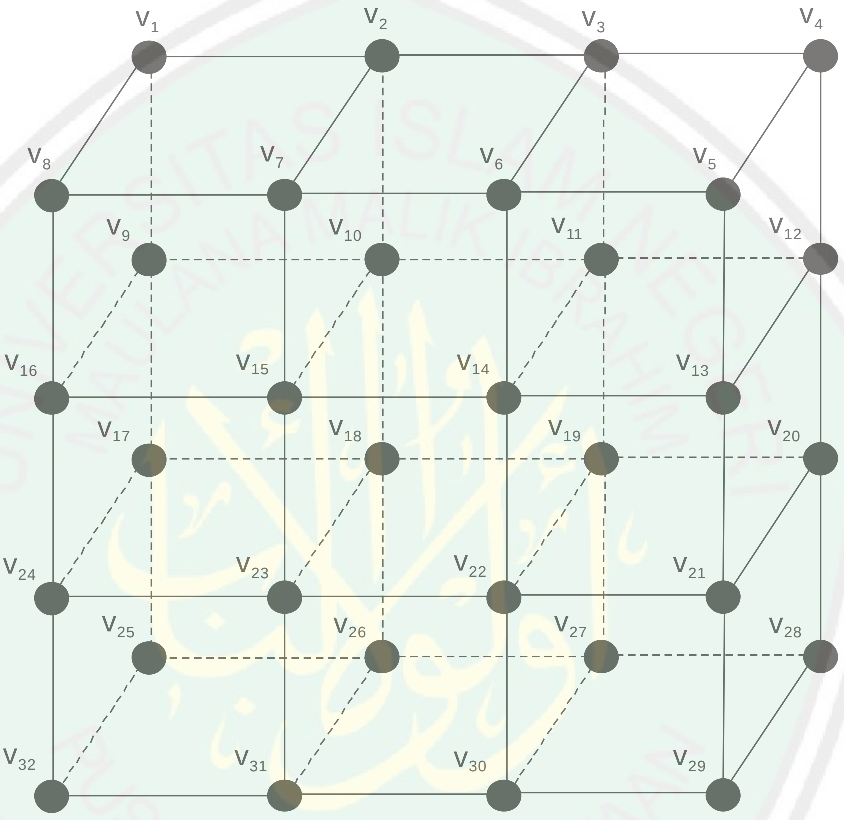
Gambar 3.24 Graf $P_3 \times T_3$ dengan Pewarnaan Sisi-5

Dari Gambar 3.24, maka akan dicari *rainbow path* untuk setiap dua titik u dan v pada graf $P_3 \times T_3$ dengan panjang (u, v) seperti yang dijelaskan pada Lampiran 2.

Pada Lampiran 2 menunjukkan bahwa untuk setiap dua titik u dan v pada graf $P_3 \times T_3$ terdapat *rainbow path* u-v pada graf $P_3 \times T_3$. Jadi terdapat *rainbow* 1-*coloring* pada graf $P_3 \times T_3$ dengan kata lain $rc(P_3 \times T_3) \leq 1$. Karena $rc(P_3 \times T_3) \geq 1$ dan $rc(P_3 \times T_3) \leq 1$ maka $rc(P_3 \times T_3) = 1$.

3.3.3 *Rainbow Connection Number* pada Graf $P_4 \times T_4$

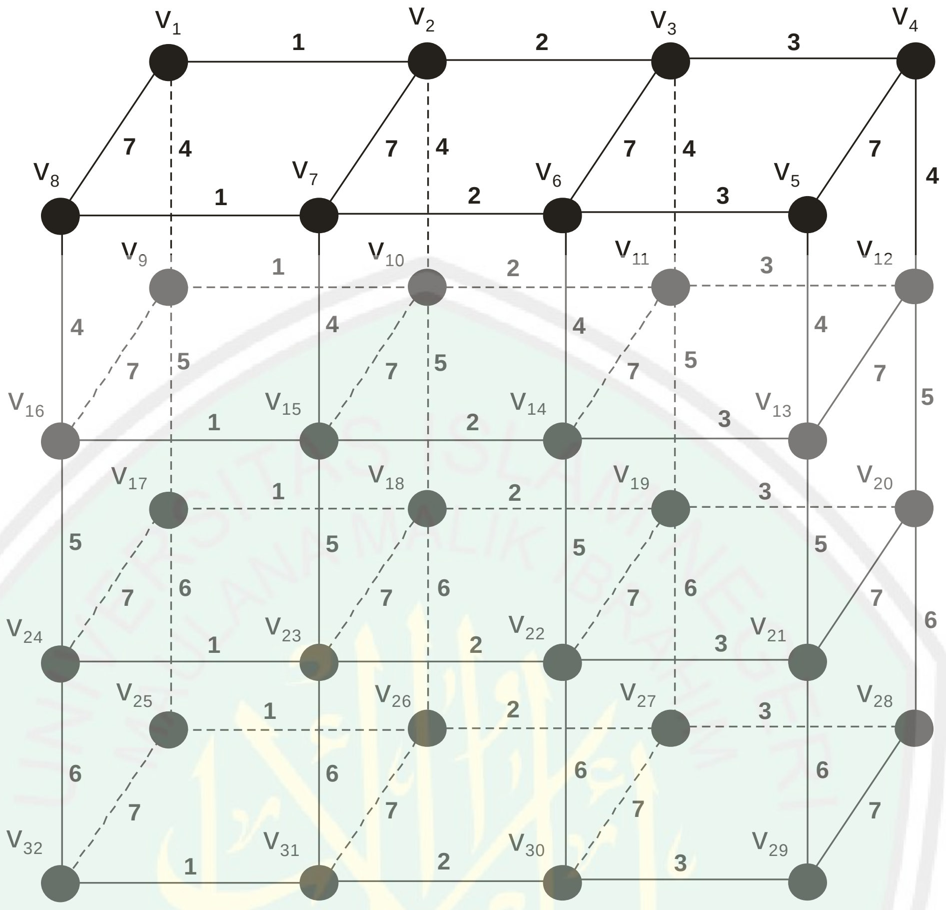
Untuk $n = 4$ dinotasikan dengan $P_4 \times T_4$. Gambar dari graf $P_4 \times T_4$ adalah sebagai berikut:



Gambar 3.25 Graf $P_4 \times T_4$

Sesuai Gambar 3.25, maka dapat dibuat tabel jarak untuk setiap dua titik u dan v pada graf $P_4 \times T_4$ yang terlampir pada Lampiran 3.

Berdasarkan Lampiran 3, maka diperoleh $diam(P_4 \times T_4) = 7$. Sehingga menurut Teorema 2.1 diperoleh bahwa $rc(P_4 \times T_4) \geq 7$. Akan dibuktikan $rc(P_4 \times T_4) = 7$, berikan *rainbow* 7-*coloring* pada graf $P_4 \times T_4$, dengan himpunan warna {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.26.



Gambar 3.26 Graf $P_4 \times T_4$ dengan Pewarnaan Sisi-7

Dari Gambar 3.26, maka akan dicari *rainbow path* untuk setiap dua titik u dan v pada graf $P_4 \times T_4$ dengan panjang (u, v) seperti yang dijelaskan pada Lampiran 4.

Pada Lampiran 4 menunjukkan bahwa untuk setiap dua titik u dan v pada graf $P_4 \times T_4$ terdapat *rainbow path* u-v pada graf $P_4 \times T_4$. Jadi terdapat *rainbow* 7-*coloring* pada graf $P_4 \times T_4$ dengan kata lain $rc(P_4 \times T_4) \leq 7$. Karena $rc(P_4 \times T_4) \geq 7$ dan $rc(P_4 \times T_4) \leq 7$ maka $rc(P_4 \times T_4) = 7$.

Dari data *rainbow connection number* graf $P_n \times T_n$ maka dapat dibuat tabel sebagai berikut:

Tabel 3.24 *Rainbow Connection Number* Graf $P_n \times T_n$

n	Graf	*Rainbow Connection Number*
2	$P_2 \times T_2$	$rc(P_2 \times T_2) = 3$
3	$P_3 \times T_3$	$rc(P_3 \times T_3) = 5$
4	$P_4 \times T_4$	$rc(P_4 \times T_4) = 7$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$P_n \times T_n$	$rc(P_n \times T_n) = 2n\text{-}1, \forall\, n \geq 2$

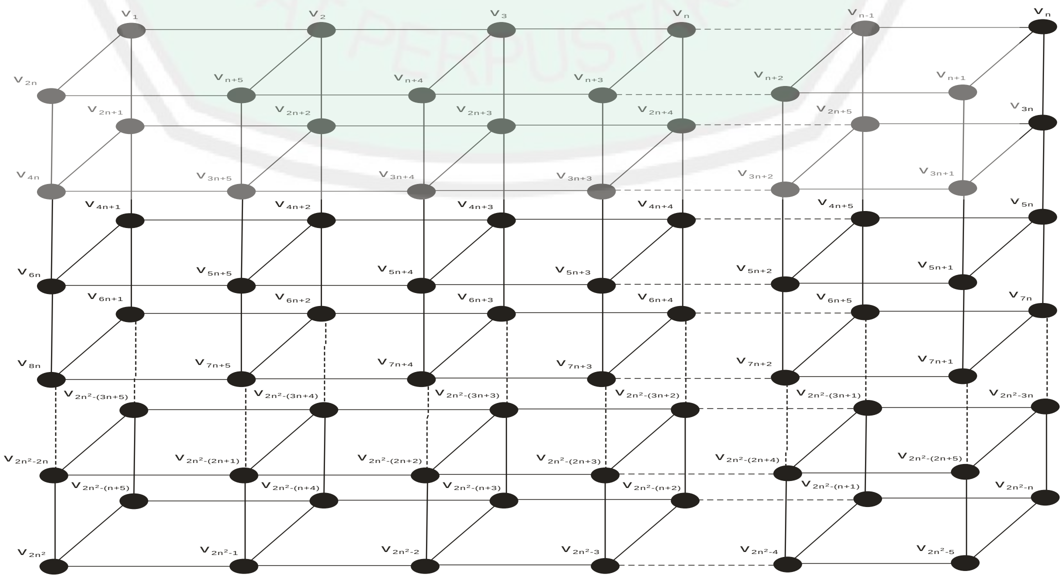
Dari Tabel 3.23 maka dapat dibuat pola umum sebagai berikut:

Teorema 3.3

Misal $P_n \times T_n$ adalah suatu graf yang dibentuk dari operasi hasil kali kartesius antara graf P_n dan graf T_n maka *rainbow connection number* pada graf $P_n \times T_n$ dengan $n \geq 2$ adalah $rc(P_n \times T_n) = 2n\text{-}1$.

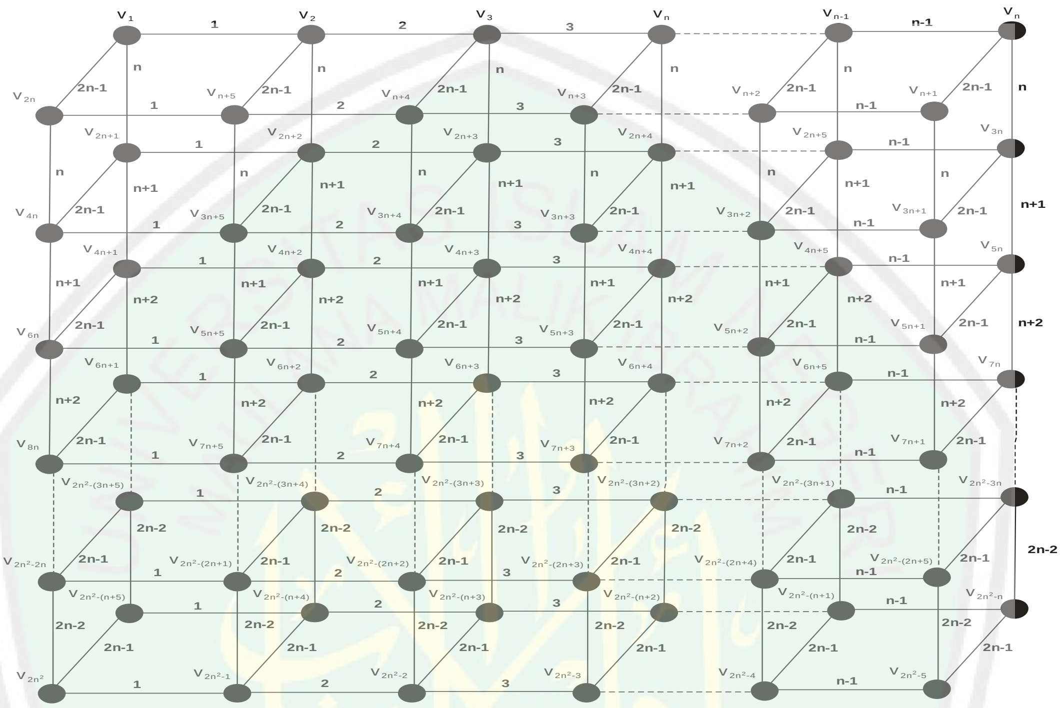
Bukti:

Misalkan graf $P_n \times T_n$ adalah graf dengan pewarnaan sisi c. Diketahui bahwa graf $P_n \times T_n$ memiliki $diam(P_n \times T_n) = 2n\text{-}1$. Berdasarkan Teorema 2.1 maka diperoleh $rc(P_n \times T_n) \geq 2n\text{-}1$. Graf $P_n \times T_n$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.27 Graf $P_n \times T_n$

Dengan mewarnai setiap sisi pada graf $P_n \times T_n$ dengan $v_i v_{i+1}$ berwarna i ($i = 1, 2, 3, \dots, 2n$-2, $2n$-1) maka diperoleh:



Gambar 3.28 Pewarnaan Sisi Graf $P_n \times T_n$

Dapat dilihat bahwa antara dua titik berbeda di graf $P_n \times T_n$ terhubung oleh *rainbow path*. Jadi $rc(P_n \times T_n) \leq 2n$-1. Karena $rc(P_n \times T_n) \geq 2n$-1 dan $rc(P_n \times T_n) \leq 2n$-1 maka $rc(P_n \times T_n) = 2n$-1 untuk $n \geq 2$.

