

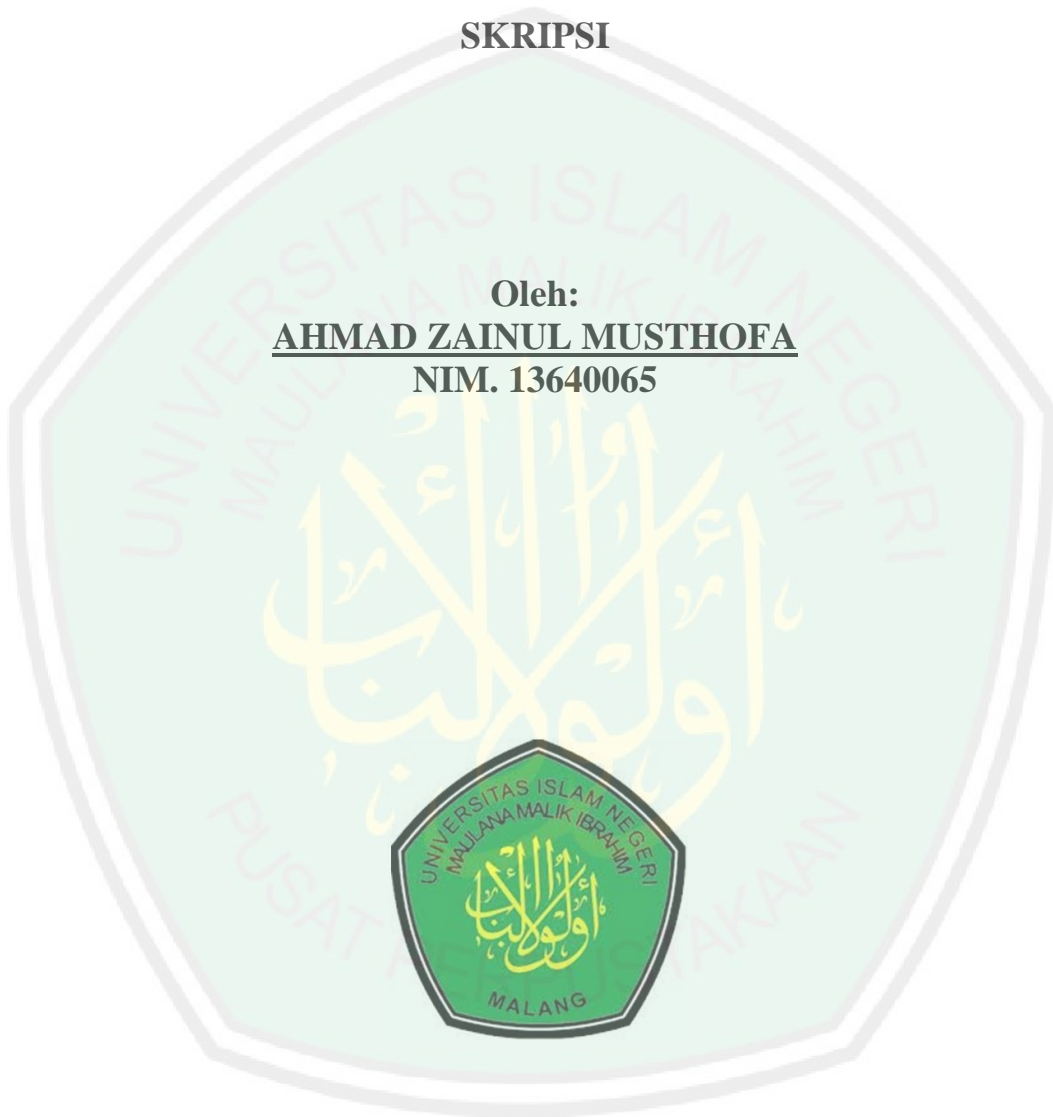
**STUDI FASE SUPERFLUIDA DARI ATOM ^3He DENGAN
PENDEKATAN TEORI BCS**

SKRIPSI

Oleh:

AHMAD ZAINUL MUSTHOFA

NIM. 13640065



**JURUSAN FISIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2017**

**STUDI FASE SUPERFLUIDA DARI ATOM ^3He DENGAN PENDEKATAN
TEORI BCS**

SKRIPSI

Diajukan Kepada:

**Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelas Sarjana Sains (S.Si)**

Oleh:

**AHMAD ZAINUL MUSTHOFA
NIM. 13640065**

**JURUSAN FISIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2017**

HALAMAN PERSETUJUAN

**STUDI FASE SUPERFLUIDA DARI ATOM ^3He DENGAN PENDEKATAN
TEORI BCS**

SKRIPSI

Oleh:
AHMAD ZAINUL MUSTHOFA
NIM. 13640065

Telah diperiksa dan disetujui untuk diuji
pada tanggal 2017

Pembimbing I,



Erika Rani, M.Si
NIP. 19810613 200604 2 002

Pembimbing II,



Erna Hastuti, M.Si
NIP. 19811119 200801 2 009

Mengetahui,
Ketua Jurusan Fisika



Drs. Abdul Basid, M.Si
NIP. 19650504 199003 1 003

HALAMAN PENGESAHAN

STUDI FASE SUPERFLUIDA DARI ATOM ^3He DENGAN PENDEKATAN TEORI BCS

SKRIPSI

Oleh:

AHMAD ZAINUL MUSTHOFA
NIM. 13640065

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal 20 Desember 2017

Penguji Utama	<u>Drs. Abdul Basid, M.Si</u> NIP. 19650504 199003 1 003	
Ketua Penguji	<u>Arista Ramadani, M.Sc</u> NIDT. 19900905 20160801 1 072	
Sekretaris Penguji	<u>Erika Rani, M.Si</u> NIP. 19810613 200604 2 002	
Anggota Penguji	<u>Erna Hastuti, M.Si</u> NIP. 19811119 200801 2 009	

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Fisika



Drs. Abdul Basid, M.Si
NIP. 19650504 199003 1 003

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Ahmad Zainul Musthofa
NIM : 13640065
Jurusan : Fisika
Fakultas : Sains dan Teknologi
Judul Penelitian : Studi Fase Superfluida pada Atom ^3He dengan Pendekatan Teori BCS

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa hasil penelitian saya ini tidak terdapat unsur-unsur penjiplakan karya penelitian atau karya ilmiah yang telah dilakukan atau dibuat oleh orang lain, kecuali yang dikutip dalam naskah dan disebutkan dalam sumber kutipan dan daftar pustaka.

Apabila ternyata hasil penelitian ini terbukti terdapat unsur-unsur penjiplakan, maka saya bersedia untuk mempertanggungjawabkan serta menerima sanksi yang telah ditetapkan.

Malang, 8 Desember 2017

Yang membuat pernyataan,



AHMAD ZAINUL MUSTHOFA

NIM. 13640065

MOTTO

***KUNCI SUKSES ITU SEDERHANA,
JANGAN GAGAL, JIKA TERLANJUR
GAGAL BANGKIT LAGI DAN LAGI***



HALAMAN PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Ucap syukur yang tiada henti saya haturkan kepada Allah Swt yang telah memberikan saya nikmat yang begitu besar baik berupa kekuatan, kemampuan, kesabaran, kesehatan, dan lain-lain.

Skripsi yang menjadi syarat untuk saya mendapatkan gelar S.Si ini saya persembahkan untuk orang-orang yang telah mengasuh saya, membimbing saya, mendidik saya, mengasahi saya dan tak henti-hentinya mendo'akan saya.

Untuk kedua orang tua saya Bapak Qomari dan Ibu Kafiyati yang tak pernah lelah mengasuh, membimbing, mendidik, dan memberikan kasih sayang. Adik saya Fathmainnul Qulub yang selalu memberikan dukungan dan mengalirkan do'anya untuk saya.

Untuk seluruh dosen Fisika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah mendidik saya, mengajarkan berbagai ilmu pengetahuan kepada saya, untuk teman-temanku Fisika angkatan 2013 yang telah memberikan kenangan indah bersama, membantu saya dalam kesulitan, menemani saya dan mensupport saya untuk berjuang di Fisika.

