SPEKTRUM *SIGNLESS-LAPLACE* DAN *DETOUR* GRAF KONJUGASI DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

OLEH
RHOUL KHASANAH
NIM. 13610021

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018

SPEKTRUM *SIGNLESS-LAPLACE* DAN *DETOUR* GRAF KONJUGASI DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Rhoul Khasanah
NIM. 13610021

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018

SPEKTRUM *SIGNLESS-LAPLACE* DAN *DETOUR* GRAF KONJUGASI DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Oleh
Rhoul Khasanah
NIM. 13610021

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 17 November 2017

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Dr. Abdussakir, M.Pd	Dr. Ahmad Barizi, M.A
NIP. 19751006 200312 1 001	NIP. 19731212 199803 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

SPEKTRUM *SIGNLESS-LAPLACE* DAN *DETOUR* GRAF KONJUGASI DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Oleh
Rhoul Khasanah
NIM. 13610021

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 17 November 2017

Penguji Utama	: Evawati Alisah, M.Pd	....
Ketua Penguji	: Dr. Usman Pagalay, M.Si	....
Sekretaris Penguji	: Dr. Abdussakir, M.Pd	....
Anggota Penguji	: Dr. Ahmad Barizi, M.A	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Rhoul Khasanah

NIM : 13610021

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Spektrum *Signless-Laplace* dan *Detour* Graf Konjugasi dari Grup Dihedral

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pemikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pemikiran saya sendiri, kecuali dengan mencamtumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 30 Oktober 2017
Yang membuat pernyataan

METERAI TEMPEL
TGL. 20
C87D8AEF206810682
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Rhoul Khasanah
NIM. 13610021

MOTO

إِنَّمَآ أَمۡرُهُۥٓ إِذَآ أَرَادَ شَيۡـًٔا أَن يَقُولَ لَهُۥ كُن فَيَكُونُ ٨٢

"Sesungguhnya keadaan-Nya apabila Dia menghendaki sesuatu hanyalah berkata kepadanya: "Jadilah!" Maka terjadilah ia" (Yaasiin/36:82).

"Keyakinanmu akan membawamu kepada suatu kenyataan"

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda Kamim, ibunda Maisyaroh,

kakak tersayang Ahmad Ghozali, Eny Zuroidah, dan M. Lukman Hakim

serta KH. Chusaini Al-Hafid yang selalu mendoakan santrinya.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segalala puji bagi Allah Swt. yang telah melimpahkan rahmat, taufik serta hidayah-Nya kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam penulisan skripsi ini, penulis banyak mendapatkan bimbingan, bantuan, dorongan, serta doa dari berbagai pihak yang telah membantu dan mendukung dalam menyelesaikan skripsi ini. Oleh karena itu penulis dengan hormat mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. Abdul Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Abdussakir, M.Pd selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan arahan dan motivasi untuk segera menyelesaikan skripsi ini.
5. Dr. Ahmad Barizi, M.A, selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan inspirasi dalam penyunsunan keterkaitan sains dengan al-Quran.
6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang

terutama seluruh dosen yang telah memberikan bimbingan dalam perkuliahan.

7. Kedua orang tua dan seluruh keluarga yang memberikan dukungan berupa motivasi dan doa sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik.
8. Teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2013, terutama temen-temen yang telah membantu dalam penyelesaian skripsi ini, teman-teman PPTQ Nurul Furqon, serta KH. Chusaini yang selalu memberikan doa untuk santrinya.
9. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik berupa materiil maupun moril.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang membacanya.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, Oktober 2017

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Khasanah, Rhoul, 2017. **Spektrum *Signless-Laplace* dan *Detour* Graf Konjugasi dari Grup Dihedral.** Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Abdussakir, M.Pd. (II) Dr. Ahmad Barizi, M.A.

Kata kunci: spektrum, matriks *signless-Laplace*, matriks *detour*, nilai eigen, multiplisitas, graf konjugasi, grup dihedral

Graf konjugasi yang dibangun dari grup dihedral dapat dinyatakan dalam sebuah matriks, yaitu matriks *signless-Laplace* dan matriks *detour*. Matriks tersebut dapat diketahui nilai eigen dan vektor eigen. Spektrum merupakan matriks yang berisi semua nilai eigen pada baris pertama dan multiplisitas yang bersesuaian dengan nilai eigen pada baris kedua. Spektrum yang diperoleh dari matriks $L^+(G)$ disebut spektrum *signless-Laplace* sedangkan spektrum yang diperoleh dari matriks $DD(G)$ disebut spektrum *detour*. Berdasarkan penelitian diperoleh pola spektrum *signless-Laplace* dan *detour* graf konjugasi dari grup dihedral.

1. Spektrum *signless-Laplace* graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n} dengan n ganjil $n \geq 5, n \in N$ adalah

$$Spec_{L^+}(D_{2n}) = \begin{bmatrix} 2n-2 & n-2 & 2 & 0 \\ 1 & n-1 & \frac{n-1}{2} & \frac{n+1}{2} \end{bmatrix}$$

2. Spektrum *detour* graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n}

   a Dengan n ganjil dan $n \geq 3, n \in N$ adalah

$$Spec_{DD}(D_{2n}) = \begin{bmatrix} (n-1)^2 & 1 & 0 & -1 & -(n-1) \\ 1 & \frac{n-1}{2} & 1 & \frac{n-1}{2} & n-1 \end{bmatrix}$$

   b Dengan n genap dan $n \geq 6, n \in N$ adalah

$$Spec_{DD(D_{2n})} = \begin{bmatrix} \left(\frac{n}{2}-1\right)^2 & 1 & 0 & -1 & -\left(\frac{n}{2}-1\right) \\ 2 & \frac{n}{2}-1 & 2 & \frac{n}{2}-1 & n-2 \end{bmatrix}$$

Pada penelitian selanjutnya, disarankan untuk meneliti pada jenis graf yang lain dan jenis grup yang lain.

ABSTRACT

Khasanah, Rhoul, 2017. ***Signless-Laplace* and *Detour* Spectrum of Conjugation Graph of Dihedral Group.** Thesis. Departement of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Islamic State University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Dr. Abdussakir, M.Pd. (II) Dr. Ahmad Barizi, M.A.

Keyword: spectrum, *signless-Laplace* matrix, *detour* matrix, conjugation graph dihedral group

Conjugation graph of dihedral group can be expressed in a matrix, that is *signless-Laplace* matrix and *detour* matrix. That matrix can be known its eigenvalues and eigenvectors. The spectrum is a matrix containing all the values of the eigenvalues in the first row and the number of multiplicity of eigenvalues in the second row. The spectrum obtained from $L^+(G)$ matrix is called the spectrum of the *signless-Laplace*, whereas the spectrum obtained from $DD(G)$ matrix is called the *detour* spectrum. Based on the research, the researcher obtained that the spectral pattern of *signless-Laplace* and *detour* spectrum of conjugation graph of dihedral group.

1. *Signless-Laplace* spectrum of conjugation graph of dihedral group D_{2n} where n is even and $n \geq 5, n \in N$ is:

$$Spec_{L^+}(D_{2n}) = \begin{bmatrix} 2n-2 & n-2 & 2 & 0 \\ 1 & n-1 & \frac{n-1}{2} & \frac{n+1}{2} \end{bmatrix}$$

2. *Detour* spectrum of conjugation graph of dihedral group D_{2n}
   a For odd n and $n \geq 3, n \in N$ is:

$$Spec_{DD}(D_{2n}) = \begin{bmatrix} (n-1)^2 & 1 & 0 & -1 & -(n-1) \\ 1 & \frac{n-1}{2} & 1 & \frac{n-1}{2} & n-1 \end{bmatrix}$$

   b For even n and $n \geq 6, n \in N$ is:

$$Spec_{DD(D_{2n})} = \begin{bmatrix} \left(\frac{n}{2}-1\right)^2 & 1 & 0 & -1 & -\left(\frac{n}{2}-1\right) \\ 2 & \frac{n}{2}-1 & 2 & \frac{n}{2}-1 & n-2 \end{bmatrix}$$

For the next research, the researcher suggests to do researches on other types of graph and the other group types.

ملخص

روح الحسنة، **2017**. سفكتروم ***Signless-Laplace*** و ***Detour*** مخطاط كوانجوكاسي من زمرة زوجية. البحث الجامعي. ثعبة رياضيات كلية العلوم والتكنولوجيا. جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرف: (**1**) الدكتور عبد الشاكر الماجستير. (**2**) الدكتور أحمد بارزي

الكلمات الرئيسية: سفكتروم، ومخطاط كوانجوكاسي، ومصفوفة *signless-Laplace*، ومصفوفة *detour*، وزمرة الزوجية.

مخطاط كونجوكاسي يبنى من زمرة الزوجية يسمى في مصفوفة يعني مصفوفة *signless-Laplace* و مصفوفة *detour*. المصفوفة من القيم الذاتية والمتجهات الذاتية. سفيكتروم هو مصفوفة فيه كل والقيم الذاتية في صف الأول وتعدّد الذي توافق بالقيم الذاتية في صف الثاني. سفيكتروم ا نال من مصفوفة $L^+(G)$ يسمى سفيكتروم *signless-Laplace* وإما سفيكتروم نال من مصفوفة $DD(G)$ يسمى سفيكتروم *detour*. اعتمادا على البحث تنال سفيكتروم *signless-Laplace* و *detour* مخطاط كونجوكاسي من زمرة الزوجية.

1. سفيكتروم *signless-Laplace* مخطاط كوانجوكاسي من زمرة الزوجية D_{2n} با n وترا و $n \geq 5, n \in N$ يعني

$$Spec_{L^+}(D_{2n}) = \begin{bmatrix} 2n-2 & n-2 & 2 & 0 \\ 1 & n-1 & \frac{n-1}{2} & \frac{n+1}{2} \end{bmatrix}$$

2. سفيكتروم *detour* مخطاط كونجوكاسي من زمرة الزوجية D_{2n}

أ. با n وترا و $n \geq 3, n \in N$ يعني

$$Spec_{DD}(D_{2n}) = \begin{bmatrix} (n-1)^2 & 1 & 0 & -1 & -(n-1) \\ 1 & \frac{n-1}{2} & 1 & \frac{n-1}{2} & n-1 \end{bmatrix}$$

ب. با n شفعيا و $n \geq 6, n \in N$ يعني

$$Spec_{DD(D_{2n})} = \begin{bmatrix} \left(\frac{n}{2}-1\right)^2 & 1 & 0 & -1 & -\left(\frac{n}{2}-1\right) \\ 2 & \frac{n}{2}-1 & 2 & \frac{n}{2}-1 & n-2 \end{bmatrix}$$

وفي البحث الأتي، على الأحسن في مجال المختلف يعني من جنس مخطاط الأخرى ومن جنس زمرة الأخرى.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Aljabar abstrak merupakan bagian ilmu matematika yang berawal dari usaha memecahkan suatu masalah seperti menentukan solusi persamaan polinomial, himpunan, perhitungan sederhana dan lain-lain (Gilbert dan Gilbert, 2009:1). Himpunan didefinisikan sebagai kumpulan objek-objek yang memiliki sifat tertentu yang dapat didefinisikan dengan jelas (Gilbert dan Gilbert, 2009:1). Dalam himpunan tertentu terdapat elemen-elemen yang dapat disajikan dalam gambar, yaitu kumpulan titik-titik dan kumpulan sisi-sisi yang akan membentuk suatu gambar yang disebut graf. Graf termasuk bagian dari bidang matematika yang mempelajari tentang beberapa aturan mengenai suatu bentuk. Graf digambarkan sebagai kumpulan titik-titik (*vertices*) yang dihubungkan oleh sisi-sisi (*edges*).

Graf G adalah pasangan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik, dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan takberurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut sisi. Banyaknya unsur di $V(G)$ disebut order dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$, dan banyaknya unsur di $E(G)$ disebut ukuran dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka order dan ukuran dari G masing-masing cukup ditulis p dan q. Graf dengan order p dan ukuran q dapat disebut graf-*(p,q)* (Abdussakir, dkk, 2009:4).

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung *(adjacent)*, v dan e serta u dan e disebut terkait langsung *(incident)*, dan titik u dan v disebut ujung dari e. Untuk selanjutnya, sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = uv$ (Abdussakir, dkk, 2009:6). Derajat dari titik v di graf G, ditulis $deg_G(v)$, adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung dengan v. Dalam konteks pembicaraan hanya terdapat satu graf G, maka tulisan $deg_G(v)$ disingkat menjadi $deg(v)$ (Abdussakir, dkk, 2009:9).

Misalkan G graf dengan order p $(p \geq 1)$ dan ukuran q serta himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$. Matriks keterhubungan titik (*adjacency matrix*) dari graf G, dinotasikan dengan $A(G)$, adalah matriks $(p \times p)$ dengan unsur pada baris ke-i dan kolom ke-j bernilai 1 jika titik v_i terhubung langsung dengan titik v_j serta bernilai 0 jika titik v_i tidak terhubung langsung dengan titik v_j. Dengan kata lain, matriks keterhubungan titik dapat ditulis $A(G) = [a_{ij}], 1 \leq i, j \leq p$, dengan

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & , jika\ v_i v_j \in E(G) \\ 0 & , jika\ v_i v_j \notin E(G) \end{cases}$$

Dengan demikian, matriks keterhubungan titik $A(G)$ suatu graf G adalah matriks simetri dengan unsur 0 dan 1, dan memuat nilai 0 pada diagonal utamanya (Chartrand, dkk, 2016:39).

Matriks derajat dari graf G, dinotasikan dengan $D(G)$, adalah matriks diagonal yang elemen baris ke-i dan kolom ke-i adalah derajat dari v_i, $i = 1,2,3, \ldots, p$ (Chartrand, dkk, 2016:39). Jadi, matriks derajat dari graf G dapat ditulis $D(G) = [d_{ij}], 1 \leq i, j \leq p$, dengan

$$d_{ij} = \begin{cases} deg(v_i) & ,i = j \\ 0 & ,i \neq j \end{cases}$$

Matriks $L^{+}(G) = D(G) + A(G)$ disebut matriks *signless-Laplace* dari graf G (Brouwer dan Haemers, 2011:1). Matriks *detour* dari G adalah matriks $DD(G)$ sedemikian hingga elemen pada baris ke-i dan kolom ke-j adalah bilangan yang menyatakan lintasan terpanjang dari v_i ke v_j di G (Ayyaswamy dan Balachandran, 2010:1).

Pembahasan matriks keterhubungan titik $A(G)$, matriks *signless-Laplace* $L^{+}(G)$, dan matriks *detour* $DD(G)$ dari graf G dapat dikaitkan dengan konsep nilai eigen dan vektor eigen pada topik aljabar linier yang menghasilkan konsep spektrum. Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ dengan $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$ adalah nilai eigen berbeda dari matriks suatu graf, dan misalkan $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_n)$ adalah multiplisitas masing-masing λ_i. Matriks berordo $(2 \times n)$ yang memuat $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ pada baris pertama dan $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_n)$ pada baris kedua disebut spektrum graf G, dan dinotasikan dengan $Spec(G)$ (Biggs, 1993:8). Jadi, spektrum graf G dapat ditulis dengan

$$Spec(G) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ m(\lambda_1) & m(\lambda_2) & \cdots & m(\lambda_n) \end{bmatrix}$$

Spektrum yang diperoleh dari matriks $L^{+}(G)$ disebut spektrum *signless-Laplace*, sedangkan spektrum yang diperoleh dari matriks $DD(G)$ disebut spektrum *detour*.

Beberapa penelitian mengenai spektrum suatu graf sudah pernah dilakukan Abdussakir, dkk (2012) meneliti spektrum *adjacency*, *Laplace*, *signless-Laplace*, dan *detour* graf multipartisi komplit $K(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n)$. Abdussakir, dkk (2013) meneliti spektrum *adjacency*, *Laplace*, *signless-Laplace*, dan *detour* graf *commuting* dari grup dihedral. Rivatul Ridho Elvierayani (2014) meneliti spektrum *adjacency*, *Laplace*, *singless-Laplace graf non commuting* dari grup dihedral.

Teori graf juga membahas graf yang dibangun dari grup yang anggotanya memenuhi sifat saling konjugasi. Misalkan G grup non komutatif. Unsur g dan h di G dikatakan saling konjugasi jika ada x di G sehingga $g = xhx^{-1,}$ maka dapat dikatakan g dan h saling konjugasi (Kandasamy dan Smarandache, 2009:12). Misalkan semua kelas konjugasi di G adalah $[e], [g_1], [g_2], \ldots, [g_n]$ unsur h_i akan terhubung langsung ke g_i, jika h anggota $[g_i]$, $i = 1,2, \ldots n$ (Kandasamy dan Smarandache, 2009:79).

Dalam penelitian khususnya matematika telah banyak temuan-temuan dalam pengembangan ilmu, dalam penelitian tersebut tentulah menghasilkan suatu teorema atau ukuran utuk dapat digunakan secara umum. Hal ini telah terbukti dalam firman Allah yang berbunyi

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ

"Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran" (QS. Al-Qamar/54: 49).

