ESTIMASI PARAMETER MODEL STATISTIK NONLINIER PADA FUNGSI *COBB-DOUGLAS* SECARA *MAXIMUM LIKELIHOOD* DENGAN ITERASI *METHOD OF SCORING*

SKRIPSI

OLEH
KENNY WAN MEIVRITA
13610030

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018

ESTIMASI PARAMETER MODEL STATISTIK NONLINIER PADA FUNGSI *COBB-DOUGLAS* SECARA *MAXIMUM LIKELIHOOD* DENGAN ITERASI *METHOD OF SCORING*

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untukMemenuhi Salah SatuPersyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Kenny Wan Meivrita
NIM. 13610030

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018

ESTIMASI PARAMETER MODEL STATISTIK NONLINIER PADA FUNGSI COBB-DOUGLAS SECARA *MAXIMUM LIKELIHOOD* DENGAN ITERASI *METHOD OF SCORING*

SKRIPSI

Oleh
Kenny Wan Meivrita
NIM. 13610030

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 21 November 2017

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Abdul Aziz, M.Si	Evawati Alisah, M.Pd
NIP. 19760318 200604 1 002	NIP. 19720604 199903 2 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650401 200312 1 001

ESTIMASI PARAMETER MODEL STATISTIK NONLINIER PADA FUNGSI COBB-DOUGLAS SECARA *MAXIMUM LIKELIHOOD* DENGAN ITERASI *METHOD OF SCORING*

SKRIPSI

Oleh
Kenny Wan Meivrita
NIM. 13610030

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 21 Desember 2017

Penguji Utama	:	Dr. Sri Harini, M.Si	....
Ketua Penguji	:	Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si	....
Sekretaris Penguji	:	Abdul Aziz, M.Si	....
Anggota Penguji	:	Evawati Alisah, M.Pd	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650401 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	Kenny Wan Meivrita
NIM	:	13610030
Jurusan	:	Matematika
Fakultas	:	Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	:	Estimasi Parameter Model Statistik Nonlinier pada Fungsi Produksi *Cobb-Douglas* Secara *Maximum Likelihood* Dengan Iterasi *Method of Scoring*

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 21 Desember 2017
Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL
C08A2ADF470421355
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Kenny Wan Meivrita
NIM. 13610030

MOTO

لِلنَّاسِ أَنْفَعُهُمْ النَّاسِ خَيْرُ

“Sebaik-baik manusia adalah yang paling bermanfaat bagi manusia”

(HR. Ahmad)

بِالْعِلْمِ فَعَلَيْهِ أَرَادَهُمَا وَمَنْ بِالْعِلْمِ، فَعَلَيْهِ أَرَادَالْآخِرَةَ وَمَنْ لْعِلْمِ، بِا فَعَلَيْهِ دَالدُّنْيَا أَرَا مَنْ

“Barang siapa yang menghendaki kehidupan dunia maka wajib baginya memiliki ilmu, dan barang siapa yang menghendaki kehidupan akhirat, maka wajib baginya memiliki ilmu, dan barang siapa menghendaki keduanya maka wajib baginya memiliki ilmu”

(HR. At-Tirmidzi)

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Penulis sendiri karena telah menyelesaikan skripsi ini dengan baik dan buat keluarga tercinta Ayahanda M. Tasar, ibunda Vera Munika Sari, adik-adik tersayang Ingry Vermata Ningrum dan M. Amri Al-Fajrihan serta partner kuliah M. Fitra Fiddiyansah. Terima kasih buat dukungan do'a dan semangat-nya sehingga skripsi ini bisa diselesaikan dengan baik.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Alhamdulillahi rabbil 'alamiin sebagai ungkapan syukur kepada Allah SWT yang telah melimpahkan nikmat, rahmat serta hidayahnya sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan serta arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. Abdul Haris, M.Ag selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si selaku ketua Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Abdul Aziz, M.Si selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan berbagai pengalaman yang berharga kepada penulis.
5. Evawati Alisah, M.Pd selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.

6. Segenap sivitas akademika jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.
7. Ayah dan ibu tercinta yang telah mencurahkan cinta kasih, doa, bimbingan, dan motivasi hingga terselesaikannya skripsi ini.
8. Saudara-saudara tersayang yang telah memberikan semangat kepada penulis.
9. Seluruh teman-teman di jurusan Matematika angkatan 2013 yang berjuang bersama-sama untuk meraih mimpi dan terima kasih untuk setiap kenangan indah yang dirajut bersama dalam menggapai impian.
10. Teman-teman matematika seperjuangan (Indri, Qolby, Iril, Rina, Sovil, Bella, Robin, Sukron, Mas Hendrik dan editor skripsi Rifal Andika).
11. Teman-teman kos Wiswa Asri (Mariatik Cahyani, Ain Ainul Ghofroh, Siti Fatimah, Alfiyah, Delvi, Wulan, Risna).
12. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materil.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan pembaca.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 21 Desember 2017

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR SIMBOL

β	: Parameter yang diestimasi, $\beta = \beta_1, \beta_2, \dots, n$
$\hat{\beta}$	: Penduga dari parameter β
ε	: *Error*/galat
e	: Bilangan natural $e = 2{,}174$
∞	: Tak terhingga
$\sim$	: Berdistribusi
μ	: Rata-rata populasi
N	: Normal
E	: Ekspektasi
σ^2	: Variansi populasi
δ	: Delta
$\boldsymbol{Y}$	: Vektor kolom variabel tak bebas $\boldsymbol{Y}$ berukuran $n \times 1 = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$
$\boldsymbol{X}$	: Matriks variabel bebas $\boldsymbol{X}$ berukuran $n \times k = [X_{i1},\ X_{i2}, \dots, X_{ik}]$
X_{ij}	: Unsur matriks variabel bebas X baris ke i kolom ke j
$l(\beta)$	: Fungsi *likelihood*
$L(\beta)$	: Fungsi *log-likelihood*
i	: Indeks, $i = 1,2,3, \dots, n$
I_n	: Matriks identitas berukuran n
X_i	: Nilai prediktor ke-$i = 1, 2, \dots, n$
Δ	: Selisih
R_n	: Kesalahan pemotongan
$f', f'', \dots, f^n$	: Turunan pertama, kedua, …, ke-n dari fungsi
$f(x)$	: Nilai fungsi di titik x
$(x - x_0)$	: Langkah ruang atau jarak

ABSTRAK

Meivrita, Kenny Wan. 2017. **Estimasi Parameter Model Statistik Nonlinier pada Fungsi Produksi *Cobb-Douglas* Secara *Maximum Likelihood* dengan Iterasi *Method of Scoring***. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Abdul Aziz, M.Si. (II) Evawati Alisah, M.Pd.

Kata Kunci: Estimasi parameter, model nonlinier, fungsi produksi *Cobb-Douglas*, *Maximum Likelihood*, iterasi *Method of Scoring*.

Ekonometri berperan dalam mengestimasi parameter model statistik linier dan nonlinier. Model statistik nonlinier yang dijumpai dalam permasalahan ekonomi menggunakan fungsi produksi *Cobb-Douglas*. Fungsi produksi *Cobb-Douglas* mempunyai tiga variabel, yaitu jumlah produksi, tenaga kerja dan modal. Model statistik nonlinier pada fungsi yang digunakan tidak mudah diselesaikan secara analitik, sehingga harus ditransformasikan ke dalam bentuk linier menggunakan metode *Maximum Likelihood* dengan iterasi *Method of Scoring*. Pada iterasi *Method of Scoring* memodifikasi algoritma *Newton Raphson* dengan menggunakan nilai ekspektasi pada turunan kedua. Hasil dari estimasi parameter fungsi produksi *Cobb-Douglas* secara *Method of Scoring* diimplementasikan pada data Industri Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka (ILMTA) tahun 1993-2012 di provinsi Jawa Timur, dapat disimpulkan bahwa iterasi *Method of Scoring* belum cepat konvergen saat *error* 10^{-9}.

ABSTRACT

Meivrita, Kenny Wan. 2017. **The Estimation of Nonlinier Statistical Models Paramater on *Cobb-Douglas* Production Function in *Maximum Likelihood* using *Method of Scoring* Iteration.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisor: (I) Abdul Aziz, M.Si. (II) Evawati Alisah, M.Pd.

Keywords: Parameter Estimation, Nonlinier Models, *Coob-Douglas* Production Function, *Maximum Likelihood*, *Method of Scoring* Iteration.

Econometrics has a role in estimating the parameters of linier and nonlinier statistical models. Nonlinier statistical models in the economic problems used *Cobb-Douglas* production function. *Cobb-Douglas* production functions has three variabels, namely the quantity of product, labour and capital. Nonlinier statistical models used in the function is not easily solved analytically, so that sholud be tranformed into linear form of the *Maximum Likelihood* with using *Method of Scoring* iteration. *Method of Scoring* iteration modifies the *Newton Raphson* algorithm by using the expectations value of the second derivative. The results of the parameter estimation *Cobb-Douglas* production function in *Method of Scoring* iteration is implemented at the data of Metal Industry, Textiles and Various (ILMTA) of 1993-2012 in East Java Province, that the parameter value by using the *Method of Scoring* iteration has not yet fast converged with error 10^{-9} .

ملخص

ميفريتا،كيني وان. 2017. **تقدير المعلمة نموذج الإحصائية غير الخطية على دالة الإنتاج *Cobb-Douglas* في أقصى احتمال *Maximum Likelihood* بطريقة تكرار *Method of Scoring*.** البحث الجامي. شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية بمالانج. المشرف الأول: عبد العزيز، الماجستير.، المشرف الثاني: ايفاواتي أليساه، الماجستير.

الكلمات الرئيسة: تقدير المعلمات، نموذج غير الحطية، دالة الإنتاج *Coob-Douglas* ، *Likelihood Maximum*، تكرار *Method of Scoring* .

يلعب الإقتصاد القياسي دورا في تقدير معلمات النماذج الإحصائية الخطية وغير الخطية. النموذج الإحصائي غير الخطية الموجود قي المشكلة الاقتصادية المستخدمة هو دالة الإنتاج *Coob-Douglas*. دالة الإنتاج *Coob-Douglas* ثلاثة متغيرات، وهي عدد الإنتاجات، العمالة ورأس المال. لا يمكن حل النموذج الإحصائي غير الخطي للدالة المستخدمة تحليليا بسهولة، لذلك يجب أن تتحول إلى شكل خطي باستخدام طريقة *Maximum Likelihood* احتمال بطريقة تكرار *Method of Scoring*. وفي طريقة تكرار *Method of Scoring* يعدل خوارزمية نيوتن رافسون باستخدام القيمة المتوقعة من المشتقة الثانية. ونتيجة التقرير لمعلمة الإنتاج *Coob-Douglas* بطريقة *Method of Scoring* نفذت في البيانات من صناعة المعادن والآلات والمنسوجات ومتنوع الصناعات (ILMTA) في السنة 1993-2012 في مقاطعة جاوة الشرقية، يمكن استنتاج أن تكرار *Method of Scoring* لم تكن متقاربة بسرعة خلال الخطأ 10^{-9}

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Ekonometrika adalah ilmu sosial yang merupakan integrasi dari teori ekonomi, matematika, dan statistika yang bertujuan untuk menguji kebenaran teorema-teorema ekonomi yang berupa hubungan antarvariabel ekonomi serta kuantitatif dengan menggunakan data empiris (Setiawan dkk, 2010).

Model statistik ada 2 yaitu statistik linier dan nonlinier. Model nonlinier dapat dilihat dari variabel dan parameternya. Sedangkan model nonlinier yang tidak bisa diselesaikan secara langsung dapat digunakan cara lain yaitu dengan mentransformasi ke bentuk linier setelah itu dikerjakan dengan metode yang ada seperti *Nonlinier Least Square* (NLS) dan *Maximum Likelihood Estimator* (MLE).

Model nonlinier yang digunakan yaitu model fungsi produksi *Cobb-Douglas* yang disebut fungsi produksi eksponensial. Bentuk umumnya juga sama, yakni $Y = f(X_i)$ atau dapat ditulis dalam bentuk spesifik $Y = aX^b$, dimana Y adalah variabel yang menjelaskan, a dan b adalah parameter yang diduga.

Salah satu model statistik nonlinier yang sering dijumpai di bidang ekonomi adalah fungsi produksi model *Cobb-Douglas*. Adapun bentuk model *Cobb-Douglas* yaitu:

$$Q_t = \beta_1 L_t^{\beta_2} K_t^{\beta_3} + \varepsilon_t$$

Pada persamaan di atas merupakan model *Cobb-Douglas* bersifat nonlinier dalam parameter (Aziz, 2010). Kelebihan *Cobb-Douglas* ini adalah pangkat menunjukkan tingkat elastisitas produksi. Sedangkan kelemahannya adalah dalam interpretasi perlu dilinierkan dengan proses logaritma (Masyhuri, 2007).

Metode yang digunakan yaitu *Maximum Likelihood* dengan model regresi nonlinier pada fungsi produksi *Cobb Douglas*. Metode *Maximum Likelihood* adalah metode yang memaksimumkan fungsi *Likelihood*, adapun iterasi yang dapat digunakan untuk menaksir model *Method of Scoring*, yang mana merupakan modifikasi dari algoritma *Newton Raphson* dengan menggunakan nilai ekspektasi turunan kedua.

Estimasi atau perkiraan menggunakan sampel data untuk menentukan nilai dari parameter-parameter yang belum diketahui. Pada model statistik sampel data merupakan variabel yang akan ditentukan nilainya agar dapat membentuk model yang diinginkan. Parameter yang akan diamati terlebih dahulu bentuknya linier atau nonlinier sehingga dapat diestimasi dengan model yang sesuai.

Estimasi yang dicantumkan dalam Al-Qur'an pada surat Al-Baqarah ayat 214 yang berbunyi:

أَمْ حَسِبْتُمْ أَن تَدْخُلُوا۟ ٱلْجَنَّةَ وَلَمَّا يَأْتِكُم مَّثَلُ ٱلَّذِينَ خَلَوْا۟ مِن قَبْلِكُم ۖ مَّسَّتْهُمُ ٱلْبَأْسَآءُ وَٱلضَّرَّآءُ وَزُلْزِلُوا۟ حَتَّىٰ يَقُولَ ٱلرَّسُولُ وَٱلَّذِينَ ءَامَنُوا۟ مَعَهُۥ مَتَىٰ نَصْرُ ٱللَّهِ ۗ أَلَآ إِنَّ نَصْرَ ٱللَّهِ قَرِيبٌ ﴿٢١٤﴾

Artinya:

"Ataukah kamu mengira bahwa kamu akan masuk surga padahal belum datang kepadamu (cobaan) seperti (yang dialami) orang-orang terdahulu sebelum kamu. Mereka ditimpa kemelaratan, penderitaan, dan diguncang (dengan berbagai cobaan), sehingga rasul dan orang-orang yang beriman bersamanya berkata, "kapankah datang pertolongan Allah?" ingatlah. Sesungguhnya pertolongan Allah itu dekat."

Pada ayat tersebut Allah SWT menjelaskan bahwa orang-orang yang mengira akan masuk surga dengan mudahnya tanpa melalui masa-masa sulit seperti orang dahulu yang telah Allah SWT timpakan segala bentuk cobaan agar mereka mau dekat kepada Allah SWT. Dengan adanya cobaan yang Allah SWT limpahkan sehingga orang-orang akan mengetahui bagaimana ujian orang yang mendambakan surga.

Dan untuk mencapai surga tidak mudah hanya dengan kita melakukan amalan ibadah wajib saja melainkan segala hal yang telah ditetapkan dan dilakukan oleh para Rasul-Nya. Allah SWT maha mengetahui siapa yang berhak masuk ke dalam surga-Nya dengan ketetapan yang telah dibuat.

Noerhayati (2016) telah melakukan perbandingan estimasi *Quadratic Hill Climbing* dengan *Newton Raphson* menggunakan metode *Nonlinier Least Square*, dimana estimasi *Quadratic Hill Climbing* merupakan iterasi yang paling baik digunakan dengan memiliki *error* yang kecil. Peneliti tersebut menyarankan untuk melakukan perbandingan menggunakan metode lain seperti *Maximum Likelihood*. Dalam penelitian ini iterasi yang digunakan yaitu *Method of Scoring*, karena iterasi ini merupakan pengembangan dari iterasi *Newton Raphson*. Berdasarkan penjelasan latar belakang di atas, maka judul dalam penelitian ini adalah "Estimasi Parameter Model Statistik Nonlinier pada Fungsi *Cobb-Douglas* Secara *Maximum Likelihood* dengan Iterasi *Method Of Scoring*"

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalahnya adalah

1. Bagaimana bentuk estimasi parameter pada fungsi produksi *Cobb-Douglas* menggunakan metode *Maximum Likelihood* dengan iterasi *Method of Scoring*?
2. Bagaimana implementasi fungsi *Cobb-Douglas* menggunakan metode *Maximum Likelihood* dengan iterasi *Method of Scoring*?

3. Bagaimana hasil perbandingan antara iterasi *Method of Scoring* dengan iterasi *Quadratic Hill Climbing* pada estimasi fungsi produksi *Cobb-Douglas*?