Untuk Kyai K. Muhammad Bidlowi Muslich selaku pengasuh Pondok Pesantren Anwarul Kuda beserta seluruh ustadz/ustadzah Pondok Pesantren Anwarul Kuda yang telah mendidik saya selama menimba ilmu di pesantren. Untuk teman-teman pengurus dan teman-teman santri Pondok Pesantren Anwarul Kuda yang telah memberikan banyak pengalaman dan pelajaran agar selalu kuat dalam menghadapi apapun. Serta untuk para kyai dan Bapak/Ibu Guru di Yayasan Madrasah

Aliyah Mazro'atul Ulum Paciran yang telah mendidik saya hingga saya mampu menempuh jenjang S-1 dan telah memberi kepercayaan besar kepada saya. Semoga Allah Swt selalu memberikan rahmat dan hidayah kepada kita semua serta memberikan manfaat dan barokah atas ilmu yang telah saya pelajari selama ini.

Aamiin,,,,,,,,,,,,,



KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Segala puji dan syukur kepada Allah Swt yang telah memberikan segala rahmat dan nikmat-Nya berupa kesehatan, kesempatan, kekuatan, keinginan, serta kesabaran, sehingga kami dapat mengerjakan skripsi yang berjudul “**Studi Fase Superfluida Atom ^3He dengan Pendekatan Teori BCS**” dengan baik. Sholawat serta salam selalu tercurah kepada Nabi Revolusi Akbar Nabi Muhammad Saw yang telah membawa kita menuju zaman yang terang benderang yaitu agama islam. Penulis menyelesaikan skripsi yang berjudul “**Studi Fase Superfluida Atom ^3He dengan Pendekatan Teori BCS**” sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Strata 1 Jurusan Fisika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang

Ucapan terima kasih yang mendalam kami sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Abdul Haris, M.Ag selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini M.Si selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Drs. Abdul Basid, M.Si selaku Ketua Jurusan Fisika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Erika Rani, M.Si selaku dosen pembimbing yang selalu memberikan bimbingan, pengarahan, saran dan motivasi dalam penulisan skripsi.
5. Erna Hastuti, M.Si selaku dosen pembimbing integrasi yang memberikan bimbingan integrasi dan motivasi dalam penulisan skripsi.

6. Seluruh dosen Fisika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah berkenan mendidik dan membimbing saya.
7. Teristimewa orang tua saya, Bapak Qomari dan Ibu Kafiyati tercinta yang telah memberikan kepercayaan untuk menuntut ilmu serta melimpahkan kasih sayang kepada saya.
8. Seluruh rekan seperjuangan Fisika angkatan 2013 yang saya banggakan.
9. Seluruh pihak yang telah membantu saya dalam penyelesaian skripsi.

Terlepas dari hal itu, saya menyadari bahwa masih ada kekurangan baik dari segi susunan kalimat maupun tata bahasa. Oleh karena itu, saya menerima segala kritik dan saran demi tersusunnya proposal skripsi ini dengan benar.

Akhir kata, saya berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat dan inspirasi bagi pembaca.

Malang, Agustus 2017

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGAJUAN	ii
HALAMAN PERSETUJUAN	iii
HALAMAN PENGESAHAN	iv
HALAMAN PERNYATAAN	v
MOTTO	vi
HALAMAN PERSEMBAHAN	vii
KATA PENGANTAR	ix
DAFTAR ISI	xi
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR LAMPIRAN	xiv
ABSTRAK	xv
ABSTRACT	xvi
المخلص	xvii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	5
1.3 Tujuan Penelitian	5
1.4 Manfaat	5
1.5 Batasan Masalah	5
BAB II SUPERFLUIDITAS ATOM HELIUM	6
2.1 Karakteristik Helium	6
2.2 Superfluida ^4He	7
2.3 Teori BEC	9
2.4 Prediksi Teori BEC	10
2.5 Teori BCS	11
2.6 Prediksi Teori BCS	12
2.7 Superfluida ^3He	14
2.7.1 Observasi Eksperimental Kondensasi Superfluida dalam ^3He	14
2.7.2 Potensi Interaksi Interatomis dalam Cairan ^3He	16
2.7.3 Fase BW	17
2.7.2 Fase ABM	18
2.8 Pandangan Islam tentang Superfluida	19
BAB III TEORI BEC DAN BCS	23
3.1 Teori BEC	23
3.1.1 Statistik Bose-Einstein	23
3.1.2 <i>Bose-Einstein Condensation</i>	27
3.2 Teori BCS	30
3.2.1 Hamiltonian BCS	33
3.2.2 Energi <i>Gap</i> BCS dan Keadaan Kuasipartikel	42
BAB IV ENERGI KUASIPARTIKEL DAN PARAMETER <i>GAP</i> BCS	50
BAB V PENUTUP	66
5.1 Kesimpulan	66
5.2 Saran	66
DAFTAR PUSTAKA	

