

**GRAF KOSET DARI SUBGRUP NORMAL PADA GRUP DIHEDRAL**

**SKRIPSI**

**OLEH  
RISNA ZULFA MUSRIROH  
NIM. 13610013**



**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2018**

**GRAF KOSET DARI SUBGRUP NORMAL PADA GRUP DIHEDRAL**

**SKRIPSI**

**Diajukan Kepada  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam  
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh  
Risna Zulfa Musriroh  
NIM. 13610013**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2018**

**GRAF KOSET DARI SUBGRUP NORMAL PADA GRUP DIHEDRAL**

**SKIRPSI**

Oleh  
**Risna Zulfa Musriroh**  
NIM. 13610013

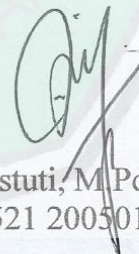
Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji  
Tanggal 30 Agustus 2017

Pembimbing I,

Pembimbing II,



H. Wahyu H. Irawan, M.Pd  
NIP. 19710420 200003 1 003



Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si  
NIP. 19770521 200501 2 004

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si  
NIP. 19650414 200312 1 001

# GRAF KOSET DARI SUBGRUP NORMAL PADA GRUP DIHEDRAL

## SKRIPSI

Oleh  
**Risna Zulfa Musriroh**  
NIM. 13610013

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi  
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan  
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

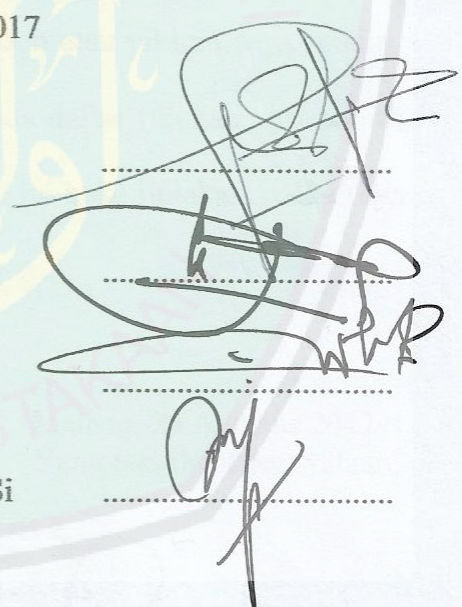
Tanggal 12 September 2017

Penguji Utama : Dr. Abdussakir, M.Pd

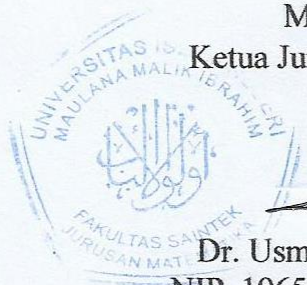
Ketua Penguji : Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D

Sekretaris Penguji : H. Wahyu H. Irawan, M.Pd

Anggota Penguji : Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si



Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si  
NIP. 19650414 200312 1 001

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Risna Zulfa Musriroh

NIM : 13610013

Jurusan : Matematika


Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Graf Koset dari Subgrup Normal pada Grup Dihedral

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 29 Agustus 2017  
Yang membuat pernyataan,



  
Risna Zulfa Musriroh  
NIM. 13610013

## MOTO

”إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا“

“Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan”



## PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

ayahanda Ahmad Zaenuri dan ibunda Siti Mudawaroh yang tak pernah putus memberikan doa restu, dukungan, motivasi, dan nasihat agar selalu istiqamah dalam belajar dan beribadah sehingga diberi kelancaran oleh Allah Swt. dalam menuntut ilmu.

Adik tersayang Arni Farida Zahro yang selalu mendorong semangat penulis untuk selalu berusaha semaksimal mungkin dalam melakukan segala hal.

Teman-teman seperjuangan, sahabat, Millatul Hanifah, dan Ilmi Nur Fadilah yang menjadi inspirasi penulis untuk menyelesaikan skripsi ini.

## KATA PENGANTAR

*Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.*

Segala puji bagi Allah Swt. karena atas rahmat, taufik, dan hidayah-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Graf Koset dari Subgrup Normal pada Grup Dihedral” sebagai tugas akhir untuk memperoleh gelar sarjana matematika (S.Mat) di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Tak lupa shalawat serta salam selalu tercurahkan kepada Rasulullah Saw. sebagai panutan umat hingga akhir zaman.

Terima kasih penulis ucapkan kepada semua pihak yang telah mendukung dalam menyelesaikan penyusunan skripsi ini karena tanpa kehadirannya penulis tidak akan dapat menyelesaikan sebagaimana mestinya, di antaranya:

1. Prof. Dr. H. Abdul Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. H. Wahyu H. Irawan, M.Pd, selaku dosen pembimbing I yang senantiasa memberikan doa, motivasi, berbagi ilmu, dan pengalaman kepada penulis.
5. Ari Kusumastuti M.Si, M.Pd, selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan doa, bimbingan, dan arahan kepada penulis.
6. Para dosen tercinta yang telah memberikan ilmu yang bermanfaat selama berada di bangku kuliah untuk kebaikan dunia dan akhirat.

7. Ayah dan ibu yang tidak pernah putus dalam memanjatkan doa dan memberikan restu serta dorongan kepada penulis.
8. Seluruh teman-teman khususnya teman seperjuangan di Jurusan Matematika angkatan 2013 yang selalu memberikan dukungan kepada penulis dalam penyelesaian skripsi ini.

Penulis berharap semoga skripsi dapat memberikan manfaat bagi penulis maupun pembaca.

*Wassalamu 'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.*

Malang, Agustus 2017

Penulis



## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b>	
<b>HALAMAN PENGANTAR</b>	
<b>HALAMAN PERSETUJUAN</b>	
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b>	
<b>HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN</b>	
<b>HALAMAN MOTO</b>	
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b>	
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	viii
<b>DAFTAR ISI</b> .....	x
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	xii
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xiii
<b>ABSTRAK</b> .....	xvi
<b>ABSTRACT</b> .....	xvii
<b>ملخص</b> .....	xviii
 <b>BAB I PENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	4
1.3 Tujuan Penelitian .....	4
1.4 Manfaat Penelitian .....	4
1.5 Batasan Masalah .....	4
1.6 Metode Penelitian .....	5
1.7 Sistematika Penulisan .....	6
 <b>BAB II KAJIAN PUSTAKA</b>	
2.1 Grup .....	7
2.1.1 Definisi Operasi Biner .....	7
2.1.2 Definisi Grup .....	7
2.2 Grup Dihedral .....	8
2.3 Subgrup dan Koset .....	10
2.3.1 Definisi Subgrup .....	10
2.3.2 Definisi Koset .....	10
2.3.3 Definisi Subgrup Normal .....	11
2.4 Subgrup Normal $D_{2n}$ .....	12
2.5 Teorema Lagrange .....	13
2.6 Graf .....	14

2.6.1 Definisi Graf .....	14
2.6.2 Definisi Graf Berarah .....	14
2.6.3 Definisi Digraf Nol .....	15
2.6.4 Derajat Titik pada Digraf .....	15
2.6.5 Lintasan dan Sikel pada Digraf .....	16
2.7 Graf Koset .....	17
2.8 Kajian Agama .....	18
<b>BAB III PEMBAHASAN</b>	
3.1 Graf Koset dari Subgrup Normal pada Grup Dihedral- $2n$ .....	22
3.1.1 Graf Koset dari Subgrup Normal $H_1 = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$ .....	22
3.1.2 Graf Koset dari Subgrup Normal $H_2 = \{1, r^2, r^4, \dots, r^{n-2}\}$ .....	35
3.1.3 Graf Koset dari Subgrup Normal $H_3 = \{1, r^{\frac{n}{2}}\}$ .....	45
3.1.4 Graf Koset dari Subgrup Normal $H_4 = \{1, r^2, \dots, r^{n-2}, s, sr^2, \dots, sr^{n-2}\}$ .....	54
3.1.5 Graf Koset dari Subgrup Normal $H_5 = \{1, r^2, \dots, r^{n-2}, sr, sr^3, \dots, sr^{n-1}\}$ .....	62
3.2 Kandungan Hikmah dalam Al-Quran .....	70
<b>BAB IV PENUTUP</b>	
4.1 Kesimpulan .....	76
4.2 Saran .....	76
<b>DAFTAR RUJUKAN</b> .....	77
<b>RIWAYAT HIDUP</b> .....	

## DAFTAR TABEL

Tabel 3.1 Tabel Karakteristik Graf Koset dari Subgrup Normal $H_1 = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$ pada $D_{2n}$ .....	32
Tabel 3.2 Tabel Karakteristik Graf Koset dari Subgrup Normal $H_2 = \{1, r^2, r^4, \dots, r^{n-2}\}$ pada $D_{2n}$ .....	41
Tabel 3.3 Tabel Karakteristik Graf Koset dari Subgrup Normal $H_3 = \{1, r^{\frac{n}{2}}\}$ pada $D_{2n}$ .....	50
Tabel 3.4 Tabel Karakteristik Graf Koset dari Subgrup Normal $H_4 = \{1, r^2, \dots, r^{n-2}, s, sr^2, \dots, sr^{n-2}\}$ pada $D_{2n}$ .....	60
Tabel 3.5 Tabel Karakteristik Graf Koset dari Subgrup Normal $H_5 = \{1, r^2, \dots, r^{n-2}, sr, sr^3, \dots, sr^{n-1}\}$ pada $D_{2n}$ .....	68

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Graf $G$ .....	14
Gambar 2.2 Graf Berarah $D$ .....	15
Gambar 2.3 Digraf Nol .....	15
Gambar 2.4 Lintasan dan Sikel pada Digraf $J$ .....	16
Gambar 2.5 Graf Koset .....	17
Gambar 3.1 Graf Koset $D_6$ dengan $H_1 = \{1, r, r^2\}$ dan $S = \{s\}$ .....	23
Gambar 3.2 Graf Koset $D_6$ dengan $H_1 = \{1, r, r^2\}$ dan $S = \{r\}$ .....	23
Gambar 3.3 Graf Koset $D_6$ dengan $H_1 = \{1, r, r^2\}$ dan $S = \{1\}$ .....	24
Gambar 3.4 Graf Koset $D_8$ dengan $H_1 = \{1, r, r^2, r^3\}$ dan $S = \{s\}$ .....	24
Gambar 3.5 Graf Koset $D_8$ dengan $H_1 = \{1, r, r^2, r^3\}$ dan $S = \{r\}$ .....	25
Gambar 3.6 Graf Koset $D_8$ dengan $H_1 = \{1, r, r^2, r^3\}$ dan $S = \{1\}$ .....	25
Gambar 3.7 Graf Koset $D_{10}$ dengan $H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4\}$ dan $S = \{s\}$ .....	26
Gambar 3.8 Graf Koset $D_{10}$ dengan $H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4\}$ dan $S = \{r\}$ .....	26
Gambar 3.9 Graf Koset $D_{10}$ dengan $H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4\}$ dan $S = \{1\}$ .....	27
Gambar 3.10 Graf Koset $D_{12}$ dengan $H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\}$ dan $S = \{s\}$ ...	27
Gambar 3.11 Graf Koset $D_{12}$ dengan $H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\}$ dan $S = \{r\}$ ...	28
Gambar 3.12 Graf Koset $D_{12}$ dengan $H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\}$ dan $S = \{1\}$ ..	28
Gambar 3.13 Graf Koset $D_{14}$ dengan $H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\}$ dan $S = \{s\}$ .....	29
Gambar 3.14 Graf Koset $D_{14}$ dengan $H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\}$ dan $S = \{r\}$ .....	29
Gambar 3.15 Graf Koset $D_{14}$ dengan $H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\}$ dan $S = \{1\}$ .....	30
Gambar 3.16 Graf Koset $D_{16}$ dengan $H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7\}$ dan $S = \{s\}$ .....	31

Gambar 3.17 Graf Koset $D_{16}$ dengan $H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7\}$ dan $S = \{r\}$ .....	31
Gambar 3.18 Graf Koset $D_{16}$ dengan $H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7\}$ dan $S = \{1\}$ .....	32
Gambar 3.19 Graf Koset $D_8$ dengan $H_2 = \{1, r^2\}$ dan $S = \{s\}$ .....	35
Gambar 3.20 Graf Koset $D_8$ dengan $H_2 = \{1, r^2\}$ dan $S = \{r\}$ .....	36
Gambar 3.21 Graf Koset $D_8$ dengan $H_2 = \{1, r^2\}$ dan $S = \{1\}$ .....	37
Gambar 3.22 Graf Koset $D_{12}$ dengan $H_2 = \{1, r^2, r^4\}$ dan $S = \{s\}$ .....	37
Gambar 3.23 Graf Koset $D_{12}$ dengan $H_2 = \{1, r^2, r^4\}$ dan $S = \{r\}$ .....	38
Gambar 3.24 Graf Koset $D_{12}$ dengan $H_2 = \{1, r^2, r^4\}$ dan $S = \{1\}$ .....	39
Gambar 3.25 Graf Koset $D_{16}$ dengan $H_2 = \{1, r^2, r^4, r^6\}$ dan $S = \{s\}$ .....	39
Gambar 3.26 Graf Koset $D_{16}$ dengan $H_2 = \{1, r^2, r^4, r^6\}$ dan $S = \{r\}$ .....	40
Gambar 3.27 Graf Koset $D_{16}$ dengan $H_2 = \{1, r^2, r^4, r^6\}$ dan $S = \{1\}$ .....	41
Gambar 3.28 Graf Koset $D_{12}$ dengan $H_3 = \{1, r^3\}$ dan $S = \{s\}$ .....	45
Gambar 3.29 Graf Koset $D_{12}$ dengan $H_3 = \{1, r^3\}$ dan $S = \{r\}$ .....	46
Gambar 3.30 Graf Koset $D_{12}$ dengan $H_3 = \{1, r^3\}$ dan $S = \{1\}$ .....	47
Gambar 3.31 Graf Koset $D_{16}$ dengan $H_3 = \{1, r^4\}$ dan $S = \{s\}$ .....	48
Gambar 3.32 Graf Koset $D_{16}$ dengan $H_3 = \{1, r^4\}$ dan $S = \{r\}$ .....	49
Gambar 3.33 Graf Koset $D_{16}$ dengan $H_3 = \{1, r^4\}$ dan $S = \{1\}$ .....	50
Gambar 3.34 Graf Koset $D_8$ dengan $H_4 = \{1, r^2, s, sr^2\}$ dan $S = \{s\}$ .....	55
Gambar 3.35 Graf Koset $D_8$ dengan $H_4 = \{1, r^2, s, sr^2\}$ dan $S = \{r\}$ .....	55
Gambar 3.36 Graf Koset $D_8$ dengan $H_4 = \{1, r^2, s, sr^2\}$ dan $S = \{1\}$ .....	56
Gambar 3.37 Graf Koset $D_{12}$ dengan $H_4 = \{1, r^2, r^4, s, sr^2, sr^4\}$ dan $S = \{s\}$ .....	56
Gambar 3.38 Graf Koset $D_{12}$ dengan $H_4 = \{1, r^2, r^4, s, sr^2, sr^4\}$ dan $S = \{r\}$ .....	57
Gambar 3.39 Graf Koset $D_{12}$ dengan $H_4 = \{1, r^2, r^4, s, sr^2, sr^4\}$ dan $S = \{1\}$ .....	57

Gambar 3.40 Graf Koset $D_{16}$ dengan $H_4 = \{1, r^2, r^4, s, sr^2, sr^4\}$ dan $S = \{s\}$ .....	58
Gambar 3.41 Graf Koset $D_{16}$ dengan $H_4 = \{1, r^2, r^4, s, sr^2, sr^4\}$ dan $S = \{r\}$ .....	58
Gambar 3.42 Graf Koset $D_{16}$ dengan $H_4 = \{1, r^2, r^4, s, sr^2, sr^4\}$ dan $S = \{1\}$ .....	59
Gambar 3.43 Graf Koset $D_8$ dengan $H_5 = \{1, r^2, sr, sr^3\}$ dan $S = \{s\}$ .....	63
Gambar 3.44 Graf Koset $D_8$ dengan $H_5 = \{1, r^2, sr, sr^3\}$ dan $S = \{r\}$ .....	63
Gambar 3.45 Graf Koset $D_8$ dengan $H_5 = \{1, r^2, sr, sr^3\}$ dan $S = \{1\}$ .....	64
Gambar 3.46 Graf Koset $D_{12}$ dengan $H_5 = \{1, r^2, r^4, sr, sr^3, sr^5\}$ dan $S = \{s\}$ .....	64
Gambar 3.47 Graf Koset $D_{12}$ dengan $H_5 = \{1, r^2, r^4, sr, sr^3, sr^5\}$ dan $S = \{r\}$ .....	65
Gambar 3.48 Graf Koset $D_{12}$ dengan $H_5 = \{1, r^2, r^4, sr, sr^3, sr^5\}$ dan $S = \{1\}$ .....	65
Gambar 3.49 Graf Koset $D_{16}$ dengan $H_5 = \{1, r^2, r^4, r^6, sr, sr^3, sr^5, sr^7\}$ dan $S = \{s\}$ .....	66
Gambar 3.50 Graf Koset $D_{16}$ dengan $H_5 = \{1, r^2, r^4, r^6, sr, sr^3, sr^5, sr^7\}$ dan $S = \{r\}$ .....	67
Gambar 3.51 Graf Koset $D_{16}$ dengan $H_5 = \{1, r^2, r^4, r^6, sr, sr^3, sr^5, sr^7\}$ dan $S = \{1\}$ .....	67

## ABSTRAK

Musriroh, Risna Zulfa. 2017. **Graf Koset dari Subgrup Normal pada Grup Dihedral**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) H. Wahyu H. Irawan, M.Pd (II) Ari Kusumastuti, M.Si., M.Pd.

**Kata Kunci:** graf, graf koset, subgrup normal, grup dihedral

Graf didefinisikan sebagai suatu himpunan titik  $V(G)$  yang tidak kosong dan himpunan sisi  $E(G)$  yang mungkin kosong. Graf koset adalah salah satu graf dengan setiap titik pada graf adalah himpunan koset kanan dari suatu subgrup  $H$  di suatu grup  $P$ , dua koset  $Hx$  dan  $Hy$  akan terhubung oleh sisi berarah dari  $Hx$  ke  $Hy$  jika dan hanya jika  $yx^{-1} \in HSH$  dengan  $S$  adalah subhimpunan dari  $P$  dan dinotasikan dengan  $\Gamma(P, H, HSH)$ . Grup dihedral- $2n$  adalah suatu grup yang anggotanya terdiri dari simetri-simetri pada segi  $n$  beraturan yang memuat rotasi dan refleksi dan dinyatakan dengan  $D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$ . Penelitian itu bertujuan untuk menentukan karakteristik graf koset dari subgrup normal pada grup dihedral. Selanjutnya, subgrup normal pada grup dihedral- $2n$  di antaranya di antaranya  $\{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}, \{1, r^d, r^{2d}, \dots, r^{n-d}\}$  untuk  $d|n$ ,  $D_{2n}$  dan tambahan untuk untuk  $n$  genap  $\{1, r^2, r^4, \dots, r^{n-2}, s, sr^2, sr^4, \dots, sr^{n-2}\}$  dan  $\{1, r^2, r^4, \dots, r^{n-2}, sr, sr^3, sr^5, \dots, sr^{n-1}\}$ . Pembahasan dalam penelitian ini dibatasi pada subhimpunan  $\{s\}, \{r\}$ , dan  $\{1\}$  dengan mengkaji grup  $D_6$  sampai  $D_{16}$  untuk menentukan karakteristik graf koset pada  $D_{2n}$ . Berdasarkan hasil penelitian ini diperoleh graf koset dari  $D_{2n}$  terhadap subgrup normal  $H$  dan subhimpunan  $S$  jika  $H \circ S \circ H \neq H$  dan banyak kosetnya adalah 2 maka graf  $\Gamma(D_{2n}, H, H \circ S \circ H)$  adalah digraf sikel berorder 2. Jika  $H \circ S \circ H \neq H$  dengan  $H = \{1, r^d, r^{2d}, \dots, r^{n-d}\}$  untuk  $S = \{s\}$  maka graf  $\Gamma(D_{2n}, H, H \circ S \circ H)$  adalah digraf yang memuat  $d$  sikel berorder 2 sedangkan untuk  $S = \{r\}$  maka  $\Gamma(D_{2n}, H, H \circ S \circ H)$  adalah digraf yang memuat 2 sikel berorder  $d$ . Dan jika  $H \circ S \circ H = H$  maka membentuk digraf nol. Kemudian semua titik pada graf  $\Gamma(D_{2n}, H, H \circ S \circ H)$  dengan  $H \circ S \circ H \neq H$  adalah berderajat dua.

Bagi penelitian selanjutnya diharapkan untuk membahas graf koset dari subgrup normal dan subhimpunan lain pada grup dihedral beserta teorema-teorema lain tentang graf koset.

## ABSTRACT

Musriroh, Risna Zulfa. 2017. **Coset Graphs of Normal Subgroup on Dihedral Group**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) H. Wahyu H. Irawan, M.Pd. (II) Ari Kusumastuti, M.Si, M.Pd.

**Keywords:** graph, cosets graph, normal subgroups, dihedral group

Graph is defined in the set of vertices  $V(G)$  that are not empty and the set of edges  $E(G)$  which may be empty. Coset graph is one of the types of graph in which each vertex on the graph is a set of right coset of a subgroup  $H$  in a group  $P$ , the  $[P:H] = \{Hx \mid x \in P\}$  and for two cosets  $Hx$  and  $Hy$  will be connected by arc from  $Hx$  to  $Hy$  if and only if  $yx^{-1} \in HSH$  where  $S$  is a subset of  $P$  by  $\Gamma(P, H, HSH)$ . Dihedral- $2n$  group is a group which consists of a symmetrys in terms of  $n$  uniform (polygon- $n$ ) containing the rotation and reflection and is expressed as by  $D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$ . Some coset graphs of proper normal subgroups in dihedral group are  $\{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$ ,  $\{1, r^d, r^{2d}, \dots, r^{n-d}\}$  for  $d|n$ ,  $D_{2n}$ , and addition for  $n$  even  $\{1, r^2, r^4, \dots, r^{n-2}, sr^4, \dots, sr^{n-2}\}$  and  $\{1, r^2, r^4, \dots, r^{n-2}, sr, sr^3, sr^5, \dots, sr^{n-1}\}$ . The discussion in this study is limited by subset  $\{s\}$ ,  $\{r\}$ , and  $\{1\}$  by reviewing groups  $D_6$  through  $D_{16}$  to determine the pattern of coset graphs in  $D_{2n}$ . Based on the results of this study, we obtained the coset graphs of  $D_{2n}$  with normal subgroup  $H$  dan subset  $S$  if  $H \circ S \circ H \neq H$  and there are 2 cosets then graph of  $\Gamma(D_{2n}, H, H \circ S \circ H)$  is digraph with order 2. If  $H \circ S \circ H \neq H$  with  $H = \{1, r^d, r^{2d}, \dots, r^{n-d}\}$  for  $S = \{s\}$  then graph of  $\Gamma(D_{2n}, H, H \circ S \circ H)$  is digraph which contains  $d$  cycles with order 2 while for  $S = \{r\}$  then then graph of  $\Gamma(D_{2n}, H, H \circ S \circ H)$  is digraph which contains 2 cycles with order  $d$ . And if  $H \circ S \circ H = H$  then form null digraph. And for all of vertices on graph of  $\Gamma(D_{2n}, H, H \circ S \circ H)$  with  $H \circ S \circ H \neq H$  are two degrees.

For further research it is desirable to discuss the coset graph of the normal subgroups and all subsets in the dihedral group along with other theorems about coset graphs.

## ملخص

مسريه، رسنا زلفا. ٢٠١٧. مخطط coset من زمرة جزئية العادية في زمرة الزوجية. بحث جامعي. شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا. الجامعة الحكومية الإسلامية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف: (١) وحيو هنك إيراوان الماجستير. (٢) آري كوسمستوتى الماجستير.

الكلمات الرئيسية: مخطط ، مخطط coset ، زمرة جزئية العادية، زمرة الزوجية

المخطط هو مجموعه من رؤوس  $V(G)$  التي ليست فارغه وتعيين أضلاع  $E(G)$  التي يمكنها أن تكون فارغة. مخطط coset هو مخطط التي كانت كل نقطها علي المخطط هو مجموعة coset الحق من زمرة جزئية  $H$  في زمرة  $P$ , اثنين من coset  $Hx$  و  $Hy$  وسوف تكون متصلة بجانب تتجه من  $Hx$  الى  $Hy$  إذا فقط إذا  $y \circ x^{-1} \in H \circ S \circ H$  هو فرعيه من  $P$  ويشار إليها ب  $\Gamma(P, H, H \circ S \circ H)$ . الزمرة الزوجية  $2n$  هي زمرة تتكون أعضائها من التماثل على الجانب الانتظام الذي يحتوي على التناوب والتأمل ويعبر عنه  $D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$ . والهدف من هذا البحث هو تحديد نمط الجانب الموجه ودرجة نقطة الرسم البياني للكوكب لزمرة جزئية العادية في زمرة الزوجية. وعلاوة على ذلك، فإن زمرة جزئية العادية لزمرة الزوجية  $D_{2n}$  تشمل  $\{1, r^2, \dots, r^{n-2}, s, sr^2, \dots, sr^{n-2}\}$ ,  $D_{2n}$ ,  $d|n$  إلى  $\{1, r^d, r^{2d}, \dots, r^{n-d}\}$ ,  $\{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$  و  $\{1, r^2, r^4, \dots, r^{n-2}, sr, sr^3, sr^5, \dots, sr^{n-1}\}$  حتى  $n$ . كانت المناقشة في هذه الدراسة فرعية محدودة  $\{r\}$ ,  $\{s\}$ ، و  $\{1\}$  لفحص م زمرة  $D_6$  حتى  $D_{16}$  لتحديد نمط مخطط coset على  $D_{2n}$ . وبناء على النتائج تم الحصول من  $D_{2n}$  مخطط coset لل  $H$  فرعية الطبيعي ومجموعة فرعية  $S$  إذا  $H \circ S \circ H \neq H$  والعديد coset هو ٢ ثم مخطط  $\Gamma(D_{2n}, H, H \circ S \circ H)$  هو الترتيب الدوغراف حرفان يمثلان صوتا مفردا شيكل فيما يتعلق ٢. إذا  $H \circ S \circ H \neq H$  مع  $H = \{1, r^d, r^{2d}, \dots, r^{n-d}\}$  إذا  $H \circ S \circ H \neq H$  والعديد هو coset أكثر من ٢ ل  $S = \{s\}$  ثم  $\Gamma(D_{2n}, H, H \circ S \circ H)$  هو ديغراف تحتوي على  $d$  سيكيل بينما ل  $S = \{r\}$  ثم  $\Gamma(D_{2n}, H, H \circ S \circ H)$  هو ديغراف تحتوي على اثنين من سيليسيس  $d$ . وإذا  $H \circ S \circ H = H$  ثم مخطط صفر. ثم كل النقاط على  $\Gamma(D_{2n}, H, H \circ S \circ H)$  مع  $H \circ S \circ H \neq H$  هي من درجتين. لمزيد من البحث من المتوقع ان يناقش مخطط coset من زمرة جزئية العادية و المجموعة الثنائية مع اي نظرية زمرة الزوجية مبرهنه عن مخطط coset.

## BAB I

### PENDAHULUAN

#### 1.1 Latar Belakang

Al-Quran merupakan kitab suci yang berisikan ayat-ayat tanziliah mempunyai fungsi utama sebagai petunjuk bagi seluruh umat manusia baik dalam hubungan dengan Tuhan, manusia, maupun alam raya. Firman Allah Swt. di dalam al-Quran surat al-Hujurat/49:13 yaitu:

يٰٓأَيُّهَا النَّاسُ إِنَّا خَلَقْنَاكُمْ مِنْ ذَكَرٍ وَأُنْثَىٰ وَجَعَلْنَاكُمْ شُعُوبًا وَقَبَائِلَ لِتَعَارَفُوا ۗ إِنَّ أَكْرَمَكُمْ عِنْدَ اللَّهِ أَتَقْوَاهُ ۗ إِنَّ اللَّهَ عَلِيمٌ خَبِيرٌ ﴿١٣﴾

*“Hai manusia, sesungguhnya Kami menciptakan kamu dari seorang laki-laki dan seorang perempuan dan menjadikan kamu berbangsa-bangsa dan bersuku-suku supaya kamu saling kenal-mengenal. Sesungguhnya orang yang paling mulia di antara kamu di sisi Allah ialah orang yang paling takwa di antara kamu. Sesungguhnya Allah Maha Mengetahui lagi Maha Mengenal.”*

Allah Swt. berfirman seraya memberitahukan kepada umat manusia bahwa Allah Swt. telah menciptakan umat manusia dari satu jiwa, dan dari Allah Swt. menciptakan pasangannya, yaitu Adam dan Hawa. Selanjutnya Allah Swt. menjadikan umat manusia berbangsa-bangsa. Kata “شُعُوبًا” yang berarti berbangsa-bangsa, dan kata “قَبَائِلَ” yang berarti bersuku-suku. Selain itu dinyatakan bahwa, “Yang dimaksud dengan “شُعُوبًا” adalah penduduk negeri-negeri lain, sedangkan “قَبَائِلَ” adalah penduduk Arab, sebagaimana “الْأَسْبَاطُ” dimaksudkan sebagai penduduk Bani Israil”. Sehingga dalam hal kemuliaan, seluruh umat manusia dipandang dari sisi ketanahannya dengan Adam dan Hawa adalah sama. Kemudian mereka itu bertingkat-tingkat jika dilihat dari sisi-sisi keagamaan, yaitu ketaatan kepada Allah Swt. dan kepatuhan kepada Rasulullah Swt. (Katsir, 2007).

Penelitian ini merujuk pada hikmah atau pesan dari al-Quran surat al-Hujurat/49:13, yang difokuskan pada analisis cabang disiplin ilmu matematika dikenal istilah koset-koset pada teori grup dalam aljabar yang dapat dibentuk graf kosetnya.

Materi dasar dalam struktur aljabar adalah grup yang menjelaskan tentang himpunan tak kosong dengan suatu operasi biner yang berlaku pada himpunan tersebut. Dummit dan Foote (2004) menyatakan bahwa grup  $(P,*)$  merupakan suatu himpunan tak kosong  $P$  dengan operasi biner  $*$  yang memenuhi tiga aksioma yaitu, operasi  $*$  bersifat asosiatif di  $P$ ,  $P$  mempunyai unsur identitas terhadap operasi  $*$ , dan setiap unsur di  $P$  mempunyai invers terhadap operasi  $*$ .

Salah satu grup yang terdapat pada struktur aljabar adalah grup dihedral. Dummit dan Foote (2004) menyatakan bahwa grup dihedral- $2n$  ( $D_{2n}$ ) adalah suatu grup yang anggotanya adalah simetri-simetri dari segi  $n$  beraturan (poligon- $n$ ). Artinya suatu poligon- $n$  dapat menempati bingkai simetri kembali dengan rotasi yang dinyatakan dengan  $r$  dan refleksi yang dinyatakan dengan  $s$ . Anggota dari grup  $D_{2n}$  dibangun dari komposisi antara rotasi ( $r$ ) dan refleksi ( $s$ ).

Subhimpunan  $H$  di grup  $P$  adalah subgrup dari  $P$  jika  $H$  tak kosong dan  $H$  tertutup terhadap operasi dan invers. Raisinghania dan Anggarwal (1980) menyatakan bahwa koset dapat ditentukan dari hasil operasi unsur dalam subgrup terhadap unsur di grupnya. Untuk setiap  $x \in P$ , himpunan  $xH = \{xh|h \in H\}$  merupakan koset kiri dari  $H$  dan  $Hx = \{hx|h \in H\}$  adalah koset kanan dari  $H$ . Subgrup  $H$  disebut normal jika dan hanya jika  $xH = Hx$  untuk setiap  $x \in P$ . Selanjutnya kajian koset dari subgrup normal pada grup  $P$  dapat dibentuk graf kosetnya.