1.3 Tujuan Masalah

Tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Untuk mengetahui bentuk estimasi parameter fungsi produksi *Cobb-Douglas* menggunakan metode *Maximum Likelihood* dengan iterasi *Method of Scoring*.
2. Untuk mengetahui implementasi fungsi *Cobb-Douglas* menggunakan metode *Maximum Likelihood* dengan iterasi *Method of Scoring*.
3. Untuk mengetahui hasil perbandingan antara iterasi *Method of Scoring* dengan iterasi *Quadratic Hill Climbing* pada estimasi fungsi produksi *Cobb -Douglas*.

1.4 Batasan Masalah

Batasan masalah dari penelitian ini adalah:

1. Untuk bentuk mengestimasi parameter *Maximum Likelihood* dengan menggunakan distribusi normal berdasarkan data peneliti sebelumnya.
2. Data yang digunakan yaitu Industri Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka (ILMTA) Tahun 1993-2012 di provinsi Jawa Timur dari skripsi Noerhayati (2016).
3. Menggunakan nilai *error* 10^{-9}, 10^{-7} dan 10^{-6}, taraf signifikan $\alpha = 0.05$ serta nilai $\beta_1 = 0.7$, $\beta_2 = 0.3$ dan $\beta_3 = 1$.

1.5 Manfaat

1. Dengan memahami estimasi fungsi produksi *Cobb-Douglas* menggunakan metode *Maximum Likelihood* dengan iterasi *Method of Scoring* dan mampu mengaplikasikan dalam model matematika.
2. Data ILMTA dapat diaplikasikan menggunakan metode *Maximum Likelihood* secara iterasi *Method of Scoring*.
3. Dengan mengetahui hasil perbandingan kedua iterasi maka diperoleh iterasi yang lebih cepat konvergen.

1.6 Sistematika Penulisan

Dalam penulisan skripsi ini, sistematika penulisan yang digunakan oleh penulis terdiri dari empat bab yang pada setiap babnya terdiri dari subbab. Adapun sistematikanya dapat dijelaskan sebagai berikut:

BAB I : Pendahuluan, adapun subbabnya yaitu : latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat dan sistematika penulisan.

BAB II : Kajian pustaka, berisi tentang materi-materi yang mendukung pembahasan estimasi parameter, model statistik, model statistik nonlinier, fungsi produksi *Cobb-Douglas*, distribusi normal, distribusi peluang gabungan, nonlinear *maximum likelihood*, iterasi *Method of Scoring*.

BAB III : Metode Penelitian, berisi tentang tahapan dalam mengerjakan pembahasan.

BAB IV : Pembahasan, pada bab ini akan dijelaskan secara rinci proses estimasi parameter dengan metode nonlinear maximum *likelihood*, estimasi dengan iterasi *Method of Scoring*, perbandingan hasil estimasi dengan penelitian sebelumnya, dan kajian atau integrasi matematika dengan Al-Quran dan hadist.

BAB V : Penutup, pada bab ini berisi kesimpulan dari hasil dari penulisan skripsi, dan saran bagi penelitian selanjutnya.

BAB II
KAJIAN PUSTAKA

2.1 Matriks dan Operasi Matriks

2.1.1 Pengertian Matriks

Matriks adalah susunan angka atau bilangan, variabel atau parameter yang berbentuk empat persegi dan biasanya ditutup dengan tanda kurung. Tanda yang menutupi matriks dapat berupa tanda: tanda kurung siku-siku [ ], tanda kurung biasa ( ), dua garis sejajar. Bilangan, variabel, atau parameter yang berada di dalam tanda kurung tersebut merupakan anggota atau elemen dari matriks. Bentuk umum dari matriks $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ adalah (Kalangi, 2012):

$$\boldsymbol{A}_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

Perhatikan bahwa elemen disebut elemen ij atau entri ij dari matriks $\boldsymbol{A}$ yang terletak pada baris i dan kolom j atau sering kali matriks tersebut hanya ditulis sebagai $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ (Kusumawati, 2009).

2.1.2 Operasi Matriks

Dua matriks $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{B}$ dikatakan sama yaitu $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ apabila $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{B}$ mempunyai baris dan kolom yang sama dan di samping itu elemen-elemen pada baris dan kolom yang bersangkutan harus sama artinya $a_{ij} = b_{ij}$, untuk semua nilai i dan j, di mana (Supranto, 2003):

a_{ij} = elemen matriks $\boldsymbol{A}$ dari baris i dan kolom j

b_{ij} = elemen matriks $\boldsymbol{B}$ dari baris i dan kolom j

Menurut Anton dkk, (2004) macam-macam operasi pada matriks, antara lain:

a. Penjumlahan dan Pengurangan

Jika $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{B}$ adalah matriks-matriks dengan ukuran yang sama, maka jumlah $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ adalah matriks yang diperoleh dengan menjumlahkan entri-entri pada $\boldsymbol{B}$ dengan entri-entri yang bersesuaian pada $\boldsymbol{A}$ dan selisih $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangkan entri-entri pada A yang bersesuaian pada $\boldsymbol{B}$. Matriks dengan ukuran yang berbeda tidak dapat dijumlahkan atau dikurangkan.

Dalam notasi matriks, jika $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$ dan $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$ memiliki ukuran yang sama, maka

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) &= a_{ij}+b_{ij}\\ (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) &= a_{ij}-b_{ij}\end{aligned} \tag{2.2}$$

b. Perkalian

Jika $\boldsymbol{A}$ adalah matriks $m\times r$ dan $\boldsymbol{B}$ adalah matriks $r\times n$ maka hasil kali (*product*) $\boldsymbol{AB}$ adalah matriks $m\times n$ yang entri-entrinya ditentukan. Untuk mencari entri pada baris i dan kolom j dari $\boldsymbol{AB}$, pisahkanlah baris i dari matriks $\boldsymbol{A}$ dan kolom j dari matriks $\boldsymbol{B}$. Kalikan entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut dan jumlahkan hasil yang diperoleh.

Definisi perkalian matriks mensyaratkan jumlah kolom dari faktor pertama $\boldsymbol{A}$ harus sama dengan jumlah baris dari faktor kedua $\boldsymbol{B}$ agar dapat dibemtuk hasilkali $\boldsymbol{AB}$. Jika syarat ini tidak dipenuhi, maka hasil kali tidak dapat didefinisikan. Cara yang mudah untuk menentukan apakah hasil kali dari dua matriks dapat didefinisikan adalah dengan menuliskan ukuran dari matriks pertama dan kemudian di sisi kanannya menuliskan ukuran dari matriks kedua.

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{AB} \\ (m \times r) & (r \times n) & (m \times n) \end{array}$$

2.1.3 Transpose Matriks

Transpose suatu matriks adalah matriks yang barisnya saling dipertukarkan menjadi kolom atau sebaliknya kolom menjadi baris. Jika suatu matriks $\boldsymbol{A}$ yang berdimensi $m \times n$, maka transpose matriks $\boldsymbol{A}$ adalah matriks yang berdimensi $n \times m$. Tanda transpose suatu matriks $\boldsymbol{A}$ biasanya dinotasikan dengan tanda $\boldsymbol{A}'$ atau $\boldsymbol{A}^T$. Tanda T di atas huruf $\boldsymbol{A}$ merupakan singkatan dari transpose (Kalangi, 2012).

Sifat-sifat transpose suatu matriks, antara lain (Anton dkk, 2004):

a. $\left((\boldsymbol{A}^T)\right)^T = A$

b. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{B}^T$ dan $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{A}^T - \boldsymbol{B}^T$

c. $(k\boldsymbol{A})^T = k\boldsymbol{A}^T$, dengan k adalah skalar sebarang

d. $(\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$

2.2 Model Statistik

2.2.1 Model Statistik Linier

Istilah linier dapat ditafsirkan dengan dua cara berbeda (Firdaus, 2004):

a. Linieritas dalam Variabel

Linieritas dalam variabel yaitu ekspektasi (harapan bersyarat) dari Y merupakan sebuah fungsi linier dari X_i, seperti:

$$E(Y_i \mid X_i) = \beta_1 + \beta_2 X_i,\ i = 1, 2, 3, \ldots, n \tag{2.3}$$

Suatu fungsi $Y = f(x)$ dikatakan linier dalam variabel jika X berpangkat satu, sedangkan fungsi yang berbentuk:

$$E(Y_i \mid X_i) = \beta_1 + \beta_2 X_i^2 \tag{2.4}$$

bukan merupakan fungsi linier dalam variabel karena variabel X berpangkat dua. Akan tetapi fungsi tersebut dapat juga dikatakan sebagai fungsi linier jika X_i^2 diganti dengan Z_i, seperti:

$$E(Y_i \mid X_i) = \beta_1 + \beta_2 Z_i \tag{2.5}$$

b. Linieritas dalam Parameter

Interpretasi kedua dari linieritas adalah bahwa ekspektasi bersyarat dari Y_i, $E(Y_i \mid X_i)$ adalah sebuah fungsi linier dari parameter-parameternya, parameter β bisa saja linier atau bisa juga tidak linier untuk variabel X-nya. Dalam hal ini, contoh linier dalam parameter adalah:

$$E(Y_i \mid X_i) = \beta_1 + \beta_2 X_i^2 \tag{2.6}$$

Sedangkan persamaan:

$$E(Y_i \mid X_i) = \beta_1 + \beta_2^{\beta_3} X_i \tag{2.7}$$

bukan merupakan fungsi linier dalam parameter karena β_2 tidak berpangkat satu, sehingga dalam hal ini, $\beta_2^{\beta_3}$ tidak dapat diganti dengan β_4.

Dari kedua interpretasi mengenai linieritas, linieritas dalam parameter relevan terhadap pembentukan teori regresi. Oleh karena itu, terminologi regresi "linier" akan selalu berarti sebuah regresi yang linier dalam parameter-parameternya, β-nya (yaitu parameternya) berpangkat satu saja. Jadi, $E(Y_i \mid X_i) = \beta_1 + \beta_2 X_i$, yang linier untuk keduanya, parameter dan variabel. Sedangkan

$E(Y_i \mid X_i) = \beta_1 + \beta_2 X_i^2$, yang linier dalam parameter, namun tidak linier dalam variabel X (Gujarati, 2010).

Menurut Johnson dkk (1998), model statistik linier dapat digeneralisasikan menjadi lebih dari satu k variabel. Persamaan model statistik linier dalam k variabel adalah sebagai berikut:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_k X_k + \varepsilon \tag{2.8}$$

merupakan persamaan regresi linier dengan respon tunggal. Pada persamaan (2.8), Y adalah variabel dependen, β adalah koefisien regresi, sedangkan X adalah variabel independen dan ε adalah *error*.

Jika pencarian variabel dependen dan nilai gabungan variabel independen yang dinyatakan dengan model secara komplit, maka dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} y_1 &= \beta_0 + \beta_1 X_{11} + \beta_2 X_{12} + \ldots + \beta_k X_{1k} + \varepsilon_1 \\ y_2 &= \beta_0 + \beta_1 X_{21} + \beta_2 X_{22} + \ldots + \beta_k X_{2k} + \varepsilon_2 \\ &\vdots \\ y_n &= \beta_0 + \beta_1 X_{n1} + \beta_2 X_{n2} + \ldots + \beta_k X_{nk} + \varepsilon_n \end{aligned} \tag{2.9}$$

Persamaan (2.9) dapat dinyatakan dalam bentuk matriks yaitu,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \cdots x_{k1} \\ 1 & x_{21} & \cdots x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \cdots x_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

Dari matriks tersebut dapat dituliskan bentuk umum model statistik linier sebagai berikut:

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \varepsilon \tag{2.11}$$

2.2.2 Model Statistik Nonlinier

Bentuk umum dari model statistik nonlinier adalah

$$Y_i = f\left(X_i, \beta\right) + \varepsilon_i, \text{ untuk } i = 1, 2, \ldots, n \qquad (2.12)$$

dengan $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ akibatnya, $Y_i \sim N(f(X_i, \beta), \sigma^2)$ dengan, $f(X_i, \beta)$ yaitu fungsi nonlinier dalam parameter β. Ada dua cara menaksir β pada model statistik nonlinier, yaitu dengan metode *nonlinear least square* dan *maximum likelihood* (Aziz, 2010).

Model nonlinier diklasifikasikan menjadi linier intrinsik dan nonlinier intrinsik. Model linier intrinsik dapat ditransformasikan menjadi bentuk linier, sedangkan model nonlinier intrinsik tidak dapat ditransformasikan menjadi bentuk linier. Regresi nonlinier mengandung parameter bersifat nonlinier, dimana turunan persamaan terhadap salah satu parameter adalah fungsi dari parameter lain (Draper dkk, 1992).

2.3 Macam-Macam Distribusi

2.3.1 Distribusi Normal

Pada abad ke-18 Karl Gauss mengemukakan bahwa variabel-variabel dalam ilmu sosial maupun ilmu pengetahuan alam banyak yang memiliki distribusi normal dengan ciri-ciri berikut (Mulyono, 2006):

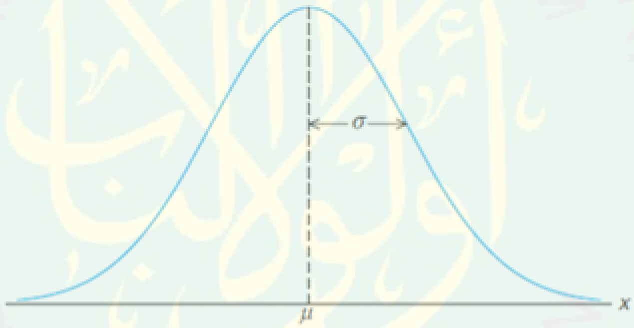
a. Kurvanya mempunyai puncak tunggal.
b. Kurvanya berbentuk seperti lonceng.
c. Rata-rata terletak ditengah distribusi dan distribusinya simetris di sekitar garis tegak lurus yang ditarik melalui rata-rata.

d. Kedua ekor kurva memanjang tak terbatas dan tak pernah memotong sumbu horizontal.

Menurut Sembiring (1995) distribusi yang penting dalam statistik adalah distribusi normal atau sering pula disebut distribusi Gauss. Distribusi normal pertama kali diperkenalkan oleh Abraham De Moivre seorang ahli matematika berkebangsaan Perancis yang melarikan diri ke Inggris sekitar tahun 1685. Fungsi dari distribusi normal adalah

$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right)} \tag{2.13}$$

dengan $e = 2{,}71828 \ldots$ dan $\pi = 3{,}14159$.



Gambar 2.1 Kurva Distribusi Normal

Distribusi ini mempunyai rataan μ dan variansi σ^2. Grafiknya mirip lonceng dan tertentu sepenuhnya bila μ dan σ^2 diketahui. Suatu peubah acak X yang berdistribusi normal dengan rataan μ dan variansi σ^2 sering disingkat dengan lambang $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ (Sembiring, 1995).

Distribusi normal dengan rataan 0 dan variansi 1 atau ditulis $N(0,1)$. Untuk suatu distribusi $N(\mu, \sigma^2)$ berlaku (Sembiring, 1995):

1. $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0{,}6828 = 0{,}68$
2. $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0{,}9544 = 0{,}95$

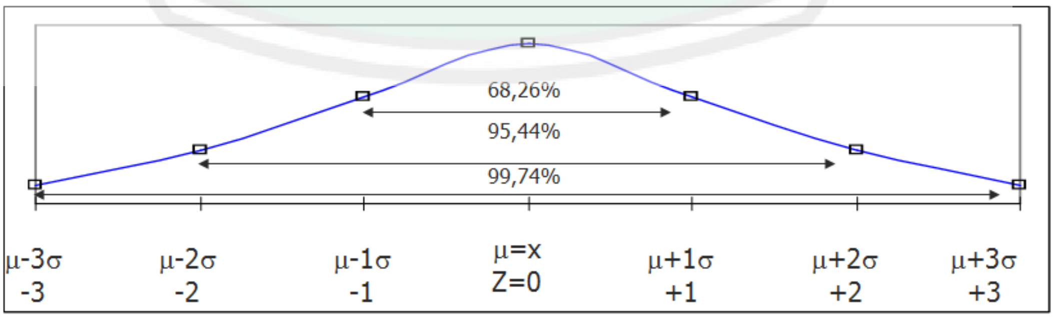
3. $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 0{,}9774 = 0{,}98$

Kita inginkan rata-rata yang terletak ditengah seperti $\mathrm{P}(-1.96 < \mathrm{X} < 1.96)$. Karena distribusi normal adalah simetris, diketahui bahwa $\mathrm{P}(-1.96 < \mathrm{X} < 0) = 0.4750$. Dapat diperoleh,

$$\mathrm{P}(-1.96 < \mathrm{X} < 1.96) = \mathrm{P}(-1.96 < \mathrm{X} < 0) + (0 < \mathrm{X} < 1.96)$$
$$= 0.4750 + 0.4750 = 0.9500$$

maka interval $-1.96 < \mathrm{X} < 1.96$ atau "interval 2σ" terdiri dari 95% dari daerah dibawah kurva normal (sebenarnya $X = 1.96$ menghasilkan 95% daerah). Karena titik tidak memiliki daerah dalam distribusi kontinu maka peluang $\mathrm{P}(-1.96 \leq \mathrm{X} \leq 1.96)$ sama seperti $\mathrm{P}(-1.96 < \mathrm{X} < 1.96)$ untuk kesederhanaan saja (Doane, 2007).

