

**APLIKASI INTEGRAL FRAKSIONAL DAN TURUNAN FRAKSIONAL
PADA TRANSFORMASI LAPLACE**

SKRIPSI

**OLEH
FINA ALIYATUL HIMAH
NIM. 13610041**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018**

**APLIKASI INTEGRAL FRAKSIONAL DAN TURUNAN FRAKSIONAL
PADA TRANSFORMASI LAPLACE**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
Fina Aliyatul Himah
NIM. 13610041**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018**

**APLIKASI INTEGRAL FRAKSIONAL DAN TURUNAN FRAKSIONAL
PADA TRANSFORMASI LAPLACE**

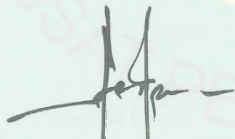
SKRIPSI

Oleh
Fina Aliyatul Himah
NIM. 13610041

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 02 Oktober 2017

Pembimbing I,

Pembimbing II,



Hairur Rahman, M.Si
NIP. 19800429 200604 1 003



Ach. Nashichuddin, M.A
NIP. 19750705 200003 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 2003 12 1 001

APLIKASI INTEGRAL FRAKSIONAL DAN TURUNAN FRAKSIONAL
PADA TRANSFORMASI LAPLACE

SKRIPSI

Oleh
Fina Aliyatul Himah
NIM. 13610041

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

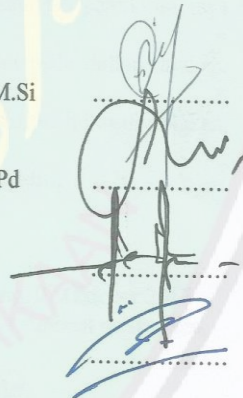
Tanggal 17 November 2017

Penguji Utama : Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si

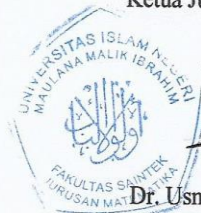
Ketua Penguji : Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd

Sekretaris Penguji : Hairur Rahman, M.Si

Anggota Penguji : Ach. Nashichuddin, M.A



Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 196504014 2003 12 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Fina Aliyatul Himah

NIM : 13610041

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Aplikasi Integral Fraksional dan Turunan Fraksional pada
Transformasi *Laplace*

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan pengambilan data, tulisan atau pemikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan dan pemikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan saya sendiri.

Malang, 02 Oktober 2017
Yang membuat pernyataan,



Fina Aliyatul Himah
NIM. 13610041

MOTO

“Where there is will, there is way”



PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan kepada:

Orang tua tercinta, segenap keluarga penulis yang senantiasa memberikan doa, semangat, dan motivasi kepada penulis, serta sahabat-sahabat yang senantiasa mendukung penulis di kala senang dan sedih.



KATA PENGANTAR

Assalamu 'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt atas limpahan rahmat, taufik, hidayah, dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi yang berjudul “Aplikasi Integral Fraksional dan Turunan Fraksional pada Transformasi *Laplace*” sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat serta salam semoga tetap terlimpahkan kepada Nabi Muhammad Saw yang telah menuntun umatnya dari zaman yang gelap menuju zaman yang terang-benderang.

Penyusunan skripsi ini tidak mungkin dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan, bimbingan, serta arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Abdul Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Hairur Rahman, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, dan pengalaman yang berharga kepada penulis.
5. Ach. Nashichuddin, M.A, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan pengalaman yang berharga kepada penulis.

6. Segenap civitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, terutama seluruh dosen, terima kasih untuk segenap ilmu dan bimbingan selama ini.
7. Orang tua dan segenap keluarga penulis yang selalu memberikan doa dan semangat dalam menyelesaikan penelitian ini.
8. Seluruh sahabat dan teman angkatan 2013 yang selalu ada di kala senang dan sedih dalam rangka proses penyelesaian penelitian ini.
9. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik berupa moril maupun materiil.

Semoga Allah Swt melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat kepada para pembaca khususnya bagi penulis secara pribadi.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Malang, Oktober 2017

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
ABSTRAK	xi
ABSTRACT	xii
ملخص	xiii
 BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Tujuan Penelitian	5
1.4 Batasan Masalah	5
1.5 Manfaat Penelitian	5
1.6 Metode Penelitian	6
1.7 Sistematika Penulisan	7
 BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Integral Fraksional	8
2.1.1 Integral Fraksional Kiri	9
2.1.2 Integra Fraksional Kanan	16
2.2 Turunan Fraksional	20
2.2.1 Turunan Fraksional Kiri	21
2.2.2 Turunan Fraksional Kanan	31
2.3 Transformasi <i>Laplace</i>	39
2.3.1 Syarat Cukup Agar Transformasi <i>Laplace</i> Ada	41
2.3.2 Sifat-sifat Transformasi <i>Laplace</i>	44
2.4 Fungsi Gamma.....	48
2.5 Fungsi Beta	50
2.6 Kesabaran dalam Al-Quran	51

BAB III PEMBAHASAN

3.1	Aplikasi Integral Fraksional pada Transformasi <i>Laplace</i>	54
3.2	Aplikasi Turunan Fraksional pada Transformasi <i>Laplace</i>	60
3.3	Kesabaran dalam Al-Quran dengan Metode Transformasi <i>Laplace</i>	66

BAB IV PENUTUP

4.1	Kesimpulan	69
4.2	Saran	69

DAFTAR RUJUKAN	71
-----------------------------	----

RIWAYAT HIDUP



ABSTRAK

Himah, Fina Aliyatul. 2017. **Aplikasi Integral Fraksional dan Turunan Fraksional pada Transformasi Laplace**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Hairur Rahman, M.Si. (II) Ach. Nashichuddin, M.A.

Kata Kunci: Integral Fraksional, Turunan Fraksional, Transformasi *Laplace*.

Istilah fraksional muncul atas pemikiran G.F.A de L'Hopital dan G.W Leibniz. Secara teori fungsi fraksional merupakan dasar pengembangan dari fungsi Gamma dan fungsi Beta. Pada umumnya orde dari integral dan turunan dari suatu fungsi adalah bilangan asli. Artinya jika diberikan suatu fungsi, maka kita dapat menentukan integral dan turunan dengan orde ke satu, kedua, ketiga dan seterusnya. Ide umum dari konsep ini bagaimana jika orde tersebut adalah suatu bilangan pecahan (fraksional) yaitu bilangan rasional atau bilangan riil. Dalam penelitian ini dijelaskan definisi integral dan turunan fraksional dan metode penyelesaiannya yaitu definisi transformasi *Laplace*. Definisi transformasi *Laplace* secara dasar dikenai definisi integral fraksional dan turunan fraksional sehingga didapatkan bentuk transformasi *Laplace*. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menganalisis penerapan integral fraksional dan turunan pada transformasi *Laplace*, sehingga diharapkan dapat berkontribusi secara mendasar pada bidang ilmu matematika. Hasil dari penelitian ini berupa kajian teori dan analisis penerapan integral fraksional dan turunan fraksional pada transformasi *Laplace*. Secara umum bentuk hasil dari penelitian ini adalah:

1. Transformasi *Laplace* dari Integral Fraksional

$$\mathcal{L}[I^\alpha f(t)] = s^{-\alpha} F(s), \alpha > 0$$
2. Transformasi *Laplace* dari Turunan Fraksional

$$\mathcal{L}[D^\alpha f(t)] = s^\alpha F(s), \alpha > 0$$

Bagi penelitian selanjutnya diharapkan dapat di aplikasikan pada dalam ruang lesbegue di R, R^n dan ruang metrik, ruang morrey klasik dan morrey diperumum.

ABSTRACT

Himah, Fina Aliyatul. 2017. **Application of Fractional Integrals and Fractional Derivative on the Laplace Transform**. Thesis. Department Of Mathematics, Faculty of science and technology, Islamic State University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Hairur Rahman, M.Si. (II) Ach. Nashichuddin, M.A.

Key Words: Fractional Integral, Fractional Derivative, *Laplace* Transform.

The term fractional appears over the thought of A G.F. de L'Hopital and g. w. Leibniz. Theoretically, the fractional function is the basis of the development of the Beta function and Gamma function. In General, the order of the integral and derivative of a function is a natural number function. This means that if given a function, then we can define the integral and derivative of one, second, third order and so on. The general idea of this concept is what if the order is a fractional number of rational numbers or riil numbers. In the study described the definition and method of solution that is using the definition of the *Laplace* transform. The definition of the *Laplace* transform in the basic definition of an integral fractionally charged and fractional derivatives so obtained form the *Laplace* transform. The aim of research is to analyze the application of fractional integrals and derivatives on the *Laplace* transform, so hopefully can contribute substantially to the field of mathematics. The results of this research in the form of study of the theory and analysis of application of fractional integrals and fractional derivative on the *Laplace* transform. In general the form of the results of this research are:

1. The form of the *Laplace* transform of the fractional integral is

$$\mathcal{L}[I^\alpha f(t)] = s^{-\alpha}F(s), \alpha > 0$$
2. The form of the *Laplace* transform of the fractional derivative is

$$\mathcal{L}[D^\alpha f(t)] = s^\alpha F(s), \alpha > 0$$

For further research it is expected to apply Lesbague spaces in R, R^n and metric spaces, classical morrey spaces and generalized morrey.

ملخص

الهمة, فنا عا لية. تطبيق تكامل كسري وتفاضل كسري في تحويل لابلاس. بحث جامعي
شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعة الحكومية الإسلامية مولانا مالك
إبراهيم مالانج.المشرف: (1)خير الرحمن، المجستير.(2)احمد نصحدين، الما
جستير.

الكلمات الرئيسية: تكامل كسري ، تفاضل كسري ، تحويل لابلاس

ويظهر المصطلح الكسري علي فكره تورز de لويتال والسيد ج. و. لينيز. من الناحية النظرية
الكسور الدالة هي أساس تطوير دالة بيتا وغاما وظيفه. وبصفه عامه ، فان أمر التكامل تفاضل
لدالة هي الرقم الطبيعي. وهذا يعني انه إذا كان يعطي دالة، ثم يمكننا تحديد متكاملة ومشتقه
من رتبة واحد ، والثاني ، والثالث ، وهلم تما. الفكرة العامة لهذا المفهوم هو ما إذا كان النظام
هو عدد كسري من الأرقام العقلانية أو الأرقام الحقيقية. في الدراسة وصفت تعريف تكامل
وتفاضل كسري طريقة صلها باستخدام تحويل لابلاس. تعريف تحويل لابلاس في التعريف
الأساسي من المشتقات كسري البحث التي تم الحصول عليها بالشكل الذي يتم تحويل لابلاس.
والهدف من هذا البرنامج هو تحليل تطبيق التكاملات الكسرية والمشتقات علي تحويل لابلاس ،
ولذلك نامل ان تسهم بشكل كبير في مجال الرياضيات. نتائج هذا البحث في شكل دراسة نظرية
وتحليل تطبيق التكاملات الكسرية والمشتقات الكسرية علي تحويل لابلاس. والشكل العام لنتائج
هذا البحث هو:

تحويل لابلاس من ، تفاضل كسري

$$\mathcal{L}[I^\alpha f(t)] = s^{-\alpha} F(s), \alpha > 0$$

تحويل لابلاس من تفاضل كسري

$$\mathcal{L}[D^\alpha f(t)] = s^\alpha F(s), \alpha > 0$$

لمزيد من البحث ومن المتوقع أن تطبيق في المساحات Lesbegue في R, R^n ومسافات متري،
المساحات موري الكلاسيكية وموري المعمم.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Permasalahan-permasalahan yang semakin kompleks dari waktu ke waktu menuntut manusia untuk selalu berkembang dan mencari pemecahan dari permasalahan tersebut. Permasalahan merupakan cara Allah Swt untuk menguji hamba-hambanya yang beriman. Dalam Al-Qur'an telah disinggung dalam firman Allah Swt sebagai berikut:

يَا أَيُّهَا الَّذِينَ ءَامَنُوا اسْتَعِينُوا بِالصَّبْرِ وَالصَّلَاةِ إِنَّ اللَّهَ مَعَ الصَّابِرِينَ

“Hai orang-orang yang beriman, jadikanlah sabar dan shalat sebagai penolongmu, sesungguhnya Allah Swt beserta orang-orang yang sabar” (QS. Al-Baqarah:153).

Menurut tafsir al-Imam Abul Fida Isma'il Ibnu Kasir Ad-Dimasyqi, ayat tersebut mempunyai makna yaitu perihal sabar dan hikmah yang terkandung di dalam masalah menjadikan sabar dan shalat sebagai penolong dan pembimbing. Karena seseorang hamba itu adakalanya berada dalam kenikmatan, lalu ia mensyukurinya, atau ia dalam cobaan, lalu ia bersabar menanggungnya (Ad-Dimasyqi, 2000:48).

Berdasarkan firman Allah Swt di atas, maka ditangkap hikmah tentang bagaimana penyelesaian harus memuat kaidah efektifitas. Sebagai contoh dalam matematika dikenal metode penyelesaian dengan integral fraksional dan turunan fraksional. Integral fraksional dan turunan fraksional adalah bentuk yang lebih umum dari integral dan turunan bilangan bulat. Berbeda dengan integral dan turunan bilangan bulat dimana operasi berpusat pada bilangan bulat, akan tetapi

integral fraksional dan turunan fraksional menganggap setiap bilangan adalah riil, $\alpha > 0$.

Secara teori fungsi fraksional merupakan dasar pengembangan dari fungsi Gamma dan fungsi Beta. Fungsi Gamma adalah perluasan dari fungsi faktorial yang secara umum dinyatakan sebagai berikut $\Gamma(v) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{v-1}, v > 0$. Fungsi Gamma didefinisikan untuk semua bilangan kompleks. Sedangkan fungsi Beta dinyatakan dengan $B(m, n)$ yang didefinisikan sebagai $\int_0^{\infty} x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx, m > 0, n > 0$. Dengan mengaitkan antara fungsi Gamma, fungsi Beta dan definisi integral yang telah diperumum bentuknya maka didapatkan sebuah integral fraksional. Selanjutnya dengan menggunakan definisi turunan maka didapatkan sebuah turunan dari integral fraksional yang dinamakan turunan fraksional.

Menurut Joseph Kimeu (2009) kalkulus fraksional memberikan jawaban atas pertanyaan apakah berlaku sama operasi turunan bilangan bulat ber-orde n dengan n bukan bilangan bulat. Pertanyaan ini pertama kali dikemukakan oleh L'Hopital pada 30 September 1695. Pada saat itu, di dalam surat kepada Leibniz, dia bertanya tentang $\frac{d^n x}{dx^n}$, notasi Leibniz untuk turunan pada fungsi linear $f(x) = x$. L'Hopital bertanya bagaimana hasilnya jika $\frac{1}{2}$. Leibniz menjawab itu akan menjadi “sebuah paradox, yang mana suatu hari konsekuensinya akan diputuskan”.

Hasil pertama datang dari S. F. Lacroix pada tahun 1819, ia matematikawan yang memunculkan paper tentang turunan fraksional. Bermula dari $y = x^m$, dengan m adalah bilangan bulat positif, kemudian mengembangkan

turunan ke $-n$ dari fungsi tersebut. Mengetahui bahwa fungsi faktorial dapat diperumum menjadi fungsi Gamma, ia memperoleh turunan ke $-n$ dari y terhadap x . Dengan fungsi $\Gamma(v)$ adalah integral dari $e^{-x}x^{v-1}$ terhadap x dalam interval (a, ∞) dengan $v > 0$. Ia kemudian mendapatkan solusi yang tepat untuk $m = 1$ dan $n = \frac{1}{2}$, diperoleh turunan ke $-\frac{1}{2}$ dari y terhadap x adalah $\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$.