Graf berarah didefinisikan sebagai himpunan titik yang tidak kosong dan himpunan sisi berarah yang mungkin kosong. Himpunan titik dari digraf  $D$  dinyatakan dengan  $V(D)$  dan himpunan sisi yang dinyatakan dengan  $E(D)$  (Chartrand dan Lesniak, 2016:101). Setiap titik pada digraf dapat diketahui derajat titiknya dengan memperhatikan sisi berarah dari titik tersebut. Berdasarkan himpunan titik dan himpunan sisi berarah yang membentuk digraf dapat ditentukan karakteristik digraf tersebut. Selanjutnya kajian mengenai digraf terus dikembangkan pada kajian graf koset yang dibentuk dari koset-koset suatu grup.

Graf koset didefinisikan sebagai graf berarah yang setiap titiknya merupakan koset dari suatu subgrup  $H$  di grup  $P$  dan untuk dua koset  $Hx$  dan  $Hy$  akan terhubung oleh sisi berarah dari  $Hx$  ke  $Hy$  jika dan hanya jika  $yx^{-1} \in HSH$  dengan  $S$  adalah suatu subhimpunan dari grup  $P$  (Schneider, 2001:25).

Penelitian ini membahas tentang graf koset secara umum dengan memadukan teori grup dan graf yang dapat dibentuk oleh koset-koset dari subgrup normal pada grup dihedral. Kajian tentang graf koset menarik dan penting untuk dibahas. Penelitian ini difokuskan pada analisis subgrup normal dengan sifat koset kiri sama dengan koset kanan. Kemudian graf koset dapat membentuk karakteristik berdasarkan sisi berarah dan derajat titiknya.

Penelitian sebelumnya oleh Muftirridha (2016) telah membahas tentang pola banyaknya faktor yang diperoleh dari suatu graf koset Schreier dari subgrup sejati pada grup  $D_{2n}$ , penelitian tersebut dapat membangun teori-teori tentang graf koset yang dibentuk dari subgrup pada suatu grup. Akan tetapi penulis akan membahas graf koset secara umum dari subgrup normal dengan mengadopsi

gagasan graf koset yang telah diteliti oleh Muftirridha (2016). Selanjutnya graf koset pada penelitian ini merujuk pada definisi graf koset Schneider (2001).

Berdasarkan paparan di atas maka penelitian ini mengambil tema “Graf Koset dari Subgrup Normal pada Grup Dihedral”.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, rumusan masalah penelitian ini adalah bagaimana karakteristik graf koset dari subgrup normal pada grup dihedral- $2n$ ?

## 1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang ada, tujuan penelitian ini untuk mengetahui karakteristik graf koset dari subgrup normal pada grup dihedral- $2n$ .

## 1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diperoleh dari penelitian ini untuk menentukan karakteristik graf koset dari subgrup normal pada grup dihedral secara umum berdasarkan sisi berarah dan derajat titiknya. Kemudian dapat dibuat pengembangan teorema tentang graf koset yang akan dijadikan referensi bagi penelitian selanjutnya.

## 1.5 Batasan Masalah

Agar penelitian ini fokus, maka untuk menentukan graf koset menggunakan subgrup normal yang sejati pada grup dihedral- $2n$  dan subhimpunan  $\{s\}$ ,  $\{r\}$ , dan  $\{1\}$ .

## 1.6 Metode Penelitian

Untuk menentukan karakteristik graf koset dalam penelitian ini meliputi langkah-langkah sebagai berikut:

1. Menentukan koset-koset pada grup dihedral- $2n$ , yaitu  $D_6, D_8, D_{10}, D_{12}, D_{14}$ , dan  $D_{16}$  sesuai teorema subgrup normal  $D_{2n}$ .
2. Menentukan graf berarah dengan himpunan titik dari koset-kosetnya  $[D_{2n}:H]$  pada grup dihedral- $2n$ , yaitu  $D_6, D_8, D_{10}, D_{12}, D_{14}$ , dan  $D_{16}$ .
3. Menggambar graf koset dari subgrup normal pada grup dihedral- $2n$ , yaitu  $D_6, D_8, D_{10}, D_{12}, D_{14}$ , dan  $D_{16}$ .
4. Menentukan karakteristik graf koset dengan subgrup normal  $H$  dan  $S = \{s\}$  pada grup dihedral- $2n$ , yaitu  $D_6, D_8, D_{10}, D_{12}, D_{14}$ , dan  $D_{16}$ .
5. Menentukan karakteristik graf koset dengan subgrup normal  $H$  dan  $S = \{r\}$  pada grup dihedral- $2n$ , yaitu  $D_6, D_8, D_{10}, D_{12}, D_{14}$ , dan  $D_{16}$ .
6. Menentukan karakteristik graf koset dengan subgrup normal  $H$  dan  $S = \{1\}$  pada grup dihedral- $2n$ , yaitu  $D_6, D_8, D_{10}, D_{12}, D_{14}$ , dan  $D_{16}$ .
7. Membuat konjektur tentang karakteristik graf koset dari subgrup normal pada grup dihedral- $2n$ .
8. Membuktikan konjektur hingga diperoleh kebenaran karakteristik graf koset dari subgrup normal pada grup dihedral- $2n$ .
9. Membuat kesimpulan karakteristik graf koset dari subgrup normal pada grup dihedral- $2n$ .

## 1.7 Sistematika Penulisan

Dalam penulisan penelitian ini, penulis menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab, dan masing-masing bab dibagi dalam subbab dengan sistematika penulisan sebagai berikut:

### Bab I Pendahuluan

Pada bab ini penulis menjelaskan latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian dan sistematika penulisan penelitian ini.

### Bab II Kajian Pustaka

Pada bab ini penulis menjelaskan teori yang mendasari penulisan skripsi ini. Dasar teori yang digunakan meliputi definisi, teorema, sifat-sifat serta contoh yang berhubungan dengan grup, grup dihedral, subgrup dan koset, subgrup normal pada grup dihedral- $2n$ , teorema Lagrange, graf, graf koset, dan kajian agama.

### Bab III Pembahasan

Pada bab ini menguraikan langkah-langkah penentuan himpunan koset dari subgrup normal yang sejati, penentuan graf berarah dengan himpunan titik pada koset dari suatu grup, menggambarkan graf koset dengan mengambil subhimpunan  $\{s\}$ ,  $\{r\}$ , dan  $\{1\}$ , membuat konjektur tentang karakteristik graf koset dari subgrup normal pada grup dihedral dan membuktikannya.

### Bab IV Penutup

Pada bab ini menjelaskan kesimpulan dari penelitian yang telah dilakukan dan saran yang dapat dijadikan acuan bagi peneliti selanjutnya.

## BAB II

### KAJIAN PUSTAKA

#### 2.1 Grup

##### 2.1.1 Definisi Operasi Biner

Dummit dan Foote (2004:16) menjelaskan definisi operasi biner antara lain:

- a. Suatu operasi biner  $*$  pada himpunan  $P$  merupakan suatu fungsi  $*$ :  $P \times P \rightarrow P$ . Untuk setiap  $a, b \in P$  yang dituliskan dengan  $a * b \in P$  untuk  $*$   $(a, b) \in P$ .
- b. Suatu operasi biner  $*$  pada himpunan  $P$  disebut asosiatif jika untuk semua  $a, b, c \in P$  maka berlaku  $a * (b * c) = (a * b) * c$ .
- c. Jika  $*$  merupakan operasi biner pada himpunan  $P$  maka unsur-unsur  $a$  dan  $b$  dari  $P$  disebut komutatif jika  $a * b = b * a$ . Dikatakan bahwa operasi  $*$  di  $P$  adalah komutatif jika untuk semua  $a, b \in P, a * b = b * a$ .

Contoh:

Operasi  $+$  (penjumlahan) adalah suatu operasi biner komutatif pada  $\mathbb{Z}$ . Himpunan bilangan bulat  $\mathbb{Z}$ ,  $f(a, b) = a + b = b + a$  adalah operasi biner komutatif karena jumlah dari dua bilangan bulat adalah bilangan bulat.

##### 2.1.2 Definisi Grup

Misal  $*$  adalah operasi biner pada himpunan  $P$  dan  $H$  adalah subhimpunan dari  $P$ . Jika untuk setiap  $a, b \in H, a * b \in H$ , maka  $H$  dikatakan tertutup di bawah  $*$  (Dummit dan Foote, 2004:16). Suatu grup adalah pasangan berurutan

$(P, *)$  dengan  $P$  merupakan himpunan tak kosong dan  $*$  merupakan operasi biner di  $P$  yang memenuhi aksioma-aksioma berikut:

- $(a * b) * c = a * (b * c)$ , untuk semua  $a, b, c \in P$ , operasi  $*$  bersifat asosiatif di  $P$ .
- Terdapat unsur  $e$  di  $P$  yang disebut sebagai unsur identitas dari  $P$  sedemikian sehingga untuk semua  $a \in P$  maka berlaku  $a * e = e * a = a$  (terdapat identitas  $e$  dari  $P$  terhadap operasi  $*$ ).
- Untuk setiap  $a \in P$ , terdapat suatu unsur  $a^{-1}$  di  $P$  yang disebut invers dari  $a$  sedemikian sehingga  $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$  (terdapat invers dalam  $P$  terhadap operasi  $*$ ).

Grup  $(P, *)$  disebut abelian atau komutatif jika  $a * b = b * a, \forall a, b \in P$ .

Contoh:

$\mathbb{Z}$  adalah himpunan bilangan bulat.  $\mathbb{Z}$  terhadap operasi biner  $+$  (penjumlahan) adalah grup karena memenuhi aksioma grup, yaitu:

- Untuk setiap  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  maka  $a + (b + c) = (a + b) + c$ . Sehingga  $\mathbb{Z}$  dengan operasi  $+$  (penjumlahan) memenuhi sifat asosiatif.
- Terdapat unsur identitas yaitu  $0 \in \mathbb{Z}$  sedemikian sehingga  $a + 0 = 0 + a = a$ , untuk setiap  $a \in \mathbb{Z}$ .
- Untuk setiap  $a \in \mathbb{Z}$  terdapat  $a^{-1}$  yaitu  $(-a) \in \mathbb{Z}$  sedemikian sehingga  $a + (-a) = (-a) + a = 0$ . Unsur  $(-a)$  adalah invers dari  $a$ .

## 2.2 Grup Dihedral

Grup dihedral adalah grup dari himpunan simetri-simetri dari segi- $n$  beraturan yang dinotasikan  $D_{2n}$ , untuk setiap  $n$  bilangan bulat positif dan  $n \geq 3$ .

(Dummit dan Foote, 2004:24). Dari pembangkit dan relasi,  $D_{2n}$  dibangkitkan oleh suatu unsur  $r$  yang berorder  $n$ , dan suatu unsur  $s$  yang berorder 2 (Hungerford, 2000:46).

Karena grup dihedral akan digunakan secara ekstensif, maka perlu beberapa notasi dan beberapa hitungan yang dapat menyederhanakan perhitungan selanjutnya dan membantu mengamati  $D_{2n}$  sebagai grup abstrak, yaitu:

1.  $1, r, r^2, \dots, r^{n-1}$  adalah seluruh unsur yang berbeda dan  $r^n = 1$ , jadi  $|r| = n$ .
2.  $|s| = 2$ .
3.  $s \neq r^i$  untuk sebarang  $i$ .
4.  $sr^i \neq sr^j$  untuk semua  $0 \leq i, j \leq n - 1$  dengan  $i \neq j$ , jadi

$$D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$$

yakni setiap unsur dapat ditulis secara khusus dalam bentuk  $s^k r^i$  untuk  $k = 0$  atau 1 dan  $0 \leq i \leq n - 1$ .

5.  $rs = sr^{-1}$ . Awalnya permutasi  $s$  akibat pada  $\{1, 2, \dots, n\}$  dan lalu dipisahkan setiap sisi yang dibentuk dari titik 1 dan 2. Ini menunjukkan secara spesifik bahwa  $r$  dan  $s$  tidak komutatif sehingga  $D_{2n}$  tidak abelian.
6.  $r^i s = sr^{-i}$ , untuk setiap  $0 \leq i \leq n$ . Hasil dari induksi pada  $i$  dan menggunakan fakta bahwa  $r^{i+1}s = r(r^i s)$  bersama dengan perhitungan terdahulu. Ini menunjukkan bagaimana perubahan  $s$  dengan pangkat  $r$  (Dummit dan Foote, 2004:25).

Contoh:

Semua unsur  $D_{2n}$  memiliki suatu representasi pada bentuk  $s^k r^i$ ,  $k = 0$  atau  $1$  dan  $0 \leq i \leq n - 1$ , dan operasi dua unsur dapat direduksi ke bentuk lain. Jika  $n = 12$ ,  
 $(sr^9)(sr^6) = s(r^9s)r^6 = s(sr^{-9})r^6 = s^2r^{-9+6} = r^{-3} = r^9$ .

## 2.3 Subgrup dan Koset

### 2.3.1 Definisi Subgrup

Misal  $P$  adalah grup. Subhimpunan  $H$  di  $P$  adalah subgrup dari  $P$  jika  $H$  tak kosong dan  $H$  tertutup terhadap operasi dan invers (dalam artian  $x, y \in H$  maka  $x^{-1} \in H$  dan  $xy \in H$ ). Jika  $H$  adalah subgrup dari  $P$  dapat ditulis  $H \leq P$  (Dummit dan Foote, 2004:45).

Setiap grup pasti memiliki dua subgrup, yaitu himpunan  $P$  sendiri atau subgrup tak sejati dan himpunan yang hanya memuat unsur identitas  $\{e\}$ , yang dinamakan subgrup trivial. Sedangkan subgrup lain disebut subgrup sejati (Hungerford, 2012:203).

Contoh:

Misalkan  $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$  adalah grup terhadap operasi komposisi.

Jika subhimpunan  $H = \{1, s\}$  sedemikian sehingga  $1^{-1} = 1 \in H$ ,  $s^{-1} = s \in H$ ,  $1 \circ s = s \circ 1 = s \in H$ , dan  $1 \circ 1 = s \circ s = 1 \in H$  maka  $H$  tertutup terhadap operasi dan invers. Jadi  $H \leq D_6$ .

### 2.3.2 Definisi Koset

Misal  $H$  adalah subgrup dari grup  $P$  yang operasinya dinotasikan dengan perkalian dan misal  $x$  adalah sebarang unsur di  $P$ . Himpunan  $Hx = \{hx|h \in H\}$

dan  $xH = \{xh|h \in H\}$  berturut-turut disebut koset kanan dan koset kiri dari  $H$  di  $P$  dibangkitkan oleh  $x$  (Raisinghanian dan Anggarwal, 1980:181).

Schneider (2001:25) menyatakan bahwa untuk grup  $P$  dan subgrup  $H \leq P$  maka  $[P: H]$  adalah himpunan koset kanan atau koset kiri dari  $H$  di  $P$ .

Contoh:

Misal  $(D_6, \circ)$  adalah grup dan  $H = \{1, s\}$  adalah subgrup dari  $D_6$ .

Koset kanan dari  $H$  di  $D_6$  adalah

$$H \circ 1 = H \circ s = H;$$

$$H \circ r = H \circ sr = \{r, sr\};$$

$$H \circ r^2 = H \circ sr^2 = \{r^2, sr^2\}.$$

Sedangkan koset kiri dari  $H$  di  $D_6$  adalah

$$1 \circ H = s \circ H = H;$$

$$r \circ H = sr^2 \circ H = \{r, sr^2\};$$

$$r^2 \circ H = sr \circ H = \{r^2, sr\}.$$

Jadi koset kanan dari  $H$  di  $D_6$  adalah  $\{H, \{r, sr\}, \{r^2, sr^2\}\}$  dan koset kiri dari  $H$  di  $D_6$  adalah  $\{H, \{r, sr^2\}, \{r^2, sr\}\}$ .

### 2.3.3 Definisi Subgrup Normal

Diketahui  $H$  suatu subgrup dari grup  $P$ . Maka  $H$  disebut suatu subgrup normal atau invarian dari  $P$  jika  $xH = Hx$  untuk setiap  $x \in P$  (Gilbert dan Gilbert, 2009:223).

Contoh:

Misalkan  $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$  adalah grup dan  $H = \{1, r, r^2\}$  adalah suatu subgrup dari  $D_6$ , maka koset kanan dari  $H$  di  $D_6$  adalah

$$H \circ 1 = H \circ r = H \circ r^2 = \{1, r, r^2\} = H$$

$$H \circ s = H \circ sr = H \circ sr^2 = \{s, sr^2, sr\}$$

Sedangkan koset kiri dari  $H$  di  $D_6$  adalah

$$1 \circ H = r \circ H = r^2 \circ H = \{1, r, r^2\} = H$$

$$s \circ H = sr \circ H = sr^2 \circ H = \{s, sr, sr^2\}$$

Karena  $xH = Hx$ , untuk semua  $x \in D_6$  maka  $H$  adalah suatu subgrup normal dari  $D_6$ .

#### 2.4 Subgrup Normal $D_{2n}$

Struktur dari subgrup pada  $D_{2n}$  yaitu jika  $n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k}$  adalah penguraian dari  $n$  sebagai suatu operasi dari faktor-faktor prima maka seluruh pembagi  $d$  dari  $n$  membentuk subgrup normal  $\{1, r^d, r^{2d}, \dots, r^{n-d}\}$ . Setiap subgrup normal  $D_{2n}$  pasti memiliki subgrup normal  $\{1, r, r^2, \dots, r^n\}$  dengan koset sebanyak 2. Sehingga subgrup normal  $D_{2n}$  untuk  $n$  ganjil adalah  $\{1, r, r^2, \dots, r^n\}$ ,  $\{1, r^d, r^{2d}, \dots, r^{n-d}\}$  untuk  $d|n$ , dan  $D_{2n}$ . Sedangkan untuk  $n$  genap adalah  $\{1, r, r^2, \dots, r^n\}$ ,  $\{1, r^d, r^{2d}, \dots, r^{n-d}\}$  untuk  $d|n$ ,  $D_{2n}$ ,  $\{1, r^2, \dots, r^{n-2}, s, sr^2, \dots, sr^{n-2}\}$ , dan  $\{1, r^2, \dots, r^{n-2}, sr, sr^3, \dots, sr^{n-1}\}$  (Tarnauceanu, 2015:110-111).

Contoh:

Misalkan  $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$  adalah grup dihedral dengan  $n = 3$  untuk  $n$  ganjil. Diperoleh subgrup normal dari  $D_6$  yaitu  $\{1, r, r^2\}$  dan  $D_6$ .

Misalkan  $D_8 = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$  adalah grup dihedral dengan  $n = 4$  untuk  $n$  genap. Diperoleh subgrup normal dari  $D_8$  yaitu  $\{1, r, r^2, r^3\}$ ,  $\{1, r^2\}$ ,  $D_8$ ,  $\{1, r^2, s, sr^2\}$ , dan  $\{1, r^2, sr, sr^3\}$ .

## 2.5 Teorema Lagrange

Jika  $P$  adalah suatu grup hingga dan  $H$  adalah suatu grup dari  $P$ , maka order dari  $H$  membagi order dari  $P$  ( $|H| \mid |P|$ ) dan banyak koset kiri dari  $H$  di  $P$  sama dengan  $\frac{|H|}{|P|}$  (Dummit dan Foote, 2004:89-90).

Bukti:

Misalkan  $|H| = n$  dan banyak koset kiri dari  $H$  di  $P$  sama dengan  $k$ . Himpunan dari koset kiri  $H$  di  $P$  mempartisi  $P$ . Ambil  $x \in P$ .

Oleh definisi koset kiri, pemetaan dari  $H$  ke  $xH$  yaitu

$$H \sim xH \text{ didefinisikan dengan } h \mapsto xh$$

Didefinisikan  $f: H \rightarrow xH$  dengan  $f(h) = xh$  untuk setiap  $h \in H$ . Ambil sebarang  $h_1, h_2 \in H$  dengan  $h_1 = h_2$ , maka  $xh_1 = xh_2$  yaitu  $f(h_1) = f(h_2)$ .

Jadi,  $f$  adalah fungsi *well defined*.

Selanjutnya akan ditunjukkan  $f$  adalah suatu surjeksi. Ambil sebarang  $y \in xH$ , maka  $y = xh'$  untuk suatu  $h' \in H$ . Pilih  $z = h'$ . Diperoleh  $f(z) = f(h') = xh' = y$ . Jadi,  $f$  adalah suatu surjeksi dari  $H$  ke koset kiri  $xH$ .

Selanjutnya, misal  $f(h_1) = f(h_2)$ , berakibat  $xh_1 = xh_2$ . Karena  $x \in P$ , kanselasi kiri diperoleh  $x^{-1}xh_1 = x^{-1}xh_2$  sehingga  $h_1 = h_2$ . Jadi  $f$  adalah suatu injeksi.

Dengan demikian,  $H$  dan  $xH$  memiliki order yang sama:

$$|xH| = |H| = n.$$

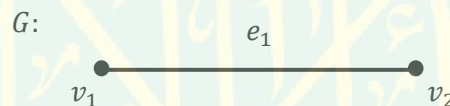
Karena  $P$  dipartisi ke dalam  $k$  subhimpunan tak beririsan setiap partisinya sebanyak  $n$ , maka  $|P| = kn$ . Jadi  $k = \frac{|P|}{n} = \frac{|P|}{|H|}$ .

## 2.6 Graf

### 2.6.1 Definisi Graf

Graf  $G$  adalah pasangan  $(V(G), E(G))$  dengan  $V(G)$  adalah himpunan tidak kosong dari objek-objek yang disebut titik, dan  $E(G)$  adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik yang berbeda di  $V(G)$  disebut sisi. Banyaknya unsur di  $V(G)$  disebut order dari  $G$  dan dilambangkan dengan  $p(G)$ , dan banyaknya unsur di  $G$  disebut ukuran dari  $G$  dan dilambangkan dengan  $q(G)$ . Jika graf yang dibicarakan hanya graf  $G$  maka order dan ukuran dari  $G$  masing-masing cukup ditulis  $p$  dan  $q$  (Abdussakir, dkk. 2009:4).

Contoh:



Gambar 2.1 Graf  $G$

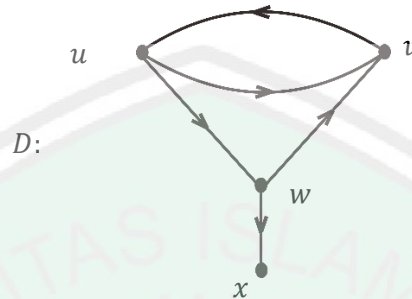
Pada Gambar 2.1 graf  $G$  dapat dinyatakan  $G = (V(G), E(G))$  dengan  $V(G) = \{v_1, v_2\}$  dan  $E(G) = \{v_1 v_2\}$ . Dapat pula dituliskan  $V(G) = \{v_1, v_2\}$  dan  $E(G) = \{e_1\}$  dengan  $e_1 = (v_1, v_2)$ . Graf  $G$  mempunyai 2 titik, maka order dari graf  $G$  adalah 2 dan mempunyai 1 sisi sehingga ukuran graf  $G$  adalah 1.

### 2.6.2 Definisi Graf Berarah

Graf berarah atau digraf  $D$  adalah suatu himpunan berhingga tak kosong dari objek-objek yang disebut titik bersama dengan suatu (mungkin kosong) himpunan pasangan berurutan dari titik-titik yang berbeda di  $D$  disebut busur atau sisi berarah. Seperti graf, himpunan titik di  $D$  dinotasikan dengan  $V(D)$  atau hanya

$V$  dan himpunan busur (atau himpunan sisi berarah) di  $D$  dinotasikan dengan  $E(D)$  atau  $E$  (Chartrand dan Lesniak, 2016:101).

Contoh:



Gambar 2.2 Graf Berarah  $D$

Pada Gambar 2.2 suatu digraf  $D$  dengan himpunan titik  $V = \{u, v, w, x\}$  dan himpunan sisi  $E = \{(u, v), (v, u), (u, w), (w, v), (w, x)\}$ .

### 2.6.3 Definisi Digraf Nol

Misalkan  $D = (V(D), E(D))$  adalah digraf. Jika  $E(D) = \emptyset$  maka  $D$  disebut digraf nol (Ray, 2013:5).

Contoh:



Gambar 2.3 Digraf Nol

Pada Gambar 2.3 merupakan digraf nol yang memiliki 2 titik.

### 2.6.4 Derajat Titik pada Digraf

Chartrand dan Lesniak (2016:101) menjelaskan jika  $a = (u, v)$  adalah suatu busur dari suatu digraf  $D$  maka  $u$  terhubung langsung ke  $v$  dan  $v$  terhubung langsung dari  $u$ . Untuk suatu titik  $v$  di suatu digraf  $D$ , derajat keluar dari  $v$  ( $od v$ ) adalah banyaknya sisi berarah dari  $v$  ke titik di  $D$ , sedangkan derajat masuk dari  $v$

$(id\ v)$  adalah banyaknya sisi berarah dari  $D$  ke titik  $v$ . Derajat ( $\deg v$ ) dari suatu titik  $v$  dapat dituliskan

$$\deg v = od\ v + id\ v.$$

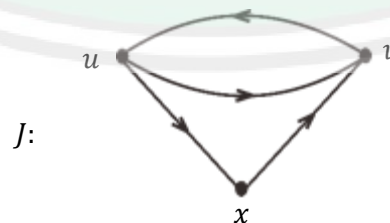
Gambar 2.2 menunjukkan bahwa  $\deg u = 3$ ,  $\deg v = 3$ ,  $\deg w = 3$ , dan  $\deg x = 1$ .

### 2.6.5 Lintasan dan Sikel pada Digraf

Misalkan  $D$  adalah digraf. Misalkan  $u$  dan  $v$  adalah titik di  $D$  (tidak harus berbeda). Jalan  $u - v$  pada  $D$  adalah barisan berhingga yang berselang-seling  $W: u = v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, \dots, a_n, v_n = v$  antara titik dan busur yang dimulai dari titik dan diakhiri dengan titik, dengan  $a_i = (v_{i-1}, v_i), \forall i = 1, 2, 3, \dots, n$  adalah busur di  $D$ .  $v_0$  disebut titik awal,  $v_n$  disebut titik akhir, titik  $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$  disebut titik internal, dan  $n$  menyatakan panjang dari  $W$ . Jika  $v_0 \neq v_n$ , maka  $W$  disebut jalan terbuka. Jika  $v_0 = v_n$ , maka  $W$  disebut jalan tertutup. Jalan yang tidak mempunyai sisi disebut jalan trivial (Abdussakir, dkk. 2009:98).

Jalan terbuka yang semua titiknya berbeda disebut lintasan. Dan jalan tertutup tak trivial yang semua titiknya berbeda disebut sikel (Abdussakir, dkk. 2009:51-54).

Contoh:



Gambar 2.4 Lintasan dan Sikel pada digraf  $J$

Berdasarkan Gambar 2.4, maka  $W_1 = v, u, x$  dan  $W_2 = v, u, x, v$  adalah jalan pada digraf  $J$ .  $W_1$  adalah jalan terbuka dan  $W_2$  adalah jalan tertutup.  $W_1$  adalah lintasan dan  $W_2$  adalah sikel pada digraf  $J$ .

### 2.7 Graf Koset

Misal  $P$  adalah suatu grup,  $H$  adalah suatu subgrup dari  $P$ , dan  $S$  adalah suatu subhimpunan dari  $P$ . Graf koset dari  $P$  terhadap  $H$  dan  $S$  merupakan graf berarah dengan himpunan titik  $[P:H]$  untuk setiap  $Hx, Hy \in V$ ,  $Hx$  terhubung ke  $Hy$  jika dan hanya jika  $yx^{-1} \in HSH$ , dan dinotasikan dengan  $\Gamma(P, H, HSH)$  (Schneider, 2001:25).

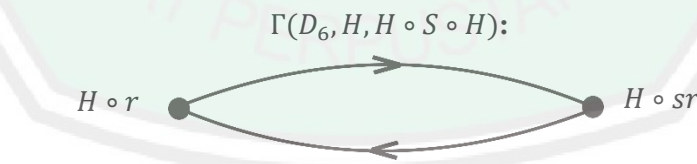
Contoh:

$D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$  adalah suatu grup. Misal  $H = \{1, r, r^2\}$  dan  $S = \{s\}$

maka

$$\begin{aligned} H \circ S \circ H &= \{1, r, r^2\} \circ \{s\} \circ \{1, r, r^2\} \\ &= \{s, sr, sr^2\} \circ \{1, r, r^2\} \\ &= \{1, r, r^2\}. \end{aligned}$$

Graf koset dari  $D_6$  terhadap  $H$  dan  $S$  adalah



Gambar 2.5 Graf Koset

Gambar 2.4 graf  $\Gamma(D_6, H, H\{s\}H)$  merupakan graf koset dari  $D_6$  terhadap  $H = \{1, r, r^2\}$  dan  $S = \{s\}$ .

## 2.8 Kajian Agama

Katsir (2007:496) menyatakan bahwa Allah mengingatkan manusia itu sama dalam sisi kemanusiaan dalam al-Quran surat al-Hujurat/49:13 yaitu:

يَتَأْتِيهَا النَّاسُ إِنَّا خَلَقْنَاكُمْ مِنْ ذَكَرٍ وَأُنْثَىٰ وَجَعَلْنَاكُمْ شُعُوبًا وَقَبَائِلَ لِتَعَارَفُوا

*“Hai manusia, sesungguhnya Kami menciptakanmu dari seorang laki-laki dan seorang perempuan dan menjadikanmu berbangsa-bangsa dan bersuku-suku supaya kamu saling mengenal”.*

Maksudnya, agar saling kenal mengenal sesama mereka, yang masing-masing kembali kepada kabilah mereka. Dan firman-Nya dalam QS. al-Hujurat/49:13 yaitu:

إِنَّ أَكْرَمَكُمْ عِنْدَ اللَّهِ أَتَّقَىٰكُمْ

*“Sesungguhnya orang yang paling mulia di antara kamu di sisi Allah ialah orang yang paling bertakwa di antara kamu.”*

Maksudnya, yang membedakan derajat kalian di sisi Allah hanyalah ketakwaan, bukan keturunan. Firman Allah Swt. Selanjutnya dalam QS. al-Hujurat/49:13 yaitu:

إِنَّ اللَّهَ عَلِيمٌ خَبِيرٌ

*“Sesungguhnya Allah Maha mengetahui lagi Maha Mengenal.”*

Maksudnya, Allah Maha Mengetahui tentang kalian semua dan Maha Mengenal semua urusan kalian, sehingga Allah memberikan petunjuk kepada siapa yang Allah kehendaki, menyesatkan siapa saja yang Allah kehendaki pula, menyayangi siapa yang Allah kehendaki, menimpakan siksaan kepada siapa yang Allah kehendaki, mengutamakan siapa yang Allah kehendaki, dan juga Allah Maha Bijaksana, Maha Mengetahui dan Maha Mengenal semuanya itu.

Hadits pula menyebutkan bahwa semulia-mulia manusia adalah yang paling bertakwa.