3.4 Kajian Agama tentang Konsep Keteraturan

Sebagaimana yang telah dijelaskan dalam al-Quran surat al-Qamar ayat 49, ayat ini menjelaskan bahwa Allah telah menciptakan segala sesuatu menurut ukurannya. Shihab (2003:482) menafsirkan bahwa kata qadar pada ayat tersebut diperselisihkan oleh para ulama. Dari segi Bahasa kata tersebut dapat berarti kadar tertentu yang tidak bertambah atau berkurang, atau berarti kuasa. Tetapi karena ayat tersebut berbicara tentang segala sesuatuyang berada dalam kuasa Allah, maka adalah lebih tepat memahaminya dalam arti ketentuan dan sistem yang telah ditetapkan terhadap segala sesuatu. Tidak hanya terbatas pada salah satu aspeknya saja.

Sebagaimana yang telah dijelaskan dalam al-Quran surat al-Furqân ayat 2, ayat ini menjelaskan bahwa segala sesuatu yang ada di alam ini ada ukurannya, ada hitungan-hitungannya, ada rumusnya, atau ada persamaannya. Ahli matematika atau fisika tidak membuat suatu rumus sedikitpun. Mereka hanya menemukan rumus atau persamaan. Rumus-rumus yang ada sekarang bukan diciptakan manusia sendiri, tetapi sudah disediakan. Manusia hanya menemukan dan menyimbolkan dalam bahasa matematika (Abdussakir, 2007:80).

Menurut Quthb (2004:276-278) pada kalimat terakhir pada surat al-Furqân ayat 2 *"... Allah telah menciptakan segala sesuatu, dan Allah menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya"*. Allah menetapkan volume dan bentuknya, menetapkan fungsi dan tugasnya, menetapkan zaman dan tempatnya, juga menetapkan keserasian dengan yang lainnya, dari sekian individu dalam wujud yang besar ini.

Menurut Al Hifnawi (2009:7) pada kalimat terakhir *"... Allah telah menciptakan segala sesuatu, dan Allah menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya"*, maksudnya adalah, menetapkan segala sesuatu dari apa yang diciptakan-Nya sesuai dengan hikmah yang diinginkan-Nya, dan bukan karena nafsu dan kelalaian, melainkan segala sesuatu berjalan sesuai dengan ketentuan-Nya hingga hari kiamat dan setelah kiamat. Karena Allah adalah Sang Pencipta Yang Maha Kuasa, dan untuk itulah makhluk beribadah kepada-Nya.

Dari beberapa tafsir di atas dapat disimpulkan bahwa keteraturan merupakan sesuatu yang telah diatur oleh Allah di bawah kehendak-Nya. Allah menetapkan volume dan bentuknya, menetapkan fungsi dan tugasnya, menetapkan zaman dan tempatnya, juga menetapkan keserasian dengan yang lainnya, dari sekian individu dalam wujud yang besar ini dan sempurna. Segala sesuatu yang diciptakan-Nya sesuai dengan hikmah yang diinginkan-Nya sebagai ilmu pengetahuan untuk mempersiapkan manusia agar dapat memahami, memikirkan urusan dunia dan akhirat, dan memanfaatkan apa yang terdapat di permukaan serta di dalam perut bumi.

Konsep *rainbow connection number* merupakan salah satu tanda kebesaran Allah. Konsep *rainbow connection number* merupakan hikmah yang sempurna yang memberikan manfaat bagi makhluk lain. Dengan adanya konsep ini, berbagai masalah dalam kehidupan sehari-hari dapat dipecahkan dengan lebih mudah. Misalnya dalam penjadwalan mata kuliah dan pendistribusian soal-soal ujian nasional. Oleh karena itu konsep ini sangat bermanfaat. Ini semua telah diatur oleh Allah sebagai ilmu pengetahuan serta sebagai bukti terungkapnya beberapa segi keserasian yang menakjubkan dalam hukum-hukum semesta, ukuran-ukurannya, dan detail-detailnya, sesuai dengan yang diungkapkan oleh nash al-Quran yang menakjubkan.

Manusia tidak menciptakan konsep *rainbow connection number*, tetapi Allah-lah yang telah memberikan jalan kepada manusia untuk menemukan konsep tersebut dan menyimbolkannya dalam bahasa matematika. Karena pada dasarnya semua ilmu berasal dari al-Quran dan al-Quran merupakan wahyu yang diturunkan oleh Allah.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada bab III, maka dapat diambil kesimpulan tentang pola umum $rc(P_n), rc(T_n)$, dan $rc(P_n \times T_n)$ sebagai berikut:

1. *Rainbow connection number* graf P_n adalah $rc(P_n) = n$-1 untuk $n \geq 2$.
2. *Rainbow connection number* graf T_n adalah $rc(T_n) = n$ untuk $n \geq 2$.
3. *Rainbow connection number* graf $P_n \times T_n$ adalah $rc(P_n \times T_n) = 2n$-1 untuk $n \geq 2$.

4.2 Saran

Bagi penelitian selanjutnya diharapkan dapat menemukan bermacam-macam teorema tentang *rainbow connection number* dari graf lainnya dan juga operasi lainnya.

DAFTAR RUJUKAN

Abdussakir, Azizah, N. N., dan Nofandika, F. F. 2009. *Teori Graf*. Malang: UIN-Malang Press.

Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Al-Hifnawi, M. I. 2009. *Tafsir Al Qurthubi*. Jakarta: Pustaka Azam

Basavaraju, M., Chandran, L. S., Rajendraprasad, D., & Ramaswamy, A. 2011. *Rainbow Connection Number of Graph Power and Graph Products*. arXiv:1104.4190[math.CO].

Budayasa, I. K. 2007. *Teori Graph dan Aplikasinya*. Surabaya: Unesa University Press.

Chartrand, G., Johns, G. L., McKeon, K. A., dan Zhang, P. 2008. *Rainbow Connection in Graphs*. *Mathematica Bohemica*. 133(1):85-98.

Chartrand, G. & Lesniak L. 1996. *Graphs and Diagraphs Third Edition*. California: Chapman & Hall/CRC.

Galian, J. A. 2007. *Dynamic Survey DS6: Graph Labeling. Electronic J. Combinatorics, DS6*. (http://mathworld.wolfram.com/www.combinatorics.org/survey/ds6.pdf), diakses tanggal 12 Agustus 2017 pukul 03.00 WIB.

Hutami, N. D. 2017. *Bilangan Keterhubungan Pelangi Kuat pada Graf*. Skripsi tidak dipublikasikan. Yogyakarta: Universitas Sanata Dharma Yogyakarta.

Li, X., Sun, Y. dan Shi, Y. 2011. *Rainbow Connections of Graphs-A Survey**. arXiv:1101.5747v2[math.CO].

Munir, R. 2009. *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika Bandung.

Quthb, S. 2004. *Tafsir Fi Zhilalil Qur'an*. Jakarta: Gema Insani.

Sakalle, M. & Jain, R. 2016. *Rainbow Connection Number of Connected Graph. International Journal of Mathematics Trends and Technology (IJMTT)*. 33(3):156-160.

Shihab, M. Q. 2003. *Tafsir Al-Mishbah Volume 1 Pesan, Kesan & Keserasian Al Qur'an*. Ciputat: Lentera hati.

Lampiran 1: Jarak Setiap Dua Titik dan Eksentrisitas Setiap Titik pada Graf $P_3 \times T_3$

$d(u,v)$										
Titik u	Titik v									
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}
v_1		1	2	3	2	1	1	2	3	4
v_2	1		1	2	1	2	2	1	2	3
v_3	2	1		1	2	3	3	2	1	2
v_4	3	2	1		1	2	4	3	2	1
v_5	2	1	2	1		1	3	2	3	2
v_6	1	2	3	2	1		2	3	4	3
v_7	1	2	3	4	3	2		1	2	3
v_8	2	1	2	3	2	3	1		1	2
v_9	3	2	1	2	3	4	2	1		1
v_{10}	4	3	2	1	2	3	3	2	1	
v_{11}	3	2	3	2	1	2	2	1	2	1
v_{12}	2	3	4	3	2	1	1	2	3	2
v_{13}	2	3	4	5	4	3	1	2	3	4
v_{14}	3	2	3	4	3	4	2	1	2	3
v_{15}	4	3	2	3	4	5	3	2	1	2
v_{16}	5	4	3	2	3	4	4	3	2	1
v_{17}	4	3	4	3	2	3	3	2	3	2
v_{18}	3	4	5	4	3	2	2	3	4	3

Lanjutan Lampiran 1

$d(u,v)$										
Titik u	Titik v									$e(u)$
		v_{11}	v_{12}	v_{13}	v_{14}	v_{15}	v_{16}	v_{17}	v_{18}	
	v_1	3	2	2	3	4	5	4	3	5
	v_2	2	3	3	2	3	4	3	4	4
	v_3	3	4	4	3	2	3	4	5	5
	v_4	2	3	5	4	3	2	3	4	5
	v_5	1	2	4	3	4	3	2	3	4
	v_6	2	1	3	4	5	4	3	2	5
	v_7	2	1	1	2	3	4	3	2	4
	v_8	1	2	2	1	2	3	2	3	3
	v_9	2	3	3	2	1	2	3	4	4
	v_{10}	1	2	4	3	2	1	2	3	4
	v_{11}		1	3	2	3	2	1	2	3
	v_{12}	1		2	3	4	3	2	1	4
	v_{13}	3	2		1	2	3	2	1	5
	v_{14}	2	3	1		1	2	1	2	4
	v_{15}	3	4	2	1		1	2	3	5
	v_{16}	2	3	3	2	1		1	2	5
	v_{17}	1	2	2	1	2	1		1	4
	v_{18}	2	1	1	2	3	2	1		5

Lampiran 2: *Rainbow Path* untuk Setiap Dua Titik pada Graf $P_3 \times T_3$

Rainbow Path u-v					
Titik u	Titik v				
		v_1	v_2	v_3	v_4
	v_1		v_1v_2	$v_1v_2v_3$	$v_1v_2v_3v_4$
	v_2	v_2v_1		v_2v_3	$v_2v_3v_4$
	v_3	$v_3v_2v_1$	v_3v_2		v_3v_4
	v_4	$v_4v_3v_2v_1$	$v_4v_3v_2$	v_4v_3	
	v_5	$v_5v_2v_1$	v_5v_2	$v_5v_2v_3$	v_5v_4
	v_6	v_6v_1	$v_6v_1v_2$	$v_6v_1v_2v_3$	$v_6v_5v_4$
	v_7	v_7v_1	$v_7v_1v_2$	$v_7v_1v_2v_3$	$v_7v_1v_2v_3v_4$
	v_8	$v_8v_2v_1$	v_8v_2	$v_8v_2v_3$	$v_8v_2v_3v_4$
	v_9	$v_9v_3v_2v_1$	$v_9v_3v_2$	v_9v_3	$v_9v_3v_4$
	v_{10}	$v_{10}v_9v_3v_2v_1$	$v_{10}v_4v_5v_2$	$v_{10}v_4v_3$	$v_{10}v_4$
	v_{11}	$v_{11}v_5v_2v_1$	$v_{11}v_5v_2$	$v_{11}v_{10}v_4v_3$	$v_{11}v_{10}v_4$
	v_{12}	$v_{12}v_6v_1$	$v_{12}v_{11}v_5v_2$	$v_{12}v_{11}v_{10}v_4v_3$	$v_{12}v_{11}v_{10}v_4$
	v_{13}	$v_{13}v_7v_1$	$v_{13}v_7v_1v_2$	$v_{13}v_7v_1v_2v_3$	$v_{13}v_7v_1v_2v_3v_4$
	v_{14}	$v_{14}v_{13}v_7v_1$	$v_{14}v_8v_2$	$v_{14}v_8v_2v_3$	$v_{14}v_8v_2v_3v_4$
	v_{15}	$v_{15}v_{14}v_{13}v_7v_1$	$v_{15}v_9v_3v_2$	$v_{15}v_9v_3$	$v_{15}v_9v_3v_4$
	v_{16}	$v_{16}v_{10}v_4v_5v_6v_1$	$v_{16}v_{10}v_4v_5v_2$	$v_{16}v_{10}v_4v_3$	$v_{16}v_{10}v_4$
	v_{17}	$v_{17}v_{11}v_5v_6v_1$	$v_{17}v_{11}v_5v_2$	$v_{17}v_{11}v_5v_2v_3$	$v_{17}v_{11}v_5v_4$
	v_{18}	$v_{18}v_{12}v_6v_1$	$v_{18}v_{12}v_6v_5v_2$	$v_{18}v_{12}v_6v_1v_2v_3$	$v_{18}v_{12}v_6v_5v_4$