Integral dan turunan fraksional adalah suatu integral dan turunan dengan orde fraksional (sebarang). Terdapat beberapa pendekatan untuk menotasikan turunan berorde fraksional antara lain yaitu Riemann-Liouville, Caputo, dan Grunwald-Letnikov. Namun, dalam skripsi ini akan dibahas hanya integral dan turunan fraksional Riemann-Liouville. Definisi integral dan turunan fraksional telah ada semenjak dua abad terakhir. Selanjutnya fungsi yang diperoleh dari hasil definisi integral fraksional dan turunan fraksional akan diterapkan pada fungsi transformasi *Laplace*.

Transformasi *Laplace* adalah salah satu metode penyelesaian yang digunakan dalam penelitian ini. Transformasi *Laplace* adalah suatu metode yang mentransformasikan persamaan differensial dari domain waktu t menjadi domain baru dengan variabel bebas s yaitu domain frekuensi, dimana s adalah bilangan kompleks. Begitu pula sebaliknya. Invers transformasi *Laplace* adalah transformasi dari domain frekuensi s menjadi domain waktu t (Effendy dkk, 2013:156-157). Transformasi *Laplace* yang dibahas dalam penelitian ini adalah sebagai alat untuk memudahkan menyelesaikan fungsi integral fraksional dan turunan fraksional. Dimana pada fungsi integral dan turunan fraksional dapat di jadikan dua fungsi yang mana salah satunya dapat di substitusi dari fungsi transformasi *Laplace* yang didefinisikan sebelumnya.

Penelitian yang dilakukan merujuk pada beberapa penelitian terdahulu sehingga diharapkan akan diperoleh teori baru yang dapat dikembangkan secara lebih luas. Sebagai contoh, diantaranya adalah Adam Loverro (2004) yang mengulas tentang sejarah, definisi dan aplikasi integral dan turunan fraksional dalam bidang teknik. Kimeu (2009) membahas tentang integral dan turunan fraksional serta aplikasinya dalam mengontrol suhu pada sistem aliran panas, sedangkan aplikasi dalam bidang ekonomi dinamis diantaranya menentukan elastisitas harga permintaan. Muhammad Deni dkk (2017) yaitu mengkaji dan mengetahui definisi, karakteristik dan sifat integral dan turunan fraksional. Penelitian yang dilakukan oleh Alfiniyah (2010) adalah menggunakan metode transformasi Fourier untuk menyelesaikan fungsi integral fraksional dan turunan fraksional.

Berdasarkan latar belakang di atas, penulis ingin mengetahui lebih jauh dan mengaplikasikan tentang integral fraksional dan turunan fraksional pada transformasi *Laplace*. Merujuk pada jurnal-jurnal ilmiah dan penelitian yang belum banyak menjelaskan tentang hal tersebut secara detail. Oleh karena itu, penulis merumuskan judul “Aplikasi Integral Fraksional dan Turunan Fraksional pada Transformasi *Laplace*”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas dapat ditarik rumusan permasalahan yang akan dibahas, yaitu:

1. Bagaimana aplikasi integral fraksional pada transformasi *Laplace*?
2. Bagaimana aplikasi turunan fraksional pada transformasi *Laplace*?

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menganalisa aplikasi integral fraksional pada transformasi *Laplace*.
2. Menganalisa aplikasi turunan fraksional pada transformasi *Laplace*.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat, yaitu:

1. Memahami penerapan integral fraksional pada transformasi *Laplace*.
2. Memahami penerapan turunan fraksional pada transformasi *Laplace*.

1.5 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini penulis membatasi masalah yaitu

1. Pada aplikasi integral fraksional pada transformasi *Laplace*
 - a. Integral rangkap- n dari suatu fungsi yang kontinu pada daerah bilangan riil dengan interval tertutup $[a, b]$.
 - b. Integral rangkap- n dalam penelitian ini dituliskan sebagai integral berorde- n dengan n bilangan riil positif.
 - c. Fungsi yang berlaku pada penelitian ini yaitu fungsi aljabar.
2. Pada aplikasi turunan fraksional pada transformasi *Laplace*
 - a. Turunan rangkap- n dari suatu fungsi yang kontinu pada daerah bilangan riil dengan interval tertutup $[a, b]$.
 - b. Turunan rangkap- n dalam penelitian ini dituliskan sebagai turunan berorde- n dengan n bilangan riil positif.
 - c. Fungsi yang berlaku pada penelitian ini yaitu fungsi aljabar.

1.6 Metode penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah melakukan studi literatur dari berbagai sumber yakni dari buku, jurnal, artikel maupun tugas akhir yang membahas mengenai integral fraksional dan turunan fraksional. Secara garis besar langkah-langkah yang akan dilakukan pada penelitian ini sebagai berikut.

1. Aplikasi integral fraksional pada transformasi *Laplace* dalam fungsi $f(t), kf(t)$ dengan langkah sebagai berikut:
 - a. Mendefinisikan $I^\alpha f(t)$ dan $g(t)$.
 - b. Menghitung $G(s)$
 - c. Menghitung $\mathcal{L}[I^\alpha f(t)]$
 - d. Menganalisis kelinieran $\mathcal{L}[I^\alpha f(t)]$
 - e. Menganalisis semigrup $\mathcal{L}[I^\alpha f(t)]$
 - f. Aplikasi pada $f(t), kf(t)$
 - g. Menarik kesimpulan.
2. Aplikasi turunan fraksional pada transformasi *Laplace* dalam fungsi $f(t), kf(t)$ dengan langkah sebagai berikut:
 - a. Mendefinisikan $D^\alpha f(t)$ dan $h(t)$.
 - b. Menghitung $H(s)$
 - c. Menghitung $\mathcal{L}[D^\alpha f(t)]$
 - d. Menganalisis kelinieran $\mathcal{L}[D^\alpha f(t)]$
 - e. Menganalisis semigrup $\mathcal{L}[D^\alpha f(t)]$
 - f. Aplikasi pada $f(t), kf(t)$
 - g. Menarik kesimpulan.

1.7 Sistematika Penulisan

Penulisan skripsi ini menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab. Masing-masing bab terdiri dari sub bab sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pendahuluan meliputi latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bab ini terdiri atas teori-teori (konsep-konsep) yang mendukung pembahasan. Teori tersebut membahas tentang pengertian integral, turunan, integral fraksional, turunan fraksional, transformasi *Laplace* dan kajian keislaman dalam al-Quran.

Bab III Hasil dan Pembahasan

Bab ini akan menguraikan keseluruhan langkah yang disebutkan dalam metode penelitian. Penerapan integral fraksional dan turunan fraksional yang dikaji adalah penerapan pada transformasi *Laplace*.

Bab IV Penutup

Bab ini akan memaparkan kesimpulan dan saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Integral Fraksional

Integral fraksional memiliki beberapa versi modern, antara lain versi Riemann, versi Liouville, versi Riemann-Liouville, dan versi Weyl. Dari berbagai versi yang ada, secara umum perbedaannya terdapat pada batas pengintegralan pada setiap versi. Definisi ini diturunkan dari berbagai cara sehingga terdapat versi-versi yang berbeda (Alfinyah, 2010).

Definisi 2.1

Misalkan $\varphi(x) \in (a, b)$, Integral

$${}_a^+ I_x^\alpha \varphi(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(\tau)}{(x-\tau)^{1-\alpha}} d\tau \quad x > a$$

$${}_x I_b^- \varphi(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{\varphi(\tau)}{(\tau-x)^{1-\alpha}} d\tau \quad b < x$$

Dimana $\alpha > 0$, keduanya disebut integral fraksional dari orde α . Biasanya juga disebut integral fraksional kiri dan kanan secara berturut-turut. Nama yang disebutkan untuk integral di atas adalah integral fraksional Riemann-Liouville (Samko, 1987:33).

Teorema 2.2 (Teorema Fubini)

Misalkan $\Omega_1 = [a, b], \Omega_2 = [c, d], -\infty \leq a < b \leq \infty, -\infty \leq c < d \leq \infty$ dan misalkan $f(x, y)$ sebuah fungsi terukur yang didefinisikan pada $\Omega_1 \times \Omega_2$. Jika setidaknya ada satu dari integral-integral

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} f(x, y) dy, \quad \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} f(x, y) dx, \quad \iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x, y) dx dy$$

yang memang konvergen maka ketiga integral tersebut sama (Samko, 1987:97).

Jika satu bentuk integral dari teorema Fubini di atas terpenuhi yakni

$$\int_a^b dx \int_a^x f(x, y) dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y) dx \quad (2.1)$$

dengan asumsikan satu dari integral itu memang konvergen, maka hubungan persamaan (2.1) dinamakan bentuk Dirichlet.

2.1.1 Integral Fraksional Kiri

Secara umum, integral fraksional kiri memiliki daerah pengintegralan $[a, x]$ dengan $-\infty \leq a < x$. Hal ini yang menjadi perbedaan antara integral fraksional kiri dan integral fraksional kanan. Adapun definisi dari integral fraksional kiri adalah sebagai berikut:

Definisi 2.3

Misalkan φ terdefinisi pada (a, b) dan $\alpha > 0$, maka kita panggil

$$I_{a^+}^{\alpha} \varphi(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(\tau)}{(x - \tau)^{1-\alpha}} d\tau$$

sebagai integral fraksional kiri berorde α .

Berikut adalah contoh penerapan dari integral fraksional kiri:

Contoh: Misalkan $\varphi(x) = x^{\lambda}$ dimana $\lambda > -1$ dengan $a = 0$, maka integral fraksional kiri dari $\varphi(x)$ adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
I_{0^+}^\alpha \varphi(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\varphi(\tau)}{(x-\tau)^{1-\alpha}} d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\tau^\lambda}{(x-\tau)^{1-\alpha}} d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\tau^\lambda}{\left(x\left(1-\frac{\tau}{x}\right)\right)^{1-\alpha}} d\tau \\
&= \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\tau^\lambda}{\left(1-\frac{\tau}{x}\right)^{1-\alpha}} d\tau \\
&= \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{\tau^\lambda}{\left(1-\frac{\tau}{x}\right)^{1-\alpha}} d\tau = \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\tau^\lambda}{\left(1-\frac{\tau}{x}\right)^{1-\alpha}} \frac{1}{x} d\tau
\end{aligned}$$

Misalkan $z = \frac{\tau}{x}$ dan $dz = \frac{1}{x} d\tau$, sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned}
I_{0^+}^\alpha \varphi(x) &= \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\tau^\lambda}{\left(1-\frac{\tau}{x}\right)^{1-\alpha}} \frac{1}{x} d\tau \\
&= \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\tau^\lambda}{(1-z)^{1-\alpha}} dz \\
&= \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{x^\lambda \left(\frac{\tau}{x}\right)^\lambda}{(1-z)^{1-\alpha}} dz \\
&= \frac{x^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{z^\lambda}{(1-z)^{1-\alpha}} dz = \frac{x^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (1-z)^{\alpha-1} z^\lambda dz
\end{aligned}$$

Selanjutnya dengan menggunakan fungsi Beta, maka persamaan di atas dapat dirubah menjadi seperti berikut:

$$\begin{aligned}
I_{0+}^{\alpha} \varphi(x) &= \frac{x^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (1-z)^{\alpha-1} z^{\lambda} dz \\
&= \frac{x^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (1-z)^{\alpha-1} z^{(\lambda+1)-1} dz \\
&= \frac{x^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\alpha+\lambda+1)} = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\alpha+\lambda+1)} x^{\alpha+\lambda}
\end{aligned}$$

Jadi, integral fraksional kiri dari fungsi $\varphi(x)$ adalah $\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\alpha+\lambda+1)} x^{\alpha+\lambda}$

2.1.1.1 Sifat-sifat Integral Fraksional Kiri

Setelah definisi integral fraksional kiri, penelitian ini akan membahas beberapa sifat-sifat yang ada pada integral fraksional kiri.

1. Sifat kelinieran

Misalkan $\alpha > 0$ dan k adalah suatu konstanta, maka berlaku

$$I_{a+}^{\alpha} k\varphi(x) = kI_{a+}^{\alpha} \varphi(x)$$

Bukti: Dengan menggunakan definisi integral fraksional kiri dan sifat-sifat integral maka dengan mudah dapat diperoleh:

$$\begin{aligned}
I_{a+}^{\alpha} k\varphi(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{k\varphi(\tau)}{(x-\tau)^{1-\alpha}} d\tau \\
&= k \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(\tau)}{(x-\tau)^{1-\alpha}} d\tau \\
&= kI_{a+}^{\alpha} \varphi(x)
\end{aligned}$$

Sehingga, untuk setiap $x \in [a, b]$, $\alpha > 0$, dan sebarang k konstanta, berlaku

$$I_{a+}^{\alpha} k\varphi(x) = kI_{a+}^{\alpha} \varphi(x)$$

(Kilbas, dkk, 2006:74).

2. Sifat semigrup

Misalkan sebarang $\alpha, \beta > 0$, maka berlaku sifat semigrup dari integral fraksional kiri sebagai berikut:

$$I_{a^+}^\alpha I_{a^+}^\beta \varphi(x) = I_{a^+}^{\alpha+\beta} \varphi(x)$$

Bukti: Pertama kita cari nilai $I_{a^+}^\alpha I_{a^+}^\beta \varphi(x)$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} I_{a^+}^\alpha I_{a^+}^\beta \varphi(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{I_{a^+}^\beta \varphi(\tau)}{(x-\tau)^{1-\alpha}} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{1}{(x-\tau)^{1-\alpha}} \left[\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^\tau \frac{\varphi(\xi)}{(\tau-\xi)^{1-\beta}} d\xi \right] d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{1}{(x-\tau)^{1-\alpha}} d\tau \int_a^\tau \frac{\varphi(\xi)}{(\tau-\xi)^{1-\beta}} d\xi \end{aligned} \quad (2.2)$$

Untuk menyelesaikan masalah ini, kita menggunakan definisi dari fungsi Beta:

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} = \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{\beta-1} ds \quad (2.3)$$

Selanjutnya, kita menggunakan rumus Dirichlet sebagai berikut (Whittaker, 1965):

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{1}{(x-\tau)^{1-\alpha}} d\tau \int_a^\tau \frac{1}{(\tau-\xi)^{1-\beta}} \psi(\tau, \xi) d\xi \\ = \int_a^x d\xi \int_\tau^x \frac{1}{(x-\tau)^{1-\alpha}(\tau-\xi)^{1-\beta}} \psi(\tau, \xi) d\tau \end{aligned} \quad (2.4)$$

untuk setiap $\psi(\tau, \xi) = \varphi(\xi)$ maka dari persamaan (2.4) diperoleh

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{1}{(x-\tau)^{1-\alpha}} d\tau \int_a^\tau \frac{1}{(\tau-\xi)^{1-\beta}} \varphi(\xi) d\xi \\ = \int_a^x \varphi(\xi) d\xi \int_\tau^x \frac{1}{(x-\tau)^{1-\alpha}(\tau-\xi)^{1-\beta}} d\tau \end{aligned} \quad (2.5)$$

Sehingga, untuk persamaan (2.1) dengan menggunakan persamaan (2.5) diperoleh

$$\begin{aligned}
I_{a^+}^\alpha I_{a^+}^\beta \varphi(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{1}{(x-\tau)^{1-\alpha}} d\tau \int_a^\tau \frac{\varphi(\xi)}{(\tau-\xi)^{1-\beta}} d\xi \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \varphi(\xi) d\xi \int_\tau^x \frac{1}{(x-\tau)^{1-\alpha}(\tau-\xi)^{1-\beta}} d\tau \quad (2.6)
\end{aligned}$$