عَنْ أَبِي هُرَيْرَةَ - رَضِيَ اللَّهُ عَنْهُ - قَالَ سُئِلَ رَسُولُ اللَّهِ - صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ - أَيُّ النَّاسِ أَكْرَمُ قَالَ « أَكْرَمُهُمْ عِنْدَ اللَّهِ أَتْقَاهُمْ » . قَالُوا لَيْسَ عَنْ هَذَا نَسْأَلُكَ . قَالَ « فَأَكْرَمُ النَّاسِ يُوسُفُ نَبِيُّ اللَّهِ ابْنُ نَبِيِّ اللَّهِ ابْنِ حَلِيلِ اللَّهِ » . قَالُوا لَيْسَ عَنْ هَذَا نَسْأَلُكَ . قَالَ « فَعَنْ مَعَادِنِ الْعَرَبِ تَسْأَلُونِي » . قَالُوا نَعَمْ . قَالَ « فَخِيَارُكُمْ فِي الْجَاهِلِيَّةِ خِيَارُكُمْ فِي الْإِسْلَامِ إِذَا فَتَقَهُوا »

Dari Abu Hurairah *radhiyallahu 'anhu*, ia berkata bahwa Rasulullah *shallallahu 'alaihi wa sallam* ditanya, “Siapakah orang yang paling mulia?” “Yang paling mulia di sisi Allah adalah yang paling bertakwa di antara mereka”, jawab Rasulullah *shallallahu 'alaihi wa sallam*. Orang tersebut berkata, “Bukan itu yang kami tanyakan”. “Manusia yang paling mulia adalah Yusuf, nabi Allah, anak dari nabi Allah, anak dari nabi Allah, anak dari kekasih-Nya”, jawab beliau. Orang tersebut berkata lagi, “Bukan itu yang kami tanyakan”. “Apa dari keturunan Arab?”, tanya beliau. Mereka menjawab, “Iya betul”. Beliau bersabda, “Yang terbaik di antara kalian di masa jahiliyah adalah yang terbaik dalam Islam jika dia itu fakih (paham agama).” (HR. Bukhari no. 4689)

Ciri-ciri atau intisari ajaran takwa telah dijelaskan dalam firman Allah Swt.

dalam QS. Ali-Imran/3:133-135 (Katsir, 2007:136-146), yaitu:

﴿ وَسَارِعُوا إِلَىٰ مَغْفِرَةٍ مِّن رَّبِّكُمْ وَجَنَّةٍ عَرْضُهَا السَّمَاوَاتُ وَالْأَرْضُ أُعِدَّتْ لِلْمُتَّقِينَ ﴾ (١٣٣) الَّذِينَ يُنْفِقُونَ فِي السَّرَّاءِ وَالضَّرَّاءِ وَالْكَبِيمِ الْعَظِيمِ وَالْعَافِينَ عَنِ النَّاسِ ۗ وَاللَّهُ يُحِبُّ الْمُحْسِنِينَ ﴿١٣٤﴾ وَالَّذِينَ إِذَا فَعَلُوا فَحِشَةً أَوْ ظَلَمُوا أَنفُسَهُمْ ذَكَرُوا اللَّهَ فَاسْتَغْفَرُوا لِذُنُوبِهِمْ وَمَن يَغْفِرِ الذُّنُوبَ إِلَّا اللَّهُ وَلَمْ يُصِرُّوا عَلَىٰ مَا فَعَلُوا وَهُمْ يَعْلَمُونَ ﴿١٣٥﴾

“Dan bersegeralah kamu kepada ampunan dari Tuhanmu dan kepada surga yang luasnya seluas langit dan bumi yang disediakan untuk orang-orang yang bertakwa (133) yaitu orang-orang yang menafkahkan hartanya, baik di waktu lapang maupun sempit,

dan orang-orang yang menahan amarahnya dan memaafkan kesalahan orang. Allah Swt. menyukai orang-orang yang berbuat kebajikan (134) Dan juga orang-orang yang apabila mengerjakan perbuatan keji atau menganiaya diri sendiri, mereka ingat akan Allah, lalu memohon ampun terhadap dosa-dosa mereka dan siapa lagi yang dapat mengampuni dosa selain dari pada Allah? Dan mereka tidak meneruskan perbuatan kejinya itu, sedang mereka mengetahui (135).”

Bersegera memohon ampunan Allah Swt. bila berbuat dosa dan mudah meminta maaf kepada sesama manusia sebagaimana firman Allah Swt. dalam QS. Ali-Imran/3:133 yaitu:

وَسَارِعُوا إِلَىٰ مَغْفِرَةٍ مِّن رَّبِّكُمْ وَجَنَّةٍ عَرْضُهَا السَّمَوَاتُ وَالْأَرْضُ أُعِدَّتْ  
لِلْمُتَّقِينَ

“Dan bersegeralah kamu kepada ampunan dari Rabb-mu dan kepada surga yang luasnya seluas langit dan bumi yang disediakan untuk orang-orang yang bertakwa.”

Maksudnya, sebagaimana telah disediakan neraka bagi orang-orang kafir.

Ayat ini seperti firman Allah pada QS. al-Hadid/57:21 yaitu:

سَابِقُوا إِلَىٰ مَغْفِرَةٍ مِّن رَّبِّكُمْ وَجَنَّةٍ عَرْضُهَا كَعَرْضِ السَّمَاءِ وَالْأَرْضِ أُعِدَّتْ  
لِلَّذِينَ ءَامَنُوا بِاللَّهِ وَرُسُلِهِ ۚ ذَٰلِكَ فَضْلُ اللَّهِ يُؤْتِيهِ مَن يَشَاءُ ۚ وَاللَّهُ ذُو الْفَضْلِ  
الْعَظِيمِ

“Berlomba-lombalah kamu mendapatkan ampunan dari Tuhanmu dan surga yang luasnya seluas langit dan bumi, yang disediakan bagi orang-orang yang beriman kepada Allah dan Rasul-rasul-Nya. Itulah karunia Allah, diberikan-Nya kepada siapa yang dikehendaki-Nya. Dan Allah mempunyai karunia yang besar.”

Dalam Musnad Imam Ahmad telah diriwayatkan bahwa Heraclius pernah mengirimkan surat kepada Rasulullah Saw. yang isinya: “Engkau telah mengajakku ke surga yang luasnya seluas langit dan bumi, lalu dengan letak neraka? Maka Rasulullah Saw. menjawab: “Maha Suci Allah, lalu di mana malam jika siang telah tiba?” Maksudnya ialah, waktu siang itu jika telah menutupi permukaan bumi dari satu sisinya, maka malam berada di sisi yang lain. Demikian

juga dengan surga, yang berada di tempat paling tinggi, di atas langit dan di bawah ‘Arsy, dan luasnya seperti yang difirmankan-Nya dalam QS. al-Hadid/57:21 yaitu:

كَعْرَضِ السَّمَاءِ وَالْأَرْضِ

“Seluas langit dan bumi.”

Sedangkan neraka berada di tempat yang paling bawah. Dengan demikian, tidak ada pertentangan antara keluasan surga yang luasnya seluas langit dan bumi dengan keberadaan neraka. *Wallahu a'lam.*



## BAB III

### PEMBAHASAN

#### 3.1 Graf Koset dari Subgrup Normal pada Grup Dihedral- $2n$

Tarnauceanu (2015:110-111) menjelaskan bahwa subgrup normal  $D_{2n}$  untuk  $n$  ganjil adalah  $\{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}, \{1, r^d, r^{2d}, \dots, r^{n-d}\}$  untuk  $d|n$ , dan  $D_{2n}$ . Sedangkan untuk  $n$  genap adalah  $\{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}, \{1, r^d, r^{2d}, \dots, r^{n-d}\}$  untuk  $d|n$ ,  $D_{2n}$ ,  $\{1, r^2, r^4, \dots, r^{n-2}, s, sr^2, sr^4, \dots, sr^{n-2}\}$ , dan  $\{1, r^2, r^4, \dots, r^{n-2}, sr, sr^3, sr^5, \dots, sr^{n-1}\}$ .

Graf koset dari subgrup normal pada grup  $D_{2n}$  terdiri dari himpunan titik berupa himpunan koset dari subgrup normal dan himpunan sisi berarah berupa sisi berarah antar koset-kosetnya. Penelitian ini membahas tentang sisi berarah dan derajat titik pada graf koset dari subgrup normal yang sejati dengan subhimpunan  $\{s\}, \{r\}$ , dan  $\{1\}$ . Graf koset yang dikaji dari subgrup normal pada grup  $D_6$  sampai  $D_{16}$  selanjutnya akan ditentukan karakteristik graf koset dari subgrup normal pada grup  $D_{2n}$ .

##### 3.1.1 Graf Koset dari Subgrup Normal $H_1 = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$

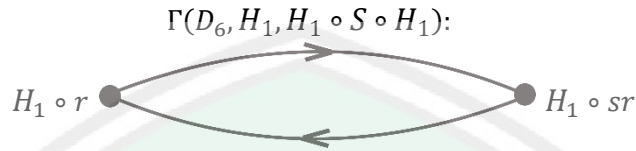
Pada bagian ini dikaji sisi berarah dari koset satu ke koset lain dan sebaliknya pada graf koset dari subgrup normal  $H_1$  dan subhimpunan  $\{s\}, \{r\}$ , dan  $\{1\}$ . Selain itu juga dikaji derajat titik dari graf koset tersebut.

##### 3.1.1.1 Graf Koset dari $D_6$ Terhadap $H_1 = \{1, r, r^2\}$ dan $S = \{s\}$

Diketahui himpunan titik  $[D_6: H_1] = \{H_1 \circ r, H_1 \circ sr\}$ . Subhimpunan  $S = \{s\}$  dengan  $H_1 \circ S \circ H_1 = \{s, sr, sr^2\}$  diperoleh sisi berarah dari titik  $H_1 \circ r$

ke  $H_1 \circ sr$  karena  $sr \circ r^{-1} = s \in H_1 \circ S \circ H_1$  dan sisi berarah dari titik  $H_1 \circ sr$  ke  $H_1 \circ r$  karena  $r \circ sr^{-1} = s \in H_1 \circ S \circ H_1$ .

Jadi graf koset dari  $D_6$  terhadap  $H_1 = \{1, r, r^2\}$  dan  $S = \{s\}$  adalah



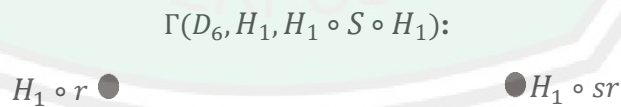
Gambar 3.1 Graf Koset  $D_6$  dengan  $H_1 = \{1, r, r^2\}$  dan  $S = \{s\}$

Pada graf  $\Gamma(D_6, H_1, H_1 \circ S \circ H_1)$  seperti pada Gambar 3.1  $H_1 \circ r$  dan  $H_1 \circ sr$  saling terhubung.  $od(H_1 \circ r) = od(H_1 \circ sr) = 1$  begitu pula  $id(H_1 \circ r) = id(H_1 \circ sr) = 1$ . Jadi  $deg(H_1 \circ r) = 2$  dan  $deg(H_1 \circ sr) = 2$ .

### 3.1.1.2 Graf Koset dari $D_6$ Terhadap $H_1 = \{1, r, r^2\}$ dan $S = \{r\}$

Diketahui himpunan titik  $[D_6: H_1] = \{H_1 \circ r, H_1 \circ sr\}$ . Subhimpunan  $S = \{r\}$  dengan  $H_1 \circ S \circ H_1 = \{1, r, r^2\} = H_1$  tidak memiliki sisi berarah dari titik  $H_1 \circ r$  ke  $H_1 \circ sr$  karena  $sr \circ r^{-1} = s \notin H_1 \circ S \circ H_1$  dan tidak memiliki sisi berarah dari titik  $H_1 \circ sr$  ke  $H_1 \circ r$  karena  $r \circ sr^{-1} = s \notin H_1 \circ S \circ H_1$ .

Jadi graf koset dari  $D_6$  terhadap  $H_1 = \{1, r, r^2\}$  dan  $S = \{r\}$  adalah



Gambar 3.2 Graf Koset  $D_6$  dengan  $H_1 = \{1, r, r^2\}$  dan  $S = \{r\}$

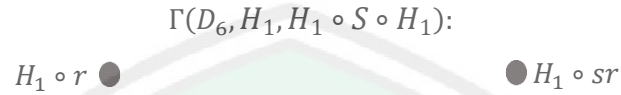
Graf  $\Gamma(D_6, H_1, H_1 \circ S \circ H_1)$  merupakan digraf nol seperti pada Gambar 3.2.

### 3.1.1.3 Graf Koset dari $D_6$ Terhadap $H_1 = \{1, r, r^2\}$ dan $S = \{1\}$

Diketahui himpunan titik  $[D_6: H_1] = \{H_1 \circ r, H_1 \circ sr\}$ . Subhimpunan  $S = \{1\}$  dengan  $H_1 \circ S \circ H_1 = \{1, r, r^2\} = H_1$  tidak memiliki sisi berarah dari titik

$H_1 \circ r$  ke  $H_1 \circ sr$  karena  $sr \circ r^{-1} = s \notin H_1 \circ S \circ H_1$  dan tidak memiliki sisi berarah dari titik  $H_1 \circ sr$  ke  $H_1 \circ r$  karena  $r \circ sr^{-1} = s \notin H_1 \circ S \circ H_1$ .

Jadi graf koset dari  $D_6$  terhadap  $H_1 = \{1, r, r^2\}$  dan  $S = \{1\}$  adalah



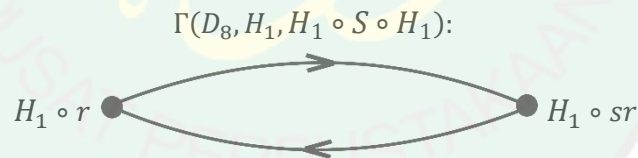
Gambar 3.3 Graf Koset  $D_6$  dengan  $H_1 = \{1, r, r^2\}$  dan  $S = \{1\}$

Graf  $\Gamma(D_6, H_1, H_1 \circ S \circ H_1)$  merupakan graf nol seperti pada Gambar 3.3.

#### 3.1.1.4 Graf Koset dari $D_8$ Terhadap $H_1 = \{1, r, r^2, r^3\}$ dan $S = \{s\}$

Diketahui himpunan titik  $[D_8: H_1] = \{H_1 \circ r, H_1 \circ sr\}$ . Subhimpunan  $S = \{s\}$  dengan  $H_1 \circ S \circ H_1 = \{s, sr, sr^2, sr^3\}$  diperoleh sisi berarah dari titik  $H_1 \circ r$  ke  $H_1 \circ sr$  karena  $sr \circ r^{-1} = s \in H_1 \{s\} H_1$  dan sisi berarah dari titik  $H_1 \circ sr$  terhubung ke  $H_1 \circ r$  karena  $r \circ sr^{-1} = s \in H_1 \{s\} H_1$ .

Jadi graf koset dari  $D_8$  terhadap  $H_1 = \{1, r, r^2, r^3\}$  dan  $S = \{s\}$  adalah



Gambar 3.4 Graf Koset  $D_8$  dengan  $H_1 = \{1, r, r^2, r^3\}$  dan  $S = \{s\}$

Pada graf  $\Gamma(D_8, H_1, H_1 \circ S \circ H_1)$  seperti pada Gambar 3.4  $H_1 \circ r$  dan  $H_1 \circ sr$  saling terhubung.  $od(H_1 \circ r) = od(H_1 \circ sr) = 1$  begitu pula  $id(H_1 \circ r) = id(H_1 \circ sr) = 1$ . Jadi  $deg(H_1 \circ r) = 2$  dan  $deg(H_1 \circ sr) = 2$ .

### 3.1.1.5 Graf Koset dari $D_8$ Terhadap $H_1 = \{1, r, r^2, r^3\}$ dan $S = \{r\}$

Diketahui himpunan titik  $[D_8: H_1] = \{H_1 \circ r, H_1 \circ sr\}$ . Subhimpunan  $S = \{r\}$  dengan  $H_1 \circ S \circ H_1 = \{1, r, r^2, r^3\} = H_1$  tidak memiliki sisi berarah dari titik  $H \circ r$  ke  $H \circ sr$  karena  $sr \circ r^{-1} = s \notin H_1 \circ S \circ H_1$  dan tidak memiliki sisi berarah dari titik  $H \circ sr$  ke  $H \circ r$  karena  $r \circ sr^{-1} = s \notin H_1 \circ S \circ H_1$ .

Jadi graf koset dari  $D_8$  terhadap  $H_1 = \{1, r, r^2, r^3\}$  dan  $S = \{r\}$  adalah

$$\Gamma(D_8, H_1, H_1 \circ S \circ H_1):$$

$$H_1 \circ r \bullet \qquad \bullet H_1 \circ sr$$

Gambar 3.5 Graf Koset  $D_8$  dengan  $H_1 = \{1, r, r^2, r^3\}$  dan  $S = \{r\}$

Graf  $\Gamma(D_8, H_1, H_1 \circ S \circ H_1)$  merupakan digraf nol seperti pada Gambar 3.5.

### 3.1.1.6 Graf Koset dari $D_8$ Terhadap $H_1 = \{1, r, r^2, r^3\}$ dan $S = \{1\}$

Diketahui himpunan titik  $[D_8: H_1] = \{H_1 \circ r, H_1 \circ sr\}$ . Subhimpunan  $S = \{1\}$  dengan  $H_1 \circ S \circ H_1 = \{1, r, r^2, r^3\} = H_1$  tidak memiliki sisi berarah dari titik  $H \circ r$  ke  $H \circ sr$  karena  $sr \circ r^{-1} = s \notin H_1 \circ S \circ H_1$  dan tidak memiliki sisi berarah dari titik  $H \circ sr$  ke  $H \circ r$  karena  $r \circ sr^{-1} = s \notin H_1 \circ S \circ H_1$ .

Jadi graf koset dari  $D_8$  terhadap  $H_1 = \{1, r, r^2, r^3\}$  dan  $S = \{1\}$  adalah

$$\Gamma(D_8, H_1, H_1 \circ S \circ H_1):$$

$$H_1 \circ r \bullet \qquad \bullet H_1 \circ sr$$

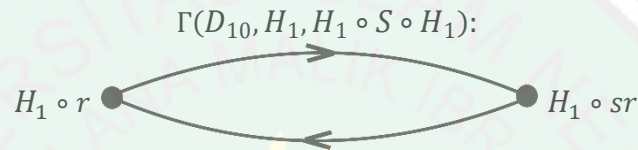
Gambar 3.6 Graf Koset  $D_8$  dengan  $H_1 = \{1, r, r^2, r^3\}$  dan  $S = \{1\}$

Graf  $\Gamma(D_8, H_1, H_1 \circ S \circ H_1)$  merupakan digraf nol seperti pada Gambar 3.6.

### 3.1.1.7 Graf Koset dari $D_{10}$ Terhadap $H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4\}$ dan $S = \{s\}$

Diketahui himpunan titik  $[D_{10}:H_1] = \{H_1 \circ r, H_1 \circ sr\}$ . Subhimpunan  $S = \{s\}$  dengan  $H_1 \circ S \circ H_1 = \{s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$  diperoleh sisi berarah dari titik  $H_1 \circ r$  ke  $H_1 \circ sr$  karena  $sr \circ r^{-1} = s \in H_1 \circ S \circ H_1$  dan sisi berarah dari titik  $H_1 \circ sr$  ke  $H_1 \circ r$  karena  $r \circ sr^{-1} = s \in H_1 \circ S \circ H_1$ .

Jadi graf koset dari  $D_{10}$  terhadap  $H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4\}$  dan  $S = \{s\}$  adalah



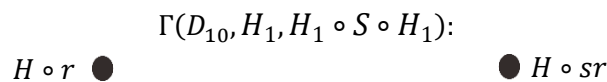
Gambar 3.7 Graf Koset  $D_{10}$  dengan  $H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4\}$  dan  $S = \{s\}$

Pada graf  $\Gamma(D_{10}, H_1, H_1 \circ S \circ H_1)$  seperti pada Gambar 3.7  $H_1 \circ r$  dan  $H_1 \circ sr$  saling terhubung.  $od(H_1 \circ r) = od(H_1 \circ sr) = 1$  begitu pula  $id(H_1 \circ r) = id(H_1 \circ sr) = 1$ . Jadi  $deg(H_1 \circ r) = 2$  dan  $deg(H_1 \circ sr) = 2$ .

### 3.1.1.8 Graf Koset dari $D_{10}$ Terhadap $H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4\}$ dan $S = \{r\}$

Diketahui himpunan titik  $[D_{10}:H_1] = \{H_1 \circ r, H_1 \circ sr\}$ . Subhimpunan  $S = \{r\}$  dengan  $H_1 \circ S \circ H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4\} = H_1$  tidak memiliki sisi berarah dari titik  $H_1 \circ r$  ke  $H_1 \circ sr$  karena  $sr \circ r^{-1} = s \notin H_1 \circ S \circ H_1$  dan tidak memiliki sisi berarah dari titik  $H_1 \circ sr$  ke  $H_1 \circ r$  karena  $r \circ sr^{-1} = s \notin H_1 \circ S \circ H_1$ .

Jadi graf koset dari  $D_{10}$  terhadap  $H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4\}$  dan  $S = \{r\}$  adalah



Gambar 3.8 Graf Koset  $D_{10}$  dengan  $H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4\}$  dan  $S = \{r\}$

Graf  $\Gamma(D_{10}, H_1, H_1 \circ S \circ H_1)$  merupakan digraf nol seperti pada Gambar 3.8.

### 3.1.1.9 Graf Koset dari $D_{10}$ Terhadap $H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4\}$ dan $S = \{1\}$

Diketahui himpunan titik  $[D_{10}:H_1] = \{H_1 \circ r, H_1 \circ sr\}$ . Subhimpunan  $S = \{1\}$  dengan  $H_1 \circ S \circ H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4\} = H_1$  tidak memiliki sisi berarah dari titik  $H_1 \circ r$  ke  $H_1 \circ sr$  karena  $sr \circ r^{-1} = s \notin H_1 \circ S \circ H_1$  dan tidak memiliki sisi berarah dari titik  $H_1 \circ sr$  ke  $H_1 \circ r$  karena  $r \circ sr^{-1} = s \notin H_1 \circ S \circ H_1$ .

Jadi graf koset dari  $D_{10}$  terhadap  $H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4\}$  dan  $S = \{1\}$  adalah

$$\Gamma(D_{10}, H_1, H_1 \circ S \circ H_1):$$

$$H \circ r \bullet \quad \bullet H \circ sr$$

Gambar 3.9 Graf Koset  $D_{10}$  dengan  $H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4\}$  dan  $S = \{1\}$

Graf  $\Gamma(D_{10}, H_1, H_1 \circ S \circ H_1)$  merupakan digraf nol seperti pada Gambar 3.9.

### 3.1.1.10 Graf Koset dari $D_{12}$ Terhadap $H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\}$ dan $S = \{s\}$

Diketahui himpunan titik  $[D_{12}:H_1] = \{H_1 \circ r, H_1 \circ sr\}$ . Subhimpunan  $S = \{s\}$  dengan  $H_1 \circ S \circ H_1 = \{s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$  diperoleh sisi berarah dari titik  $H_1 \circ r$  ke  $H_1 \circ sr$  karena  $sr \circ r^{-1} = s \in H_1 \circ S \circ H_1$  dan sisi berarah dari titik  $H_1 \circ sr$  terhubung ke  $H_1 \circ r$  karena  $r \circ sr^{-1} = s \in H_1 \circ S \circ H_1$ .

Jadi graf koset dari  $D_{12}$  terhadap  $H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\}$  dan  $S = \{s\}$  adalah

$$\Gamma(D_{12}, H_1, H_1 \circ S \circ H_1):$$



Gambar 3.10 Graf Koset  $D_{12}$  dengan  $H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\}$  dan  $S = \{s\}$

Pada graf  $\Gamma(D_{12}, H_1, H_1 \circ S \circ H_1)$  seperti pada Gambar 3.10  $H_1 \circ r$  dan  $H_1 \circ sr$  saling terhubung.  $od(H_1 \circ r) = od(H_1 \circ sr) = 1$  begitu pula  $id(H_1 \circ r) = id(H_1 \circ sr) = 1$ . Jadi  $deg(H_1 \circ r) = 2$  dan  $deg(H_1 \circ sr) = 2$ .

### 3.1.1.11 Graf Koset dari $D_{12}$ Terhadap $H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\}$ dan $S = \{r\}$

Diketahui himpunan titik  $[D_{12}:H_1] = \{H_1 \circ r, H_1 \circ sr\}$ . Subhimpunan  $S = \{r\}$  dengan  $H_1 \circ S \circ H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\} = H_1$  tidak memiliki sisi berarah dari titik  $H \circ r$  ke  $H \circ sr$  karena  $sr \circ r^{-1} = s \notin H_1 \circ S \circ H_1$  dan tidak memiliki sisi berarah dari titik  $H \circ sr$  ke  $H \circ r$  karena  $r \circ sr^{-1} = s \notin H_1 \circ S \circ H_1$ . Jadi graf koset dari  $D_{12}$  terhadap  $H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\}$  dan  $S = \{r\}$  adalah

$$\Gamma(D_{12}, H_1, H_1 \circ S \circ H_1):$$

$$H_1 \circ r \bullet \qquad \bullet H_1 \circ sr$$

Gambar 3.11 Graf Koset  $D_{12}$  dengan  $H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\}$  dan  $S = \{r\}$

Graf  $\Gamma(D_{12}, H_1, H_1 \circ S \circ H_1)$  merupakan digraf nol seperti pada Gambar 3.11.

### 3.1.1.12 Graf Koset dari $D_{12}$ Terhadap $H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\}$ dan $S = \{1\}$

Diketahui himpunan titik  $[D_{12}:H_1] = \{H_1 \circ r, H_1 \circ sr\}$ . Subhimpunan  $S = \{1\}$  dengan  $H_1 \circ S \circ H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\} = H_1$  tidak memiliki sisi berarah dari titik  $H \circ r$  ke  $H \circ sr$  karena  $sr \circ r^{-1} = s \notin H_1 \circ S \circ H_1$  dan tidak memiliki sisi berarah dari titik  $H \circ sr$  ke  $H \circ r$  karena  $r \circ sr^{-1} = s \notin H_1 \circ S \circ H_1$ . Jadi graf koset dari  $D_{12}$  terhadap  $H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\}$  dan  $S = \{1\}$  adalah

$$\Gamma(D_{12}, H_1, H_1 \circ S \circ H_1):$$

$$H_1 \circ r \bullet \qquad \bullet H_1 \circ sr$$

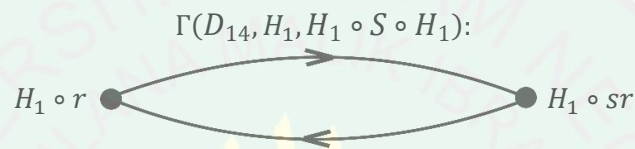
Gambar 3.12 Graf Koset  $D_{12}$  dengan  $H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\}$  dan  $S = \{1\}$

Graf  $\Gamma(D_{12}, H_1, H_1 \circ S \circ H_1)$  merupakan digraf nol seperti pada Gambar 3.12.

### 3.1.1.13 Graf Koset dari $D_{14}$ Terhadap $H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\}$ dan $S = \{s\}$

Diketahui himpunan titik  $[D_{14}:H_1] = \{H_1 \circ r, H_1 \circ sr\}$ . Subhimpunan  $S = \{s\}$  dengan  $H_1 \circ S \circ H_1 = \{s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}$  diperoleh sisi berarah dari titik  $H_1 \circ r$  ke  $H_1 \circ sr$  karena  $sr \circ r^{-1} = s \in H_1 \circ S \circ H_1$  dan sisi berarah dari titik  $H_1 \circ sr$  ke  $H_1 \circ r$  karena  $r \circ sr^{-1} = s \in H_1 \circ S \circ H_1$ .

Jadi graf koset dari  $D_{14}$  terhadap  $H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\}$  dan  $S = \{s\}$  adalah



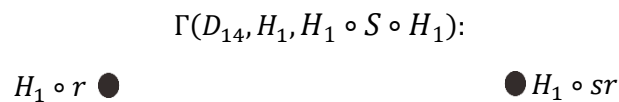
Gambar 3.13 Graf Koset  $D_{14}$  dengan  $H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\}$  dan  $S = \{s\}$

Pada graf  $\Gamma(D_{14}, H_1, H_1 \circ S \circ H_1)$  seperti pada Gambar 3.13  $H_1 \circ r$  dan  $H_1 \circ sr$  saling terhubung.  $od(H_1 \circ r) = od(H_1 \circ sr) = 1$  begitu pula  $id(H_1 \circ r) = id(H_1 \circ sr) = 1$ . Jadi  $deg(H_1 \circ r) = 2$  dan  $deg(H_1 \circ sr) = 2$ .

### 3.1.1.14 Graf Koset dari $D_{14}$ Terhadap $H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\}$ dan $S = \{r\}$

Diketahui himpunan titik  $[D_{14}:H_1] = \{H_1 \circ r, H_1 \circ sr\}$ . Subhimpunan  $S = \{r\}$  dengan  $H_1 \circ S \circ H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\} = H_1$  tidak memiliki sisi berarah dari titik  $H_1 \circ r$  ke  $H_1 \circ sr$  karena  $sr \circ r^{-1} = s \notin H_1 \circ S \circ H_1$  dan tidak memiliki sisi berarah dari titik  $H_1 \circ sr$  ke  $H_1 \circ r$  karena  $r \circ sr^{-1} = s \notin H_1 \circ S \circ H_1$ .

Jadi graf koset dari  $D_{14}$  terhadap  $H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\}$  dan  $S = \{r\}$  adalah



Gambar 3.14 Graf Koset  $D_{14}$  dengan  $H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\}$  dan  $S = \{r\}$

Graf  $\Gamma(D_{14}, H_1, H_1 \circ S \circ H_1)$  merupakan digraf nol seperti pada Gambar 3.14.

### 3.1.1.15 Graf Koset dari $D_{14}$ Terhadap $H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\}$ dan $S = \{1\}$

Diketahui himpunan titik  $[D_{14}:H_1] = \{H_1 \circ r, H_1 \circ sr\}$ . Subhimpunan  $S = \{1\}$  dengan  $H_1 \circ S \circ H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\} = H_1$  tidak memiliki sisi berarah dari titik  $H_1 \circ r$  ke  $H_1 \circ sr$  karena  $sr \circ r^{-1} = s \notin H_1 \circ S \circ H_1$  dan tidak memiliki sisi berarah dari titik  $H_1 \circ sr$  ke  $H_1 \circ r$  karena  $r \circ sr^{-1} = s \notin H_1 \circ S \circ H_1$ .

Jadi graf koset dari  $D_{14}$  terhadap  $H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\}$  dan  $S = \{r\}$  adalah

$$\Gamma(D_{14}, H_1, H_1 \circ S \circ H_1):$$

$$H_1 \circ r \bullet \qquad \bullet H_1 \circ sr$$

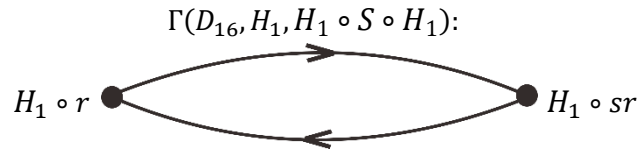
Gambar 3.15 Graf Koset  $D_{14}$  dengan  $H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\}$  dan  $S = \{1\}$

Graf  $\Gamma(D_{14}, H_1, H_1 \circ S \circ H_1)$  merupakan digraf nol seperti pada Gambar 3.15.

### 3.1.1.16 Graf Koset dari $D_{16}$ Terhadap $H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7\}$ dan $S = \{s\}$

Diketahui himpunan titik  $[D_{16}:H_1] = \{H_1 \circ r, H_1 \circ sr\}$ . Subhimpunan  $S = \{s\}$  dengan  $H_1 \circ S \circ H_1 = \{s, sr, sr^2, sr^3, r^4, r^5, r^6, r^7\}$  diperoleh sisi berarah dari titik  $H_1 \circ r$  ke  $H_1 \circ sr$  karena  $sr \circ r^{-1} = s \in H_1 \circ S \circ H_1$  dan sisi berarah dari titik  $H_1 \circ sr$  terhubung ke  $H_1 \circ r$  karena  $r \circ sr^{-1} = s \in H_1 \circ S \circ H_1$ .

Jadi graf koset dari  $D_{16}$  terhadap  $H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7\}$  dan  $S = \{s\}$  adalah

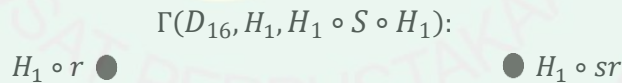


Gambar 3.16 Graf Koset  $D_{16}$  dengan  $H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7\}$  dan  $S = \{s\}$

Pada graf  $\Gamma(D_{16}, H_1, H_1 \circ S \circ H_1)$  seperti pada Gambar 3.16  $H_1 \circ r$  dan  $H_1 \circ sr$  saling terhubung.  $od(H_1 \circ r) = od(H_1 \circ sr) = 1$  begitu pula  $id(H_1 \circ r) = id(H_1 \circ sr) = 1$ . Jadi  $\deg(H_1 \circ r) = 2$  dan  $\deg(H_1 \circ sr) = 2$ .