Lanjutan Lampiran 2

Rainbow Path u-v					
Titik u	Titik v				
		v_5	v_6	v_7	v_8
	v_1	$v_1v_2v_5$	v_1v_6	v_1v_7	$v_1v_7v_8$
	v_2	v_2v_5	$v_2v_5v_6$	$v_2v_1v_7$	v_2v_8
	v_3	$v_3v_4v_5$	$v_3v_4v_5v_6$	$v_3v_2v_1v_7$	$v_3v_2v_8$
	v_4	v_4v_5	$v_4v_5v_6$	$v_4v_5v_6v_1v_7$	$v_4v_5v_2v_8$
	v_5		v_5v_6	$v_5v_6v_1v_7$	$v_5v_2v_8$
	v_6	v_6v_5		$v_6v_1v_7$	$v_6v_1v_7v_8$
	v_7	$v_7v_1v_6v_5$	$v_7v_1v_6$		v_7v_8
	v_8	$v_8v_2v_5$	$v_8v_2v_5v_6$	v_8v_7	
	v_9	$v_9v_3v_4v_5$	$v_9v_3v_4v_5v_6$	$v_9v_8v_7$	v_9v_8
	v_{10}	$v_{10}v_4v_5$	$v_{10}v_4v_5v_6$	$v_{10}v_9v_8v_7$	$v_{10}v_9v_8$
	v_{11}	$v_{11}v_5$	$v_{11}v_5v_6$	$v_{11}v_8v_7$	$v_{11}v_8$
	v_{12}	$v_{12}v_{11}v_5$	$v_{12}v_6$	$v_{12}v_7$	$v_{12}v_7v_8$
	v_{13}	$v_{13}v_7v_1v_6v_5$	$v_{13}v_7v_1v_6$	$v_{13}v_7$	$v_{13}v_7v_8$
	v_{14}	$v_{14}v_8v_2v_5$	$v_{14}v_8v_2v_5v_6$	$v_{14}v_8v_7$	$v_{14}v_8$
	v_{15}	$v_{15}v_9v_3v_4v_5$	$v_{15}v_9v_3v_4v_5v_6$	$v_{15}v_9v_8v_7$	$v_{15}v_9v_8$
	v_{16}	$v_{16}v_{10}v_4v_5$	$v_{16}v_{10}v_4v_5v_6$	$v_{16}v_{10}v_9v_8v_7$	$v_{16}v_{10}v_9v_8$
	v_{17}	$v_{17}v_{11}v_5$	$v_{17}v_{11}v_5v_6$	$v_{17}v_{11}v_8v_7$	$v_{17}v_{11}v_8$
	v_{18}	$v_{18}v_{12}v_6v_5$	$v_{18}v_{12}v_6$	$v_{18}v_{12}v_7$	$v_{18}v_{12}v_7v_8$

Lanjutan Lampiran 2

Rainbow Path u-v					
Titik u	Titik v				
		v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}
	v_1	$v_1v_2v_3v_9$	$v_1v_2v_3v_4v_{10}$	$v_1v_2v_5v_{11}$	$v_1v_6v_{12}$
	v_2	$v_2v_8v_9$	$v_2v_3v_4v_{10}$	$v_2v_5v_{11}$	$v_2v_5v_{11}v_{12}$
	v_3	v_3v_9	$v_3v_4v_{10}$	$v_3v_4v_5v_{11}$	$v_3v_4v_5v_6v_{12}$
	v_4	$v_4v_3v_9$	v_4v_{10}	$v_4v_5v_{11}$	$v_4v_5v_6v_{12}$
	v_5	$v_5v_4v_3v_9$	$v_5v_4v_{10}$	v_5v_{11}	$v_5v_6v_{12}$
	v_6	$v_6v_1v_7v_8v_9$	$v_6v_5v_4v_{10}$	$v_6v_5v_{11}$	v_6v_{12}
	v_7	$v_7v_8v_9$	$v_7v_8v_9v_{10}$	$v_7v_8v_{11}$	v_7v_{12}
	v_8	v_8v_9	$v_8v_9v_{10}$	v_8v_{11}	$v_8v_7v_{12}$
	v_9		v_9v_{10}	$v_9v_{10}v_{11}$	$v_9v_8v_7v_{12}$
	v_{10}	$v_{10}v_9$		$v_{10}v_{11}$	$v_{10}v_{11}v_{12}$
	v_{11}	$v_{11}v_{10}v_9$	$v_{11}v_{10}$		$v_{11}v_{12}$
	v_{12}	$v_{12}v_{11}v_{10}v_9$	$v_{12}v_{11}v_{10}$	$v_{12}v_{11}$	
	v_{13}	$v_{13}v_7v_8v_9$	$v_{13}v_7v_8v_9v_{10}$	$v_{13}v_7v_8v_{11}$	$v_{13}v_7v_{12}$
	v_{14}	$v_{14}v_8v_9$	$v_{14}v_8v_9v_{10}$	$v_{14}v_8v_{11}$	$v_{14}v_8v_{11}v_{12}$
	v_{15}	$v_{15}v_9$	$v_{15}v_9v_{10}$	$v_{15}v_9v_{10}v_{11}$	$v_{15}v_9v_{10}v_{11}v_{12}$
	v_{16}	$v_{16}v_{15}v_9$	$v_{16}v_{10}$	$v_{16}v_{10}v_{11}$	$v_{16}v_{10}v_{11}v_{12}$
	v_{17}	$v_{17}v_{16}v_{15}v_9$	$v_{17}v_{11}v_{10}$	$v_{17}v_{11}$	$v_{17}v_{11}v_{12}$
	v_{18}	$v_{18}v_{17}v_{16}v_{15}v_9$	$v_{18}v_{12}v_{11}v_{10}$	$v_{18}v_{17}v_{11}$	$v_{18}v_{12}$

Lanjutan Lampiran 2

Rainbow Path u-v					
Titik u	Titik v				
		v_{13}	v_{14}	v_{15}	v_{16}
	v_1	$v_1v_7v_{13}$	$v_1v_2v_8v_{14}$	$v_1v_2v_3v_9v_{15}$	$v_1v_2v_3v_9v_{15}v_{16}$
	v_2	$v_2v_8v_{14}v_{13}$	$v_2v_8v_{14}$	$v_2v_3v_9v_{15}$	$v_2v_3v_9v_{15}v_{16}$
	v_3	$v_3v_2v_1v_7v_{13}$	$v_3v_2v_8v_{14}$	$v_3v_9v_{15}$	$v_3v_9v_{15}v_{16}$
	v_4	$v_4v_5v_6v_1v_7v_{13}$	$v_4v_5v_2v_8v_{14}$	$v_4v_3v_9v_{15}$	$v_4v_{10}v_{16}$
	v_5	$v_5v_6v_1v_7v_{13}$	$v_5v_2v_8v_{14}$	$v_5v_4v_3v_9v_{15}$	$v_5v_4v_{10}v_{16}$
	v_6	$v_6v_1v_7v_{13}$	$v_6v_1v_7v_{13}v_{14}$	$v_6v_5v_4v_3v_9v_{15}$	$v_6v_5v_4v_{10}v_{16}$
	v_7	v_7v_{13}	$v_7v_{13}v_{14}$	$v_7v_8v_9v_{15}$	$v_7v_8v_9v_{10}v_{16}$
	v_8	$v_8v_7v_{13}$	v_8v_{14}	$v_8v_9v_{15}$	$v_8v_9v_{10}v_{16}$
	v_9	$v_9v_8v_7v_{13}$	$v_9v_8v_{14}$	v_9v_{15}	$v_9v_{10}v_{16}$
	v_{10}	$v_{10}v_9v_8v_7v_{13}$	$v_{10}v_9v_8v_{14}$	$v_{10}v_9v_{15}$	$v_{10}v_{16}$
	v_{11}	$v_{11}v_8v_7v_{13}$	$v_{11}v_8v_{14}$	$v_{11}v_{10}v_9v_{15}$	$v_{11}v_{10}v_{16}$
	v_{12}	$v_{12}v_7v_{13}$	$v_{12}v_{11}v_8v_{14}$	$v_{12}v_{11}v_{10}v_9v_{15}$	$v_{12}v_{11}v_{10}v_{16}$
	v_{13}		$v_{13}v_{14}$	$v_{13}v_{14}v_{15}$	$v_{13}v_{14}v_{15}v_{16}$
	v_{14}	$v_{14}v_{13}$		$v_{14}v_{15}$	$v_{14}v_{15}v_{16}$
	v_{15}	$v_{15}v_{14}v_{13}$	$v_{15}v_{14}$		$v_{15}v_{16}$
	v_{16}	$v_{16}v_{15}v_{14}v_{13}$	$v_{16}v_{15}v_{14}$	$v_{16}v_{15}$	
	v_{17}	$v_{17}v_{14}v_{13}$	$v_{17}v_{14}$	$v_{17}v_{16}v_{15}$	$v_{17}v_{16}$
	v_{18}	$v_{18}v_{13}$	$v_{18}v_{13}v_{14}$	$v_{18}v_{13}v_{14}v_{15}$	$v_{18}v_{17}v_{16}$

Lanjutan Lampiran 2

Rainbow Path u-v			
Titik u	Titik v		
		v_{17}	v_{18}
	v_1	$v_1v_6v_5v_{11}v_{17}$	$v_1v_6v_{12}v_{18}$
	v_2	$v_2v_5v_{11}v_{17}$	$v_2v_5v_{11}v_{17}v_{18}$
	v_3	$v_3v_4v_{10}v_{16}v_{17}$	$v_3v_4v_5v_6v_{12}v_{18}$
	v_4	$v_4v_{10}v_{16}v_{17}$	$v_4v_5v_6v_{12}v_{18}$
	v_5	$v_5v_{11}v_{17}$	$v_5v_6v_{12}v_{18}$
	v_6	$v_6v_5v_{11}v_{17}$	$v_6v_{12}v_{18}$
	v_7	$v_7v_8v_{11}v_{17}$	$v_7v_{12}v_{18}$
	v_8	$v_8v_{11}v_{17}$	$v_8v_{11}v_{12}v_{18}$
	v_9	$v_9v_8v_{11}v_{17}$	$v_9v_{10}v_{11}v_{12}v_{18}$
	v_{10}	$v_{10}v_{11}v_{17}$	$v_{10}v_{11}v_{12}v_{18}$
	v_{11}	$v_{11}v_{17}$	$v_{11}v_{12}v_{18}$
	v_{12}	$v_{12}v_{11}v_{17}$	$v_{12}v_{18}$
	v_{13}	$v_{13}v_{14}v_{17}$	$v_{13}v_{18}$
	v_{14}	$v_{14}v_{17}$	$v_{14}v_{17}v_{18}$
	v_{15}	$v_{15}v_{16}v_{17}$	$v_{15}v_{16}v_{17}v_{18}$
	v_{16}	$v_{16}v_{17}$	$v_{16}v_{17}v_{18}$
	v_{17}		$v_{17}v_{18}$
	v_{18}	$v_{18}v_{17}$	

Lampiran 3: Jarak Setiap Dua Titik dan Eksentrisitas Setiap Titik pada Graf $P_4 \times T_4$

$d(u,v)$											
Titik u	Titik v										
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}
v_1		1	2	3	4	3	2	1	1	2	3
v_2	1		1	2	3	2	1	2	2	1	2
v_3	2	1		1	2	1	2	3	3	2	1
v_4	3	2	1		1	3	3	4	4	3	2
v_5	4	3	2	1		1	2	3	5	4	3
v_6	3	2	1	2	1		1	2	4	3	2
v_7	2	1	2	3	2	1		1	3	2	3
v_8	1	2	3	4	3	2	1		2	3	4
v_9	1	2	3	4	5	4	3	2		1	2
v_{10}	2	1	2	3	4	3	2	3	1		1
v_{11}	3	2	1	2	3	2	3	4	2	1	
v_{12}	4	3	2	1	2	3	4	5	3	2	1
v_{13}	5	4	3	2	1	2	3	4	4	3	2
v_{14}	4	3	2	3	2	1	2	3	3	2	1
v_{15}	3	2	3	4	3	2	1	2	2	1	2
v_{16}	2	3	4	5	4	3	2	1	1	2	3
v_{17}	2	3	4	5	6	5	4	3	1	2	3
v_{18}	3	2	3	4	5	3	3	4	2	1	2
v_{19}	4	3	2	3	4	3	4	5	3	2	1
v_{20}	5	4	3	2	3	4	5	6	4	3	2
v_{21}	6	5	4	3	2	3	4	5	5	4	3
v_{22}	5	4	3	4	3	2	3	4	4	3	2
v_{23}	4	3	4	5	4	3	2	3	3	2	3
v_{24}	3	4	5	6	5	4	3	2	2	3	4
v_{25}	3	4	5	6	7	6	5	4	2	3	4
v_{26}	4	3	4	5	6	5	4	5	3	2	3
v_{27}	5	4	3	4	5	4	5	6	4	3	2
v_{28}	6	5	4	3	4	5	6	7	5	4	3
v_{29}	7	6	5	4	3	4	5	6	6	5	4
v_{30}	6	5	4	5	4	3	4	5	5	4	3
v_{31}	5	4	5	6	5	4	3	4	4	3	4
v_{32}	4	5	6	7	6	5	4	3	3	4	5