Dalam ayat tersebut mengandung makna bahwa segala sesuatu yang diturunkan oleh Allah mempunyai pola atau ukuran tertentu yang telah ditetapkan, sehingga makhluk hidup di bumi tidak perlu khawatir karena Allah sudah menetapkan sesuai dengan tempatnya. Dan hendaknya makhluk hidup di bumi khususnya manusia mencari bentuk ukuran yang yang dimaksudkan Allah, seperti halnya ukuran-ukuran yang telah tertulis dalam al-Quran. Begitu halnya dengan topik peneliti yang berkaitan dengan penentuan pola spektrum *signless-Laplace* dan spektrum *detour* dengan menggunakan tahapan dalam pencarian spektrum yang melibatkan kajian teori aljabar abstrak, graf, dan aljabar linier. Dengan demikian dapat diketahui pola spektrum *signless-Laplace* dan *detour* dari graf konjugasi grup dihedral D_{2n}.

Sampai saat ini belum ada yang mengkaji spektrum *signless-Laplace* dan *detour* pada graf konjugasi dari grup dihedral. Pada penelitian ini, akan dikaji spektrum *signless-Laplace* dan *detour* graf konjugasi dari grup dihedral.

1.2 Rumusan Masalah

Masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana pola umum spektrum *signless-Laplace* dan *detour* graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n}?

1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai rumusan masalah, maka tujuan penelitian ini adalah untuk menentukan pola umum spektrum *signless-Laplace* dan *detour* graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n}.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut.

1. Memberikan informasi mengenai spektrum suatu graf yang diperolah dari suatu grup.
2. Memberikan informasi saling keterkaitan antara beberapa topik dalam matematika, khususnya teori graf, aljabar linier, dan aljabar abstrak.

1.5 Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif. Pola pembahasannya dimulai dari hal yang khusus (induktif) menuju pada sesuatu yang bersifat deduktif. Adapun langkah-langkah untuk mencari spektrum *signless-Laplace* dan *detour* graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n} yaitu:

1. Menentukan elemen-elemen dari grup dihedral D_{2n}
2. Menentukan unsur-unsur dari grup dihedral D_{2n} yang saling konjugasi berdasarkan tabel *Cayley* dengan operasi komposisi.
3. Membentuk graf konjugasi dari unsur-unsur konjugasi.
4. Menyatakan graf konjugasi dalam bentuk matriks *signless-Laplace* $L^{+}(G)$ dan matriks *detour* $DD(G)$.
5. Menentukan polinomial karakteristik matriks *signless-Laplace* $L^{+}(G)$ dan matriks *detour* $DD(G)$ dengan menggunakan aplikasi *Maple 18*.
6. Menentukan spektrum *signless-Laplace* dan *detour*.
7. Membentuk pola umum polinomial karakteristik dari masing-masing matriks.
8. Menentukan pola umum spektrum
9. Membuat dugaan (kojektur) berdasarkan pola umum spektrum *signless-Laplace* dan spektrum *detour* graf konjugasi dari grup dihedral.
10. Merumuskan konjektur sebagai suatu teorema.
11. Memberikan kesimpulan dari hasil penelitian.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam penelitian ini ada empat bagian yaitu:

Bab I Pendahuluan

Pada bab ini diuraikan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Pada bab ini dijelaskan mengenai berbagai macam permasalahan yang berkaitan dengan judul penelitian meliputi grup dihedral, graf konjugasi, matriks *signless-Laplace* dan *detour*, spektrum *signless-Laplace* dan *detour*, serta menjelaskan integrasi ayat al-Quran dengan graf.

Bab III Pembahasan

Pada bab ini diuraikan mengenai hasil penelitian yang dikaji, yaitu matriks *signless-Laplace* dan *detour* beserta pola matriks dari keduanya, kemudian menguraikan spektrum *signless-Laplace* dan *detour* beserta pola spektrum graf konjugasi dari grup dihedral, serta menjelaskan keterkaitan ayat al-Quran dengan graf, yaitu keseimbangan dalam kehidupan.

Bab IV Penutup

Pada bab ini dijelaskan kesimpulan yang diperoleh dan saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Grup Dihedral

Grup adalah suatu struktur aljabar yang dinyatakan sebagai $(G,*)$ dengan G adalah himpunan tak kosong dan $*$ adalah operasi biner di G yang memenuhi sifat-sifat berikut:

1. $(a * b) * c = a * (b * c)$, untuk semua $a, b, c \in G$ (yaitu $*$ assosiatif).
2. Ada suatu elemen e di G sehingga $a * e = e * a = a$, untuk semua $a \in G$ (e disebut identitas di G).
3. Untuk setiap $a \in G$ ada suatu elemen a^{-1} di G sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (a^{-1} disebut invers dari a).

Sebagai tambahan, grup $(G,*)$ disebut *abelian* (grup komutatif) jika $a * b = b * a$ untuk semua $a, b \in G$ (Dummit dan Foote, 2004:16-17). Himpunan bilangan bulat Z dengan operasi jumlah memenuhi aksioma grup, yakni $(Z, +)$ adalah grup abelian.

Grup dihedral adalah grup dari himpunan simetri-simetri dari segi-n beraturan, dinotasikan D_{2n}, untuk setiap n bilangan bulat positif dan $n \geq 3$. Dalam buku lain ada yang menuliskan grup dihedral dengan D_n (Dummit dan Foote, 2004). Misalkan D_{2n} suatu grup yang didefinisikan oleh st untuk $s, t \in D_{2n}$ yang diperoleh dari simetri (simetri sebagai fungsi pada segi-n, sehingga st adalah fungsi komposisi). Jika s, t akibat permutasi titik berturut-turut σ, τ, maka st akibat dari $\sigma \circ \tau$ Operasi biner pada D_{2n} adalah assosiatif karena fungsi komposisi adalah assosiatif. Identitas dari D_{2n} adalah identitas dari simetri (yang meninggalkan semua titik tetap), dinotasikan dengan 1, dan invers dari $s \in D_{2n}$ adalah kebalikan semua putaran dari simetri s (jadi jika s akibat permutasi pada titik σ, s^{-1} akibat dari σ^{-1}) (Dummit dan Foote, 2004:24).

Karena grup dihedral akan digunakan secara ektensif, maka perlu beberapa notasi dan beberapa hitungan yang dapat menyederhanakan perhitungan selanjutnya dan membantu mengamati D_{2n} sebagai grup abstrak (Dummit dan Foote, 2004:26), yaitu:

a. $1, r, r^2, \dots, r^{n-1}$.

b. $|s| = 2$.

c. $s \neq r^i$ untuk semua i.

d. $sr^i \neq sr^j$ untuk semua $0 \leq i, j \leq n-1$ dengan $i \neq j$. Jadi $D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$ yaitu setiap elemen dapat dituliskan secara tunggal dalam bentuk $s^k r^i$ untuk $k = 0$ atau 1 dan $0 \leq i \leq n-1$.

e. $sr = r^{-1}s$.

f. $sr^i = r^{-1}s$, untuk semua $0 \leq i \leq n$.

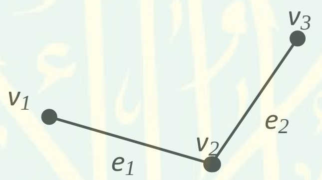
Sebagai contoh D_6 adalah grup dihedral yang memuat semua simetri (rotasi dan refleksi) pada bangun segitiga sehingga $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$.

2.2 Graf

Graf G adalah pasangan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik, dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut sisi. Banyaknya unsur di $V(G)$ disebut order dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$, dan banyaknya unsur di $E(G)$ disebut ukuran dari G

dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka order dan ukuran dari G masing-masing cukup ditulis p dan q graf dengan order p dan ukuran q dapat disebut graf-(p,q) (Abdussakir, dkk, 2009:4).

Sisi $e=(u,v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e=(u,v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung *(adjacent)*, v dan e serta u dan e disebut terkait langsung *(incident)*, dan titik u dan v disebut ujung dari e. Dua sisi berbeda e_1 dan e_2 disebut terhubung langsung (*adjacent*), jika terkait langsung pada satu titik yang sama. Untuk selanjutnya, sisi $e=(u,v)$ akan ditulis $e=uv$ (Abdussakir, dkk, 2009:9).



Gambar 2.1 Contoh Graf G

Graf G pada gambar 2.1 mempunyai titik yang terhubung langsung (*adjacent*) yaitu v_1 dengan v_2 dan v_2 dengan v_3. Titik yang disebut terkait langsung *(incident)* adalah titik v_1 dan e_1 serta v_2 dan e_1. Sedangkan sisi e_1 dan e_2 disebut sisi yang terhubung langsung (*adjacent*).

2.2.1 Derajat titik

Jika v adalah titik pada graf G, maka himpunan semua titik di G yang terhubung langsung dengan v disebut lingkungan dari v dan ditulis $N_G(v)$. Derajat dari titik v di graf G, ditulis $deg_G(v)$, adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung dengan v. Dalam konteks pembicaraan hanya terdapat satu graf G, maka tulisan $deg_G(v)$ disingkat menjadi $deg(v)$ dan $N_G(v)$ disingkat menjadi $N(v)$.

Jika dikaitkan dengan konsep lingkungan, derajat titik v di graf G adalah banyaknya anggota dalam $N(v)$. Jadi, $deg(v) = |N(v)|$ (Diestel, 2000:4).

Titik yang berderajat 0 disebut titik terasing atau titik terisolasi. Titik yang berderajat 1 disebut titik ujung atau titik akhir. Titik yang berderajat genap disebut titik genap dan titik yang berderajat ganjil disebut titik ganjil. Derajat maksimum titik di G dilambangkan dengan $\Delta(G)$ dan derajat minimum titik di G dilambangkan dengan $\delta(G)$ (Chartrand, dkk, 2016:5). Hubungan antara jumlah derajat semua titik dalam suatu graf G dengan banyak sisi, yaitu q, adalah

$$\sum_{v \in G} deg(v) = 2q$$

disebut sebagai "Teorema Pertama dalam Teori Graf" yang dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 1

Misalkan G graf dengan order p dan ukuran q, dengan $V(G) = \{ v_1, v_2, v_3, \ldots, v_p\}$. Maka

$$\sum_{i=1}^{p} deg(v_i) = 2q$$

Bukti

Setiap menghitung derajat suatu titik di G, maka suatu sisi dihitung 1 kali. Karena setiap sisi menghubungkan dua titik berbeda maka ketika menghitung derajat semua titik, sisi akan terhitung dua kali. Dengan demikian diperoleh bahwa jumlah semua derajat titik di G sama dengan 2 kali jumlah sisi di G. Terbukti bahwa

$$\sum_{i=1}^{p} deg(v_i) = 2q\,. \quad \blacksquare$$

Berdasarkan hubungan tersebut, maka banyak titik ganjil dalam suatu graf selalu genap (Chartrand, dkk, 2016:6). Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 2

Banyaknya titik ganjil dalam suatu graf selalu genap.

Bukti

Misalkan G graf. Misalkan X adalah himpunan titik genap di G dan Y adalah himpunan titik ganjil di G. Maka

$$\sum_{v\in G} deg(v) = \sum_{v\in X} deg(v) + \sum_{v\in Y} deg(v) = 2q.$$

Karena X adalah himpunan titik genap maka $\sum_{v\in X} \deg(v)$ adalah genap. Karena $2q$ adalah bilangan genap dan $\sum_{v\in X} \deg(v)$ juga genap maka $\sum_{v\in Y} \deg(v)$ haruslah bilangan genap. Karena Y himpunan titik ganjil dan $\sum_{v\in Y} \deg(v)$ adalah bilangan genap, maka banyak titik di Y haruslah genap, sebab jika banyak titik di Y ganjil maka $\sum_{v\in Y} \deg(v)$ adalah ganjil. Terbukti bahwa banyaknya titik ganjil di G adalah genap. $\blacksquare$

2.2.2 Lintasan pada Graf

Misalkan G graf. misalkan u dan v adalah titik di G (yang tidak harus berbeda). Jalan u-v pada graf G adalah barisan berhingga yang berselang-seling $W: u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n = v$ antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik dan diakhiri dengan titik, dengan $e_i = v_{i-1}v_i$ $i = 1,2,3, \dots, n$ adalah sisi di G (Chartrand, dkk, 2016:37). v_0 disebut titk awal, v_n disebut titik akhir, titik $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ disebut titik internal, dan n menyatakan panjang dari W. Jika $v_0 \neq v_n$, maka W disebut jalan tertutup. Jalan yang tidak mempunyai sisi disebut jalan trivial (Chartrand, dkk, 2016:38). Karena dalam graf dua titik hanya akan dihubungkan oleh tepat satu sisi, maka jalan *u-v*

$$W: u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n = v$$

Dapat ditulis menjadi

$$W: u = v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n = v$$

Teorema 3

Setiap jalan *u-v* pada suatu graf selalu memuat lintasan *u-v*.

Bukti

Misalkan W adalah jalan *u-v* di graf G. Jika W tertutup, maka jelas W memuat lintasan trivial di G. Misalkan

$$W: u = v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n = v$$

adalah jalan *u-v* terbuka. Jika tidak ada titik yang berulang di W, maka W adalah lintasan *u-v*. Jika ada titik yang berulang di *W*, misalkan *i* dan *j* adalah bilangan bulat positif berbeda dengan $i < j$ sehingga $v_i = v_j$. Maka, suku $v_i, v_i + 1, \dots, v_j$ dihapus dari W. Hasilnya sebut W_1, yakni jalan *u-v* baru yang panjangnya kurang dari panjang W. Jika pada W_1 tidak ada titik yang berulang, maka W_1 adalah lintasan *u-v*. Jika pada W_1 ada titik yang berulang, maka lakukan proses penghapusan seperti sebelumnya, sampai akhirnya diperoleh jalan *u-v* yang merupakan lintasan *u-v* (Chartrand, dkk, 2016:38). ■

Graf berbentuk lintasan dengan titik sebanyak n dinamakan graf lintasan order n dan ditulis P_n. Jalan tertutup W tak trivial yang semua sisinya berbeda disebut sirkuit (Chartrand, dkk, 2016:41). Dengan kata lain, sirkuit adalah trail tertutup tak trivial. Jalan tertutup tak trivial yang semua titiknya berbeda disebut sikel. Sikel dengan panjang k disebut sikel-k. Sikel-k disebut genap atau ganjil bergantung pada k genap atau ganjil (Bondy dan Murty, 1979:14).

Teorema 4

Dua titik yang saling terhubung pada graf G memiliki panjang lintasan maksimal sebesar $(n - 1)$ dengan n adalah banyak titik pada G.

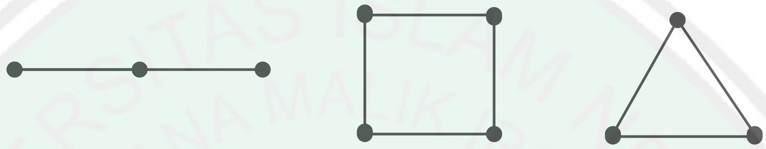
Bukti

Misal suatu graf G memiliki titik sebanyak n. Banyaknya sisi yang dilewati pada suatu sikel dari suatu titik (misal dimulai dari titik v_1) ke dirinya sendiri memiliki sisi sebanyak titik yang ada pada sikel tersebut (sebanyak n), sehingga lintasan terjauh pada sikel dari titik v_1 ke titik yang berhubungan langsung dengan titik v_1 (misal titik v_n) memiliki panjang sebesar $(n - 1)$. ■

Graf berbentuk sikel dengan titik sebanyak n, $n \geq 3$, disebut graf sikel dan ditulis C_n. Graf sikel sering juga disebut sebagai graf lingkaran karena gambarnya dapat dibentuk menjadi lingkaran. Perlu dicatat bahwa tidak selamanya graf sikel digambar dalam bentuk suatu lingkaran (Chartrand, dkk, 2016:41).

Graf sikel dapat juga digambar dalam bentuk poligon. C_3 dapat disebut segitiga, C_4 segiempat, dan secara umum C_n dapat disebut segi-n. Sikel yang banyak titiknya ganjil disebut sikel ganjil dan sikel yang banyak titiknya genap disebut sikel genap (Chartrand, dkk, 2016:41).