LAMPIRAN



DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1 Transisi Fase Adan Fase B pada Superfluida ^3He	4
Gambar 2.1 Grafik Kalor Jenis ^4He sebagai Fungsi Suhu	7
Gambar 2.2 Hamburan Elektron dalam Logam dan Superkonduktor	13
Gambar 2.3 Diagram Fasa dalam Suhu Logaritmik Superfluida ^3He	15
Gambar 2.4 Energi <i>Gap</i> Keadaan BW	18
Gambar 2.5 Energi <i>Gap</i> Keadaan ABM	19
Gambar 3.1 Kulit Tipis dari Vektor Gelombang antara k_s dan $k_s+\delta k_s$	24
Gambar 4.1 Grafik Parameter <i>Gap</i> BCS dalam Koordinat Polar untuk Fase ABM.....	61
Gambar 4.2 Grafik Parameter <i>Gap</i> BCS dalam Koordinat Polar untuk Fase BW	62
Gambar 4.3 Grafik Energi Kuasipartikel dalam Koordinat Polar untuk Fase ABM	63
Gambar 4.4 Grafik Energi Kuasipartikel dalam Koordinat Polar untuk Fase BW	64
Gambar 4.5 Grafik Energi Kuasipartikel BCS (Biru) dan Energi Kinetik (Kuning) dalam Koordinat Polar untuk Fase ABM	64
Gambar 4.6 Grafik Energi Kuasipartikel BCS (Biru) dan Energi Kinetik (Kuning) dalam Koordinat Polar untuk Fase BW	65

DAFTAR LAMPIRAN

- Lampiran 1
- Lampiran 2
- Lampiran 3
- Lampiran 4



ABSTRAK

Musthofa, Ahmad Zainul. 2017. **Studi Fase Superfluida dari Atom ^3He dengan Pendekatan Teori BCS**. Skripsi. Jurusan Fisika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Erika Rani, M.Si. (II) Erna Hastuti, M.Si.

Kata Kunci : Superfluida, Kuasipartikel, Parameter *gap* BCS, Teori BCS

Superfluida adalah cairan yang memiliki viskositas nol. Cairan ini bisa diterapkan sebagai larutan kuantum pada penelitian spektroskopi, dan bisa digunakan untuk mengukur sifat gas, karena gas dalam pelarut kuantum ini memiliki derajat kebebasan rotasi yang efektif. Pada penelitian ini dilakukan studi parameter *gap* BCS dan energi kuasipartikel dari fase superfluida dari atom ^3He dengan pendekatan teori BCS. Dengan mendefinisikan fungsi gelombang BCS dan Hamiltonian BCS diperoleh Energi BCS. Energi BCS ini dimasukkan dalam kondisi batas minimum, kemudian diperoleh matriks parameter *gap* BCS 4x4. Dari matriks parameter *gap* BCS 4x4 diperoleh energi kuasipartikel dengan menggunakan persamaan nilai eigen. Hasil formalisme secara teoritik menunjukkan bahwa parameter *gap* BCS dan energi kuasipartikel memiliki dua keadaan yaitu keadaan Balain-Werthamer (BW) dan keadaan Anderson-Brinkman-Morrel (ABM). Pada kasus BW, parameter *gap* BCS selalu mengarah ke luar, dan memiliki besaran konstan. Sedangkan pada keadaan ABM, parameter *gap* BCS memiliki arah konstan di segala ruang, dan lenyap pada dua titik. Secara fisis keadaan BW berkorespondensi dengan fase-B dari superfluida atom ^3He . Sedangkan keadaan ABM berkorespondensi dengan fase-A dari superfluida atom ^3He . Dimana sifat superfluida fase-B dari atom ^3He lebih stabil dibandingkan fase-A dari atom ^3He .