### 3.1.1.17 Graf Koset dari $D_{16}$ Terhadap $H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7\}$ dan $S = \{r\}$

Diketahui himpunan titik  $[D_{16}:H_1] = \{H_1 \circ r, H_1 \circ sr\}$ . Subhimpunan  $S = \{r\}$  dengan  $H_1 \circ S \circ H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7\}$  tidak memiliki sisi berarah dari titik  $H \circ r$  ke  $H \circ sr$  karena  $sr \circ r^{-1} = s \notin H_1 \circ S \circ H_1$  dan tidak memiliki sisi berarah dari titik  $H \circ sr$  ke  $H \circ r$  karena  $r \circ sr^{-1} = s \notin H_1 \circ S \circ H_1$ . Jadi graf koset dari  $D_{16}$  terhadap  $H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7\}$  dan  $S = \{r\}$  adalah



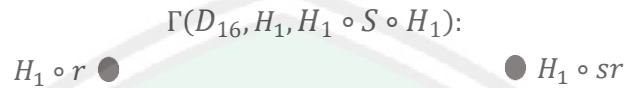
Gambar 3.17 Graf Koset  $D_{16}$  dengan  $H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7\}$  dan  $S = \{r\}$

Graf  $\Gamma(D_{16}, H_1, H_1 \circ S \circ H_1)$  merupakan digraf nol seperti pada Gambar 3.17.

### 3.1.1.18 Graf Koset dari $D_{16}$ Terhadap $H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7\}$ dan $S = \{1\}$

Diketahui himpunan titik  $[D_{16}:H_1] = \{H_1 \circ r, H_1 \circ sr\}$ . Subhimpunan  $S = \{1\}$  dengan  $H_1 \circ S \circ H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7\} = H_1$  tidak memiliki sisi

berarah dari titik  $H \circ r$  ke  $H \circ sr$  karena  $sr \circ r^{-1} = s \notin H_1 \circ S \circ H_1$  dan tidak memiliki sisi berarah dari titik  $H \circ sr$  ke  $H \circ r$  karena  $r \circ sr^{-1} = s \notin H_1 \circ S \circ H_1$ . Jadi graf koset dari  $D_{16}$  terhadap  $H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7\}$  dan  $S = \{1\}$  adalah



Gambar 3.18 Graf Koset  $D_{16}$  dengan  $H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7\}$  dan  $S = \{1\}$

Graf  $\Gamma(D_{16}, H_1, H_1 \circ S \circ H_1)$  merupakan digraf nol seperti pada Gambar 3.18.

### 3.1.1.19 Karakteristik Graf Koset dari Subgrup Normal $H_1 = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$

Berdasarkan subbab 3.1.1.1 hingga 3.1.1.18, diperoleh karakteristik graf koset dari subgrup normal  $H_1 = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$  pada grup dihedral seperti pada tabel berikut:

Tabel 3.1 Tabel Karakteristik Graf Koset dari Subgrup Normal  $H_1 = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$  pada  $D_{2n}$

$D_{2n}$	$H_1 \trianglelefteq D_{2n}$	Titik pada Graf Koset (Koset-koset)	$S$ ( $S \subseteq D_{2n}$ )	Keterhubungan	Derajat Titik
$D_6$	$\{1, r, r^2\}$	1) $H_1 \circ 1 = H_1 \circ r = H_1 \circ r^2$ 2) $H_1 \circ s = H_1 \circ sr = H_1 \circ sr^2$	$\{s\}$	$H_1 \circ r$ terhubung ke $H_1 \circ sr$ dan $H_1 \circ sr$ terhubung ke $H_1 \circ r$	$\deg(H_1 \circ r) = \deg(H_1 \circ sr) = 2$
			$\{r\}$	$H_1 \circ r$ tidak terhubung ke $H_1 \circ sr$ dan $H_1 \circ sr$ tidak terhubung ke $H_1 \circ r$	$\deg(H_1 \circ r) = \deg(H_1 \circ sr) = 0$
			$\{1\}$		
$D_8$	$\{1, r, r^2, r^3\}$	1) $H_1 \circ 1 = H_1 \circ r = \dots = H_1 \circ r^3$ 2) $H_1 \circ s = H_1 \circ sr = \dots = H_1 \circ sr^3$	$\{s\}$	$H_1 \circ r$ terhubung ke $H_1 \circ sr$ dan $H_1 \circ sr$ terhubung ke $H_1 \circ r$	$\deg(H_1 \circ r) = \deg(H_1 \circ sr) = 2$
			$\{r\}$	$H_1 \circ r$ tidak terhubung ke $H_1 \circ sr$ dan $H_1 \circ sr$ tidak terhubung ke $H_1 \circ r$	$\deg(H_1 \circ r) = \deg(H_1 \circ sr) = 0$
			$\{1\}$		

$D_{10}$	$\{1, r, r^2, r^3, r^4\}$	1) $H_1 \circ 1 = H_1 \circ r = \dots = H_1 \circ r^4$ 2) $H_1 \circ s = H_1 \circ sr = \dots = H_1 \circ sr^4$	$\{s\}$	$H_1 \circ r$ terhubung ke $H_1 \circ sr$ dan $H_1 \circ sr$ terhubung ke $H_1 \circ r$	$\deg(H_1 \circ r) = \deg(H_1 \circ sr) = 2$
			$\{r\}$	$H_1 \circ r$ tidak terhubung ke $H_1 \circ sr$ dan $H_1 \circ sr$ tidak terhubung ke $H_1 \circ r$	$\deg(H_1 \circ r) = \deg(H_1 \circ sr) = 0$
			$\{1\}$		
$D_{12}$	$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\}$	1) $H_1 \circ 1 = H_1 \circ r = \dots = H_1 \circ r^5$ 2) $H_1 \circ s = H_1 \circ sr = \dots = H_1 \circ sr^5$	$\{s\}$	$H_1 \circ r$ terhubung ke $H_1 \circ sr$ dan $H_1 \circ sr$ terhubung ke $H_1 \circ r$	$\deg(H_1 \circ r) = \deg(H_1 \circ sr) = 2$
			$\{r\}$	$H_1 \circ r$ tidak terhubung ke $H_1 \circ sr$ dan $H_1 \circ sr$ tidak terhubung ke $H_1 \circ r$	$\deg(H_1 \circ r) = \deg(H_1 \circ sr) = 0$
			$\{1\}$		
$D_{14}$	$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\}$	1) $H_1 \circ 1 = H_1 \circ r = \dots = H_1 \circ r^6$ 2) $H_1 \circ s = H_1 \circ sr = \dots = H_1 \circ sr^6$	$\{s\}$	$H_1 \circ r$ terhubung ke $H_1 \circ sr$ dan $H_1 \circ sr$ terhubung ke $H_1 \circ r$	$\deg(H_1 \circ r) = \deg(H_1 \circ sr) = 2$
			$\{r\}$	$H_1 \circ r$ tidak terhubung ke $H_1 \circ sr$ dan $H_1 \circ sr$ tidak terhubung ke $H_1 \circ r$	$\deg(H_1 \circ r) = \deg(H_1 \circ sr) = 0$
			$\{1\}$		
$D_{16}$	$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7\}$	1) $H_1 \circ 1 = H_1 \circ r = \dots = H_1 \circ r^7$ 2) $H_1 \circ s = H_1 \circ sr = \dots = H_1 \circ sr^7$	$\{s\}$	$H_1 \circ r$ terhubung ke $H_1 \circ sr$ dan $H_1 \circ sr$ terhubung ke $H_1 \circ r$	$\deg(H_1 \circ r) = \deg(H_1 \circ sr) = 2$
			$\{r\}$	$H_1 \circ r$ tidak terhubung ke $H_1 \circ sr$ dan $H_1 \circ sr$ tidak terhubung ke $H_1 \circ r$	$\deg(H_1 \circ r) = \deg(H_1 \circ sr) = 0$
			$\{1\}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\{s\}$	$\vdots$	$\vdots$
			$\{r\}$	$\vdots$	$\vdots$
			$\{1\}$	$\vdots$	$\vdots$
$D_{2n}$	$\{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$ $= \{r^i \mid 1 \leq i < n\}$	1) $H_1 \circ r = \dots = H_1 \circ r^i, 1 \leq i < n$ 2) $H_1 \circ sr = \dots = H_1 \circ sr^j, 1 \leq j < n$	$\{s\}$	$H_1 \circ r^i$ terhubung ke $H_1 \circ sr^j$ dan $H_1 \circ sr^j$ terhubung ke $H_1 \circ r^i$	$\deg(H_1 \circ r) = \deg(H_1 \circ sr) = 2$
			$\{r\}$	$H_1 \circ r^i$ tidak terhubung ke $H_1 \circ sr^j$ dan $H_1 \circ sr^j$ tidak terhubung ke $H_1 \circ r^i$	$\deg(H_1 \circ r^i) = \deg(H_1 \circ sr^j) = 0$
			$\{1\}$		

### Teorema 1

Diberikan grup  $D_{2n}$  untuk setiap  $n$  bilangan bulat positif dan  $n \geq 3$ .

$H_1 = \{r^i \mid 1 \leq i < n\}$  adalah subgrup normal dan  $S$  adalah suatu subhimpunan dari

$D_{2n}$ .

i) Jika  $S = \{s\}$  maka graf  $\Gamma(D_{2n}, H_1, H_1 \circ S \circ H_1)$  adalah digraf sikel berorder 2.

ii) Jika  $S = \{r\}$  atau  $S = \{1\}$  maka graf  $\Gamma(D_{2n}, H_1, H_1 \circ S \circ H_1)$  adalah digraf nol berorder 2.

Bukti:

Diketahui  $D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$  dan  $H_1 = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$ . Menurut teorema Lagrange, banyak koset dari  $H_1$  di  $D_{2n}$  adalah  $\frac{2n}{n} = 2$  koset yaitu  $H_1 = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\} = H_1 \circ r^i$  dan  $\{s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\} = H_1 \circ sr^j$  sebarang  $i$  dan  $j$ . Sehingga  $\{H_1 \circ r^i, H_1 \circ sr^j\}$  untuk suatu  $1 \leq i, j < n$  merupakan himpunan titik pada graf kosetnya.

- i) Ambil  $S = \{s\}$  sehingga  $H_1 \circ S \circ H_1 = \{s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$ . Karena  $sr^j \circ (r^i)^{-1} = sr^{j+n-i} \in H_1 \circ S \circ H_1$  maka terdapat sisi berarah dari  $H_1 \circ r^i$  ke  $H_1 \circ sr^j$ . Sebaliknya  $r^i \circ (sr^j)^{-1} = sr^{n-i+j} \in H_1 \circ S \circ H_1$  maka terdapat sisi berarah dari  $H_1 \circ sr^j$  ke  $H_1 \circ r^i$ . Terbukti bahwa jika  $S = \{s\}$  maka graf  $\Gamma(D_{2n}, H_1, H_1 \circ S \circ H_1)$  adalah digraf sikel berorder 2.
- ii) Ambil  $S = \{r\}$  sehingga  $H_1 \circ S \circ H_1 = H_1$ . Karena  $sr^j \circ (r^i)^{-1} = sr^{j+n-i} \notin H_1$  maka tidak terdapat sisi berarah dari  $H_1 \circ r^i$  ke  $H_1 \circ sr^j$ . Sebaliknya karena  $r^i \circ (sr^j)^{-1} = sr^{n-i+j} \notin H_1$  maka tidak terdapat sisi berarah dari  $H_1 \circ sr^j$  ke  $H_1 \circ r^i$ . Begitu pula untuk  $S = \{1\}$  sehingga  $H_1 \circ S \circ H_1 = H_1$ . Jadi, jika  $S = \{r\}$  atau  $S = \{1\}$  maka graf  $\Gamma(D_{2n}, H_1, H_1 \circ S \circ H_1)$  adalah digraf nol berorder 2.

### Akibat 1

Graf  $\Gamma(D_{2n}, H_1, H_1 \circ S \circ H_1)$  dengan  $H_1 = \{r^i \mid 1 \leq i < n\}$  dan  $S = \{s\}$  hanya memiliki dua titik yang masing-masing berderajat dua.

Bukti:

Berdasarkan bukti pada teorema 1 terdapat sisi berarah dari titik  $H_1 \circ r^i$  ke titik  $H_1 \circ sr^j$  sehingga  $od(H_1 \circ r^i) = 1$  dan  $id(H_1 \circ sr^j) = 1$ . Dan terdapat sisi berarah dari  $H_1 \circ sr^j$  ke  $H_1 \circ r^i$  sehingga  $od(H_1 \circ sr^j) = 1$  dan  $id(H_1 \circ r^i) = 1$ . Jadi  $deg(H_1 \circ r^i) = od(H_1 \circ r^i) + id(H_1 \circ r^i) = 1 + 1 = 2$ , begitu pula

$$deg(H_1 \circ sr^j) = od(H_1 \circ sr^j) + id(H_1 \circ sr^j) = 1 + 1 = 2.$$

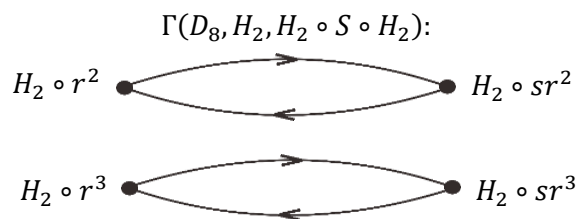
### 3.1.2 Graf Koset dari Subgrup Normal $H_2 = \{1, r^2, r^4, \dots, r^{n-2}\}$

Pada bagian ini dikaji sisi berarah dari koset satu ke koset lain dan sebaliknya pada graf koset dari subgrup normal  $H_2$  dan subhimpunan  $\{s\}, \{r\}$ , dan  $\{1\}$ . Selain itu juga dikaji derajat titik dari graf koset tersebut.

#### 3.1.2.1 Graf Koset dari $D_8$ Terhadap $H_2 = \{1, r^2\}$ dan $S = \{s\}$

Diketahui himpunan titik  $[D_8: H_2] = \{H_2 \circ r^2, H_2 \circ r^3, H_2 \circ sr^2, H_2 \circ sr^3\}$ . Subhimpunan  $S = \{s\}$  dengan  $H_2 \circ S \circ H_2 = \{s, sr^2\}$  diperoleh sisi berarah  $H_2 \circ r^2$  ke  $H_2 \circ sr^2$  karena  $sr^2 \circ (r^2)^{-1} = s \in H_2 \circ S \circ H_2$ , sisi berarah  $H_2 \circ sr^2$  ke  $H_2 \circ r^2$  karena  $r^2 \circ (sr^2)^{-1} = s \in H_2 \circ S \circ H_2$ , sisi berarah  $H_2 \circ r^3$  ke  $H_2 \circ sr^3$  karena  $sr^3 \circ (r^3)^{-1} = s \in H_2 \circ S \circ H_2$ , dan sisi berarah  $H_2 \circ sr^3$  ke  $H_2 \circ r^3$  karena  $r^3 \circ (sr^3)^{-1} = s \in H_2 \circ S \circ H_2$ .

Jadi graf koset dari  $D_8$  terhadap  $H_2 = \{1, r^2\}$  dan  $S = \{s\}$  adalah



Gambar 3.19 Graf Koset  $D_8$  dengan  $H_2 = \{1, r^2\}$  dan  $S = \{s\}$

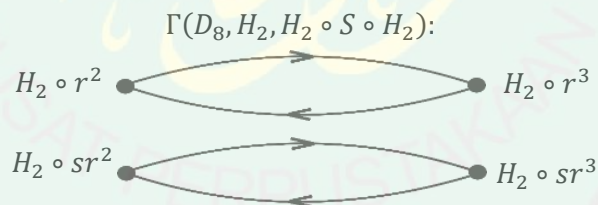
Pada graf  $\Gamma(D_8, H_2, H_2 \circ S \circ H_2)$  seperti pada Gambar 3.19  $H_2 \circ r^2$  dan  $H_2 \circ sr^2$  saling terhubung. Dan  $H_2 \circ r^3$  dan  $H_2 \circ sr^3$  saling terhubung.  $od(H_2 \circ r^2) = od(H_2 \circ sr^2) = 1$  begitu pula  $id(H_2 \circ r^2) = id(H_2 \circ sr^2) = 1$ .  $od(H_2 \circ r^3) = od(H_2 \circ sr^3) = 1$  begitu pula  $id(H_2 \circ r^3) = id(H_2 \circ sr^3) = 1$ .

Jadi  $deg(H_2 \circ r^2) = deg(H_2 \circ sr^2) = deg(H_2 \circ r^3) = deg(H_2 \circ sr^3) = 2$ .

### 3.1.2.2 Graf Koset dari $D_8$ Terhadap $H_2 = \{1, r^2\}$ dan $S = \{r\}$

Diketahui himpunan titik  $[D_8: H_2] = \{H_2 \circ r^2, H_2 \circ r^3, H_2 \circ sr^2, H_2 \circ sr^3\}$ . Subhimpunan  $S = \{r\}$  dengan  $H_2 \circ S \circ H_2 = \{r, r^3\}$  diperoleh sisi berarah dari  $H_2 \circ r^2$  ke  $H_2 \circ r^3$  karena  $r^3 \circ (r^2)^{-1} = r \in H_2 \circ S \circ H_2$ , sisi berarah  $H_2 \circ r^3$  ke  $H_2 \circ r^2$  karena  $r^2 \circ (r^3)^{-1} = r^3 \in H_2 \circ S \circ H_2$ , sisi berarah  $H_2 \circ sr^2$  ke  $H_2 \circ sr^3$  karena  $sr^3 \circ (sr^2)^{-1} = r^3 \in H_2 \circ S \circ H_2$ , dan sisi berarah  $H_2 \circ sr^3$  ke  $H_2 \circ sr^2$  karena  $sr^2 \circ (sr^3)^{-1} = r \in H_2 \circ S \circ H_2$ .

Jadi graf koset dari  $D_8$  terhadap  $H_2 = \{1, r^2\}$  dan  $S = \{r\}$  adalah



Gambar 3.20 Graf Koset  $D_8$  dengan  $H_2 = \{1, r^2\}$  dan  $S = \{r\}$

Pada graf  $\Gamma(D_8, H_2, H_2 \circ S \circ H_2)$  seperti pada Gambar 3.20  $H_2 \circ r^2$  dan  $H_2 \circ r^3$  saling terhubung. Dan  $H_2 \circ sr^2$  dan  $H_2 \circ sr^3$  saling terhubung.  $od(H_2 \circ r^2) = od(H_2 \circ r^3) = 1$  begitu pula  $id(H_2 \circ r^2) = id(H_2 \circ r^3) = 1$ .  $od(H_2 \circ sr^2) = od(H_2 \circ sr^3) = 1$  begitu pula  $id(H_2 \circ sr^2) = id(H_2 \circ sr^3) = 1$ .

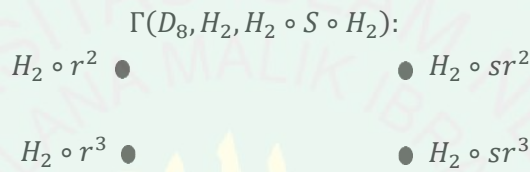
Jadi  $deg(H_2 \circ r^2) = deg(H_2 \circ r^3) = deg(H_2 \circ sr^2) = deg(H_2 \circ sr^3) = 2$ .

### 3.1.2.3 Graf Koset dari $D_8$ Terhadap $H_2 = \{1, r^2\}$ dan $S = \{1\}$

Diketahui himpunan titik  $[D_8: H_2] = \{H_2 \circ r^2, H_2 \circ r^3, H_2 \circ sr^2, H_2 \circ sr^3\}$ .

Subhimpunan  $S = \{1\}$  dengan  $H_2 \circ S \circ H_2 = \{1, r^2\} = H_2$  tidak memiliki sisi berarah karena untuk  $sr^i, sr^j \in \{r^2, r^3, sr^2, sr^3\}$  sedemikian sehingga setiap  $sr^j \circ (sr^i)^{-1} \notin H_2 \circ S \circ H_2$ .

Jadi graf koset dari  $D_8$  terhadap  $H_2 = \{1, r^2\}$  dan  $S = \{1\}$  adalah



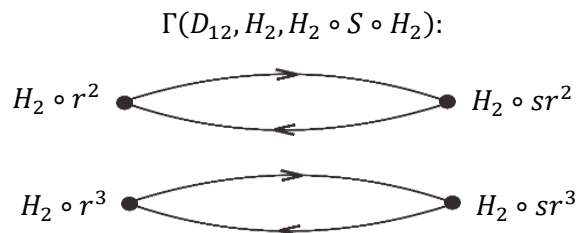
Gambar 3.21 Graf Koset  $D_8$  dengan  $H_2 = \{1, r^2\}$  dan  $S = \{1\}$

Graf  $\Gamma(D_8, H_2, H_2 \circ S \circ H_2)$  merupakan digraf nol seperti pada Gambar 3.21.

### 3.1.2.4 Graf Koset dari $D_{12}$ Terhadap $H_2 = \{1, r^2, r^4\}$ dan $S = \{s\}$

Diketahui himpunan titik  $[D_{12}: H_2] = \{H_2 \circ r^2, H_2 \circ r^3, H_2 \circ sr^2, H_2 \circ sr^3\}$ . Subhimpunan  $S = \{s\}$  dengan  $H_2 \circ S \circ H_2 = \{s, sr^2, sr^4\}$  diperoleh sisi berarah  $H_2 \circ r^2$  ke  $H_2 \circ sr^2$  karena  $sr^2 \circ (r^2)^{-1} = s \in H_2 \circ S \circ H_2$ , sisi berarah  $H_2 \circ sr^2$  ke  $H_2 \circ r^2$  karena  $r^2 \circ (sr^2)^{-1} = s \in H_2 \circ S \circ H_2$ , sisi berarah  $H_2 \circ r^3$  ke  $H_2 \circ sr^3$  karena  $sr^3 \circ (r^3)^{-1} = s \in H_2 \circ S \circ H_2$ , dan sisi berarah  $H_2 \circ sr^3$  ke  $H_2 \circ r^3$  karena  $r^3 \circ (sr^3)^{-1} = s \in H_2 \circ S \circ H_2$ .

Jadi graf koset dari  $D_{12}$  terhadap  $H_2 = \{1, r^2, r^4\}$  dan  $S = \{s\}$  adalah



Gambar 3.22 Graf Koset  $D_{12}$  dengan  $H_2 = \{1, r^2, r^4\}$  dan  $S = \{s\}$

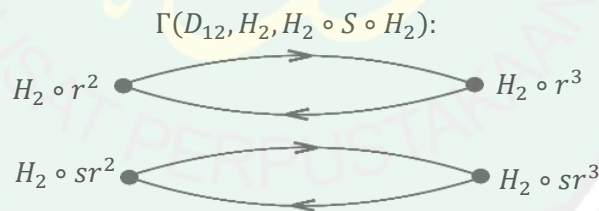
Pada graf  $\Gamma(D_{12}, H_2, H_2 \circ S \circ H_2)$  seperti pada Gambar 3.22  $H_2 \circ r^2$  dan  $H_2 \circ sr^2$  saling terhubung. Dan  $H_2 \circ r^3$  dan  $H_2 \circ sr^3$  saling terhubung.  $od(H_2 \circ r^2) = od(H_2 \circ sr^2) = 1$  begitu pula  $id(H_2 \circ r^2) = id(H_2 \circ sr^2) = 1$ .  $od(H_2 \circ r^3) = od(H_2 \circ sr^3) = 1$  begitu pula  $id(H_2 \circ r^3) = id(H_2 \circ sr^3) = 1$ .

Jadi  $\deg(H_2 \circ r^2) = \deg(H_2 \circ sr^2) = \deg(H_2 \circ r^3) = \deg(H_2 \circ sr^3) = 2$ .

### 3.1.2.5 Graf Koset dari $D_{12}$ Terhadap $H_2 = \{1, r^2, r^4\}$ dan $S = \{r\}$

Diketahui himpunan titik  $[D_{12}:H_2] = \{H_2 \circ r^2, H_2 \circ r^3, H_2 \circ sr^2, H_2 \circ sr^3\}$ . Subhimpunan  $S = \{r\}$  dengan  $H_2 \circ S \circ H_2 = \{r, r^3, r^5\}$  diperoleh sisi berarah dari  $H_2 \circ r^2$  ke  $H_2 \circ r^3$  karena  $r^3 \circ (r^2)^{-1} = r \in H_2 \circ S \circ H_2$ , sisi berarah  $H_2 \circ r^3$  ke  $H_2 \circ r^2$  karena  $r^2 \circ (r^3)^{-1} = r^3 \in H_2 \circ S \circ H_2$ , sisi berarah  $H_2 \circ sr^2$  ke  $H_2 \circ sr^3$  karena  $sr^3 \circ (sr^2)^{-1} = r^3 \in H_2 \circ S \circ H_2$ , dan sisi berarah  $H_2 \circ sr^3$  ke  $H_2 \circ sr^2$  karena  $sr^2 \circ (sr^3)^{-1} = r \in H_2 \circ S \circ H_2$ .

Jadi graf koset dari  $D_{12}$  terhadap  $H_2 = \{1, r^2, r^4\}$  dan  $S = \{r\}$  adalah



Gambar 3.23 Graf Koset  $D_{12}$  dengan  $H_2 = \{1, r^2, r^4\}$  dan  $S = \{r\}$

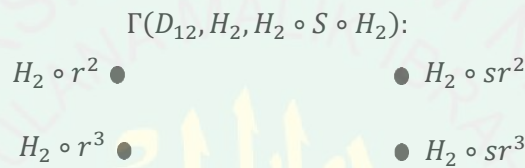
Pada graf  $\Gamma(D_{12}, H_2, H_2 \circ S \circ H_2)$  seperti pada Gambar 3.23  $H_2 \circ r^2$  dan  $H_2 \circ r^3$  saling terhubung. Dan  $H_2 \circ sr^2$  dan  $H_2 \circ sr^3$  saling terhubung.  $od(H_2 \circ r^2) = od(H_2 \circ r^3) = 1$  begitu pula  $id(H_2 \circ r^2) = id(H_2 \circ r^3) = 1$ .  $od(H_2 \circ sr^2) = od(H_2 \circ sr^3) = 1$  begitu pula  $id(H_2 \circ sr^2) = id(H_2 \circ sr^3) = 1$ .

Jadi  $\deg(H_2 \circ r^2) = \deg(H_2 \circ r^3) = \deg(H_2 \circ sr^2) = \deg(H_2 \circ sr^3) = 2$ .

### 3.1.2.6 Graf Koset dari $D_{12}$ Terhadap $H_2 = \{1, r^2, r^4\}$ dan $S = \{1\}$

Diketahui himpunan titik  $[D_{12}:H_2] = \{H_2 \circ r^2, H_2 \circ r^3, H_2 \circ sr^2, H_2 \circ sr^3\}$ . Subhimpunan  $S = \{1\}$  dengan  $H_2 \circ S \circ H_2 = \{1, r^2, r^4\} = H_2$  tidak memiliki sisi berarah karena untuk  $sr^i, sr^j \in \{r^2, r^3, sr^2, sr^3\}$  sedemikian sehingga setiap  $sr^j \circ (sr^i)^{-1} \notin H_2 \circ S \circ H_2$ .

Jadi graf koset dari  $D_{12}$  terhadap  $H_2 = \{1, r^2, r^4\}$  dan  $S = \{1\}$  adalah



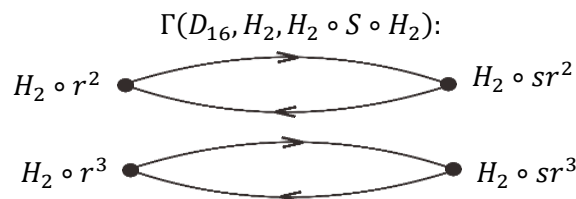
Gambar 3.24 Graf Koset  $D_{12}$  dengan  $H_2 = \{1, r^2, r^4\}$  dan  $S = \{1\}$

Graf  $\Gamma(D_{12}, H_2, H_2 \circ S \circ H_2)$  merupakan digraf nol seperti pada Gambar 3.24.

### 3.1.2.7 Graf Koset dari $D_{16}$ Terhadap $H_2 = \{1, r^2, r^4, r^6\}$ dan $S = \{s\}$

Diketahui himpunan titik  $[D_{16}:H_2] = \{H_2 \circ r^2, H_2 \circ r^3, H_2 \circ sr^2, H_2 \circ sr^3\}$ . Subhimpunan  $S = \{s\}$  dengan  $H_2 \circ S \circ H_2 = \{s, sr^2, sr^4, sr^6\}$  diperoleh sisi berarah  $H_2 \circ r^2$  ke  $H_2 \circ sr^2$  karena  $sr^2 \circ (r^2)^{-1} = s \in H_2 \circ S \circ H_2$ , sisi berarah  $H_2 \circ sr^2$  ke  $H_2 \circ r^2$  karena  $r^2 \circ (sr^2)^{-1} = s \in H_2 \circ S \circ H_2$ , sisi berarah  $H_2 \circ r^3$  ke  $H_2 \circ sr^3$  karena  $sr^3 \circ (r^3)^{-1} = s \in H_2 \circ S \circ H_2$ , dan sisi berarah  $H_2 \circ sr^3$  ke  $H_2 \circ r^3$  karena  $r^3 \circ (sr^3)^{-1} = s \in H_2 \circ S \circ H_2$ .

Jadi graf koset dari  $D_{16}$  terhadap  $H_2 = \{1, r^2, r^4, r^6\}$  dan  $S = \{s\}$  adalah



Gambar 3.25 Graf Koset  $D_{16}$  dengan  $H_2 = \{1, r^2, r^4, r^6\}$  dan  $S = \{s\}$

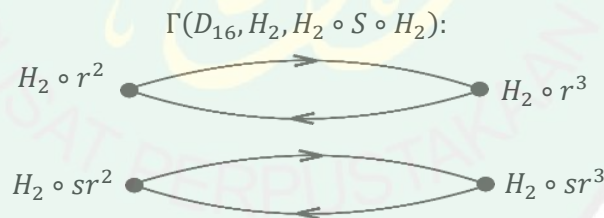
Pada graf  $\Gamma(D_{16}, H_2, H_2 \circ S \circ H_2)$  seperti pada Gambar 3.25  $H_2 \circ r^2$  dan  $H_2 \circ sr^2$  saling terhubung. Dan  $H_2 \circ r^3$  dan  $H_2 \circ sr^3$  saling terhubung.  $od(H_2 \circ r^2) = od(H_2 \circ sr^2) = 1$  begitu pula  $id(H_2 \circ r^2) = id(H_2 \circ sr^2) = 1$ .  $od(H_2 \circ r^3) = od(H_2 \circ sr^3) = 1$  begitu pula  $id(H_2 \circ r^3) = id(H_2 \circ sr^3) = 1$ .

Jadi  $\deg(H_2 \circ r^2) = \deg(H_2 \circ sr^2) = \deg(H_2 \circ r^3) = \deg(H_2 \circ sr^3) = 2$ .

### 3.1.2.8 Graf Koset dari $D_{16}$ Terhadap $H_2 = \{1, r^2, r^4, r^6\}$ dan $S = \{r\}$

Diketahui himpunan titik  $[D_{16}:H_2] = \{H_2 \circ r^2, H_2 \circ r^3, H_2 \circ sr^2, H_2 \circ sr^3\}$ . Subhimpunan  $S = \{r\}$  dengan  $H_2 \circ S \circ H_2 = \{r, r^3, r^5, r^7\}$  diperoleh sisi berarah dari  $H_2 \circ r^2$  ke  $H_2 \circ r^3$  karena  $r^3 \circ (r^2)^{-1} = r \in H_2 \circ S \circ H_2$ , sisi berarah  $H_2 \circ r^3$  ke  $H_2 \circ r^2$  karena  $r^2 \circ (r^3)^{-1} = r^3 \in H_2 \circ S \circ H_2$ , sisi berarah  $H_2 \circ sr^2$  ke  $H_2 \circ sr^3$  karena  $sr^3 \circ (sr^2)^{-1} = r^3 \in H_2 \circ S \circ H_2$ , dan sisi berarah  $H_2 \circ sr^3$  ke  $H_2 \circ sr^2$  karena  $sr^2 \circ (sr^3)^{-1} = r \in H_2 \circ S \circ H_2$ .