1. $P(-1.00 < X < 1.00) = 2 \times P(0 < X < 1.00) = 2 \times 0.3413 = 0.6826 = 68.26\%$
2. $P(-2.00 < X < 2.00) = 2 \times P(0 < X < 2.00) = 2 \times 0.4772 = 0.9544 = 95.44\%$
3. $P(-3.00 < X < 3.00) = 2 \times P(0 < X < 3.00) = 2 \times 0.4987 = 0{,}9974 = 99.74\%$



Gambar 2.2 Daerah Kurva Normal dengan $\boldsymbol{\mu \pm k\sigma}$

2.3.2 Fungsi Peluang Gabungan

Misalkan X adalah variabel acak maka fungsi kepadatan peluang bersama (*joint p.d.f*) pada variabel acak diskrit X didefinisikan sebagai (Bain, 1991):

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_n = x_n) \qquad (2.14)$$

Suatu peubah acak X yang berdistribusi normal dengan rataan μ dan variansi σ^2, bila peubah acak X saling bebas maka bentuk fungsi kepadatan peluang bersama sesuai persamaan (2.13) menjadi (Sembiring, 1995):

$$\begin{aligned} f(X_1, ..., X_n) &= f(X_1 \cap X_2 ... \cap X_n) \\ &= f(X_1) f(X_2) ... f(X_n) \\ &= \prod_{i=1}^{n} f(X_i) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[\left(-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \right) \right] \right) \end{aligned} \qquad (2.15)$$

2.4 Deret Taylor

Deret Taylor merupakan dasar untuk menyelesaikan masalah dalam metode numerik terutama penyelesaian persamaan differensial. Jika perhitungan dilakukan dilakukan dengan fungsi yang sesungguhnya maka akan menghasilkan solusi sejati, dan jika perhitungan dilakukan dengan fungsi hampiran menghasilkan solusi hampiran (Munir, 2008).

Menurut Bambang (2002), andaikan f dan semua turunannya, $f', f'', f''', ...,$ kontinu di dalam selang $[a, b]$. Misalkan $x_0 \in [a, b]$, maka untuk nilai-nilai x disekitar x_0 dan $x \epsilon [a, b]$, $f(x)$ dapat diperluas (diekspansi) ke dalam deret Taylor berikut:

$$f(x) \cong f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^n(x_0) + R_n \quad (2.16)$$

dengan

$f(x)$: nilai fungsi di titik x

$f', f'', \ldots, f^n$: turunan pertama, kedua, …, ke-n dari fungsi

$(x - x_0)$: langkah ruang atau jarak

R_n : kesalahan pemotongan

Dalam persamaan tersebut kesalahan pemotongan R_n diberikan dalam bentuk sebagai berikut:

$$R_n = f^{(n+1)}(x_i)\frac{\Delta x^{n+1}}{(n+1)!} + f^{(n+2)}(x_i)\frac{\Delta x^{n+2}}{(n+2)!} + \ldots \quad (2.17)$$

Berikut adalah deret Taylor orde nol sampai orde dua:

a. Memperhitungkan suku pertama (Orde Nol)

Apabila hanya memperhitungkan suku pertama dari ruas kanan maka persamaan (2.26) dapat ditulis dalam bentuk:

$$f(x) \cong f(x_0) \quad (2.18)$$

Nilai f pada titik (x_0) sama dengan nilai (x), perkiraan tersebut benar jika fungsi yang diberikan adalah konstan.

b. Memperhitungkan suku kedua (Orde 1)

Bentuk deret Taylor orde satu yang memperhitungkan dua suku pertama dapat ditulis dalam bentuk:

$$\begin{aligned} f(x) &\cong f(x_0) + f'(x_0)\frac{\Delta x}{1!} \\ &= f(x_0)\frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!} \end{aligned} \quad (2.19)$$

yang merupakan bentuk persamaan garis lurus (linier).

c. Memperhitungkan suku ketiga (Orde 2)

Bentuk deret Taylor orde dua yang memperhitungkan tiga suku pertama dapat dituliskan dalam bentuk:

$$\begin{aligned} f(x) &\cong f(x_0) + f'(x_0)\frac{\Delta x}{1!} + f''\frac{\Delta x^2}{2!} \\ &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} \qquad (2.20) \\ &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!} + \frac{(x-x_0)f''(x_0)(x-x_0)}{2!} \end{aligned}$$

2.5 Estimasi

Statistika inferensi adalah metode statistikan yang digunakan untuk menarik inferensi atau rampatan atau kesimpulan dari suatu populasi dengan informasi dari sampel yang diambil dari populasi tersebut. Dalam metode klasik, inferensi didasarkan sepenuhnya pada informasi yang diperoleh melalui sampel acak yang diambil dari populasi. Secara garis besar statistika inferensi dapat dibagi dua, yaitu penaksiran atau estimasi dan pengujian hipotesis (Walpole, 1995).

Secara umum estimasi adalah dugaan atas sesuatu yang akan terjadi dalam kondisi tidak pasti. Estimasi adalah keseluruhan proses yang menggunakan sebuah estimator untuk menghasilkan sebuah estimasi dari suatu parameter. Data yang digunakan untuk melakukan estimasi parameter populasi adalah statistik sampel sebagai estimator (Harinaldi, 2005).

Estimasi (penaksiran) parameter menggunakan sampel data untuk menentukan inferensi tentang θ dan σ^2. Inferensi-inferensi ini mengambil titik khusus (*point estimates*) atau menentukan range nilai-nilai parameter (*interval of estimates*) (Aziz, 2010).

Metode estimasi pada hakikatnya dibedakan menjadi 2 macam, yakni (Boedijoewono, 2007):

1. Estimasi Titik adalah pendugaan nilai populasi atas dasar satu nilai dari sampel. Cara pendugaan atas dasar satu nilai ini sangat sederhana, namun nilai penduga yang demikian ini sukar sekali dapat identik dengan parameter yang kita duga. Apabila nilai penduga dapat identik dengan parameternya, hal ini kemungkinan besar disebabkan oleh faktor kebetulan saja.
2. Estimasi Interval adalah pendugaan terhadap parameter berdasarkan suatu interval, di dalam interval mana kita harapkan dengan keyakinan tertentu parameter itu akan terletak. Hasil dari pendugaan interval ini diharapkan akan lebih obyektif. Pendugaan interval akan memberikan kita nilai parameter dalam suatu interval dan bukan nilai tunggal.

2.5.1 Sifat-Sifat Estimasi

Menurut Yitnosumarto (1990), estimator (penduga) adalah anggota peubah acak dari statistik yang mungkin untuk sebuah parameter (anggota peubah diturunkan). Besaran sebagai hasil penerapan estimasi terhadap data dari semua contoh disebut nilai duga (*estimator value*).

Adapun sifat-sifat dalam estimasi menurut Yitnosumarto (1990) adalah sebagai berikut:

1. Tak Bias

Suatu estimasi dikatakan tak bias jika estimasi tersebut mendekati nilai sebenarnya dari parameter yang diestimasi. Misalnya terdapat parameter β (kita gunakan parameter β agar tidak terikat pada parameter θ dan σ^2 misalnya). Jika $\hat{\beta}$ merupakan estimasi tak bias (*unbiased estimator*) dari parameter β, maka rata-rata sampel dari populasi nilainya sama dengan β, dirumuskan:

$$E\left(\hat{\beta}\right) = \beta \tag{2.21}$$

2. Efisien

Jika distribusi sampel dari dua statistik memiliki *mean* atau ekspektasi yang sama, maka statistik dengan variansi yang lebih kecil disebut dengan *estimator* efisien dari *mean*, sementara statistik yang lain disebut *estimator* tak efisien, atau secara matematis dapat ditulis sebagai berikut:

$$\text{Var}\left(\hat{\beta}_1\right) < \text{Var}\left(\hat{\beta}_2\right) \tag{2.22}$$

Adapun nilai-nilai yang berkorespondensi dengan statistik-statistik ini masing-masing disebut sebagai estimasi efisien dan estimasi tak efisien.

3. Konsisten

Suatu estimasi dikatakan konsisten apabila nilai estimasi tersebut akan sama dengan parameter yang akan diestimasi. Misalnya $\hat{\beta}$ merupakan estimasi dari β dengan sampel acak berukuran β yang menuju tak hingga dan variansi mendekati 0 maka $\hat{\beta}$ mendekati β, dirumuskan:

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\beta - E\left(\beta\right)\right)^2 = 0 \tag{2.23}$$

2.5.2 Metode Maximum Likelihood

2.5.2.1 Metode Maximum Likelihood Satu Variabel

Misalkan X variabel random berdistribusi normal berukuran n, $N(\mu,\sigma^2)$. Metode maximum likelihood akan memilih nilai μ yang belum diketahui sedemikian hingga memaksimum nilai probabilitas (*likelihood*) dari gambaran sampel secara acak yang telah diperoleh secara aktual. Kita dapat menghitung probabilitas sampel random dari fungsi kepadatan peluang gabungan (*joint p.d.f*) untuk $X_1, X_2, \dots, X_n$, yaitu (Aziz, 2010)

$$\begin{aligned} f(X_1,\dots,X_n) &= f(X_1)f(X_2)\dots f(X_n) = \textstyle\prod_{(i=1)}^{n} f(X_i) \\ &= \prod_{i=1}^{n} f(X_i) \\ &= \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\right)\right] \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \prod_{i=1}^{n}\left[\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\right)\right] \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left[\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\right)\right] \end{aligned} \tag{2.24}$$

Fungsi peluang gabungan berdasarkan parameter-parameter yang diketahui adalah μ, σ^2, maka peluang bersyaratnya seperti:

$$f\left(X_1,\dots,X_n \mid \mu,\sigma^2\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left[\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\right)\right] \tag{2.25}$$

Sedangkan bila tidak diketahui, artinya yang diketahui X maka fungsinya menjadi:

$$l(\mu) = f\left(\mu \mid X_1,\dots,X_n\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left[\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\right)\right] \tag{2.26}$$

yang disebut sebagai fungsi *likelihood*-nya. Untuk menyelesaikan fungsi *likelihood*-nya akan lebih mudah jika ditransformasikan ke dalam bentuk *ln* (*logaritma natural*), sehingga dapat ditulis menjadi:

$$
\begin{aligned}
L(\mu \mid X) &= \ln\ l(\mu) \\
&= \ln\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left[\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\right)\right]\right] \\
&= \ln\left[\left(\sqrt{2\pi\sigma^2}\right)^{-n/2} \exp\left[\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\right)\right]\right] \\
&= \ln\left(\left(\sqrt{2\pi\sigma^2}\right)^{-n/2}\right) + \ln\left(\exp\left[\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\right)\right]\right) \qquad (2.27) \\
&= -\frac{n}{2}\ln\left(\sqrt{2\pi\sigma^2}\right) + \left(\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\right)\right) \\
&= -\frac{n}{2}\ln\left(\sqrt{2\pi\sigma^2}\right) - \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\right)\right)
\end{aligned}
$$

dan, untuk memaksimumkan fungsi peluangnya diperlukan

$$
\begin{aligned}
\frac{dL(\mu \mid X)}{d\mu} &= 0 - \frac{1}{2}(-2)\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)\left[(X_1-\mu)+(X_2-\mu)+\ldots+(X_n-\mu)\right] \\
&= \frac{1}{\sigma^2}\left[(X_1-\mu)+(X_2-\mu)+\ldots+(X_n-\mu)\right] \qquad (2.28) \\
&= \frac{1}{\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu\right]
\end{aligned}
$$

menyamakan turunan pertama dengan nol dan menyelesaikannya menghasilkan,

$$\frac{dL(\mu \mid X)}{d\mu} = \frac{1}{\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu\right]$$

$$0 = \left[\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu \qquad (2.29)$$

$$n\mu = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Sedangkan turunan kedua

$$\frac{d^2L(\mu \mid X)}{d^2\mu} = -\frac{n}{\sigma^2} \qquad (2.30)$$

selalu bernilai negatif untuk $0 < \mu < 1$, sehingga μ merupakan nilai maksimum global untuk fungsi *log-likelihood*.

2.5.2.2 Metode *Maximum Likelihood* Multivariabel

Misalkan regresi linier

$$Y = X\hat{\beta} + \varepsilon$$

dimana

$$\boldsymbol{Y}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}_{n\times k} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1k} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \dots & X_{nk} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta}_{k\times 1} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}$$

dengan $Y_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ maka diperoleh:

$$\begin{aligned} E(Y_i) &= E\left(X\hat{\beta}+\varepsilon\right) \\ &= E\left(X\hat{\beta}\right)+E(\varepsilon) \\ &= X\ E\left(\hat{\beta}\right)+0 \\ &= X\hat{\beta} \end{aligned} \tag{2.31}$$

Jadi, fungsi *likelihood*-nya berdasarkan persamaan (2.31) adalah

$$\begin{aligned} l(\beta) = f(\beta\,|\,Y) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left[\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}\frac{(Y_i - X_i\beta)^2}{\sigma^2}\right)\right] \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(Y - X\beta)^T(Y - X\beta)\right] \end{aligned} \tag{2.32}$$

sedangkan fungsi *log-likelihood*-nya adalah

$$\begin{aligned} L(\beta\,|\,Y) &= \ln\ l(\beta) \\ &= \ln\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(Y - X\beta)^T(Y - X\beta)\right]\right] \\ &= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n - \frac{1}{2\sigma^2}\left[\left(Y^T - \beta^T X^T\right)(Y - X\beta)\right] \\ &= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n - \frac{1}{2\sigma^2}\left[Y^TY - Y^TX\beta - \beta^TX^TY + \beta^TX^TX\beta\right] \end{aligned} \tag{2.33}$$

Untuk memaksimumkan fungsi, diperlukan:

$$\frac{\partial(Y^TX\beta)}{\partial\beta} = \left(\frac{\partial}{\partial\beta^T}\left(Y^TX\beta\right)\right)^T = \left(Y^TX\right)^T = X^TY$$

$$\frac{\partial\left(\beta^T X^T Y\right)}{\partial \beta} = \left(\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\beta^T X^T Y\right)\right) = X^T Y$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\left(\beta^T X^T X \beta\right)}{\partial \beta} &= \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\beta^T X^T X \beta\right) + \left(\frac{\partial}{\partial \beta^T}\left(\beta^T X^T X \beta\right)\right)^T \\
&= X^T X \beta + \left(\beta^T X^T X\right)^T \\
&= X^T X \beta + X^T X \beta \\
&= 2 X^T X \beta
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L(\beta | Y)}{\partial \beta} &= 0 - \frac{1}{2\sigma^2}\left[0 - X^T Y - X^T Y + 2 X^T X \beta\right] \\
&= -\frac{1}{2\sigma^2}\left[-2 X^T Y + 2 X^T X \beta\right]
\end{aligned} \qquad (2.34)$$

Menyamakan turunan pertama pada persamaan (2.34) dengan nol diperoleh estimator β:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L(\beta | Y)}{\partial \beta} &= -\frac{1}{2\sigma^2}\left[-2 X^T Y + 2 X^T X \beta\right] \\
0 &= -\frac{1}{2\sigma^2}\left[-2 X^T Y + 2 X^T X \beta\right] \\
&= -2 X^T Y + 2 X^T X \beta \\
-2 X^T X \beta &= -2 X^T Y \\
\beta &= \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y
\end{aligned} \qquad (2.35)$$

dan turunan keduanya :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 L(\beta | Y)}{\partial^2 \beta} &= \frac{\partial L}{\partial \beta^T}\left(\frac{\partial L}{\partial \beta}\right) \\
&= \frac{\partial L}{\partial \beta^T}\left(\frac{1}{2\sigma^2}\left[2 X^T Y\right] - \frac{1}{2\sigma^2}\left[2 X^T X \beta\right]\right) \\
&= 0 - \frac{1}{\sigma^2}\left(X^T X\right) \\
&= -\frac{1}{\sigma^2}\left(X^T X\right)
\end{aligned} \qquad (2.36)$$

Sehingga benar bahwa pada persamaan (2.35) adalah maksimum untuk fungsi *log-likelihood*.