Untuk menyelesaikan persamaan (2.6) kita substitusikan variabel s ke dalam variabel τ pada integral kedua, dimana

$$s = \frac{\tau - \xi}{x - \xi}$$

atau

$$\tau = \xi + s(x - \xi)$$

dan

$$d\tau = (x - \xi) ds$$

Sehingga kita memperoleh,

$$\begin{aligned}
&\int_\tau^x \frac{1}{(x-\tau)^{1-\alpha}(\tau-\xi)^{1-\beta}} d\tau \\
&= \int_0^1 \frac{1}{(x - (\xi + s(x - \xi)))^{1-\alpha} ((\xi + s(x - \xi)) - \xi)^{1-\beta}} (x - \xi) ds \\
&= \int_0^1 \frac{1}{(x - (\xi + s(x - \xi)))^{1-\alpha} (s(x - \xi))^{1-\beta}} (x - \xi) ds \\
&= \int_0^1 \frac{1}{((x - \xi)(1 - s))^{1-\alpha} (s(x - \xi))^{1-\beta}} (x - \xi) ds \\
&= \int_0^1 \frac{1}{(x - \xi)^{1-\alpha+1-\beta} (1 - s)^{1-\alpha} s^{1-\beta}} (x - \xi) ds \\
&= \int_0^1 \frac{1}{(x - \xi)^{1-\alpha+1-\beta-1} (1 - s)^{1-\alpha} s^{1-\beta}} ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(x-\xi)^{1-\alpha+1-\beta-1}} \int_0^1 \frac{1}{(1-s)^{1-\alpha} s^{1-\beta}} ds \\
&= \frac{1}{(x-\xi)^{1-(\alpha+\beta)}} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{\beta-1} ds \tag{2.7}
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan definisi fungsi Beta pada persamaan (2.3) maka persamaan (2.7) dapat ditulis

$$\begin{aligned}
\int_{\tau}^x \frac{1}{(x-\tau)^{1-\alpha} (\tau-\xi)^{1-\beta}} d\tau &= \frac{1}{(x-\xi)^{1-(\alpha+\beta)}} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{\beta-1} ds \\
&= \frac{1}{(x-\xi)^{1-(\alpha+\beta)}} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \tag{2.8}
\end{aligned}$$

Kemudian substitusikan persamaan (2.8) ke dalam persamaan (2.6) sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
I_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\beta} \varphi(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \varphi(\xi) d\xi \int_{\tau}^x \frac{1}{(x-\tau)^{1-\alpha} (\tau-\xi)^{1-\beta}} d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{1}{(x-\xi)^{1-(\alpha+\beta)}} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \varphi(\xi) d\xi \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x \frac{1}{(x-\xi)^{1-(\alpha+\beta)}} \varphi(\xi) d\xi \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x \frac{1}{(x-\xi)^{1-(\alpha+\beta)}} \varphi(\xi) d\xi \\
&= I_{a^+}^{\alpha+\beta} \varphi(x)
\end{aligned}$$

Sehingga, untuk sebarang $\alpha, \beta > 0$, berlaku

$$I_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\beta} \varphi(x) = I_{a^+}^{\alpha+\beta} \varphi(x)$$

Berdasarkan pola orde di atas dapat disimpulkan bahwa integral fraksional kiri bersifat asosiatif, yaitu terlihat dengan pola penjumlahan orde-ordenya. Selanjutnya akan diBuktikan bahwa integral fraksional kiri bersifat komutatif.

3. Sifat komutatif

Misalkan sebarang $\alpha, \beta > 0$, maka berlaku sifat komutatif pada integral fraksional kiri sebagai berikut:

$$I_{a^+}^\alpha I_{a^+}^\beta \varphi(x) = I_{a^+}^\beta I_{a^+}^\alpha \varphi(x)$$

Bukti: Dengan menggunakan sifat semigrup pada integral fraksional maka diperoleh

$$\begin{aligned} I_{a^+}^\alpha I_{a^+}^\beta \varphi(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{I_{a^+}^\beta \varphi(x)}{(x-\tau)^{1-\alpha}} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{1}{(x-\tau)^{1-\alpha}} \left[\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^\tau \frac{\varphi(\xi)}{(\tau-\xi)^{1-\beta}} d\xi \right] d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x \frac{1}{(x-\xi)^{1-(\alpha+\beta)}} \varphi(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)} \int_a^x \frac{1}{(x-\xi)^{1-(\beta+\alpha)}} \varphi(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{1}{(x-\tau)^{1-\beta}} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^\tau \frac{\varphi(\xi)}{(\tau-\xi)^{1-\alpha}} d\xi \right] d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{I_{a^+}^\alpha \varphi(x)}{(x-\tau)^{1-\beta}} d\tau = I_{a^+}^\beta I_{a^+}^\alpha \varphi(x) \end{aligned}$$

Karena,

$$I_{a^+}^\alpha I_{a^+}^\beta \varphi(x) = I_{a^+}^\beta I_{a^+}^\alpha \varphi(x)$$

Maka sifat komutatif berlaku pada integral fraksional kiri.

(Kilbas, dkk, 2006:74).

2.1.2 Integral Fraksional Kanan

Integral fraksional kanan merupakan integral fraksional berorde α dengan daerah pengintegralan adalah $[x, b]$ dengan $x < b \leq \infty$. Adapun integral fraksional kanan didefinisikan sebagaimana berikut:

Definisi 2.4

Misalkan φ terdefinisi pada (a, b) dan $\alpha > 0$, maka kita panggil

$$I_b^\alpha - \varphi(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - x)^{1-\alpha}} d\tau$$

sebagai integral fraksional kanan berorde α .

2.1.2.1 Sifat-sifat Integral Fraksional kanan

Seperti halnya pada integral fraksional kiri, sifat pertama yang dibahas pada integral fraksional kanan adalah sifat kelinieran integral.

1. Sifat kelinieran

Misalkan $\alpha > 0$ dan k adalah konstanta, maka berlaku

$$I_b^\alpha - k\varphi(x) = kI_b^\alpha - \varphi(x)$$

Bukti: Dengan menggunakan definisi integral fraksional kanan dan sifat-sifat integral maka dengan mudah dapat diperoleh:

$$\begin{aligned} I_b^\alpha - k\varphi(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{k\varphi(\tau)}{(\tau - x)^{1-\alpha}} d\tau \\ &= k \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - x)^{1-\alpha}} d\tau \\ &= kI_b^\alpha - \varphi(x) \end{aligned}$$

Sehingga, untuk setiap $x \in [a, b]$, $\alpha > 0$, dan sebarang k konstanta, berlaku

$$I_b^\alpha - k\varphi(x) = kI_b^\alpha - \varphi(x)$$

2. Sifat semigrup

Misalkan sebarang $\alpha, \beta > 0$, maka berlaku sifat semigrup dari integral fraksional kiri sebagai berikut:

$$I_b^\alpha I_b^\beta \varphi(x) = I_b^{\alpha+\beta} \varphi(x)$$

Bukti: Akan kita tunjukkan bahwa $I_b^\alpha I_b^\beta \varphi(x) = I_b^{\alpha+\beta} \varphi(x)$

Langkah pertama kita cari nilai $I_b^\alpha I_b^\beta \varphi(x)$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} I_b^\alpha I_b^\beta \varphi(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{I_b^\beta \varphi(\tau)}{(\tau-x)^{1-\alpha}} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{1}{(\tau-x)^{1-\alpha}} \left[\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_\tau^b \frac{\varphi(\xi)}{(\xi-\tau)^{1-\beta}} d\xi \right] d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_x^b \frac{1}{(\tau-x)^{1-\alpha}} d\tau \int_\tau^b \frac{\varphi(\xi)}{(\xi-\tau)^{1-\beta}} d\xi \end{aligned} \quad (2.9)$$

Selanjutnya, untuk menyelesaikan persamaan (2.9) digunakan definisi dari fungsi Beta pada persamaan integral fraksional dan dengan menggunakan rumus Dirichlet sebagai berikut (Whittaker, 1965):

$$\begin{aligned} \int_x^b \frac{1}{(\tau-x)^{1-\alpha}} d\tau \int_\tau^b \frac{1}{(\xi-\tau)^{1-\beta}} \psi(\tau, \xi) d\xi \\ = \int_x^b \psi(\tau, \xi) d\xi \int_x^\tau \frac{1}{(\tau-x)^{1-\alpha}(\xi-\tau)^{1-\beta}} d\tau \end{aligned} \quad (2.10)$$

Ambil $\psi(\tau, \xi) = \varphi(\xi)$ maka dari persamaan (2.10) kita mempunyai,

$$\begin{aligned} \int_x^b \frac{1}{(\tau-x)^{1-\alpha}} d\tau \int_\tau^b \frac{1}{(\xi-\tau)^{1-\beta}} \varphi(\xi) d\xi \\ = \int_x^b \varphi(\xi) d\xi \int_x^\tau \frac{1}{(\tau-x)^{1-\alpha}(\xi-\tau)^{1-\beta}} d\tau \end{aligned} \quad (2.11)$$

Substitusikan persamaan (2.11) ke dalam persamaan (2.9) sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
I_b^\alpha I_b^\beta \varphi(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_x^b \frac{1}{(\tau-x)^{1-\alpha}} d\tau \int_\tau^b \frac{\varphi(\xi)}{(\xi-\tau)^{1-\beta}} d\xi \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_x^b \varphi(\xi) d\xi \int_x^\tau \frac{1}{(\tau-x)^{1-\alpha}(\xi-\tau)^{1-\beta}} d\tau \quad (2.12)
\end{aligned}$$

Misalkan didefinisikan

$$s = \frac{\tau - \xi}{\xi - x}$$

atau

$$\tau = \xi + s(\xi - x)$$

dan diperoleh

$$d\tau = \xi - x ds$$

Kemudian substitusikan s ke dalam integral kedua pada persamaan (2.12),

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
&\int_x^\tau \frac{1}{(\tau-x)^{1-\alpha}(\xi-\tau)^{1-\beta}} d\tau \\
&= \int_0^1 \frac{1}{\left((\xi + s(\xi - x)) - x\right)^{1-\alpha} \left(\xi - (\xi + s(\xi - x))\right)^{1-\beta}} (\xi - x) ds \\
&= \int_0^1 \frac{1}{\left((\xi + s(\xi - x)) - x\right)^{1-\alpha} (s(\xi - x))^{1-\beta}} (\xi - x) ds \\
&= \int_0^1 \frac{1}{\left((\xi - x)(1 - s)\right)^{1-\alpha} (s(\xi - x))^{1-\beta}} (\xi - x) ds \\
&= \int_0^1 \frac{1}{(\xi - x)^{1-\alpha+1-\beta} (1-s)^{1-\alpha} s^{1-\beta}} (\xi - x) ds \\
&= \int_0^1 \frac{1}{(\xi - x)^{1-\alpha+1-\beta-1} (1-s)^{1-\alpha} s^{1-\beta}} ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(\xi - x)^{1-\alpha+1-\beta-1}} \int_0^1 \frac{1}{(1-s)^{1-\alpha} s^{1-\beta}} ds \\
&= \frac{1}{(\xi - x)^{1-(\alpha+\beta)}} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{\beta-1} ds
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Jika digunakan definisi fungsi Beta, maka persamaan (2.13) dapat ditulis

$$\int_x^\tau \frac{1}{(\tau - x)^{1-\alpha} (\xi - \tau)^{1-\beta}} d\tau = \frac{1}{(\xi - x)^{1-(\alpha+\beta)}} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \tag{2.14}$$

Substitusikan persamaan (2.14) pada persamaan (2.12), sebagai berikut

$$\begin{aligned}
I_b^\alpha I_b^\beta \varphi(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_x^b \varphi(\xi) d\xi \int_x^\tau \frac{1}{(\tau - x)^{1-\alpha} (\xi - \tau)^{1-\beta}} d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_x^b \frac{1}{(\xi - x)^{1-(\alpha+\beta)}} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \varphi(\xi) d\xi \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_x^b \frac{1}{(\xi - x)^{1-(\alpha+\beta)}} \varphi(\xi) d\xi \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_x^b \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - x)^{1-(\alpha+\beta)}} d\xi \\
&= I_b^{\alpha+\beta} \varphi(x)
\end{aligned}$$

Sehingga, untuk sebarang $\alpha, \beta > 0$, berlaku

$$I_b^\alpha I_b^\beta \varphi(x) = I_b^{\alpha+\beta} \varphi(x)$$

Sifat semigrup pada integral fraksional kanan menunjukkan bahwa integral fraksional kanan juga bersifat asosiatif dengan melihat pola penjumlahan orde-ordenya. Kemudian akan ditunjukkan bahwa integral fraksional kanan bersifat komutatif, sebagaimana proposisi berikut:

3. Sifat komutatif

Misalkan $\alpha, \beta > 0$ maka berlaku

$$I_b^\alpha I_b^\beta \varphi(x) = I_b^\beta I_b^\alpha \varphi(x)$$

Bukti: Dengan menggunakan definisi integral fraksional kiri maka diperoleh

$$\begin{aligned}
 I_b^\alpha - I_b^\beta \varphi(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{I_b^\beta \varphi(\tau)}{(\tau - x)^{1-\alpha}} d\tau \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{1}{(\tau - x)^{1-\alpha}} \left[\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_\tau^b \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - \tau)^{1-\beta}} d\xi \right] d\tau \quad (2.15)
 \end{aligned}$$

Selanjutnya, menggunakan sifat semigrup pada integral fraksional kanan maka kita dapatkan

$$\begin{aligned}
 I_b^\alpha - I_b^\beta \varphi(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{1}{(\tau - x)^{1-\alpha}} \left[\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_\tau^b \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - \tau)^{1-\beta}} d\xi \right] d\tau \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_x^b \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - x)^{1-(\alpha+\beta)}} d\xi \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\beta + \alpha)} \int_x^b \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - x)^{1-(\beta+\alpha)}} d\xi \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_x^b \frac{1}{(\tau - x)^{1-\beta}} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_\tau^b \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - \tau)^{1-\alpha}} d\xi \right] d\tau \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{I_b^\alpha \varphi(\tau)}{(\tau - x)^{1-\beta}} d\tau \\
 &= I_b^\beta - I_b^\alpha \varphi(x)
 \end{aligned}$$

Karena,

$$I_b^\alpha - I_b^\beta \varphi(x) = I_b^\beta - I_b^\alpha \varphi(x)$$

Maka sifat komutatif berlaku pada integral fraksional komutatif.

2.2 Turunan Fraksional

Jika suatu fungsi sebelumnya merupakan integral fraksional yang berorde α , maka turunan fraksional kiri berorde α merupakan turunan ke- n dari integral

fraksional kiri berorde $n - \alpha$. Dan turunan fraksional kanan berorde α merupakan turunan ke $-n$ dari integral fraksional kanan berorde $n - \alpha$.

2.2.1 Turunan Fraksional Kiri

Definisi 2.5

Misalkan $f(x)$ pada interval $[a, b]$ masing-masing dapat dilambangkan

$$D^\alpha = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt \quad (2.16)$$

Disebut turunan fraksional dari orde $0 < \alpha < 1$, kiri dan kanan berturut-turut.

Turunan fraksional biasanya bernama turunan Riemman-Liouville (Samko, 1987:35).