ABSTRACT

Musthofa, Ahmad Zainul. 2017. **Study of Phase of Superfluid of Atom ^3He with BCS Theoretical Approach**. Ungraduate Thesis. Department of Physics Faculty of Science and Technology State Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang. Counselor: (I) Erika Rani, M.Si. (II) Erna Hastuti, M.Si.

Keywords: Superfluid, Quasiparticle, BCS gap parameter, BCS theory.

Superfluid is a liquid that has a zero viscosity. This liquid can be applied as a quantum solution in spectroscopic research, and can be used to measure the characteristic of the gas, since the gas in this quantum solvent has an effective degrees of freedom of rotation. In this research, the study of BCS gap parameter and quasiparticle energy of the superfluid phase of ^3He atom with BCS theory approach. By defining the BCS wave functions and BCS Hamiltonian obtained a BCS Energy. The BCS energy is inserted in a minimum boundary condition, then obtained a BCS parameter matrix 4×4 . From BCS gap parameter matrix 4×4 is obtained a quasiparticle energy by using eigen value equation. The theoretical formalism results show that the parameters of the BCS gap and quasiparticle energy have two states: the Balain-Werthamer state (BW) and the Anderson Brinkman Morrel (ABM) state. In the case of BW, the BCS gap parameter always points outward, and has a constant magnitude. Whereas in the ABM state, the gap parameter BCS has a constant direction in all spaces, and disappears at two points. Physically the state of BW corresponds to the B-phase of the superfluid ^3He atom. While the ABM state corresponds to the A-phase of the superfluid ^3He atom. Where is characteristic of superfluid the B-phase of ^3He atom is more stable than the A-phase of ^3He atom.

ملخص

مصطفى، أحمد زينول . ٢٠١٧. دراسة المرحلة من سويفرلويد من أتوم هلييوم-٣ بتقريب النظري BCS. بحث العلمي. قسم الفيزياء كلية العلوم والتكنولوجيا الجامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. مشرف: (١) إريكا راني الماجستير. (II) إرنا هاستوتي الماجستير.

الكلمة الرئيسية: سويفرلويد، كواسبارتيكل، معامل الثغرة BCS ، النظري BCS

سويفرلويد هو السائل الذي يحتوي على احتكاك الصفر. هذا السائل يمكن أن يستعمل كحل كوانتمي في البحث الطيفية، ويمكن استخدامه لقياس طبيعة الغاز، لأن الغاز في مسيل كوانتمي لديه درجات حرية الدوران فعالة. في هذا البحث، دراسة معامل الثغرة BCS وكواسبارتيكل من المرحلة من سويفرلويد من أتوم هلييوم-٣ بتقريب النظري BCS. بتعريف وظائف الموجة BCS و هاملتونيان BCS حصل عليها الطاقة BCS. أدرجت الطاقة BCS في الحال الحدودي الأدنى ، ثم حصل مصفوفة معامل الثغرة BCS 4×4 . من مصفوفة معامل الثغرة BCS 4×4 حصلت الطاقة كواسبارتيكل باستخدام معادلة قيمة إيجن. نتيجة التمسك بالشكل نظريا يدل أن معامل الثغرة BCS والطاقة كواسبارتيكل لها حالتين: حال بالين - ويرثامر (BW) وحال أندرسون برينكمان-موريل (ABM). في حالة BW، معامل الثغرة BCS تشير إلى الخارج دائما، ولها حجم ثابت. بينما في حالة ABM، معامل الثغرة BCS لها جهة ثابتة في جميع المساحات، ويختفي عند نقطتين. جسديا حالة BW يتوافق مع المرحلة B من سويفرلويد أتوم هلييوم-٣. بينما في حالة ABM يتوافق مع المرحلة A من سويفرلويد أتوم هلييوم-٣. أي صفة سويفرلويد هو المرحلة B من أتوم هلييوم-٣ أكثر استقرارا من المرحلة A من أتوم هلييوم-٣.

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Onnes (1913) berusaha untuk mencairkan gas helium. Fase cair dari helium berhasil dicapai, setelah helium didinginkan pada suhu 2,17 K. Helium cair ini memiliki sifat yang unik. Saat diuji berapa nilai resistivitasnya, nilai yang didapatkan adalah nol. Onnes mencoba memberikan aliran listrik pada helium cair itu. Kemudian ia mendapati bahwa arus yang mengalir tidak berkurang sama sekali meskipun telah mengalir dalam beberapa hari. Fenomena nilai resistivitas sama dengan nol ini disebut sebagai superkonduktivitas.