Lanjutan Lampiran 3

$d(u,v)$											
Titik u	Titik v										
	v_{12}	v_{13}	v_{14}	v_{15}	v_{16}	v_{17}	v_{18}	v_{19}	v_{20}	v_{21}	v_{22}
v_1	4	5	4	3	2	2	3	4	5	6	5
v_2	3	4	3	2	3	3	2	3	4	5	4
v_3	2	3	2	3	4	4	3	2	3	4	3
v_4	1	2	3	4	5	5	4	3	2	3	4
v_5	2	1	2	3	4	6	5	4	3	2	3
v_6	3	2	1	2	3	5	4	3	4	3	2
v_7	4	3	2	1	2	4	3	4	5	4	3
v_8	5	4	3	2	1	3	4	5	6	5	4
v_9	3	4	3	2	1	1	2	3	4	5	4
v_{10}	2	3	2	1	2	2	1	2	3	4	3
v_{11}	1	2	1	2	3	3	2	1	2	3	2
v_{12}		1	2	3	4	4	3	2	1	2	3
v_{13}	1		1	2	3	5	4	3	2	1	2
v_{14}	2	1		1	2	4	3	2	3	2	1
v_{15}	3	2	1		1	3	2	3	4	3	2
v_{16}	4	3	2	1		2	3	4	5	4	3
v_{17}	4	5	4	3	2		1	2	3	4	3
v_{18}	3	4	3	2	3	1		1	2	3	2
v_{19}	2	3	2	3	4	2	1		1	2	1
v_{20}	1	2	3	4	5	3	2	1		1	2
v_{21}	2	1	2	3	4	4	3	2	1		1
v_{22}	3	2	1	2	3	3	2	1	2	1	
v_{23}	4	3	2	1	2	2	1	2	3	2	1
v_{24}	5	4	3	2	1	1	2	3	4	3	2
v_{25}	5	6	5	4	3	1	2	3	4	5	4
v_{26}	4	5	4	3	4	2	1	2	3	4	3
v_{27}	3	4	3	4	5	3	2	1	2	3	2
v_{28}	2	3	4	5	6	4	3	2	1	2	3
v_{29}	3	2	3	4	5	5	4	3	2	1	2
v_{30}	4	3	2	3	4	4	3	2	3	2	1
v_{31}	5	4	3	2	3	3	2	3	4	3	2
v_{32}	6	5	4	3	2	2	3	4	5	4	3

Lanjutan Lampiran 3

$d(u,v)$											
Titik u	Titik v										$e(u)$
	v_{23}	v_{24}	v_{25}	v_{26}	v_{27}	v_{28}	v_{29}	v_{30}	v_{31}	v_{32}	
v_1	4	3	3	4	5	6	7	6	5	4	7
v_2	3	4	4	3	4	5	6	5	4	5	6
v_3	4	5	5	4	3	4	5	4	5	6	6
v_4	5	6	6	5	4	3	4	5	6	7	7
v_5	4	5	7	6	5	4	3	4	5	6	7
v_6	3	4	6	5	4	5	4	3	4	5	6
v_7	2	3	5	4	5	6	5	4	3	4	6
v_8	3	2	4	5	6	7	6	5	4	3	7
v_9	3	2	2	3	4	5	6	5	4	3	6
v_{10}	2	3	3	2	3	4	5	4	3	4	5
v_{11}	3	4	4	3	2	3	4	3	4	5	5
v_{12}	4	5	5	4	3	2	3	4	5	6	6
v_{13}	3	4	6	5	4	3	2	3	4	5	6
v_{14}	2	3	5	4	3	4	3	2	3	4	5
v_{15}	1	2	4	3	4	5	4	3	2	3	5
v_{16}	2	1	3	4	5	6	5	4	3	2	6
v_{17}	2	1	1	2	3	4	5	4	3	2	6
v_{18}	1	2	2	1	2	3	4	3	2	3	5
v_{19}	2	3	3	2	1	2	3	2	3	4	5
v_{20}	3	4	4	3	2	1	2	3	4	5	6
v_{21}	2	3	5	4	3	2	1	2	3	4	6
v_{22}	1	2	4	3	2	3	2	1	2	3	5
v_{23}		1	3	2	3	4	3	2	1	2	5
v_{24}	1		2	3	4	5	4	3	2	1	6
v_{25}	3	2		1	2	3	4	3	2	1	7
v_{26}	2	3	1		1	2	3	2	1	2	6
v_{27}	3	4	2	1		1	2	1	2	3	6
v_{28}	4	5	3	2	1		1	2	3	4	7
v_{29}	3	4	4	3	2	1		1	2	3	7
v_{30}	2	3	3	2	1	2	1		1	2	6
v_{31}	1	2	2	1	2	3	2	1		1	6
v_{32}	2	1	1	2	3	4	3	2	1		7

Lampiran 4: *Rainbow Path* untuk Setiap Dua Titik pada Graf $P_4 \times T_4$

Rainbow Path u-v				
Titik u	Titik v			
		v_1	v_2	v_3
	v_1		v_1v_2	$v_1v_2v_3$
	v_2	v_2v_1		v_2v_3
	v_3	$v_3v_2v_1$	v_3v_2	
	v_4	$v_4v_3v_2v_1$	$v_4v_3v_2$	v_4v_3
	v_5	$v_5v_4v_3v_2v_1$	$v_5v_4v_3v_2$	$v_5v_4v_3$
	v_6	$v_6v_3v_2v_1$	$v_6v_3v_2$	v_6v_3
	v_7	$v_7v_2v_1$	v_7v_2	$v_7v_2v_3$
	v_8	v_8v_1	$v_8v_1v_2$	$v_8v_1v_2v_3$
	v_9	v_9v_1	$v_9v_1v_2$	$v_9v_1v_2v_3$
	v_{10}	$v_{10}v_2v_1$	$v_{10}v_2$	$v_{10}v_2v_3$
	v_{11}	$v_{11}v_3v_2v_1$	$v_{11}v_3v_2$	$v_{11}v_3$
	v_{12}	$v_{12}v_4v_3v_2v_1$	$v_{12}v_4v_3v_2$	$v_{12}v_4v_3$
	v_{13}	$v_{13}v_5v_4v_3v_2v_1$	$v_{13}v_5v_4v_3v_2$	$v_{13}v_5v_4v_3$
	v_{14}	$v_{14}v_6v_3v_2v_1$	$v_{14}v_6v_3v_2$	$v_{14}v_6v_3$
	v_{15}	$v_{15}v_7v_2v_1$	$v_{15}v_7v_2$	$v_{15}v_7v_2v_3$
	v_{16}	$v_{16}v_8v_1$	$v_{16}v_8v_1v_2$	$v_{16}v_8v_1v_2v_3$
	v_{17}	$v_{17}v_9v_1$	$v_{17}v_9v_1v_2$	$v_{17}v_9v_1v_2v_3$
	v_{18}	$v_{18}v_{10}v_2v_1$	$v_{18}v_{10}v_2$	$v_{18}v_{10}v_2v_3$
	v_{19}	$v_{19}v_{11}v_3v_2v_1$	$v_{19}v_{11}v_3v_2$	$v_{19}v_{11}v_3$
	v_{20}	$v_{20}v_{12}v_4v_3v_2v_1$	$v_{20}v_{12}v_4v_3v_2$	$v_{20}v_{12}v_4v_3$
	v_{21}	$v_{21}v_{13}v_5v_4v_3v_2v_1$	$v_{21}v_{13}v_5v_4v_3v_2$	$v_{21}v_{13}v_5v_4v_3$
	v_{22}	$v_{22}v_{14}v_6v_3v_2v_1$	$v_{22}v_{14}v_6v_3v_2$	$v_{22}v_{14}v_6v_3$
	v_{23}	$v_{23}v_{15}v_7v_2v_1$	$v_{23}v_{15}v_7v_2$	$v_{23}v_{15}v_7v_2v_3$
	v_{24}	$v_{24}v_{16}v_8v_1$	$v_{24}v_{16}v_8v_1v_2$	$v_{24}v_{16}v_8v_1v_2v_3$
	v_{25}	$v_{25}v_{17}v_9v_1$	$v_{25}v_{17}v_9v_1v_2$	$v_{25}v_{17}v_9v_1v_2v_3$
	v_{26}	$v_{26}v_{18}v_{10}v_2v_1$	$v_{26}v_{18}v_{10}v_2$	$v_{26}v_{18}v_{10}v_2v_3$
	v_{27}	$v_{27}v_{19}v_{11}v_3v_2v_1$	$v_{27}v_{19}v_{11}v_3v_2$	$v_{27}v_{19}v_{11}v_3$
	v_{28}	$v_{28}v_{20}v_{12}v_4v_3v_2v_1$	$v_{28}v_{20}v_{12}v_4v_3v_2$	$v_{28}v_{20}v_{12}v_4v_3$
	v_{29}	$v_{29}v_{21}v_{13}v_5v_4v_3v_2v_1$	$v_{29}v_{21}v_{13}v_5v_4v_3v_2$	$v_{29}v_{21}v_{13}v_5v_4v_3$
	v_{30}	$v_{30}v_{22}v_{14}v_6v_3v_2v_1$	$v_{30}v_{22}v_{14}v_6v_3v_2$	$v_{30}v_{22}v_{14}v_6v_3$
	v_{31}	$v_{31}v_{23}v_{15}v_7v_2v_1$	$v_{31}v_{23}v_{15}v_7v_2$	$v_{31}v_{23}v_{15}v_7v_2v_3$
	v_{32}	$v_{32}v_{24}v_{16}v_8v_1$	$v_{32}v_{24}v_{16}v_8v_1v_2$	$v_{32}v_{24}v_{16}v_8v_1v_2v_3$