Jadi graf koset dari  $D_{16}$  terhadap  $H_2 = \{1, r^2, r^4, r^6\}$  dan  $S = \{r\}$  adalah



Gambar 3.26 Graf Koset  $D_{16}$  dengan  $H_2 = \{1, r^2, r^4, r^6\}$  dan  $S = \{r\}$

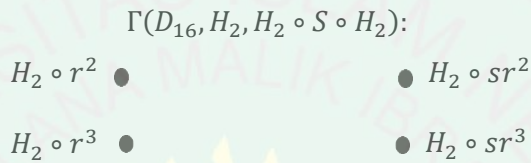
Pada graf  $\Gamma(D_{16}, H_2, H_2 \circ S \circ H_2)$  seperti pada Gambar 3.26  $H_2 \circ r^2$  dan  $H_2 \circ r^3$  saling terhubung. Dan  $H_2 \circ sr^2$  dan  $H_2 \circ sr^3$  saling terhubung.  $od(H_2 \circ r^2) = od(H_2 \circ r^3) = 1$  begitu pula  $id(H_2 \circ r^2) = id(H_2 \circ r^3) = 1$ .  $od(H_2 \circ sr^2) = od(H_2 \circ sr^3) = 1$  begitu pula  $id(H_2 \circ sr^2) = id(H_2 \circ sr^3) = 1$ .

Jadi  $\deg(H_2 \circ r^2) = \deg(H_2 \circ r^3) = \deg(H_2 \circ sr^2) = \deg(H_2 \circ sr^3) = 2$ .

**3.1.2.9 Graf Koset dari  $D_{16}$  Terhadap  $H_2 = \{1, r^2, r^4, r^6\}$  dan  $S = \{1\}$**

Diketahui himpunan titik  $[D_{16}:H_2] = \{H_2 \circ r^2, H_2 \circ r^3, H_2 \circ sr^2, H_2 \circ sr^3\}$ . Subhimpunan  $S = \{1\}$  dengan  $H_2 \circ S \circ H_2 = \{1, r^2, r^4, r^6\} = H_2$  tidak memiliki sisi berarah karena untuk  $sr^i, sr^j \in \{r^2, r^3, sr^2, sr^3\}$  sedemikian sehingga setiap  $sr^j \circ (sr^i)^{-1} \notin H_2 \circ S \circ H_2$ .

Jadi graf koset dari  $D_{16}$  terhadap  $H_2 = \{1, r^2, r^4, r^6\}$  dan  $S = \{1\}$  adalah



Gambar 3.27 Graf Koset  $D_{16}$  dengan  $H_2 = \{1, r^2, r^4, r^6\}$  dan  $S = \{1\}$

Graf  $\Gamma(D_{16}, H_2, H_2 \circ S \circ H_2)$  merupakan digraf nol seperti pada Gambar 3.27.

**3.1.2.10 Karakteristik Graf Koset dari Subgrup Normal  $H_2 = \{1, r^2, r^4, \dots, r^{n-2}\}$**

Berdasarkan subbab 3.1.2.1 hingga 3.1.2.9, diperoleh karakteristik graf koset dari subgrup normal  $H_2 = \{1, r^2, r^4, \dots, r^{n-2}\}$  pada grup dihedral seperti pada tabel berikut:

Tabel 3.2 Tabel Karakteristik Graf pada Koset dari Subgrup Normal  $H_2 = \{1, r^2, r^4, \dots, r^{n-2}\}$  pada  $D_{2n}$

$D_{2n}$	$H_2 \trianglelefteq D_{2n}$	Titik pada Graf Koset (Koset-koset)	$S$ ( $S \subseteq D_{2n}$ )	Keterhubungan	Derajat Titik
$D_8$	$\{1, r^2\}$	1) $H_2 \circ 1 = H_2 \circ r^2$ 2) $H_2 \circ r = H_2 \circ r^3$ 3) $H_2 \circ s = H_2 \circ sr^2$ 4) $H_2 \circ sr = H_2 \circ sr^3$	$\{s\}$	$H_2 \circ r^2$ dan $H_2 \circ sr^2$ saling terhubung dan $H_2 \circ r^3$ dan $H_2 \circ sr^3$ saling terhubung	$\deg(H_2 \circ r^2) =$ $\deg(H_2 \circ sr^2) =$ $\deg(H_2 \circ r^3) =$ $\deg(H_2 \circ sr^3) =$ 2
			$\{r\}$	$H_2 \circ r^2$ dan $H_2 \circ r^3$ saling terhubung dan $H_2 \circ sr^2$ dan $H_2 \circ sr^3$ saling terhubung	$\deg(H_2 \circ r^2) =$ $\deg(H_2 \circ sr^2) =$ $\deg(H_2 \circ r^3) =$ $\deg(H_2 \circ sr^3) =$ 2
			$\{1\}$	$H_2 \circ r^2, H_2 \circ r^3, H_2 \circ sr^2, dan H_2 \circ sr^3$	$\deg(H_2 \circ r^2) =$ $\deg(H_2 \circ sr^2) =$

				tidak terhubung	$\deg(H_2 \circ r^3) =$ $\deg(H_2 \circ sr^3) =$ 0
$D_{12}$	$\{1, r^2, r^4\}$	1) $H_2 \circ 1 = H_2 \circ r^2 = H_2 \circ r^4$ 2) $H_2 \circ r = H_2 \circ r^3 = H_2 \circ r^5$ 3) $H_2 \circ s = H_2 \circ sr^2 = H_2 \circ sr^4$ 4) $H_2 \circ sr = H_2 \circ sr^3 = H_2 \circ sr^5$	{s}	$H_2 \circ r^2$ dan $H_2 \circ sr^2$ saling terhubung dan $H_2 \circ r^3$ dan $H_2 \circ sr^3$ saling terhubung	$\deg(H_2 \circ r^2) =$ $\deg(H_2 \circ sr^2) =$ $\deg(H_2 \circ r^3) =$ $\deg(H_2 \circ sr^3) =$ 2
			{r}	$H_2 \circ r^2$ dan $H_2 \circ r^3$ saling terhubung dan $H_2 \circ sr^2$ dan $H_2 \circ sr^3$ saling terhubung	$\deg(H_2 \circ r^2) =$ $\deg(H_2 \circ sr^2) =$ $\deg(H_2 \circ r^3) =$ $\deg(H_2 \circ sr^3) =$ 2
			{1}	$H_2 \circ r^2, H_2 \circ r^3, H_2 \circ sr^2$ , dan $H_2 \circ sr^3$ tidak terhubung	$\deg(H_2 \circ r^2) =$ $\deg(H_2 \circ sr^2) =$ $\deg(H_2 \circ r^3) =$ $\deg(H_2 \circ sr^3) =$ 0
$D_{16}$	$\{1, r^2, r^4, r^6\}$	1) $H_2 \circ 1 = \dots = H_2 \circ r^6$ 2) $H_2 \circ r = \dots = H_2 \circ r^7$ 3) $H_2 \circ s = \dots = H_2 \circ sr^6$ 4) $H_2 \circ sr = \dots = H_2 \circ sr^7$	{s}	$H_2 \circ r^2$ dan $H_2 \circ sr^2$ saling terhubung dan $H_2 \circ r^3$ dan $H_2 \circ sr^3$ saling terhubung	$\deg(H_2 \circ r^2) =$ $\deg(H_2 \circ sr^2) =$ $\deg(H_2 \circ r^3) =$ $\deg(H_2 \circ sr^3) =$ 2
			{r}	$H_2 \circ r^2$ dan $H_2 \circ r^3$ saling terhubung dan $H_2 \circ sr^2$ dan $H_2 \circ sr^3$ saling terhubung	$\deg(H_2 \circ r^2) =$ $\deg(H_2 \circ sr^2) =$ $\deg(H_2 \circ r^3) =$ $\deg(H_2 \circ sr^3) =$ 2
			{1}	$H_2 \circ r^2, H_2 \circ r^3, H_2 \circ sr^2$ , dan $H_2 \circ sr^3$ tidak terhubung	$\deg(H_2 \circ r^2) =$ $\deg(H_2 \circ sr^2) =$ $\deg(H_2 \circ r^3) =$ $\deg(H_2 \circ sr^3) =$ 0
⋮	⋮	⋮	{s}	⋮	⋮
			{r}	⋮	⋮
			{1}	⋮	⋮
$D_{2n}$	$\{1, r^2, r^4, \dots, r^{n-2}\}$ $= \{r^{2i} \mid 1 \leq i \leq \frac{n}{2}\}$	1) $H_2 \circ 1 = \dots = H_2 \circ r^{2i}$ 2) $H_2 \circ r = \dots = H_2 \circ r^{2i+1}$ 3) $H_2 \circ s = \dots = H_2 \circ sr^{2i}$ 4) $H_2 \circ sr = \dots = H_2 \circ sr^{2i+1}$ Untuk $1 \leq i \leq \frac{n}{2}$	{s}	$H_2 \circ r^{2i}$ dan $H_2 \circ sr^{2i}$ saling terhubung dan $H_2 \circ r^{2i+1}$ dan $H_2 \circ sr^{2i+1}$ saling terhubung	$\deg(H_2 \circ r^2) =$ $\deg(H_2 \circ sr^2) =$ $\deg(H_2 \circ r^3) =$ $\deg(H_2 \circ sr^3) =$ 2
			{r}	$H_2 \circ r^{2i}$ dan $H_2 \circ r^{2i+1}$ saling terhubung dan $H_2 \circ sr^{2i}$ dan $H_2 \circ sr^{2i+1}$ saling terhubung	$\deg(H_2 \circ r^2) =$ $\deg(H_2 \circ sr^2) =$ $\deg(H_2 \circ r^3) =$ $\deg(H_2 \circ sr^3) =$ 2
			{1}	$H_2 \circ r^{2i}, H_2 \circ r^{2i+1}, H_2 \circ sr^{2i}$ , dan $H_2 \circ sr^{2i+1}$ tidak terhubung	$\deg(H_2 \circ r^2) =$ $\deg(H_2 \circ sr^2) =$ $\deg(H_2 \circ r^3) =$ $\deg(H_2 \circ sr^3) =$ 0

### Teorema 2

Diberikan grup  $D_{2n}$  dengan  $n$  genap dan  $n \geq 4$ .  $H_2 = \{r^{2i} \mid 1 \leq i \leq \frac{n}{2}\}$  adalah subgrup normal dan  $S$  adalah suatu subhimpunan dari  $D_{2n}$ .

- i) Jika  $S = \{s\}$  atau  $S = \{r\}$  maka graf  $\Gamma(D_{2n}, H_2, H_2 \circ S \circ H_2)$  adalah digraf yang memuat 2 siklus berorder 2.
- ii) Jika  $S = \{1\}$  maka  $\Gamma(D_{2n}, H_2, H_2 \circ S \circ H_2)$  adalah digraf nol berorder 4.

Bukti:

Diketahui  $D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$  dan  $H_2 = \{r^{2i} \mid 1 \leq i \leq \frac{n}{2}\}$ .

Menurut teorema Lagrange, banyak koset dari  $H_2$  di  $D_{2n}$  adalah  $\frac{2n}{\frac{n}{2}} = 4$  koset

yaitu  $\{r, r^3, \dots, r^{n-1}\} = H_2 \circ r^{2i+1}$ ,  $\{s, sr^2, \dots, sr^{n-2}\} = H_2 \circ sr^{2i}$ ,  $\{sr, sr^3, \dots, sr^{n-1}\} = H_2 \circ sr^{2i+1}$  sebarang  $i$ . Sehingga  $\{H_2 \circ r^{2i}, H_2 \circ r^{2i+1}, H_2 \circ sr^{2i}, H_2 \circ sr^{2i+1}\}$

untuk suatu  $1 \leq i \leq \frac{n}{2}$  merupakan himpunan titik pada graf kosetnya.

- i) Ambil  $S = \{s\}$  sehingga  $H_2 \circ S \circ H_2 = \{s, sr^2, \dots, sr^{n-2}\}$ .  $sr^{2i} \circ (r^{2i})^{-1} = s \in H_2 \circ S \circ H_2$  maka terdapat sisi berarah dari titik  $H_2 \circ r^{2i}$  ke  $H_2 \circ sr^{2i}$ . Sebaliknya  $r^{2i} \circ (sr^{2i})^{-1} = s \in H_2 \circ S \circ H_2$  maka terdapat sisi berarah dari titik  $H_2 \circ sr^{2i}$  ke  $H_2 \circ r^{2i}$ . Selanjutnya  $sr^{2i+1} \circ (r^{2i+1})^{-1} = s \in H_2 \circ S \circ H_2$  maka terdapat sisi berarah dari titik  $H_2 \circ r^{2i+1}$  ke  $H_2 \circ sr^{2i+1}$ . Sebaliknya  $r^{2i+1} \circ (sr^{2i+1})^{-1} = s \in H_2 \circ S \circ H_2$  maka terdapat sisi berarah dari titik  $H_2 \circ sr^{2i+1}$  ke  $H_2 \circ r^{2i+1}$ . Begitu pula saat  $S = \{r\}$  sehingga  $H_2 \circ S \circ H_2 = \{r, r^3, \dots, r^{n-1}\}$ .  $r^{2i+1} \circ (r^{2i})^{-1} = r \in H_2 \circ S \circ H_2$  maka terdapat sisi berarah dari titik  $H_2 \circ r^{2i}$  ke  $H_2 \circ r^{2i+1}$ . Sebaliknya  $r^{2i} \circ (r^{2i+1})^{-1} = r^{n-1} \in H_2 \circ S \circ H_2$  maka terdapat sisi berarah dari titik  $H_2 \circ r^{2i+1}$  ke  $H_2 \circ r^{2i}$ .

Selanjutnya  $sr^{2i+1} \circ (sr^{2i})^{-1} = r^{n-1} \in H_2 \circ S \circ H_2$  maka terdapat sisi berarah dari titik  $H_2 \circ sr^{2i}$  ke  $H_2 \circ sr^{2i+1}$ . Sebaliknya  $sr^{2i} \circ (sr^{2i+1})^{-1} = r \in H_2 \circ S \circ H_2$  maka terdapat sisi berarah dari titik  $H_2 \circ sr^{2i+1}$  ke  $H_2 \circ sr^{2i}$ . Terbukti bahwa jika  $S = \{s\}$  atau  $S = \{r\}$  maka graf  $\Gamma(D_{2n}, H_2, H_2 \circ S \circ H_2)$  adalah digraf yang memuat 2 siklus berorder 2.

ii) Ambil  $S = \{1\}$  sehingga  $H_2 \circ S \circ H_2 = H_2$ . Karena tidak terdapat sisi berarah pada titik-titik  $H_2 \circ r^{2i}, H_2 \circ r^{2i+1}, H_2 \circ sr^{2i}$ , dan  $H_2 \circ sr^{2i+1}$  maka graf  $\Gamma(D_{2n}, H_1, H_1 \circ S \circ H_1)$  adalah digraf nol berorder 4.

### Akibat 2

Jika  $H_2 = \{1, r^2, r^4, \dots, r^{n-2}\}$  dan  $S = \{s\}$  atau  $S = \{r\}$  maka semua titik pada graf  $\Gamma(D_{2n}, H_2, H_2 \circ S \circ H_2)$  adalah berderajat dua.

Bukti:

Berdasarkan bukti pada teorema 2 saat  $S = \{s\}$  diperoleh  $od(H_2 \circ r^{2i}) = 1$  dan  $id(H_2 \circ sr^{2i}) = 1$ . Sebaliknya  $od(H_2 \circ sr^{2i}) = 1$  dan  $id(H_2 \circ r^{2i}) = 1$ . Selanjutnya  $od(H_2 \circ r^{2i+1}) = 1$  dan  $id(H_2 \circ sr^{2i+1}) = 1$ . Sebaliknya  $od(H_2 \circ sr^{2i+1}) = 1$  dan  $id(H_2 \circ r^{2i+1}) = 1$ .

Jadi  $\deg(H_2 \circ r^{2i}) = od(H_2 \circ r^{2i}) + id(H_2 \circ r^{2i}) = 1 + 1 = 2$ ;

$$\deg(H_2 \circ sr^{2i}) = od(H_2 \circ sr^{2i}) + id(H_2 \circ sr^{2i}) = 1 + 1 = 2;$$

$$\deg(H_2 \circ r^{2i+1}) = od(H_2 \circ r^{2i+1}) + id(H_2 \circ r^{2i+1}) = 1 + 1 = 2;$$

$$\deg(H_2 \circ sr^{2i+1}) = od(H_2 \circ sr^{2i+1}) + id(H_2 \circ sr^{2i+1}) = 1 + 1 = 2.$$

Begitu pula saat  $S = \{r\}$  diperoleh  $\deg(H_2 \circ r^{2i}) = \deg(H_2 \circ sr^{2i}) = \deg(H_2 \circ r^{2i+1}) = \deg(H_2 \circ sr^{2i+1}) = 2$ .

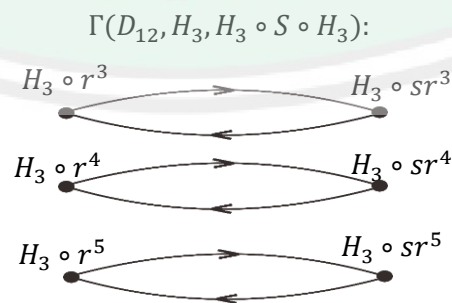
### 3.1.3 Graf Koset dari Subgrup Normal $H_3 = \{1, r^2\}$

Pada bagian ini dikaji sisi berarah dari koset satu ke koset lain dan sebaliknya pada graf koset dari subgrup normal  $H_3$  dan subhimpunan  $\{s\}, \{r\}$ , dan  $\{1\}$ . Selain itu juga dikaji derajat titik dari graf koset tersebut.

#### 3.1.3.1 Graf Koset dari $D_{12}$ Terhadap $H_3 = \{1, r^3\}$ dan $S = \{s\}$

Diketahui himpunan titik  $[D_{12}:H_3] = \{H_3 \circ r^3, H_3 \circ r^4, H_3 \circ r^5, H_3 \circ sr^3, H_3 \circ sr^4, H_3 \circ sr^5\}$ . Subhimpunan  $S = \{s\}$  dengan  $H_3 \circ S \circ H_3 = \{s, sr^3\}$  diperoleh sisi berarah  $H_3 \circ r^3$  ke  $H_3 \circ sr^3$  karena  $sr^3 \circ (r^3)^{-1} = s \in H_3 \circ S \circ H_3$ , dan sisi berarah  $H_3 \circ sr^3$  ke  $H_3 \circ r^3$  karena  $r^3 \circ (sr^3)^{-1} = s \in H_3 \circ S \circ H_3$ , sisi berarah  $H_3 \circ r^4$  ke  $H_3 \circ sr^4$  karena  $sr^4 \circ (r^4)^{-1} = s \in H_3 \circ S \circ H_3$ , dan sisi berarah  $H_3 \circ sr^4$  ke  $H_3 \circ r^4$  karena  $r^4 \circ (sr^4)^{-1} = s \in H_3 \circ S \circ H_3$ , dan sisi berarah  $H_3 \circ r^5$  ke  $H_3 \circ sr^5$  karena  $sr^5 \circ (r^5)^{-1} = s \in H_3 \circ S \circ H_3$ , dan sisi berarah  $H_3 \circ sr^5$  ke  $H_3 \circ r^5$  karena  $r^5 \circ (sr^5)^{-1} = s \in H_3 \circ S \circ H_3$ .

Jadi graf koset dari  $D_{12}$  terhadap  $H_3 = \{1, r^3\}$  dan  $S = \{s\}$  adalah



Gambar 3.28 Graf Koset  $D_{12}$  dengan  $H_3 = \{1, r^3\}$  dan  $S = \{s\}$

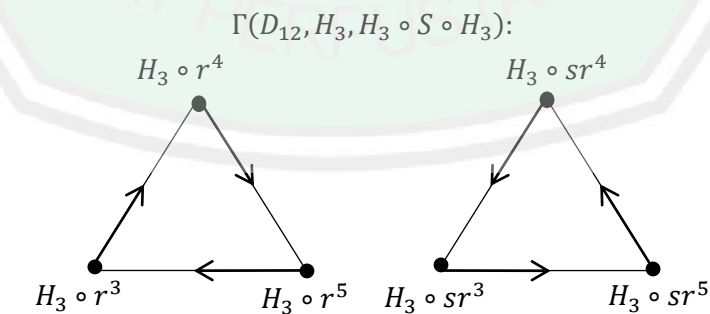
Pada graf  $\Gamma(D_{12}, H_3, H_3 \circ S \circ H_3)$  seperti pada Gambar 3.28  $H_3 \circ r^3$  dan  $H_3 \circ sr^3$  saling terhubung,  $H_3 \circ r^4$  dan  $H_3 \circ sr^4$  saling terhubung, dan  $H_3 \circ r^5$  dan

$H_3 \circ sr^5$  saling terhubung.  $od(H_3 \circ r^3) = od(H_3 \circ sr^3) = 1$  begitu pula  $id(H_3 \circ r^3) = id(H_3 \circ sr^3) = 1$ .  $od(H_3 \circ r^4) = od(H_3 \circ sr^4) = 1$  begitu pula  $id(H_3 \circ r^4) = id(H_3 \circ sr^4) = 1$ .  $od(H_3 \circ r^5) = od(H_3 \circ sr^5) = 1$  begitu pula  $id(H_3 \circ r^5) = id(H_3 \circ sr^5) = 1$ . Jadi  $deg(H_3 \circ r^3) = deg(H_3 \circ sr^3) = deg(H_3 \circ r^4) = deg(H_3 \circ sr^4) = deg(H_3 \circ r^5) = deg(H_3 \circ sr^5) = 2$ .

### 3.1.3.2 Graf Koset dari $D_{12}$ Terhadap $H_3 = \{1, r^3\}$ dan $S = \{r\}$

Diketahui himpunan titik  $[D_{12}:H_3] = \{H_3 \circ r^3, H_3 \circ r^4, H_3 \circ r^5, H_3 \circ sr^3, H_3 \circ sr^4, H_3 \circ sr^5\}$ . Subhimpunan  $S = \{r\}$  dengan  $H_3 \circ S \circ H_3 = \{r, r^4\}$  diperoleh sisi berarah dari  $H_3 \circ r^3$  ke  $H_3 \circ r^4$  karena  $r^4 \circ (r^3)^{-1} = r \in H_3 \circ S \circ H_3$ , sisi berarah  $H_3 \circ r^4$  ke  $H_3 \circ r^5$  karena  $r^5 \circ (r^4)^{-1} = r \in H_3 \circ S \circ H_3$ , sisi berarah  $H_3 \circ r^5$  ke  $H_3 \circ r^3$  karena  $r^3 \circ (r^5)^{-1} = r^4 \in H_3 \circ S \circ H_3$ , sisi berarah  $H_3 \circ sr^3$  ke  $H_3 \circ sr^5$  karena  $sr^5 \circ (sr^3)^{-1} = r^4 \in H_3 \circ S \circ H_3$ , sisi berarah  $H_3 \circ sr^5$  ke  $H_3 \circ sr^4$  karena  $sr^4 \circ (sr^5)^{-1} = r \in H_3 \circ S \circ H_3$ , dan sisi berarah dari  $H_3 \circ sr^4$  ke  $H_3 \circ sr^3$  karena  $sr^3 \circ (sr^4)^{-1} = r \in H_3 \circ S \circ H_3$ .

Jadi graf koset dari  $D_{12}$  terhadap  $H_3 = \{1, r^3\}$  dan  $S = \{r\}$  adalah



Gambar 3.29 Graf Koset  $D_{12}$  dengan  $H_3 = \{1, r^3\}$  dan  $S = \{r\}$

Pada graf  $\Gamma(D_{12}, H_3, H_3 \circ S \circ H_3)$  seperti pada Gambar 3.29  $H_3 \circ r^3$  terhubung ke  $H_3 \circ r^4$ ,  $H_3 \circ r^4$  terhubung ke  $H_3 \circ r^5$ , dan  $H_3 \circ r^5$  terhubung ke  $H_3 \circ r^3$ .  $H_3 \circ sr^3$

terhubung ke  $H_3 \circ sr^5$ ,  $H_3 \circ sr^5$  terhubung ke  $H_3 \circ sr^4$ ,  $H_3 \circ sr^4$  terhubung ke  $H_3 \circ sr^3$ .  $od(H_3 \circ r^3) = od(H_3 \circ r^4) = od(H_3 \circ r^5) = 1$  begitu pula  $id(H_3 \circ r^3) = id(H_3 \circ r^4) = id(H_3 \circ r^5) = 1$ .  $od(H_3 \circ sr^3) = od(H_3 \circ sr^4) = od(H_3 \circ sr^5) = 1$  begitu pula  $id(H_3 \circ sr^3) = id(H_3 \circ sr^4) = id(H_3 \circ sr^5) = 1$ . Jadi  $deg(H_3 \circ r^3) = deg(H_3 \circ r^4) = deg(H_3 \circ r^5) = deg(H_3 \circ sr^3) = deg(H_3 \circ sr^4) = deg(H_3 \circ sr^5) = 2$ .

### 3.1.3.3 Graf Koset dari $D_{12}$ Terhadap $H_3 = \{1, r^3\}$ dan $S = \{1\}$

Diketahui himpunan titik  $[D_{12}:H_3] = \{H_3 \circ r^3, H_3 \circ r^4, H_3 \circ r^5, H_3 \circ sr^3, H_3 \circ sr^4, H_3 \circ sr^5\}$ . Subhimpunan  $S = \{1\}$  dengan  $H_3 \circ S \circ H_3 = \{1, r^3\} = H_3$  tidak memiliki sisi berarah karena untuk  $sr^i, sr^j \in \{r^3, r^4, r^5, sr^3, sr^4, sr^5\}$  sedemikian sehingga setiap  $sr^j \circ (sr^i)^{-1} \notin H_3 \circ S \circ H_3$ . Jadi graf koset dari  $D_{12}$  terhadap  $H_3 = \{1, r^3\}$  dan  $S = \{1\}$  adalah

$$\Gamma(D_{12}, H_3, H_3 \circ S \circ H_3):$$

$H_3 \circ r^3 \bullet$	$\bullet H_3 \circ sr^3$
$H_3 \circ r^4 \bullet$	$\bullet H_3 \circ sr^4$
$H_3 \circ r^5 \bullet$	$\bullet H_3 \circ sr^5$

Gambar 3.30 Graf Koset  $D_{12}$  dengan  $H_3 = \{1, r^3\}$  dan  $S = \{1\}$

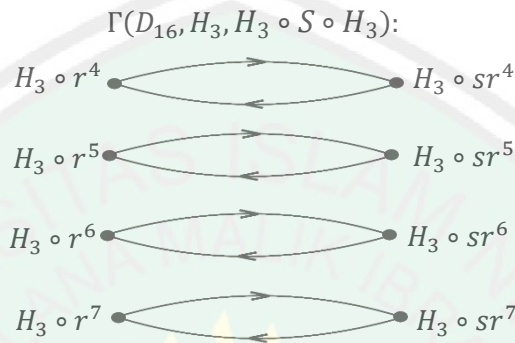
Graf  $\Gamma(D_{12}, H_3, H_3 \circ S \circ H_3)$  merupakan digraf nol seperti pada Gambar 3.30.

### 3.1.3.4 Graf Koset dari $D_{16}$ Terhadap $H_3 = \{1, r^4\}$ dan $S = \{s\}$

Diketahui himpunan titik  $[D_{16}:H_3] = \{H_3 \circ r^4, H_3 \circ r^5, H_3 \circ r^6, H_3 \circ r^7, H_3 \circ sr^4, H_3 \circ sr^5, H_3 \circ sr^6, H_3 \circ sr^7\}$ . Subhimpunan  $S = \{s\}$  dengan  $H_3 \circ S \circ H_3 = \{s, sr^4\}$  diperoleh sisi berarah  $H_3 \circ r^4$  ke  $H_3 \circ sr^4$  karena  $sr^4 \circ (r^4)^{-1} = s \in H_3 \circ S \circ H_3$ , sisi berarah  $H_3 \circ r^5$  ke  $H_3 \circ sr^5$  karena

$sr^5 \circ (r^5)^{-1} = s \in H_3 \circ S \circ H_3$ , sisi berarah  $H_3 \circ r^6$  ke  $H_3 \circ sr^6$  karena  $sr^6 \circ (r^6)^{-1} = s \in H_3 \circ S \circ H_3$ , dan sisi berarah  $H_3 \circ r^7$  ke  $H_3 \circ sr^7$  karena  $sr^7 \circ (r^7)^{-1} = s \in H_3 \circ S \circ H_3$ .

Jadi graf koset dari  $D_{16}$  terhadap  $H_3 = \{1, r^4\}$  dan  $S = \{s\}$  adalah



Gambar 3.31 Graf Koset  $D_{16}$  dengan  $H_3 = \{1, r^4\}$  dan  $S = \{s\}$

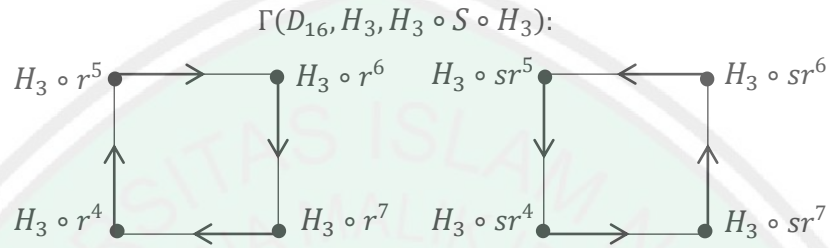
Pada graf  $\Gamma(D_{12}, H_3, H_3 \circ S \circ H_3)$  seperti pada Gambar 3.28  $H_3 \circ r^4$  dan  $H_3 \circ sr^4$  saling terhubung,  $H_3 \circ r^5$  dan  $H_3 \circ sr^5$  saling terhubung,  $H_3 \circ r^6$  dan  $H_3 \circ sr^6$  saling terhubung, dan  $H_3 \circ r^7$  dan  $H_3 \circ sr^7$  saling terhubung.  $od(H_3 \circ r^4) = od(H_3 \circ sr^4) = 1$  begitu pula  $id(H_3 \circ r^4) = id(H_3 \circ sr^4) = 1$ .  $od(H_3 \circ r^5) = od(H_3 \circ sr^5) = 1$  begitu pula  $id(H_3 \circ r^5) = id(H_3 \circ sr^5) = 1$ .  $od(H_3 \circ r^6) = od(H_3 \circ sr^6) = 1$  begitu pula  $id(H_3 \circ r^6) = id(H_3 \circ sr^6) = 1$ .  $od(H_3 \circ r^7) = od(H_3 \circ sr^7) = 1$  begitu pula  $id(H_3 \circ r^7) = id(H_3 \circ sr^7) = 1$ . Jadi  $\deg(H_3 \circ r^4) = \deg(H_3 \circ sr^4) = \deg(H_3 \circ r^5) = \deg(H_3 \circ sr^5) = \deg(H_3 \circ r^6) = \deg(H_3 \circ sr^6) = \deg(H_3 \circ r^7) = \deg(H_3 \circ sr^7) = 2$ .

### 3.1.3.5 Graf Koset dari $D_{16}$ Terhadap $H_3 = \{1, r^4\}$ dan $S = \{r\}$

Diketahui himpunan titik  $[D_{16}: H_3] = \{H_3 \circ r^4, H_3 \circ r^5, H_3 \circ r^6, H_3 \circ r^7, H_3 \circ sr^4, H_3 \circ sr^5, H_3 \circ sr^6, H_3 \circ sr^7\}$ . Subhimpunan  $S = \{r\}$  dengan  $H_3 \circ S \circ H_3 = \{r, r^5\}$  diperoleh sisi berarah  $H_3 \circ r^4$  ke  $H_3 \circ r^5$  karena  $r^5 \circ (r^4)^{-1} = r \in H_3 \circ S \circ H_3$ , sisi berarah  $H_3 \circ r^5$  ke  $H_3 \circ r^6$  karena

$r^6 \circ (r^5)^{-1} = r \in H_3 \circ S \circ H_3$ , sisi berarah  $H_3 \circ r^6$  ke  $H_3 \circ r^7$  karena  $r^7 \circ (r^6)^{-1} = r \in H_3 \circ S \circ H_3$ , dan sisi berarah  $H_3 \circ r^7$  ke  $H_3 \circ r^4$  karena  $r^4 \circ (r^7)^{-1} = r^5 \in H_3 \circ S \circ H_3$ .