Graf G dikatakan komplit jika setiap dua titik yang berbeda saling terhubung langsung (*adjacent*). Graf komplit dengan order n dinyatakan dengan K_n. Dari definisi-definisi tersebut berikut ini contoh graf path, sikel dan komplit secara berurutan



Gambar 2.2 P_3, C_4, K_3

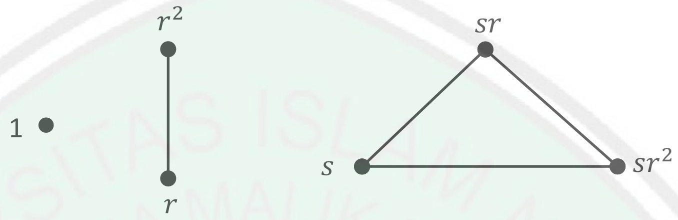
2.2.3 Graf Terhubung

Misalkan u dan v titik berbeda pada graf G. Titik u dan v dikatakan terhubung (*connected*), jika terdapat lintasan *u*-*v* di G. Suatu graf G dikatakan terhubung (*connected*), jika untuk setiap titik u dan v yang berbeda di G terhubung. Sebaliknya, jika ada dua titik u dan v di G, tetapi tidak ada lintasan *u*-*v* di G, maka G dikatakan tak terhubung (*disconnected*) (Chartrand, dkk, 2016:42).

2.2.4 Graf Konjugasi

Misalkan G grup non komutatif. Unsur g dan h di G dikatakan saling konjugasi jika ada x di G sehingga $g = xhx^{-1}$, maka dapat dikatakan g dan h saling konjugasi (Kandasamy dan Smarandache, 2009). Misalkan semua kelas konjugasi di G adalah $[e], [g_1], [g_2], \dots, [g_n]$ unsur h akan terhubung langsung ke g_i, jika h anggota $[g_i]$ (Kandasamy dan Smarandache, 2009:79)

Sebagai contoh pada grup dihedral order 6 yaitu $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$ terhadap operasi fungsi komposisi. Maka klas konjugasi dari D_6 adalah $[1] = \{1\}$, $[r] = \{r, r^2\}$, dan $[s] = \{s\ , sr, sr^2\}$. Dengan demikian diperoleh graf konjugasi dari grup dihedral D_6 berikut ini.



Gambar 2.3 Graf Konjugasi Grup D_6

2.3 Matriks

Matriks adalah suatu susunan bilangan berbentuk segiempat yang tersusun dalam bentuk kolom dan baris. Bilangan-bilangan dalam susunan itu disebut anggota (Anton dan Rorres, 2014:26).

2.3.1 Jenis Matriks

Matriks terbagi menjadi beberapa jenis yaitu matriks persegi, matriks identitas, dan matriks diagonal (Supranto, 2003:8).

2.3.1.1 Matriks Persegi

Matriks persegi ialah suatu matriks yang banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom $(m = n)$. Berikut ini contoh matriks persegi 3×3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.3.1.2 Matriks Identitas

Matriks identitas ialah suatu matriks yang elemen-elemennya mempunyai nilai 1 pada diagonal utama dan 0 pada tempat-tempat lain di luar diagonal utama (diagonal dari kiri atas ke kanan bawah). Berikut ini contoh matriks identitas

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.3.1.3 Matriks Diagonal

Matriks diagonal ialah suatu matriks yang semua elemen di luar diagonal utama mempunyai nilai 0 dan paling tidak satu elemen pada diagonal utama tidak sama dengan 0, biasanya diberi simbol D. Berikut ini contoh matriks diagonal

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.3.2 Graf dan Matriks

Misalkan G graf dengan order p $(p \geq 1)$ dan ukuran q serta himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$. Matriks keterhubungan titik dari graf G, dinotasikan dengan $A(G)$, adalah matriks $(p \times p)$ dengan unsur pada baris ke-*i* dan kolom ke-*j* elemen matriks bernilai 1 jika titik v_i terhubung langsung dengan titik v_j serta bernilai 0 jika titik v_i tidak terhubung langsung dengan titik v_j (Chartrand, dkk, 2016:39). Dengan kata lain, matriks keterhubungan dapat ditulis $A(G) = [a_{ij}], 1 \leq i, j \leq p$, dengan

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & , jika\ v_i v_j \in E(G) \\ 0 & , jika\ v_i v_j \notin E(G) \end{cases}$$

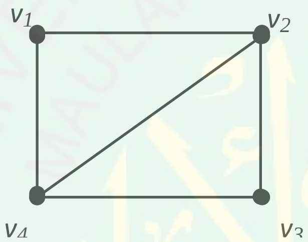
Matriks keterhubungan suatu graf G adalah matriks simetri dengan unsur 0 dan 1 serta memuat nilai 0 pada diagonal utamanya. Hal ini karena graf tidak memuat lup dan tidak memuat sisi paralel. Perhatikan contoh berikut, misalkan graf G dengan himpunan titik

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

dan himpunan sisi

$$E(G) = \{v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4\}.$$

Maka, diagram dan matriks keterhubungan graf G sebagai berikut.



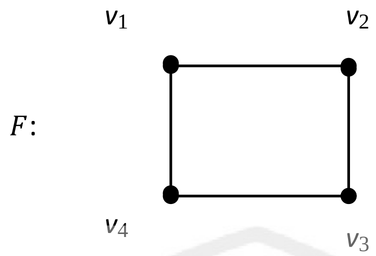
$$A(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Gambar 2.4 Graf G

Selain matriks keterhubungan titik $A(G)$, masih terdapat matriks yang lainnya yang diperoleh dari suatu graf. Matriks derajat dari graf G, dinotasikan dengan $D(G)$, adalah matriks diagonal yang elemen baris ke-i dan kolom ke-i adalah derajat dari v_i, $i = 1, 2, 3, \dots, p$ (Chartrand, dkk, 2016:39). Jadi, matriks derajat dari graf G dapat ditulis $D(G) = [d_{ij}], 1 \le i, j \le p$, dengan

$$d_{ij} = \begin{cases} deg(v_i) & , i = j \\ 0 & , i \ne j \end{cases}$$

Perhatikan contoh matriks derajat berikut ini



Gambar 2.5 Graf F

Dari graf F tersebut, maka dapat dibentuk matriks derajat berikut ini.

$$D(F) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matriks keterhubungan titik $A(G)$ dan matriks derajat $D(G)$ dari graf G dapat menghasilkan suatu matriks *signless-Laplace* dengan operasi penjumlahan yaitu matriks $L^{+}(G) = D(G) + A(G)$ disebut matriks *signless-Laplace* dari graf G (Brouwer dan Haemers, 2011:1). Matriks *detour* dari G adalah matriks $DD(G)$ sedemikian hingga elemen pada baris ke-*i* dan kolom ke-*j* adalah bilangan yang menyatakan lintasan terpanjang dari v_i ke v_j di G (Ayyaswamy dan Balachandran, 2010:1). Perhatikan contoh berikut. Misalkan graf H dengan himpunan titik

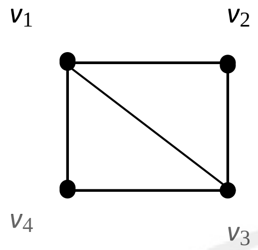
$$V(H) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

dan himpunan sisi

$$E(H) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_3v_4\}.$$

Maka, diagram dan matriks *detour* graf H sebagai berikut.

H:



$$DD(H) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Gambar 2.6 Graf H

2.3.3 Determinan

Misalkan A adalah matriks persegi. Fungsi determinan dinyatakan oleh det, dan didefinisikan $det(A)$ sebagai jumlah semua hasil kali elementer bertanda dari A. jumlah $det(A)$ dinamakan determinan A (Anton dan Rorres, 2014: 63).

Contoh:

Hitunglah determinan dari matriks berikut ini

$$A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian

Matriks A berukuran 2 baris dan 2 kolom, maka bedasarkan definisi determinan, jumlah dari seluruh perkalian elementer bertanda

$$det(A) = +(1 \times 4) + (-(2 \times 3)) = -2$$

2.3.4 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Misalkan G graf berorder p dan A adalah matriks keterhubungan dari graf G. Suatu vektor tak nol x disebut vektor eigen *(eigen vektor)* dari A jika Ax adalah suatu kelipatan skalar dari x; yakni, $Ax = \lambda x$, untuk sebarang skalar λ. Skalar λ disebut nilai eigen (*eigen value*) dari A, dan x disebut sebagai vektor eigen dari A

yang bersesuaian dengan λ (Anton dan Rorres, 2014:291). Untuk menentukan nilai eigen dari matriks A, persamaan $Ax = \lambda x$ ditulis kembali dalam bentuk

$$(A - \lambda I)x = 0,$$

dengan I adalah matriks identitas berordo $(1 \times p)$. Persamaan ini akan mempunyai solusi taknol jika dan hanya jika

$$det(A - \lambda I) = 0.$$

Persamaan $det(A - \lambda I) = 0$ akan menghasilkan persamaan polinomial dalam variabel λ dan disebut persamaan karakteristik dari matriks A. Skalar-skalar λ yang memenuhi persamaan karakteristik ini tidak lain adalah nilai–nilai eigen dari matriks A (Anton dan Rorres, 2014:292).

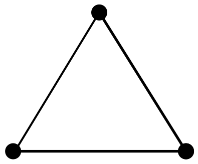
2.4 Spektrum Graf

Spektrum adalah himpunan nilai eigen dengan multiplisitas yang bersesuaian (Brouwer dan Haemers, 2011:2). Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ adalah nilai eigen berbeda dari A, dengan $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n$, dan misalkan $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_n)$ adalah multiplisitas nilai eigen yang bersesuaian, maka matriks berordo $(2 \times n)$ yang memuat $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ pada baris pertama dan $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_n)$ pada baris kedua disebut spektrum graf G, dan dinotasikan dengan $Spec(G)$ (Biggs, 1993:8). Jadi, spektrum graf G dapat ditulis dengan

$$Spec(G) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ m(\lambda_1) & m(\lambda_2) & \cdots & m(\lambda_n) \end{bmatrix}$$

Sebagai contoh untuk menentukan spektrum suatu graf, perhatikan graf komplit K_3 beserta matriks keterhubungannya berikut ini.

K_3 :



$$A(K_3) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} v_1 & v_1 & v_1 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_1 \\ v_1 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Gambar 2.7 Graf K_3

Pertama akan ditentukan nilai eigen dari A menggunakan persamaan $det(A - \lambda I) = 0$. Diperoleh

$$det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0$$

$$-(\lambda - 2)(\lambda + 1)^2$$

Jadi, diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = -1$ dengan multiplisitas $m(\lambda_1) = 1$ dan $m(\lambda_2) = 2$. Kerena multiplisitas merupakan banyaknya basis pada ruang vektor eigen maka berikut ini cara pencariannya.

Untuk $\lambda_1 = 2$, maka

$$(A - \lambda I)x = 0$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Melalui operasi baris elementer pada matriks yang diperluas dari persamaan homogen ini, diperoleh matriks eselon tereduksi baris berikut.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Diperoleh

$$x_1 - x_3 = 0$$

$$x_2 - x_3 = 0$$

Diperoleh vektor eigen

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian, terdapat 1 basis untuk ruang vektor eigen pada $\lambda_1 = 2$.

Untuk $\lambda_2 = -1$, maka

$$(A - \lambda I)x = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Akan diperoleh suatu persamaan tunggal dari matriks eselon tereduksi, yaitu

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Diperoleh vektor eigen

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(x_2 + x_3) \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian, terdapat 2 basis untuk ruang vektor eigen pada $\lambda_2 = -1$.

Jadi, diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = -1$ serta $m(\lambda_1) = 1$ dan $m(\lambda_2) = 2$.

Dengan demikian, maka spektrum graf K_3 adalah

$$Spec(K_3) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Spektrum K_3 disebut spektrum *adjacency* karena diperoleh dari matriks keterhubungan titik.

Matriks $L^{+}(G) = D(G) + A(G)$ disebut matriks *signless-Laplace* dari graf G. Spektrum $L^{+}(G)$ dapat dituliskan dengan $Spec_{L^{+}}(G)$ dan spektrum *DD(G)* dapat dituliskan dengan $Spec_{DD}(G)$ (Ayyaswamy dan Balachandran, 2010:1).

2.5 Integrasi Ayat Al-Quran dengan Graf

Al-Quran merupakan tuntunan hidup dan dapat dikatakan juga sebagai petunjuk dalam kehidupan untuk terciptanya keteraturan dan tertiban dalam kehidupan. Bukti bahwa al-Quran adalah petunjuk bagi kehidupan terdapat dalam firman Allah:

ذَلِكَ الْكِتَابُ لاَ رَيْبَ فِيهِ هُدًى لِلْمُتَّقِينَ (٢)

"kitab (Al-Qur'an) ini tidak ada keraguan padanya; petunjuk bagi mereka yang bertaqwa" (QS. Al-Baqarah/2: 2).

Kebenaran al-Quran sudah tidak dapat diragukan lagi, oleh karena itu banyak peneliti yang menemukan penemuan di dalam kehidupan dan terbukti melalui ayat-ayat al-Quran. Di dalam al-Quran terdapat lebih dari 750 ayat yang menunjukkan kepada fenomena alam, dan manusia diminta untuk dapat memikirkannya agar dapat mengenal Tuhan melalui tanda-tanda-Nya (Gholsani, 2003).

Demikian halnya dengan ilmu matematika salah satunya di bidang graf yang mempelajari tentang sisi dan titik. Dikatakan graf terhubung jika dua titik berbeda dari suatu graf yang dihubungkan oleh suatu lintasan disebut sisi. Graf konjugai merupakan representasi dari himpunan dari grup dihedral yang saling konjugasi. Grup dihedral D_{2n} sendiri berupa himpunan yaitu $\{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$. Dalam al-Quran terdapat beberapa surat yang menerangkan tentang himpunan yaitu, pada surat al-Fatihah akan dijumpai bahwa manusia terbagi menjadi tiga kelompok, pada surat al-Baqarah akan dijumpai bahwa manusia tergolong pada tiga golongan, dan pada surat al-Waqiah manusia dikelompokkan menjadi tiga kelompok pada hari kiamat (Abdussakir, 2014). Jelaslah bahwa al-Quran berbicara mengenai kelompok dalam matematika disebut dengan himpunan.

Graf konjugasi yang terbentuk dari grup dihedral D_{2n} dapat disajikan dalam bentuk matriks yaitu dalam hal ini matriks keterhubungan titik (*adjacency*) maupun matriks derajat. Dalam matriks *adjacency* dikatakan bernilai 1 jika titiknya terhubung langsung dan titik yang tidak terhubung langsung bernilai 0, sedangkan dalam matriks derajat dapat disebutkan melalui derajat pada graf konjugasi tersebut.

Seluruh alam semesta diciptakan Allah Swt. dengan sangat rapi dan teratur sehingga alam semesta ini dapat terbentuk secara sempurna dan seimbang. Allah Swt. telah menciptakan bumi dengan sangat luas. Di dalamnya Allah membuat beberapa penyangga, mengalirkan air dari sungai-sungai serta melengkapinya dengan perhiasan-perhiasan, dan bentuknya adalah bulat. Bumi mempunyai dua macam putaran. Pertama, dia berputar di tempatnya sendiri. Lamanya setiap putaran ini adalah 24 jam, maka terjadilah hari. Dia berputar tidak dengan cara lurus ke atas melainkan hanya miring ke atas 23 derajat. Kedua, dia berputar mengelilingi matahari pada porosnya dengan membentuk oval dan berakhirnya setiap putaran ini adalah satu tahun. Berputar melingkar bulat merupakan ukuran yang paling sempurna dan paling indah, keduanya memiliki keseimbangan yang saling berkaitan (Allam, dkk, 2005). Dalam al-Quran surat al-Mulk ayat 3-4 dijelaskan

الَّذِي خَلَقَ سَبْعَ سَمَاوَاتٍ طِبَاقًا مَا تَرَى فِي خَلْقِ الرَّحْمَنِ مِنْ تَفَاوُتٍ فَارْجِعِ الْبَصَرَ هَلْ تَرَى مِنْ فُطُورٍ (٣) ثُمَّ ارْجِعِ الْبَصَرَ كَرَّتَيْنِ يَنْقَلِبْ إِلَيْكَ الْبَصَرُ خَاسِئًا وَهُوَ حَسِيرٌ (٤)

"3. Yang menciptakan tujuh langit berlapis-lapis. Tidak akan kamu lihat sesuatu yang tidak seimbang pada ciptaan Tuhan yang Maha Pengasih. Maka lihatlah sekali lagi, adakah kamu lihat sesuatu yang cacat?
4. Kemudian ulangi pandang(mu) sekali lagi dan sekali lagi, niscaya pandanganmu akan kembali kepadamu tanpa menemukan cacat dan ia (pandanganmu) dalam keadaan letih" (QS. Al-Mulk/67:3-4).

Ayat di atas menyatakan: Yang telah menciptakan tujuh langit berlapis-lapis serasi dan harmonis. Engkau siapapun engkau kini dan masa datang tidak melihat pada ciptaan ar-Rahman Tuhan yang rahmat-Nya mencakup seluruh wujud baik pada ciptaan-Nya yang kecil maupun yang besar sedikit pun ketidakseimbangan. Maka ulanglah pandangan itu yakni lihatlah sekali lagi dan berulang-ulang kali disertai dengan upaya berpikir, adakah engkau melihat atau menemukan padanya jangankan besar atau banyak sedikitpun keretakan sehingga menjadikannya tidak seimbang dan rusak? Kemudian setelah sekian lama engkau terus-menerus memandang mencari keretakan dan ketidakseimbangan, ulangilah lagi pandanganmu dua kali yakni berkali-kali tanpa batas niscaya akan kembali kepadamu pandanganmu itu dalam keadaan kecewa, terdiam, hina karena karena tidak menemukan sesuatu cacat yang engkau upayakan menemukannya dan pandanganmu menjadi lelah (Shihab, 2004).