Lanjutan Lampiran 4

Rainbow Path *u*-*v*				
Titik u	Titik v			
		v_4	v_5	v_6
	v_1	$v_1v_2v_3v_4$	$v_1v_2v_3v_4v_5$	$v_1v_2v_3v_6$
	v_2	$v_2v_3v_4$	$v_2v_3v_4v_5$	$v_2v_3v_6$
	v_3	v_3v_4	$v_3v_4v_5$	v_3v_6
	v_4		v_4v_5	$v_4v_5v_6$
	v_5	v_5v_4		v_5v_6
	v_6	$v_6v_5v_4$	v_6v_5	
	v_7	$v_7v_6v_5v_4$	$v_7v_6v_5$	v_7v_6
	v_8	$v_8v_7v_6v_5v_4$	$v_8v_7v_6v_5$	$v_8v_7v_6$
	v_9	$v_9v_1v_2v_3v_4$	$v_9v_1v_2v_3v_4v_5$	$v_9v_1v_2v_3v_6$
	v_{10}	$v_{10}v_2v_3v_4$	$v_{10}v_2v_3v_4v_5$	$v_{10}v_2v_3v_6$
	v_{11}	$v_{11}v_3v_4$	$v_{11}v_3v_4v_5$	$v_{11}v_3v_6$
	v_{12}	$v_{12}v_4$	$v_{12}v_4v_5$	$v_{12}v_4v_5v_6$
	v_{13}	$v_{13}v_5v_4$	$v_{13}v_5$	$v_{13}v_5v_6$
	v_{14}	$v_{14}v_6v_5v_4$	$v_{14}v_6v_5$	$v_{14}v_6$
	v_{15}	$v_{15}v_7v_6v_5v_4$	$v_{15}v_7v_6v_5$	$v_{15}v_7v_6$
	v_{16}	$v_{16}v_8v_7v_6v_5v_4$	$v_{16}v_8v_7v_6v_5$	$v_{16}v_8v_7v_6$
	v_{17}	$v_{17}v_9v_1v_2v_3v_4$	$v_{17}v_9v_1v_2v_3v_4v_5$	$v_{17}v_9v_1v_2v_3v_6$
	v_{18}	$v_{18}v_{10}v_2v_3v_4$	$v_{18}v_{10}v_2v_3v_4v_5$	$v_{18}v_{10}v_2v_3v_6$
	v_{19}	$v_{19}v_{11}v_3v_4$	$v_{19}v_{11}v_3v_4v_5$	$v_{19}v_{11}v_3v_6$
	v_{20}	$v_{20}v_{12}v_4$	$v_{20}v_{12}v_4v_5$	$v_{20}v_{12}v_4v_5v_6$
	v_{21}	$v_{21}v_{13}v_5v_4$	$v_{21}v_{13}v_5$	$v_{21}v_{13}v_5v_6$
	v_{22}	$v_{22}v_{14}v_6v_5v_4$	$v_{22}v_{14}v_6v_5$	$v_{22}v_{14}v_6$
	v_{23}	$v_{23}v_{15}v_7v_6v_5v_4$	$v_{23}v_{15}v_7v_6v_5$	$v_{23}v_{15}v_7v_6$
	v_{24}	$v_{24}v_{16}v_8v_7v_6v_5v_4$	$v_{24}v_{16}v_8v_7v_6v_5$	$v_{24}v_{16}v_8v_7v_6$
	v_{25}	$v_{25}v_{17}v_9v_1v_2v_3v_4$	$v_{25}v_{17}v_9v_1v_2v_3v_4v_5$	$v_{25}v_{17}v_9v_1v_2v_3v_6$
	v_{26}	$v_{26}v_{18}v_{10}v_2v_3v_4$	$v_{26}v_{18}v_{10}v_2v_3v_4v_5$	$v_{26}v_{18}v_{10}v_2v_3v_6$
	v_{27}	$v_{27}v_{19}v_{11}v_3v_4$	$v_{27}v_{19}v_{11}v_3v_4v_5$	$v_{27}v_{19}v_{11}v_3v_6$
	v_{28}	$v_{28}v_{20}v_{12}v_4$	$v_{28}v_{20}v_{12}v_4v_5$	$v_{28}v_{20}v_{12}v_4v_5v_6$
	v_{29}	$v_{29}v_{21}v_{13}v_5v_4$	$v_{29}v_{21}v_{13}v_5$	$v_{29}v_{21}v_{13}v_5v_6$
	v_{30}	$v_{30}v_{22}v_{14}v_6v_5v_4$	$v_{30}v_{22}v_{14}v_6v_5$	$v_{30}v_{22}v_{14}v_6$
	v_{31}	$v_{31}v_{23}v_{15}v_7v_6v_5v_4$	$v_{31}v_{23}v_{15}v_7v_6v_5$	$v_{31}v_{23}v_{15}v_7v_6$
	v_{32}	$v_{32}v_{24}v_{16}v_8v_7v_6v_5v_4$	$v_{32}v_{24}v_{16}v_8v_7v_6v_5$	$v_{32}v_{24}v_{16}v_8v_7v_6$

Lanjutan Lampiran 4

Rainbow Path u-v				
Titik u	Titik v			
		v_7	v_8	v_9
	v_1	$v_1v_2v_7$	v_1v_8	v_1v_9
	v_2	v_2v_7	$v_2v_1v_8$	$v_2v_1v_9$
	v_3	$v_3v_2v_7$	$v_3v_2v_1v_8$	$v_3v_2v_1v_9$
	v_4	$v_4v_3v_2v_7$	$v_4v_3v_2v_1v_8$	$v_4v_3v_2v_1v_9$
	v_5	$v_5v_6v_7$	$v_5v_6v_7v_8$	$v_5v_4v_3v_2v_1v_9$
	v_6	v_6v_7	$v_6v_7v_8$	$v_6v_3v_2v_1v_9$
	v_7		v_7v_8	$v_7v_2v_1v_9$
	v_8	v_8v_7		$v_8v_1v_9$
	v_9	$v_9v_1v_2v_7$	$v_9v_1v_8$	
	v_{10}	$v_{10}v_2v_7$	$v_{10}v_2v_1v_8$	$v_{10}v_9$
	v_{11}	$v_{11}v_3v_2v_7$	$v_{11}v_3v_2v_1v_8$	$v_{11}v_{10}v_9$
	v_{12}	$v_{12}v_4v_3v_2v_7$	$v_{12}v_4v_3v_2v_1v_8$	$v_{12}v_{11}v_{10}v_9$
	v_{13}	$v_{13}v_5v_6v_7$	$v_{13}v_5v_6v_7v_8$	$v_{13}v_{12}v_{11}v_{10}v_9$
	v_{14}	$v_{14}v_6v_7$	$v_{14}v_6v_7v_8$	$v_{14}v_{11}v_{10}v_9$
	v_{15}	$v_{15}v_7$	$v_{15}v_7v_8$	$v_{15}v_{10}v_9$
	v_{16}	$v_{16}v_8v_7$	$v_{16}v_8$	$v_{16}v_9$
	v_{17}	$v_{17}v_9v_1v_2v_7$	$v_{17}v_9v_1v_8$	$v_{17}v_9$
	v_{18}	$v_{18}v_{10}v_2v_7$	$v_{18}v_{10}v_2v_1v_8$	$v_{18}v_{10}v_9$
	v_{19}	$v_{19}v_{11}v_3v_2v_7$	$v_{19}v_{11}v_3v_2v_1v_8$	$v_{19}v_{11}v_{10}v_9$
	v_{20}	$v_{20}v_{12}v_4v_3v_2v_7$	$v_{20}v_{12}v_4v_3v_2v_1v_8$	$v_{20}v_{12}v_{11}v_{10}v_9$
	v_{21}	$v_{21}v_{13}v_5v_6v_7$	$v_{21}v_{13}v_5v_6v_7v_8$	$v_{21}v_{13}v_{12}v_{11}v_{10}v_9$
	v_{22}	$v_{22}v_{14}v_6v_7$	$v_{22}v_{14}v_6v_7v_8$	$v_{22}v_{14}v_{11}v_{10}v_9$
	v_{23}	$v_{23}v_{15}v_7$	$v_{23}v_{15}v_7v_8$	$v_{23}v_{15}v_{10}v_9$
	v_{24}	$v_{24}v_{16}v_8v_7$	$v_{24}v_{16}v_8$	$v_{24}v_{16}v_9$
	v_{25}	$v_{25}v_{17}v_9v_1v_2v_7$	$v_{25}v_{17}v_9v_1v_8$	$v_{25}v_{17}v_9$
	v_{26}	$v_{26}v_{18}v_{10}v_2v_7$	$v_{26}v_{18}v_{10}v_2v_1v_8$	$v_{26}v_{18}v_{10}v_9$
	v_{27}	$v_{27}v_{19}v_{11}v_3v_2v_7$	$v_{27}v_{19}v_{11}v_3v_2v_1v_8$	$v_{27}v_{19}v_{11}v_{10}v_9$
	v_{28}	$v_{28}v_{20}v_{12}v_4v_3v_2v_7$	$v_{28}v_{20}v_{12}v_4v_3v_2v_1v_8$	$v_{28}v_{20}v_{12}v_{11}v_{10}v_9$
	v_{29}	$v_{29}v_{21}v_{13}v_5v_6v_7$	$v_{29}v_{21}v_{13}v_5v_6v_7v_8$	$v_{29}v_{21}v_{13}v_{12}v_{11}v_{10}v_9$
	v_{30}	$v_{30}v_{22}v_{14}v_6v_7$	$v_{30}v_{22}v_{14}v_6v_7v_8$	$v_{30}v_{22}v_{14}v_{11}v_{10}v_9$
	v_{31}	$v_{31}v_{23}v_{15}v_7$	$v_{31}v_{23}v_{15}v_7v_8$	$v_{31}v_{23}v_{15}v_{10}v_9$
	v_{32}	$v_{32}v_{24}v_{16}v_8v_7$	$v_{32}v_{24}v_{16}v_8$	$v_{32}v_{24}v_{16}v_9$

Lanjutan Lampiran 4

Rainbow Path u-v				
Titik u	Titik v			
		v_{10}	v_{11}	v_{12}
	v_1	$v_1v_2v_{10}$	$v_1v_2v_3v_{11}$	$v_1v_2v_3v_4v_{12}$
	v_2	v_2v_{10}	$v_2v_3v_{11}$	$v_2v_3v_4v_{12}$
	v_3	$v_3v_2v_{10}$	v_3v_{11}	$v_3v_4v_{12}$
	v_4	$v_4v_3v_2v_{10}$	$v_4v_3v_{11}$	v_4v_{12}
	v_5	$v_5v_4v_3v_2v_{10}$	$v_5v_4v_3v_{11}$	$v_5v_4v_{12}$
	v_6	$v_6v_3v_2v_{10}$	$v_6v_3v_{11}$	$v_6v_3v_4v_{12}$
	v_7	$v_7v_2v_{10}$	$v_7v_2v_3v_{11}$	$v_7v_2v_3v_4v_{12}$
	v_8	$v_8v_1v_2v_{10}$	$v_8v_1v_2v_3v_{11}$	$v_8v_1v_2v_3v_4v_{12}$
	v_9	v_9v_{10}	$v_9v_{10}v_{11}$	$v_9v_{10}v_{11}v_{12}$
	v_{10}		$v_{10}v_{11}$	$v_{10}v_{11}v_{12}$
	v_{11}	$v_{11}v_{10}$		$v_{11}v_{12}$
	v_{12}	$v_{12}v_{11}v_{10}$	$v_{12}v_{11}$	
	v_{13}	$v_{13}v_{12}v_{11}v_{10}$	$v_{13}v_{12}v_{11}$	$v_{13}v_{12}$
	v_{14}	$v_{14}v_{11}v_{10}$	$v_{14}v_{11}$	$v_{14}v_{11}v_{12}$
	v_{15}	$v_{15}v_{10}$	$v_{15}v_{10}v_{11}$	$v_{15}v_{10}v_{11}v_{12}$
	v_{16}	$v_{16}v_{15}v_{10}$	$v_{16}v_9v_{10}v_{11}$	$v_{16}v_9v_{10}v_{11}v_{12}$
	v_{17}	$v_{17}v_9v_{10}$	$v_{17}v_9v_{10}v_{11}$	$v_{17}v_9v_{10}v_{11}v_{12}$
	v_{18}	$v_{18}v_{10}$	$v_{18}v_{10}v_{11}$	$v_{18}v_{10}v_{11}v_{12}$
	v_{19}	$v_{19}v_{11}v_{10}$	$v_{19}v_{11}$	$v_{19}v_{11}v_{12}$
	v_{20}	$v_{20}v_{12}v_{11}v_{10}$	$v_{20}v_{12}v_{11}$	$v_{20}v_{12}$
	v_{21}	$v_{21}v_{13}v_{12}v_{11}v_{10}$	$v_{21}v_{13}v_{12}v_{11}$	$v_{21}v_{13}v_{12}$
	v_{22}	$v_{22}v_{14}v_{11}v_{10}$	$v_{22}v_{14}v_{11}$	$v_{22}v_{14}v_{11}v_{12}$
	v_{23}	$v_{23}v_{15}v_{10}$	$v_{23}v_{15}v_{10}v_{11}$	$v_{23}v_{15}v_{10}v_{11}v_{12}$
	v_{24}	$v_{24}v_{16}v_{15}v_{10}$	$v_{24}v_{16}v_9v_{10}v_{11}$	$v_{24}v_{16}v_9v_{10}v_{11}v_{12}$
	v_{25}	$v_{25}v_{17}v_9v_{10}$	$v_{25}v_{17}v_9v_{10}v_{11}$	$v_{25}v_{17}v_9v_{10}v_{11}v_{12}$
	v_{26}	$v_{26}v_{18}v_{10}$	$v_{26}v_{18}v_{10}v_{11}$	$v_{26}v_{18}v_{10}v_{11}v_{12}$
	v_{27}	$v_{27}v_{19}v_{11}v_{10}$	$v_{27}v_{19}v_{11}$	$v_{27}v_{19}v_{11}v_{12}$
	v_{28}	$v_{28}v_{20}v_{12}v_{11}v_{10}$	$v_{28}v_{20}v_{12}v_{11}$	$v_{28}v_{20}v_{12}$
	v_{29}	$v_{29}v_{21}v_{13}v_{12}v_{11}v_{10}$	$v_{29}v_{21}v_{13}v_{12}v_{11}$	$v_{29}v_{21}v_{13}v_{12}$
	v_{30}	$v_{30}v_{22}v_{14}v_{11}v_{10}$	$v_{30}v_{22}v_{14}v_{11}$	$v_{30}v_{22}v_{14}v_{11}v_{12}$
	v_{31}	$v_{31}v_{23}v_{15}v_{10}$	$v_{31}v_{23}v_{15}v_{10}v_{11}$	$v_{31}v_{23}v_{15}v_{10}v_{11}v_{12}$
	v_{32}	$v_{32}v_{24}v_{16}v_{15}v_{10}$	$v_{32}v_{24}v_{16}v_9v_{10}v_{11}$	$v_{32}v_{24}v_{16}v_9v_{10}v_{11}v_{12}$