Jadi graf koset dari  $D_{16}$  terhadap  $H_3 = \{1, r^3\}$  dan  $S = \{r\}$  adalah



Gambar 3.32 Graf Koset  $D_{16}$  dengan  $H_3 = \{1, r^3\}$  dan  $S = \{r\}$

Pada graf  $\Gamma(D_{16}, H_3, H_3 \circ S \circ H_3)$  seperti pada Gambar 3.32  $H_3 \circ r^4$  terhubung ke  $H_3 \circ r^5$ , dan  $H_3 \circ r^5$  terhubung ke  $H_3 \circ r^6$ ,  $H_3 \circ r^6$  terhubung ke  $H_3 \circ r^7$ ,  $H_3 \circ r^7$  terhubung ke  $H_3 \circ r^4$ .  $H_3 \circ sr^4$  terhubung ke  $H_3 \circ sr^5$ ,  $H_3 \circ sr^5$  terhubung ke  $H_3 \circ sr^6$ ,  $H_3 \circ sr^6$  terhubung ke  $H_3 \circ sr^7$ ,  $H_3 \circ sr^7$  terhubung ke  $H_3 \circ sr^4$ .  $od(H_3 \circ r^4) = od(H_3 \circ r^5) = od(H_3 \circ r^6) = od(H_3 \circ r^7) = 1$  begitu pula  $id(H_3 \circ r^4) = id(H_3 \circ r^5) = id(H_3 \circ r^6) = id(H_3 \circ r^7) = 1$ .  $od(H_3 \circ sr^4) = od(H_3 \circ sr^5) = od(H_3 \circ sr^6) = od(H_3 \circ sr^7) = 1$  begitu pula  $id(H_3 \circ sr^4) = id(H_3 \circ sr^5) = id(H_3 \circ sr^6) = id(H_3 \circ sr^7) = 1$ .

Jadi  $deg(H_3 \circ r^4) = deg(H_3 \circ r^5) = deg(H_3 \circ r^6) = deg(H_3 \circ r^7) =$

$deg(H_3 \circ sr^4) = deg(H_3 \circ sr^5) = deg(H_3 \circ sr^6) = deg(H_3 \circ sr^7) = 2$ .

### 3.1.3.6 Graf Koset dari $D_{16}$ Terhadap $H_3 = \{1, r^4\}$ dan $S = \{1\}$

Diketahui himpunan titik  $[D_{16}: H_3] = \{H_3 \circ r^4, H_3 \circ r^5, H_3 \circ r^6, H_3 \circ r^7, H_3 \circ sr^4, H_3 \circ sr^5, H_3 \circ sr^6, H_3 \circ sr^7\}$ . Subhimpunan  $S = \{1\}$  dengan  $H_3 \circ S \circ H_3 = \{1, r^4\} = H_3$  tidak memiliki sisi berarah karena untuk  $sr^i, sr^j \in$

$\{r^4, r^5, r^6, r^7, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}$  sedemikian sehingga setiap  $sr^j \circ (sr^i)^{-1} \notin H_3 \circ S \circ H_3$ . Jadi graf koset dari  $D_{16}$  terhadap  $H_3 = \{1, r^3\}$  dan  $S = \{1\}$  adalah

$$\Gamma(D_{16}, H_3, H_3 \circ S \circ H_3):$$

$H_3 \circ r^4 \bullet$	$\bullet H_3 \circ sr^4$
$H_3 \circ r^5 \bullet$	$\bullet H_3 \circ sr^5$
$H_3 \circ r^6 \bullet$	$\bullet H_3 \circ sr^6$
$H_3 \circ r^7 \bullet$	$\bullet H_3 \circ sr^7$

Gambar 3.33 Graf Koset  $D_{16}$  dengan  $H_3 = \{1, r^3\}$  dan  $S = \{1\}$

Graf  $\Gamma(D_6, H_3, H_3 \circ S \circ H_3)$  merupakan digraf nol seperti pada Gambar 3.33.

### 3.1.3.7 Karakteristik Graf Koset dari Subgrup Normal $H_3 = \{1, r^{\frac{n}{2}}\}$

Berdasarkan subbab 3.1.3.1 hingga 3.1.3.6, diperoleh karakteristik graf koset dari subgrup normal  $H_3 = \{1, r^{\frac{n}{2}}\}$  pada grup dihedral seperti pada tabel berikut:

Tabel 3.3 Tabel Karakteristik Graf Koset dari Subgrup Normal  $H_3 = \{1, r^{\frac{n}{2}}\}$  pada  $D_{2n}$

$D_{2n} H_3 \trianglelefteq D_{2n}$	Titik pada Graf Koset (Koset-koset)	$S$ ( $S \subseteq D_{2n}$ )	Keterhubungan	Derajat Titik
$D_8$ $\{1, r^2\}$	1) $H_3 \circ 1 = H_3 \circ r^2$ 2) $H_3 \circ r = H_3 \circ r^3$ 3) $H_3 \circ s = H_3 \circ sr^2$ 4) $H_3 \circ sr = H_3 \circ sr^3$	$\{s\}$	$H_3 \circ r^2$ dan $H_3 \circ sr^2$ saling terhubung dan $H_3 \circ r^3$ dan $H_3 \circ sr^3$ saling terhubung	$\deg(H_3 \circ r^2) =$ $\deg(H_3 \circ sr^2) =$ $\deg(H_3 \circ r^3) =$ $\deg(H_3 \circ sr^3) =$ 2
		$\{r\}$	$H_3 \circ r^2$ dan $H_3 \circ r^3$ saling terhubung dan $H_3 \circ sr^2$ dan $H_3 \circ sr^3$ saling terhubung	$\deg(H_3 \circ r^2) =$ $\deg(H_3 \circ sr^2) =$ $\deg(H_3 \circ r^3) =$ $\deg(H_3 \circ sr^3) =$ 2
		$\{1\}$	$H_3 \circ r^2, H_3 \circ r^3, H_3 \circ sr^2, H_3 \circ sr^3$ tidak terhubung	$\deg(H_3 \circ r^2) =$ $\deg(H_3 \circ sr^2) =$ $\deg(H_3 \circ r^3) =$ $\deg(H_3 \circ sr^3) =$ 0

$D_{12}$	$\{1, r^3\}$	<ol style="list-style-type: none"> <li>1) <math>H_3 \circ 1 = H_3 \circ r^3</math></li> <li>2) <math>H_3 \circ r = H_3 \circ r^4</math></li> <li>3) <math>H_3 \circ r^2 = H_3 \circ r^5</math></li> <li>4) <math>H_3 \circ s = H_3 \circ sr^3</math></li> <li>5) <math>H_3 \circ sr = H_3 \circ sr^4</math></li> <li>6) <math>H_3 \circ sr^2 = H_3 \circ sr^5</math></li> </ol>	$\{s\}$	$H_3 \circ r^3$ dan $H_3 \circ sr^3$ saling terhubung, $H_3 \circ r^4$ dan $H_3 \circ sr^4$ saling terhubung, dan $H_3 \circ r^5$ dan $H_3 \circ sr^5$ saling terhubung	$\deg(H_3 \circ r^3) =$ $\deg(H_3 \circ sr^3) =$ $\deg(H_3 \circ r^4) =$ $\deg(H_3 \circ sr^4) =$ $\deg(H_3 \circ r^5) =$ $\deg(H_3 \circ sr^5) =$ 2
			$\{r\}$	$H_3 \circ r^3$ terhubung ke $H_3 \circ r^4, H_3 \circ r^4$ terhubung ke $H_3 \circ r^5$ , dan $H_3 \circ r^5$ terhubung ke $H_3 \circ r^3$ . Selanjutnya $H_3 \circ sr^3$ terhubung ke $H_3 \circ sr^5, H_3 \circ sr^5$ terhubung ke $H_3 \circ sr^4$ , dan $H_3 \circ sr^4$ terhubung ke $H_3 \circ sr^3$ .	$\deg(H_3 \circ r^3) =$ $\deg(H_3 \circ sr^3) =$ $\deg(H_3 \circ r^4) =$ $\deg(H_3 \circ sr^4) =$ $\deg(H_3 \circ r^5) =$ $\deg(H_3 \circ sr^5) =$ 2
			$\{1\}$	$H_3 \circ r^3, H_3 \circ r^4, H_3 \circ r^5, H_3 \circ sr^3, H_3 \circ sr^4,$ dan $H_3 \circ sr^5$ tidak terhubung	$\deg(H_3 \circ r^3) =$ $\deg(H_3 \circ sr^3) =$ $\deg(H_3 \circ r^4) =$ $\deg(H_3 \circ sr^4) =$ $\deg(H_3 \circ r^5) =$ $\deg(H_3 \circ sr^5) =$ 0
$D_{16}$	$\{1, r^4\}$	<ol style="list-style-type: none"> <li>1) <math>H_3 \circ 1 = H_3 \circ r^4</math></li> <li>2) <math>H_3 \circ r = H_3 \circ r^5</math></li> <li>3) <math>H_3 \circ r^2 = H_3 \circ r^6</math></li> <li>4) <math>H_3 \circ r^3 = H_3 \circ r^7</math></li> <li>5) <math>H_3 \circ s = H_3 \circ sr^4</math></li> <li>6) <math>H_3 \circ sr = H_3 \circ sr^5</math></li> <li>7) <math>H_3 \circ sr^2 = H_3 \circ sr^6</math></li> <li>8) <math>H_3 \circ sr^3 = H_3 \circ sr^7</math></li> </ol>	$\{s\}$	$H_3 \circ r^4$ dan $H_3 \circ sr^4$ saling terhubung, $H_3 \circ r^5$ dan $H_3 \circ sr^5$ saling terhubung, $H_3 \circ r^6$ dan $H_3 \circ sr^6$ saling terhubung, $H_3 \circ r^7$ dan $H_3 \circ sr^7$ saling terhubung	$\deg(H_3 \circ r^4) =$ $\deg(H_3 \circ sr^4) =$ $\deg(H_3 \circ r^5) =$ $\deg(H_3 \circ sr^5) =$ $\deg(H_3 \circ r^6) =$ $\deg(H_3 \circ sr^6) =$ $\deg(H_3 \circ r^7) =$ $\deg(H_3 \circ sr^7) =$ 2
			$\{r\}$	$H_3 \circ r^4$ terhubung ke $H_3 \circ r^5$ , dan $H_3 \circ r^5$ terhubung ke $H_3 \circ r^6$ , $H_3 \circ r^6$ terhubung ke $H_3 \circ r^7$ , dan $H_3 \circ r^7$ terhubung ke $H_3 \circ r^4$ . Selanjutnya $H_3 \circ sr^4$ terhubung ke $H_3 \circ sr^7$ , $H_3 \circ sr^7$ terhubung ke $H_3 \circ sr^6$ , $H_3 \circ sr^6$ terhubung ke $H_3 \circ sr^5$ , $H_3 \circ sr^5$ terhubung ke $H_3 \circ sr^4$	$\deg(H_3 \circ r^4) =$ $\deg(H_3 \circ sr^4) =$ $\deg(H_3 \circ r^5) =$ $\deg(H_3 \circ sr^5) =$ $\deg(H_3 \circ r^6) =$ $\deg(H_3 \circ sr^6) =$ $\deg(H_3 \circ r^7) =$ $\deg(H_3 \circ sr^7) =$ 2
			$\{1\}$	$H_3 \circ r^4, H_3 \circ r^5, H_3 \circ r^6, H_3 \circ r^7, H_3 \circ sr^4, H_3 \circ sr^5, H_3 \circ sr^6,$ dan $H_3 \circ sr^7$ tidak terhubung	$\deg(H_3 \circ r^4) =$ $\deg(H_3 \circ sr^4) =$ $\deg(H_3 \circ r^5) =$ $\deg(H_3 \circ sr^5) =$ $\deg(H_3 \circ r^6) =$ $\deg(H_3 \circ sr^6) =$ $\deg(H_3 \circ r^7) =$ $\deg(H_3 \circ sr^7) =$ 0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\{s\}$	$\vdots$	$\vdots$

			$\{r\}$	$\vdots$	$\vdots$
			$\{1\}$	$\vdots$	$\vdots$
$D_{2n}$	$\{1, r^{\frac{n}{2}}\}$	$H_3 \circ 1 = H_3 \circ r^{\frac{n}{2}}$ $H_3 \circ r = H_3 \circ r^{\frac{n}{2}+1}$ $H_3 \circ r^2 = H_3 \circ r^{\frac{n}{2}+2}$ $\vdots$ $H_3 \circ r^i = H_3 \circ r^{\frac{n}{2}+i}$ $\vdots$ $H_3 \circ r^{\frac{n}{2}-1} = H_3 \circ r^{n-1}$	$\{s\}$	$H_3 \circ r^{\frac{n}{2}+i}$ dan $H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}+i}$ saling terhubung untuk setiap $0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1$	$\deg(H_3 \circ r^{\frac{n}{2}+i}) =$ $\deg(H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}+i}) =$ 2
		$H_3 \circ s = H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}}$ $H_3 \circ sr = H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}+1}$ $H_3 \circ sr^2 = H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}+2}$ $\vdots$ $H_3 \circ sr^i = H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}+i}$ $\vdots$ $H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}-1} = H_3 \circ sr^{n-1}$	$\{r\}$	$H_3 \circ r^{\frac{n}{2}+i}$ terhubung ke $H_3 \circ r^{\frac{n}{2}+i+1}$ dan $H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}+i}$ terhubung ke $H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}+i-1}$ untuk setiap $0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1$ dan $H_3 \circ r^{n-1}$ terhubung ke $H_3 \circ r^{\frac{n}{2}}$ dan $H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}}$ terhubung ke $H_3 \circ sr^{n-1}$	$\deg(H_3 \circ r^{\frac{n}{2}+i}) =$ $\deg(H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}+i}) =$ 2
			$\{1\}$	$H_3 \circ r^{\frac{n}{2}+i}, H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}+i}$ tidak terhubung untuk setiap $0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1$	$\deg(H_3 \circ r^{\frac{n}{2}+i}) =$ $\deg(H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}+i}) =$ 0

### Teorema 3

Diberikan grup  $D_{2n}$  dengan  $n$  genap dan  $n \geq 4$ .  $H_3 = \{1, r^{\frac{n}{2}}\}$  adalah subgrup normal dan  $S$  adalah suatu subhimpunan dari  $D_{2n}$ .

- Jika  $S = \{s\}$  maka graf  $\Gamma(D_{2n}, H_3, H_3 \circ S \circ H_3)$  adalah digraf yang memuat  $\frac{n}{2}$  sikel berorder 2.
- Jika  $S = \{r\}$  maka graf  $\Gamma(D_{2n}, H_3, H_3 \circ S \circ H_3)$  adalah digraf yang memuat 2 sikel berorder  $\frac{n}{2}$ .
- Jika  $S = \{1\}$  maka graf  $\Gamma(D_{2n}, H_3, H_3 \circ S \circ H_3)$  adalah digraf nol berorder  $n$ .

Bukti:

Diketahui  $D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$  dan  $H_3 = \{1, r^{\frac{n}{2}}\}$ .

Menurut teorema Lagrange, banyak koset dari  $H_3$  di  $D_{2n}$  adalah  $\frac{2n}{2} = n$  koset

yaitu  $H_3 = \{1, r^{\frac{n}{2}}\} = H_3 \circ r^{\frac{n}{2}}, \{r, r^{\frac{n}{2}+1}\} = H_3 \circ r^{\frac{n}{2}+1}, \{r^2, r^{\frac{n}{2}+2}\} = H_3 \circ r^{\frac{n}{2}+2}, \dots,$

$$\begin{aligned} \{r^{\frac{n}{2}-1}, r^{n-1}\} &= H_3 \circ r^{\frac{n}{2}-1}, \{s, sr^{\frac{n}{2}}\} = H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}}, \{sr, sr^{\frac{n}{2}+1}\} = H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}+1}, \{sr^2, sr^{\frac{n}{2}+2}\} \\ &= H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}+2}, \dots, \{r^{\frac{n}{2}-1}, r^{n-1}\} = H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}-1}. \end{aligned}$$

Sehingga  $\{H_3 \circ r^{\frac{n}{2}}, H_3 \circ r^{\frac{n}{2}+1}, H_3 \circ r^{\frac{n}{2}+2}, \dots, H_3 \circ r^{\frac{n}{2}-1}, H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}}, H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}+1},$   
 $H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}+2}, \dots, H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}-1}\}$  atau  $\{H_3 \circ r^{\frac{n}{2}+i}, H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}+i}$  untuk setiap  $1 \leq i \leq \frac{n}{2}$   
 merupakan himpunan titik pada graf kosetnya.

i) Ambil  $S = \{s\}$  sehingga  $H_3 \circ S \circ H_3 = \{s, sr^{\frac{n}{2}}\}$ .  $sr^{\frac{n}{2}+i} \circ (r^{\frac{n}{2}+i})^{-1} = s \in$   
 $H_3 \circ S \circ H_3$  maka terdapat sisi berarah dari titik  $H_3 \circ r^{\frac{n}{2}+i}$  ke  $H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}+i}$  untuk  
 $1 \leq i \leq \frac{n}{2}$ . Sebaliknya  $r^{\frac{n}{2}+i} \circ (sr^{\frac{n}{2}+i})^{-1} = s \in H_3 \circ S \circ H_3$  maka terdapat sisi  
 berarah dari titik  $H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}+i}$  ke  $H_3 \circ r^{\frac{n}{2}+i}$  untuk  $1 \leq i \leq \frac{n}{2}$ . Terbukti bahwa jika  
 $S = \{s\}$  maka graf  $\Gamma(D_{2n}, H_3, H_3 \circ S \circ H_3)$  adalah digraf yang memuat  $\frac{n}{2}$  sikel  
 berorder 2.

ii) Ambil  $S = \{r\}$  sehingga  $H_3 \circ S \circ H_3 = \{r, r^{\frac{n}{2}+1}\}$ . Untuk  $1 \leq i \leq \frac{n}{2}$  sedemikian  
 hingga  $r^{\frac{n}{2}+i+1} \circ (r^{\frac{n}{2}+i})^{-1} = r \in H_3 \circ S \circ H_3$  maka terdapat sisi berarah dari titik  
 $H_3 \circ r^{\frac{n}{2}+i}$  ke  $H_3 \circ r^{\frac{n}{2}+i+1}$ . Dan  $r^{\frac{n}{2}+i} \circ (r^{\frac{n}{2}+i-1})^{-1} = r \in H_3 \circ S \circ H_3$  maka terdapat  
 sisi berarah dari titik  $H_3 \circ r^{\frac{n}{2}+i-1}$  ke  $H_3 \circ r^{\frac{n}{2}+i}$ . Selanjutnya  $sr^{\frac{n}{2}+i-1} \circ (sr^{\frac{n}{2}+i})^{-1} =$   
 $r \in H_3 \circ S \circ H_3$  maka terdapat sisi berarah dari titik  $H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}+i}$  ke  $H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}+i-1}$ .  
 Dan  $sr^{\frac{n}{2}+i} \circ (sr^{\frac{n}{2}+i+1})^{-1} = r \in H_3 \circ S \circ H_3$  maka terdapat sisi berarah dari titik  
 $H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}+i+1}$  ke  $H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}+i}$ . Terbukti bahwa jika  $S = \{r\}$  maka graf  
 $\Gamma(D_{2n}, H_3, H_3 \circ S \circ H_3)$  adalah digraf yang memuat 2 sikel berorder  $\frac{n}{2}$ .

iii) Ambil  $S = \{1\}$  sehingga  $H_3 \circ S \circ H_3 = H_3$ . Karena tidak terdapat sisi berarah pada titik-titik  $H_3 \circ r^{\frac{n}{2}+i}, H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}+i}$  untuk setiap  $1 \leq i \leq \frac{n}{2}$  maka graf  $\Gamma(D_{2n}, H_1, H_1 \circ S \circ H_1)$  adalah digraf nol berorder  $n$ .

### Akibat 3

Jika  $H_3 = \{1, r^{\frac{n}{2}}\}$  dan  $S = \{s\}$  atau  $S = \{r\}$  maka semua titik pada graf  $\Gamma(D_{2n}, H_3, H_3 \circ S \circ H_3)$  adalah berderajat dua.

Bukti:

Berdasarkan bukti pada teorema 3 saat  $S = \{s\}$  diperoleh  $od(H_3 \circ r^{\frac{n}{2}+i}) = 1$  dan  $id(H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}+i}) = 1$ . Sebaliknya  $od(H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}+i}) = 1$  dan  $id(H_3 \circ r^{\frac{n}{2}+i}) = 1$ .

Jadi  $\deg(H_3 \circ r^{\frac{n}{2}+i}) = od(H_3 \circ r^{\frac{n}{2}+i}) + id(H_3 \circ r^{\frac{n}{2}+i}) = 1 + 1 = 2$ ;

$$\deg(H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}+i}) = od(H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}+i}) + id(H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}+i}) = 1 + 1 = 2.$$

Begitu pula saat  $S = \{r\}$  diperoleh  $\deg(H_3 \circ r^{\frac{n}{2}+i}) = \deg(H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}+i}) = 2$ .

#### 3.1.4 Graf Koset dari Subgrup Normal $H_4 = \{1, r^2, \dots, r^{n-2}, s, sr^2, \dots, sr^{n-2}\}$

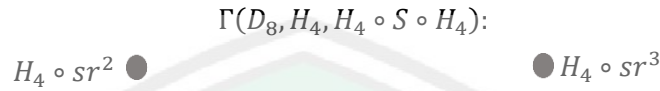
Pada bagian ini dikaji sisi berarah dari koset satu ke koset lain dan sebaliknya pada graf koset dari subgrup normal  $H_4$  dan subhimpunan  $\{s\}, \{r\}$ , dan  $\{1\}$ . Selain itu juga dikaji derajat titik dari graf koset tersebut.

##### 3.1.4.1 Graf Koset dari $D_8$ Terhadap $H_4 = \{1, r^2, s, sr^2\}$ dan $S = \{s\}$

Diketahui himpunan titik  $[D_8: H_4] = \{H_4 \circ sr^2, H_4 \circ sr^3\}$ . Subhimpunan  $S = \{s\}$  dengan  $H_4 \circ S \circ H_4 = H_4$  tidak memiliki sisi berarah dari titik  $H_4 \circ sr^2$  ke

$H_4 \circ sr^3$  karena  $sr^3 \circ (sr^2)^{-1} = r^3 \notin H_4 \circ S \circ H_4$  dan tidak memiliki sisi berarah dari titik  $H_4 \circ sr^3$  ke  $H_4 \circ sr^2$  karena  $sr^2 \circ (sr^3)^{-1} = r \notin H_4 \circ S \circ H_4$ .

Jadi graf koset dari  $D_8$  terhadap  $H_4 = \{1, r^2, s, sr^2\}$  dan  $S = \{s\}$  adalah



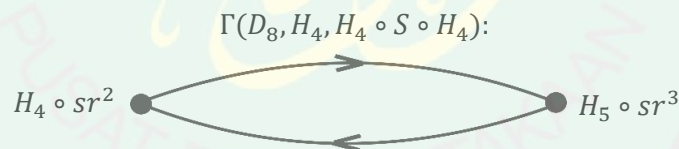
Gambar 3.34 Graf Koset  $D_8$  dengan  $H_4 = \{1, r^2, s, sr^2\}$  dan  $S = \{s\}$

Graf  $\Gamma(D_8, H_4, H_4 \circ S \circ H_4)$  merupakan digraf nol seperti pada Gambar 3.34.

### 3.1.4.2 Graf Koset dari $D_8$ Terhadap $H_4 = \{1, r^2, s, sr^2\}$ dan $S = \{r\}$

Diketahui himpunan titik  $[D_8 : H_4] = \{H_4 \circ sr^2, H_4 \circ sr^3\}$ . Subhimpunan  $S = \{r\}$  dengan  $H_4 \circ S \circ H_4 = \{r, r^3, sr, sr^3\}$  diperoleh sisi berarah dari titik  $H_4 \circ sr^2$  ke  $H_4 \circ sr^3$  karena  $sr^3 \circ (sr^2)^{-1} = r^3 \in H_4 \circ S \circ H_4$  dan sisi berarah dari titik  $H_4 \circ sr^3$  ke  $H_4 \circ sr^2$  karena  $sr^2 \circ (sr^3)^{-1} = r \in H_4 \circ S \circ H_4$ .

Jadi graf koset dari  $D_8$  terhadap  $H_4 = \{1, r^2, s, sr^2\}$  dan  $S = \{r\}$  adalah



Gambar 3.35 Graf Koset  $D_8$  dengan  $H_4 = \{1, r^2, s, sr^2\}$  dan  $S = \{r\}$

Pada graf  $\Gamma(D_8, H_4, H_4 \circ S \circ H_4)$  seperti pada Gambar 3.35  $H_4 \circ sr^2$  dan  $H_4 \circ sr^3$  saling terhubung.  $od(H_4 \circ sr^2) = od(H_4 \circ sr^3) = 1$  begitu pula  $id(H_4 \circ sr^2) = id(H_4 \circ sr^3) = 1$ . Jadi  $deg(H_4 \circ sr^2) = 2$  dan  $deg(H_4 \circ sr^3) = 2$ .

### 3.1.4.3 Graf Koset dari $D_8$ Terhadap $H_4 = \{1, r^2, s, sr^2\}$ dan $S = \{1\}$

Diketahui himpunan titik  $[D_8 : H_4] = \{H_4 \circ sr^2, H_4 \circ sr^3\}$ . Subhimpunan  $S = \{1\}$  dengan  $H_4 \circ S \circ H_4 = \{1, r^2, s, sr^2\} = H_4$  tidak memiliki sisi berarah dari

titik  $H_4 \circ sr^2$  ke  $H_4 \circ sr^3$  karena  $sr^3 \circ (sr^2)^{-1} = r^3 \notin H_4 \circ S \circ H_4$  dan tidak memiliki sisi berarah dari titik  $H_4 \circ sr^3$  ke  $H_4 \circ sr^2$  karena  $sr^2 \circ (sr^3)^{-1} = r \notin H_4 \circ S \circ H_4$ .

Jadi graf koset dari  $D_8$  terhadap  $H_4 = \{1, r^2, s, sr^2\}$  dan  $S = \{1\}$  adalah

$$\Gamma(D_8, H_4, H_4 \circ S \circ H_4):$$

$$H_4 \circ sr^2 \bullet \qquad \bullet H_4 \circ sr^3$$

Gambar 3.36 Graf Koset  $D_8$  dengan  $H_4 = \{1, r^2, s, sr^2\}$  dan  $S = \{1\}$

Graf  $\Gamma(D_8, H_4, H_4 \circ S \circ H_4)$  merupakan digraf nol seperti pada Gambar 3.36.

#### 3.1.4.4 Graf Koset dari $D_{12}$ Terhadap $H_4 = \{1, r^2, r^4, s, sr^2, sr^4\}$ dan $S = \{s\}$

Diketahui himpunan titik  $[D_{12}:H_4] = \{H_4 \circ sr^2, H_4 \circ sr^3\}$ . Subhimpunan  $S = \{s\}$  dengan  $H_4 \circ S \circ H_4 = H_4$  tidak memiliki sisi berarah dari titik  $H_4 \circ sr^2$  ke  $H_4 \circ sr^3$  karena  $sr^3 \circ (sr^2)^{-1} = r^3 \notin H_4 \circ S \circ H_4$  dan tidak memiliki sisi berarah dari titik  $H_4 \circ sr^3$  ke  $H_4 \circ sr^2$  karena  $sr^2 \circ (sr^3)^{-1} = r \notin H_4 \circ S \circ H_4$ .

Jadi graf koset dari  $D_{12}$  terhadap  $H_4 = \{1, r^2, r^4, s, sr^2, sr^4\}$  dan  $S = \{s\}$  adalah

$$\Gamma(D_{12}, H_4, H_4 \circ S \circ H_4):$$

$$H_4 \circ sr^2 \bullet \qquad \bullet H_4 \circ sr^3$$

Gambar 3.37 Graf Koset  $D_{12}$  dengan  $H_4 = \{1, r^2, r^4, s, sr^2, sr^4\}$  dan  $S = \{s\}$

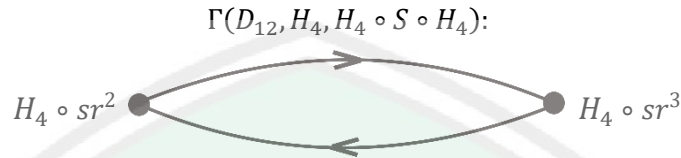
Graf  $\Gamma(D_{12}, H_4, H_4 \circ S \circ H_4)$  merupakan digraf nol seperti pada Gambar 3.37.

#### 3.1.4.5 Graf Koset dari $D_{12}$ Terhadap $H_4 = \{1, r^2, r^4, s, sr^2, sr^4\}$ dan $S = \{r\}$

Diketahui himpunan titik  $[D_{12}:H_4] = \{H_4 \circ sr^2, H_4 \circ sr^3\}$ . Subhimpunan  $S = \{r\}$  dengan  $H_4 \circ S \circ H_4 = \{r, r^3, r^5, sr, sr^3, sr^5\}$  diperoleh sisi berarah dari

titik  $H_4 \circ sr^2$  ke  $H_4 \circ sr^3$  karena  $sr^3 \circ (sr^2)^{-1} = r^3 \in H_4 \circ S \circ H_4$  dan sisi berarah dari titik  $H_4 \circ sr^3$  ke  $H_4 \circ sr^2$  karena  $sr^2 \circ (sr^3)^{-1} = r \in H_4 \circ S \circ H_4$ .

Jadi graf koset dari  $D_{12}$  terhadap  $H_4 = \{1, r^2, r^4, s, sr^2, sr^4\}$  dan  $S = \{r\}$  adalah



Gambar 3.38 Graf Koset  $D_{12}$  dengan  $H_4 = \{1, r^2, r^4, s, sr^2, sr^4\}$  dan  $S = \{r\}$

Pada graf  $\Gamma(D_{12}, H_4, H_4 \circ S \circ H_4)$  seperti pada Gambar 3.38  $H_4 \circ sr^2$  dan  $H_4 \circ sr^3$  saling terhubung.  $od(H_4 \circ sr^2) = od(H_4 \circ sr^3) = 1$  begitu pula  $id(H_4 \circ sr^2) = d(H_4 \circ sr^3) = 1$ . Jadi  $deg(H_4 \circ sr^2) = 2$  dan  $deg(H_4 \circ sr^3) = 2$ .

### 3.1.4.6 Graf Koset dari $D_{12}$ Terhadap $H_4 = \{1, r^2, r^4, s, sr^2, sr^4\}$ dan $S = \{1\}$

Diketahui himpunan titik  $[D_{12}:H_4] = \{H_4 \circ sr^2, H_4 \circ sr^3\}$ . Subhimpunan  $S = \{1\}$  dengan  $H_4 \circ S \circ H_4 = \{1, r^2, r^4, s, sr^2, sr^4\} = H_4$  tidak memiliki sisi berarah dari titik  $H_4 \circ sr^2$  ke  $H_4 \circ sr^3$  karena  $sr^3 \circ (sr^2)^{-1} = r^3 \notin H_4 \circ S \circ H_4$  dan tidak memiliki sisi berarah dari titik  $H_4 \circ sr^3$  ke  $H_4 \circ sr^2$  karena  $sr^2 \circ (sr^3)^{-1} = r \notin H_4 \circ S \circ H_4$ .