Contoh: Misalkan $f(x) = x$, $x > 0$, dan $\alpha = \frac{1}{2}$ Sehingga turunan fraksional kiri sebagai berikut

$$\begin{aligned} {}_a D_x^p f(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-\tau)^{-\frac{1}{2}} \tau d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-\tau)^{-\frac{1}{2}} \tau d\tau \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\tau}{(x-\tau)^{\frac{1}{2}}} d\tau \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} {}_0 I_x^{\frac{1}{2}} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Menurut definisi turunan fraksional Grunwald-Letnikov yang didefinisikan sebagai limit berorde $p \leq n$ dengan p adalah sebarang bilangan bulat dan n adalah bilangan bulat, sedemikian sehingga turunan fraksional dapat didefinisikan sebagai limit berikut :

$$\begin{aligned}
{}_a D_x^p f(x) &= \frac{d^p}{dx^p} f(x) = f_h^{(p)} x \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} f_h^{(p)}(x) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=x-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(x-rh) \quad (2.17)
\end{aligned}$$

dengan mentrasformasikan bentuk (2.17), diperoleh

$$\begin{aligned}
{}_a D_x^p f(x) &= \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \\
&\quad \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^x (x-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \quad (2.18)
\end{aligned}$$

Proposisi 2.5

Misalkan f terdefinisi pada \mathbb{R} , p adalah sebarang bilangan riil, n adalah sebarang bilangan bulat dan ${}_a D_x^{p+n} f(x)$ adalah turunan fraksional sepihak maka berlaku

$${}_a D_x^{p+n} f(x) = {}_a D_x^p \left(\frac{d^n f(x)}{dx^n} \right) + \sum_{j=0}^{n-a} \frac{f^{(j)}(a)(x-a)^{j-p-n}}{\Gamma(1+j-p-n)}$$

Bukti: Dengan menggunakan definisi turunan fraksional Riemann-Lioville (Igor) bahwa

$${}_a D_x^p = \frac{d^n}{dx^n} \left({}_a D_x^{-(n-p)} f(x) \right) \quad (2.19)$$

$$= D^n {}_a D_x^{-(n-p)} \quad (2.20)$$

Dengan menggunakan persamaan (2.19) sehingga

$${}_a D_x^p \left(\frac{d^n f(x)}{dx^n} \right) = \frac{d^n}{dx^n} \left({}_a D_x^{-(k-\beta)} f(x) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{d^k}{dx^k} \left({}_a D_x^{-(k-(k-\beta))} f(x) \right) \right) \\
&= \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{d^k}{dx^k} \left({}_a D_x^{-\beta} f(x) \right) \right) \\
&= \frac{d^{n+k}}{dx^{n+k}} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-y)^{\beta-1} f(\tau) d\tau \\
&= {}_a D_x^{n+k-\beta} f(x) \tag{2.21}
\end{aligned}$$

Misalkan $p = k - \beta$ sehingga (2.21) bisa dituliskan

$${}_a D_x^p \left(\frac{d^n f(x)}{dx^n} \right) = {}_a D_x^{n+p} f(x) \tag{2.22}$$

Kita dapat mendapatkan persamaan (2.22) menggunakan definisi (2.18) dengan mengambil $s \geq m + n - 1$ sehingga dapat ditulis

$$\begin{aligned}
\frac{d^n}{dt^n} ({}_a D_x^p f(x)) &= \sum_{k=0}^s \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{-p-n+k}}{\Gamma(-p-n+k+1)} + \\
&\quad \frac{1}{\Gamma(-p-n+s+1)} \int_a^x (x-\tau)^{s-p-n} f^{(s+1)}(\tau) d\tau \\
&= {}_a D_x^{p+n} f(x)
\end{aligned}$$

Saat $s \geq m + n - 1$ adalah kondisi yang dapat berubah-berubah sehingga dengan memisalkan $s = m + n - 1$ diperoleh

$$\begin{aligned}
{}_a D_x^p \left(\frac{d^n f(x)}{dx^n} \right) &= {}_a D_x^{p+n} f(x) \\
&= \sum_{k=0}^{m+n-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{-p-n+k}}{\Gamma(-p-n+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p-n+m+n-1+1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_a^x (x - \tau)^{(m+n-1)-p-n} f^{(m+n-1+1)}(\tau) d\tau \\
&= \sum_{k=0}^{m+n-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{-p-n+k}}{\Gamma(-p-n+k+1)} + \\
& \quad \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^x (x-\tau)^{m-p-1} f^{(m+n)}(\tau) d\tau \quad (2.23)
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan definisi (2.18) maka persamaan (2.22) juga bisa dituliskan

$$\begin{aligned}
\frac{d^n}{dt^n} ({}_a D_x^p f(x)) &= \sum_{k=0}^s \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{-p-n+k}}{\Gamma(-p-n+k+1)} + \\
& \quad \frac{1}{\Gamma(-p-n+s+1)} \int_a^x (x-\tau)^{s-p-n} f^{(s+1)}(\tau) d\tau \\
&= {}_a D_x^{p+n} f(x)
\end{aligned}$$

Kemudian memilih saat $s = m - 1$ kita dapatkan

$$\begin{aligned}
{}_a D_x^p \left(\frac{d^n f(x)}{dx^n} \right) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k+n)}(a)(x-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \\
& \quad \frac{1}{\Gamma(-p+m-1+1)} \\
& \quad \int_a^x (x-\tau)^{m-1-p} f^{(m-1+n+1)}(\tau) d\tau \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k+n)}(a)(x-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \\
& \quad \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^x (x-\tau)^{m-p-1} f^{(m+n)}(\tau) d\tau \quad (2.24)
\end{aligned}$$

Dengan membandingkan persamaan (2.23) dan (2.24) dapat kita simpulkan bahwa

$${}_a D_x^{p+n} f(x) = {}_a D_x^p \left(\frac{d^n f(x)}{dx^n} \right) + \sum_{j=0}^{n-a} \frac{f^{(j)}(a)(x-a)^{j-p-n}}{\Gamma(1+j-p-n)}$$

2.2.1.1 Sifat-sifat Turunan Fraksional Kiri

Turunan fraksional kiri adalah invers kiri dari integral fraksional kiri dengan orde- p .

Proposisi 2.6 Misalkan ${}_a D_x^p$ adalah turunan fraksional kiri orde p dengan $k - 1 \leq p \leq k$ dan ${}_a D_x^{-p}$ adalah integral fraksional kiri berorde $p, p > 0$ Sehingga berlaku

$${}_a D_x^p {}_a D_x^{-p} f(x) = f(x)$$

Bukti: Menggunakan definisi turunan fraksional sehingga ${}_a D_x^p$ dapat ditulis $\frac{d^k}{dx^k} ({}_a D_x^{-(k-p)})$ dengan k adalah bilangan bulat terkecil yang lebih besar dari p sedemikian sehingga $k - 1 \leq p \leq k$. Oleh karena itu

$$\begin{aligned} {}_a D_x^p {}_a D_x^{-p} f(x) &= {}_a D_x^p [{}_a D_x^{-p} f(x)] \\ &= \frac{d^k}{dx^k} ({}_a D_x^{-(k-p)}) [{}_a D_x^{-p} f(x)] \\ &= \frac{d^k}{dx^k} ({}_a D_x^{-(k-p+p)} f(x)) \\ &= \frac{d^k}{dx^k} {}_a D_x^{-p} f(x) \end{aligned}$$

(i) Saat $k = 1$

$${}_a D_x^p = \frac{d^k}{dx^k} ({}_a D_x^{-1} f(x)) = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\Gamma(1)} \int_a^x (x-\tau)^{1-1} f(\tau) d\tau \right]$$

$$= \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{1} \int_a^x (x - \tau)^0 f(\tau) d\tau \right]$$

$$= \frac{d}{dx} \int_a^x f(\tau) d\tau$$

Sesuai dengan aturan pada kalkulus bahwa

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(\tau) d\tau = f(x)$$

(ii) Saat $k = 2$

$${}_a D_x^p = \frac{d^k}{dx^k} ({}_a D_x^{-2} f(x)) = \frac{d^2}{dx^2} \left[\frac{1}{\Gamma(2)} \int_a^x (x - \tau)^{2-1} f(\tau) d\tau \right]$$

$$= \frac{d^2}{dx^2} \left[\frac{1}{1!} \int_a^x (x - \tau) f(\tau) d\tau \right]$$

$$= \frac{d}{dx} \left[\frac{d}{dx} \int_a^x f(\tau) d\tau \int_\tau^x dx_1 \right]$$

$$= \frac{d}{dx} \left[\frac{d}{dx} \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} f(\tau) d\tau \right]$$

$$= \frac{d}{dx} \left[\frac{d}{dx} \int_a^x \int_a^{x_1} f(\tau) d\tau dx_1 \right]$$

dengan membuat permisalan untuk

$$\int_a^x f(x_1) dx_1 = Q(x) \quad \text{dan} \quad f(x_1) = \int_a^{x_1} f(\tau) d\tau$$

Kemudian dengan menggunakan definisi turunan pada limit dapat ditulis

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(x_1) dx_1 = Q'(x)$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Q(x+h) - Q(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\int_a^{x+h} f(x_1) dx_1 - \int_a^x f(x_1) dx_1 \right] \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\int_a^{x+h} f(x_1) dx_1 \right]
 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$Q(x+h) - Q(x) = \int_a^{x+h} f(x_1) dx_1$$

Misalkan $h > 0$, m adalah nilai minimum dari f dan M adalah nilai maksimum dari f , dan f adalah fungsi yang kontinu pada selang $[x, x+h]$.

$$mh \leq \int_a^{x+h} f(x_1) dx_1 \leq Mh$$

atau

$$mh \leq Q(x+h) - Q(x) \leq Mh$$

$$m \leq \frac{Q(x+h) - Q(x)}{h} \leq M$$

Sehingga m dan M bergantung pada h karena f adalah fungsi kontinu. Oleh karena itu, nilai m dan M harus menghampiri $f(x)$ dengan $h \rightarrow 0$. Dengan menggunakan teorema apit, diperoleh:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{Q(x+h) - Q(x)}{h} = f(x)$$

kemudian didapatkan

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{Q(x+h) - Q(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^{x+h} f(x_1) dx_1 = f(x)$$

Setelah itu untuk permisalan selanjutnya

$$\int_a^{x_1} f(\tau) d\tau = f(x_1)$$

dapat dituliskan sesuai dengan definisi turunan

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_a^{x_1} f(\tau) d\tau &= f'(x) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\int_a^{x+h} f(\tau) d\tau - \int_a^x f(\tau) d\tau \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\int_a^{x+h} f(\tau) d\tau \right] \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$f(x+h) - f(x) = \int_a^{x+h} f(\tau) d\tau$$

Misalkan $h > 0$, m adalah nilai minimum dari f , M adalah nilai maksimum dari f dan f kontinu pada selang $[x, x+h]$ sehingga

$$mh \leq \int_a^{x+h} f(\tau) d\tau \leq Mh$$

atau dapat dituliskan

$$mh \leq f(x+h) - f(x) \leq Mh$$

$$m \leq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq M$$

Dapat diketahui m dan M bergantung pada h , karena f merupakan fungsi yang kontinu sehingga nilai m dan M harus menghampiri $f(x)$ dengan $h \rightarrow 0$. Dengan menggunakan teorema apit diperoleh

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

Oleh karena itu,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^{x+h} f(\tau) d\tau = f'(x)$$

Kemudian dengan menggunakan induksi matematika dengan kondisi yang sudah diperumum diperoleh

$$\frac{d^n}{dx^n} [{}_a D_x^{-p} f(x)] = D^n [{}_a D_x^{-p} f(x)] = f(x)$$

Sehingga dapat diBuktikan bahwa turunan fraksional kiri adalah invers kiri dari intergral fraksional kiri.

$${}_a D_x^p {}_a D_x^{-p} f(x) = f(x) \quad \forall p > 0$$

Proporsisi 2.7 Kelinieran turunan faksioanal kiri

$$D^p(\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda D^p f(x) + \mu D^p g(x)$$

Bukti: Dengan menggunakan definisi dari turunan fraksional kiri dengan orde $p, p > 0$, dan k adalah bilangan bulat terkecil yang lebih besar dari p sedemikian sehingga $k - 1 \leq p \leq k$.

$$D^p(\lambda f(x) + \mu g(x)) = \frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dx^k} \int_a^x (x-\tau)^{k-p-1} (\lambda f(x) + \mu g(x))$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\lambda}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dx^k} \int_a^x (x-\tau)^{k-p-1} f(\tau) d\tau + \\
&\quad \frac{\mu}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dx^k} \int_a^x (x-\tau)^{k-p-1} f(\tau) d\tau \\
&= \lambda {}_a D_x D^p f(x) + \mu {}_a D_x D^p g(x)
\end{aligned}$$

Misalkan turunan fraksional dari orde p dan q sehingga diperoleh

$${}_a D_x^q ({}_a D_x^p f(x)) = {}_a D_x^{q+p} f(x)$$

Bukti: Misalkan asumsikan bahwa $0 \leq m < p < m + 1$ dengan menggunakan definisi pada persamaan

$$\begin{aligned}
{}_a D_x^p f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} f_h^{(p)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \\
&\quad \int_a^x (x-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \tag{2.25}
\end{aligned}$$

Dengan menguji dari sebelah kanan didapat pada fungsi $(x-a)^{-p+k}$ tidak dapat diintegrasikan untuk $k = 0, 1, \dots, m-1$. Oleh karena itu turunan dari orde riil q dari ${}_a D_x^p f(x)$ ada jika hanya jika

$$f^{(k)} = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, m-1) \tag{2.26}$$

Integral dari sebelah kanan pada persamaan (2.25) sama untuk ${}_a D_x^{p-m-1} f(x)$ (Integral fraksional berorde $-p+m+1$ dari fungsi $f(x)$). Oleh karena itu saat kondisi (2.26) dapat direpresentasikan pada (2.26) dari turunan lipat $-p$ sehingga didapatkan

$${}_a D_x^p f(x) = \frac{f^{(m)}(a)(x-a)^{-p+m}}{\Gamma(-p+m+1)} + {}_a D_x^{p-m-1} f^{m+1}(x) \quad (2.27)$$

Selanjutnya dapat ditemukan turunan dari orde $q < 0$ dari turunan orde p pada persamaan (2.28)

$${}_a D_x^q ({}_a D_x^p f(x)) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{-p-q+k}}{\Gamma(-p-q+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p-q+m+1)} \int_a^x \frac{f^{(m+1)}(\tau) d\tau}{(x-\tau)^{p+1-m}} \quad (2.28)$$

karena

$${}_a D_x^q ({}_a D_x^{p-m-1} f^{m+1}(x)) = {}_a D_x^{p-m-1} f^{m+1}(x) + \frac{1}{\Gamma(-p-q+m+1)} \int_a^x \frac{f^{(m+1)}(\tau) d\tau}{(x-\tau)^{p+1-m}}$$

dengan menghitung kondisi (2.26) dan bentuk turunan pada persamaan (2.28) kita peroleh

$${}_a D_x^q ({}_a D_x^p f(x)) = {}_a D_x^{q+p} f(x)$$

2.2.2 Turunan Fraksional Kanan

Definisi 2.8

Suatu f terdefinisi pada \mathbb{R} , $p > 0$ dan k adalah bilangan bulat terkecil yang lebih besar dari p sedemikian sehingga $k-1 \leq p \leq k$. Maka turunan fraksional kanan berorde p didefinisikan

$$\begin{aligned} {}_x D_b^p &= \frac{d^k}{dx^k} {}_x D_b^{-(k-p)} f(x) = D^n {}_x D_b^{-(k-p)} f(x) \\ &:= \frac{(-1)^n}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dx^k} \int_x^b (\tau-x)^{k-p-1} f(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.29)$$

Lema 2.9 Misalkan ${}_aD_x^p f(x)$ dan ${}_xD_b^p f(x)$ adalah turunan sepihak dengan k adalah bilangan bulat terkecil yang lebih besar dari p sedemikian sehingga $k - 1 \leq p \leq k$ dan $b = a$ maka diperoleh

$${}_aD_x^p f(x) = (-1)^p {}_xD_b^p f(x) \quad a \leq x \leq b$$

Bukti:

$$\begin{aligned} {}_aD_x^p f(x) &= \frac{d^n}{dx^n} \left({}_aD_x^{-(n-p)} \right) \\ &= \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^x (x-\tau)^{n-p-1} f(\tau) d\tau \right) \\ &= \frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^x (x-\tau)^{n-p-1} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^x (-(\tau-x))^{n-p-1} f(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Karena $b = a$

$$\begin{aligned} &= \frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{\Gamma(n-p)} (-1)^1 \int_x^b (-1)^{n-p-1} (\tau-x)^{n-p-1} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{\Gamma(n-p)} (-1)^{1+n-p-1} \int_x^b (\tau-x)^{n-p-1} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{\Gamma(n-p)} (-1)^{n-p} \int_x^b (\tau-x)^{n-p-1} f(\tau) d\tau \\ &= (-1)^{n-p} \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dx^n} \int_x^b (\tau-x)^{n-p-1} f(\tau) d\tau \end{aligned}$$

$$= (-1)^{-p} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dx^n} \int_x^b (\tau-x)^{n-p-1} f(\tau) d\tau$$

$${}_a D_x^p f(x) = (-1)^{-p} {}_x D_b^p f(x) = (-1)^{-p} {}_x D_b^p f(x)$$

2.2.2.1 Sifat-sifat turunan fraksional kanan

Turunan fraksional kanan adalah invers kanan dari integral fraksional kanan dengan orde p .