Lanjutan Lampiran 4

Rainbow Path u-v				
Titik u	Titik v			
		v_{13}	v_{14}	v_{15}
	v_1	$v_1v_2v_3v_4v_5v_{13}$	$v_1v_2v_3v_6v_{14}$	$v_1v_2v_7v_{15}$
	v_2	$v_2v_3v_4v_5v_{13}$	$v_2v_3v_6v_{14}$	$v_2v_7v_{15}$
	v_3	$v_3v_4v_5v_{13}$	$v_3v_6v_{14}$	$v_3v_6v_7v_{15}$
	v_4	$v_4v_5v_{13}$	$v_4v_3v_6v_{14}$	$v_4v_5v_6v_7v_{15}$
	v_5	v_5v_{13}	$v_5v_6v_{14}$	$v_5v_6v_7v_{15}$
	v_6	$v_6v_5v_{13}$	v_6v_{14}	$v_6v_7v_{15}$
	v_7	$v_7v_6v_5v_{13}$	$v_7v_6v_{14}$	v_7v_{15}
	v_8	$v_8v_7v_6v_5v_{13}$	$v_8v_7v_6v_{14}$	$v_8v_7v_{15}$
	v_9	$v_9v_{10}v_{11}v_{12}v_{13}$	$v_9v_{10}v_{11}v_{14}$	$v_9v_{10}v_{15}$
	v_{10}	$v_{10}v_{11}v_{12}v_{13}$	$v_{10}v_{11}v_{14}$	$v_{10}v_{15}$
	v_{11}	$v_{11}v_{12}v_{13}$	$v_{11}v_{14}$	$v_{11}v_{10}v_{15}$
	v_{12}	$v_{12}v_{13}$	$v_{12}v_{11}v_{14}$	$v_{12}v_{11}v_{10}v_{15}$
	v_{13}		$v_{13}v_{14}$	$v_{13}v_{14}v_{15}$
	v_{14}	$v_{14}v_{13}$		$v_{14}v_{15}$
	v_{15}	$v_{15}v_{14}v_{13}$	$v_{15}v_{14}$	
	v_{16}	$v_{16}v_{15}v_{14}v_{13}$	$v_{16}v_{15}v_{14}$	$v_{16}v_{15}$
	v_{17}	$v_{17}v_9v_{10}v_{11}v_{12}v_{13}$	$v_{17}v_9v_{10}v_{11}v_{14}$	$v_{17}v_9v_{10}v_{15}$
	v_{18}	$v_{18}v_{10}v_{11}v_{12}v_{13}$	$v_{18}v_{10}v_{11}v_{14}$	$v_{18}v_{10}v_{15}$
	v_{19}	$v_{19}v_{11}v_{12}v_{13}$	$v_{19}v_{11}v_{14}$	$v_{19}v_{11}v_{10}v_{15}$
	v_{20}	$v_{20}v_{12}v_{13}$	$v_{20}v_{12}v_{11}v_{14}$	$v_{20}v_{12}v_{11}v_{10}v_{15}$
	v_{21}	$v_{21}v_{13}$	$v_{21}v_{13}v_{14}$	$v_{21}v_{13}v_{14}v_{15}$
	v_{22}	$v_{22}v_{14}v_{13}$	$v_{22}v_{14}$	$v_{22}v_{14}v_{15}$
	v_{23}	$v_{23}v_{15}v_{14}v_{13}$	$v_{23}v_{15}v_{14}$	$v_{23}v_{15}$
	v_{24}	$v_{24}v_{16}v_{15}v_{14}v_{13}$	$v_{24}v_{16}v_{15}v_{14}$	$v_{24}v_{16}v_{15}$
	v_{25}	$v_{25}v_{17}v_9v_{10}v_{11}v_{12}v_{13}$	$v_{25}v_{17}v_9v_{10}v_{11}v_{14}$	$v_{25}v_{17}v_9v_{10}v_{15}$
	v_{26}	$v_{26}v_{18}v_{10}v_{11}v_{12}v_{13}$	$v_{26}v_{18}v_{10}v_{11}v_{14}$	$v_{26}v_{18}v_{10}v_{15}$
	v_{27}	$v_{27}v_{19}v_{11}v_{12}v_{13}$	$v_{27}v_{19}v_{11}v_{14}$	$v_{27}v_{19}v_{11}v_{10}v_{15}$
	v_{28}	$v_{28}v_{20}v_{12}v_{13}$	$v_{28}v_{20}v_{12}v_{11}v_{14}$	$v_{28}v_{20}v_{12}v_{11}v_{10}v_{15}$
	v_{29}	$v_{29}v_{21}v_{13}$	$v_{29}v_{21}v_{13}v_{14}$	$v_{29}v_{21}v_{13}v_{14}v_{15}$
	v_{30}	$v_{30}v_{22}v_{14}v_{13}$	$v_{30}v_{22}v_{14}$	$v_{30}v_{22}v_{14}v_{15}$
	v_{31}	$v_{31}v_{23}v_{15}v_{14}v_{13}$	$v_{31}v_{23}v_{15}v_{14}$	$v_{31}v_{23}v_{15}$
	v_{32}	$v_{32}v_{24}v_{16}v_{15}v_{14}v_{13}$	$v_{32}v_{24}v_{16}v_{15}v_{14}$	$v_{32}v_{24}v_{16}v_{15}$

Lanjutan Lampiran 4

Rainbow Path u-v				
Titik u	Titik v			
		v_{16}	v_{17}	v_{18}
	v_1	$v_1v_8v_{16}$	$v_1v_9v_{17}$	$v_1v_2v_{10}v_{18}$
	v_2	$v_2v_1v_8v_{16}$	$v_2v_1v_9v_{17}$	$v_2v_{10}v_{18}$
	v_3	$v_3v_2v_1v_8v_{16}$	$v_3v_2v_1v_9v_{17}$	$v_3v_2v_{10}v_{18}$
	v_4	$v_4v_3v_2v_1v_8v_{16}$	$v_4v_3v_2v_1v_9v_{17}$	$v_4v_3v_2v_{10}v_{18}$
	v_5	$v_5v_6v_7v_8v_{16}$	$v_5v_4v_3v_2v_1v_9v_{17}$	$v_5v_4v_3v_2v_{10}v_{18}$
	v_6	$v_6v_7v_8v_{16}$	$v_6v_3v_2v_1v_9v_{17}$	$v_6v_3v_2v_{10}v_{18}$
	v_7	$v_7v_8v_{16}$	$v_7v_2v_1v_9v_{17}$	$v_7v_2v_{10}v_{18}$
	v_8	v_8v_{16}	$v_8v_1v_9v_{17}$	$v_8v_1v_2v_{10}v_{18}$
	v_9	v_9v_{16}	v_9v_{17}	$v_9v_{10}v_{18}$
	v_{10}	$v_{10}v_9v_{16}$	$v_{10}v_9v_{17}$	$v_{10}v_{18}$
	v_{11}	$v_{11}v_{10}v_9v_{16}$	$v_{11}v_{10}v_9v_{17}$	$v_{11}v_{10}v_{18}$
	v_{12}	$v_{12}v_{11}v_{10}v_9v_{16}$	$v_{12}v_{11}v_{10}v_9v_{17}$	$v_{12}v_{11}v_{10}v_{18}$
	v_{13}	$v_{13}v_{14}v_{15}v_{16}$	$v_{13}v_{12}v_{11}v_{10}v_9v_{17}$	$v_{13}v_{12}v_{11}v_{10}v_{18}$
	v_{14}	$v_{14}v_{15}v_{16}$	$v_{14}v_{11}v_{10}v_9v_{17}$	$v_{14}v_{11}v_{10}v_{18}$
	v_{15}	$v_{15}v_{16}$	$v_{15}v_{10}v_9v_{17}$	$v_{15}v_{10}v_{18}$
	v_{16}		$v_{16}v_9v_{17}$	$v_{16}v_9v_{10}v_{18}$
	v_{17}	$v_{17}v_9v_{16}$		$v_{17}v_{18}$
	v_{18}	$v_{18}v_{10}v_9v_{16}$	$v_{18}v_{17}$	
	v_{19}	$v_{19}v_{11}v_{10}v_9v_{16}$	$v_{19}v_{18}v_{17}$	$v_{19}v_{18}$
	v_{20}	$v_{20}v_{12}v_{11}v_{10}v_9v_{16}$	$v_{20}v_{19}v_{18}v_{17}$	$v_{20}v_{19}v_{18}$
	v_{21}	$v_{21}v_{13}v_{14}v_{15}v_{16}$	$v_{21}v_{20}v_{19}v_{18}v_{17}$	$v_{21}v_{20}v_{19}v_{18}$
	v_{22}	$v_{22}v_{14}v_{15}v_{16}$	$v_{22}v_{19}v_{18}v_{17}$	$v_{22}v_{19}v_{18}$
	v_{23}	$v_{23}v_{15}v_{16}$	$v_{23}v_{18}v_{17}$	$v_{23}v_{18}$
	v_{24}	$v_{24}v_{16}$	$v_{24}v_{17}$	$v_{24}v_{17}v_{18}$
	v_{25}	$v_{25}v_{17}v_9v_{16}$	$v_{25}v_{17}$	$v_{25}v_{17}v_{18}$
	v_{26}	$v_{26}v_{18}v_{10}v_9v_{16}$	$v_{26}v_{18}v_{17}$	$v_{26}v_{18}$
	v_{27}	$v_{27}v_{19}v_{11}v_{10}v_9v_{16}$	$v_{27}v_{19}v_{18}v_{17}$	$v_{27}v_{19}v_{18}$
	v_{28}	$v_{28}v_{20}v_{12}v_{11}v_{10}v_9v_{16}$	$v_{28}v_{20}v_{19}v_{18}v_{17}$	$v_{28}v_{20}v_{19}v_{18}$
	v_{29}	$v_{29}v_{21}v_{13}v_{14}v_{15}v_{16}$	$v_{29}v_{21}v_{20}v_{19}v_{18}v_{17}$	$v_{29}v_{21}v_{20}v_{19}v_{18}$
	v_{30}	$v_{30}v_{22}v_{14}v_{15}v_{16}$	$v_{30}v_{22}v_{19}v_{18}v_{17}$	$v_{30}v_{22}v_{19}v_{18}$
	v_{31}	$v_{31}v_{23}v_{15}v_{16}$	$v_{31}v_{23}v_{18}v_{17}$	$v_{31}v_{23}v_{18}$
	v_{32}	$v_{32}v_{24}v_{16}$	$v_{32}v_{24}v_{17}$	$v_{32}v_{24}v_{17}v_{18}$

Lanjutan Lampiran 4

Rainbow Path u-v				
Titik u	Titik v			
		v_{19}	v_{20}	v_{21}
	v_1	$v_1v_2v_3v_{11}v_{19}$	$v_1v_2v_3v_4v_{12}v_{20}$	$v_1v_2v_3v_4v_5v_{13}v_{21}$
	v_2	$v_2v_3v_{11}v_{19}$	$v_2v_3v_4v_{12}v_{20}$	$v_2v_3v_4v_5v_{13}v_{21}$
	v_3	$v_3v_{11}v_{19}$	$v_3v_4v_{12}v_{20}$	$v_3v_4v_5v_{13}v_{21}$
	v_4	$v_4v_3v_{11}v_{19}$	$v_4v_{12}v_{20}$	$v_4v_5v_{13}v_{21}$
	v_5	$v_5v_4v_3v_{11}v_{19}$	$v_5v_4v_{12}v_{20}$	$v_5v_{13}v_{21}$
	v_6	$v_6v_3v_{11}v_{19}$	$v_6v_5v_4v_{12}v_{20}$	$v_6v_5v_{13}v_{21}$
	v_7	$v_7v_2v_3v_{11}v_{19}$	$v_7v_6v_5v_4v_{12}v_{20}$	$v_7v_6v_5v_{13}v_{21}$
	v_8	$v_8v_1v_2v_3v_{11}v_{19}$	$v_8v_7v_6v_5v_4v_{12}v_{20}$	$v_8v_7v_6v_5v_{13}v_{21}$
	v_9	$v_9v_{10}v_{11}v_{19}$	$v_9v_{10}v_{11}v_{12}v_{20}$	$v_9v_{10}v_{11}v_{12}v_{13}v_{21}$
	v_{10}	$v_{10}v_{11}v_{19}$	$v_{10}v_{11}v_{12}v_{20}$	$v_{10}v_{11}v_{12}v_{13}v_{21}$
	v_{11}	$v_{11}v_{19}$	$v_{11}v_{12}v_{20}$	$v_{11}v_{12}v_{13}v_{21}$
	v_{12}	$v_{12}v_{11}v_{19}$	$v_{12}v_{20}$	$v_{12}v_{13}v_{21}$
	v_{13}	$v_{13}v_{12}v_{11}v_{19}$	$v_{13}v_{12}v_{20}$	$v_{13}v_{21}$
	v_{14}	$v_{14}v_{11}v_{19}$	$v_{14}v_{11}v_{12}v_{20}$	$v_{14}v_{13}v_{21}$
	v_{15}	$v_{15}v_{10}v_{11}v_{19}$	$v_{15}v_{10}v_{11}v_{12}v_{20}$	$v_{15}v_{14}v_{13}v_{21}$
	v_{16}	$v_{16}v_9v_{10}v_{11}v_{19}$	$v_{16}v_9v_{10}v_{11}v_{12}v_{20}$	$v_{16}v_{15}v_{14}v_{13}v_{21}$
	v_{17}	$v_{17}v_{18}v_{19}$	$v_{17}v_{18}v_{19}v_{20}$	$v_{17}v_{18}v_{19}v_{20}v_{21}$
	v_{18}	$v_{18}v_{19}$	$v_{18}v_{19}v_{20}$	$v_{18}v_{19}v_{20}v_{21}$
	v_{19}		$v_{19}v_{20}$	$v_{19}v_{20}v_{21}$
	v_{20}	$v_{20}v_{19}$		$v_{20}v_{21}$
	v_{21}	$v_{21}v_{20}v_{19}$	$v_{21}v_{20}$	
	v_{22}	$v_{22}v_{19}$	$v_{22}v_{19}v_{20}$	$v_{22}v_{21}$
	v_{23}	$v_{23}v_{18}v_{19}$	$v_{23}v_{18}v_{19}v_{20}$	$v_{23}v_{22}v_{21}$
	v_{24}	$v_{24}v_{17}v_{18}v_{19}$	$v_{24}v_{17}v_{18}v_{19}v_{20}$	$v_{24}v_{23}v_{22}v_{21}$
	v_{25}	$v_{25}v_{17}v_{18}v_{19}$	$v_{25}v_{17}v_{18}v_{19}v_{20}$	$v_{25}v_{17}v_{18}v_{19}v_{20}v_{21}$
	v_{26}	$v_{26}v_{18}v_{19}$	$v_{26}v_{18}v_{19}v_{20}$	$v_{26}v_{18}v_{19}v_{20}v_{21}$
	v_{27}	$v_{27}v_{19}$	$v_{27}v_{19}v_{20}$	$v_{27}v_{19}v_{20}v_{21}$
	v_{28}	$v_{28}v_{20}v_{19}$	$v_{28}v_{20}$	$v_{28}v_{20}v_{21}$
	v_{29}	$v_{29}v_{21}v_{20}v_{19}$	$v_{29}v_{21}v_{20}$	$v_{29}v_{21}$
	v_{30}	$v_{30}v_{22}v_{19}$	$v_{30}v_{22}v_{19}v_{20}$	$v_{30}v_{22}v_{21}$
	v_{31}	$v_{31}v_{23}v_{18}v_{19}$	$v_{31}v_{23}v_{18}v_{19}v_{20}$	$v_{31}v_{23}v_{22}v_{21}$
	v_{32}	$v_{32}v_{24}v_{17}v_{18}v_{19}$	$v_{32}v_{24}v_{17}v_{18}v_{19}v_{20}$	$v_{32}v_{24}v_{23}v_{22}v_{21}$