2.5.3 Estimasi Parameter Iterasi Newton Raphson

Iterasi *Newton Raphson* menggunakan deret Taylor orde 2 menggunakan model seperti berikut:

$$Y = f(X, \beta) \tag{2.37}$$

Dengan diketahui Y dan X sedangkan yang dicari parameter β dan σ^2, maka diperoleh:

$$\begin{aligned} l(\beta) &= f\left(\beta, \sigma^2 \mid Y, X\right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(Y - f(X,\beta)\right)^T \left(Y - f(X,\beta)\right)\right] \end{aligned} \tag{2.38}$$

yang dinamakan sebagai fungsi *likelihood*. Untuk menyelesaikan fungsi *likelihood*-nya akan lebih mudah jika ditransformasikan ke dalam bentuk *ln* (*logaritma natural*), sehingga dapat ditulis menjadi:

$$\begin{aligned} L(\beta) &= \ln\left(l\left(\beta, \sigma^2 \mid Y, X\right)\right) \\ &= \ln\left(\left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(Y - f(X,\beta)\right)^T \left(Y - f(X,\beta)\right)\right)\right) \end{aligned} \tag{2.39}$$

Dalam hal aproksimasi $L(\beta)$ dengan nilai-nilai awal yang ditentukan dari iterasi pertama $\left(\hat{\beta}^{(0)}\right)$, secara deret Taylor orde 2 yaitu:

$$\begin{aligned} L(\beta) &\approx L\left(\beta^{(0)}\right) + \frac{\left(L'\left(\beta^{(0)}\right)\right)^T \left(\beta - \beta^{(0)}\right)}{1!} + \frac{\left(\beta - \beta^{(0)}\right)^T L''\left(\beta^{(0)}\right)\left(\beta - \beta^{(0)}\right)}{2!} \\ &= L\left(\beta^{(0)}\right) + \left(L'\left(\beta^{(0)}\right)\right)^T \left(\beta - \beta^{(0)}\right) + \frac{1}{2}\left(\beta - \beta^{(0)}\right)^T L''\left(\beta^{(0)}\right)\left(\beta - \beta^{(0)}\right) \end{aligned} \tag{2.40}$$

dengan

$$L'\left(\beta^{(0)}\right)=\left.\frac{\partial L}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}$$
$$L''\left(\beta^{(0)}\right)=\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} \tag{2.41}$$

Sehingga persamaan (2.40) menjadi:

$$\begin{aligned}L(\beta)=L\left(\beta^{(0)}\right)+\left(\left.\frac{\partial L}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)^T\beta-\left(\left.\frac{\partial L}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)^T\beta^{(0)}+\frac{1}{2}\left(\beta^T\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\beta\right.\\ \left.-\beta^T\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\beta^{(0)}-\left(\beta^{(0)}\right)^T\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\beta+\left(\beta^{(0)}\right)^T\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\beta^{(0)}\right)\end{aligned} \tag{2.42}$$

Dengan turunan pertama terhadap β yang diproses dari persamaan (2.42) tersebut maka:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L(\beta)}{\partial \beta}&=0+\left(\left.\frac{\partial L}{\partial \beta^T}\right|_{\beta^{(0)}}\right)^T-0+\frac{1}{2}\left(\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\beta+\left(\beta^T\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)^T\right.\\&\quad\left.-\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\beta^{(0)}-\left(\left(\beta^{(0)}\right)^T\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)^T+0\right)\\&=\left(\left.\frac{\partial L}{\partial \beta^T}\right|_{\beta^{(0)}}\right)^T+\frac{1}{2}\left(\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\beta+\beta\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right.\\&\quad\left.-\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\beta^{(0)}-\beta^{(0)}\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)\\&=\left(\left.\frac{\partial L}{\partial \beta^T}\right|_{\beta^{(0)}}\right)^T+\frac{1}{2}(2)\left(\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\left(\beta-\beta^{(0)}\right)\right)\\&=\left(\left.\frac{\partial L}{\partial \beta^T}\right|_{\beta^{(0)}}\right)^T+\left(\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)\left(\beta-\beta^{(0)}\right)\end{aligned} \tag{2.43}$$

Karena

$$\left(\left.\frac{\partial L}{\partial \beta^T}\right|_{\beta^{(0)}}\right)^T=\left.\frac{\partial L}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}$$

Persamaan (2.43) menjadi:

$$\frac{\partial L(\beta)}{\partial \beta} = \left.\frac{\partial L}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} + \left(\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} \right)\left(\beta - \beta^{(0)}\right) \tag{2.44}$$

Untuk memaksimumkan fungsi *likelihood* maka persamaan (2.44) disamadengankan nol, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
0 &= \left.\frac{\partial L}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} + \left(\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} \right)\left(\beta - \beta^{(0)}\right) \\
&= \left.\frac{\partial L}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} + \left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} \beta - \left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} \beta^{(0)} \\
\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} \beta &= \left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} \beta^{(0)} - \left.\frac{\partial L}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} \\
\beta &= \left(\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} \right)^{-1} \left(\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} \beta^{(0)} - \left.\frac{\partial L}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} \right) \\
&= \left(\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} \right)^{-1} \left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} \beta^{(0)} - \left(\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} \right)^{-1} \left.\frac{\partial L}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} \\
&= \beta^{(0)} - \left(\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} \right)^{-1} \left.\frac{\partial L}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Persamaan (2.45) merupakan hasil aproksimasi untuk iterasi pertama diperoleh:

$$\beta^{(1)} = \beta^{(0)} - \left(\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} \right)^{-1} \left.\frac{\partial L}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} \tag{2.46}$$

Nilai-nilai aproksimasi pada iterasi pertama digunakan untuk mencari nilai-nilai pada aproksimasi iterasi kedua:

$$\beta^{(2)} = \beta^{(1)} - \left(\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} \right)^{-1} \left.\frac{\partial L}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} \tag{2.47}$$

Sehingga untuk selanjutnya diperoleh bentuk iterasi umum yaitu:

$$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} - \left(\left. \frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(n)}} \right)^{-1} \left. \frac{\partial L}{\partial \beta} \right|_{\beta^{(n)}} \tag{2.48}$$

2.5.4 Penelitian Sebelumnya

2.5.4.1 Estimasi Parameter Iterasi *Quadratic Hill Climbing*

Pada iterasi *Quadratic Hill Climbing*, mula-mula fungsi objektif *residual sum of square* (S) akan diaproksimasikan dengan *deret Taylor* orde 2. Adapun bentuk *deret Taylor* orde 2 yaitu sebagai berikut

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{1!} + \frac{(x - x_0) f''(x_0)(x - x_0)}{2!} \tag{2.49}$$

Sehingga aproksimasi (S) dengan nilai-nilai awal yang ditentukan dari iterasi pertama, secara deret Taylor orde 2 yaitu:

$$\begin{aligned} S(\beta) &= S\left(\beta^{(0)}\right) + \frac{S'\left(\beta^{(0)}\right)^T \left(\beta - \beta^{(0)}\right)}{1!} + \frac{\left(\beta - \beta^{(0)}\right)^T S''\left(\beta^{(0)}\right)\left(\beta - \beta^{(0)}\right)}{2!} \\ &= S\left(\beta^{(0)}\right) + S'\left(\beta^{(0)}\right)^T \left(\beta - \beta^{(0)}\right) + \frac{1}{2}\left(\beta - \beta^{(0)}\right)^T S''\left(\beta^{(0)}\right)\left(\beta - \beta^{(0)}\right) \end{aligned} \tag{2.50}$$

dengan

$$\begin{aligned} S'\left(\beta^{(0)}\right) &= \left. \frac{\partial S}{\partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}} \\ S''\left(\beta^{(0)}\right) &= \left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}} \end{aligned} \tag{2.51}$$

Sehingga persamaan (2.50) menjadi

$$\begin{aligned} S(\beta) = S\left(\beta^{(0)}\right) &+ \left. \frac{\partial S}{\partial \beta^T} \right|_{\beta^{(0)}} \beta - \left. \frac{\partial S}{\partial \beta^T} \right|_{\beta^{(0)}} \beta^{(0)} + \frac{1}{2}\left(\beta^T \left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}} \beta - \beta^T \right. \\ &\left. \left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}} \beta^{(0)} - \left(\beta^{(0)}\right)^T \left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}} \beta + \left(\beta^{(0)}\right)^T \left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}} \beta^{(0)} \right) \end{aligned} \tag{2.52}$$

Kemudian dilakukan turunan pertama pada persamaan tersebut, sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} = 0 + \left(\left. \frac{\partial S}{\partial \beta^T} \right|_{\beta^{(0)}} \right)^T - 0 + \frac{1}{2}\left(\left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}} \beta + \left(\beta^T \left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}} \right)^T \right.$$

$$\left. - \left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}} \beta^{(0)} - \left(\left(\beta^{(0)}\right)^T \left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}} \right)^T + 0 \right)$$

$$= \left(\left. \frac{\partial S}{\partial \beta^T} \right|_{\beta^{(0)}} \right)^T + \frac{1}{2}\left(\left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}} \beta + \beta \left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}} \right.$$

$$\left. - \left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}} \beta^{(0)} - \beta^{(0)} \left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}} \right)$$

$$= \left(\left. \frac{\partial S}{\partial \beta^T} \right|_{\beta^{(0)}} \right)^T + \frac{1}{2}(2)\left(\left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}} \left(\beta - \beta^{(0)}\right) \right)$$

$$= \left(\left. \frac{\partial S}{\partial \beta^T} \right|_{\beta^{(0)}} \right)^T + \left(\left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}} \right)\left(\beta - \beta^{(0)}\right) \tag{2.53}$$

Karena

$$\left(\left. \frac{\partial S}{\partial \beta^T} \right|_{\beta^{(0)}} \right)^T = \left. \frac{\partial S}{\partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}} \tag{2.54}$$

Persamaan (2.53) menjadi:

$$\frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} = \left. \frac{\partial S}{\partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}} + \left(\left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}} \right)\left(\beta - \beta^{(0)}\right) \tag{2.55}$$

Untuk meminimumkan persamaan di atas, maka disamadengankan nol, sehingga diperoleh penaksiran nilai parameter $\hat{\beta}$ dengan memisalkan:

$$K = \left. \frac{\partial S}{\partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}}$$

$$M = \left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}}$$

Sehingga diperoleh:

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial S}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} + \left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)\left(\beta - \beta^{(0)}\right) = 0 \\
K + M(\beta) - M\left(\beta^{(0)}\right) = 0 \\
M\left(\hat{\beta}\right) &= -K + M\left(\beta^{(0)}\right) \\
M\left(\hat{\beta}\right) &= M\left(\beta^{(0)}\right) - K \\
(M)^T M\left(\hat{\beta}\right) &= (M)^T\left(M\left(\beta^{(0)}\right) - K\right) \\
\left((M)^T - M\right)^{-1}\left(\left(M^T\right)M\right)\hat{\beta} &= \left((M)^T - M\right)^{-1}\left(M^T\right)\left(M\left(\beta^{(0)}\right) - K\right) \\
I\hat{\beta} &= (M)^{-1}\left((M)^{-1}\right)^T (M)^T\left(M\left(\beta^{(0)}\right) - K\right) \\
\hat{\beta} &= (M)^{-1}\left(M(M)^{-1}\right)^T\left(M\left(\beta^{(0)}\right) - K\right) \\
&= (M)^{-1}(I)^T\left(M\left(\beta^{(0)}\right) - K\right) \\
&= (M)^{-1} I\left(M\left(\beta^{(0)}\right) - K\right) \\
&= (M)^{-1}\left(M\left(\beta^{(0)}\right)\right) - (M)^{-1}K \\
&= \beta^{(0)} - (M)^{-1}K \\
&= \beta^{(0)} - \left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)^{-1}\left.\frac{\partial S}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}
\end{aligned}
\tag{2.56}
$$

Pada persamaan (2.56) dikatakan sebagai bentuk iterasi pertama dari aproksimasi $\hat{\beta}$. Nilai-nilai awal ($\hat{\beta}^{(0)}$) digunakan untuk mencari nilai-nilai pada aproksimasi iterasi pertama sehingga diperoleh:

$$
\beta^{(1)} = \beta^{(0)} - \left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)^{-1}\left.\frac{\partial S}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} \tag{2.57}
$$

Nilai-nilai aproksimasi $\hat{\beta}$ pada iterasi digunakan untuk mencari nilai-nilai aproksimasi iterasi kedua yaitu:

$$\beta^{(2)} = \beta^{(1)} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\bigg|_{\beta^{(1)}} \right)^{-1} \frac{\partial S}{\partial \beta}\bigg|_{\beta^{(1)}} \quad (2.58)$$

Sehingga untuk seterusnya akan diperoleh bentuk umum iterasi sebagai berikut:

$$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\bigg|_{\beta^{(n)}} \right)^{-1} \frac{\partial S}{\partial \beta}\bigg|_{\beta^{(n)}} \quad (2.59)$$

Iterasi inilah yang dikenal sebagai iterasi *Newton-Raphson*. Sedangkan pada metode *Quadratic Hill Climbing* persamaan (2.59) tersebut ditambahkan suku perkalian antara skalar dan matriks identitas, dengan panjang langkahnya (t) bernilai sembarang (Sanjoyo, 2006), sehingga diperoleh bentuk iterasi estimasi parameter model *Quadratic Hill Climbing*:

$$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\bigg|_{\beta^{(n)}} + \lambda_n I_k \right)^{-1} \frac{\partial S}{\partial \beta}\bigg|_{\beta^{(n)}} \quad (2.60)$$

2.5.4.2 Kekonvergenan Iterasi *Quadratic Hill Climbing*

Menurut Noerhayati (2016) pada persamaan (2.60), jika dilakukan iterasi secara terus menerus maka akan didapatkan sifat β yang konvergen, yaitu:

$$0 < \lim_{n\to\infty} \left| \beta^{(n+1)} - \beta^{(n)} \right| \leq \varepsilon$$

atau dapat ditulis

$$\lim_{n\to\infty} \beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} \quad (2.61)$$

Maka akan ditunjukkan kekonvergenan dari iterasi *Quadratic Hill Climbing* dengan menggunakan turunan kedua dari *residual sum of square* dan disamadengankan nol sebagai berikut:

$$\frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} = \left.\frac{\partial S}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} + \left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} \right)\left(\beta - \beta^{(0)}\right) = 0$$

$$= 0 + \left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} \right)^T - 0 = 0 \qquad (2.62)$$

$$= \left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} \right)^T = 0$$

Secara umum ditulis sebagai berikut:

$$\left.\frac{\partial S}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(n)}} = \left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} \right)^T = 0 \qquad (2.63)$$

maka diperoleh:

$$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} - \left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(n)}} + \lambda_n I_k \right)^{-1} \left.\frac{\partial S}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(n)}}$$

$$= \beta^{(n)} - \left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(n)}} + \lambda_n I_k \right)^{-1} .0 \qquad (2.64)$$

$$= \beta^{(n)}.$$

Dengan penyelesaian di atas, maka persamaan (2.60) terbukti bahwa dengan iterasi ini dijamin kekonvergenan suatu fungsi yang modelnya adalah nonlinier dapat dipenuhi.

2.6 Fungsi Produksi *Cobb-Douglas*

Untuk memproduksi suatu output atau produk (barang atau jasa) dalam jumlah tertentu, seseorang pengusaha atau suatu perusahaan bisa menggunakan dua atau lebih input. Input-input ini dapat berupa: tenaga kerja, modal, tanah, bahan baku, mesin, dan lain sebagainya. Hubungan antara output yang dihasilkan oleh perusahaan sebagai akibat adanya penggunaan input-input (tetap atau variabel) sering disebut fungsi produksi (Kalangi, 2012).

Fungsi produksi digunakan dalam estimasi empiris adalah fungsi pangkat, yaitu dalam bentuk berikut ini (Kalangi, 2012),

$$Q_t = AL_t^{a} K_t^{b} + \varepsilon_t \tag{2.65}$$

dimana: Q_t = Output jumlah produksi (*Quantity of Product*)

K_t = Input modal (*Capital of Product*)

L_t = Input tenaga kerja (*Labour of Product*)

ε_t = *error*

A, a, b = Parameter untuk diestimasi secara empiris

Persamaan (2.65) sering disebut sebagai fungsi produksi *Cobb-Douglas*, karena fungsi ini pertama kali diperkenalkan oleh *Charles W. Cobb* dan *Paul H. Douglas* pada tahun 1920-an (Kalangi, 2012)

Dari persamaan (2.65) hubungan antara kedua *input* atau *output* tersebut adalah nonlinier. Model persamaan jika ditransformasikan ke dalam model logaritma, maka diperoleh:

$$\ln Q = \ln A + a \ln L + b \ln K + \ln \varepsilon \tag{2.66}$$

Setelah ditransformasi, persamaan (2.56) berubah menjadi persamaan linier dalam parameter $A, a,$ dan b sehingga dapat disebut sebagai model regresi linier. Walaupun demikian, persamaan tersebut merupakan nonlinier dalam variabel L dan K (Gujarati, 2010).

Menurut Aziz (2010), terdapat bentuk fungsi produksi model *Cobb-Douglas* yang tidak dapat ditransformasikan , yaitu:

$$Q_t = \beta_1 L_t^{\beta_2} K_t^{\beta_3} + \varepsilon_t \tag{2.67}$$

Model *Cobb-Douglas* pada persamaan (2.67) tidak dapat ditransformasikan dalam bentuk fungsi linier, dengan kata lain fungsi tersebut adalah fungsi produksi model *Cobb-Douglas* nonlinier sehingga harus di estimasi dengan menggunakan teknik statistik nonlinier.

2.7 Analisis Korelasi

Menurut Suliyanto (2011), korelasi digunakan untuk mengetahui derajat hubungan linier antara satu variabel dengan variabel yang lain. Suatu variabel dikatakan memiliki hubungan dengan variabel lain jika perubahan satu variabel diikuti dengan perubahan variabel lain. Jika arah perubahannya searah maka kedua variabel memiliki korelasi positif. Sebaliknya, jika perubahannya berlawanan arah, kedua variabel tersebut memiliki korelasi negatif. Jika perubahan variabel tidak diikuti oleh perubahan variabel yang lain maka dikatakan bahwa variabel-variabel tersebut tidak saling berkorelasi. Besarnya perubahan suatu variabel yang diikuti dengan perubahan variabel yang lain dinyatakan dalam bentuk koefisien korelasi.