BAB III

PEMBAHASAN

Pembahasan berikut ini akan menjelaskan tentang spektrum *signless-Laplace* dan *detour* graf konjugasi yang terbentuk dari grup dihedral, namun sebelumnya akan ditentukan kelas-kelas konjugasi dari grup dihedral D_{2n}, yang setiap elemennya dioperasikan dengan operasi komposisi. Hasilnya akan ditunjukkan dalam tabel *Cayley*.

3.1 Spektrum *Signless-Laplace* Graf Konjugasi dari Grup Dihedral D_{2n}

3.1.1 Spektrum *Signless-Laplace* Dari Grup Dihedral D_6

Grup dihedral $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$ dengan operasi komposisi diperoleh tabel *Cayley* sebagai berikut:

Tabel 3.1 Tabel *Cayley* Grup Dihedral D_6

$\circ$	1	r	r^2	s	sr	sr^2
1	1	r	r^2	s	sr	sr^2
r	r	r^2	1	sr^2	s	sr
r^2	r^2	1	r	sr	sr^2	s
s	s	sr	sr^2	1	r	r^2
sr	sr	sr^2	s	r^2	1	r
sr^2	sr^2	s	sr	r	r^2	1

Berdasarkan tabel *Cayley* pada D_6, selanjutnya akan ditunjukkan kelas-kelas konjugasi D_6. Dikatakan saling konjugasi untuk dua unsur g dan h pada D_6 jika ada $x \in D_6$ sehingga $g = xhx^{-1}$.

1. Akan ditunjukkan bahwa $g = 1$ dan $h = 1$ saling konjugasi. Ambil $g = 1$ dan $h = 1$ anggota D_6 , pilih $x = 1$ maka diperoleh

$g = xhx^{-1}$

$1 = 1\ 11^{-1}$

$1 = 1\ 1$

$1 = 1$

$g = 1$ dan $h = 1$ saling konjugasi, karena ada $x = 1 \in D_6$ yang memenuhi $1 = 1\ 11^{-1}$. Sehingga kelas konjugasi [1] adalah $\{1\}$.

2. Akan ditunjukkan bahwa setiap elemen D_6 saling konjugasi dengan $h = r^2$. Ambil $g = r$ dan $h = r^2$ anggota D_6, pilih $x = s$ maka diperoleh

$g = xhx^{-1}$

$r = sr^2s^{-1}$

$r = sr^2s$

$r = r$

r dan r^2 saling konjugasi, karena ada $x = s \in D_6$ yang memenuhi $r = sr^2s^{-1}$. Sehingga kelas konjugasi $[r] = \{r, r^2\}$.

3. Akan ditunjukkan bahwa s, sr, sr^2 saling konjugasi.

   a. Akan ditunjukkan s, sr saling konjugasi. Ambil $g = s$ dan $h = sr$ anggota D_6, pilih $x = r^2$ maka diperoleh

   $g = xhx^{-1}$

   $s = r^2sr(r^2)^{-1}$

   $s = sr^2r$

   $s = s$

s dan sr saling konjugasi, karena ada $x = r^2 \in D_6$ yang memenuhi $s = r^2 sr(r^2)^{-1}$.

b. Akan ditunjukkan sr, sr^2 saling konjugasi. Ambil $g = sr$ dan $h = sr^2$ anggota D_6, pilih $x = r^2$ maka diperoleh

$g = xhx^{-1}$

$sr = r^2 sr^2 (r^2)^{-1}$

$sr = sr$

s dan sr saling konjugasi, karena ada $x = r^2 \in D_6$ yang memenuhi $sr = r^2 sr^2 (r^2)^{-1}$.

c. Akan ditunjukkan s, sr^2 saling konjugasi. Ambil $g = sr^2$ dan $h = s$ anggota D_6, pilih $x = r^2$ maka diperoleh

$g = xhx^{-1}$

$sr^2 = r^2 s (r^2)^{-1}$

$sr^2 = sr\, r$

$sr^2 = sr^2$

s dan sr saling konjugasi, karena ada $x = r^2 \in D_6$ yang memenuhi $sr^2 = r^2 s (r^2)^{-1}$.

Dari a, b dan c terbukti bahwa ketiga unsur s, sr, sr^2 saling konjugasi, sehingga kelas konjugasinya adalah $[s] = \{ s, sr, sr^2\}$.

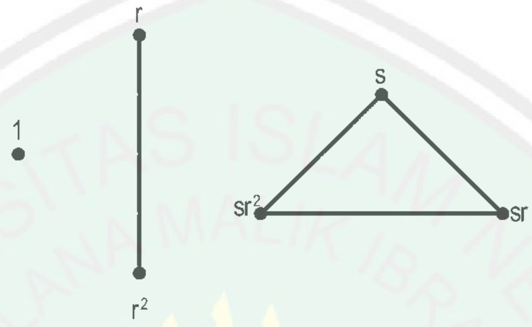
Dari 1, 2 dan 3 diperoleh kelas-kelas konjugasi dari grup dihedral D_6 yaitu:

$[1] = \{1\}$

$[r] = \{ r, r^2\}$

$[s] = \{s, sr, sr^2\}$.

Dengan demikian berdasarkan kelas-kelas konjugasi D_6 dapat digambarkan dalam suatu graf konjugasi, setiap elemen pada D_6 disebut sebagai *vertex* dan elemen-elemen pada masing-masing kelas saling terhubung. Graf konjugasi D_6 dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.1 Graf Konjugasi D_6

Dari Gambar 3.1 dapat diketahui matriks keterhubungan titik (*adjacency*) dari D_6:

$$A(D_6) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian dapat ditentukan matriks derajat dari grup D_6 :

$$D(D_6) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh matriks *signless-Laplace* sebagai berikut:

$L^+(D_6) = D(D_6) + A(D_6)$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0&0\\0&0&0&2&1&1\\0&0&0&1&2&1\\0&0&0&1&1&2\end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks *signless-Laplace* maka dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tersebut dengan cara:

$$det(L^+(D_6)-\lambda I)=0$$

$$det\left(\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0&0\\0&0&0&2&1&1\\0&0&0&1&2&1\\0&0&0&1&1&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda&0&0&0&0&0\\0&\lambda&0&0&0&0\\0&0&\lambda&0&0&0\\0&0&0&\lambda&0&0\\0&0&0&0&\lambda&0\\0&0&0&0&0&\lambda\end{bmatrix}\right)=0$$

$$\begin{vmatrix}-\lambda&0&0&0&0&0\\0&1-\lambda&1&0&0&0\\0&1&1-\lambda&0&0&0\\0&0&0&2-\lambda&1&1\\0&0&0&1&2-\lambda&1\\0&0&0&1&1&2-\lambda\end{vmatrix}=0$$

Hasil dari $det(L^+(D_6)-\lambda I)$ dapat diperoleh dengan menggunakan aplikasi *Maple 18* yaitu

$$-\lambda(\lambda^2-2\lambda)(-\lambda^3+6\lambda^2-9\lambda+4)=0$$

$$\lambda^2(\lambda-1)^2(\lambda-2)(\lambda-4)=0$$

Karena $det(L^+(D_6)-\lambda I)=0$ maka diperoleh nilai eigennya yaitu $\lambda_1=4,\lambda_2=2,\lambda_3=1,\ \lambda_4=0$ dan multiplisitas yang bersesuaian dengan nilai eigen adalah $m(\lambda_1)=1, m(\lambda_2)=1, m(\lambda_3)=2, m(\lambda_4)=2$. Karena multiplisitas merupakan banyaknya basis pada ruang vektor eigen maka berikut ini cara pencariannya, mula-mula subtitusi setiap nilai eigen pada persamaan $(L^+(D_6)-\lambda I)x=0$ yaitu

- Untuk $\lambda_4=0$

$$(L^+(D_6)-\lambda I)x=0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Melalui operasi baris elementer pada matriks diperluas dari persamaan homogen ini, diperoleh matriks eselon tereduksi baris berikut ini.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Diperoleh selesaiannya

$x_2 + x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0$

Diperoleh vektor eigen yaitu

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_3 \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian, terdapat 2 basis untuk ruang vektor eigen pada $\lambda_4 = 0$.

- Untuk $\lambda_3 = 1$

$$(L^+(D_6) - \lambda I)x = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Melalui operasi baris elementer pada matriks diperluas dari persamaan homogen ini, diperoleh matriks eselon tereduksi baris berikut ini.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Diperoleh selesaiannya

$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 + x_5 + x_6 = 0$

Diperoleh vektor eigen yaitu

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -(x_5 + x_6) \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = x_5 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_6 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian, terdapat 2 basis untuk ruang vektor eigen pada $\lambda_3 = 1$.

- Untuk $\lambda_2 = 2$

$$(L^+(D_6) - \lambda I)x = 0$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Melalui operasi baris elementer pada matriks diperluas dari persamaan homogen ini, diperoleh matriks eselon tereduksi baris berikut ini.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka diperoleh selesaiannya

$x_1 = 0, x_2 - x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0$

Diperoleh vektor eigen yaitu

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_3 \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian, terdapat 1 basis untuk ruang vektor eigen pada $\lambda_2 = 2$.

- Untuk $\lambda_1 = 4$

$$(L^+(D_6) - \lambda I)x = 0$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Melalui operasi baris elementer pada matriks diperluas dari persamaan homogen ini, diperoleh matriks eselon tereduksi baris berikut ini.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Diperoleh selesaiannya

$x_1 = 0,\ x_2 = 0, x_3 = 0,\ x_4 - x_6 = 0,\ x_5 - x_6 = 0$

Diperoleh vektor eigen yaitu

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_6 \\ x_6 \\ x_6 \end{bmatrix} = x_6 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian, terdapat 1 basis untuk ruang vektor eigen pada $\lambda_1 = 4$.

Setelah mencari nilai eigen dan banyaknya basis atau multiplisitas pada setiap nilai eigen yang bersesuaian yaitu $\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 0$ dan

$m(\lambda_1) = 1,\ m(\lambda_2) = 1,\ m(\lambda_3) = 2, m(\lambda_4) = 2$. Dengan demikian terbentuklah spektrum *signless-Laplace* graf konjugasi dari grup dihedral D_6 dengan baris pertama sebagai nilai eigen dan baris kedua sebagai multiplisitas berikut ini:

$$Spec_{L^+}(D_6) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

3.1.2 Spektrum *Signless-Laplace* Graf Konjugasi dari Grup Dihedral D_8

Grup dihedral $D_8 = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$. Dengan menggunakan operasi komposisi diperoleh tabel *Cayley* sebagai berikut:

Tabel 3.2 Tabel *Cayley* Grup Dihedral D_8

$\circ$	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
1	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
r	r	r^2	r^3	1	sr^3	s	sr	sr^2
r^2	r^2	r^3	1	r	sr^2	sr^3	s	sr
r^3	r^3	1	r	r^2	sr	sr^2	sr^3	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	1	r	r^2	r^3
sr	sr	sr^2	sr^3	s	r^3	1	r	r^2
sr^2	sr^2	sr^3	s	sr	r^2	r^3	1	r
sr^3	sr^3	s	sr	sr^2	r	r^2	r^3	1

Berdasarkan tabel *Cayley* pada D_8 akan ditunjukkan kelas-kelas konjugasi dari D_8. Untuk memperoleh kelas-kelas konjugasi dari grup dihedral D_8 maka dilakukan langkah-langkah seperti subbab 3.1.1 sehingga diperoleh kelas-kelas konjugasi dari grup dihedral D_8 sebagai berikut:

$[1] = \{1\}$

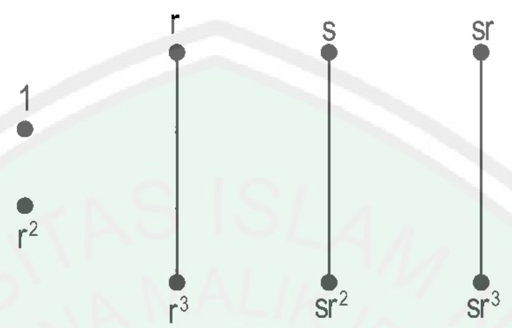
$[r] = \{r, r^3\}$

$[r^2] = \{r^2\}$

$[s] = \{s, sr^2\}$

$[sr] = \{sr, sr^3\}$

Dengan demikian berdasarkan kelas-kelas konjugasi tersebut dapat digambarkan dalam suatu graf konjugasi dari grup dihedral D_8 sebagai berikut:



Gambar 3.2 Graf Konjugasi D_8

Dari graf konjugasi D_8 dapat diketahui matriks *signless-Laplace* dari grup dihedral D_8 sebagai berikut:

$$L^+(D_8) = D(D_8) + A(D_8)$$

$$L^+(D_8) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks *signless-Laplace* maka dicari nilai eigen dari matriks tersebut dengan cara:

$$det(L^+(D_8) - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Hasil dari $det(L^{+}(D_8) - \lambda I)$ dapat diperoleh dengan menggunakan aplikasi *Maple 18* yaitu

$$(\lambda^2)(\lambda^2 - 2\lambda)^3 = 0$$

$$\lambda^5(\lambda - 2)^3 = 0$$

Dari persamaan polinomial karakteristik tersebut, nilai eigen dapat diketahui sebagai berikut:

$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0$

Kemudian basis untuk ruang vektor eigen dari matriks tersebut dapat diketahui dengan menyebutkan multiplisitas nilai eigen yang bersesuaian adalah $m(\lambda_1) = 3$, $m(\lambda_2) = 5$. Dengan demikian terbentuklah spektrum *signless-Laplace* graf konjugasi dari grup dihedral D_8 sebagai berikut:

$$Spec_{L^{+}}(D_8) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

3.1.3 Spektrum *Signless-Laplace* Graf Konjugasi dari Grup Dihedral D_{10}

Grup dihedral $D_{10} = \{1, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$ dengan operasi komposisi diperoleh tabel *Cayley* sebagai berikut:

Tabel 3.3 Tabel *Cayley* Grup Dihedral D_{10}

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
1	1	r	r^2	r^3	r^4	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r	r	r^2	r^3	r^4	1	sr^4	s	sr	sr^2	sr^3
r^2	r^2	r^3	r^4	1	r	sr^3	sr^4	s	sr	sr^2
r^3	r^3	r^4	1	r	r^2	sr^2	sr^3	sr^4	s	sr
r^4	r^4	1	r	r^2	r^3	sr	sr^2	sr^3	sr^4	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	1	r	r^2	r^3	r^4
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	s	r^4	1	r	r^2	r^3
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	s	sr	r^3	r^4	1	r	r^2
sr^3	sr^3	sr^4	s	sr	sr^2	r^2	r^3	r^4	1	r
sr^4	sr^4	s	sr	sr^2	sr^3	r	r^2	r^3	r^4	1

Berdasarkan tabel *Cayley* pada D_{10} akan ditunjukkan kelas-kelas konjugasi D_{10}. Untuk memperoleh kelas-kelas konjugasi dari grup dihedral D_{10} maka dilakukan langkah-langkah seperti pencarian kelas konjugasi pada subbab 3.1.1 sehingga kelas-kelas konjugasi dari grup dihedral D_{10} sebagai berikut:

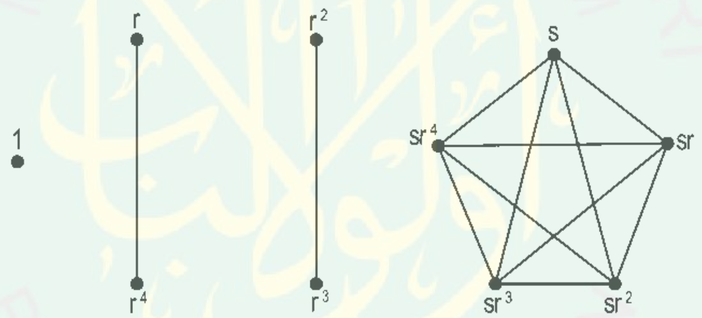
$[1] = \{1\}$

$[r] = \{ r, r^4\}$

$[r^2] = \{ r^2, r^3\}$

$[s] = \{s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$

Dengan demikian berdasarkan kelas-kelas konjugasi tersebut dapat digambarkan dalam suatu graf konjugasi dari grup dihedral D_{10} sebagai berikut:



Gambar 3.3 Graf Konjugasi D_{10}

Dari graf konjugasi D_{10} dapat diketahui matriks *signless-Laplace* dari grup dihedral D_{10} sebagai berikut:

$$L^+(D_{10}) = D(D_{10}) + A(D_{10})$$

$$L^{+}(D_{10}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks *signless-Laplace* maka dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tersebut dengan cara:

$$det(L^{+}(D_{10}) - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4-\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 4-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Hasil dari $det(L^{+}(D_{10}) - \lambda I)$ dapat diperoleh dengan menggunakan aplikasi *Maple 18* yaitu

$$-\lambda(\lambda^2 - 2\lambda)^2(-\lambda^5 + 20\lambda^4 - 150\lambda^3 + 540\lambda^2 - 945\lambda + 648) = 0$$

$$\lambda^3(\lambda - 2)^2(\lambda - 3)^4(\lambda - 8) = 0$$

Sehingga diperoleh nilai eigennya:

$\lambda_1 = 8, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 2, \lambda_4 = 0$

Kemudian dicari basis untuk ruang vektor eigen dari matriks tersebut. Untuk mencari banyaknya basis ruang vektor eigen dapat diketahui dari multiplisitas nilai eigen yang bersesuaian adalah $m(\lambda_1) = 1$, $m(\lambda_2) = 4$, $m(\lambda_3) = 2$,

$m(\lambda_4) = 3$. Dengan demikian terbentuklah spektrum *signless-Laplace* graf konjugasi dari grup dihedral D_{10} sebagai berikut:

$$Spec_{L^+}(D_{10}) = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

3.1.4 Spektrum *Signless-Laplace* Graf Konjugasi dari Grup Dihedral D_{12}

Grup dihedral $D_{12} = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$. Dengan operasi komposisi akan ditunjukkan kelas-kelas konjugasi D_{12}. Untuk memperoleh kelas-kelas konjugasi dari grup dihedral D_{12} maka dilakukan langkah-langkah seperti pencarian kelas konjugasi pada subbab 3.1.1 sehingga kelas-kelas konjugasi dari grup dihedral D_{12} sebagai berikut:

$[1] = \{1\}$

$[r] = \{r, r^5\}$

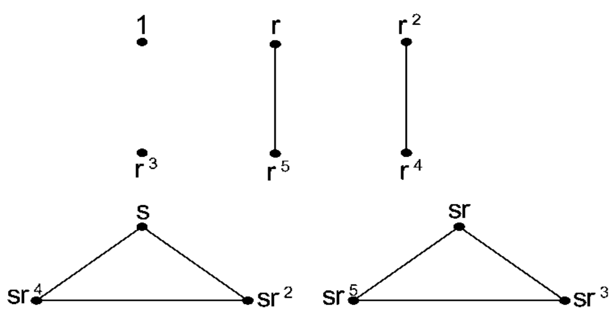
$[r^2] = \{r^2, r^4\}$

$[r^3] = \{r^3\}$

$[s] = \{s, sr^2, sr^4\}$

$[sr] = \{sr, sr^3, sr^5\}$

Berdasarkan kelas-kelas konjugasi tersebut dapat digambarkan dalam suatu graf konjugasi dari grup D_{12} sebagai berikut:



Gambar 3.4 Graf Konjugasi D_{12}

Dari graf konjugasi D_{12} dapat diketahui matriks *signless-Laplace* dari grup dihedral D_{12} sebagai berikut:

$L^{+}(D_{12}) = D(D_{12}) + A(D_{12})$

$$L^{+}(D_{12}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks *signless-Laplace* maka dicari nilai eigen dari matriks tersebut dengan cara:

$$det(L^{+}(D_{12}) - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Hasil dari $det(L^{+}(D_{12}) - \lambda I)$ dapat diperoleh dengan menggunakan aplikasi *Maple 18* yaitu

$$\lambda^2(\lambda^2 - 2\lambda)^2(-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4)^2 = 0$$

$$\lambda^4(\lambda - 1)^4(\lambda - 2)^2(\lambda - 4)^2 = 0$$

Karena untuk mencari nilai eigen dengan cara $det(L^{+}(D_{12}) - \lambda I) = 0$ sehingga diperoleh nilai eigennya:

$\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 0$

Kemudian dicari basis untuk ruang vektor eigen dari matriks tersebut. Untuk mencari banyaknya basis ruang vektor eigen dapat diketahui dari multiplisitas nilai eigen yang bersesuaian adalah $m(\lambda_1) = 2$, $m(\lambda_2) = 2$, $m(\lambda_3) = 4$, $m(\lambda_4) = 4$. Dengan demikian terbentuklah spektrum *signless-Laplace* graf konjugasi dari grup dihedral D_{12} sebagai berikut:

$$Spec_{L^{+}}(D_{12}) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

3.1.5 Spektrum *Signless-Laplace* Graf Konjugasi dari Grup Dihedral D_{14}

Grup dihedral $D_{14} = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}$. Dengan operasi komposisi akan ditunjukkan kelas-kelas konjugasi D_{14}. Untuk memperoleh kelas-kelas konjugasi dari grup dihedral D_{14} maka dilakukan langkah-langkah seperti pencarian kelas konjugasi pada subbab 3.1.1 sehingga kelas-kelas konjugasi dari grup D_{14} sebagai berikut:

$[1] = \{1\}$

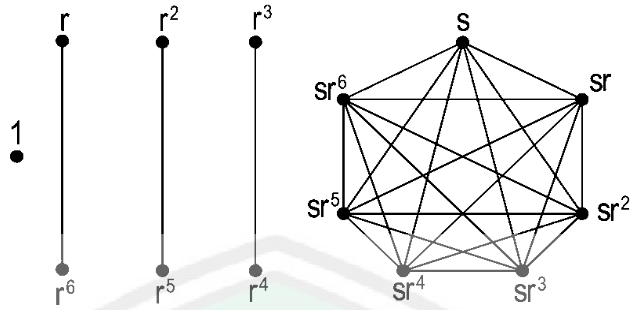
$[r] = \{r, r^6\}$

$[r^2] = \{r^2, r^5\}$

$[r^3] = \{r^3, r^4\}$

$[s] = \{s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}$

Berdasarkan kelas-kelas konjugasi tersebut dapat digambarkan dalam suatu graf konjugasi dari grup dihedral D_{14} sebagai berikut:



Gambar 3.5 Graf Konjugasi D_{14}

Dari graf konjugasi D_{14} dapat diketahui matriks *signless-Laplace* dari grup dihedral D_{14} sebagai berikut:

$$L^{+}(D_{14}) = D(D_{14}) + A(D_{14})$$

$$L^{+}(D_{14}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 6 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks *signless-Laplace* maka dicari nilai eigen dari matriks tersebut dengan cara:

$$det(L^{+}(D_{14}) - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6-\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6-\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6-\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 6-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 6-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 6-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Hasil dari $det(L^{+}(D_{14})-\lambda I)$ dapat diperoleh dengan menggunakan aplikasi *Maple 18* yaitu

$$-\lambda(\lambda^2-2\lambda)^3(-\lambda^7+42\lambda^6-735\lambda^5+7000\lambda^4-39375\lambda^3+131250\lambda^2-240625\lambda+187500)=0$$

$$\lambda^4(\lambda-2)^3(\lambda-5)^6(\lambda-12)=0$$

Karena untuk mencari nilai eigen dengan cara $det(L^{+}(D_{14})-\lambda I)=0$ sehingga diperoleh nilai eigennya:

$\lambda_1=12, \lambda_2=5, \lambda_3=2, \lambda_4=0$

Kemudian dicari basis untuk ruang vektor eigen dari matriks tersebut. Untuk mencari banyaknya basis ruang vektor eigen dapat diketahui dari multiplisitas nilai eigen yang bersesuaian adalah $m(\lambda_1)=1$, $m(\lambda_2)=6$, $m(\lambda_3)=3$, $m(\lambda_4)=4$. Dengan demikian terbentuklah spektrum *signless-Laplace* graf konjugasi dari grup dihedral D_{14} sebagai berikut:

$$Spec_{L^{+}}(D_{14})=\begin{bmatrix}12 & 5 & 2 & 0\\ 1 & 6 & 3 & 4\end{bmatrix}$$

3.1.6 Spektrum *Signless-Laplace* Graf Konjugasi dari Grup Dihedral D_{16}

Grup dihedral $D_{16}=\{1,r,r^2,r^3,r^4,r^5,r^6,r^7,s,sr,sr^2,sr^3,sr^4,sr^5, sr^6,sr^7\}$. Dengan operasi komposisi akan ditunjukkan kelas-kelas konjugasi D_{16}. Untuk memperoleh kelas-kelas konjugasi dari grup dihedral D_{16} maka dilakukan langkah-langkah seperti pencarian kelas konjugasi pada subbab 3.1.1 sehingga kelas-kelas konjugasi dari grup dihedral D_{16} sebagai berikut:

$[1]=\{1\}$

$[r]=\{r,r^7\}$

$[r^2]=\{r^2,r^6\}$

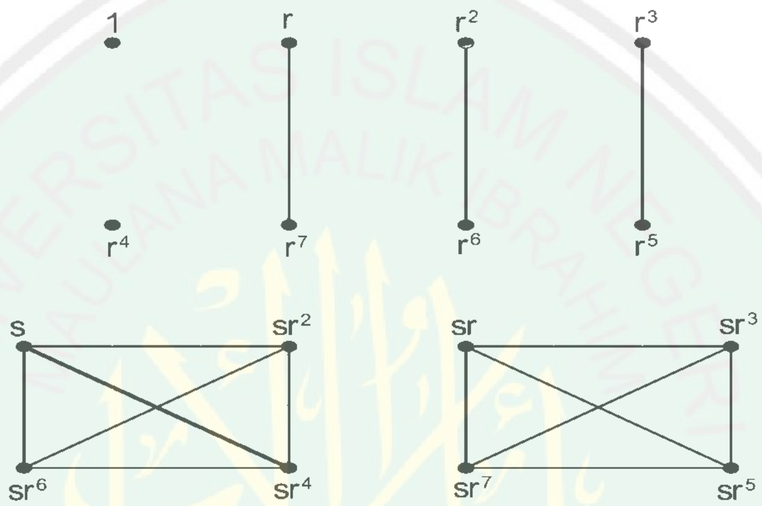
$[r^3]=\{r^3,r^5\}$

$[r^4] = \{r^4\}$

$[s] = \{s, sr^2, sr^4, sr^6\}$

$[sr] = \{sr, sr^3, sr^5, sr^7\}$

Berdasarkan kelas-kelas konjugasi tersebut dapat digambarkan dalam suatu graf konjugasi dari grup dihedral D_{16} sebagai berikut:



Gambar 3.6 Graf Konjugasi D_{16}

Dari graf konjugasi D_{16} dapat diketahui matriks *signless-Laplace* dari grup dihedral D_{16} sebagai berikut:

$$L^{+}(D_{16}) = D(D_{16}) + A(D_{16})$$

$$L^{+}(D_{16}) = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&3&0&1&0&1&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&3&0&1&0&1&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&3&0&1&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&3&0&1&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&3&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&3&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0&3&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0&3 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks *signless-Laplace* maka dicari nilai eigen dari matriks tersebut dengan cara:

$$det(L^{+}(D_{16})-\lambda I)=0$$

$$\begin{vmatrix}
-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3-\lambda & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3-\lambda & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3-\lambda & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3-\lambda
\end{vmatrix}=0$$

Hasil dari $det(L^{+}(D_{16})-\lambda I)$ dapat diperoleh dengan menggunakan aplikasi *Maple 18* yaitu

$$\lambda^{2}(\lambda^{2}-2\lambda)^{3}(\lambda^{4}-12\lambda^{3}+48\lambda^{2}-80\lambda+84)^{2}=0$$

$$\lambda^{5}(\lambda-2)^{9}(\lambda-6)^{2}=0$$

Karena untuk mencari nilai eigen dengan cara $det(L^{+}(D_{16})-\lambda I)=0$ sehingga diperoleh nilai eigennya:

$\lambda_1=6, \lambda_2=2, \lambda_3=0$

Kemudian dicari basis untuk ruang vektor eigen dari matriks tersebut. Untuk mencari banyaknya basis ruang vektor eigen dapat diketahui dari multiplisitas nilai eigen yang bersesuaian adalah $m(\lambda_1)=2$, $m(\lambda_2)=9$, $m(\lambda_3)=5$. Dengan demikian terbentuklah spektrum *signless-Laplace* graf konjugasi dari grup dihedral D_{16} sebagai berikut:

$$Spec_{L^{+}}(D_{16})=\begin{bmatrix}6 & 2 & 0\\ 2 & 9 & 5\end{bmatrix}$$

3.1.7 Pola Spektrum *Signless-Laplace* Graf Konjugasi dari Grup Dihedral D_{2n}

Dari pencarian nilai eigen dan multiplisitas yang telah dilakukan, maka diperoleh pola polinomial karakteristik dan spektrum *signless-Laplace* graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n} sebagai berikut:

Tabel 3.4 Polinomial Karakteristik Matriks *Signless-Laplace* dari Grup Dihedral D_{2n} dengan n Ganjil

n	Graf Konjugasi	Polinomial Graf Konjugasi
3	Graf konjugasi D_6	$\lambda^2(\lambda-1)^2(\lambda-2)(\lambda-4)$
5	Graf konjugasi D_{10}	$\lambda^3(\lambda-2)^2(\lambda-3)^4(\lambda-8)$
7	Graf konjugasi D_{14}	$\lambda^4(\lambda-2)^3(\lambda-5)^6(\lambda-12)$
9	Graf konjugasi D_{18}	$\lambda^5(\lambda-2)^4(\lambda-7)^8(\lambda-16)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	Graf konjugasi D_{2n}	$\lambda^{\frac{n+1}{2}}(\lambda-2)^{\frac{n-1}{2}}(\lambda-(n-2))^{n-1}(\lambda-(2n-2))$

Untuk spektrum *Signless-Laplace* grup dihedral D_{2n} dengan n ganjil diperoleh data berikut ini

Tabel 3.5 Spektrum *Signless-Laplace* dari Grup Dihedral D_{2n} dengan n Ganjil

n	Graf Konjugasi	Spektrum Graf Konjugasi
3	Graf konjugasi D_6	$Spec_{L^+}(D_6)=\begin{bmatrix}4 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2 & 2\end{bmatrix}$
5	Graf konjugasi D_{10}	$Spec_{L^+}(D_{10})=\begin{bmatrix}8 & 3 & 2 & 0\\ 1 & 4 & 2 & 3\end{bmatrix}$
7	Graf konjugasi D_{14}	$Spec_{L^+}(D_{14})=\begin{bmatrix}12 & 5 & 2 & 0\\ 1 & 6 & 3 & 4\end{bmatrix}$
9	Graf konjugasi D_{18}	$Spec_{L^+}(D_{18})=\begin{bmatrix}16 & 7 & 2 & 0\\ 1 & 8 & 4 & 5\end{bmatrix}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	Graf konjugasi D_{2n}	$Spec_{L^+}(D_{2n})=\begin{bmatrix}2n-2 & n-2 & 2 & 0\\ 1 & n-1 & \frac{n-1}{2} & \frac{n+1}{2}\end{bmatrix}$

Teorema 1

Polinomial karakteristik matriks *signless-Laplace* dengan n ganjil dan $n \geq 5$, $n \in N$ adalah

$$p(\lambda) = \lambda^{\frac{n+1}{2}}(\lambda - 2)^{\frac{n-1}{2}}(\lambda - (n-2))^{n-1}(\lambda - (2n-2))$$

Bukti

Diketahui grup dihedral $D_{2n} = \{1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \ldots, sr^{n-1}\}$. Untuk n ganjil diperoleh kelas konjugasi $[1] = \{1\}$, $[r] = \{r, r^{n-1}\}$, $[r^2] = \{r^2, r^{n-2}\}$, …, $\left[r^{\frac{n-1}{2}}\right] = \left\{r^{\frac{n-1}{2}}, r^{\frac{n-1}{2}+1}\right\}, [s] = \{s, sr, sr^2, \ldots sr^{n-1}\}$. Untuk n ganjil, r^i dan r^{n-i} dengan $i = 1,2,3 \ldots, n-1$ dan $n \in N$ terhubung langsung di graf konjugasi. Pada n ganjil, sr^i dan sr^j $\forall\, i \neq j$ dengan $(i = 1,2,3, \ldots, n-1)$ saling terhubung langsung. Dengan demikian diperoleh matriks keterhubungan titik

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccccc} 1 & r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-2} \\ sr^{n-1} \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}$$

dan matriks derajat

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccccc} 1 & r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-2} \\ sr^{n-1} \end{array} &
\left[\begin{array}{ccccccccccc}
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Maka matriks *signless-Laplace* graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n} adalah