Proposisi 2.10 Misalkan ${}_x D_b^p$ adalah turunan fraksional kanan yang berorde p dengan $k-1 \leq p \leq k$ dan ${}_x D_b^{-p}$ adalah integral fraksional kanan berorde p , $p > 0$ sehingga berlaku

$${}_x D_b^p {}_x D_b^{-p} f(x) = f(x)$$

Bukti: Dengan menggunakan definisi turunan fraksional sehingga ${}_x D_b^p$ dapat ditulis $\frac{d^k}{dx^k} ({}_a D_x^{-(k-p)})$ dengan k adalah bilangan bulat terkecil yang lebih besar dari p sedemikian sehingga $k-1 \leq p \leq k$. Dengan menggunakan lema (2.1) diperoleh

$$\begin{aligned} {}_x D_b^p {}_x D_b^{-p} f(x) &= (-1)^p {}_a D_x^p [(-1)^{-p} {}_a D_x^{-p} f(x)] \\ &= ({}_a D_x^p) ({}_a D_x^{-p} f(x)) \\ &= \frac{d^k}{dx^k} ({}_a D_x^{-(k-p)} {}_a D_x^{-p} f(x)) \\ &= \frac{d^k}{dx^k} ({}_a D_x^{-(k-p+p)} f(x)) = \frac{d^k}{dx^k} ({}_a D_x^{-k} f(x)) \end{aligned}$$

(i) Saat $k = 1$

$$\begin{aligned}
 {}_a D_x^p &= \frac{d^k}{dx^k} ({}_a D_x^{-1} f(x)) = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\Gamma(1)} \int_a^x (x-\tau)^{1-1} f(\tau) d\tau \right] \\
 &= \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{1} \int_a^x (x-\tau)^0 f(\tau) d\tau \right] \\
 &= \frac{d}{dx} \int_a^x f(\tau) d\tau
 \end{aligned}$$

Sesuai dengan aturan pada kalkulus I bahwa

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(\tau) d\tau = f(x)$$

(ii) Saat $k = 2$

$$\begin{aligned}
 {}_a D_x^p &= \frac{d^k}{dx^k} ({}_a D_x^{-2} f(x)) = \frac{d^2}{dx^2} \left[\frac{1}{\Gamma(2)} \int_a^x (x-\tau)^{2-1} f(\tau) d\tau \right] \\
 &= \frac{d^2}{dx^2} \left[\frac{1}{1!} \int_a^x (x-\tau) f(\tau) d\tau \right] \\
 \forall a \leq \tau \leq x_1 \leq x \leq b &= \frac{d}{dx} \left[\frac{d}{dx} \int_a^x f(\tau) d\tau \int_\tau^x dx_1 \right] \\
 &= \frac{d}{dx} \left[\frac{d}{dx} \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} f(\tau) d\tau \right] \\
 &= \frac{d}{dx} \left[\frac{d}{dx} \int_a^x \int_a^{x_1} f(\tau) d\tau dx_1 \right]
 \end{aligned}$$

dengan membuat permisalan untuk

$$\int_a^x f(x_1) dx_1 = Q(x) \quad \text{dan} \quad f(x_1) = \int_a^{x_1} f(\tau) d\tau$$

Kemudian dengan menggunakan definisi turunan pada limit dapat ditulis

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \int_a^x f(x_1) dx_1 &= Q'(x) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Q(x+h) - Q(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\int_a^{x+h} f(x_1) dx_1 - \int_a^x f(x_1) dx_1 \right] \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\int_a^{x+h} f(x_1) dx_1 \right]
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$Q(x+h) - Q(x) = \int_a^{x+h} f(x_1) dx_1$$

Misalkan $h > 0$, m adalah nilai minimum dari f dan M adalah nilai maksimum dari f , dan f adalah fungsi yang kontinu pada selang $[x, x+h]$

$$mh \leq \int_a^{x+h} f(x_1) dx_1 \leq Mh$$

atau

$$mh \leq Q(x+h) - Q(x) \leq Mh$$

$$m \leq \frac{Q(x+h) - Q(x)}{h} \leq M$$

Sehingga m dan M bergantung pada h karena f adalah fungsi kontinu. Oleh karena itu, nilai m dan M harus menghampiri $f(x)$ dengan $h \rightarrow 0$. Dengan menggunakan teorema apit, diperoleh

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{Q(x+h) - Q(x)}{h} = f(x)$$

kemudian didapatkan

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{Q(x+h) - Q(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^{x+h} f(x_1) dx_1 = f(x)$$

Setelah itu untuk permisalan selanjutnya

$$\int_a^{x_1} f(\tau) d\tau = f(x_1)$$

dapat dituliskan sesuai dengan definisi turunan

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_a^{x_1} f(\tau) d\tau &= f'(x) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\int_a^{x+h} f(\tau) d\tau - \int_a^x f(\tau) d\tau \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\int_a^{x+h} f(\tau) d\tau \right] \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$f(x+h) - f(x) = \int_a^{x+h} f(\tau) d\tau$$

Misalkan $h > 0$, m adalah nilai minimum dari f , M adalah nilai maksimum dari f dan f kontinu pada selang $[x, x+h]$ sehingga

$$mh \leq \int_a^{x+h} f(\tau) d\tau \leq Mh$$

atau dapat dituliskan

$$mh \leq f(x+h) - f(x) \leq Mh$$

$$m \leq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq M$$

Dapat diketahui m dan M bergantung pada h , karena f merupakan fungsi yang kontinu sehingga nilai m dan M harus menghampiri $f(x)$ dengan $h \rightarrow 0$. Dengan menggunakan teorema apit diperoleh

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

Oleh karena itu,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^{x+h} f(\tau) d\tau = f'(x)$$

Kemudian dengan menggunakan induksi matematika dengan kondisi yang sudah diperumum diperoleh.

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n} [{}_a D_x^{-p} f(x)] &= D^n [{}_a D_x^{-p} f(x)] \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Sehingga dapat diBuktikan bahwa turunan fraksional kiri adalah invers kiri dari intergral fraksional kiri.

$${}_x D_b^p {}_x D_b^{-p} f(x) = f(x) \quad \forall p > 0$$

Proposisi 2.11 Kelinieran Turunan Fraksional Kanan

$$D^p(\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda D^p f(x) + \mu D^p g(x)$$

Bukti: Dengan menggunakan definisi dari turunan fraksional kanan dengan orde $p, p > 0$, dan k adalah bilangan bulat terkecil yang lebih besar dari p sedemikian sehingga $k - 1 \leq p \leq k$.

$$\begin{aligned}
D^p(\lambda f(x) + \mu g(x)) &= \frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dx^k} \int_x^b (\tau-x)^{k-p-1} (\lambda f(x) + \mu g(x)) \\
&= \frac{\lambda}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dx^k} \int_x^b (\tau-x)^{k-p-1} f(\tau) d\tau + \\
&\quad \frac{\mu}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dx^k} \int_x^b (\tau-x)^{k-p-1} f(\tau) d\tau \\
&= \lambda {}_x D_b^p f(x) + \mu {}_x D_b^p g(x)
\end{aligned}$$

Proposisi 2.12 Misalkan turunan fraksional dari orde p dan q sehingga dapat diperoleh

$${}_x D_b^q ({}_x D_b^p f(x)) = {}_x D_b^{q+p} f(x)$$

Bukti: Misalkan asumsikan bahwa $0 \leq m < p < m + 1$ dengan menggunakan definisi pada persamaan

$$\begin{aligned}
{}_x D_b^p f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} f_h^{(p)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \\
&\quad \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_x^b (\tau-x)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Dengan menguji dari sebelah kanan didapat pada fungsi $(x-a)^{-p+k}$ tidak dapat diintegrasikan untuk $k = 0, 1, \dots, m-1$. Oleh karena itu turunan dari orde riil q dari ${}_x D_b^p f(x)$ ada jika hanya jika

$$f^{(k)} = 0(a) (k = 0, 1, \dots, m-1) \tag{2.31}$$

Integral dari sebelah kanan pada persamaan (2.30) sama untuk ${}_x D_b^{p-m-1} f(x)$ (Integral fraksional berorde $-p+m+1$ dari fungsi $f(x)$). Oleh

karena itu saat kondisi (2.31) dapat direpresentasikan pada (2.31) dari turunan lipat- p sehingga didapatkan

$${}_x D_b^p f(x) = \frac{f^{(m)}(a)(x-a)^{-p+m}}{\Gamma(-p+m+1)} + {}_x D_b^{p-m-1} f^{m+1}(x) \quad (2.32)$$

Selanjutnya dapat ditemukan turunan dari orde $q < 0$ dari turunan orde p pada persamaan (2.33)

$${}_x D_b^q ({}_x D_b^p f(x)) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{-p-q+k}}{\Gamma(-p-q+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p-q+m+1)} \int_x^b \frac{f^{(m+1)}(\tau) d\tau}{(\tau-x)^{p+1-m}} \quad (2.33)$$

karena

$${}_x D_b^q ({}_x D_x^{p-m-1} f^{m+1}(x)) = {}_a D_x^{p-m-1} f^{m+1}(x) + \frac{1}{\Gamma(-p-q+m+1)} \int_a^x \frac{f^{(m+1)}(\tau) d\tau}{(\tau-x)^{p+1-m}}$$

Dengan menghitung kondisi dan bentuk turunan pada persamaan (2.30) kita peroleh

$${}_x D_b^q ({}_x D_b^p f(x)) = {}_x D_b^{q+p} f(x)$$

2.3 Transformasi Laplace

Menurut Zuhair (2007:2) metode transformasi *Laplace* adalah sebuah metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial yang berkaitan dengan masalah nilai awal dan nilai batas. Transformasi *Laplace* adalah suatu metode yang mentransformasikan persamaan differensial dari domain waktu t menjadi domain baru dengan variabel bebas s yaitu domain frekuensi, dimana s adalah bilangan kompleks. Begitu pula sebaliknya, invers transformasi *Laplace*

adalah transformasi dari domain frekuensi s menjadi domain waktu t (Effendy dkk, 2013:156-157).

Definisi 2.13

Misalkan f adalah fungsi riil atau bernilai kompleks untuk variabel (waktu) $t > 0$ dan s adalah parameter riil atau kompleks. Transformasi *Laplace* dari f didefinisikan sebagai berikut

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} e^{-st} f(t) dt \quad (2.34)$$

Jika limit ada (sebagai jumlah yang tak terbatas), maka integral (2.34) dikatakan konvergen. Jika limit tidak ada, maka integral (2.34) dikatakan divergen dan tidak ada transformasi *Laplace* yang didefinisikan untuk f . Notasi $\mathcal{L}(f)$ digunakan untuk menunjukkan transformasi *Laplace*, yang berada pada sebuah fungsi $f = f(t)$ dan menghasilkan fungsi baru, $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ (Schiff, 1999;1-2).

Teorema 2.14

Diketahui f_1 dan f_2 suatu fungsi-fungsi. Jika transformasi *Laplace* dari f_1 dan f_2 ada dan c merupakan suatu konstanta maka:

$$\mathcal{L}\{f_1 + f_2\} = \mathcal{L}\{f_1\} + \mathcal{L}\{f_2\}$$

$$\mathcal{L}\{cf_1\} = c\mathcal{L}\{f_1\}$$

Bukti: Jelas bahwa

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f_1 + f_2\} &= \int_0^{\infty} e^{-st}(f_1 + f_2)(t)dt \\
&= \int_0^{\infty} (f_1(t)e^{-st} + f_2(t)e^{-st})dt \\
&= \int_0^{\infty} f_1(t)e^{-st}dt + \int_0^{\infty} f_2(t)e^{-st}dt \\
&= \mathcal{L}\{f_1\} + \mathcal{L}\{f_2\}
\end{aligned}$$

Selanjutnya kita ketahui

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{cf_1\} &= \int_0^{\infty} e^{-st}c(f_1)(t)dt \\
&= c \int_0^{\infty} e^{-st}(f_1)(t)dt = c\mathcal{L}\{f_1\}
\end{aligned}$$

2.3.1 Syarat Cukup Agar Transformasi Laplace Ada

Teorema 2.15

Jika $f(t)$ adalah fungsi yang kontinu secara sebagian-sebagian dalam setiap interval $0 \leq t \leq N$ dan eksponensial berorde γ untuk $t > N$, maka transformasi Laplace $F(s)$ ada untuk setiap $s > \gamma$ (Spiegel, 1999:2).

Bukti: Untuk setiap bilangan positif N diperoleh

$$\int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt = \int_0^N e^{-st}f(t)dt + \int_N^{\infty} e^{-st}f(t)dt \quad (2.35)$$

Karena $f(t)$ adalah kontinu secara sebagian-sebagian dalam setiap interval $0 \leq t \leq N$, integral pertama di ruas kanan ada. Juga integral kedua di ruas kanan ada, karena $f(t)$ adalah eksponensial berorde γ untuk $t > N$. Untuk melihatnya amati hal berikut:

$$\begin{aligned}
\left| \int_N^\infty e^{-st} f(t) dt \right| &= \int_N^\infty |e^{-st} f(t)| dt \\
&= \int_0^\infty e^{-st} |f(t)| dt \\
&= \int_0^\infty e^{-st} M^\gamma t dt \\
&= \frac{M}{s - \gamma}
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Jadi transformasi *Laplace* ada untuk $s > \lambda$ (Spiegel, 1999:28).