Salah satu alat yang bisa digunakan untuk mengetahui korelasi antara variabel yang satu dengan variabel yang lain adalah dengan *Product Moment* (*Pearson*). *Product Moment* adalah perubahan antar variabel. Untuk mencari koefisien korelasi *Product Moment* digunakan rumus sebagai berikut:

$$r_{xy} = \frac{n\sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{\sqrt{(n\sum X^2 - (\sum X)^2)}\sqrt{(n\sum Y^2 - (\sum Y)^2)}}$$

dengan:

r_{xy} : Koefisien korelasi *Product Moment*

n : Jumlah pengamatan

$\sum X$: Jumlah dari pengamatan X

$\sum Y$: Jumlah dari pengamatan Y

r_{xy} merupakan koefisien korelasi yang nilainya akan senantiasa berkisar antara 0 sampai dengan 1. Bila koefisien korelasi semakin mendekati angka satu berarti korelasi tersebut semakin kuat, tetapi jika koefisien korelasi tersebut mendekati angka 0 berarti korelasi tersebut semakin lemah. Koefisien korelasi tidak dapat digunakan untuk menentukan apakah korelasi tersebut signifikan atau tidak. Hal itu karena untuk menentukan signifikansi sebuah korelasi harus membandingkan r_{xy} hitung dengan r_{xy} tabel. Jika r_{xy} hitung < r_{xy} tabel maka maka korelasi tersebut tidak signifikan. Sebaliknya jika r_{xy} hitung > r_{xy} tabel, maka korelasi tersebut signifikan.

2.8 Estimasi Dalam Al-Qur'an

Ayat yang berkaitan dengan bentuk estimasi parameter (dugaan/perkiraan) pada sebuah fungsi tercantum dalam surat Al-Baqarah ayat 214. Ayat ini menjelaskan perkiraan seseorang yang akan masuk surga tanpa ada cobaan yang telah di ujikan kepada orang-orang terdahulu.

Dalam Qur'an surat Al-Baqarah ayat 214 yang berbunyi:

أَمۡ حَسِبۡتُمۡ أَن تَدۡخُلُواْ ٱلۡجَنَّةَ وَلَمَّا يَأۡتِكُم مَّثَلُ ٱلَّذِينَ خَلَوۡاْ مِن قَبۡلِكُمۖ مَّسَّتۡهُمُ
ٱلۡبَأۡسَآءُ وَٱلضَّرَّآءُ وَزُلۡزِلُواْ حَتَّىٰ يَقُولَ ٱلرَّسُولُ وَٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ مَعَهُۥ مَتَىٰ نَصۡرُ ٱللَّهِۗ أَلَآ
إِنَّ نَصۡرَ ٱللَّهِ قَرِيبٞ ٢١٤

Artinya:
"Ataukah kamu mengira bahwa kamu akan masuk surga padahal belum datang kepadamu (cobaan) seperti (yang dialami) orang-orang terdahulu sebelum kamu. Mereka ditimpa kemelaratan, penderitaan, dan diguncang (dengan berbagai cobaan), sehingga rasul dan orang-orang yang beriman bersamanya berkata, "kapankah datang pertolongan Allah?" ingatlah. Sesungguhnya pertolongan Allah itu dekat".

Beberapa mufasir mengatakan, ayat ini diturunkan sekaitan dengan peristiwa perang Ahzab, atau perjanjian damai, ketika kaum muslim kehilangan kesabaran dan benar-benar takut dalam perang tersebut. Karena terkepung oleh musuh, mereka bertanya-tanya akan pertolongan Allah yang maha kuasa. Ayat ini diwahyukan untuk meminta mereka bersabar dan tabah serta berharap-harap kemenangan akan menjelang dengan pertolongan Allah SWT. Diriwayatkan juga, ketika kaum muslimin dikalahkan dalam perang Uhud, Abdillah bin Ubay, mengolok-olok mereka seraya berkata, “Sampai kapankah kaum muslimin mengorbankan dirinya dan apabila Muhammad SAW benar-benar utusan Allah SWT, maka dia tidak akan membiarkan para sahabatnya ditangkap dan dibunuh.” Pada saat itulah ayat di atas diwahyukan (Kamal, 2006: 177-178).

Allah SWT menyangkal sangkaan orang-orang beriman yang berada dalam malapetaka bahwa mereka akan masuk surga tanpa ujian dan cobaan dalam jiwa dan harta, bahkan dapat saja mereka ditimpa dengan apa yang sudah dialami orang lain berupa malapetaka, kesengsaraan, dan kegoncangan, yang mana hal itu berarti kegoncangan dan kekhawatiran dari berbagai teror, sampai Rasulullah SAW dan para sahabat berkata dengan menganggap bahwa pertolongan yang dijanjikan terlambat, “Kapan datangnya pertolongan Allah?” Maka Rabb mereka menjawab dengan firman-Nya (Al-Jazairi, 2006: 344),

أَلَآ إِنَّ نَصۡرَ ٱللَّهِ قَرِيبٞ ﴿٢١٤﴾

“ingatlah. Sesungguhnya pertolongan Allah itu dekat.”.

Tafsir yang menjelaskan tentang ayat 214 ini yaitu dalam makna kalimat *“Ataukah kamu mengira bahwa kamu akan masuk surga padahal belum datang kepadamu (cobaan) seperti (yang dialami) orang-orang terdahulu sebelum* *kamu?".* Jangan mudah menyangka bahwa kamu akan masuk surga, sedangkan kamu belum menerima cobaan-cobaan sebagaimana telah menimpa para nabi dan para mukmin terdahulu. Kitab ini ditujukan kepada semua manusia yang telah diberi petunjuk oleh Allah SWT untuk memeluk Islam, dengan mengikuti Al-Qur'an. Pada ayat ini terdapat pelajaran bagi orang-orang yang datang (lahir) sesudah para sahabat, dan menyangka telah cukup untuk dapat masuk surga, membangsakan diri (mengaku) sebagai umat Islam. Mereka belum mengetahui bahwa sunnah Allah mengenai para mukmin yang benar adalah, mereka itu menderita berbagai macam kepahitan dan kesakitan dalam menapaki jalan kebenaran dan memberi petunjuk kepada manusia (Muhammad, 2000: 353).

Ayat di atas menjelaskan tentang estimasi jika dapat masuk surga tanpa melalui ujian dan cobaan yang harus dilewati, lain hal dengan estimasi (taksiran) yang digunakan pada strategi perang terdapat dalam Al-Qur'an surat Ar-Ruum ayat 4:

فِي بِضْعِ سِنِينَ ۗ لِلَّهِ ٱلْأَمْرُ مِن قَبْلُ وَمِنۢ بَعْدُ ۚ وَيَوْمَئِذٍ يَفْرَحُ ٱلْمُؤْمِنُونَ ﴿٤﴾

Artinya:
"Dalam beberapa tahun lagi, bagi Allah-lah urusan sebelum dan sesudah (mereka menang). dan di hari (kemenangan bangsa Rumawi) itu bergembiralah orang-orang yang beriman".

Dari surat Ar-Ruum ayat 4 pengertian lafaz *fii bidh'i siniina* (dalam beberapa tahun lagi) adalah mulai dari tiga tahun sampai dengan sembilan atau sepuluh tahun. Kedua pasukan bertemu kembali pada tahun yang ketujuh sesudah pertempuran yang pertama. Akhirnya dalam pertempuran ini pasukan Romawi berhasil mengalahkan pasukan kerajaan Persia dan orang-orang beriman berbahagia atas kemenangan tersebut (Jalaluddin, 2005).

Estimasi juga dibahas dalam Qs. Al-Baqarah ayat 78, yaitu:

وَمِنْهُمْ أُمِّيُّونَ لَا يَعْلَمُونَ ٱلْكِتَٰبَ إِلَّآ أَمَانِيَّ وَإِنْ هُمْ إِلَّا يَظُنُّونَ ﴿٧٨﴾

Artinya:
"dan diantara mereka ada yang buta huruf, tidak mengetahui Al kitab (Taurat), kecuali dongengan bohong belaka dan mereka hanya menduga-duga".

Kaitan metode estimasi dengan surat Al-Baqarah ayat 78 terletak pada lafaz *"yazhunnun"*. Menurut Ibnu 'Abbas, Muhammad bin Ishak mengungkapkan dalam bukunya bahwa arti dari *"yazhunnun"* adalah mereka tidak mengetahui isi kitab tersebut dan mereka mengetahui kenabian (Muhammad) hanya melalui dugaan belaka. Mujahid, Qatadah, Abdul 'Aliyah dan Rabi' bin Annas mengatakan bahwa dugaan mereka itu hanyalah dusta belaka dan mereka hanya berprasangka buruk terhadap Allah SWT tanpa sedikitpun kebenaran. Sesungguhnya manusia tidak mengetahui kebenaran yang mutlak atas sesuatu tetapi manusia hanya menduga atau menyangka saja. Pendugaan itu belum jelas kebenarannya. Oleh karena itu, hasil pendugaan itu harus diuji kebenarannya (Abdullah, 2007).

BAB III
METODE PENELITIAN

3.1 Pendekatan Penelitian

Pendekatan penelitian yang digunakan pada penelitian ini menggunakan pendekatan kepustakaan yang merujuk pada buku-buku yang berkaitan dan yang dibutuhkan dalam melakukan penelitian ini. Selain itu, peneliti juga mempelajari literatur lain, berupa jurnal dan referensi yang berkaitan dengan penelitian. Pada tahap ini juga dilakukan penurunan rumus dan pengambilan data dari penelitian terdahulu.

3.2 Jenis dan Sumber Data

Data yang digunakan oleh peneliti dalam penelitian ini adalah jenis data sekunder karena bukan dari hasil observasi secara langsung. Adapun data yang peroleh yaitu "*Data Industri Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka* (ILMTA) tahun 1993-2012 Provinsi Jawa Timur yang diambil dari sebuah penelitian yang dilakukan oleh Noerhayati (2016).

3.3 Variabel Penelitian

Penelitian ini menggunakan fungsi produksi *Cobb-Douglas*. Variabel dalam fungsi produksi *Cobb-Douglas* ini terdapat tiga variabel, dua diantaranya merupakan variabel dependen. Adapun variabel-variabelnya adalah:

1. Variabel output (Q_t) merupakan variabel yang menyatakan jumlah produksi Industri Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka (ILMTA) tahun 1993-2012 provinsi Jawa Timur.

2. Variabel input (L_t) merupakan variabel yang menyatakan jumlah tenaga kerja pada Industri Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka (ILMTA) tahun 1993-2012 provinsi Jawa Timur.
3. Variabel input (K_t) merupakan variabel yang menyatakan besarnya modal pada Industri Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka (ILMTA) tahun 1993-2012 provinsi Jawa Timur.

3.4 Langkah-Langkah Penelitian

3.4.1 Estimasi bentuk parameter pada fungsi *Cobb-Douglas* dengan metode MLE secara iterasi *Method of Scoring*.

1. Menentukan fungsi *likelihood*.
2. Menurunkan parsial pertama fungsi *likelihood* terhadap β.

3.4.2 Implementasi iterasi *Method of Scoring* pada data Industri Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka (ILMTA) tahun 1993-2012 Provinsi Jawa Timur dengan model *Cobb-Douglas*

1. Menganalisis korelasi menggunakan software Minitab dengan cara mencari koefisien korelasinya.
2. Mengimplementasikan estimasi parameter secara iterasi *Method of Scoring*.

3.4.3 Perbandingan hasil estimasi parameter dengan menggunakan metode MLE dengan iterasi *Method of Scoring* dan metode LSE dengan iterasi *Quardratic Hill-Climbing*.

BAB IV
PEMBAHASAN

4.1 Estimasi Parameter pada Fungsi Produksi *Cobb-Douglas* Menggunakan Metode *Maximum Likelihood* dengan Iterasi *Method of Scoring*

4.1.1 Penentuan Fungsi *Likelihood*

Bentuk model nonlinier yang digunakan salah satunya yaitu *Maximum Likelihood* dalam hal ini sulit diselesaikan secara analitik, sehingga dipermudah dengan adanya metode numerik untuk penyelesaiannya. Dalam hal ini menggunakan model statistik nonlinier pada fungsi *Cobb-Douglass* dengan bentuk persamaan (2.67). Persamaan tersebut ditransformasikan kedalam bentuk *ln* (*logaritma natural*) agar dapat mempermudah penyelesaiannya, sehingga menjadi:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Q}_t &= \beta_1 L_t^{\beta_2} K_t^{\beta_3} \\ \ln \boldsymbol{Q}_t &= \ln\left(\beta_1 L_t^{\beta_2} K_t^{\beta_3}\right) \\ &= \ln \beta_1 + \beta_2 \ln L_t + \beta_3 \ln K_t \end{aligned} \tag{4.1}$$

Persamaan dalam bentuk matriks yaitu:

$$\begin{bmatrix} \ln Q_1 \\ \ln Q_2 \\ \vdots \\ \ln Q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \ln L_{11} & \ln K_{12} \\ 1 & \ln L_{21} & \ln K_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \ln L_{n1} & \ln K_{n2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

Dengan:

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} \ln Q_1 \\ \ln Q_2 \\ \vdots \\ \ln Q_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & \ln L_{11} & \ln K_{12} \\ 1 & \ln L_{21} & \ln K_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \ln L_{n1} & \ln K_{n2} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \ln \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

atau dapat dinyatakan lebih sederhana menjadi

$$\boldsymbol{Y} = f\left(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\beta}\right) = \boldsymbol{X\beta}$$

Sehingga diperoleh bentuk tranformasi nonlinier fungsi produksi, yaitu:

$$\boldsymbol{Y}_i = f\left(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{\beta}\right) = \boldsymbol{X}_i\boldsymbol{\beta} \tag{4.3}$$

Perhatikan fungsi padat peluang gabungan (Y_i) jika diberikan X_i, β dan σ^2 maka peluang bersyaratnya adalah

$$f\left(Y_i \mid X_i, \beta, \sigma^2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(Y_i - f\left(X_i, \beta\right)^2\right)\right) \tag{4.4}$$

Dengan $i = 1, 2, \ldots n$, sehingga fungsi padat peluang gabungan dari $Y_1, Y_2, \ldots Y_n$ adalah

$$\begin{aligned}
f\left(Y_1, Y_{2,}, \ldots Y_n \mid X_i, \beta, \sigma^2\right) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(Y_1 - f\left(X_1, \beta\right)\right)^2\right)\right) \\
&\quad \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(Y_2 - f\left(X_2, \beta\right)\right)^2\right)\right) \\
&\quad \ldots\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(Y_n - f\left(X_n, \beta\right)\right)^2\right)\right) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left(\sum_{i=1}^{n} -\frac{1}{2\sigma^2}\left(Y_i - f\left(X_i, \beta\right)\right)^2\right) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(Y - f\left(X, \beta\right)\right)^T\left(Y - f\left(X, \beta\right)\right)\right]
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Jika yang diketahui Y dan X sedangkan yang dicari adalah parameter β dan σ^2, maka fungsi (4.5) dapat ditulis sebagai:

$$\begin{aligned}
l(\beta) &= f\left(\beta, \sigma^2 \mid Y, X\right) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(Y - f\left(X, \beta\right)\right)^T\left(Y - f\left(X, \beta\right)\right)\right]
\end{aligned} \tag{4.6}$$

yang dinamakan sebagai fungsi *likelihood*. Untuk menyelesaikan fungsi *likelihood*-nya akan lebih mudah jika ditransformasikan ke dalam bentuk *ln* (*logaritma natural*), sehingga dapat ditulis menjadi:

$$\begin{aligned} L(\beta) &= \ln\left(l\left(\beta,\sigma^2 \mid Y, X\right)\right) \\ &= \ln\left(\left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(Y - f(X,\beta)\right)^T\left(Y - f(X,\beta)\right)\right)\right) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Dalam hal aproksimasi $L(\beta)$ dengan nilai-nilai awal yang ditentukan $(\hat{\beta}^{(0)})$, secara deret Taylor orde 2 yaitu:

$$\begin{aligned} L(\beta) &\approx L\left(\beta^{(0)}\right) + \frac{\left(L'\left(\beta^{(0)}\right)\right)^T\left(\beta-\beta^{(0)}\right)}{1!} + \frac{\left(\beta-\beta^{(0)}\right)^T L''\left(\beta^{(0)}\right)\left(\beta-\beta^{(0)}\right)}{2!} \\ &= L\left(\beta^{(0)}\right) + \left(L'\left(\beta^{(0)}\right)\right)^T\left(\beta-\beta^{(0)}\right) + \frac{1}{2}\left(\beta-\beta^{(0)}\right)^T L''\left(\beta^{(0)}\right)\left(\beta-\beta^{(0)}\right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

dengan

$$\begin{aligned} L'\left(\beta^{(0)}\right) &= \left.\frac{\partial L}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} \\ L''\left(\beta^{(0)}\right) &= \left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Sehingga persamaan (4.9) menjadi:

$$\begin{aligned} L(\beta) = L\left(\beta^{(0)}\right) + \left(\left.\frac{\partial L}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)^T \beta - \left(\left.\frac{\partial L}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)^T \beta^{(0)} + \frac{1}{2}\Bigg[\beta^T \left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} \beta - \\ \beta^T \left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} \beta^{(0)} - \left(\beta^{(0)}\right)^T \left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} \beta + \left(\beta^{(0)}\right)^T \left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} \beta^{(0)}\Bigg] \end{aligned}$$