Selain fenomena superkonduktivitas, helium cair juga memiliki sifat unik lagi yaitu superfluida. Fase superfluida adalah fase dimana gesekan antar partikelnya tidak ada sama sekali, artinya viskositas cairan bernilai nol. Sehingga alirannya benar benar lancar. Air yang mengalir ini disinggung dalam firman Allah SWT, ayat terakhir surat al Mulk,

قُلْ أَرَأَيْتُمْ إِنْ أَصْبَحَ مَاؤُكُمْ غَوْرًا فَمَنْ يَأْتِيكُمْ بِمَاءٍ مَّاءٍ مَّعِينٍ

“Katakanlah: "Terangkanlah kepadaku jika sumber air kamu menjadi kering; Maka siapakah yang akan mendatangkan air yang mengalir bagimu?"” (QS al Mulk: 30)

Kata مَاءٍ berarti air, dimana air termasuk katagori fluida. Kata مَاءٍ disifati dengan kata مَعِينٍ, dimana kata مَعِينٍ berasal dari fiil madli lafadz مَعَنَ yang berarti mengalir dengan lancar. Kemudian kata مَعَنَ diikuti wazan فَعِيلٌ sehingga berubah menjadi مَعِينٍ. Wazan فَعِيلٌ memiliki faidah مُبْلَاغَةٌ atau faidah melebihkan. Sehingga arti kata مَعِينٍ adalah mengalir dengan sangat lancar, ada tambahan kata

sangat. Aliran air yang sangat lancar ini menggambarkan kondisi fisik dari superfluida (Suyuti, 2004)

Superfluida merupakan sebuah penemuan baru. Sehingga belum ada penjelasan teoritis mengenai fenomena tersebut. Untuk menjelaskan fenomena ini, Fritz London (1938) menyarankan adanya hubungan antara superfluida dan *Bose-Einstein condensation* (BEC).

BEC adalah kondisi dimana semua partikel bosonnya menempati level energi terendah pada suhu yang cukup rendah. Sehingga baik energi maupun kecepatan semua partikel menjadi seragam. Ketika dua benda bergerak ke arah yang sama dengan kecepatan yang sama, maka kedua benda ini tidak akan mengalami gesekan. Begitupun untuk banyak benda yang memiliki kecepatan seragam. Oleh karena itu, materi yang mengalami kondisi BEC akan berperilaku sebagai superfluida.

Einstein (1925) memprediksi fenomena BEC ini. BEC ini berhasil dikonfirmasi secara eksperimen dengan mengamati fase superfluida dari ^4He pada tahun 1938. Akan tetapi, hasil eksperimen menunjukkan bahwa nilai suhu kritis ^4He adalah 2,17 K. Sedangkan hasil perhitungan teori BEC menunjukkan bahwa nilai suhu kritis ^4He adalah 3,1 K. Suhu kritis sendiri itu adalah suhu maksimal yang memungkinkan suatu material tetap bersifat superfluida. Perbedaan ini terjadi akibat pengasumsian partikel yang terkondensasi adalah partikel boson. Sedangkan kenyataannya yang terkondensasi adalah elektron, dimana elektron adalah fermion.

Untuk mengatasi hal ini, Cooper (1956) mengusulkan bahwa pada kondisi BEC, elektron saling berikatan. Elektron saling berikatan akibat ada gaya fonon (deformasi getaran kristal). Elektron yang saling berikatan ini selanjutnya dikenal sebagai pasangan Cooper. Elektron yang saling berikatan ini memiliki spin yang terakumulasi. Untuk itu, total spinnya adalah bulat, sehingga pasangan elektron memenuhi statistik Bose-Einstein.

Berdasarkan asumsi pasangan elektron, Bardeen, Cooper, dan Schrieffer (BCS) (1957) mengeksplorasi teori BEC. Kemudian teori ini dinamakan teori BCS. Teori ini mampu menjelaskan fenomena eksperimental yang penting. Misal efek isotop:

$$T_c \propto M^{-\alpha} \quad (1.1)$$

dimana perubahan suhu transisi berhubungan dengan massa kristal ion, M . Teori BCS memprediksikan bahwa α adalah $1/2$.