Jadi graf koset dari  $D_{12}$  terhadap  $H_4 = \{1, r^2, r^4, s, sr^2, sr^4\}$  dan  $S = \{1\}$  adalah

$$\Gamma(D_{12}, H_4, H_4 \circ S \circ H_4):$$

$$H_4 \circ sr^2 \bullet \qquad \bullet H_4 \circ sr^3$$

Gambar 3.39 Graf Koset  $D_{12}$  dengan  $H_4 = \{1, r^2, r^4, s, sr^2, sr^4\}$  dan  $S = \{1\}$

Graf  $\Gamma(D_{12}, H_4, H_4 \circ S \circ H_4)$  merupakan digraf nol seperti pada Gambar 3.39.

**3.1.4.7 Graf Koset dari  $D_{16}$  Terhadap  $H_4 = \{1, r^2, r^4, r^6, s, sr^2, sr^4, sr^6\}$  dan  $S = \{s\}$**

Diketahui himpunan titik  $[D_{16}:H_4] = \{H_4 \circ sr^2, H_4 \circ sr^3\}$ . Subhimpunan  $S = \{s\}$  dengan  $H_4 \circ S \circ H_4 = H_4$  tidak memiliki sisi berarah dari titik  $H_4 \circ sr^2$  ke  $H_4 \circ sr^3$  karena  $sr^3 \circ (sr^2)^{-1} = r^3 \notin H_4 \circ S \circ H_4$  dan tidak memiliki sisi berarah dari titik  $H_4 \circ sr^3$  ke  $H_4 \circ sr^2$  karena  $sr^2 \circ (sr^3)^{-1} = r \notin H_4 \circ S \circ H_4$ . Jadi graf koset dari  $D_{16}$  terhadap  $H_4 = \{1, r^2, r^4, r^6, s, sr^2, sr^4, sr^6\}$  dan  $S = \{s\}$  adalah

$$\Gamma(D_{16}, H_4, H_4 \circ S \circ H_4):$$



Gambar 3.40 Graf Koset  $D_{16}$  dengan  $H_4 = \{1, r^2, r^4, r^6, s, sr^2, sr^4, sr^6\}$  dan  $S = \{s\}$

Graf  $\Gamma(D_{16}, H_4, H_4 \circ S \circ H_4)$  merupakan digraf nol seperti pada Gambar 3.40.

**3.1.4.8 Graf Koset dari  $D_{16}$  Terhadap  $H_4 = \{1, r^2, r^4, r^6, s, sr^2, sr^4, sr^6\}$  dan  $S = \{r\}$**

Diketahui himpunan titik  $[D_{16}:H_4] = \{H_4 \circ sr^2, H_4 \circ sr^3\}$ . Subhimpunan  $S = \{r\}$  dengan  $H_4 \circ S \circ H_4 = \{r, r^3, r^5, sr, sr^3, sr^5\}$  diperoleh sisi berarah dari titik  $H_4 \circ sr^2$  ke  $H_4 \circ sr^3$  karena  $sr^3 \circ (sr^2)^{-1} = r^3 \in H_4 \circ S \circ H_4$  dan sisi berarah dari titik  $H_4 \circ sr^3$  ke  $H_4 \circ sr^2$  karena  $sr^2 \circ (sr^3)^{-1} = r \in H_4 \circ S \circ H_4$ . Jadi graf koset dari  $D_{16}$  terhadap  $H_4 = \{1, r^2, r^4, s, sr^2, sr^4\}$  dan  $S = \{r\}$  adalah

$$\Gamma(D_{16}, H_4, H_4 \circ S \circ H_4):$$



Gambar 3.41 Graf Koset  $D_{16}$  dengan  $H_4 = \{1, r^2, r^4, r^6, s, sr^2, sr^4, sr^6\}$  dan  $S = \{r\}$

Pada graf  $\Gamma(D_{16}, H_4, H_4 \circ S \circ H_4)$  seperti pada Gambar 3.41  $H_4 \circ sr^2$  dan  $H_4 \circ sr^3$  saling terhubung.  $od(H_4 \circ sr^2) = od(H_4 \circ sr^3) = 1$  begitu pula  $id(H_4 \circ sr^2) = id(H_4 \circ sr^3) = 1$ . Jadi  $deg(H_4 \circ sr^2) = 2$  dan  $deg(H_4 \circ sr^3) = 2$ .

### 3.1.4.9 Graf Koset dari $D_{16}$ Terhadap $H_4 = \{1, r^2, r^4, r^6, s, sr^2, sr^4, sr^6\}$ dan $S = \{1\}$

Diketahui himpunan titik  $[D_{16}:H_4] = \{H_4 \circ sr^2, H_4 \circ sr^3\}$ . Subhimpunan  $S = \{1\}$  dengan  $H_4 \circ S \circ H_4 = \{1, r^2, s, sr^2\} = H_4$  tidak memiliki sisi berarah dari titik  $H_4 \circ sr^2$  ke  $H_4 \circ sr^3$  karena  $sr^3 \circ (sr^2)^{-1} = r^3 \notin H_4 \circ S \circ H_4$  dan tidak memiliki sisi berarah dari titik  $H_4 \circ sr^3$  ke  $H_4 \circ sr^2$  karena  $sr^2 \circ (sr^3)^{-1} = r \notin H_4 \circ S \circ H_4$ . Jadi graf koset dari  $D_{16}$  terhadap  $H_4 = \{1, r^2, r^4, r^6, s, sr^2, sr^4, sr^6\}$  dan  $S = \{1\}$  adalah

$$\Gamma(D_{16}, H_4, H_4 \circ S \circ H_4):$$

$$H_4 \circ r \bullet \quad \bullet \quad H_4 \circ sr$$

Gambar 3.42 Graf Koset  $D_{16}$  dengan  $H_4 = \{1, r^2, r^4, r^6, s, sr^2, sr^4, sr^6\}$  dan  $S = \{1\}$

Graf  $\Gamma(D_6, H_4, H_4 \circ S \circ H_4)$  merupakan digraf nol seperti pada Gambar 3.42.

### 3.1.4.10 Karakteristik Graf Koset dari Subgrup Normal $H_4 = \{1, r^2, \dots, r^{n-2}, s, sr^2, \dots, sr^{n-2}\}$

Berdasarkan subbab 3.1.5.1 hingga 3.1.5.9, diperoleh karakteristik graf koset dari subgrup normal  $H_4 = \{1, r^2, \dots, r^{n-2}, s, sr^2, \dots, sr^{n-2}\}$  pada grup dihedral seperti pada tabel berikut:

Tabel 3.4 Tabel Karakteristik Graf Koset dari Subgrup Normal  
 $H_4 = \{1, r^2, \dots, r^{n-2}, s, sr^2, \dots, sr^{n-2}\}$  pada  $D_{2n}$

$D_{2n}$	$H_4 \trianglelefteq D_{2n}$	Titik pada Graf Koset (Koset-koset)	$S$ ( $S \subseteq D_{2n}$ )	Keterhubungan	Derajat Titik
$D_8$	$\{1, r^2, s, sr^2\}$	$H_4 \circ 1 = H_4 \circ r^2 =$ $H_4 \circ s = H_4 \circ sr^2$ 1) $H_4 \circ 1 = H_4 \circ r^2 =$ $H_4 \circ s = H_4 \circ sr^2$ 2) $H_4 \circ r = H_4 \circ r^3 =$ $H_4 \circ sr = H_4 \circ sr^3$	$\{s\}$	$H_4 \circ sr^2$ tidak terhubung ke $H_4 \circ sr^3$ dan $H_4 \circ sr^3$ tidak terhubung ke $H_4 \circ sr^2$	$\deg(H_4 \circ sr^2) =$ $\deg(H_4 \circ sr^3) =$ 0
			$\{r\}$	$H_4 \circ sr^2$ terhubung ke $H_4 \circ sr^3$ dan $H_4 \circ sr^3$ terhubung ke $H_4 \circ sr^2$	$\deg(H_4 \circ sr^2) =$ $\deg(H_4 \circ sr^3) =$ 2
			$\{1\}$	$H_4 \circ sr^2$ tidak terhubung ke $H_4 \circ sr^3$ dan $H_4 \circ sr^3$ tidak terhubung ke $H_4 \circ sr^2$	$\deg(H_4 \circ sr^2) =$ $\deg(H_4 \circ sr^3) =$ 0
$D_{12}$	$\{1, r^2, r^4, s, sr^2, sr^4\}$	$H_4 \circ 1 = H_4 \circ r^2 = H_4 \circ r^4 =$ $H_4 \circ s = H_4 \circ sr^2 = H_4 \circ sr^4 =$ 1) $H_4 \circ 1 = H_4 \circ r^2 = H_4 \circ r^4 =$ $H_4 \circ s = H_4 \circ sr^2 = H_4 \circ sr^4 =$ 2) $H_4 \circ r = H_4 \circ r^3 = H_4 \circ r^5 =$ $H_4 \circ sr = H_4 \circ sr^3 = H_4 \circ sr^5$	$\{s\}$	$H_4 \circ sr^2$ tidak terhubung ke $H_4 \circ sr^3$ dan $H_4 \circ sr^3$ tidak terhubung ke $H_4 \circ sr^2$	$\deg(H_4 \circ sr^2) =$ $\deg(H_4 \circ sr^3) =$ 0
			$\{r\}$	$H_4 \circ sr^2$ terhubung ke $H_4 \circ sr^3$ dan $H_4 \circ sr^3$ terhubung ke $H_4 \circ sr^2$	$\deg(H_4 \circ sr^2) =$ $\deg(H_4 \circ sr^3) =$ 2
			$\{1\}$	$H_4 \circ sr^2$ tidak terhubung ke $H_4 \circ sr^3$ dan $H_4 \circ sr^3$ tidak terhubung ke $H_4 \circ sr^2$	$\deg(H_4 \circ sr^2) =$ $\deg(H_4 \circ sr^3) =$ 0
$D_{16}$	$\{1, r^2, r^4, r^6, s, sr^2, sr^4, sr^6\}$	$H_4 \circ 1 = \dots = H_4 \circ r^6 =$ $H_4 \circ s = \dots = H_4 \circ sr^6 =$ 1) $H_4 \circ 1 = \dots = H_4 \circ r^6 =$ $H_4 \circ s = \dots = H_4 \circ sr^6 =$ 2) $H_4 \circ r = \dots = H_4 \circ r^7 =$ $H_4 \circ sr = \dots = H_4 \circ sr^7$	$\{s\}$	$H_4 \circ sr^2$ tidak terhubung ke $H_4 \circ sr^3$ dan $H_4 \circ sr^3$ tidak terhubung ke $H_4 \circ sr^2$	$\deg(H_4 \circ sr^2) =$ $\deg(H_4 \circ sr^3) =$ 0
			$\{r\}$	$H_4 \circ sr^2$ terhubung ke $H_4 \circ sr^3$ dan $H_4 \circ sr^3$ terhubung ke $H_4 \circ sr^2$	$\deg(H_4 \circ sr^2) =$ $\deg(H_4 \circ sr^3) =$ 2
			$\{1\}$	$H_4 \circ sr^2$ tidak terhubung ke $H_4 \circ sr^3$ dan $H_4 \circ sr^3$ tidak terhubung ke $H_4 \circ sr^2$	$\deg(H_4 \circ sr^2) =$ $\deg(H_4 \circ sr^3) =$ 0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\{s\}$	$\vdots$	$\vdots$
			$\{r\}$	$\vdots$	$\vdots$
			$\{1\}$	$\vdots$	$\vdots$

$D_{2n}$	$\{1, r^2, r^4, \dots, r^{n-2}, s, sr^2, sr^4, \dots, sr^{n-2}\}$	$\begin{aligned} 1) \quad & H_4 \circ 1 = \dots = H_4 \circ r^{2i} = \\ & H_4 \circ s = \dots = H_4 \circ sr^{2i} \\ 2) \quad & H_4 \circ r = \dots = H_4 \circ r^{2i+1} = \\ & H_4 \circ sr = \dots = H_4 \circ sr^{2i+1} \end{aligned}$ <p>Untuk <math>1 \leq i \leq \frac{n}{2}</math></p>	$\{s\}$	$H_4 \circ sr^{2i}$ tidak terhubung ke $H_4 \circ sr^{2i+1}$ dan $H_4 \circ sr^{2i+1}$ tidak terhubung ke $H_4 \circ sr^{2i}$	$\deg(H_4 \circ sr^{2i}) = \deg(H_4 \circ sr^{2i+1}) = 0$
			$\{r\}$	$H_4 \circ sr^{2i}$ terhubung ke $H_4 \circ sr^{2j+1}$ dan $H_4 \circ sr^{2j+1}$ terhubung ke $H_4 \circ sr^{2i}$	$\deg(H_4 \circ sr^{2i}) = \deg(H_4 \circ sr^{2i+1}) = 2$
			$\{1\}$	$H_4 \circ sr^{2i}$ tidak terhubung ke $H_4 \circ sr^{2i+1}$ dan $H_4 \circ sr^{2i+1}$ tidak terhubung ke $H_4 \circ sr^{2i}$	$\deg(H_4 \circ sr^{2i}) = \deg(H_4 \circ sr^{2i+1}) = 0$

#### Teorema 4

Diberikan grup  $D_{2n}$  dengan  $n$  genap dan  $n \geq 4$ .  $H_4 = \{1, r^2, \dots, r^{n-2}, s, sr^2, \dots, sr^{n-2}\}$  adalah subgrup normal dan  $S$  adalah suatu subhimpunan dari  $D_{2n}$ .

- Jika  $S = \{r\}$  maka graf  $\Gamma(D_{2n}, H_4, H_4 \circ S \circ H_4)$  adalah digraf sikel berorder 2.
- Jika  $S = \{s\}$  atau  $S = \{1\}$  maka graf  $\Gamma(D_{2n}, H_4, H_4 \circ S \circ H_4)$  adalah digraf nol berorder 2.

Bukti:

Diketahui  $D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$  dan  $H_4 = \{1, r^2, \dots, r^{n-2}, s, sr^2, \dots, sr^{n-2}\}$ . Menurut teorema Lagrange, banyak koset dari  $H_4$  di  $D_{2n}$  adalah  $\frac{2n}{n} = 2$  koset yaitu  $H_4 = \{1, r^2, \dots, r^{n-2}, s, sr^2, \dots, sr^{n-2}\} = H_4 \circ sr^{2i}$  dan  $\{r, r^3, \dots, r^{n-1}, sr, sr^3, \dots, sr^{n-1}\} = H_4 \circ sr^{2j+1}$  sebarang  $i$  dan  $j$ . Sehingga  $\{H_4 \circ sr^{2i}, H_4 \circ sr^{2j+1}\}$  untuk suatu  $1 \leq i, j \leq \frac{n}{2} - 1$  merupakan himpunan titik pada graf kosetnya.

- Ambil  $S = \{r\}$  sehingga  $H_4 \circ S \circ H_4 = \{r, r^3, \dots, r^{n-1}, sr, sr^3, \dots, sr^{n-1}\}$ .

Karena  $sr^{2j+1} \circ (sr^{2i})^{-1} = r^{n-2(j-i)-1} \in H_4 \circ S \circ H_4$  maka terdapat sisi berarah dari  $H_4 \circ sr^{2i}$  ke  $H_4 \circ sr^{2j+1}$ . Sebaliknya  $sr^{2i} \circ (sr^{2j+1})^{-1} =$

$r^{n-2(i-j)+1} \in H_4 \circ S \circ H_4$  maka terdapat sisi berarah dari  $H_4 \circ sr^{2j+1}$  ke  $H_4 \circ sr^i$ . Terbukti bahwa jika  $S = \{r\}$  maka graf  $\Gamma(D_{2n}, H_4, H_4 \circ S \circ H_4)$  adalah digraf sikel berorder 2.

ii) Ambil  $S = \{s\}$  sehingga  $H_4 \circ S \circ H_4 = H_4$ . Karena  $sr^{2j+1} \circ (sr^{2i})^{-1} = r^{n-2(j-i)-1} \notin H_4$  maka tidak terdapat sisi berarah dari  $H_4 \circ sr^i$  ke  $H_4 \circ sr^{2j+1}$ . Sebaliknya karena  $sr^{2i} \circ (sr^{2j+1})^{-1} = r^{n-2(i-j)+1} \notin H_4$  maka tidak terdapat sisi berarah dari  $H_4 \circ sr^{2j+1}$  ke  $H_4 \circ sr^i$ . Begitu pula untuk  $S = \{1\}$  sehingga  $H_4 \circ S \circ H_4 = H_4$ . Jadi, jika  $S = \{s\}$  atau  $S = \{1\}$  maka graf  $\Gamma(D_{2n}, H_4, H_4 \circ S \circ H_4)$  adalah digraf nol berorder 2.

#### Akibat 4

Jika  $H_4 = \{1, r^2, \dots, r^{n-2}, s, sr^2, \dots, sr^{n-2}\}$  dan  $S = \{r\}$  maka semua titik pada graf  $\Gamma(D_{2n}, H_4, H_4 \circ S \circ H_4)$  adalah berderajat dua.

Bukti:

Berdasarkan bukti pada teorema 4 saat  $S = \{r\}$  diperoleh  $od(H_4 \circ sr^{2i}) = 1$  dan  $id(H_4 \circ sr^{2j+1}) = 1$ . Sebaliknya  $od(H_4 \circ sr^{2j+1}) = 1$  dan  $id(H_4 \circ sr^{2i}) = 1$ .

Jadi  $\deg(H_4 \circ sr^{2i}) = od(H_4 \circ sr^{2i}) + id(H_4 \circ sr^{2i}) = 1 + 1 = 2$ , begitu pula

$$\deg(H_4 \circ sr^{2j+1}) = od(H_4 \circ sr^{2j+1}) + id(H_4 \circ sr^{2j+1}) = 1 + 1 = 2.$$

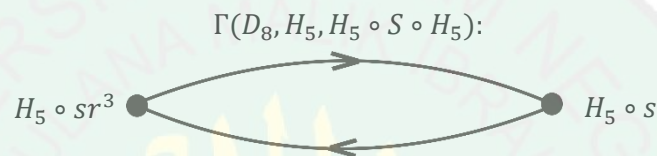
#### 3.1.5 Graf Koset dari Subgrup Normal $H_5 = \{1, r^2, \dots, r^{n-2}, sr, sr^3, \dots, sr^{n-1}\}$

Pada bagian ini dikaji sisi berarah dari koset satu ke koset lain dan sebaliknya pada graf koset dari subgrup normal  $H_5$  dan subhimpunan  $\{s\}, \{r\}$ , dan  $\{1\}$ . Selain itu juga dikaji derajat titik dari graf koset tersebut.

### 3.1.5.1 Graf Koset dari $D_8$ Terhadap $H_5 = \{1, r^2, sr, sr^3\}$ dan $S = \{s\}$

Diketahui himpunan titik  $[D_8:H_5] = \{H_5 \circ sr^3, H_5 \circ s\}$ . Subhimpunan  $S = \{s\}$  dengan  $H_5 \circ S \circ H_5 = \{r, r^3, s, sr^2\}$  diperoleh sisi berarah dari titik  $H_5 \circ sr^3$  ke  $H_5 \circ s$  karena  $s \circ (sr^3)^{-1} = r^3 \in H_5 \circ S \circ H_5$  dan sisi berarah dari titik  $H_5 \circ s$  ke  $H_5 \circ sr^3$  karena  $sr^3 \circ s^{-1} = r \in H_5 \circ S \circ H_5$ .

Jadi graf koset dari  $D_8$  terhadap  $H_5 = \{1, r^2, sr, sr^3\}$  dan  $S = \{s\}$  adalah



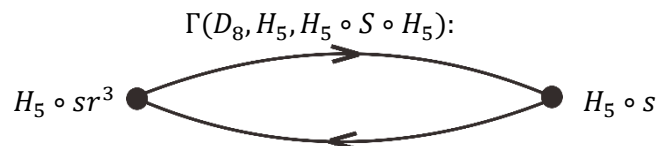
Gambar 3.43 Graf Koset  $D_8$  dengan  $H_5 = \{1, r^2, sr, sr^3\}$  dan  $S = \{s\}$

Pada graf  $\Gamma(D_8, H_5, H_5 \circ S \circ H_5)$  seperti pada Gambar 3.43  $H_5 \circ sr^3$  dan  $H_5 \circ s$  saling terhubung.  $od(H_5 \circ sr^3) = od(H_5 \circ s) = 1$  begitu pula  $id(H_5 \circ sr^3) = id(H_5 \circ s) = 1$ . Jadi  $deg(H_5 \circ sr^3) = 2$  dan  $deg(H_5 \circ s) = 2$ .

### 3.1.5.2 Graf Koset dari $D_8$ Terhadap $H_5 = \{1, r^2, sr, sr^3\}$ dan $S = \{r\}$

Diketahui himpunan titik  $[D_8:H_5] = \{H_5 \circ sr^3, H_5 \circ s\}$ . Subhimpunan  $S = \{r\}$  dengan  $H_5 \circ S \circ H_5 = \{r, r^3, s, sr^2\}$  diperoleh sisi berarah dari titik  $H_5 \circ sr^3$  ke  $H_5 \circ s$  karena  $s \circ (sr^3)^{-1} = r^3 \in H_5 \circ S \circ H_5$  dan sisi berarah dari titik  $H_5 \circ s$  ke  $H_5 \circ sr^3$  karena  $sr^3 \circ s^{-1} = r \in H_5 \circ S \circ H_5$ .

Jadi graf koset dari  $D_8$  terhadap  $H_5 = \{1, r^2, sr, sr^3\}$  dan  $S = \{r\}$  adalah



Gambar 3.44 Graf Koset  $D_8$  dengan  $H_5 = \{1, r^2, sr, sr^3\}$  dan  $S = \{r\}$

Pada graf  $\Gamma(D_8, H_5, H_5 \circ S \circ H_5)$  seperti pada Gambar 3.44  $H_5 \circ sr^3$  dan  $H_5 \circ s$  saling terhubung.  $od(H_5 \circ sr^3) = od(H_5 \circ s) = 1$  begitu pula  $id(H_5 \circ sr^3) = id(H_5 \circ s) = 1$ . Jadi  $deg(H_5 \circ sr^3) = 2$  dan  $deg(H_5 \circ s) = 2$ .

**3.1.5.3 Graf Koset dari  $D_8$  Terhadap  $H_5 = \{1, r^2, sr, sr^3\}$  dan  $S = \{1\}$**

Diketahui himpunan titik  $[D_8:H_5] = \{H_5 \circ sr^3, H_5 \circ s\}$ . Subhimpunan  $S = \{1\}$  dengan  $H_5 \circ S \circ H_5 = \{1, r^2, sr, sr^3\} = H_5$  tidak memiliki sisi berarah. Jadi graf koset dari  $D_8$  terhadap  $H_5 = \{1, r^2, sr, sr^3\}$  dan  $S = \{1\}$  adalah

$$\Gamma(D_8, H_5, H_5 \circ S \circ H_5):$$



Gambar 3.45 Graf Koset  $D_8$  dengan  $H_5 = \{1, r^2, sr, sr^3\}$  dan  $S = \{1\}$

Graf  $\Gamma(D_8, H_5, H_5 \circ S \circ H_5)$  merupakan digraf nol seperti pada Gambar 3.45.

**3.1.5.4 Graf Koset dari  $D_{12}$  Terhadap  $H_5 = \{1, r^2, r^4, sr, sr^3, sr^5\}$  dan  $S = \{s\}$**

Diketahui himpunan titik  $[D_{12}:H_5] = \{H_5 \circ sr^3, H_5 \circ s\}$ . Subhimpunan  $S = \{s\}$  dengan  $H_5 \circ S \circ H_5 = \{r, r^3, r^5, s, sr^2, sr^4\}$  diperoleh sisi berarah dari titik  $H_5 \circ sr^3$  ke  $H_5 \circ s$  karena  $s \circ (sr^3)^{-1} = r^3 \in H_5 \circ S \circ H_5$  dan sisi berarah dari titik  $H_5 \circ s$  ke  $H_5 \circ sr^3$  karena  $sr^3 \circ s^{-1} = r \in H_5 \circ S \circ H_5$ .

Jadi graf koset dari  $D_{12}$  terhadap  $H_5 = \{1, r^2, r^4, sr, sr^3, sr^5\}$  dan  $S = \{s\}$  adalah

$$\Gamma(D_{12}, H_5, H_5 \circ S \circ H_5):$$



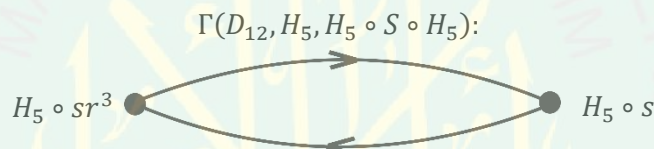
Gambar 3.46 Graf Koset  $D_{12} = \{1, r^2, r^4, sr, sr^3, sr^5\}$  dengan  $H_5$  dan  $S = \{s\}$

Pada graf  $\Gamma(D_8, H_5, H_5 \circ S \circ H_5)$  seperti pada Gambar 3.44  $H_5 \circ sr^3$  dan  $H_5 \circ s$  saling terhubung.  $od(H_5 \circ sr^3) = od(H_5 \circ s) = 1$  begitu pula  $id(H_5 \circ sr^3) = id(H_5 \circ s) = 1$ . Jadi  $deg(H_5 \circ sr^3) = 2$  dan  $deg(H_5 \circ s) = 2$ .

### 3.1.5.5 Graf Koset dari $D_{12}$ Terhadap $H_5 = \{1, r^2, r^4, sr, sr^3, sr^5\}$ dan $S = \{r\}$

Diketahui himpunan titik  $[D_{12}:H_5] = \{H_5 \circ sr^3, H_5 \circ s\}$ . Subhimpunan  $S = \{r\}$  dengan  $H_5 \circ S \circ H_5 = \{r, r^3, r^5, s, sr^2, sr^4\}$  diperoleh sisi berarah yang sama seperti graf  $\Gamma(D_{12}, H_5, H_5 \circ S \circ H_5)$  pada Gambar 3.46.

Jadi graf koset dari  $D_{12}$  terhadap  $H_5 = \{1, r^2, r^4, sr, sr^3, sr^5\}$  dan  $S = \{r\}$  adalah



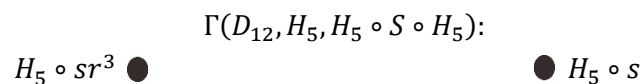
Gambar 3.47 Graf Koset  $D_{12}$  dengan  $H_5 = \{1, r^2, r^4, sr, sr^3, sr^5\}$  dan  $S = \{r\}$

Pada graf  $\Gamma(D_8, H_5, H_5 \circ S \circ H_5)$  seperti pada Gambar 3.44  $H_5 \circ sr^3$  dan  $H_5 \circ s$  saling terhubung.  $od(H_5 \circ sr^3) = od(H_5 \circ s) = 1$  begitu pula  $id(H_5 \circ sr^3) = id(H_5 \circ s) = 1$ . Jadi  $deg(H_5 \circ sr^3) = 2$  dan  $deg(H_5 \circ s) = 2$ .

### 3.1.5.6 Graf Koset dari $D_{12}$ Terhadap $H_5 = \{1, r^2, r^4, sr, sr^3, sr^5\}$ dan $S = \{1\}$

Diketahui himpunan titik  $[D_{12}:H_5] = \{H_5 \circ sr^3, H_5 \circ s\}$ . Subhimpunan  $S = \{1\}$  dengan  $H_5 \circ S \circ H_5 = \{1, r^2, r^4, sr, sr^3, sr^5\} = H_5$  tidak memiliki sisi berarah.

Jadi graf koset dari  $D_{12}$  terhadap  $H_5 = \{1, r^2, r^4, sr, sr^3, sr^4\}$  dan  $S = \{1\}$  adalah



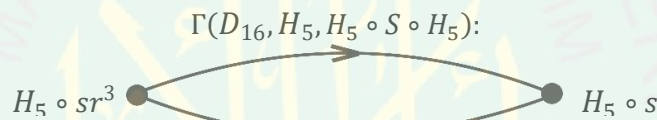
Gambar 3.48 Graf Koset  $D_{12}$  dengan  $H_5 = \{1, r^2, r^4, sr, sr^3, sr^5\}$  dan  $S = \{1\}$

Graf  $\Gamma(D_{12}, H_5, H_5 \circ S \circ H_5)$  merupakan digraf nol seperti pada Gambar 3.48.

### 3.1.5.7 Graf Koset dari $D_{16}$ Terhadap $H_5 = \{1, r^2, r^4, r^6, sr, sr^3, sr^5, sr^7\}$ dan $S = \{s\}$

Diketahui himpunan titik  $[D_{16}:H_5] = \{H_5 \circ sr^3, H_5 \circ s\}$ . Subhimpunan  $S = \{s\}$  dengan  $H_5 \circ S \circ H_5 = \{r, r^3, r^5, r^7, sr, sr^3, sr^5, sr^7\}$  diperoleh sisi berarah dari titik  $H_5 \circ sr^3$  ke  $H_5 \circ s$  karena  $s \circ (sr^3)^{-1} = r^3 \in H_5 \circ S \circ H_5$  dan sisi berarah dari titik  $H_5 \circ s$  ke  $H_5 \circ sr^3$  karena  $sr^3 \circ s^{-1} = r \in H_5 \circ S \circ H_5$ .

Jadi graf koset dari  $D_{16}$  terhadap  $H_5 = \{1, r^2, r^4, r^6, sr, sr^3, sr^5, sr^7\}$  dan  $S = \{s\}$  adalah

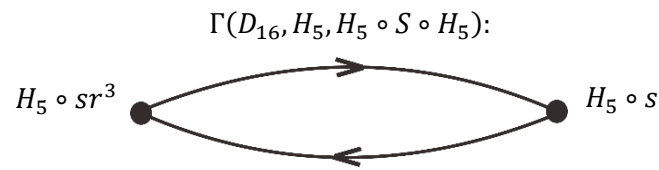


Gambar 3.49 Graf Koset  $D_{16}$  dengan  $H_5 = \{1, r^2, r^4, r^6, sr, sr^3, sr^5, sr^7\}$  dan  $S = \{s\}$

Pada graf  $\Gamma(D_{16}, H_5, H_5 \circ S \circ H_5)$  seperti pada Gambar 3.49  $H_5 \circ sr^3$  dan  $H_5 \circ s$  saling terhubung.  $od(H_5 \circ sr^3) = od(H_5 \circ s) = 1$  begitu pula  $id(H_5 \circ sr^3) = id(H_5 \circ s) = 1$ . Jadi  $deg(H_5 \circ sr^3) = 2$  dan  $deg(H_5 \circ s) = 2$ .

### 3.1.5.8 Graf Koset dari $D_{16}$ Terhadap $H_5 = \{1, r^2, r^4, r^6, sr, sr^3, sr^5, sr^7\}$ dan $S = \{r\}$

Diketahui himpunan titik  $[D_{16}:H_5] = \{H_5 \circ sr^3, H_5 \circ s\}$ . Subhimpunan  $S = \{r\}$  dengan  $H_5 \circ S \circ H_5 = \{r, r^3, r^5, r^7, sr, sr^3, sr^5, sr^7\}$  diperoleh sisi berarah yang sama seperti graf  $\Gamma(D_{16}, H_5, H_5 \circ S \circ H_5)$  pada Gambar 3.49. Jadi graf koset dari  $D_{16}$  terhadap  $H_5 = \{1, r^2, r^4, r^6, sr, sr^3, sr^5, sr^7\}$  dan  $S = \{r\}$  adalah

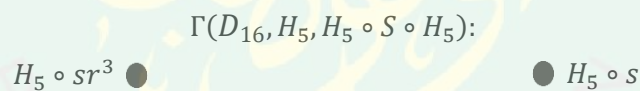


Gambar 3.50 Graf Koset  $D_{16}$  dengan  $H_5 = \{1, r^2, r^4, r^6, sr, sr^3, sr^5, sr^7\}$  dan  $S = \{r\}$

Pada graf  $\Gamma(D_{16}, H_5, H_5 \circ S \circ H_5)$  seperti pada Gambar 3.50  $H_5 \circ sr^3$  dan  $H_5 \circ s$  saling terhubung.  $od(H_5 \circ sr^3) = od(H_5 \circ s) = 1$  begitu pula  $id(H_5 \circ sr^3) = id(H_5 \circ s) = 1$ . Jadi  $deg(H_5 \circ sr^3) = 2$  dan  $deg(H_5 \circ s) = 2$ .