Turunan pertama terhadap β dari persamaan di atas, yaitu:

$$\frac{\partial L(\beta)}{\partial \beta}=0+\left(\left.\frac{\partial L}{\partial \beta^T}\right|_{\beta^{(0)}}\right)^T-0+\frac{1}{2}\left(\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\beta+\left(\beta^T\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)^T\right.$$

$$\left.-\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\beta^{(0)}-\left(\left(\beta^{(0)}\right)^T\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)^T+0\right)$$

$$=\left(\left.\frac{\partial L}{\partial \beta^T}\right|_{\beta^{(0)}}\right)^T+\frac{1}{2}\left(\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\beta+\left(\beta^T\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)^T\right.$$

$$\left.-\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\beta^{(0)}-\left(\left(\beta^{(0)}\right)^T\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)^T\right)$$

$$=\left(\left.\frac{\partial L}{\partial \beta^T}\right|_{\beta^{(0)}}\right)^T+\frac{1}{2}(2)\left(\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\left(\beta-\beta^{(0)}\right)\right)$$

$$=\left(\left.\frac{\partial L}{\partial \beta^T}\right|_{\beta^{(0)}}\right)^T+\left(\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)\left(\beta-\beta^{(0)}\right) \tag{4.10}$$

Karena

$$\left(\left.\frac{\partial L}{\partial \beta^T}\right|_{\beta^{(0)}}\right)^T=\left.\frac{\partial L}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}$$

sehingga (4.10) menjadi:

$$\frac{\partial L(\beta)}{\partial \beta}=\left.\frac{\partial L}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}+\left(\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)\left(\beta-\beta^{(0)}\right) \tag{4.11}$$

4.1.2 Penurunan Parsial Pertama Fungsi *Likelihood* terhadap $\boldsymbol{\beta}$

Untuk memaksimumkan fungsi *likelihood*, dilakukan penurunan parsial pertama terhadap β yang mana menghasilkan persamaan (4.11) dan disama dengankan nol, sehingga mendapatkan estimasi parameter (β), maka diperoleh:

$$0=\left.\frac{\partial L}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}+\left(\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)\left(\beta-\beta^{(0)}\right)$$

$$=\left.\frac{\partial L}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}+\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\beta-\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\beta^{(0)}$$

$$\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\beta=\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\beta^{(0)}-\left.\frac{\partial L}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}$$

$$\beta=\left(\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)^{-1}\left(\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\beta^{(0)}-\left.\frac{\partial L}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)$$

$$=\left(\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)^{-1}\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\beta^{(0)}-\left(\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)^{-1}\left.\frac{\partial L}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}$$

$$=\beta^{(0)}-\left(\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)^{-1}\left.\frac{\partial L}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} \tag{4.12}$$

Persamaan (4.12) merupakan hasil aproksimasi untuk iterasi pertama yaitu:

$$\beta^{(1)}=\beta^{(0)}-\left(\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)^{-1}\left.\frac{\partial L}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} \tag{4.13}$$

Nilai-nilai aproksimasi pada iterasi pertama digunakan untuk mencari nilai-nilai pada aproksimasi iterasi kedua:

$$\beta^{(2)}=\beta^{(1)}-\left(\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)^{-1}\left.\frac{\partial L}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} \tag{4.14}$$

Sehingga untuk selanjutnya diperoleh bentuk iterasi umum yaitu:

$$\beta^{(n+1)}=\beta^{(n)}-\left(\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(n)}}\right)^{-1}\left.\frac{\partial L}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(n)}} \tag{4.15}$$

Iterasi diatas merupakan iterasi dasar dengan bentuk iterasi *Newton* Raphson. Dalam metode *scoring* yang merupakan modifikasi algoritma *Newton-Raphson* dengan menggunakan nilai ekspektasi dalam turunan kedua, sehingga diperoleh algoritma yang disebut *Method of Scoring*, yaitu:

$$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} - \left(E\left(\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(n)}} \right) \right)^{-1} \left.\frac{\partial L}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(n)}} \qquad (4.16)$$

4.2 Implementasi Estimasi Fungsi *Cobb-Douglas* secara Iterasi *Method of Scoring*

4.2.1 Analisis Korelasi

Data yang digunakan yaitu data Industri Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka (ILMTA) tahun 1993-2012 provinsi Jawa Timur terdapat pada lampiran 1. Uji pada data dilakukan dengan uji korelasi untuk mengetahui hubungan antara satu variabel dengan variabel lainnya. Variabel pada data yaitu tenaga kerja, modal dan produksi.

Correlations: L; K; Y

```
       L      K

Y      0,489  0,585
       0,028  0,007


Cell Contents: Pearson correlation
               P-Value
```

Gambar 4.1 Output Analisis Korelasi

Pada output tabel korelasi diperoleh:

1. Koefisien korelasi produksi (Y) dan tenaga kerja (L) sebesar 0.489 atau dapat dituliskan $r_{YL} = 0.489$, sedangkan nilai $P - Value = 0.028$.
2. Koefisien korelasi produksi (Y) dan modal (K) sebesar 0.585 atau dapat dituliskan $r_{YK} = 0.585$, sedangkan nilai $P - Value = 0.007$.
3. Hubungan atau pengaruh secara signifikan antara jumlah produksi terhadap tenaga kerja perlu dilakukan pengujian statistik, maka hipotesis statistiknya adalah sebagai berikut:

$H_0 : r = 0$: Tidak terdapat pengaruh secara signifikan antara jumlah produksi terhadap tenaga kerja.

$H_1 : r \neq 0$: Terdapat pengaruh secara signifikan antara jumlah produksi terhadap tenaga kerja.

Diperoleh nilai r hitung yaitu $r_{YL} = 0{,}489$ dan nilai $r\,tabel$ yaitu $r_{(0.05,18)} = 0.401$. Maka $r_{hitung} > r_{tabel}$ maka H_0 ditolak, sehingga terdapat pengaruh secara signifikan antara jumlah produksi terhadap tenaga kerja.

4. Hubungan atau pengaruh secara signifikan antara jumlah produksi terhadap modal perlu dilakukan pengujian statistik, maka hipotesis statistiknya adalah sebagai berikut:

$H_0 : r = 0$: Tidak terdapat pengaruh secara signifikan antara jumlah produksi terhadap modal.

$H_1 : r \neq 0$: Terdapat pengaruh secara signifikan antara jumlah produksi terhadap modal.

Diperoleh nilai r hitung yaitu $r_{YK} = 0{,}585$ dan nilai $r\,tabel$ yaitu $r_{(0.05,18)} = 0.401$. Maka $r_{hitung} > r_{tabel}$ maka H_0 ditolak, sehingga terdapat pengaruh secara signifikan antara jumlah produksi terhadap modal.

Karena koefiesien korelasi yang diperoleh bernilai positif, artinya semakin besar jumlah tenaga kerja dan modal yang dikeluarkan maka semakin banyak jumlah produksi yang dihasilkan.

4.2.2 Implementasi Estimasi Parameter Fungsi *Cobb-Douglas* secara Iterasi *Method of Scoring*

Proses estimasi dilakukan untuk memperoleh β dan nilai maksimum dari fungsi *likelihood*. Data fungsi produksi *Cobb-Douglas* yang diaplikasikan yaitu data Industri Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka (ILMTA) tahun 1993-2012 provinsi Jawa Timur.

Iterasi yang dilakukan berulang-ulang untuk mencapai konvergen dengan *error* 10^{-9}, 10^{-7} dan 10^{-6}. Semakin diperbesar error maka semakin kecil banyak iterasi yang dihasilkan untuk mencapai konvergen. Berikut ini adalah hasil output iterasi *method of Scoring* dengan nilai awal parameter $\beta_1 = 0.7$, $\beta_2 = 0.3$ dan $\beta_3 = 1$ dari penelitian sebelumnya (Noerhayati, 2016).

Adapun perolehan hasil manual iterasi pertama yaitu memasukkan nilai data pada fungsi produksinya sesuai dengan *error* yang ditentukan. Dalam mencari hasil iterasi pertama disesuaikan dengan persamaan (4.13), seperti berikut:

1. Diketahui matrik-matrik dari fungsi *Cobb-Douglas* yaitu:

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} \ln Q_1 \\ \ln Q_2 \\ \vdots \\ \ln Q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.017968 \\ 10.53898 \\ \vdots \\ 8.998013 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & \ln L_{11} & \ln K_{12} \\ 1 & \ln L_{21} & \ln K_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \ln L_{n1} & \ln K_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 13.06851 & 9.801067 \\ 1 & 13.00775 & 9.340403 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 10.56764 & 8.772455 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta}^{(o)} = \begin{bmatrix} \ln \beta_1^{(o)} \\ \beta_2^{(o)} \\ \beta_3^{(o)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln 0.7 \\ 0.3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{-0,35667} \\ 0.3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Menghitung nilai variansi

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n} \left(Y_t - \bar{Y}\right)^2}{n} = 0,536266181$$

3. Menghitung nilai parameter β iterasi pertama

$$\beta^{(1)} = \beta^{(0)} - \left(E\left(\left. \frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}} \right) \right)^{-1} \left. \frac{\partial L}{\partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}}$$

$$= \beta^{(0)} - \left(E\left(\left. -\frac{1}{\sigma^2}\left(X^T X\right) \right|_{\beta^{(0)}} \right) \right)^{-1} \left(\left. \frac{1}{\sigma^2}\left(X^T Y - X^T X \beta\right) \right|_{\beta^{(0)}} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0.8056 \\ 0.2937 \\ 0.9739 \end{bmatrix}$$

4. Untuk nilai pada iterasi selanjutnya dilakukan dengan proses yang sama dan disesuaikan dengan tingkat kesalahan yang diinginkan, selengkapnya lihat tabel dan grafik di bawah ini.

Tabel 1 Hasil Iterasi *Method of Scoring*

Iterasi	Nilai β			L	Error
	β_1	β_2	β_3		
1	0.8056	0.2937	0.9739	-10.316146653637595	$< 10^{-9}$
2	0.9226	0.2874	0.9494		
⋮	⋮	⋮	⋮		
738	3.3216	0.2603	0.5269		

Tabel 2 Hasil Iterasi *Method of Scoring*

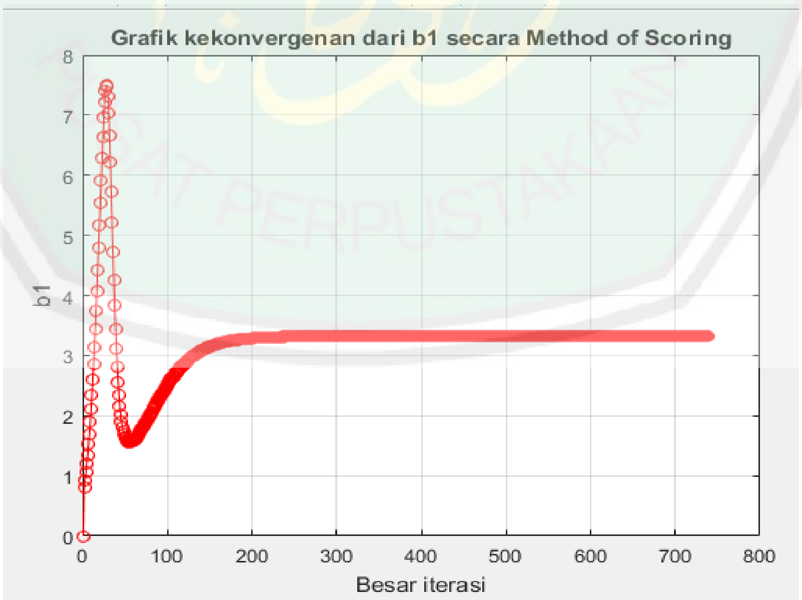
Iterasi	Nilai β			L	Error
	β_1	β_2	β_3		
1	0.8056	0.2937	0.9739	-10.316146653637652	$< 10^{-7}$
2	0.9226	0.2874	0.9494		
⋮	⋮	⋮	⋮		
450	3.3216	0.2603	0.5269		

Tabel 3 Hasil Iterasi *Method of Scoring*

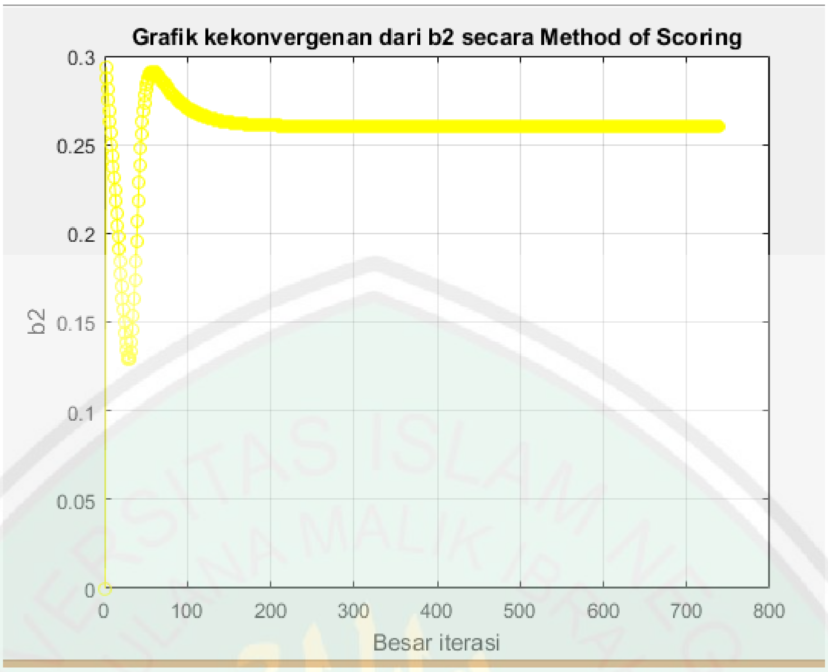
Iterasi	Nilai β			L	Error
	β_1	β_2	β_3		
1	0.8056	0.2937	0.9739	-10.316146653638681	$< 10^{-6}$
2	0.9226	0.2874	0.9494		
⋮	⋮	⋮	⋮		
406	3.3216	0.2603	0.5269		

Sumber: (Hasil Perhitungan Matlab)

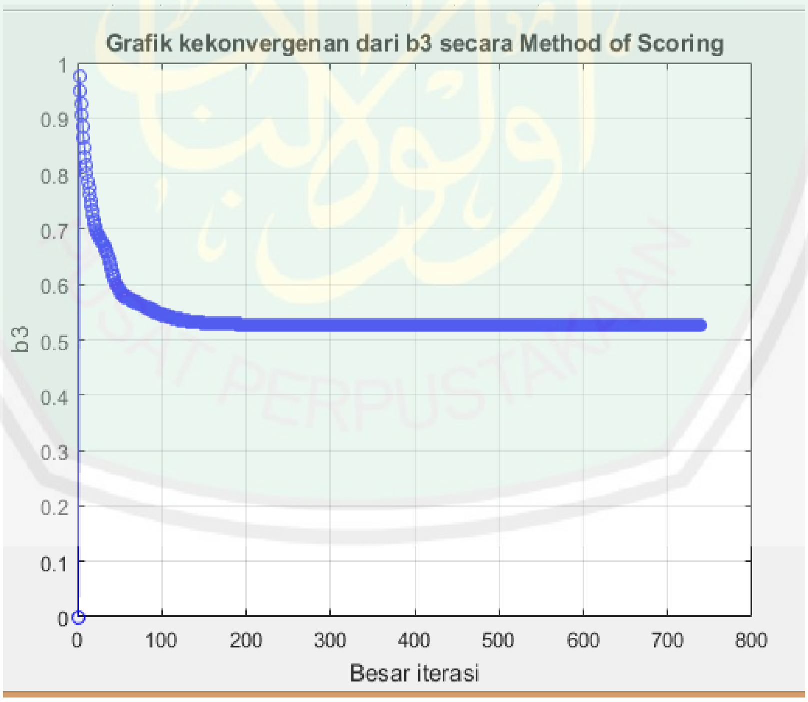
Adapun grafik dari iterasi *Method of Scoring* untuk $\varepsilon = 10^{-9}$



Gambar 4.2 Grafik kekonvergenan dari $\boldsymbol{\beta_1}$ dari Iterasi *Method Of Scoring*

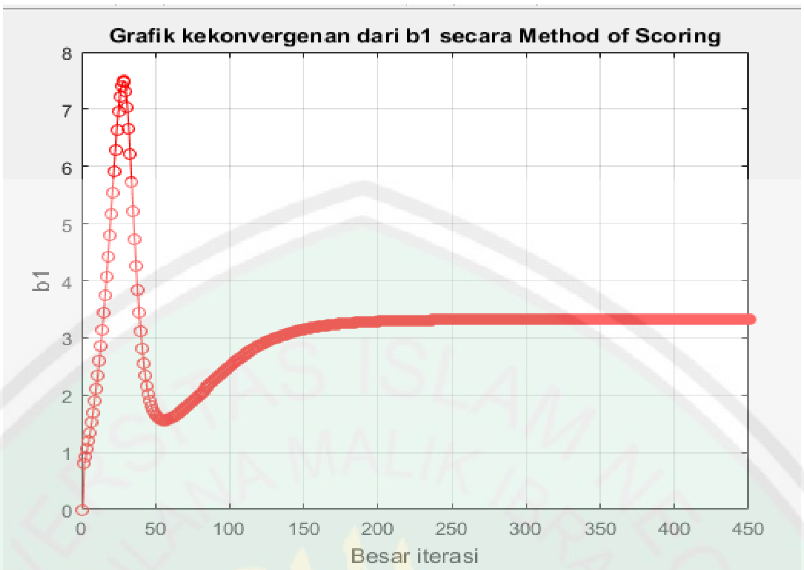


Gambar 4.3 Grafik kekonvergenan dari $\boldsymbol{\beta_2}$ dari Iterasi *Method Of Scoring*