Lanjutan Lampiran 4

Rainbow Path u-v				
Titik u	Titik v			
		v_{22}	v_{23}	v_{24}
	v_1	$v_1v_2v_3v_6v_{14}v_{22}$	$v_1v_2v_7v_{15}v_{23}$	$v_1v_8v_{16}v_{24}$
	v_2	$v_2v_3v_6v_{14}v_{22}$	$v_2v_7v_{15}v_{23}$	$v_2v_1v_8v_{16}v_{24}$
	v_3	$v_3v_6v_{14}v_{22}$	$v_3v_2v_7v_{15}v_{23}$	$v_3v_2v_1v_8v_{16}v_{24}$
	v_4	$v_4v_3v_6v_{14}v_{22}$	$v_4v_3v_2v_7v_{15}v_{23}$	$v_4v_3v_2v_1v_8v_{16}v_{24}$
	v_5	$v_5v_6v_{14}v_{22}$	$v_5v_6v_7v_{15}v_{23}$	$v_5v_6v_7v_8v_{16}v_{24}$
	v_6	$v_6v_{14}v_{22}$	$v_6v_7v_{15}v_{23}$	$v_6v_7v_8v_{16}v_{24}$
	v_7	$v_7v_6v_{14}v_{22}$	$v_7v_{15}v_{23}$	$v_7v_8v_{16}v_{24}$
	v_8	$v_8v_7v_6v_{14}v_{22}$	$v_8v_7v_{15}v_{23}$	$v_8v_{16}v_{24}$
	v_9	$v_9v_{10}v_{11}v_{14}v_{22}$	$v_9v_{10}v_{15}v_{23}$	$v_9v_{16}v_{24}$
	v_{10}	$v_{10}v_{11}v_{14}v_{22}$	$v_{10}v_{15}v_{23}$	$v_{10}v_9v_{16}v_{24}$
	v_{11}	$v_{11}v_{14}v_{22}$	$v_{11}v_{10}v_{15}v_{23}$	$v_{11}v_{10}v_9v_{16}v_{24}$
	v_{12}	$v_{12}v_{11}v_{14}v_{22}$	$v_{12}v_{11}v_{10}v_{15}v_{23}$	$v_{12}v_{11}v_{10}v_9v_{16}v_{24}$
	v_{13}	$v_{13}v_{14}v_{22}$	$v_{13}v_{14}v_{15}v_{23}$	$v_{13}v_{14}v_{15}v_{16}v_{24}$
	v_{14}	$v_{14}v_{22}$	$v_{14}v_{15}v_{23}$	$v_{14}v_{15}v_{16}v_{24}$
	v_{15}	$v_{15}v_{14}v_{22}$	$v_{15}v_{23}$	$v_{15}v_{16}v_{24}$
	v_{16}	$v_{16}v_{15}v_{14}v_{22}$	$v_{16}v_{15}v_{23}$	$v_{16}v_{24}$
	v_{17}	$v_{17}v_{18}v_{19}v_{22}$	$v_{17}v_{18}v_{23}$	$v_{17}v_{24}$
	v_{18}	$v_{18}v_{19}v_{22}$	$v_{18}v_{23}$	$v_{18}v_{17}v_{24}$
	v_{19}	$v_{19}v_{22}$	$v_{19}v_{18}v_{23}$	$v_{19}v_{18}v_{17}v_{24}$
	v_{20}	$v_{20}v_{19}v_{22}$	$v_{20}v_{19}v_{18}v_{23}$	$v_{20}v_{19}v_{18}v_{17}v_{24}$
	v_{21}	$v_{21}v_{22}$	$v_{21}v_{22}v_{23}$	$v_{21}v_{22}v_{23}v_{24}$
	v_{22}		$v_{22}v_{23}$	$v_{22}v_{23}v_{24}$
	v_{23}	$v_{23}v_{22}$		$v_{23}v_{24}$
	v_{24}	$v_{24}v_{23}v_{22}$	$v_{24}v_{23}$	
	v_{25}	$v_{25}v_{17}v_{18}v_{19}v_{22}$	$v_{25}v_{17}v_{18}v_{23}$	$v_{25}v_{17}v_{24}$
	v_{26}	$v_{26}v_{18}v_{19}v_{22}$	$v_{26}v_{18}v_{23}$	$v_{26}v_{18}v_{17}v_{24}$
	v_{27}	$v_{27}v_{19}v_{22}$	$v_{27}v_{19}v_{18}v_{23}$	$v_{27}v_{19}v_{18}v_{17}v_{24}$
	v_{28}	$v_{28}v_{20}v_{19}v_{22}$	$v_{28}v_{20}v_{19}v_{18}v_{23}$	$v_{28}v_{20}v_{19}v_{18}v_{17}v_{24}$
	v_{29}	$v_{29}v_{21}v_{22}$	$v_{29}v_{21}v_{22}v_{23}$	$v_{29}v_{21}v_{22}v_{23}v_{24}$
	v_{30}	$v_{30}v_{22}$	$v_{30}v_{22}v_{23}$	$v_{30}v_{22}v_{23}v_{24}$
	v_{31}	$v_{31}v_{23}v_{22}$	$v_{31}v_{23}$	$v_{31}v_{23}v_{24}$
	v_{32}	$v_{32}v_{24}v_{23}v_{22}$	$v_{32}v_{24}v_{23}$	$v_{32}v_{24}$

Lanjutan Lampiran 4

Rainbow Path u-v			
Titik u	Titik v		
	v_{25}	v_{26}	v_{27}
v_1	$v_1v_9v_{17}v_{25}$	$v_1v_2v_{10}v_{18}v_{26}$	$v_1v_2v_3v_{11}v_{19}v_{27}$
v_2	$v_2v_1v_9v_{17}v_{25}$	$v_2v_{10}v_{18}v_{26}$	$v_2v_3v_{11}v_{19}v_{27}$
v_3	$v_3v_2v_1v_9v_{17}v_{25}$	$v_3v_2v_{10}v_{18}v_{26}$	$v_3v_{11}v_{19}v_{27}$
v_4	$v_4v_3v_2v_1v_9v_{17}v_{25}$	$v_4v_3v_2v_{10}v_{18}v_{26}$	$v_4v_3v_{11}v_{19}v_{27}$
v_5	$v_5v_4v_3v_2v_1v_9v_{17}v_{25}$	$v_5v_4v_3v_2v_{10}v_{18}v_{26}$	$v_5v_4v_3v_{11}v_{19}v_{27}$
v_6	$v_6v_3v_2v_1v_9v_{17}v_{25}$	$v_6v_3v_2v_{10}v_{18}v_{26}$	$v_6v_3v_{11}v_{19}v_{27}$
v_7	$v_7v_2v_1v_9v_{17}v_{25}$	$v_7v_2v_{10}v_{18}v_{26}$	$v_7v_2v_3v_{11}v_{19}v_{27}$
v_8	$v_8v_1v_9v_{17}v_{25}$	$v_8v_1v_2v_{10}v_{18}v_{26}$	$v_8v_1v_2v_3v_{11}v_{19}v_{27}$
v_9	$v_9v_{17}v_{25}$	$v_9v_{10}v_{18}v_{26}$	$v_9v_{10}v_{11}v_{19}v_{27}$
v_{10}	$v_{10}v_9v_{17}v_{25}$	$v_{10}v_{18}v_{26}$	$v_{10}v_{11}v_{19}v_{27}$
v_{11}	$v_{11}v_{10}v_9v_{17}v_{25}$	$v_{11}v_{10}v_{18}v_{26}$	$v_{11}v_{19}v_{27}$
v_{12}	$v_{12}v_{11}v_{10}v_9v_{17}v_{25}$	$v_{12}v_{11}v_{10}v_{18}v_{26}$	$v_{12}v_{11}v_{19}v_{27}$
v_{13}	$v_{13}v_{12}v_{11}v_{10}v_9v_{17}v_{25}$	$v_{13}v_{12}v_{11}v_{10}v_{18}v_{26}$	$v_{13}v_{12}v_{11}v_{19}v_{27}$
v_{14}	$v_{14}v_{11}v_{10}v_9v_{17}v_{25}$	$v_{14}v_{11}v_{10}v_{18}v_{26}$	$v_{14}v_{11}v_{19}v_{27}$
v_{15}	$v_{15}v_{10}v_9v_{17}v_{25}$	$v_{15}v_{10}v_{18}v_{26}$	$v_{15}v_{10}v_{11}v_{19}v_{27}$
v_{16}	$v_{16}v_9v_{17}v_{25}$	$v_{16}v_{15}v_{10}v_{18}v_{26}$	$v_{16}v_9v_{10}v_{11}v_{19}v_{27}$
v_{17}	$v_{17}v_{25}$	$v_{17}v_{18}v_{26}$	$v_{17}v_{18}v_{19}v_{27}$
v_{18}	$v_{18}v_{17}v_{25}$	$v_{18}v_{26}$	$v_{18}v_{19}v_{27}$
v_{19}	$v_{19}v_{18}v_{17}v_{25}$	$v_{19}v_{18}v_{26}$	$v_{19}v_{27}$
v_{20}	$v_{20}v_{19}v_{18}v_{17}v_{25}$	$v_{20}v_{19}v_{18}v_{26}$	$v_{20}v_{19}v_{27}$
v_{21}	$v_{21}v_{20}v_{19}v_{18}v_{17}v_{25}$	$v_{21}v_{20}v_{19}v_{18}v_{26}$	$v_{21}v_{20}v_{19}v_{27}$
v_{22}	$v_{22}v_{19}v_{18}v_{17}v_{25}$	$v_{22}v_{19}v_{18}v_{26}$	$v_{22}v_{19}v_{27}$
v_{23}	$v_{23}v_{18}v_{17}v_{25}$	$v_{23}v_{18}v_{26}$	$v_{23}v_{18}v_{19}v_{27}$
v_{24}	$v_{24}v_{17}v_{25}$	$v_{24}v_{17}v_{18}v_{26}$	$v_{24}v_{17}v_{18}v_{19}v_{27}$
v_{25}		$v_{25}v_{26}$	$v_{25}v_{26}v_{27}$
v_{26}	$v_{26}v_{25}$		$v_{26}v_{27}$
v_{27}	$v_{27}v_{26}v_{25}$	$v_{27}v_{26}$	
v_{28}	$v_{28}v_{27}v_{26}v_{25}$	$v_{28}v_{27}v_{26}$	$v_{28}v_{27}$
v_{29}	$v_{29}v_{28}v_{27}v_{26}v_{25}$	$v_{29}v_{28}v_{27}v_{26}$	$v_{29}v_{28}v_{27}$
v_{30}	$v_{30}v_{27}v_{26}v_{25}$	$v_{30}v_{27}v_{26}$	$v_{30}v_{27}$
v_{31}	$v_{31}v_{26}v_{25}$	$v_{31}v_{26}$	$v_{31}v_{26}v_{27}$
v_{32}	$v_{32}v_{25}$	$v_{32}v_{25}v_{26}$	$v_{32}v_{25}v_{26}v_{27}$