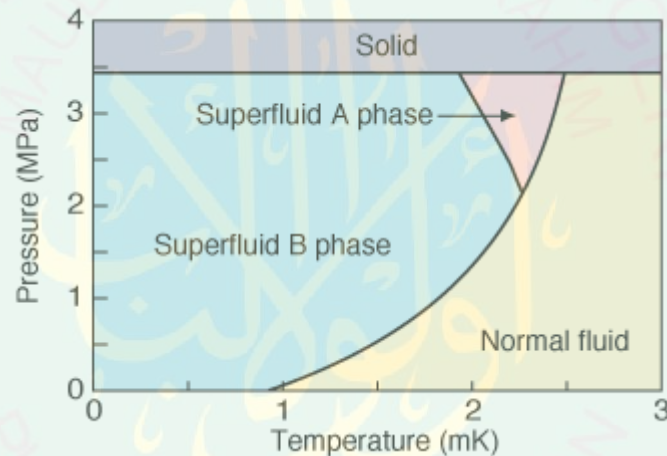
Sebenarnya teori BCS ini adalah teori penjelas fenomena superkonduktor. Akan tetapi, karena ada kemiripan sifat antara superkonduktor dan superfluida dalam hal tidak adanya hambatan (Kalau dalam superkonduktor tidak ada hambatan listrik. Sedangkan superfluida tidak ada hambatan gerak fluida). Maka diusulkan teori BCS sebagai penjelas fenomena superfluida.

Pada tahun 1972 ditemukan fase superfluida dari ^3He . Fase superfluida atom ^3He ditemukan pada suhu 2 mK. Akan tetapi ^3He adalah atom fermionik sedangkan teori BCS hanya berlaku untuk atom bosonik. Untuk mengatasi masalah ini dilakukan analogi fase superfluida dari teori BCS. Akan tetapi ^3He

yang tidak ada kesamaan fonon. Gaya Van Der Waals antar atom ^3He tidak menghasilkan ikatan yang kuat.

Legget (1975) berhasil menemukan interaksi efektif antar atom ^3He . Interaksi ini mampu mengikat dua atom ^3He . Sehingga pasangan antar atom ^3He ini bisa dianggap sebagai atom bosonik.

Pada superfluida atom ^3He ditemukan dua transisi suhu yang berbeda. Kedua transisi itu dinamai fase A dan fase B sesuai dengan gambar 1.1



Gambar 1.1 Transisi Fase A dan Fase B pada Superfluida ^3He (Legget, 1975).

Fase A berada pada tekanan 2-3,5 Mpa, dan suhu sekitar 2,1 mK, yakni di daerah yang berwarna merah muda. Sedangkan fase B berada pada tekanan di bawah 3 Mpa dan suhu di bawah 2 mK, yakni di daerah warna biru muda. Fase B memiliki sifat superfluida yang lebih stabil dibandingkan dengan fase A. Oleh karena itu, dilakukan studi mengenai parameter *gap* BCS dan energi kuasipartikel dari fase superfluida dari atom ^3He dengan pendekatan teori BCS (Annet, 2004).

1.2 Rumusan Masalah

1. Bagaimana formulasi dan interpretasi parameter *gap* BCS dari fase superfluida dari atom ^3He dengan pendekatan teori BCS?
2. Bagaimana formulasi dan interpretasi energi kuasipartikel dari fase superfluida dari atom ^3He dengan pendekatan teori BCS?

1.3 Tujuan

1. Untuk mengetahui formulasi dan interpretasi parameter *gap* BCS dari fase superfluida dari atom ^3He dengan pendekatan teori BCS.
2. Untuk mengetahui formulasi dan interpretasi energi kuasipartikel dari fase superfluida dari atom ^3He dengan pendekatan teori BCS.

1.4 Manfaat

1. Dapat mengetahui formulasi dan interpretasi parameter *gap* BCS dari fase superfluida dari atom ^3He dengan pendekatan teori BCS.
2. Dapat mengetahui formulasi dan interpretasi energi kuasipartikel dari fase superfluida dari atom ^3He dengan pendekatan teori BCS.