Berdasarkan definisi di atas, dapat ditentukan transformasi *Laplace* dari beberapa fungsi sederhana. Beberapa contoh transformasi *Laplace* suatu fungsi dan penjabarannya, yaitu (Spiegel, 1999:10-11):

1. $f(t)=1$, maka dapat dihitung $\mathcal{L}\{f(1)\}$ sebagai berikut

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} \cdot 1 dt = \lim_{p \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^p = \lim_{p \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-s \cdot \infty} + \frac{1}{s} e^{-s \cdot 0} \right] = \frac{1}{s}$$

2. $f(t) = t$, maka dapat dihitung $\mathcal{L}\{f(t)\}$ sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} \cdot t dt \\
&= \lim_{p \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{s} \cdot t \cdot e^{-st} \right]_0^p - \int_0^p -\frac{1}{s} \cdot e^{-st} dt \\
&= \left[\left(-\frac{1}{s} \cdot \infty \cdot e^{-s \cdot \infty} \right) - \left(-\frac{1}{s} \cdot 0 - e^{-s \cdot 0} \right) \right] + \frac{1}{s} \int_0^p e^{-t} dt = \frac{1}{s^2}
\end{aligned}$$

3. $f(t) = e^{\alpha t}$, maka dapat dihitung $\mathcal{L}\{f(e^{\alpha t})\}$ sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot e^{\alpha t} dt \\
&= \lim_{p \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{-(s-\alpha)} \cdot e^{-(s-\alpha)t} \right]_0^p \\
&= \left[\left(\frac{1}{-s+\alpha} \cdot e^{(s+\alpha)\infty} \right) - \left(\frac{1}{-s+\alpha} \cdot e^{(s+\alpha) \cdot 0} \right) \right] = \frac{1}{s-\alpha}
\end{aligned}$$

Mencari nilai-nilai transformasi *Laplace* dari fungsi sinus-cosinus dan fungsi hiperbolik. Diketahui bentuk kompleks dari fungsi-fungsi sinus dan fungsi hiperbolik adalah:

4. $\sin at = \frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i}$, maka dapat dihitung $\mathcal{L}\{f(\sin at)\}$ sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\sin at\} &= \mathcal{L} \left[\frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i} \right] = \mathcal{L} \left[\frac{e^{iat}}{2i} \right] - \mathcal{L} \left[\frac{e^{-iat}}{2i} \right] \\
&= \frac{1}{2i} \left[\left(\frac{1}{s-ia} \right) - \left(\frac{1}{s+ia} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2i} \left[\frac{s+ia - (s-ia)}{s^2 - (ia)^2} \right] = \frac{1}{2i} \left[\frac{2ia}{s^2 + a^2} \right] \\
&= \frac{a}{s^2 + a^2}
\end{aligned}$$

5. $\cos at = \frac{e^{iat} + e^{-iat}}{2}$, maka dapat dihitung $\mathcal{L}\{f(\cos at)\}$ sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\cos at\} &= \mathcal{L} \left[\frac{e^{iat} + e^{-iat}}{2} \right] = \frac{1}{2} [\mathcal{L}(e^{iat}) + \mathcal{L}(e^{-iat})] \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s-ia} + \frac{1}{s+ia} \right] \\
&= \frac{1}{2} \frac{s+ia - (s-ia)}{s^2 - (ia)^2} \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{2s}{s^2 + a^2} \right] = \frac{s}{s^2 + a^2}
\end{aligned}$$

6. $\sinh at = \frac{1}{2}(e^{at} - e^{-at})$, maka dapat dihitung $\mathcal{L}\{f(\sinh at)\}$ sebagai berikut

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\sinh at\} &= \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}(e^{at} - e^{-at})\right] = \frac{1}{2}[\mathcal{L}(e^{at}) - \mathcal{L}(e^{-at})] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{2a}{s^2 - a^2} = \frac{a}{s^2 - a^2}\end{aligned}$$

(Tazi, 2008:258-261)

2.3.2 Sifat-sifat Transformasi Laplace

Transformasi Laplace suatu fungsi mempunyai beberapa sifat. Sifat-sifat tersebut antara lain:

a. Sifat Linier

Teorema 2.15

Jika c_1 dan c_2 adalah sebarang konstanta, sedangkan $f_1(t)$ dan $f_2(t)$ adalah fungsi-fungsi dengan transformasi Laplacanya masing-masing $F_1(s)$ dan $F_2(s)$, maka:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} &= c_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\} \\ &= c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)\end{aligned}\tag{2.36}$$

(Spiegel, 1999:3).

Bukti: Misalkan $\mathcal{L}\{f_1(t)\} = F_1(s) = \int_0^\infty e^{-st} f_1(t) dt$ dan $\mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_2(s) = \int_0^\infty e^{-st} f_2(t) dt$. Maka jika c_1 dan c_2 adalah konstanta – konstanta,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} \{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} c_1 f_1(t) dt + \int_0^\infty e^{-st} c_2 f_2(t) dt \\ &= c_1 \int_0^\infty e^{-st} f_1(t) dt + c_2 \int_0^\infty e^{-st} f_2(t) dt\end{aligned}$$

$$= c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s) \quad (2.37)$$

Contoh:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{4t^2 - 3\cos 2t + 5e^{-t}\} &= 4\mathcal{L}\{t^2\} - 3\mathcal{L}\{\cos 2t\} + 5\mathcal{L}\{e^{-t}\} \\ &= 4\left(\frac{2!}{s^3}\right) - 3\left(\frac{s}{s^2 + 4}\right) + 5\left(\frac{s}{s + 1}\right) \\ &= \frac{8}{s^3} - \frac{3s}{s^2 + 4} + \frac{5}{s + 1} \end{aligned}$$

Simbol \mathcal{L} yang mentransformasikan $f(t)$ ke dalam $F(s)$, sering disebut transformasi *Laplace*. Karena sifat \mathcal{L} yang dinyatakan dalam teorema ini, dikatakan bahwa \mathcal{L} adalah suatu operator linear atau bahwa ia memiliki sifat linear (Spiegel, 1999:12-13).

b. Sifat translasi atau pergeseran pertama

Teorema 2.16

Jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ maka $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s - a)$

Bukti: Karena $\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt = F(s)$, maka

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}e^{at}f(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t}f(t)dt = F(s - a) \quad (2.38)$$

(Spiegel, 1999:13)

c. Sifat translasi atau pergeseran kedua

Teorema 2.17

Jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ dan $g(t) = \begin{cases} f(t - a) & , \text{ jika } t > a \\ 0 & , \text{ jika } t < a \end{cases}$

maka $\mathcal{L}\{g(t)\} = e^{-as}F(s)$ (2.39)

Bukti:

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}g(t)dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^a e^{-st} g(t) dt + \int_a^\infty e^{-st} g(t) dt \\
&= \int_0^a e^{-st} (0) dt + \int_a^\infty e^{-st} f(t-a) dt \\
&= \int_a^\infty e^{-st} f(t-a) dt
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Misal $u = t - a$ maka $t = u + a$ dan $du = dt$, sehingga

$$\begin{aligned}
\int_a^\infty e^{-st} f(t-a) dt &= \int_a^\infty e^{-s(u+a)} f(u) du \\
&= e^{-sa} \int_a^\infty e^{-su} f(u) du \\
&= e^{-sa} F(u)
\end{aligned} \tag{2.41}$$

(Spiegel, 1999:14)

d. Transformasi *Laplace* dari turunan-turunan

Teorema 2.18

Jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ maka $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$ karena $\mathcal{L}\{f(t)\} =$

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = F(s), \text{ maka } \mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f'(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt = [e^{-st} f(t)]_0^\infty - \int_0^\infty f(t) - s \cdot e^{-st} dt \\
&= [e^{-st} f(t)]_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Jika $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$ maka $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 F(s) - s f(0) - f'(0)$

Bukti:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f'(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f''(t) dt \\
&= [e^{-st} f'(t)]_0^\infty - \int_0^\infty -s \cdot e^{-st} f'(t) dt \\
&= [e^{-st} f'(t)]_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt \\
&= [(e^{-s \cdot \infty} f'(\infty)) - (e^{-s \cdot 0} f'(0))] + s([e^{-st} f(t)]_0^\infty - \int_0^\infty -s \cdot e^{-st} f(t) dt)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (0 - 1 \cdot f'(0)) + \left(s[e^{-st}f(t)]_0^\infty - s\left(\int_0^\infty -s \cdot e^{-st}f(t)dt\right) \right) \\
&= (0 - 1 \cdot f'(0)) + \left([(s \cdot e^{-s \cdot \infty} f(\infty)) - (s \cdot e^{-s \cdot 0} f(0))] + \right. \\
&\quad \left. s^2 \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \right) \\
&= (0 - f'(0)) + (0 - sf(0)) + s^2 \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \\
&= -f'(0) - sf(0) + s^2 F(t) \\
&= s^2 F(t) - sf(0) - f'(0) \\
&= s^2 F(t) - sf(0) - f'(0) \tag{2.43}
\end{aligned}$$

dengan menggunakan induksi matematika dapat ditunjukkan bahwa, jika

$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, maka

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f^n(t)\} &= s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - \\
&\quad sf^{(n-1)}(0) \tag{2.44}
\end{aligned}$$

(Spiegel, 1999:15)

e. Transformasi *Laplace* dari integral-integral

Teorema 2.19

jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, maka $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{F(s)}{s}$

Bukti: Misal $g(t) = \int_0^t f(u)du$ maka $g'(t) = f(t)$ dan $g(0) = 0$ dengan

transformasi *Laplace* pada kedua ruas, diperoleh:

$$\mathcal{L}\{g'(t)\} = s\mathcal{L}\{g(t)\} - g(0) = s\mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{F(s)}{s} \tag{2.45}$$

Jadi diperoleh $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{F(s)}{s}$

(Spiegel, 1999:16).

f. Sifat konvolusi

Teorema 2.20

jika transformasi *Laplace* dari fungsi $f(t)$ dan $g(t)$ adalah $F(s)$ dan $G(s)$

dengan:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} g(t) dt$$

$$\text{Maka } \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right\} = F(s)G(s)$$

2.4 Fungsi Gamma

Salah satu fungsi dasar yang digunakan dalam kalkulus fraksional adalah fungsi Gamma Euler $\Gamma(z)$, yang diperumum dengan faktorial ($n!$) dan memperbolehkan n bernilai bukan bilangan bulat dan bilangan kompleks genap. Selanjutnya, fungsi Gamma didefinisikan dengan integral sebagai berikut (Podlubny,1999:1):

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

yang konvergen di sebelah kanan dari bidang kompek $Re(z) > 0$. Kita mempunyai

$$\begin{aligned} \Gamma(x + iy) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1+iy} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} e^{iy \log(t)} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} [\cos(y \log(t)) + i \sin(y \log(t))] dt \end{aligned}$$

Sifat dasar dari fungsi Gamma memenuhi persamaan fungsional berikut (Podlubny,1999:2):

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$$

diketahui bahwa $\Gamma(1) = 1$, dengan menggunakan persamaan di atas kita dapatkan untuk $z = 1,2,3, \dots$:

$$\Gamma(2) = 1. \Gamma(1) = 1 = 1!$$

$$\Gamma(3) = 2. \Gamma(2) = 2.1! = 2!$$

... ..

$$\Gamma(n + 1) = n. \Gamma(n) = n. (n - 1)! = n!$$

Hal lain yang penting dalam sifat dari fungsi Gamma adalah bentuk sederhana dari titik $z = -n, (n = 0,1,2, \dots)$. Untuk itu, maka dapat ditulis ulang definisi fungsi Gamma sebagai berikut:

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

Integral pertama dari persamaan di atas dapat di selesaikan dengan menggunakan ekspansi barisan untuk fungsi eksponensial. Jika $Re(z) = x > 0$, maka $Re(z + k) = x + n > 0$ dan $t^{z+k}|_{t=0} = 0$. sehingga:

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!} t^{z-1} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 t^{k+z-1} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (k+z)} \end{aligned}$$

maka bisa didapatkan fungsi Gamma

$$\Gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (k+z)} + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+z)} + \text{keseluruhan fungsi}$$

Contoh : Hitung $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

2.5 Fungsi Beta

Dalam beberapa kasus kita dapat menggunakan fungsi Beta untuk menyelesaikan kombinasi dari nilai dalam fungsi Gamma dengan mudah.

Menurut (Podlubny, 1999:6) fungsi Gamma didefinisikan sebagai:

$$B(z, w) = \int_0^1 \tau^{z-1} (1-\tau)^{w-1} d\tau, \quad (\operatorname{Re}(z) > 0, \quad \operatorname{Re}(w) > 0)$$

Selanjutnya, digunakan transformasi *Laplace* untuk menentukan hubungan antara fungsi Gamma dan fungsi Beta. Misalkan kita mempertimbangkan integral berikut:

$$h_{z,w}(t) = \int_0^t \tau^{z-1} (1-\tau)^{w-1} d\tau$$

$h_{z,w}(t)$ adalah perkembangan fungsi-fungsi t^{z-1} dan t^{w-1} dan diketahui bahwa $h_{z,w}(1) = B(z, w)$. Karena transformasi *Laplace* adalah perkembangan dari dua fungsi yang sama dengan hasil kali keduanya, kita dapatkan:

$$H_{z,w}(s) = \frac{\Gamma(z)}{s^z} \cdot \frac{\Gamma(w)}{s^w} = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{s^{z+w}}$$

dimana $H_{z,w}(s)$ adalah transformasi *Laplace* dari fungsi $h_{z,w}(t)$.

Disisi lain, karena $\Gamma(z)\Gamma(w)$ konstan, ini mungkin untuk mengembalikan fungsi asli dari $h_{z,w}(t)$ dengan invers transformasi *Laplace* dari sisi sebelah kanan transformasi *Laplace*. Dengan keunikan transformasi *Laplace* kita peroleh:

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z + w)}$$

dengan cara yang sama kita dapatkan bahwa:

$$B(z, w) = B(w, z)$$

Contoh: Hitung $B(3,5)$

$$\text{Jawab: } B(3,5) = \frac{\Gamma(3)\Gamma(5)}{\Gamma(3+5)} = \frac{2!4!}{7!} = \frac{1}{105}$$

2.6 Kesabaran dalam Al-Quran

Sebagaimana yang telah dijelaskan pada bab I dapat dikatakan bahwa hamba Allah Swt harus bersabar. Karena sesungguhnya Allah Swt selalu bersama hamba-hamba-Nya, mencintai, menjaga dan memberi kasih sayang, sebesar masalah apapun yang menimpa, sebaiknya berusaha untuk menghadapinya. Hal ini juga sesuai dengan firman Allah Swt di dalam al-Quran surat Al-Imran/:146, yaitu:

وَكَايِنُ مِنْ نَبِيِّ قَاتَلَ مَعَهُ رَبِّيُونَ كَثِيرٌ فَمَا وَهَنُوا لِمَا أَصَابَهُمْ فِي سَبِيلِ اللَّهِ وَمَا ضَعُفُوا وَمَا اسْتَكَانُوا وَاللَّهُ يُحِبُّ الصَّابِرِينَ

“Dan berapa banyaknya nabi yang berperang bersama-sama mereka sejumlah besar dari pengikut(nya) yang bertakwa. Mereka tidak menjadi lemah karena bencana yang menimpa mereka di jalan Allah Swt, dan tidak lesu dan tidak (pula) menyerah (kepada musuh). Allah Swt menyukai orang-orang yang sabar.” (QS. Al-Imran/ 3:146).

Maksud dari ayat tersebut menurut tafsir Ibnu katsier (2000) adalah membesarkan hati para mu'minin dan menghibur mereka dari akibat kecelakaan mereka dalam perang Uhud, bahwa berapa banyaknya nabi yang berperang dan

bersama mereka, sahabat-sahabat mereka yang banyak bertaqwa. Dan mereka tidak menjadi lemah karena apa yang mereka alami dan derita di jalan Allah Swt dan tidak juga mereka lesu atau menyerah kepada musuh atau enggan meneruskan perang dan berjuang guna membela nabi dan agama mereka. Allah Swt menyukai orang-orang yang sabar itu, dan memberi mereka pahala di dunia berupa kemenangan di samping pahala yang baik di akhirat.

Sedangkan maksud ayat tersebut menurut tafsir Jalalain (2008) adalah nabi-nabi yang berperang bersama mereka yaitu pengikut-pengikutnya yang amat banyak yakni yang bertaqwa. Maka mereka tidak menjadi lemah atau merasa takut, karena hal-hal yang menimpa mereka di jalan Allah Swt seperti mendapat luka, dan terbunuhnya nabi-nabi dan para sahabat mereka. Dan mereka tidak menjadi lelah menghadapi perjuangan dan tidak pula menyerah atau tunduk kepada musuh-musuh sebagaimana kamu lakukan ketika disiarkan orang berita bahwa nabimu telah gugur. Allah Swt menyukai orang-orang yang sabar dalam menerima bala hingga Allah Swt berkenan memberikan imbalan kepadanya.