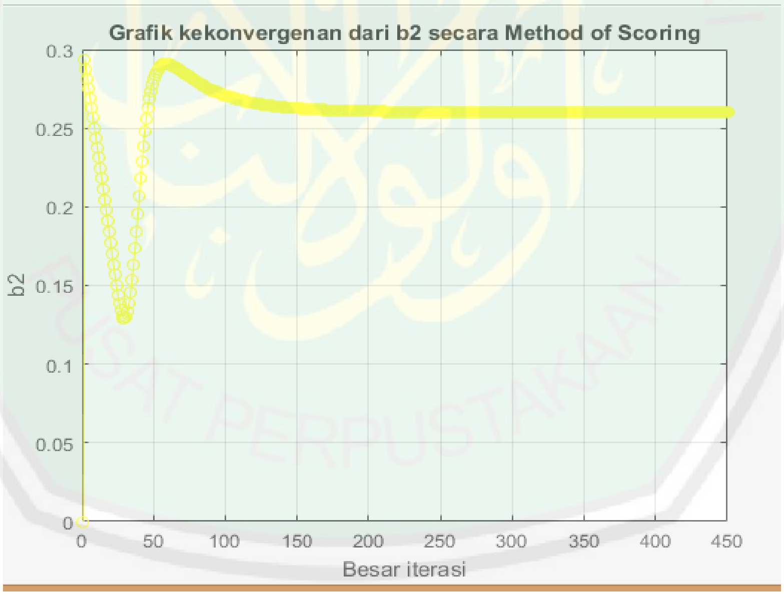


Gambar 4.4 Grafik kekonvergenan dari $\boldsymbol{\beta_3}$ dari Iterasi *Method Of Scoring*

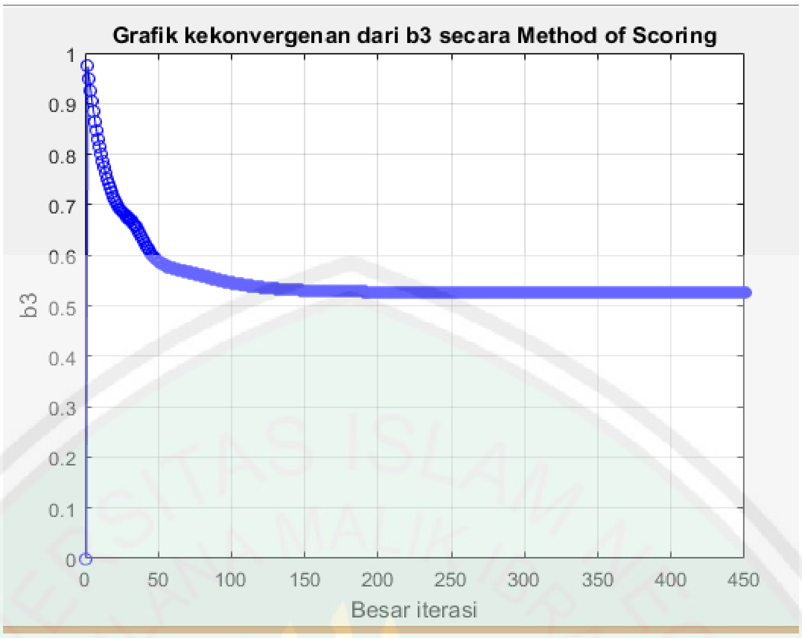
Adapun grafik dari iterasi *Method of Scoring* untuk $\varepsilon = 10^{-7}$



Gambar 4.5 Grafik kekonvergenan dari $\boldsymbol{\beta_1}$ dari Iterasi *Method Of Scoring*

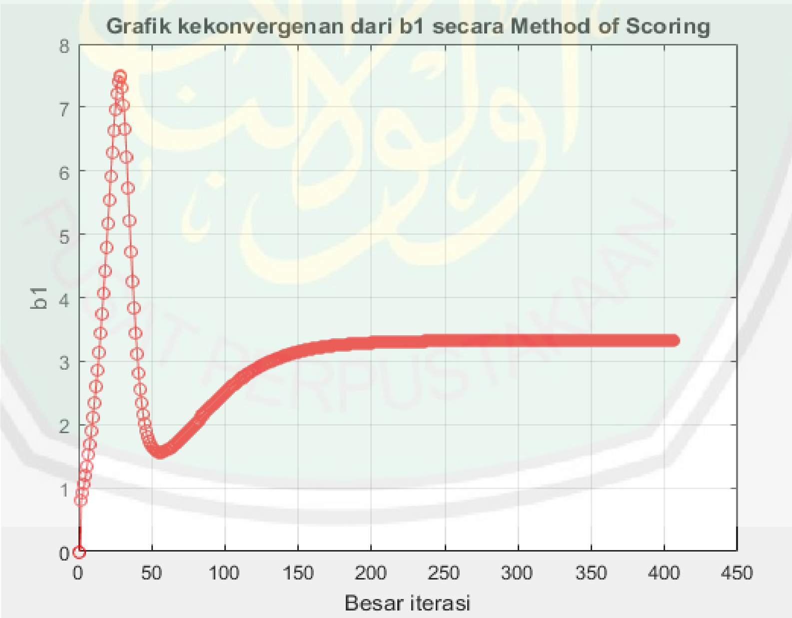


Gambar 4.6 Grafik kekonvergenan dari $\boldsymbol{\beta_2}$ dari Iterasi *Method Of Scoring*

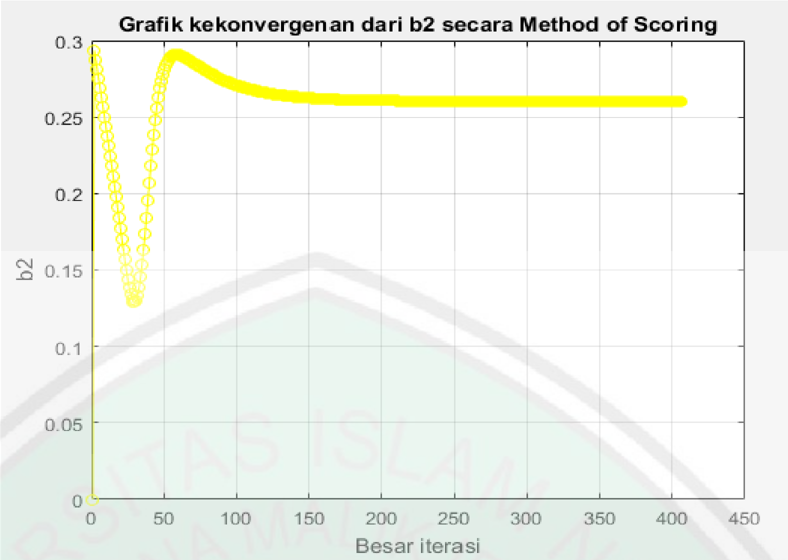


Gambar 0.7 Grafik kekonvergenan dari $\boldsymbol{\beta_3}$ dari Iterasi *Method Of Scoring*

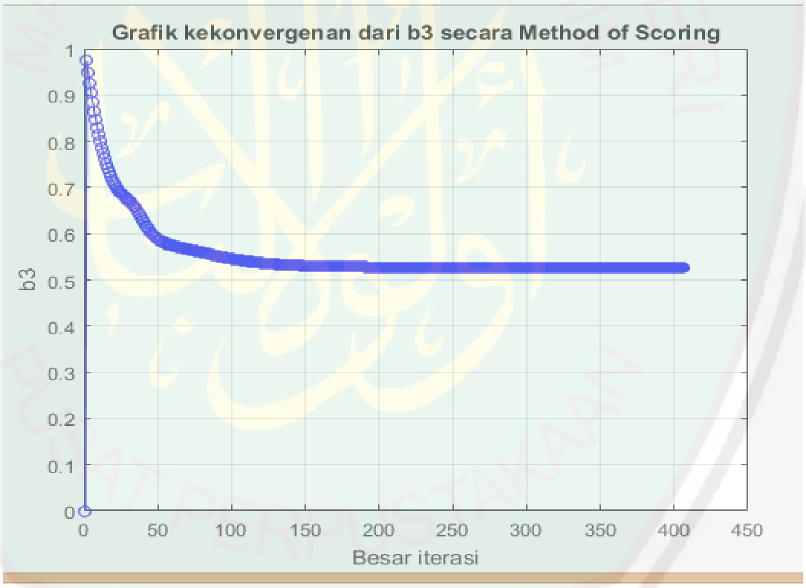
Adapun grafik dari iterasi *Method of Scoring* untuk $\varepsilon = 10^{-6}$



Gambar 4.8 Grafik kekonvergenan dari $\boldsymbol{\beta_1}$ dari Iterasi *Method Of Scoring*



Gambar 4.9 Grafik kekonvergenan dari $\boldsymbol{\beta_2}$ dari Iterasi *Method Of Scoring*



Gambar 4.10 Grafik kekonvergenan dari $\boldsymbol{\beta_3}$ dari Iterasi *Method Of Scoring*

Dari grafik di atas dengan menggunakan iterasi *Method of Scoring* diperoleh nilai maksimum pada iterasi ke 738 dengan *error* 10^{-9}. Hasil untuk fungsi *Cobb-Douglas* adalah:

$\beta_1 = 3.321606727326072$ $\beta_3 = 0.526884395993684$

$\beta_2 = 0.260325802863139$ $L = -10.316146653637595$

Berdasarkan persamaan (4.2) diperoleh:

$$\begin{aligned}\ln Q_t &= \ln \beta_1 + \beta_2 \ln L_t + \beta_3 \ln K_t \\ &= \beta_1^* + \beta_2 \ln L_t + \beta_3 \ln K_t\end{aligned}$$

atau,

$$\begin{aligned}Q_t &= \exp\left(\beta_1^* + \beta_2 \ln L_t + \beta_3 \ln K_t\right) \\ &= e^{\beta_1^*} e^{\beta_2 \ln L_t} e^{\beta_3 \ln K_t} \\ Q_t &= e^{\beta_1^*} L_t^{\beta_2} K_t^{\beta_3}\end{aligned}$$

Dengan demikian, model *Cobb-Douglas* (CD) pada data Industri Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka (ILMTA) tahun 1993-2012 di provinsi Jawa Timur dianggap konvergen menurut iterasi *Method of Scoring* adalah sebagai berikut:

$$Q = e^{3.32} L^{0.26} K^{0.53}$$

4.3 Perbandingan Hasil Estimasi Parameter secara Iterasi *Method Of Scoring* dengan Iterasi *Quadratic Hill Climbing*

Pada tabel telah dijelaskan bahwa semakin diperbesar *error* maka jumlah iterasi semakin sedikit atau data semakin cepat konvergen, sebaliknya jika *error* diperkecil maka jumlah iterasi semakin banyak dan membutuhkan waktu cukup lama untuk mencapai konvergen. Dalam melakukan perbandingan dengan metode *Least Square* secara iterasi *Quadratic Hill Climbing* maka error yang digunakan untuk membandingkan jumlah iterasi yaitu 10^{-9}. Pada iterasi *Quadratic Hill Climbing* menggunakan nilai panjang langkah atau t yang bervariasi dan menambahkan suku perkalian antara skalar dan matriks identitas sehingga dapat melakukan penaksiran berulang kali sehingga mendapatkan jumlah iterasi yang sedikit dalam mencapai konvergen.

Berikut merupakan hasil dari jumlah iterasi yang didapatkan saat mengestimasi parameter secara iterasi *Method of Scoring* dan *Quadratic Hill Climbing* yang merupakan hasil dari penelitian sebelumnya oleh (Noerhayati, 2016), sebagai berikut:

Tabel 4 Hasil Perbandingan fungsi Cobb-Douglas dengan Menggunakan Iterasi *Method of Scoring* dan *Quadratic Hill Climbing*

Fungsi Produksi Cobb-Douglas	**Metode Nonlinier MLE** ***Method of Scoring***	**Metode Nonlinier LSE** ***Quadratic Hill Climbing***
β_1	27.70482892	13.0461192
β_2	0.2603258028	0.4485854343
β_3	0.52688439599	0.14324343238
Jumlah Iterasi	738	175

Dari tabel di atas untuk iterasi *Method of Scoring* dan *Quadratic Hill Climbing* dengan nilai parameter β_1, β_2 dan β_3 dengan *error* 10^{-9} diperoleh hasil yang hampir sama karena memiliki ketelitian yang sangat dekat. Hanya saja dalam mencapai konvergen banyak iterasi *Method of Scoring* lebih besar dibandingkan *Quadratic Hill Climbing*. Untuk nilai *error* 10^{-7} dan 10^{-6} memiliki iterasi yang lebih kecil, sehingga jika *error* di perbesar akan menghasilkan banyak iterasi yang lebih kecil. Berdasarkan nilai perhitungan fungsi produksi *Cobb-Douglas* dengan menggunakan iterasi *Method of Scoring* belum cepat konvergen untuk digunakan pada data ILMTA. Dalam perbandingan kedua iterasi dengan metode yang berbeda, jumlah iterasi metode *Least Square* secara *Quadratic Hill Climbing* lebih cepat konvergen pada data ILMTA tahun 1993-2012.

4.4 Integrasi Al-Qur'an dengan Sains

Ayat yang berhubungan dengan estimasi (dugaan/perkiraan) tercantum dalam Qs. Al-Baqarah ayat 80, potongan ayat tersebut dimana menjelaskan tidak diketahui dengan tepat beberapa hari akan tetapi hanya bisa mengestimasinya.

Dalam Al-Qur'an surat Al-Baqarah ayat 80 yang berbunyi:

وَقَالُوا۟ لَن تَمَسَّنَا ٱلنَّارُ إِلَّآ أَيَّامًا مَّعْدُودَةً ۚ قُلْ أَتَّخَذْتُمْ عِندَ ٱللَّهِ عَهْدًا فَلَن يُخْلِفَ ٱللَّهُ عَهْدَهُۥٓ ۖ أَمْ تَقُولُونَ عَلَى ٱللَّهِ مَا لَا تَعْلَمُونَ ﴿٨٠﴾

Artinya:
Dan mereka berkata: "Kami sekali-kali tidak akan disentuh oleh api neraka, kecuali selama beberapa hari saja." Katakanlah: "Sudahkah kamu menerima janji dari Allah sehingga Allah tidak akan memungkiri janji-Nya, ataukah kamu hanya mengatakan terhadap Allah apa yang tidak kamu ketahui?".

Pada ayat di atas makna estimasi terletak pada potongan ayat yang artinya *"selama beberapa hari saja"*, terdapat dugaan/perkiraan hari saat tidak akan disentuh oleh api neraka.

Menurut Abdussakir (2007), estimasi terdapat dalam Qs. Ash-Shaffat ayat 147, yaitu:

وَأَرْسَلْنَٰهُ إِلَىٰ مِا۟ئَةِ أَلْفٍ أَوْ يَزِيدُونَ ﴿١٤٧﴾

Artinya:
"dan Kami utus Dia kepada seratus ribu orang atau lebih".

Dapat dijelaskan bahwa Nabi Yunus diutus kepada umatnya yang jumlahnya 100.000 orang atau lebih. Jika mmbaca ayat tersebut secara seksama, maka terdapat rasa ketidakpastian dalam menentukan jumlah sebenarnya dalam matematika yang dikenal dengan estimasi. Padahal Allah maha mengetahui segala sesuatu bahkan yang gaib dan yang nyata, termasuk jumlah pasukan nabi Yunus.

Ayat-ayat tersebut berkaitan dengan adanya perkiraan waktu dan jumlah pasukan yang telah diketahui oleh Allah sebelumnya. Konsep estimasi ini di dalam statistik digunakan untuk mengestimasi suatu parameter berarti memperkirakan suatu nilai parameter tersebut. Dalam kehidupan nyata jika di aplikasikan hasil estimasi tersebut maka kita akan mengetahui nilai estimasi tersebut mendekati nilai sebenarnya.

Dalam hal ini jumlah produksi dapat dihasilkan berdasarkan jumlah tenaga kerja dan modal yang digunakan. Menurut Yusuf Qardhawi, faktor produksi yang utama menurut Al-Qur’an adalah alam dan kerja manusia. Firman Allah dalam Qs. Huud ayat 61.