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccccc} 1 & r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-2} \\ sr^{n-1} \end{array} &
\left[\begin{array}{ccccccccccc}
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & n-1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & n-1 & \cdots & 1 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & n-1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & n-1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Setelah mendapat matriks *signless-Laplace* maka dicari nilai eigen dengan cara $det(L^{+}(D_{2n}) - \lambda I) = 0$ dengan menggunakan aplikasi *Maple 18*, dan diperoleh

$$p(\lambda) = \lambda^{\frac{n+1}{2}}(\lambda - 2)^{\frac{n-1}{2}}(\lambda - (n-2))^{n-1}(\lambda - (2n-2)). \quad \blacksquare$$

Teorema 2

Spektrum *signless-Laplace* dengan n ganjil dan $n \geq 5, n \in N$ diperoleh

$$Spec_{L^+}(D_{2n}) = \begin{bmatrix} 2n-2 & n-2 & 2 & 0 \\ 1 & n-1 & \frac{n-1}{2} & \frac{n+1}{2} \end{bmatrix}$$

Bukti

Dari Teorema 1 diperoleh bahwa

$$p(\lambda) = \lambda^{\frac{n+1}{2}}(\lambda-2)^{\frac{n-1}{2}}(\lambda-(n-2))^{n-1}(\lambda-(2n-2))$$

Sehingga diperoleh nilai eigen yaitu

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = n-2, \lambda_4 = 2n-2$$

Selanjutnya dicari banyaknya basis ruang vektor eigen dari setiap nilai eigen yang bersesuaian, karena banyaknya basis ruang vektor eigen sama dengan multiplisitas nilai eigen yang bersesuaian sehingga dari polinomial karakteristik Teorema 1 maka diperoleh spektrum *signless-Laplace* grup dihedral D_{2n} dengan n ganjil dan $n \in N$

$$Spec_{L^+}(D_{2n}) = \begin{bmatrix} 2n-2 & n-2 & 2 & 0 \\ 1 & n-1 & \frac{n-1}{2} & \frac{n+1}{2} \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Polinomial karakteristik dan spektrum *signless-Laplace* untuk grup dihedral D_{2n} dengan n genap diperoleh data berikut ini

Tabel 3.6 Polinomial Karakteristik Matriks *Signless-Laplace* dari Grup Dihedral D_{2n} dengan n Genap

n	Graf Konjugasi	Polinomial Graf Konjugasi
4	Graf konjugasi D_8	$\lambda^5(\lambda-2)^3$
6	Graf konjugasi D_{12}	$\lambda^4(\lambda-1)^4(\lambda-2)^2(\lambda-4)^2$
8	Graf konjugasi D_{16}	$\lambda^5(\lambda-2)^9(\lambda-6)^2$

Tabel 3.7 Spektrum *Signless-Laplace* dari Grup Dihedral D_{2n} dengan n Genap

n	Graf konjugasi	Spektrum Graf Konjugasi
4	Graf konjugasi D_8	$Spec_{L^+}(D_8) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$
6	Graf konjugasi D_{12}	$Spec_{L^+}(D_{12}) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$
8	Graf konjugasi D_{16}	$Spec_{L^+}(D_{16}) = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 9 & 5 \end{bmatrix}$

Polinomial karakteristik pada matriks *signless-Laplace* dari grup dihedral D_{2n} dengan n genap tidak dapat ditemukan suatu pola umum karena panjang polinomialnya berbeda pada setiap grup dihedral. Dengan demikan pola spektrum *signless-Laplace* juga tidak dapat ditemukan karena kolom matriks spektrumnya berbeda pada setiap grup dihedral.

3.2 Spektrum *Detour* Graf Konjugasi dari Grup Dihedral D_{2n}

3.2.1 Spektrum *Detour* Graf Konjugasi dari Grup Dihedral D_6

Dari graf konjugasi D_6 pada Gambar 3.1 dapat ditentukan matriks *detour* yaitu lintasan terpanjang dari dua unsur grup dihdral D_6:

$$DD(D_6) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks *detour*, berikutnya dicari nilai eigen dari matriks tersebut dengan cara:

$$det(DD(D_6) - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Hasil dari $det(DD(D_6) - \lambda I)$ dapat diperoleh dengan menggunakan aplikasi *Maple 18* yaitu

$$-\lambda(\lambda^2 - 1)(-\lambda^3 + 12\lambda + 16) = 0$$

$$(\lambda + 2)^2(\lambda + 1)(\lambda)(\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0$$

Karena $det(DD(D_6) - \lambda I) = 0$ Sehingga diperoleh nilai eigennya:

$\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 0,\ \lambda_4 = -1, \lambda_5 = -2,$

Kemudian dicari basis untuk ruang vektor eigen dari matriks tersebut, banyaknya basis untuk ruang vektor eigen dapat disebut dengan multiplisitas nilai eigen yang bersesuaian adalah $m(\lambda_1) = 1, m(\lambda_2) = 1, m(\lambda_3) = 1, m(\lambda_4) = 1, m(\lambda_5) = 2$ sehingga terbentuklah spektrum *detour* graf konjugasi dari grup D_6 sebagai berikut:

$$Spec_{DD(D_6)} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

3.2.2 Spektrum *Detour* Graf Konjugasi dari Grup Dihedral D_8

Dari graf konjugasi D_8 pada Gambar 3.2 dapat ditentukan matriks *detour* yaitu lintasan terpanjang dari dua unsur grup dihedral D_8:

$$DD(D_8) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks *detour* maka dicari nilai eigen dari matriks tersebut dengan cara:

$$det(DD(D_8) - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Hasil dari $det(DD(D_8) - \lambda I)$ dapat diperoleh dengan menggunakan aplikasi *Maple 18* yaitu

$$\lambda^2(\lambda^2 - 1)^3 = 0$$

$$(\lambda + 1)^3(\lambda^2)(\lambda - 1)^3 = 0$$

Karena $det(DD(D_8) - \lambda I) = 0$ maka, dapat diketahui nilai eigen dari matriks tersebut yaitu:

$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = -1$

Kemudian akan dicari basis untuk ruang vektor eigen dari matriks tersebut, banyaknya basis untuk ruang vektor eigen dapat disebut dengan multiplisitas nilai eigen yang bersesuaian adalah $m(\lambda_1) = 3, m(\lambda_2) = 2, m(\lambda_3) = 3$ sehingga terbentuklah spektrum *detour* graf konjugasi dari grup dihedral D_6 sebagai berikut:

$$Spec_{DD}(D_8) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

3.2.3 Spektrum *Detour* Graf Konjugasi dari Grup Dihedral D_{10}

Dari graf konjugasi yang terdapat pada Gambar 3.3 dapat diketahui matriks *detour* yaitu lintasan terpanjang dari dua unsur di grup dihedral D_{10}:

$$DD(D_{10}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks *detour* maka dicari nilai eigen dari matriks tersebut dengan cara:

$$det(DD(D_{10}) - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -\lambda & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & -\lambda & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & -\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Untuk mengetahui determinan dari matriks $det(DD(D_{10}) - \lambda I)$ dengan menggunakan aplikasi *Maple 18*, sehingga diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut:

$$-\lambda(\lambda^2 - 1)^2(-\lambda^5 + 160\lambda^3 + 1280\lambda^2 + 3840\lambda + 4096) = 0$$

$$(\lambda + 4)^4(\lambda + 1)^2(\lambda)(\lambda - 1)^2(\lambda - 16) = 0$$

Karena $det(DD(D_{10}) - \lambda I) = 0$ maka dapat diketahui nilai eigennya sebagai berikut:

$\lambda_1 = 16,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 0, \lambda_4 = -1, \lambda_5 = -4,$

Kemudian dicari basis untuk ruang vektor eigen dari matriks tersebut, anyaknya basis untuk ruang vektor eigen dapat disebut dengan multiplisitas nilai eigen yang bersesuaian adalah $m(\lambda_1) = 1, m(\lambda_2) = 2, m(\lambda_3) = 1, m(\lambda_4) = 2, m(\lambda_5) = 4$. Dengan demikian terbentuklah spektrum *detour* graf konjugasi dari grup D_{10} sebagai berikut:

$$Spec_{DD}(D_{10}) = \begin{bmatrix} 16 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

3.2.4 Spektrum *Detour* Graf Konjugasi dari Grup Dihedral D_{12}

Dari graf konjugasi pada Gambar 3.4 dapat diketahui matriks *detour* yaitu lintasan terpanjang dari dua unsur di grup dihedral D_{12}:

$$DD(D_{12}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks *detour* maka dicari nilai eigen dari matriks tersebut dengan cara:

$$det(DD(D_{12}) - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -\lambda & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Dengan menggunakan aplikasi *Maple 18* maka dapat diketahui hasil determinannya sehingga diperoleh persamaan polinomial karakteristik sebagai berikut:

$$\lambda^2(\lambda^2 - 1)^2(-\lambda^3 + 12\lambda + 16)^2 = 0$$

$$(\lambda + 2)^4(\lambda + 1)^2(\lambda^2)(\lambda - 1)^2(\lambda - 4)^2 = 0$$

Karena $det(DD(D_{12}) - \lambda I) = 0$ maka dapat diketahui nilai eigen dari matriks tersebut, yaitu:

$\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 0, \lambda_4 = -1, \lambda_5 = -2,$

Kemudian dicari basis untuk ruang vektor eigen dari matriks tersebut, banyaknya basis untuk ruang vektor eigen dapat disebut dengan multiplisitas nilai eigen yang bersesuaian adalah $m(\lambda_1) = 2, m(\lambda_2) = 2, m(\lambda_3) = 2, m(\lambda_4) = 2, m(\lambda_5) = 4$. Dengan demikian terbentuklah spektrum *detour* dari graf konjugasi dari grup dihedral D_{12} sebagai berikut:

$$Spec_{DD}(D_{12}) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

3.2.5 Spektrum *Detour* Graf Konjugasi dari Grup Dihedral D_{14}

Dari graf konjugasi yang terdapat pada Gambar 3.5 dapat diketahui matriks *detour* dari grup dihedral D_{14} dengan pencarian nilai eigen menggunakan cara $det(DD(D_{14}) - \lambda I) = 0$ yaitu:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -\lambda & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 6 & -\lambda & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 6 & 6 & -\lambda & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 6 & 6 & 6 & -\lambda & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & -\lambda & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Dengan menggunakan aplikasi *Maple 18* maka dapat diketahui hasil determinan matriks tersebut berikut ini:

$$-\lambda(\lambda^2 - 1)^3(-\lambda^7 + 756\lambda^5 + 15120\lambda^4 + 136080\lambda^3 + 653184\lambda^2 + 1632960\lambda + 1679616) = 0$$

$$(\lambda + 6)^6(\lambda + 1)^3(\lambda)(\lambda - 1)^3(\lambda - 36) = 0$$

Dari persamaan polinomial karakteristik dapat diketahui nilai eigennya dan multiplisitas nilai eigen yang bersesuaian maka terbentuklah spektrum *detour* dari graf konjugasi dari grup dihedral D_{14} sebagai berikut:

$$Spec_{DD}(D_{14}) = \begin{bmatrix} 36 & 1 & 0 & -1 & -6 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

3.2.6 Spektrum *Detour* Graf Konjugasi dari Grup Dihedral D_{16}

Dari graf konjugasi yang terdapat pada Gambar 3.6 dapat diketahui matriks *detour* dari grup dihedral D_{16} dengan pencarian nilai eigen menggunakan cara $det(DD(D_{16}) - \lambda I) = 0$ yaitu:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -\lambda & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -\lambda & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & -\lambda & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & -\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Dengan menggunakan aplikasi *Maple 18* maka dapat diketahui hasil determinan matriks tersebut berikut ini:

$$\lambda^2(\lambda^2 - 1)^3(\lambda^4 - 54\lambda^2 - 216\lambda - 243)^2 = 0$$

$$(\lambda + 3)^6(\lambda + 1)^3(\lambda^2)(\lambda - 1)^3(\lambda - 9)^2 = 0$$

Dengan persamaan polinomial karakteristik tersebut dapat diketahui nilai eigen dan multiplisitas nilai eigen yang bersesuaian maka terbentuklah spektrum *detour* graf konjugasi dari grup dihedral D_{16} berikut ini:

$$Spec_{DD}(D_{16}) = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 0 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

3.2.7 Pola Spektrum *Detour* Graf Konjugasi dari Grup Dihedral D_{2n}

Dari hasil yang telah didapatkan maka penulis menemukan beberapa konjektur dan teorema sebagai berikut

Lemma 1

Lintasan terpanjang antara dua titik pada graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n} dengan n ganjil dan $1 \le i < n, n \in N$ adalah

1. sr^idan sr^j, $i \neq j$ adalah $n-1$
2. r^i dan r^{n-i} adalah 1
3. Bernilai 0 untuk lainnya

Bukti

Diketahui grup dihedral $D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$.

1. Dari graf konjugasi pada setiap D_{2n} dengan n ganjil menunjukkan bahwa setiap titik sr^i saling terhubung langsung dengan sr^j dengan $1 \leq i < n, n \in N$. Sehingga lintasan terpanjang dari sr^i ke sr^j dengan $i \neq j$ adalah $(n-1)$.
2. Untuk n ganjil dengan $i \leq 1 < n, n \in N$, karena titik r^i hanya terhubung langsung dengan r^{n-i} maka lintasan terpanjang dari r^i ke r^{n-i} adalah 1.
3. Untuk titik selain sr^i dan sr^j dengan $i \neq j$, serta r^i dan r^{n-i} tidak terhubung langsung, sehingga panjang lintasannya adalah 0. ■

Teorema 3

Pola matriks *detour* yang terbentuk pada graf konjugasi D_{2n} dengan n ganjil sebagai berikut

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccccc} 1 & r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-2} \\ sr^{n-1} \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n-1 & n-1 & \cdots & n-1 & n-1 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & 0 & n-1 & \cdots & n-1 & n-1 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & n-1 & 0 & \cdots & n-1 & n-1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & n-1 & n-1 & \cdots & 0 & n-1 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & n-1 & n-1 & \cdots & n-1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Bukti

Dari Lemma 1, maka dapat terbentuk pola matriks yang telah disebutkan. ■

Berikut ini pola polinomial karakteristik matriks *detour* graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n} di antaranya:

Tabel 3.8 Polinomial Karakteristik Matriks *Detour* dari Grup Dihedral D_{2n} dengan n Ganjil

n	Graf Konjugasi	Polinomial Graf Konjugasi
3	Graf konjugasi D_6	$(\lambda+2)^2(\lambda+1)(\lambda)(\lambda-1)(\lambda-4)$
5	Graf konjugasi D_{10}	$(\lambda+4)^4(\lambda+1)^2(\lambda)(\lambda-1)^2(\lambda-16)$
7	Graf konjugasi D_{14}	$(\lambda+6)^6(\lambda+1)^3(\lambda)(\lambda-1)^3(\lambda-36)$
9	Graf konjugasi D_{18}	$(\lambda+8)^8(\lambda+1)^4(\lambda)(\lambda-1)^4(\lambda-64)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	Graf konjugasi D_{2n}	$(\lambda+(n-1))^{n-1}(\lambda+1)^{\frac{n-1}{2}}(\lambda)(\lambda-1)^{\frac{n-1}{2}}(\lambda-(n-1)^2)$

Teorema 4

Polinomial karakteristik matriks *detour* dari D_{2n} dengan n ganjil dan $n \geq 3$, $n \in N$ adalah

$$p(\lambda) = (\lambda+(n-1))^{n-1}(\lambda+1)^{\frac{n-1}{2}}(\lambda)(\lambda-1)^{\frac{n-1}{2}}(\lambda-(n-1)^2)$$

Bukti

Setelah mendapat matriks *detour* maka dicari nilai eigen dengan cara $det(DD(D_{2n})-\lambda I)=0$ menggunakan aplikasi *Maple 18*, dan diperoleh

$$p(\lambda) = (\lambda+(n-1))^{n-1}(\lambda+1)^{\frac{n-1}{2}}(\lambda)(\lambda-1)^{\frac{n-1}{2}}(\lambda-(n-1)^2). \quad ■$$

Untuk spektrum *detour* grup dihedral D_{2n} dengan n ganjil diperoleh data berikut ini

Tabel 3.9 Spektrum *Detour* dari Grup Dihedral D_{2n} dengan n Ganjil

n	Graf Konjugasi	Spektrum Graf Konjugasi
3	Graf konjugasi D_6	$Spec_{DD}(D_6) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
5	Graf konjugasi D_{10}	$Spec_{DD}(D_{10}) = \begin{bmatrix} 16 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$
7	Graf konjugasi D_{14}	$Spec_{DD}(D_{14}) = \begin{bmatrix} 36 & 1 & 0 & -1 & -6 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$
9	Graf konjugasi D_{18}	$Spec_{DD}(D_{18}) = \begin{bmatrix} 64 & 1 & 0 & -1 & -8 \\ 1 & 4 & 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	Graf konjugasi D_{2n}	$Spec_{DD}(D_{2n}) = \begin{bmatrix} (n-1)^2 & 1 & 0 & -1 & -(n-1) \\ 1 & \frac{n-1}{2} & 1 & \frac{n-1}{2} & n-1 \end{bmatrix}$

Teorema 5

Spektrum *detour* dengan n ganjil dan $n \geq 3, n \in N$ diperoleh

$$Spec_{DD}(D_{2n}) = \begin{bmatrix} (n-1)^2 & 1 & 0 & -1 & -(n-1) \\ 1 & \frac{n-1}{2} & 1 & \frac{n-1}{2} & n-1 \end{bmatrix}$$

Bukti

Dari Teorema 4 diperoleh bahwa

$$p(\lambda) = (\lambda + (n-1))^{n-1}(\lambda + 1)^{\frac{n-1}{2}}(\lambda)(\lambda - 1)^{\frac{n-1}{2}}(\lambda - (n-1)^2)$$

Sehingga diperoleh nilai eigen yaitu

$$\lambda_1 = (n-1)^2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = -1, \lambda_5 = -(n-1)$$

Selanjutnya dicari banyaknya basis vektor eigen dari setiap nilai eigen yang bersesuaian, karena banyaknya basis vektor eigen sama dengan multiplisitas nilai eigen yang bersesuaian sehingga dari pola umum polinomial karakteristik Teorema 3 diperoleh pola umum spektrum *detour* graf konjugasi dari D_{2n} dengan baris pertama merupakan nilai eigen dan baris kedua merupakan multiplisitas nilai eigen yang bersesuaian

$$Spec_{DD}(D_{2n}) = \begin{bmatrix} (n-1)^2 & 1 & 0 & -1 & -(n-1) \\ 1 & \frac{n-1}{2} & 1 & \frac{n-1}{2} & n-1 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Lemma 2

Lintasan terpanjang antara dua titik pada graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n} dengan n genap dan $1 \leq i < n, n \in N$ adalah

1. sr^idan sr^j, $i \neq j$, i ganjil dengan j ganjil dan i dengan j genap adalah $\frac{n}{2} - 1$
2. r^i dan r^{n-i} adalah 1
3. Bernilai 0 untuk lainnya

Bukti

Diketahui grup dihedral $D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$.