Lanjutan Lampiran 4

Rainbow Path u-v

Titik u	Titik v		
	v_{28}	v_{29}	v_{30}
v_1	$v_1v_2v_3v_4v_{12}v_{20}v_{28}$	$v_1v_2v_3v_4v_5v_{13}v_{21}v_{29}$	$v_1v_2v_3v_6v_{14}v_{22}v_{30}$
v_2	$v_2v_3v_4v_{12}v_{20}v_{28}$	$v_2v_3v_4v_5v_{13}v_{21}v_{29}$	$v_2v_3v_6v_{14}v_{22}v_{30}$
v_3	$v_3v_4v_{12}v_{20}v_{28}$	$v_3v_4v_5v_{13}v_{21}v_{29}$	$v_3v_6v_{14}v_{22}v_{30}$
v_4	$v_4v_{12}v_{20}v_{28}$	$v_4v_5v_{13}v_{21}v_{29}$	$v_4v_3v_6v_{14}v_{22}v_{30}$
v_5	$v_5v_4v_{12}v_{20}v_{28}$	$v_5v_{13}v_{21}v_{29}$	$v_5v_6v_{14}v_{22}v_{30}$
v_6	$v_6v_5v_4v_{12}v_{20}v_{28}$	$v_6v_5v_{13}v_{21}v_{29}$	$v_6v_{14}v_{22}v_{30}$
v_7	$v_7v_6v_5v_4v_{12}v_{20}v_{28}$	$v_7v_6v_5v_{13}v_{21}v_{29}$	$v_7v_6v_{14}v_{22}v_{30}$
v_8	$v_8v_7v_6v_5v_4v_{12}v_{20}v_{28}$	$v_8v_7v_6v_5v_{13}v_{21}v_{29}$	$v_8v_7v_6v_{14}v_{22}v_{30}$
v_9	$v_9v_{10}v_{11}v_{12}v_{20}v_{28}$	$v_9v_{10}v_{11}v_{12}v_{13}v_{21}v_{29}$	$v_9v_{10}v_{11}v_{14}v_{22}v_{30}$
v_{10}	$v_{10}v_{11}v_{12}v_{20}v_{28}$	$v_{10}v_{11}v_{12}v_{13}v_{21}v_{29}$	$v_{10}v_{11}v_{14}v_{22}v_{30}$
v_{11}	$v_{11}v_{12}v_{20}v_{28}$	$v_{11}v_{12}v_{13}v_{21}v_{29}$	$v_{11}v_{14}v_{22}v_{30}$
v_{12}	$v_{12}v_{20}v_{28}$	$v_{12}v_{13}v_{21}v_{29}$	$v_{12}v_{11}v_{14}v_{22}v_{30}$
v_{13}	$v_{13}v_{12}v_{20}v_{28}$	$v_{13}v_{21}v_{29}$	$v_{13}v_{14}v_{22}v_{30}$
v_{14}	$v_{14}v_{13}v_{12}v_{20}v_{28}$	$v_{14}v_{13}v_{21}v_{29}$	$v_{14}v_{22}v_{30}$
v_{15}	$v_{15}v_{14}v_{13}v_{12}v_{20}v_{28}$	$v_{15}v_{14}v_{13}v_{21}v_{29}$	$v_{15}v_{14}v_{22}v_{30}$
v_{16}	$v_{16}v_{15}v_{14}v_{13}v_{12}v_{20}v_{28}$	$v_{16}v_{15}v_{14}v_{13}v_{21}v_{29}$	$v_{16}v_{15}v_{14}v_{22}v_{30}$
v_{17}	$v_{17}v_{18}v_{19}v_{20}v_{28}$	$v_{17}v_{18}v_{19}v_{20}v_{21}v_{29}$	$v_{17}v_{18}v_{19}v_{22}v_{30}$
v_{18}	$v_{18}v_{19}v_{19}v_{20}v_{28}$	$v_{18}v_{19}v_{20}v_{21}v_{29}$	$v_{18}v_{19}v_{22}v_{30}$
v_{19}	$v_{19}v_{20}v_{28}$	$v_{19}v_{20}v_{21}v_{29}$	$v_{19}v_{22}v_{30}$
v_{20}	$v_{20}v_{28}$	$v_{20}v_{21}v_{29}$	$v_{20}v_{19}v_{22}v_{30}$
v_{21}	$v_{21}v_{20}v_{28}$	$v_{21}v_{29}$	$v_{21}v_{22}v_{30}$
v_{22}	$v_{22}v_{21}v_{20}v_{28}$	$v_{22}v_{21}v_{29}$	$v_{22}v_{30}$
v_{23}	$v_{23}v_{22}v_{21}v_{20}v_{28}$	$v_{23}v_{22}v_{21}v_{29}$	$v_{23}v_{22}v_{30}$
v_{24}	$v_{24}v_{23}v_{22}v_{21}v_{20}v_{28}$	$v_{24}v_{23}v_{22}v_{21}v_{29}$	$v_{24}v_{23}v_{22}v_{30}$
v_{25}	$v_{25}v_{26}v_{27}v_{28}$	$v_{25}v_{26}v_{27}v_{28}v_{29}$	$v_{25}v_{26}v_{27}v_{30}$
v_{26}	$v_{26}v_{27}v_{28}$	$v_{26}v_{27}v_{28}v_{29}$	$v_{26}v_{27}v_{30}$
v_{27}	$v_{27}v_{28}$	$v_{27}v_{28}v_{29}$	$v_{27}v_{30}$
v_{28}		$v_{28}v_{29}$	$v_{28}v_{27}v_{30}$
v_{29}	$v_{29}v_{28}$		$v_{29}v_{30}$
v_{30}	$v_{30}v_{27}v_{28}$	$v_{30}v_{29}$	
v_{31}	$v_{31}v_{26}v_{27}v_{28}$	$v_{31}v_{30}v_{29}$	$v_{31}v_{30}$
v_{32}	$v_{32}v_{25}v_{26}v_{27}v_{28}$	$v_{32}v_{31}v_{30}v_{29}$	$v_{32}v_{31}v_{30}$

Lanjutan Lampiran 4

Rainbow Path u-v			
Titik u	Titik v		
		v_{31}	v_{32}
	v_1	$v_1v_2v_7v_{15}v_{23}v_{31}$	$v_1v_8v_{16}v_{24}v_{32}$
	v_2	$v_2v_7v_{15}v_{23}v_{31}$	$v_2v_1v_8v_{16}v_{24}v_{32}$
	v_3	$v_3v_2v_7v_{15}v_{23}v_{31}$	$v_3v_2v_1v_8v_{16}v_{24}v_{32}$
	v_4	$v_4v_3v_2v_7v_{15}v_{23}v_{31}$	$v_4v_3v_2v_1v_8v_{16}v_{24}v_{32}$
	v_5	$v_5v_6v_7v_{15}v_{23}v_{31}$	$v_5v_6v_7v_8v_{16}v_{24}v_{32}$
	v_6	$v_6v_7v_{15}v_{23}v_{31}$	$v_6v_7v_8v_{16}v_{24}v_{32}$
	v_7	$v_7v_{15}v_{23}v_{31}$	$v_7v_8v_{16}v_{24}v_{32}$
	v_8	$v_8v_7v_{15}v_{23}v_{31}$	$v_8v_{16}v_{24}v_{32}$
	v_9	$v_9v_{10}v_{15}v_{23}v_{31}$	$v_9v_{16}v_{24}v_{32}$
	v_{10}	$v_{10}v_{15}v_{23}v_{31}$	$v_{10}v_9v_{16}v_{24}v_{32}$
	v_{11}	$v_{11}v_{10}v_{15}v_{23}v_{31}$	$v_{11}v_{10}v_9v_{16}v_{24}v_{32}$
	v_{12}	$v_{12}v_{11}v_{10}v_{15}v_{23}v_{31}$	$v_{12}v_{11}v_{10}v_9v_{16}v_{24}v_{32}$
	v_{13}	$v_{13}v_{14}v_{15}v_{23}v_{31}$	$v_{13}v_{14}v_{15}v_{16}v_{24}v_{32}$
	v_{14}	$v_{14}v_{15}v_{23}v_{31}$	$v_{14}v_{15}v_{16}v_{24}v_{32}$
	v_{15}	$v_{15}v_{23}v_{31}$	$v_{15}v_{16}v_{24}v_{32}$
	v_{16}	$v_{16}v_{15}v_{23}v_{31}$	$v_{16}v_{24}v_{32}$
	v_{17}	$v_{17}v_{18}v_{23}v_{31}$	$v_{17}v_{24}v_{32}$
	v_{18}	$v_{18}v_{23}v_{31}$	$v_{18}v_{17}v_{24}v_{32}$
	v_{19}	$v_{19}v_{18}v_{23}v_{31}$	$v_{19}v_{18}v_{17}v_{24}v_{32}$
	v_{20}	$v_{20}v_{19}v_{18}v_{23}v_{31}$	$v_{20}v_{19}v_{18}v_{17}v_{24}v_{32}$
	v_{21}	$v_{21}v_{22}v_{23}v_{31}$	$v_{21}v_{22}v_{23}v_{24}v_{32}$
	v_{22}	$v_{22}v_{23}v_{31}$	$v_{22}v_{23}v_{24}v_{32}$
	v_{23}	$v_{23}v_{31}$	$v_{23}v_{24}v_{32}$
	v_{24}	$v_{24}v_{23}v_{31}$	$v_{24}v_{32}$
	v_{25}	$v_{25}v_{26}v_{31}$	$v_{25}v_{32}$
	v_{26}	$v_{26}v_{31}$	$v_{26}v_{31}v_{32}$
	v_{27}	$v_{27}v_{26}v_{31}$	$v_{27}v_{30}v_{31}v_{32}$
	v_{28}	$v_{28}v_{27}v_{26}v_{31}$	$v_{28}v_{29}v_{30}v_{31}v_{32}$
	v_{29}	$v_{29}v_{30}v_{31}$	$v_{29}v_{30}v_{31}v_{32}$
	v_{30}	$v_{30}v_{31}$	$v_{30}v_{31}v_{32}$
	v_{31}		$v_{31}v_{32}$
	v_{32}	$v_{32}v_{31}$	

RIWAYAT HIDUP

Lu'lu'ul Barroh, lahir di Kabupaten Malang pada tanggal 08 Nopember 1992, biasa dipanggil Iluk, selama di Malang bertempat tinggal di Jl.Sunan Ampel No.9 Kota Malang. Anak pertama dari tiga bersaudara dari Bapak Muhammad Su'udi dan Fatimah Ambarwati.

Pendidikan dasarnya ditempuh di SDI Al Maarif Sananrejo dan lulus pada tahun 2006, setelah itu melanjutkan ke Madrasah Tsanawiyah Negeri (MTsN) Turen dan lulus pada tahun 2009. Kemudian melanjutkan pendidikan ke Madrasah Aliyah (MA) Al Maarif Singosari dan lulus tahun 2011. Selanjutnya, pada tahun 2011 menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil Jurusan Matematika.

Selama menjadi mahasiswa, penulis berperan aktif pada organisasi intra maupun ekstra kampus dalam rangka mengembangkan kompetensi akademiknya. Penulis menjadi anggota Pergerakan Mahasiswa Islam Indonesia (PMII) pada tahun 2012. Penulis juga menjadi anggota Himpunan Mahasiswa Jurusan (HMJ) Matematika pada tahun 2012.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Lu'lu'ul Barroh
NIM : 11610063
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : *Rainbow Connection Number* Graf Lintasan, Graf Tangga, dan Hasil Perkaliannya
Pembimbing I : Dr. Abdussakir, M.Pd.
Pembimbing II : Dr. Ahmad Barizi, M.A.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	10 Agustus 2017	Konsultasi Bab I	1.
2.	14 September 2017	Konsultasi Bab II	2.
3.	19 Oktober 2017	ACC Bab I & Bab II	3.
4.	30 Oktober 2017	Konsultasi Kajian Keagamaan	4.
5.	06 November 2017	Konsultasi Kajian Keagamaan	5.
6.	27 November 2017	Konsultasi Bab III	6.
7.	07 Desember 2017	Konsultasi Bab III	7.
8.	18 Desember 2017	ACC Bab III	8.
9.	28 Desember 2017	Konsultasi Bab IV	9.
10.	03 Januari 2018	Konsultasi Abstrak	10.
11.	09 Januari 2018	ACC Kajian Keagamaan	11.
12.	12 Januari 2018	ACC Bab IV	12.
13.	15 Januari 2018	ACC Abstrak	13.
14.	19 Januari 2018	ACC Keseluruhan	14.

Malang, 12 Februari 2018
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001