Sabar mempunyai tiga unsur, yaitu ilmu, hal dan amal. Yang dimaksud ilmu disini adalah pengetahuan atau kesadaran bahwa sabar itu mengandung kemaslahatan dalam agama dan memberi manfaat bagi seseorang dalam menghadapi segala problem kehidupan. Pengetahuan yang demikian seterusnya menjadi milik hati. Keadaan hati yang memiliki pengetahuan demikian disebut hal. Kemudian hal tersebut terwujud dalam tingkah laku. Terwujudnya hal dalam tingkah laku disebut amal. (Dahlan, 2001:1520)

Sehingga diketahui bahwa kesabaran itu sangatlah dibutuhkan oleh seorang hamba, bahkan menjadi suatu yang darurat dalam setiap kondisi, oleh

karena itu Allah Swt memerintahkan dan mengabarkan bahwasanya Allah Swt beserta orang-orang yang sabar.



BAB III
PEMBAHASAN

3.1 Aplikasi Integral Fraksional pada Transformasi Laplace

Pada subbab ini akan ditentukan penerapan atau aplikasi integral fraksional pada transformasi Laplace. Pertama, secara dasar integral fraksional orde α didefinisikan sebagai berikut

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, \alpha > 0 \text{ dan } -\infty \leq a < t < b \leq \infty.$$

Dimana $I^\alpha f(t)$ adalah integral fraksional berorde- α dengan α bilangan asli dari suatu fungsi kontinu $f(t)$ untuk setiap t bilangan riil. Dengan mengambil kasus khusus dari definisi di atas yaitu untuk $\alpha \rightarrow 0$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} I^\alpha f(t) &= \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau) d\tau \\ &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \left(\frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \right) \\ &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \left(\int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \dots \int_0^t f(t) dt_n \right) \\ &= f(t) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Kedua, mendefinisikan sebuah fungsi Gamma sebagai berikut:

$$g(t) = \begin{cases} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

Fungsi $g(t)$ adalah fungsi yang kontinu. Fungsi $g(t)$ bernilai $\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ apabila nilai t lebih dari nol, dan bernilai 0 apabila t kurang dari 0 atau sama dengan 0.

Ketiga, menghitung $G(s)$ yang hasilnya akan disubstitusikan ke dalam $\mathcal{L}[I^\alpha f(t)]$, berdasarkan definisi transformasi *Laplace* diperoleh bahwa transformasi *Laplace* dari fungsi g adalah

$$G(s) = \int_0^\infty e^{-st} g(t) dt$$

$$G(s) = \int_0^t e^{-st} g(t) dt + \int_t^\infty e^{-st} g(t) dt$$

$$G(s) = 0 + \int_t^\infty e^{-st} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dt$$

Dengan mensubstitusikan $u = st, dt = \frac{1}{s} du$, diperoleh

$$G(s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{1}{s} du$$

$$G(s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{s}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{s}\right) \int_t^\infty e^{-u} (u)^{\alpha-1} du$$

$$G(s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{s}\right)^\alpha \Gamma(\alpha)$$

$$G(s) = s^{-\alpha} \tag{3.3}$$

Selanjutnya Keempat yaitu melalui pendefinisian fungsi g yang telah dilakukan, integral fraksional dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\begin{aligned} I^\alpha f(t) &= \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t g(t-\tau) f(\tau) d\tau \end{aligned} \tag{3.4}$$

Berdasarkan persamaan (3.4) dan dengan menggunakan lema (3.4), dapat diperoleh penerapan integral fraksional pada transformasi Laplace $\mathcal{L}[I^\alpha f(t)]$ yaitu

$$\mathcal{L}[I^\alpha f(t)] = \int_0^t \int_0^\tau g(t-\tau) f(\tau) e^{-st} d\tau dt,$$

Kemudian dengan menggunakan teorema Fubini, diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[I^\alpha f(t)] &= \int_0^\tau \int_0^t e^{-s(t-\tau)} g(t-\tau) f(\tau) dt d\tau \\
&= \int_0^\tau \int_0^z e^{-sz} g(z) f(\tau) e^{-s\tau} dz d\tau, z = t - \tau \\
&= \int_0^\tau f(\tau) e^{-s\tau} \int_0^z e^{-st} g(z) dz d\tau \\
&= \mathcal{L}(g(t))\mathcal{L}(f(t))
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Berdasarkan hasil yang diperoleh dari persamaan (3.4) dan (3.1), oleh karena itu

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[I^\alpha f(t)] &= \mathcal{L}(g(t))\mathcal{L}(f(t)) \\
&= G(s)F(s) \\
&= s^{-\alpha}F(s), \alpha > 0
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Kelima, setelah menghitung $\mathcal{L}[I^\alpha f(t)]$, selanjutnya akan menentukan sifat kelinieran dan sifat semigrup yang ada pada integral fraksional pada transformasi *Laplace*.

1. Sifat Kelinieran

Misalkan $\alpha > 0$ dan k adalah suatu konstanta, maka berlaku

$$I^\alpha k f = k I^\alpha f(t)$$

Bukti: Dengan menggunakan definisi transformasi *Laplace* dan sifat-sifat integral fraksional dan maka diperoleh:

Ambil sebarang k , sedemikian sehingga

$$\mathcal{L}[I^\alpha k f(t)] = s^{-\alpha}k F(s)$$

$$k s^{-\alpha} F(s)$$

$$\mathcal{L}[k I^{\alpha} f(t)], \alpha > 0$$

2. Sifat semigrup

Selanjutnya akan menentukan sifat semigrup yang ada pada integral fraksional pada transformasi *Laplace*. Misalkan sebarang $\alpha, \beta > 0$, maka berlaku sifat semigrup dari integral fraksional sebagai berikut:

$$I^{\alpha} I^{\beta} f(t) = I^{\alpha+\beta} f(t)$$

Bukti: Ambil sebarang $\alpha, \beta > 0$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[I^{\alpha} I^{\beta} f(t)] &= s^{-\alpha} \mathcal{L}[I^{\beta} f(t)] \\ &= s^{-\alpha} s^{-\beta} F(s) \\ &= s^{-(\alpha+\beta)} F(s) \\ &= \mathcal{L}[I^{\alpha+\beta} f(t)], \alpha + \beta > 0 \end{aligned}$$

Oleh karena itu,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[I^{\alpha} I^{\beta} f(t)] &= s^{-(\alpha+\beta)} F(s) \\ &= s^{-(\beta+\alpha)} F(s) \\ &= s^{-\beta} s^{-\alpha} F(s) \\ &= s^{-\beta} \mathcal{L}[I^{\alpha} f(t)] \\ &= \mathcal{L}[I^{\beta} I^{\alpha} f(t)]. \end{aligned}$$

Setelah melakukan point-point penting di atas, langkah selanjutnya adalah aplikasi pada fungsi $f(t)$, $kf(t)$ dan $I^\alpha I^\beta f(t)$. Berikut adalah contoh penerapan dari aplikasi integral fraksional pada transformasi *Laplace*:

1. Pada fungsi $f(t)$

Contoh: Misalkan diberikan fungsi $f(t) = t^2$ dengan $\alpha = \frac{1}{2}$ akan dicari integral fraksional pada transformasi *Laplace* menggunakan persamaan (3.6)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[I^\alpha f(t)] &= s^{-\alpha} F(s) \\
 &= s^{-\alpha} \int_0^\infty e^{-st} t^2 dt \\
 &= s^{-\alpha} \left(\left[-\frac{1}{s} e^{-st} t^2 \right]_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} 2t dt \right) \\
 &= \frac{1}{s^{\frac{1}{2}}} \left(-0 + 0 + \frac{2}{s} \int_0^\infty e^{-st} t dt \right) \\
 &= \frac{1}{s^{\frac{1}{2}}} \frac{2}{s} \mathcal{L}(t) \\
 &= \frac{1}{s^{\frac{1}{2}}} \frac{2}{s} \left(\left[-\frac{1}{s} e^{-st} t \right]_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} dt \right) \\
 &= \frac{1}{s^{\frac{1}{2}}} \frac{2}{s} \left(0 - 0 + \frac{1}{s} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^\infty \right) \\
 &= \frac{1}{s^{\frac{1}{2}}} \frac{2}{s} \frac{1}{s^2} = \frac{2}{s^{\frac{7}{2}}}
 \end{aligned}$$

2. Pada fungsi $kf(t)$

Contoh: Misalkan diberikan fungsi $f(t) = t^2$ dengan $\alpha = \frac{1}{2}$ dan $k = 2$ akan dicari integral fraksional pada transformasi *Laplace* menggunakan sifat kelinieran $\mathcal{L}[k I^\alpha f(t)]$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[k I^\alpha f(t)] &= k s^{-\alpha} F(s) \\
&= 2 s^{-\alpha} \int_0^\infty e^{-st} t^2 dt \\
&= 2 s^{-\frac{1}{2}} \left(\left[-\frac{1}{s} e^{-st} t^2 \right]_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} 2t dt \right) \\
&= 2 \frac{1}{s^{\frac{1}{2}}} \left(-0 + 0 + \frac{2}{s} \int_0^\infty e^{-st} t dt \right) \\
&= 2 \frac{1}{s^{\frac{1}{2}}} \frac{2}{s} \mathcal{L}(t) \\
&= \frac{1}{s^{\frac{1}{2}}} \frac{4}{s} \left(\left[-\frac{1}{s} e^{-st} t \right]_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} dt \right) \\
&= \frac{1}{s^{\frac{1}{2}}} \frac{4}{s} \left(0 - 0 + \frac{1}{s} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^\infty \right) \\
&= \frac{1}{s^{\frac{1}{2}}} \frac{4}{s} \frac{1}{s^2} = \frac{4}{s^{\frac{7}{2}}}
\end{aligned}$$

3. Pada fungsi $I^\alpha I^\beta f(t)$

Contoh: Misalkan diberikan fungsi $f(t) = t^2$ dengan $\alpha = \frac{1}{2}$ dan $\beta = \frac{1}{2}$

akan dicari integral fraksional pada transformasi *Laplace* menggunakan sifat semigrup $\mathcal{L}[I^\alpha I^\beta f(t)]$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[I^\alpha I^\beta f(t)] &= s^{-(\alpha+\beta)} F(s) \\
&= s^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-st} t^2 dt \\
&= s^{-\left(\frac{2}{2}\right)} \left(\left[-\frac{1}{s} e^{-st} t^2 \right]_0^\infty + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} 2t dt \right) \\
&= s^{-1} \frac{2}{s} \mathcal{L}(t) \\
&= \frac{2}{s^2} \left(\left[-\frac{1}{s} e^{-st} t \right]_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt \right) \\
&= \frac{2}{s^2} \left(0 - 0 + \frac{1}{s} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} \right) \\
&= \frac{2}{s^2} \frac{1}{s^2} = \frac{2}{s^4}
\end{aligned}$$

3.2 Aplikasi Turunan Fraksional pada Transformasi Laplace

Pada subbab ini akan ditentukan penerapan atau aplikasi turunan fraksional pada transformasi *Laplace*. Pertama, secara dasar turunan fraksional orde α didefinisikan sebagai berikut

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \alpha > 0 \text{ dan } -\infty \leq a < x < b \leq \infty.$$

dimana $D^\alpha f(t)$ adalah integral fraksional berorde- α dengan α bilangan asli dari suatu fungsi kontinu $f(t)$ untuk setiap t bilangan riil. Dengan mengambil kasus khusus dari definisi di atas yaitu untuk $\alpha \rightarrow 0$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}
D^\alpha f(t) &= \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} f^n(\tau) d\tau \\
&= \left(\frac{d}{dt} \right)^n \left(\frac{1}{(n-\alpha-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^n(\tau) d\tau \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \left(\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} f^n(t) dt_n \right) \\
&= f^n(t)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Kedua, didefinisikan sebuah fungsi Gamma sebagai berikut:

$$h(t) = \begin{cases} \frac{t^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}, & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} \tag{3.8}$$

Fungsi $h(t)$ adalah fungsi yang kontinu. Fungsi $h(t)$ bernilai $\frac{t^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}$ apabila nilai t lebih dari nol, dan bernilai 0 apabila t kurang dari 0 atau sama dengan 0.

Ketiga, menghitung $H(s)$ yang hasilnya akan disubstitusikan ke dalam $\mathcal{L}[D^\alpha f(t)]$, berdasarkan definisi transformasi *Laplace* diperoleh bahwa transformasi *Laplace* dari fungsi h adalah

$$H(s) = \int_0^\infty e^{-st} h(t) dt$$

$$H(s) = \int_0^t e^{-st} h(t) dt + \int_t^\infty e^{-st} h(t) dt$$

$$H(s) = 0 + \int_t^\infty e^{-st} \frac{t^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} dt$$

Dengan mensubstitusikan $u = st, dt = \frac{1}{s} du$, diperoleh

$$H(s) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{s}\right)^{n-\alpha-1} \frac{1}{s} du$$

$$H(s) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{1}{s}\right)^{n-\alpha-1} \left(\frac{1}{s}\right) \int_t^\infty e^{-u} (u)^{n-\alpha-1} du$$

$$H(s) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{1}{s}\right)^{n-\alpha} \Gamma(n-\alpha)$$

$$H(s) = s^{\alpha-n} \tag{3.9}$$

Selanjutnya keempat yaitu melalui pendefinisian fungsi h yang telah dilakukan, integral fraksional dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 D^\alpha f(t) &= \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f^n(\tau) d\tau \\
 &= \int_0^t h(t-\tau) f^n(\tau) d\tau
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Berdasarkan persamaan (3.10) dan dengan menggunakan lema (3.10), dapat diperoleh penerapan integral fraksional pada transformasi Laplace $\mathcal{L}[D^\alpha f(t)]$ yaitu

$$\mathcal{L}[D^\alpha f(t)] = \int_0^t \int_0^t h(t-\tau) f^n(\tau) e^{-st} d\tau dt,$$

Kemudian dengan menggunakan teorema Fubini, diperoleh

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[D^\alpha f(t)] &= \int_0^\tau \int_0^t e^{-s(t-\tau)} h(t-\tau) f^n(\tau) dt d\tau \\
 &= \int_0^\tau \int_0^t e^{-sz} h(z) f^n(\tau) e^{-s\tau} dz d\tau, z = t - \tau \\
 &= \int_0^\tau f^n(\tau) e^{-s\tau} \int_0^z e^{-sz} h(z) dz d\tau \\
 &= \mathcal{L}(h(t)) \mathcal{L}(f^n(t))
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Berdasarkan hasil yang diperoleh dari persamaan (3.11) dan (3.9), oleh karena itu

$$\mathcal{L}[D^\alpha f(t)] = \mathcal{L}(h(t)) \mathcal{L}(f^n(t))$$

$$= s^{\alpha-n} s^n F(s)$$

$$= s^\alpha F(s), \alpha > 0$$

Kelima, setelah menghitung $\mathcal{L}[D^\alpha f(t)]$, selanjutnya akan menentukan sifat kelinieran dan sifat semigrup yang ada pada integral fraksional pada transformasi Laplace.