1. Dari graf konjugasi pada setiap D_{2n} dengan n genap menunjukkan bahwa setiap titik sr^i saling terhubung langsung dengan sr^j dengan $1 \leq i < n, n \in N$. Sehingga lintasan terpanjang dari sr^i ke sr^j dengan $i \neq j$, i ganjil dengan j ganjil dan i genap dengan j genap adalah $\left(\frac{n}{2} - 1\right)$.
2. Untuk n genap dengan $i \leq 1 < n, n \in N$, karena titik r^i hanya terhubung langsung dengan r^{n-i} maka lintasan terpanjang dari r^i ke r^{i-n} adalah 1.

3. Untuk titik selain sr^idan sr^j, $i \neq j$, i ganjil dengan j ganjil dan i dengan j genap, serta r^i dan r^{n-i} tidak terhubung langsung, sehingga panjang lintasannya adalah 0. ■

Teorema 6

Pola matriks *detour* yang terbentuk pada graf konjugasi D_{2n} dengan n genap sebagai berikut

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & r & r^2 & \cdots & r^{\frac{n}{2}-1} & r^{\frac{n}{2}} & r^{\frac{n}{2}+1} & \cdots & r^{n-2} & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{\frac{n}{2}-1} \\ r^{\frac{n}{2}} \\ r^{\frac{n}{2}+1} \\ \vdots \\ r^{n-2} \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-2} \\ sr^{n-1} \end{array} &
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{n}{2}-1 & \cdots & \frac{n}{2}-1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{n}{2}-1 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{n}{2}-1 & 0 & 0 & \cdots & \frac{n}{2}-1 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{n}{2}-1 & 0 & \frac{n}{2}-1 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \frac{n}{2}-1 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Bukti

Dari Lemma 2, maka dapat terbentuk pola matriks yang telah disebutkan. ■

Berikut ini pola polinomial karakteristik matriks *detour* graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n} di antaranya:

Tabel 3.10 Polinomial Karakteristik Matriks *Detour* dari Grup Dihedral D_{2n} dengan n Genap

n	Graf Konjugasi	Polinomial Graf Konjugasi
4	Graf konjugasi D_8	$(\lambda+1)^3(\lambda^2)(\lambda-1)^3$
6	Graf konjugasi D_{12}	$(\lambda+2)^4(\lambda+1)^2(\lambda^2)(\lambda-1)^2(\lambda-4)^2$
8	Graf konjugasi D_{16}	$(\lambda+3)^6(\lambda+1)^3(\lambda^2)(\lambda-1)^3(\lambda-9)^2$
10	Graf konjugasi D_{20}	$(\lambda+4)^8(\lambda+1)^4(\lambda^2)(\lambda-1)^4(\lambda-16)^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	Graf konjugasi D_{2n}	$\left(\lambda+\left(\frac{n}{2}-1\right)\right)^{n-2}(\lambda+1)^{\frac{n}{2}-1}(\lambda^2)(\lambda-1)^{\frac{n}{2}-1}\left(\lambda-\left(\frac{n}{2}-1\right)^2\right)^2$

Teorema 7

Polinomial karakteristik matriks *detour* dari D_{2n} dengan n genap dan $n \geq 6$, $n \in N$ adalah

$$p(\lambda)=\left(\lambda+\left(\frac{n}{2}-1\right)\right)^{n-2}(\lambda+1)^{\frac{n}{2}-1}(\lambda^2)(\lambda-1)^{\frac{n}{2}-1}\left(\lambda-\left(\frac{n}{2}-1\right)^2\right)^2$$

Bukti

Setelah mendapat matriks *detour* maka dicari nilai eigen dengan cara $det(DD(D_{2n})-\lambda I)=0$ menggunakan aplikasi *Maple 18*, dan diperoleh

$$p(\lambda)=\left(\lambda+\left(\frac{n}{2}-1\right)\right)^{n-2}(\lambda+1)^{\frac{n}{2}-1}(\lambda^2)(\lambda-1)^{\frac{n}{2}-1}\left(\lambda-\left(\frac{n}{2}-1\right)^2\right)^2. \quad \blacksquare$$

Untuk spektrum *detour* grup dihedral D_{2n} dengan n genap diperoleh data berikut ini

Tabel 3.11 Spektrum *Detour* dari Grup Dihedral D_{2n} dengan n Genap

n	Graf Konjugasi	Spektrum Graf Konjugasi
4	Graf konjugasi D_8	$Spec_{DD}(D_8) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$
6	Graf konjugasi D_{12}	$Spec_{DD}(D_{12}) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$
8	Graf konjugasi D_{16}	$Spec_{DD}(D_{16}) = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 0 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$
10	Graf konjugasi D_{20}	$Spec_{DD}(D_{20}) = \begin{bmatrix} 16 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$
⋮	⋮	⋮
n	Graf konjugasi D_{2n}	$Spec_{DD(D_{2n})} = \begin{bmatrix} \left(\frac{n}{2}-1\right)^2 & 1 & 0 & -1 & -\left(\frac{n}{2}-1\right) \\ 2 & \frac{n}{2}-1 & 2 & \frac{n}{2}-1 & n-2 \end{bmatrix}$

Teorema 8

Spektrum *detour* dengan n genap dan $n \geq 6, n \in N$ diperoleh

$$Spec_{DD(D_{2n})} = \begin{bmatrix} \left(\frac{n}{2}-1\right)^2 & 1 & 0 & -1 & -\left(\frac{n}{2}-1\right) \\ 2 & \frac{n}{2}-1 & 2 & \frac{n}{2}-1 & n-2 \end{bmatrix}$$

Bukti

Dari Teorema 7 diperoleh bahwa

$$p(\lambda) = \left(\lambda + \left(\frac{n}{2}-1\right)\right)^{n-2} (\lambda+1)^{\frac{n}{2}-1}(\lambda^2)(\lambda-1)^{\frac{n}{2}-1}\left(\lambda - \left(\frac{n}{2}-1\right)^2\right)^2$$

Sehingga diperoleh nilai eigen yaitu

$$\lambda_1 = \left(\frac{n}{2}-1\right)^2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = -1, \lambda_5 = -\left(\frac{n}{2}-1\right)$$

Selanjutnya dicari banyaknya basis vektor eigen dari setiap nilai eigen yang bersesuaian, karena banyaknya basis vektor eigen sama dengan multiplisitas sehingga dari pola polinomial karakteristik Teorema 7 diperoleh spektrum *detour* graf konjugasi dari D_{2n} dengan baris pertama merupakan nilai eigen dan baris kedua merupakan multiplisitas nilai eigen yang bersesuaian

$$Spec_{DD(D_{2n})} = \begin{bmatrix} \left(\frac{n}{2}-1\right)^2 & 1 & 0 & -1 & -\left(\frac{n}{2}-1\right) \\ 2 & \frac{n}{2}-1 & 2 & \frac{n}{2}-1 & n-2 \end{bmatrix}. \qquad \blacksquare$$

3.3 Kajian Al-Quran tentang Graf

Semua ciptaan Allah Swt. mempunyai keterkaitan antara satu dengan yang lain secara seimbang. Allah menciptakan dua tangan, dua kaki, dua mata, dua telinga, kanan dan kiri, keduanya bekerja saling melengkapi dan terkait. Manusia akan merasa lemah jika salah satu dari yang berpasangan itu hilang atau tidak berfungsi, sehingga dia merasa sangat rugi sekali (Allam, 2005:236). Dalam surat al-Infithaar ayat 7

الَّذِي خَلَقَكَ فَسَوَّاكَ فَعَدَلَكَ (٧)

"Yang telah menciptakan kamu lalu menyempurnakan kejadianmu dan menjadikan (susunan tubuh)mu seimbang" (QS. Al-Infithaar/82:7).

Makna ayat tersebut ialah apa yang telah memperdayakanmu terhadap Rabb yang maha pemurah yang telah menciptakanmu, lalu menyempurnakan kejadianmu dan menjadikan (susunan tubuh)mu seimbang yakni menjadikanmu normal, tegak, mempunyai tubuh yang seimbang dengan tampilan dan bentuk yang sangat baik (Ghoffar dan al-Atsari, 2007b:416-417).

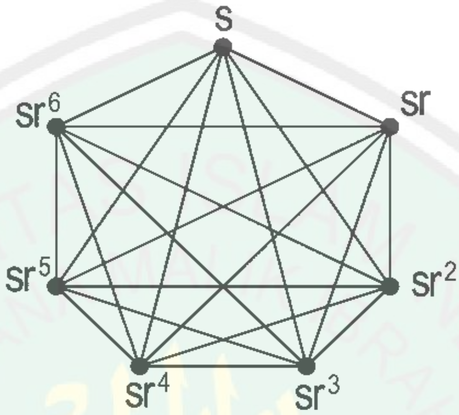
Keseimbangan terjadi karena satu sama lainya saling berkaitan pada tempatnya, terlihat dalam ayat-ayat al-Quran yang telah disebutkan menandakan bahwa kehidupan ini sempurna dan seimbang atau tidak bengkok. Kehidupan ini lurus berdiri tegak dengan adanya ciptaan Allah yang saling berkaitan, hal ini dapat dikaitkan dengan ayat al-Quran surat al-Kahfi ayat 1

الْحَمْدُ لِلَّهِ الَّذِي أَنْزَلَ عَلَىٰ عَبْدِهِ الْكِتَابَ وَلَمْ يَجْعَلْ لَهُ عِوَجًا (1)

"Segala puji bagi Allah yang telah menurunkan kepada hamba-Nya al-kitab (Al-Quran) dan Dia tidak mengadakan kebengkokan di dalamnya" (QS. Al-Kahfii/18:1).

Dalam ayat tersebut menyebutkan bahwa Allah tidak menciptakan suatu hal dengan kebengkokan (tidak seimbang). Dalam Tafsir Ibnu Katsir menyebutkan pada awal penafsiran telah disebutkan bahwa Allah Swt. memuji diri-Nya sendiri yang suci pada pembukaan dan penutupan berbagai urusan. Sesungguhnya Dia memang Maha terpuji dalam setiap keadaan. Segala puji hanya bagi-Nya dari awal dan akhir segala sesuatu. Oleh karena itu, Dia memuji diri-Nya sendiri atas diturunkan-Nya kitab-Nya yang mulia kepada Rasul-Nya yang mulia, Muhammad saw. Yang demikian itu merupakan nikmat yang sangat besar yang diturunkan Allah Swt. kepada penduduk bumi, karena dengannya mereka dikeluarkan dari kegelapan menuju sinar terang benderang, Dia menjadikannya sebagai kitab yang lurus tiada kebengkokan di dalamnya serta tidak terdapat penyimpangan, tetapi justru memberi petunjuk ke jalan yang lurus lagi sangat jelas, terang dan nyata, yang memberikan peringatan kepada orang-orang kafir sekaligus memberikan kabar gembira kepada orang-orang yang beriman. Oleh karena itu Allah berfirman: *"wa lam yaj'allahuu 'iwajan"* dan Dia tidak mengadakan kebengkokan di dalamnya. Maksudnya, Allah Swt. tidak membuat kebengkokan, penyimpangan, dan kemiringan, tetapi Dia justru membuatnya tegak lurus (Ghoffar dan al-Atsari, 2007a:229).

Secara matematis keseimbangan dalam al-Quran misalnya dipresentasikan dengan suatu graf terhubung dari suatu kelas konjugasi yang titik-titik saling terhubung langsung untuk membentuk keseimbangan.



Gambar 3. 1 Graf Terhubung

Pada gambar tersebut dimisalkan dalam suatu susunan tubuh manusia yang saling berkaitan bahu-membahu bekerja dalam tubuh manusia sehingga menjadi suatu susunan tubuh yang utuh sempurna dan seimbang.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dapat diperoleh suatu pola spektrum sebagai berikut:

1. Spektrum *signless-Laplace* graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n} dengan n ganjil dan $n \geq 5, n \in N$ adalah

$$Spec_{L^+}(D_{2n}) = \begin{bmatrix} 2n-2 & n-2 & 2 & 0 \\ 1 & n-1 & \frac{n-1}{2} & \frac{n+1}{2} \end{bmatrix}$$

2. Spektrum *detour* graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n}

   a. Dengan n ganjil dan $n \geq 3, n \in N$ adalah

$$Spec_{DD}(D_{2n}) = \begin{bmatrix} (n-1)^2 & 1 & 0 & -1 & -(n-1) \\ 1 & \frac{n-1}{2} & 1 & \frac{n-1}{2} & n-1 \end{bmatrix}$$

   b. Dengan n genap dan $n \geq 6, n \in N$ adalah

$$Spec_{DD(D_{2n})} = \begin{bmatrix} \left(\frac{n}{2}-1\right)^2 & 1 & 0 & -1 & -\left(\frac{n}{2}-1\right) \\ 2 & \frac{n}{2}-1 & 2 & \frac{n}{2}-1 & n-2 \end{bmatrix}$$

4.2 Saran

Penelitian ini tidak menemukan pola spektrum *signless-Laplace* graf konjugasi dari grup dihedral untuk n genap, bagi penelitian selanjutnya disarankan untuk menemukan pola spektrum *signless-Laplace* pada n genap. Pada penelitian selanjutnya, disarankan untuk meneliti pada jenis graf yang lain dan jenis grup yang lain.

DAFTAR RUJUKAN

Abdussakir, Azizah N.N., Nofandika, F.F. 2009. *Teori Graf*. Malang: UIN-Malang Press.

Abdussakir, Sari, FNK., & Shandya, D. 2012. *Spektrum Adjacency, Spektrum Laplace, Spektrum Signless Laplace, dan Spektrum Detour Graf Multipartisi Komplit*. Laporan Penelitian Dosen Bersama Mahasiswa. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Abdussakir. 2014. *Matematika dalam Al-Quran*. Malang: UIN-Maliki Press.

Allam, K.A., Afifi, A.K. dan Nashr, A.A.A. 2005. *Al-Quran dalam Keseimbangan Alam dan Kehidupan*. Jakarta: Gema Insani.

Anton, H. dan Rorres, C. 2014. *Elementary Linier Algebra, 11th Edition*. New York: Anton Textbooks, Inc.

Ayyaswamy, S.K. & Balachandran, S.. 2010. On Detour Spectra of Some Graph. *International Journal of Computational and Mathematical Sciences*. 4 (7): 1038-1040.

Biggs, N. 1993. *Algebraic Graph Theory*. New York: Cambridge University Press.

Bondy, J.A. & Murty, U.S.R. 1979. *Graph Theory with Applications*. London: The Macmillan Press Ltd.

Brouwer, A.E. dan Haemers, W.H. 2011. *Spectra of Graphs*. Springer.

Chartrand, G., Lesniak, L., & Zhang, P. 2016. *Graph and Digraph 6th Edition*. New York: CRC Press.

Dummit, D.S. dan Foote, R.M. .2004. *Abstract Algebra*. New Jersey: John Wiley and Sons, Inc.

Diestel, R. 2000. *Graph Theory, Electronic Edition*. New York: Springer-Verlag.