۞ وَإِلَىٰ ثَمُودَ أَخَاهُمۡ صَٰلِحٗاۚ قَالَ يَٰقَوۡمِ ٱعۡبُدُواْ ٱللَّهَ مَا لَكُم مِّنۡ إِلَٰهٍ غَيۡرُهُۥۖ هُوَ أَنشَأَكُم مِّنَ ٱلۡأَرۡضِ وَٱسۡتَعۡمَرَكُمۡ فِيهَا فَٱسۡتَغۡفِرُوهُ ثُمَّ تُوبُوٓاْ إِلَيۡهِۚ إِنَّ رَبِّي قَرِيبٞ مُّجِيبٞ ٦١

Artinya:

Dan kepada Tsamud (kami utus) saudara mereka shaleh. Shaleh berkata: "Hai kaumku, sembahlah Allah, sekali-kali tidak ada bagimu Tuhan selain Dia. Dia telah menciptakan kamu dari bumi (tanah) dan menjadikan kamu pemakmurnya[726], karena itu mohonlah ampunan-Nya, kemudian bertobatlah kepada-Nya, Sesungguhnya Tuhanku Amat dekat (rahmat-Nya) lagi memperkenankan (doa hamba-Nya)."

[726] Maksudnya: manusia dijadikan penghuni dunia untuk menguasai dan memakmurkan dunia.

Menurut Mannan, modal menduduki tempat yang khusus dalam ekonomi Islam sebagai sarana produksi yang menghasilkan, tidak sebagai faktor produksi pokok melainkan perwujudan tanah dan tenaga kerja. Argumentasi yang dikemukakan adalah kenyataan yang menunjukkan bahwa modal dihasilkan oleh pemanfaatan tenaga kerja dan penggunanaan sumber daya alami.

Sehingga tenaga kerja dan modal merupakan salah satu faktor penentu dalam output produksi. Berdasarkan ayat tersebut manusia dijadikan penghuni dunia untuk menguasai dan memakmurkan dunia, maka sumber daya manusia sangat di manfaatkan dalam menghasilkan produksi, termasuk tenaga kerja dan modal.

Ayat lain menjelaskan mengenai data yang digunakan yaitu data ILMTA dimana salah satu jumlah tenaga kerja dan modal sama-sama banyak maka menghasilkan jumlah produksi yang cukup banyak pula, atau sebaliknya. Dari hal ini merujuk pada Qs. Al-Isra' ayat 71 yang berbunyi:

يَوْمَ نَدْعُوا۟ كُلَّ أُنَاسٍۭ بِإِمَـٰمِهِمْ ۖ فَمَنْ أُوتِىَ كِتَـٰبَهُۥ بِيَمِينِهِۦ فَأُو۟لَـٰٓئِكَ

يَقْرَءُونَ كِتَـٰبَهُمْ وَلَا يُظْلَمُونَ فَتِيلًا ٧١

Artinya:
"(ingatlah) suatu hari (yang di hari itu) Kami panggil tiap umat dengan pemimpinnya; dan Barangsiapa yang diberikan kitab amalannya di tangan kanannya Maka mereka ini akan membaca kitabnya itu, dan mereka tidak dianiaya sedikitpun".

Ayat tersebut menjelaskan jika diberikan kitab amalan di tangan kanan dan mereka tidak akan dianiaya sedikitpun, hal ini juga berarti suatu kebaikan yang kita lakukan di dunia pasti akan menghasilkan nilai kebaikan di akhirat yang mana akan bebas dari siksaan Allah. Berdasarkan data juga dapat dilihat dengan banyak para pekerja dan modal yang dikeluarkan maka hasil produksi yang diperoleh juga meningkat, begitu pula sebaliknya. Jika lebih banyak salah satu di antara pekerja dan modal maka hasil yang diperoleh tidak maksimal. Sehingga semakin banyak melakukan amalan yang baik maka kita akan bebas dari aniaya Allah.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan di atas dapat disimpulkan:

1. Bentuk estimasi parameter dengan menggunakan fungsi produksi *Cobb-Douglas*

$$Q_t = \beta_1 L_t^{\beta_2} K_t^{\beta_3}$$

menggunakan metode *Maximum Likelihood* dengan iterasi *Method of Scoring*, adalah:

$$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} - \left(E\left(\left. \frac{\partial^2 L}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(n)}} \right) \right)^{-1} \left. \frac{\partial L}{\partial \beta} \right|_{\beta^{(n)}}$$

2. Implementasi fungsi *Cobb-Douglas* menggunakan *Metode Likelihood* dengan iterasi *Method of Scoring*, yaitu:

$$Q = e^{3.32} L^{0.26} K^{0.53}$$

3. Hasil perbandingan estimasi model statistik nonlinier menggunakan metode *Least Square* dengan iterasi *Quadratic Hill Climbing* dan *Method of Scoring* pada implementasi data nonlinier yaitu data Industri Logam, Mesin, Tekstil, dan Aneka (ILMTA) tahun 1993-2012 di provinsi Jawa Timur dengan model *Cobb-Douglas* (CD), disimpulkan bahwa iterasi *Method of Scoring* lebih besar dalam mencapai kekonvergenan saat *error* 10^{-9} dan iterasi 738, dibandingkan dengan menggunakan *Quadratic Hill Climbing* saat *error* 10^{-9} dan iterasi 175.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil pembahasan di atas dapat disarankan:

1. Dalam mengestimasi parameter dapat menggunakan fungsi produksi yang lainnya seperti CES (*Constant Elasticity of Subtitution*).
2. Implementasi menggunakan data selain ILMTA, yang mana datanya mengandung *input-input* berbeda dari tenaga kerja, modal dan produksi.
3. Hasil perbandingan iterasi *Method of Scoring* dengan *Quadratic Hill Climbing* belum cepat konvergen sehingga dapat dibandingkan dengan iterasi lainnya.

DAFTAR RUJUKAN

Abdullah. 2007. Tafsir Ibnu Katsir jilid 1. Jakarta: Pustaka Imam Asy-Syafi'i.

Abdussakir. 2007. Ketika Kyai Mengajar Matematika. Malang: UIN Malang Press.

Anton, H. Dan Rorres, C.. 2004. *Aljabar Linier Elementer Versi Aplikasi*. Jakarta: Erlangga.

Al-Jazairi, Abu Bakar Jabir. 2006. *Tafsir Al-Aisar*. Jakarta: Team Darus Sunnah.

Aziz, Abdul. 2010. *Ekonometrika (Teori dan Praktek Eksperimen dengan MATLAB)*. Malang: UIN-Maliki press.

Bain, Lee. J. 1991. *Introduction To Probability and Mathematical Statistics*. USA: Duxbury Press.

Bambang. 2002. *Metode Numerik Dilengkapi dengan Program Komputer*. Yogyakarta: Beta offset.

Boedijoewono, Drs. Noegroho. 2007. *Pengantar Statistika Ekonomi dan Bisnis Jilid 2 (Induktif) Edisi Revisi*. Yogyakarta: Sekolah Tinggi Ilmu Manajemen YKPN.

Draper, N.R. & Smith, H.. 1992. *Analisis Regresi Terapan*. Jakarta: PT. Gramedia Pustaka Utama.

Firdaus, M.. 2004. *Ekonometrika Satuan Pendekatan Aplikatif*. Jakarta: Bumi Aksara.

Gujarati, Damodar N dan Dawn C. Porter. 2010. *Dasar-dasar Ekonometrika Edisi 5*. Jakarta: Salemba Empat.

Harinaldi. 2005. *Prinsip Statistik Untuk Teknik dan Sains*. Jakarta: Erlangga.

Jalaluddin, R. 2005. *Tafsir Bil Ma'tsur*. Jakarta: Al-Huda.

Johnson, R.A. & Dean, W.W.. 1998. *Applied Multivariate Statistical Analysis, Fourth Edition*. New York: Prentice Hall,inc.

Kalangi, Josep Bintang. 2012. *Matematika Ekonomi dan Bisnis*. Jakarta: Salemba Empat.

Kamal Faqih, Allamah dan tim ulama. 2006. *Tafsir Nurul Qu'ran*. Jakarta: Penerbit Al-Huda.

Kusumawati, R.. 2009. *Aljabar Linier & Matriks*. Malang: UIN-Malang Press.

Mannan, Muhammad Abdul. 1995. *Teori dan Praktek Ekonomi Islam*. Yogyakarta: Dana Bakti Wakaf.

Masyhuri, Dr. 2007. *Ekonomi Mikro*. Malang: UIN-Malang Press.

Muhammad Hasbi Ash-Shiddieqy, Teungku. 2000. *Tafsir Al-Qur'anul Majid An-Nuur*. Semarang: PT. Pustaka Rizki Putra.

Mulyono, Sri. 2006. *Statistika Untuk Ekonomi & Bisnis*. Jakarta: Lembaga Penerbit Fakultas Ekonomi UI.

Munir, R.. 2008. *Metode Numerik Revisi ke-2*. Bandung: Informatika.

Noerhayati, Eriska. 2016. *Estimasi Parameter Model Statistik Nonlinier pada Fungsi Cobb-Douglas Secara Least Square dengan Iterasi Quadratic Hiil Climbing*. Skripsi FMIPA Matematika UIN Malang: tidak diterbitkan.

Qardhawi, Yusuf. 2004. Peran Nilai dan Moral dalam Perekonomian Islam. Jakarta: Robbani Press.

Sembiring. 1995. *Analisis Regresi*. Bandung: ITB.

Setiawan dan Kusrini Dwi Endah. 2010. *Ekonometrika*. Yogyakarta: Penerbit Andi.

Suliyanto. 2011. *Ekonometrika Terapan: Teori dan Aplikasi SPSS*. Yogyakarta: CV Andi Offset.

Supranto, J..2003. *Pengantar Matrix*. Jakarta: PT. RINEKA CIPTA.

Yitnosumarto, Sunyoto. 1990. *Dasar-Dasar Statistika*. Jakarta: Rajawali.

Walpole, E. Ronald, dkk. 1995. *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuan edisi ke-4.* Bandung: Penerbit ITB Bandung.

LAMPIRAN

LAMPIRAN 1

Data Industri Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka (ILMTA) tahun 1993-2012

di Provinsi Jawa Timur

No	Tahun	Kerja	Modal	Produksi
1	2012	473786	18053	8250
2	2011	445857	11389	37759
3	2010	392282	6565	14915
4	2009	349565	5939	13135
5	2008	713379	67001	22673
6	2007	230025	11837	32685
7	2006	212334	7654	16780
8	2005	205439	5408	4108
9	2004	200367	5098	7689
10	2003	195483	4953	3720
11	2002	192412	3673	4854
12	2001	186537	4664	3619
13	2000	178765	4470	3525
14	1999	105933	5980	8749
15	1998	80610	6761	4060
16	1997	101229	9780	9567
17	1996	94607	5432	8657
18	1995	46317	6785	4098
19	1994	39817	9087	6345
20	1993	38857	6454	8087

LAMPIRAN 2

PROGRAM MATLAB

```
% %Maximum Likelihood Estimation
% Cobb-Douglas Production Function
% Method of Scoring Iterations
% Memerlukan file: f1, L1, Lt1, numgradL1, dan numgradLt1
% Program ini akan menaksir parameter b1, b2, dan b3 yang ada pada
Cobb-Douglas
  %Production Function
% y = b1.(L^b2).(K^b3)

clc;
clear;
format long;

LKy=[473786 18053 8250
    445857 11389 37759
    392282 6565 14915
    349565 5939 13135
    713379 67001 22673
    230025 11837 32685
    212334 7654 16780
    205439 5408 4108
    200367 5098 7689
    195483 4953 3720
    192412 3673 4854
    186537 4664 3619
    178705 4470 3525
    105933 5980 8749
    80610 6761 4060
    101229 9780 9567
    94607 5432 8657
    46317 6785 4098
    39817 9087 6345
    38857 6454 8087];

L = LKy(:,1);
K = LKy(:,2);
Q = LKy(:,3);
for i=1:length(L)
    L(i,1)=log(L(i,1));
end
for i=1:length(K)
    K(i,1)=log(K(i,1));
end
for i=1:length(Q)
    Q(i,1)=log(Q(i,1));
end
m1=zeros(length(L),1);
m1(:,1)=1;

y = Q
x = [m1 L K]
T = length(y);
```

```
tic ;

% Method of Scoring Iterations

%b1_awal=input('Masukan nilai b1= ');
%b2_awal=input('Masukan nilai b2= ');
%b3_awal=input('Masukan nilai b3= ');
tn=1;

%b=[0.1;1.2;0.7];
b=[0.7;0.3;1];
k=length(b);

rep=5000; %jumlah iterasi untuk konvergensi L
j1 = 0 ;
j2 = 0 ;

e=eye(k);
%
for i = 1:rep ;
      L  = L1(b,x,y);
      zt = numgradLt1(b,x,y); %Numerical gradient, TxK
      z  = numgradL1(b,x,y) ; %Numerical gradient, Kx1
      step =tn*(inv(zt'*zt))*z ;
      bnext = b + step ;
      Lnext = L1(bnext,x,y) ;
      fnew  = f1(bnext,x);
      Lnew  = (y-fnew)'*(y-fnew);

      if norm(bnext-b) <= 1e-9 (Lnext-L) <= 1e-9
      disp('Sudah konvergen. Dengan jumlah iterasinya adalah:') ;
         disp(i) ;
         break ;
      end ;
      if i == rep
         disp('Belum konvergen, iterasinya perlu ditambah lagi.');
         disp('Atau ubahlah initial values-nya') ;
         disp(' ') ;
      end ;

      b = bnext ;
       b1_baru(i+1)=bnext(1,:);
       b2_baru(i+1)=bnext(2,:);
       b3_baru(i+1)=bnext(3,:);
       %L_baru(i+1)=Lnew(1,:);
end ;

% Hasil Akhir
bmle = bnext; % Maximum Likelihood estimator untuk b
Lmle = Lnext(1,:);
f    = f1(bmle,x);
s2mle= (y-f)'*(y-f)/T;
% S_new(i+1)=S(1,:);

disp('==================================================================
========')
```

```
disp('Hasil Maximum Likelihood Estimation dengan iterasi Method of
Scoring adalah:') ;
disp('          b1 baru        b2 baru          b3 baru')
disp([ b1_baru' b2_baru' b3_baru'])
disp('==================================================================
======')
disp ('Nilai s2mle dan Lmle adalah: ');
[s2mle Lmle]

% Menentukan AIC dan SC
k = length (b);
LL    = L1(b,x,y);
AIC   = abs(-2*LL+2*k);
SC    = abs(-2*LL+log(T)*k);

disp
('==================================================================
==')
disp ('Nilai AIC dan SC adalah: ');
[AIC  SC]
% disp('s2  L')
% disp([s2mle Lmle])
t1 = toc;

b1new=[b1_baru]';
b2new=[b2_baru]';
b3new=[b3_baru]';

% % Plotting

r=1:length(b1new);
figure(1)
plot(r,b1new(r,:),'-ro')
grid on
title('Grafik kekonvergenan dari b1 secara Method of Scoring')
xlabel('Besar iterasi')
ylabel('b1')

figure(2)
plot(r,b2new(r,:),'-yo')
grid on
title('Grafik kekonvergenan dari b2 secara Method of Scoring')
xlabel('Besar iterasi')
ylabel('b2')

figure(3)
plot(r,b3new(r,:),'-bo')
grid on
title('Grafik kekonvergenan dari b3 secara Method of Scoring')
xlabel('Besar iterasi')
ylabel('b3')
```

RIWAYAT HIDUP

Kenny Wan Meivrita dilahirkan di Perawang pada tanggal 27 Mei 1995, anak pertama dari tiga bersaudara, pasangan dari Bapak M. Tasar dan Ibu Vera Munika Sari. Pendidikan dasar ditempuh di SDS YPPI yang ditempuh di kampung halamannya serta ditamatkan pada tahun 2007.

Pada tahun yang sama dia melanjutkan pendidikan menengah pertama di SMP Islam Terpadu (IT) Bangkinang. Pada tahun 2010 dia menamatkan pendidikan menengah atas di SMA IT Bangkinang dan menamatkan pendidikan tersebut pada tahun 2013. Pendidikan berikutnya dia tempuh di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim melalui jalur SNMPTN dengan mengambil Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi. Penulis dapat dihubungi via email: kennywanmeivrita@gmail.com

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345 Fax. (0341) 572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Kenny Wan Meivrita
NIM : 13610018
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Estimasi Parameter Model Statistik Nonlinier Pada Fungsi *Cobb-Douglas* Secara *Maximum Likelihood* Dengan Iterasi *Method of Scoring*
Pembimbing I : Abdul Aziz, M.Si
Pembimbing II : Evawati Alisah, M.Pd

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan	
1	8 Februari 2017	Konsultasi Bab I dan Bab II	1.	
2	22 Februari 2017	Konsultasi Bab II		2.
3	9 April 2017	Konsultasi Agama Bab I dan Bab II	3.	
4	13 April 2017	Konsultasi Bab I, II dan III		4.
5	4 Mei 2017	Konsultasi Bab IV	5.	
6	9 Mei 2017	ACC Agama Bab I dan II		6.
7	8 September 2017	Revisi Bab III dan Bab IV	7.	
8	9 Oktober 2017	Revisi Bab IV		8.
9	18 Oktober 2017	Konsultasi Bab IV	9.	
10	3 November 2017	Revisi Bab IV dan Konsultasi Agama Bab II dan Bab IV		10.
11	16 November 2017	Konsultasi Bab IV	11.	
12	24 November 2017	ACC Keseluruhan		12.
13	27 November 2017	ACC Agama Bab IV	13.	
14	29 November 2017	ACC Agama Keseluruhan		14.

Malang, 29 November 2017
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650401 200312 1 001