1. Sifat kelinieran

Misalkan $\alpha > 0$ dan k adalah suatu konstanta, maka berlaku

$$D^\alpha k f = k D^\alpha f(t)$$

Bukti: Ambil sebarang k , sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[D^\alpha k f(t)] &= s^{-\alpha} k F(s) \\ &= k s^{-\alpha} F(s) \\ &= \mathcal{L}[k D^\alpha f(t)], \alpha > 0 \end{aligned}$$

2. Sifat semigrup

Misalkan sebarang $p, q > 0$, maka berlaku sifat semigrup dari turunan fraksional berikut

$$D^p D^q f(t) = D^{p+q} f(t)$$

Bukti: Ambil sebarang $p, q > 0$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[D^p D^q f(t)] &= s^p \mathcal{L}[D^q f(t)] \\ &= s^p s^q F(s) \\ &= s^{p+q} F(s) \\ &= \mathcal{L}[D^{p+q} f(t)], p + q > 0 \end{aligned}$$

Oleh karena itu,

$$\mathcal{L}[D^p D^q f(t)] = s^{p+q} F(s)$$

Setelah melakukan point-point penting di atas, langkah selanjutnya adalah aplikasi pada fungsi $f(t)$, $kf(t)$ dan $D^p D^q f(t)$. Berikut adalah contoh penerapan dari turunan fraksional pada transformasi *Laplace*:

1. Pada fungsi $f(t)$

Contoh: Misalkan diberikan fungsi $f(t) = t^2$ dengan $\alpha = \frac{1}{2}$ akan dicari

turunan fraksional pada transformasi *Laplace* sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[D^\alpha f(t)] &= s^\alpha F(s) \\
 &= s^\alpha \int_0^\infty e^{-st} t^2 dt \\
 &= s^\alpha \left(\left[-\frac{1}{s} e^{-st} t^2 \right]_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} 2t dt \right) \\
 &= s^{\frac{1}{2}} \left(-0 + 0 + \frac{2}{s} \int_0^\infty e^{-st} t dt \right) \\
 &= s^{\frac{1}{2}} \frac{2}{s} \mathcal{L}(t) \\
 &= s^{\frac{1}{2}} \frac{2}{s} \left(\left[-\frac{1}{s} e^{-st} t \right]_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} dt \right) \\
 &= s^{\frac{1}{2}} \frac{2}{s} \left(0 - 0 + \frac{1}{s} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^\infty \right) \\
 &= s^{\frac{1}{2}} \frac{2}{s} \frac{1}{s^2} = \frac{2}{s^{\frac{5}{2}}}
 \end{aligned}$$

2. Pada fungsi $kf(t)$

Contoh: Misalkan diberikan fungsi $f(t) = t^2$ dengan $\alpha = \frac{1}{2}$ dan $k = 3$ akan

dicari turunan fraksional pada transformasi *Laplace* menggunakan sifat kelinieran

$\mathcal{L}[k D^\alpha f(t)]$ sebagai berikut:

$$\mathcal{L}[k D^\alpha f(t)] = k s^{-\alpha} F(s)$$

$$\begin{aligned}
&= 3 s^{-\alpha} \int_0^{\infty} e^{-st} t^2 dt \\
&= 3 s^{-\frac{1}{2}} \left(\left[-\frac{1}{s} e^{-st} t^2 \right]_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} 2t dt \right) \\
&= 3 \frac{1}{s^{\frac{1}{2}}} \left(-0 + 0 + \frac{2}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} t dt \right) \\
&= 3 \frac{1}{s^{\frac{1}{2}}} \frac{2}{s} \mathcal{L}(t) \\
&= \frac{1}{s^{\frac{1}{2}}} \frac{6}{s} \left(\left[-\frac{1}{s} e^{-st} t \right]_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt \right) \\
&= \frac{1}{s^{\frac{1}{2}}} \frac{6}{s} \left(0 - 0 + \frac{1}{s} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} \right) \\
&= \frac{1}{s^{\frac{1}{2}}} \frac{6}{s} \frac{1}{s^2} = \frac{6}{s^{\frac{7}{2}}}
\end{aligned}$$

3. Pada fungsi $D^p D^q f(t)$

Contoh: Misalkan diberikan $f(t) = t^2$ dengan $p = \frac{1}{2}$ dan $q = \frac{3}{2}$ maka turunan fraksional pada transformasi Laplace menggunakan sifat semigrup $D^p D^q f(t)$ adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[D^p D^q f(t)] &= s^{p+q} F(s) \\
&= s^{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} \int_0^{\infty} e^{-st} t^2 dt \\
&= s^2 \left(\left[-\frac{1}{s} e^{-st} t^2 \right]_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} 2t dt \right) \\
&= s^2 \frac{2}{s} \mathcal{L}(t) \\
&= 2s \left(\left[-\frac{1}{s} e^{-st} t \right]_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2s \left(0 - 0 + \frac{1}{s} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} \right) \\
&= 2s \frac{1}{s^2} = \frac{2}{s}
\end{aligned}$$

3.3 Kesabaran dalam Al-Quran dengan Metode Transformasi *Laplace*

Sebagaimana penjelasan sebelumnya, bahwa Allah Swt. telah mempersiapkan metode terbaik dalam menghadapi setiap masalah yaitu salah satunya dengan sabar. Kesabaran adalah menjauhkan diri dari segala hal yang tidak diinginkan dengan menempatkan diri dalam posisi yang baik.

Kesabaran mengajari manusia ketekunan dalam bekerja serta mengerahkan kemampuan untuk meriilisasikan tujuan-tujuan amaliah dan ilmiahnya. Sesungguhnya sebagian besar tujuan hidup manusia, baik di bidang kehidupan praksis misalnya sosial, ekonomi, dan politik maupun di bidang penelitian ilmiah, membutuhkan banyak waktu dan banyak kesungguhan. Oleh sebab itu, ketekunan dalam mencurahkan kesungguhan serta kesabaran dalam menghadapi kesulitan pekerjaan dan penelitian merupakan karakter penting untuk meraih kesuksesan dan mewujudkan tujuan-tujuan luhur. (Najati:467)

Seperti halnya pada fungsi integral fraksional dan turunan fraksional, yaitu fungsi yang mengikuti perkembangan ilmu dari zaman ke zaman. Fungsi ini memiliki orde yang mana orde pada umumnya berupa bilangan bulat saja menjadi bilangan riil, rasional ataupun kompleks. Dibutuhkan proses dalam penyelesaian fungsi tersebut. Salah satu metode penyelesaian yang digunakan adalah metode transformasi *Laplace*. Transformasi *Laplace* sendiri adalah suatu metode yang mentransformasikan persamaan differensial dari domain waktu t menjadi domain baru dengan variable bebas s .

Kembali pada makna sabar, yaitu bukan semata-mata menerima permasalahan tetapi juga berikhtiar untuk menyelesaikan permasalahan yang sedang dihadapi. Transformasi *Laplace* pada penelitian ini adalah bentuk ikhtiar untuk menyelesaikan fungsi integral fraksional dan turunan fraksional. Sebagaimana firman Allah Swt. di dalam surah Al-Baqarah/2:155, yaitu:

وَلَنَبْلُوَنَّكُمْ بِشَيْءٍ مِّنَ الْخَوْفِ وَالْجُوعِ وَنَقْصٍ مِّنَ الْأَمْوَالِ وَالْأَنْفُسِ وَالثَّمَرَاتِ
وَبَشِّرِ الصَّابِرِينَ

“Dan, orang-orang yang sabar dalam kesempitan, penderitaan dan dalam peperangan, mereka itulah orang-orang yang benar (imannya), dan mereka itulah orang-orang yang bertaqwa” (QS. Al-Baqarah/2:155).

Menurut tafsir jalalain yaitu dan sungguh kami akan memberimu cobaan berupa sedikit ketakutan terhadap musuh, kelaparan, kekurangan harta yang disebabkan datangnya malapetaka. Dan jiwa yang disebabkan pembunuhan, kematian, dan penyakit. Serta buah-buahan karena bahaya kekeringan, artinya kami akan menguji kamu, apakah kamu bersabar atau tidak. Dan, sampaikanlah berita gembira kepada orang-orang yang sabar bahwa mereka akan menerima ganjaran kesabaran itu berupa surga (Al-Mahalli dan As-Suyuti, 2008:79).

Sedangkan menurut tafsir Al-Qurthubi yaitu Allah akan menguji kamu agar terlihat siapa yang akan bersabar dan siapa yang akan menyimpang. Setelah itu barulah akan diberikan ganjaran untuk masing-masing reaksi, seperti yang telah dijelaskan sebelumnya. Sedikit dari ujian yang seperti ini dan sedikit juga dari cobaan yang seperti itu, takut terhadap musuh dan panik akan pertempuran. Kelaparan dengan adanya musim panceklik dan musim kemarau. Kekurangan harta yang disebabkan karena setiap hari selalu diisi berperang dengan kaum kafir. Dan buah-buahan karena sedikitnya tumbuh-tumbuhan dan pepohonan serta

dihentikannya barokah. Dan berikanlah berita gembira kepada orang-orang yang sabar yakni tentang pahala atas kesabarannya, dan pahala ini tidak terbatas dan tidak terkira (Al- Qurthubi, 2007:407-410).

Dan pahala kesabaran hanya diberikan pada hantaman pertama pada musibah saja, seperti yang disebutkan dalam hadist yang diriwayatkan oleh Al Bukhari dari Anas, bahwa Rasulullah Saw. pernah bersabda: “Sesungguhnya kesabaran (yang diganjar hanyalah) pada hantaman pertama.” Imam Muslim juga meriwayatkan hadist ini, namun lebih lengkap lagi.

Makna dari hadist ini adalah, yang dapat memperbesar pahala kesabaran adalah ketika keadannya sedang terasa sangat sulit sekali diterima dalam jiwa, yaitu biasanya terjadi saat pertama musibah datang dan sedang panas-panasnya. Kesabaran pada saat inilah yang akan menunjukkan hati yang kuat dan berketetapan. Adapun jika musibah itu telah sedikit reda, atau kehangatan musibah tersebut telah mendingin, maka siapapun dapat menahan kesabarannya. Oleh karena itu tidak besar lagi fadhilahnya.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya, maka dapat diambil kesimpulan untuk suatu bentuk aplikasi integral fraksional dan turunan fraksional pada transformasi *Laplace*, yaitu sebagai berikut:

1. Aplikasi integral fraksional pada transformasi *Laplace* memiliki beberapa tahap penyelesaian yaitu mendefinisikan fungsi Gamma, mendefinisikan integral fraksional, menghitung transformasi *Laplace* dari fungsi Gamma dan menghitung $\mathcal{L}[I^\alpha f(t)]$. Sehingga diperoleh bentuk $\mathcal{L}[I^\alpha f(t)] = s^{-\alpha}F(s), \alpha > 0$.
2. Aplikasi integral fraksional pada transformasi *Laplace* memiliki beberapa tahap penyelesaian yaitu mendefinisikan fungsi Gamma, mendefinisikan integral fraksional, menghitung transformasi *Laplace* dari fungsi Gamma dan menghitung $\mathcal{L}[I^\alpha f(t)]$. Sehingga diperoleh bentuk $\mathcal{L}[D^\alpha f(t)] = s^\alpha F(s), \alpha > 0$.

4.2 Saran

Dalam penelitian ini, aplikasi integral fraksional dan Turunan fraksional hanya diselesaikan pada metode transformasi Laplacee. Diharapkan penelitian selanjutnya dapat meneruskan membahas aplikasi integral fraksional dan turunan fraksional dalam ruang lesbegue di R, R^n dan ruang metrik, ruang morrey klasik

dan morrey diperumum. Sehingga penelitian selanjutnya diharapkan dapat memperoleh bentuk lain dari aplikasi integral fraksional dan turunan fraksional.



DAFTAR RUJUKAN

- Adam, Loverro. 2004. *Fractional Calculus: History, Definitions, and Applications for the Engineer*. University of Notre Dame
- Ad- Dimasyqi, Al-Imam Abdul Fida I.I.K. 2000. *Tafsir Ibnu Kasir. Terjemahan Bahrn Abu Bakar*. Bandung: Sinar Baru Algensindo.
- Alfiniyah, Cicik. 2010. *Operator Laplace Fraksional dan Transformasi Fouriernya*. Tesis: Institut Teknologi Bandung, Bandung.
- Al-Mahalli, Imam J dan Al-Suyuti, Imam J, 2008. *Tafsir Jalalain*. Terjemahan Bahrn Abu Bakar. Bandung: Sinar Baru Algensindo.
- Dahlan, Abdul Azis. 2001. *Ensiklopedi Hukum Islam*. Jakarta: TP Ikhtiar Baru Van Hoeve.
- Dedi, Endang. 2005. *Kalkulus I*. Malang: UM PRESS.
- Deni, Muhammad J dkk. 2017. *Kajian Dasar Integral dan Turunan Fraksional Riemann-Liouville*. Bandung: Politeknik Negeri Bandung.
- Effendy, N. & Sugiono, V.. 2013. *Matematika Teknik I*. Yogyakarta: CAPS (Center for Academic Publising Service).
- Hairur, Harir, dkk. 2016. *Integral Fraksional, Turunan Fraksional, dan Aplikasinya*. Laporan Penelitian Dosen Bersama Mahasiswa tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Kilbas, A.A. Srivastava, H.M, dan Trujillo, J.J. 2006. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Amsterdam: ELSEIVER.
- Kimeu, Joseph. 2009. *Fractional Calculus: Defnitions and Applications (Thesis)*. Kentucky: The Faculty of the Department of Mathematics. Western Kentucky University.
- Martono, Koko. 1999. *Kalkulus*. Departemen Matematika ITB: Erlangga.
- Podlubny, Igor. 1999. *Fractional Differential Equations*. California: Academi Press.
- Samko, S.G, Kilbas. A.A, dan Marichev, O.I 1983. *Fractional Integrals and Derivatives – Theory and Applications*. Amsterdam: Gordon and Breach Science Publisher.

- Schiff, J.L., 1999. *The Laplace Transform: Theory and Applications*. New York: Springer-Verlag.
- Spiegel, M.R., 1999. *Transformasi Laplace*. Jakarta: Erlangga.
- Tazi, I., 2008. *Matematika untuk Sains & Teknik Disertai Pembahasan Program Matlab 6.5*. Malang: UIN-Malang Press.
- Zuhair, 2007. *Matematika IV Modul 9 Transformasi Laplace*. Jakarta: Universitas Mercu Buana.



RIWAYAT HIDUP



Fina Aliyatul Himah, lahir di Kabupaten Bangkalan pada tanggal 18 Maret 1995, biasa dipanggil Fina atau Al, tinggal di Perum. Taman Pondok Jati blok W no.5 Kota Sidoarjo. Anak kedua dari pasangan bapak Drs. H. Ali Maki dan ibu Aminurrohmah.

Pendidikan dasarnya di tempuh di SD Siti Aminah Surabaya, lulus pada tahun 2007. Setelah itu melanjutkan ke MTs Unggulan Amanatul Ummah dan lulus pada tahun 2010. Kemudian melanjutkan pendidikan ke MBI Amanatul Ummah dan lulus pada tahun 2013. Selanjutnya, pada tahun 2013 dia menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil Jurusan Matematika.

Selama menjadi mahasiswa, dia ikut serta berpartisipasi dalam organisasi intra kampus yaitu Himpunan Mahasiswa Jurusan (HMJ) Matematika selama dua periode pada tahun 2014-2016 kemudian melanjutkan di Senat Mahasiswa (SEMA) Fakultas Sains dan Teknologi pada tahun 2016/2017 dan mengikuti organisasi extra kampus dengan menjadi Pengurus di Indonesian Moslem of Student Movement pada tahun 2013-2016.



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Fina Aliyatul Himah
NIM : 13610041
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Aplikasi Integral Fraksional dan Turunan Fraksional pada Transformasi *Laplace*
Pembimbing I : Hairur Rahman, M.Si
Pembimbing II : Ach. Nashichuddin, M.A

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1	14 Januari 2017	Konsultasi Bab I	1.
2	16 Februari 2017	Konsultasi Kajian Keagamaan Bab I	2.
3	07 April 2017	Konsultasi Bab II, Bab III	3.
4	08 April 2017	Konsultasi Kajian Keagamaan Bab II	4.
5	03 Mei 2017	Konsultasi Bab III	5.
6	04 Mei 2017	Konsultasi Bab III	6.
7	05 Mei 2017	Konsultasi Kajian Keagamaan Bab III	7.
8	10 Mei 2017	Konsultasi Bab I, Bab II, dan Bab III	8.
9	25 Agustus 2017	Konsultasi Bab I, Bab II, Bab III, dan Bab IV	9.
10	15 September 2017	Konsultasi Bab I, Bab II, Bab III, dan Abstrak	10.
11	20 September 2017	Konsultasi Keagamaan Bab I, Bab II, Bab III	11.
12	01 Oktober 2017	ACC Bab I, Bab II, Bab III, Bab IV, dan Abstrak	12.

Malang, 02 Oktober 2017
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001