### 3.1.5.9 Graf Koset dari $D_{16}$ Terhadap $H_5 = \{1, r^2, r^4, r^6, sr, sr^3, sr^5, sr^7\}$ dan $S = \{1\}$

Diketahui himpunan titik  $[D_{16}: H_5] = \{H_5 \circ sr^3, H_5 \circ s\}$ . Subhimpunan  $S = \{1\}$  dengan  $H_5 \circ S \circ H_5 = \{1, r^2, r^4, r^6, sr, sr^3, sr^5, sr^7\} = H_5$  tidak memiliki sisi berarah. Jadi graf koset dari  $D_{16}$  terhadap  $H_5 = \{1, r^2, r^4, r^6, sr, sr^3, sr^5, sr^7\}$  dan  $S = \{1\}$  adalah



Gambar 3.51 Graf Koset  $D_{16}$  dengan  $H_5 = \{1, r^2, r^4, r^6, sr, sr^3, sr^5, sr^7\}$  dan  $S = \{1\}$

Graf  $\Gamma(D_{16}, H_5, H_5 \circ S \circ H_5)$  merupakan digraf nol seperti pada Gambar 3.51.

### 3.1.5.10 Karakteristik Graf Koset dari Subgrup Normal $H_5 = \{1, r^2, \dots, r^{n-2}, sr, sr^3, \dots, sr^{n-1}\}$

Berdasarkan subbab 3.1.5.1 hingga 3.1.5.9, diperoleh karakteristik graf koset dari subgrup normal  $H_5 = \{1, r^2, \dots, r^{n-2}, sr, sr^3, \dots, sr^{n-1}\}$  pada grup dihedral seperti pada tabel berikut:

Tabel 3.5 Tabel Karakteristik Graf Koset dari Subgrup Normal  
 $H_5 = \{1, r^2, \dots, r^{n-2}, sr, sr^3, \dots, sr^{n-1}\}$  pada  $D_{2n}$

$D_{2n}$	$H_5 \trianglelefteq D_{2n}$	Titik pada Graf Koset (Koset-koset)	$S$ ( $S \subseteq D_{2n}$ )	Katerhubungan	Derajat Titik
$D_8$	$\{1, r^2, sr, sr^3\}$	$H_5 \circ 1 = H_5 \circ r^2 =$ $H_5 \circ sr = H_5 \circ sr^3 =$ 1) $H_5 \circ 1 = H_5 \circ r^2 =$ $H_5 \circ sr = H_5 \circ sr^3 =$ 2) $H_5 \circ r = H_5 \circ r^3 =$ $H_5 \circ s = H_5 \circ sr^2 =$	$\{s\}$	$H_5 \circ sr^3$ terhubung ke $H_5 \circ s$ dan $H_5 \circ s$ terhubung ke $H_5 \circ sr^3$	$\deg(H_5 \circ sr^3) =$ $\deg(H_5 \circ s) =$ 2
			$\{r\}$		
			$\{1\}$	$H_5 \circ sr^3$ tidak terhubung ke $H_5 \circ s$ dan $H_5 \circ s$ tidak terhubung ke $H_5 \circ sr^3$	$\deg(H_5 \circ sr^3) =$ $\deg(H_5 \circ s) =$ 0
$D_{12}$	$\{1, r^2, r^4, sr, sr^3, sr^5\}$	$H_5 \circ 1 = H_5 \circ r^2 = H_5 \circ r^4 =$ $H_5 \circ sr = H_5 \circ sr^3 = H_5 \circ sr^5 =$ 1) $H_5 \circ 1 = H_5 \circ r^2 = H_5 \circ r^4 =$ $H_5 \circ sr = H_5 \circ sr^3 = H_5 \circ sr^5 =$ 2) $H_5 \circ r = H_5 \circ r^3 = H_5 \circ r^5 =$ $H_5 \circ s = H_5 \circ sr^2 = H_5 \circ sr^4 =$	$\{s\}$	$H_5 \circ sr^3$ terhubung ke $H_5 \circ s$ dan $H_5 \circ s$ terhubung ke $H_5 \circ sr^3$	$\deg(H_5 \circ sr^3) =$ $\deg(H_5 \circ s) =$ 2
			$\{r\}$		
			$\{1\}$	$H_5 \circ sr^3$ tidak terhubung ke $H_5 \circ s$ dan $H_5 \circ s$ tidak terhubung ke $H_5 \circ sr^3$	$\deg(H_5 \circ sr^3) =$ $\deg(H_5 \circ s) =$ 0
$D_{16}$	$\{1, r^2, r^4, r^6, sr, sr^3, sr^5, sr^7\}$	$H_5 \circ 1 = \dots = H_5 \circ r^6 =$ $H_5 \circ sr = \dots = H_5 \circ sr^7 =$ 1) $H_5 \circ 1 = \dots = H_5 \circ r^6 =$ $H_5 \circ sr = \dots = H_5 \circ sr^7 =$ 2) $H_5 \circ r = \dots = H_5 \circ r^7 =$ $H_5 \circ s = \dots = H_5 \circ sr^6 =$	$\{s\}$	$H_5 \circ sr^3$ terhubung ke $H_5 \circ s$ dan $H_5 \circ s$ terhubung ke $H_5 \circ sr^3$	$\deg(H_5 \circ sr^3) =$ $\deg(H_5 \circ s) =$ 2
			$\{r\}$		
			$\{1\}$	$H_5 \circ sr^3$ tidak terhubung ke $H_5 \circ s$ dan $H_5 \circ s$ tidak terhubung ke $H_5 \circ sr^3$	$\deg(H_5 \circ sr^3) =$ $\deg(H_5 \circ s) =$ 0
⋮	⋮	⋮	$\{s\}$	⋮	⋮
			$\{r\}$	⋮	⋮
			$\{1\}$	⋮	⋮
$D_{2n}$	$\{1, r^2, r^4, \dots, r^{n-2}, sr, sr^2, sr^4, \dots, sr^{n-2}\}$	1) $H_5 \circ 1 = \dots = H_5 \circ r^{2i} =$ $H_5 \circ sr = \dots = H_5 \circ sr^{2i+1} =$ 2) $H_5 \circ r = \dots = H_5 \circ r^{2j+1} =$ $H_5 \circ s = \dots = H_5 \circ sr^{2j} =$ Untuk $1 \leq i, j \leq \frac{n}{2}$	$\{s\}$	$H_5 \circ r^{2i}$ atau $H_5 \circ sr^{2i+1}$ terhubung ke $H_5 \circ r^{2j+1}$ atau $H_5 \circ sr^{2j}$ dan $H_5 \circ r^{2j+1}$ atau $H_5 \circ sr^{2j}$ terhubung ke $H_5 \circ r^{2i}$ atau $H_5 \circ sr^{2i+1}$	$\deg(H_5 \circ sr^3) =$ $\deg(H_5 \circ s) =$ 2
$\{r\}$					

				$H_5 \circ r^{2i}$ atau $H_5 \circ sr^{2i+1}$ tidak terhubung ke $H_5 \circ r^{2j+1}$ atau $H_5 \circ sr^{2j}$ dan $H_5 \circ r^{2j+1}$ atau $H_5 \circ sr^{2j}$ tidak terhubung ke $H_5 \circ r^{2i}$ atau $H_5 \circ sr^{2i+1}$	$\deg(H_5 \circ sr^3) =$ $\deg(H_5 \circ s) =$ 0
--	--	--	--	--	--

### Teorema 5

Diberikan grup  $D_{2n}$  dengan  $n$  genap dan  $n \geq 4$ .  $H_5 = \{1, r^2, \dots, r^{n-2}, sr, sr^3, \dots, sr^{n-1}\}$  adalah subgrup normal dan  $S$  adalah suatu subhimpunan dari  $D_{2n}$ .

- Jika  $S = \{s\}$  atau  $S = \{r\}$  maka graf  $\Gamma(D_{2n}, H_5, H_5 \circ S \circ H_5)$  adalah digraf sikel berorder 2.
- Jika  $S = \{1\}$  maka graf  $\Gamma(D_{2n}, H_5, H_5 \circ S \circ H_5)$  adalah digraf nol berorder 2.

Bukti:

Diketahui  $D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$  dan  $H_6 = \{1, r^2, \dots, r^{n-2}, sr, sr^3, \dots, sr^{n-1}\}$ . Menurut teorema Lagrange, banyak koset dari  $H_6$  di  $D_{2n}$  adalah  $\frac{2n}{n} = 2$  koset yaitu  $H_6 = \{1, r^2, \dots, r^{n-2}, sr, sr^3, \dots, sr^{n-1}\} = H_6 \circ sr^{2i+1}$  dan  $\{r, r^3, \dots, r^{n-1}, s, sr^2, \dots, sr^{n-2}\} = H_6 \circ sr^{2j}$  sebarang  $i$  dan  $j$ . Sehingga  $\{H_6 \circ sr^{2i+1}, H_6 \circ sr^{2j}\}$  untuk suatu  $1 \leq i, j \leq \frac{n}{2} - 1$  merupakan himpunan titik pada graf kosetnya.

- Ambil  $S = \{s\}$  sehingga  $H_6 \circ S \circ H_6 = \{r, r^3, \dots, r^{n-1}, s, sr^2, \dots, sr^{n-2}\}$ .

Karena  $sr^{2j} \circ (sr^{2i+1})^{-1} = r^{n-2(j-i)+1} \in H_5 \circ S \circ H_5$  maka terdapat sisi

berarah dari  $H_5 \circ sr^{2i+1}$  ke  $H_5 \circ sr^{2j}$ . Sebaliknya  $sr^{2i+1} \circ (sr^{2j})^{-1} = r^{n-2(i-j)-1} \in H_5 \circ S \circ H_5$  maka terdapat sisi berarah dari  $H_5 \circ sr^{2j}$  ke  $H_5 \circ sr^{2i+1}$ . Begitu pula  $S = \{r\}$  sehingga  $H_5 \circ S \circ H_5 = \{r, r^3, \dots, r^{n-1},$

$s, sr^2, \dots, sr^{n-2}$ . Terbukti bahwa jika  $S = \{s\}$  atau  $S = \{r\}$  maka graf  $\Gamma(D_{2n}, H_5, H_5 \circ S \circ H_5)$  adalah digraf sikel berorder 2.

ii) Ambil  $S = \{1\}$  sehingga  $H_5 \circ S \circ H_5 = H_5$ . Karena  $sr^{2j} \circ (sr^{2i+1})^{-1} = r^{n-2(j-i)+1} \notin H_5$  maka tidak terdapat sisi berarah dari  $H_5 \circ sr^{2i+1}$  ke  $H_5 \circ sr^{2j}$ . Sebaliknya karena  $sr^{2i+1} \circ (sr^{2j})^{-1} = r^{n-2(i-j)-1} \notin H_5$  maka tidak terdapat sisi berarah dari  $H_5 \circ sr^{2j}$  ke  $H_5 \circ sr^{2i+1}$ . Jadi, jika  $S = \{1\}$  maka graf  $\Gamma(D_{2n}, H_5, H_5 \circ S \circ H_5)$  adalah digraf nol berorder 2.

### Akibat 5

Graf  $\Gamma(D_{2n}, H_5, H_5 \circ S \circ H_5)$  dengan  $H_5 = \{1, r^2, \dots, r^{n-2}, sr, sr^3, \dots, sr^{n-1}\}$  dan  $S = \{s\}$  atau  $S = \{r\}$  hanya memiliki dua titik yang masing-masing berderajat dua.

Bukti:

Berdasarkan bukti pada teorema 5 saat  $S = \{s\}$  diperoleh  $od(H_5 \circ sr^{2i+1}) = 1$  dan  $id(H_5 \circ sr^{2j}) = 1$ . Sebaliknya  $od(H_5 \circ sr^{2j}) = 1$  dan  $id(H_5 \circ sr^{i+1}) = 1$ .

Jadi  $\deg(H_5 \circ sr^{i+1}) = od(H_5 \circ sr^{i+1}) + id(H_5 \circ sr^{i+1}) = 1 + 1 = 2$ , begitu pula  $\deg(H_5 \circ sr^{2j}) = od(H_5 \circ sr^{2j}) + id(H_5 \circ sr^{2j}) = 1 + 1 = 2$ .

Begitu pula saat  $S = \{r\}$  diperoleh  $\deg(H_5 \circ sr^{i+1}) = \deg(H_5 \circ sr^{2j}) = 2$ .

### 3.2 Kandungan Hikmah dalam Al-Quran

Al-Quran surat al-Hujurat/49:13 menjelaskan bahwa Allah menciptakan manusia dari seorang laki-laki dan seorang perempuan dan menjadikan manusia di muka bumi berbangsa-bangsa dan bersuku-suku supaya saling mengenal. Sesungguhnya orang yang paling mulia di sisi Allah ialah orang yang

paling takwa. Selanjutnya dalam QS. Ali-Imran/3:133-135 terdapat ciri-ciri atau intisari ajaran takwa diantaranya adalah:

1. Berinfak atau sedekah dalam keadaan lapang atau sempit
2. Mampu menahan amarah
3. Mudah memaafkan kesalahan orang lain
4. Mengingat Allah dan memohon ampunan

Semua orang memiliki kesempatan yang sama untuk menjadi orang yang paling mulia di sisi Allah. Adapun beberapa cara agar kita dapat menjadi orang yang bertakwa sesuai QS. Ali-Imran/3:133-135 antara lain:

1. Berinfak atau sedekah dalam keadaan lapang maupun sempit kepada orang yang berhak diberi nafkah. QS. al-Baqarah/2:215 menjelaskan bahwa

يَسْأَلُونَكَ مَاذَا يُنْفِقُونَ ۗ قُلْ مَا أَنْفَقْتُمْ مِنْ خَيْرٍ فَلِلْوَالِدَيْنِ وَالْأَقْرَبِينَ وَالْيَتَامَىٰ  
وَالْمَسْكِينِ وَابْنِ السَّبِيلِ ۗ وَمَا تَفَعَّلُوا مِنْ خَيْرٍ فَإِنَّ اللَّهَ بِهِ عَلِيمٌ ﴿٢١٥﴾

*Mereka bertanya tentang apa yang mereka nafkahkan. Jawablah: "Apa saja harta yang kamu nafkahkan hendaklah diberikan kepada ibu-bapak, kaum kerabat, anak-anak yatim, orang-orang miskin dan orang-orang yang sedang dalam perjalanan." Dan apa saja kebaikan yang kamu buat, maka sesungguhnya Allah Maha Mengetahuinya.*

Terkait dengan infak ini Rasulullah Saw. bersabda:

*ada malaikat yang senantiasa berdo'a setiap pagi dan sore : "Ya Allah berilah orang yang berinfak, gantinya. Dan berkata yang lain : "Ya Allah jadikanlah orang yang menahan infak, kehancuran" (HR. Bukhari).*

HR. Muslim dari Abu Dzar, Rasulullah Saw. menyatakan bahwa jika tidak mampu bersedekah dengan harta maka membaca tasbih, takbir, tahmid, tahlil, berhubungan suami-istri, dan melakukan kegiatan amar ma'ruf nahi munkar adalah sedekah.

Hadits riwayat Imam Muslim dari Abu Dzar, Rasulullah Saw. bersabda:

*"jika tidak mampu bersedekah dengan harta, maka membaca tasbih, takbir, tahmid, tahlil, berhubungan suami-istri, atau melakukan kegiatan amar ma'ruf nahi munkar adakah sedekah".*

Dalam hadits Rasulullah Saw. memberi jawaban kepada orang-orang miskin yang cemburu terhadap orang kaya yang banyak bersedekah dengan hartanya, beliau bersabda:

*"Setiap tasbih adalah sedekah, setiap takbir adalah sedekah, setiap tahmid adalah sedekah, setiap amar ma'ruf adalah sedekah, nahi munkar adalah sedekah, dan menyalurkan syahwatnya kepada istri adalah sedekah" (HR. Muslim).*

2. Mampu menahan amarah dengan berbagai macam cara salah satunya dengan berwudlu.

Imam Ahmad meriwayatkan dari Abu Dzar, ia berkata, ketika ia sedang mengairi air ke suatu kolamnya, lalu datang suatu kaum dan berkata: "Siapa di antara kalian yang berani mendekati Abu Dzar dan menghitung beberapa rambut kepalanya?" Lalu ada seseorang yang menjawab: "Aku." Maka orang itu pun mendatangi kolam itu dan memukulnya. Pada saat itu Abu Dzar sedang berdiri, lalu duduk dan kemudian berbaring. Maka ditanyakan kepadanya: "Wahai Abu Dzar, mengapa engkau duduk, kemudian berbaring?" Maka ia menjawab: "Sesungguhnya Rasulullah Saw. pernah menyampaikan kepada kami:

*"Jika salah seorang di antara kalian marah sedang pada saat itu ia dalam keadaan berdiri, maka hendaklah ia duduk. Namun jika tidak hilang juga marahnya maka hendaklah ia berbaring." (Hadits ini diriwayatkan juga oleh Abu Dawud dari Ahmad bin Hanbal).*

Imam Ahmad meriwayatkan, telah menceritakan kepada kami Ibrahim bin Khalid, telah menceritakan kepada kami Abu Wa-il Ash-Shan'ani, ia berkata, kami pernah duduk-duduk di tempat `Urwah bin Muhammad, tiba-tiba seseorang masuk menemuinya dan berkata dengan kata-kata yang

membuatnya marah, ketika hendak marah ia berdiri dan kembali kepada kami dalam keadaan sudah berwudlu. Lalu ia berkata: “Ayahku menceritakan kepadaku dari kakekku, `Athiyah Ibnu Sa’ad As-Sa’di salah seorang sahabat Rasulullah Saw. ia berkata, Rasulullah Saw. pernah bersabda:

*“Sesungguhnya marah itu dari setan dan sesungguhnya setan itu diciptakan dari api, dan api itu hanya dapat dipadamkan dengan air. Karenanya, jika salah seorang di antara kalian marah, maka hendaklah ia berwudlu.”* Demikian pula niwayat Abu Dawud.

Imam Ahmad meriwayatkan dari Said bin Mu’adz bin Arias, dari ayahnya, bahwa Rasulullah pernah bersabda:

*“Barangsiapa menahan amarah padahal ia mampu untuk menumpahkannya, maka Allah akan memanggilnya di hadapan para pemimpin makhluk, lalu Allah memberinya kebebasan untuk memilih bidadari mana yang ia sukai.”* HR. Abu Dawud, At-Tirmidzi dan Ibnu Majah. At-Tirmidzi berkata: “Hadits ini hasan gharib.”

### 3. Memaafkan kesalahan orang lain dengan berbicara dan memberi salam

*“Tidak halal apabila seorang muslim menjauhi kawannya lebih dari tiga hari. Apabila telah lewat waktu tiga hari tersebut maka berbicaralah dengannya dan beri salam. Jika ia menjawab salam maka keduanya akan mendapat pahala dan jika ia tidak membalasnya maka sungguhlah dia kembali dengan membawa dosanya, sementara orang yang memberi salah akan keluar dari dosa.”*(HR. Muslim).

Dalam kitab al-Mustadrak, al-Hakim meriwayatkan dari `Ubadah bin Ash-Shamit dari Ubay bin Ka’ab, bahwa Rasulullah Saw. bersabda:

*“Barangsiapa yang ingin dimuliakan tempat tinggalnya dan ditinggikan derajatnya, maka hendaklah ia memberi maaf kepada orang yang telah menzhaliminya, memberi orang yang tidak mau memberi kepadanya dan menyambung tali silaturahmi kepada orang yang memutuskannya.”*

Al-Hakim berkata, hadits ini shahih sesuai dengan syarat Bukhari dan Muslim, tetapi keduanya tidak mengeluarkannya. Hadits senada juga diriwayatkan oleh Ibnu Mardawaih.

4. Memohon ampun kepada Allah dengan mengerjakan shalat taubah

Ketika bertaubat, dianjurkan sekali untuk berwudlu dan shalat dua rakaat. Hal itu didasarkan pada hadits yang diriwayatkan oleh Imam Ahmad, dari `Ali ra. ia berkata: “Jika aku mendengar sebuah hadits dari Rasulullah maka Allah memberi kami manfaat dari hadits itu menurut apa yang dikehendaki-Nya. Dan jika ada orang selain Rasulullah Saw. yang memberitahu kepadaku sebuah hadits, maka aku meminta orang itu bersumpah. Jika ia bersumpah kepadaku, maka aku pun membenarkannya. Abu Bakar pernah memberitahu kepadaku sebuah hadits, sedangkan Abu Bakar adalah orang yang jujur, ia pernah mendengar Rasulullah bersabda:

*“Tidaklah seseorang berbuat suatu dosa, lalu ia berwudlu dengan membaguskan wudlunya. Berkata Mis’ar; lalu ia shalat, dan berkata Sufyan; kemudian ia shalat dua rakaat setelah itu memohon ampunan kepada Allah, melainkan Allah akan mengampuninya.”*

Demikian pula diriwayatkan oleh `Ali bin al-Madini, Al-Humaidi, Abu Bakar bin Abi Syaibah, Ahlus Sunan, Ibnu Hibban di dalam shahihnya, Al-Bazzar, dan Ad-Daruquthni melalui beberapa sumber dari ‘Utsman bin Al-Mughirah. At-Tirmidzi berkata: “Hadits tersebut hasan.”

Pada prinsipnya hadits tersebut hasan, berasal dari riwayat Amirul Mukminin Ali bin Abai Thalib, dari Khalifah Rasulullah, Abu Bakar ash-Shiddiq ra.

Keshahihan hadits tersebut di atas diperkuat oleh hadits yang diriwayatkan oleh Muslim dalam shahihnya dari Amirul Mu’minin ‘Umar bin Al-Khaththab, dari Rasulullah Saw. beliau bersabda:

*“Tidaklah salah seorang di antara kalian berwudlu, lalu ia menyempurnakan wudlunya itu, lalu ia berdoa: ‘Aku bersaksi bahwa tidak ada Ilah yang berhak untuk diibadahi melainkan Allah saja, Yang Esa, yang tiada sekutu bagi-Nya, dan aku bersaksi bahwa Muhammad adalah hamba dan Rasul-*

*Nya.’ melainkan dibukakan baginya pintu-pintu surga yang berjumlah delapan, ia dapat masuk dari pintu mana saja yang ia kehendaki.”*

Dalam Shahih Bukhari dan Shahih Muslim disebutkan sebuah hadits dari Amirul Mukminin, ‘Utsman bin ‘Affan ra. bahwa ia pernah mengajarkan wudlu Rasulullah Saw. kepada orang-orang lain dan berkata, aku pernah mendengar Rasulullah Saw. bersabda:

*“Barangsiapa berwudlu seperti wudluku ini, lalu mengerjakan shalat dua rakaat dengan khusyu’, maka akan diberikan ampunan atas dosa-dosanya yang telah lalu.”*

Hadits ini sangat kuat dari riwayat Imam yang empat, *Khulafaaur Raasyidiin*, dari *Sayyidul Awwaliin Wal Aakhiriin* dan *Rasuulu Rabbul `aalamiin*, sesuai dengan apa yang ditunjukkan oleh al-Quran, bahwa memohon ampunan atas suatu dosa adalah bermanfaat bagi orang yang telah berbuat maksiat.

Mujahid dan Abdullah bin ‘Ubaid bin ‘Umair berkata: “Mereka mengetahui bahwa siapa yang bertaubat kepada Allah, niscaya Allah akan menerima taubatnya.”

Ayat ini seperti firman-Nya dalam QS. at-Taubah/9:104 yaitu:

أَلَمْ يَعْلَمُوا أَنَّ اللَّهَ هُوَ يَقْبَلُ التَّوْبَةَ عَنْ عِبَادِهِ

*“Apakah mereka tidak mengetahui bahwa Allah akan menerima taubat dari hamba-hamba-Nya.”*

Oleh karena itu orang yang mampu mengerjakan hal-hal sebagaimana orang yang bertakwa maka orang tersebut akan memperoleh rahmat sehingga dimuliakan oleh Allah. Dalam QS. al- Hujurat/49:10 dijelaskan bahwa

إِنَّمَا الْمُؤْمِنُونَ إِخْوَةٌ فَأَصْلِحُوا بَيْنَ أَخَوَيْكُمْ وَاتَّقُوا اللَّهَ لَعَلَّكُمْ تُرْحَمُونَ

*Sesungguhnya orang-orang Mukmin adalah bersaudara. Karena itu, damaikanlah kedua saudara kalian, dan bertakwalah kalian kepada Allah supaya kalian mendapatkan rahmat.*

## BAB IV

### PENUTUP

#### 4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa graf koset dari  $D_{2n}$  terhadap subgrup normal  $H$  dan subhimpunan  $S$  jika  $H \circ S \circ H \neq H$  dan banyak kosetnya adalah 2 maka graf  $\Gamma(D_{2n}, H, H \circ S \circ H)$  adalah digraf sikel berorder 2. Jika  $H \circ S \circ H \neq H$  dengan  $H = \{1, r^d, r^{2d}, \dots, r^{n-d}\}$  untuk  $S = \{s\}$  maka graf  $\Gamma(D_{2n}, H, H \circ S \circ H)$  adalah digraf yang memuat  $d$  sikel berorder 2 sedangkan untuk  $S = \{r\}$  maka  $\Gamma(D_{2n}, H, H \circ S \circ H)$  adalah digraf yang memuat 2 sikel berorder  $d$ . Dan jika  $H \circ S \circ H = H$  maka membentuk digraf nol. Kemudian semua titik pada graf  $\Gamma(D_{2n}, H, H \circ S \circ H)$  dengan  $H \circ S \circ H \neq H$  adalah berderajat dua.

#### 4.2 Saran

Penelitian selanjutnya diharapkan mampu membahas graf koset dari subgrup normal dan subhimpunan lain pada grup dihedral dan teorema-teorema lain tentang graf koset.

## DAFTAR RUJUKAN

- Abdussakir, Azizah, N.N., dan Nofandika, F.F. 2009. *Teori Graf*. Malang: UIN-Malang Press.
- Chatrand, G., Lesniak, L., dan Zhang, P. 2016. *Graphs and Digraphs Sixth Edition*. London: CRC Press.
- Dummit, D. S., dan Foote, R. 2004. *Abstract Algebra Third Edition*. New York: John Wiley and Sons, Inc.
- Gilbert, L., dan Gilbert, J. 2009. *Elements of Modern Algebra*. Canada: Nelson Education, Ltd.
- Hungerford, T.W. 2012. *Abstract Algebra: An Introduction Third Edition*. Boston: Brooks Cole.
- Katsir, I. 2007. *Tafsir Ibnu Katsir*. Bogor: Pustaka Imam Asy. Syafi'i.
- Raishinghamia, M. dan Anggarwal, R. 1980. *Modern Algebra*. New Delhi: S. Chand & Company Ltd.
- Ray, S.S. 2013. *Graph Theory with Algorithms and its Application*. Orissa: Springer
- Schneider, C. 2001. *Groups and Graphs*. Perth: Publ. Math.
- Tarnauceanu M. 2015. Classifying Fuzzy Normal Subgroups of Finite Groups. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 12(2): 107-115.

## RIWAYAT HIDUP



Risna Zulfa Musriroh, lahir di desa Selorejo Kecamatan Selorejo Kabupaten Blitar pada tanggal 15 Januari 1995, biasa dipanggil Risna, tinggal di Jl. Sunan Kalijaga Dalam No. 17 Kec. Lowokwaru Kota Malang. Anak sulung dari 2 bersaudara dari Ahmad Zaenuri dan Siti Mudawaroh.

Pendidikan dasarnya ditempuh di SDN 02 Selorejo dan lulus pada tahun 2007, setelah itu melanjutkan ke SMPN 1 Kesamben dan lulus pada tahun 2010. Kemudian melanjutkan pendidikan ke SMAN 1 Talun Kab. Blitar lulus tahun 2013. Selanjutnya, pada tahun 2013 menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil Jurusan Matematika.

Selama menjadi mahasiswa, selain kuliah juga berperan aktif pada organisasi dalam rangka mengembangkan potensi diri. Mengikuti organisasi intra kampus antara lain yaitu HMJ (Himpunan Mahasiswa Jurusan) Matematika periode 2013/2014, Komunitas Semata (Serambi Matematika Aktif) periode 2015/2016, DEMA (Dewan Eksekutif Mahasiswa) Fakultas Sains dan Teknologi periode 2015/2016, Relawan LP2M (Lembaga Penelitian dan Pengabdian Masyarakat), dan Komunitas AMD (*About Maliki Design*). Selain itu juga aktif mengikuti organisasi ekstra kampus antara lain yaitu IKAMAHALITA (Ikatan Mahasiswa Blitar), IPPNU (Ikatan Pelajar Putri Nahdlatul Ulama) di UIN Maulana Malik Ibrahim Malang, Komunitas Menulis *Hipwee* Malang, JPI (Jejak Pengabdian Indonesia) Chapter Malang, dan Inspirator Indonesia Chapter Malang. Dan turut berpartisipasi di kegiatan masyarakat dengan mengikuti Jama'ah Diba' Nurus Syubban Kecamatan Selorejo, Ketua Pimpinan Anak Cabang IPPNU Kecamatan Selorejo periode 2016/2018, dan Wakil Ketua IPPNU Bidang Infokom Kabupaten Blitar periode 2017/2019.

Selama menempuh pendidikan tingkat dasar sampai perguruan tinggi, prestasi yang pernah diraih diantaranya Juara 1 *Muhadhoroh* Santri se-Kabupaten dan Kota Blitar pada tahun 2003, Juara Harapan 2 Olimpiade MIPA se-Kabupaten Blitar dan Malang pada tahun 2005, Juara 2 *Try Out* SMP oleh Yudhi Prestasi se-Kabupaten Blitar pada tahun 2010, Juara 2 Mendirikan Bivak Pramuka yang diadakan oleh STIT Al-Muslihun Blitar pada tahun 2010, Juara Umum *Outbond* Pramuka yang diadakan oleh STIKIP PGRI Blitar pada tahun 2010, dan Ketua Pimpinan Anak Cabang IPPNU terbaik kategori Pengembangan Organisasi se-Kabupaten Blitar pada tahun 2017. Selain itu karya tulis ilmiah selama menjadi mahasiswa diantaranya Membangun Grup Dihedral dari Permutasi, Penerapan Metode Logika *Fuzzy* Mamdani dalam Pendukung Keputusan Sistem Pengendalian Lalu Lintas di Persimpangan Kota Malang, Graf Koset dari Subgrup-subgrup Sejati pada Grup Dihedral, dan *The Degree of Vertex and Component of Coset Graphs of Normal Subgroups in Dihedral Group*. Serta artikel online *Hipwee* berjudul Selamat Hari Film Nasional!



**KEMENTERIAN AGAMA RI**  
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI**  
**MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG**  
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**  
**Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933**

**BUKTI KONSULTASI SKRIPSI**

Nama : Risna Zulfa Musriroh  
NIM : 13610013  
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika  
Judul Skripsi : Graf Koset dari Subgrup Normal pada Grup Dihedral  
Pembimbing I : H. Wahyu H. Irawan, M.Pd  
Pembimbing II : Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si

No.	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	3 Januari 2017	Revisi Bab I	1.
2.	6 Januari 2017	Revisi Penulisan Matematika	2.
3.	29 Maret 2017	Revisi Integrasi Agama	3.
4.	30 Maret 2017	ACC Kajian Agama	4.
5.	7 April 2017	ACC Bab I dan Bab II pra seminar proposal	5.
6.	29 April 2017	Revisi BAB III	6.
7.	4 Juni 2017	Revisi Sistematika Bab III	7.
8.	13 Juli 2017	Revisi Kajian Agama Bab III	8.
9.	28 Juli 2017	ACC BAB III	9.
10.	3 Agustus 2017	Konsultasi Teorema	10.
11.	24 Agustus 2017	ACC Teorema	11.
12.	29 Agustus 2017	ACC Keseluruhan	12.
13.	29 Agustus 2017	ACC Keseluruhan Agama	13.

Malang, 29 Agustus 2017

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si

NIP. 19650414 200312 1 001