Elvierayani, R.R. 2014. *Spektrum Adjacency, Laplace dan Signless Laplace Graf Non-Commuting dari Grup Dihedral* (D_{2n}). Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Ghoffar, M.A dan al-Atsari, A.I. 2007a. *Tafsir Ibnu Katsir Jilid 5*. Bogor: Pustaka Imam Asy-syafi'i.

Ghoffar, M.A dan al-Atsari, A.I. 2007b. *Tafsir Ibnu Katsir Jilid 8*. Bogor: Pustaka Imam Asy-syafi'i.

Gholsani, M. 2003. *Filsafat-Sains Menurut Al-Quran*. Bandung: Mizan.

Gilbert, L dan Gilbert, J. 2009. *Elemens of Modern Algebra*, *7th Edition*. Belmont: Brooks/Cole.

Kandasamy, W.B.V. dan Smarandache, F.. 2009. *Groups as Graphs*. (Online), (http: //mat. iitm. ac. in/~wbv), diakses tanggal 20 Desember 2016).

Shihab, M. Q. 2004. *Tafsir Al-Misbah*. Jakarta: Penerbit Lentera Hati.

Supranto, J. 2003. *Pengantar Matrix*. Jakarta: Rineka Cipta.

LAMPIRAN-LAMPIRAN

a Perhitungan Nilai Eigen dan Vektor Eigen yang Bersesuaian pada Matrik *Signless-Laplace* Graf Konjugasi dari Grup Dihedral D_{2n}

- **Grup Dihedral D_6**

restart; *with*(*linalg*) :

$H := Matrix([[-\lambda, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 1-\lambda, 1, 0, 0, 0], [0, 1, 1-\lambda, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 2-\lambda, 1, 1], [0, 0, 0, 1, 2-\lambda, 1], [0, 0, 0, 1, 1, 2-\lambda]]);$

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

Determinant(H);

$$-\lambda\left(\lambda^2-2\lambda\right)\left(-\lambda^3+6\lambda^2-9\lambda+4\right)$$

factor$\left(-\lambda\left(\lambda^2-2\lambda\right)\left(-\lambda^3+6\lambda^2-9\lambda+4\right)\right);$

$$\lambda^2(\lambda-2)(\lambda-4)(-1+\lambda)^2$$

$H0 := Matrix([[0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 1, 0, 0, 0], [0, 1, 1, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 2, 1, 1], [0, 0, 0, 1, 2, 1], [0, 0, 0, 1, 1, 2]]);$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

gaussjord($H0$);

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

H1 := *Matrix*([[−1, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 1, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 1, 1, 1], [0, 0, 0, 1, 1, 1], [0, 0, 0, 1, 1, 1]]);

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

gaussjord(*H1*);

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

H2 := *Matrix*([[−2, 0, 0, 0, 0, 0], [0, −1, 1, 0, 0, 0], [0, 1, −1, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 1, 1], [0, 0, 0, 1, 0, 1], [0, 0, 0, 1, 1, 0]]);

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

gaussjord(*H2*);

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

H4 := *Matrix*([[−4, 0, 0, 0, 0, 0], [0, −3, 1, 0, 0, 0], [0, 1, −3, 0, 0, 0], [0, 0, 0, −2, 1, 1], [0, 0, 0, 1, −2, 1], [0, 0, 0, 1, 1, −2]]);

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

gaussjord(*H4*);

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Grup Dihedral D_8**

restart; *with*(*linalg*) :

G := *Matrix*([[-λ, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 1 − λ, 0, 1, 0, 0, 0, 0], [0, 0, -λ, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 1 − λ, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 1 − λ, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 1 − λ, 0, 1], [0, 0, 0, 0, 1, 0, 1 − λ, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1 − λ]]);

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

Determinant(*G*);

$$\lambda^2 (\lambda^2 - 2\lambda)^3$$

$factor\left(\lambda^2 (\lambda^2 - 2\lambda)^3\right);$

$$\lambda^5 (-2 + \lambda)^3$$

G0 := *Matrix*([[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1], [0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1]]);

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gaussjord(*G0*);

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$G2 := Matrix([[-2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, -1, 0, 1, 0, 0, 0, 0], [0, 0, -2, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, -1, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, -1, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 1], [0, 0, 0, 0, 1, 0, -1, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, -1]]);$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$gaussjord(G2);$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Grup Dihedral D_{10}**

$restart; with(linalg):$

$L := Matrix([[-\lambda, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 1-\lambda, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 1-\lambda, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 1, 1-\lambda, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0, 1-\lambda, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 4-\lambda, 1, 1, 1, 1], [0, 0, 0, 0, 0, 1, 4-\lambda, 1, 1, 1], [0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 4-\lambda, 1, 1], [0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 4-\lambda, 1], [0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 4-\lambda]]);$

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4-\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 4-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4-\lambda \end{bmatrix}$$

Determinant(*L*);

$$-\lambda\left(\lambda^2-2\lambda\right)^2\left(-\lambda^5+20\lambda^4-150\lambda^3+540\lambda^2-945\lambda+648\right)$$

factor$\left(-\lambda\left(\lambda^2-2\lambda\right)^2\left(-\lambda^5+20\lambda^4-150\lambda^3+540\lambda^2-945\lambda+648\right)\right)$;

$$\lambda^3(\lambda-2)^2(\lambda-8)(-3+\lambda)^4$$

L0 := *Matrix*([[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 4, 1, 1, 1, 1], [0, 0, 0, 0, 0, 1, 4, 1, 1, 1], [0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 4, 1, 1], [0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 4, 1], [0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 4]]);

$$\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&4&1&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&1&4&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&1&1&4&1&1 \\ 0&0&0&0&0&1&1&1&4&1 \\ 0&0&0&0&0&1&1&1&1&4 \end{bmatrix}$$

gaussjord(*L0*);

$$\begin{bmatrix} 0&1&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

$L2 := Matrix([[-2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, -1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, -1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 2, 1, 1, 1, 1], [0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 1, 1, 1], [0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 1, 1], [0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 1], [0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2]]);$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$gaussjord(L2);$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$L3 := Matrix([[-3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, -2, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, -2, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 1, -2, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0, -2, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1], [0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1], [0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1], [0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1], [0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1]]);$

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$gaussjord(L3);$

$$\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

L8 := *Matrix*([[−8, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, −7, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, −7, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 1, −7, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0, −7, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, −4, 1, 1, 1, 1], [0, 0, 0, 0, 0, 1, −4, 1, 1, 1], [0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, −4, 1, 1], [0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, −4, 1], [0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, −4]]);

$$\begin{bmatrix} -8&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&-7&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&-7&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&-7&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&-7&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&-4&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&1&-4&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&1&1&-4&1&1\\ 0&0&0&0&0&1&1&1&-4&1\\ 0&0&0&0&0&1&1&1&1&-4 \end{bmatrix}$$

gaussjord(*L8*);

$$\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&-1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&-1\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&-1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&-1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

b Perhitungan Nilai Eigen Dan Vektor Eigen Yang Bersesuaian Pada Matrik *Detour* Graf Konjugasi Dari Grup Dihedral D_{2n}

- **Grup Dihedral D_6**

restart; *with*(*linalg*) :

$d := Matrix([[-\lambda, 0, 0, 0, 0, 0], [0, -\lambda, 1, 0, 0, 0], [0, 1, -\lambda, 0, 0, 0], [0, 0, 0, -\lambda, 2, 2], [0, 0, 0, 2, -\lambda, 2], [0, 0, 0, 2, 2, -\lambda]]);$

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & -\lambda \end{bmatrix}$$

$Determinant(d);$

$$-\lambda\left(\lambda^2-1\right)\left(-\lambda^3+12\lambda+16\right)$$

$factor\left(-\lambda\left(\lambda^2-1\right)\left(-\lambda^3+12\lambda+16\right)\right);$

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-4)(\lambda+2)^2$$

$d0 := Matrix([[0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 1, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 2, 2], [0, 0, 0, 2, 0, 2], [0, 0, 0, 2, 2, 0]]);$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$gaussjord(d0);$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$d\_1 := Matrix([[1, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 1, 0, 0, 0], [0, 1, 1, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 1, 2, 2], [0, 0, 0, 2, 1, 2], [0, 0, 0, 2, 2, 1]]);$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$gaussjord(d\_1);$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d_2 := *Matrix*([[2, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 2, 1, 0, 0, 0], [0, 1, 2, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 2, 2, 2], [0, 0, 0, 2, 2, 2], [0, 0, 0, 2, 2, 2]]);

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

gaussjord(*d_2*);

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d1 := *Matrix*([[−1, 0, 0, 0, 0, 0], [0, −1, 1, 0, 0, 0], [0, 1, −1, 0, 0, 0], [0, 0, 0, −1, 2, 2], [0, 0, 0, 2, −1, 2], [0, 0, 0, 2, 2, −1]]);

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

gaussjord(*d1*);

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d4 := *Matrix*([[−4, 0, 0, 0, 0, 0], [0, −4, 1, 0, 0, 0], [0, 1, −4, 0, 0, 0], [0, 0, 0, −4, 2, 2], [0, 0, 0, 2, −4, 2], [0, 0, 0, 2, 2, −4]]);

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$gaussjord(d4);$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Grup Dihedral D_8**

$restart; with(linalg):$

$d := Matrix([[-\lambda, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, -\lambda, 0, 1, 0, 0, 0, 0], [0, 0, -\lambda, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, -\lambda, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, -\lambda, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 0, 0, -\lambda, 0, 1], [0, 0, 0, 0, 1, 0, -\lambda, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, -\lambda]]);$

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}$$

$Determinant(d);$

$$\lambda^2 (\lambda^2 - 1)^3$$

$factor\left(\lambda^2 (\lambda^2 - 1)^3\right);$

$$\lambda^2 (\lambda - 1)^3 (\lambda + 1)^3$$

$d0 := Matrix([[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1], [0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0]]);$

$$\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0 \end{bmatrix}$$

gaussjord(*d0*);

$$\begin{bmatrix} 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

d_1 := *Matrix*([[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1], [0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1]]);

$$\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&1 \end{bmatrix}$$

gaussjord(*d_1*);

$$\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

d1 := *Matrix*([[−1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, −1, 0, 1, 0, 0, 0, 0], [0, 0, −1, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, −1, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, −1, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 0, 0, −1, 0, 1], [0, 0, 0, 0, 1, 0, −1, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, −1]]);

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

gaussjord(*d1*);

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Grup Dihedral D_{10}**

restart;

with(*linalg*) : *interface*(*rtablesize* = 10) :

$d := Matrix([[-\lambda, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, -\lambda, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, -\lambda, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 1, -\lambda, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0, -\lambda, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, -\lambda, 4, 4, 4, 4], [0, 0, 0, 0, 0, 4, -\lambda, 4, 4, 4], [0, 0, 0, 0, 0, 4, 4, -\lambda, 4, 4], [0, 0, 0, 0, 0, 4, 4, 4, -\lambda, 4], [0, 0, 0, 0, 0, 4, 4, 4, 4, -\lambda]]);$

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -\lambda & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & -\lambda & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & -\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & -\lambda \end{bmatrix}$$

Determinant(*d*);

$$-\lambda\,(\lambda^2-1)^2\,(-\lambda^5+160\,\lambda^3+1280\,\lambda^2+3840\,\lambda+4096)$$

$factor(-\lambda\,(\lambda^2-1)^2\,(-\lambda^5+160\,\lambda^3+1280\,\lambda^2+3840\,\lambda+4096));$

$$\lambda\,(\lambda-1)^2\,(\lambda+1)^2\,(\lambda-16)\,(\lambda+4)^4$$

d0 := *Matrix*([[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 4, 4, 4, 4], [0, 0, 0, 0, 0, 4, 0, 4, 4, 4], [0, 0, 0, 0, 0, 4, 4, 0, 4, 4], [0, 0, 0, 0, 0, 4, 4, 4, 0, 4], [0, 0, 0, 0, 0, 4, 4, 4, 4, 0]]);

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

gaussjord(*d0*);

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d_1 := *Matrix*([[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 1, 4, 4, 4, 4], [0, 0, 0, 0, 0, 4, 1, 4, 4, 4], [0, 0, 0, 0, 0, 4, 4, 1, 4, 4], [0, 0, 0, 0, 0, 4, 4, 4, 1, 4], [0, 0, 0, 0, 0, 4, 4, 4, 4, 1]]);

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

gaussjord(*d_1*);

$$\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

d_4 := *Matrix*([[4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 4, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 4, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 1, 4, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0, 4, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 4, 4, 4, 4, 4], [0, 0, 0, 0, 0, 4, 4, 4, 4, 4], [0, 0, 0, 0, 0, 4, 4, 4, 4, 4], [0, 0, 0, 0, 0, 4, 4, 4, 4, 4], [0, 0, 0, 0, 0, 4, 4, 4, 4, 4]]);

$$\begin{bmatrix} 4&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&4&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&4&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&4&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&4&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&4&4&4&4&4\\ 0&0&0&0&0&4&4&4&4&4\\ 0&0&0&0&0&4&4&4&4&4\\ 0&0&0&0&0&4&4&4&4&4\\ 0&0&0&0&0&4&4&4&4&4 \end{bmatrix}$$

gaussjord(*d_4*);

$$\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

d1 := *Matrix*([[−1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, −1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, −1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 1, −1, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0, −1, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, −1, 4, 4, 4, 4], [0, 0, 0, 0, 4, −1, 4, 4, 4], [0, 0, 0, 0, 0, 4, 4, −1, 4, 4], [0, 0, 0, 0, 0, 4, 4, 4, −1, 4], [0, 0, 0, 0, 0, 4, 4, 4, 4, −1]]);

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & -1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

gaussjord(*d1*);

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d16 := *Matrix*([[−16, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, −16, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, −16, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 1, −16, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0, −16, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, −16, 4, 4, 4, 4], [0, 0, 0, 0, 0, 4, −16, 4, 4, 4], [0, 0, 0, 0, 0, 4, 4, −16, 4, 4], [0, 0, 0, 0, 0, 4, 4, 4, −16, 4], [0, 0, 0, 0, 0, 4, 4, 4, 4, −16]]);

$$\begin{bmatrix} -16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -16 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -16 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & -16 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & -16 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & -16 \end{bmatrix}$$

gaussjord(*d16*);

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

RIWAYAT HIDUP

Rhoul Khasanah, lahir di Mojokerto pada tanggal 8 September 1994, biasa dipanggil Rhoul, tinggal di Ds. Jotangan, Kec. Mojosari, Kab. Mojokerto. Anak terakhir dari 4 bersaudara dari pasangan bapak Kamim dan ibu Maisyaroh.

Pendidikan dasarnya dia tempuh selama 6 tahun di SDN II Jotangan pada tahun 2001 dan lulus pada tahun 2007, kemudian melanjutkan sekolah di SMPN 2 Kutorejo pada tahun 2007 dan lulus pada tahun 2010, setelah itu melanjutkan lagi di SMAN 1 Mojosari dan lulus pada tahun 2013. Selanjutnya, pada tahun 2013 menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dengan mengambil Jurusan Matematika.

Selama menjadi mahasiswa, dia mengikuti organisasi Hai'ah Tahfidil Quran (HTQ) selama 1 tahun di ma'had, kemudian setelah lulus dari Ma'had dia melanjutkan ke PPTQ Nurul Furqon Malang meskipun demikian dia tetap aktif mengikuti kegiatan di HTQ selama 1 tahun.

Selama menempuh pendidikan tingkat dasar sampai tingkat tinggi, dia aktif dalam cabang olahraga, di antaranya dia sering mengikuti lomba pada cabang olahraga di bidang bola voly dan badminton saat duduk di bangku SD. Kemudian pada waktu SMP dia aktif dalam Organisasi Siswa Intra Sekolah (OSIS) dan pramuka. Sedangkan di bangku SMA dia aktif pada cabang olahraga badminton.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang
Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Rhoul Khasanah
Nim : 13610021
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Spektrum *Signless-Laplace* dan *Detour* Graf Konjugasi dari Grup Dihedral
Pembimbing I : Dr. Abdussakir, M.Pd
Pembimbing II : Dr. Ahmad Barizi, M.A

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan
1.	15 Maret 2017	Konsultasi Bab I	1.
2.	10 April 2017	Konsultasi Bab I dan Bab II	2.
3.	19 April 2017	ACC Bab I dan Bab II	3.
4.	4 Mei 2017	Konsultasi Kajian Keagamaan	4.
5.	15 Mei 2017	ACC Kajian Keagamaan	5.
6.	31 Juli 2017	Konsultasi Bab III	6.
7.	3 Agustus 2017	Konsultasi Kajian Keagamaan	7.
8.	21 Agustus 2017	Revisi Bab III	8.
9.	22 Agustus 2017	ACC Keseluruhan Kajian Keagamaan	9.
10.	29 Agustus 2017	Melengkapi Keseluruhan	10.
11.	30 Agustus 2017	ACC Keseluruhan	11.

Malang, 30 Oktober 2017
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001