1.5 Batasan Masalah

1. Objek penelitian dikaji dalam ranah kuantum non relativistik.
2. Penelitian dikaji dalam suhu rendah atau mendekati nol mutlak.

BAB II SUPERFLUIDITAS ATOM HELIUM

2.1 Karakteristik Helium

Helium merupakan unsur kimia dengan nomor atom 2, nomor massa 4, biasa disimbolkan dengan He. Helium memiliki sifat hampir inert, tak berasa, tak berbau, tak berwarna, tak beracun, dan berupa gas monatomik. Titik lebur dan titik didihnya adalah yang paling rendah di antara semua unsur. Helium selalu ditemui dalam wujud gas, kecuali jika helium berada dalam suhu yang rendah dan tekanan tinggi. Helium memiliki isotop stabil, yakni ^3He . Akan tetapi ^3He sangat jarang dijumpai karena kelangkaannya (Onnes, 1913).

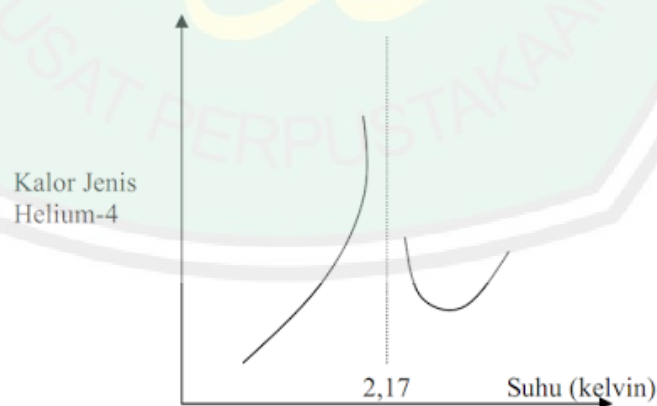
Helium merupakan unsur paling ringan dan paling banyak kedua setelah Hidrogen. Helium banyak ditemukan pada permukaan Matahari dan Yupiter. Hal ini disebabkan tingginya energi ikat inti per nukleon dari atom ^4He dibandingkan dengan tiga unsur lain setelah Helium, yakni ^6Li , ^7Li dan ^3He . Di alam semesta, helium paling banyak berwujud ^4He , yang dipercaya terbentuk semasa *Big Bang*. Beberapa helium baru juga terbentuk lewat fusi nuklir hidrogen dalam bintang semesta (Onnes, 1913).

Di permukaan Bumi, gas ini sangat jarang dijumpai. Hal ini dikarenakan massa jenisnya yang sangat ringan, dan jumlahnya sangat kecil, yakni 0,00052% dari volume atmosfer. Kebanyakan helium yang ditemukan di Bumi diperoleh dari peluruhan radioaktif atom-atom berat, misalnya torium dan uranium. Peluruhan tersebut menghasilkan partikel alfa berinti atom ^4He (Onnes, 1913).

2.2 Superfluida ^4He

Pada bulan Januari 1938, JF Allen dan AD Misener berhasil menemukan fenomena menarik dari atom ^4He . Fenomena ini terjadi pada atom ^4He pada suhu di bawah 2,17 K. Kemudian mereka menerbitkan bukti eksperimental bahwa hidrodinamika helium cair tidak klasik, helium cair bersifat seperti cairan kuantum, yakni mengalir tanpa ada berkurangnya energi (Allen, 1938).

Ketika suhu helium diturunkan, ada hal menarik yang terjadi pada kalor jenisnya. Pada saat suhunya diturunkan, kalor jenisnya bertambah besar sampai kalor jenis maksimumnya pada suhu 2,17 K. Kemudian kalor jenisnya mulai menurun saat suhu diturunkan. Jika digambarkan sebuah grafik antara suhu dan kalor jenis, didapatkan grafik yang mirip dengan huruf Yunani λ (lambda), seperti gambar 2.1. Fenomena menarik ini disebut transisi lambda. Sedangkan suhunya dinamakan suhu lambda (T_λ) (Keesom, 1930).



Gambar 2.1 Grafik Kalor Jenis ^4He sebagai Fungsi Suhu (Keesom, 1930)

Keesom memberi nama helium I pada cairan helium yang suhunya di atas T_λ dan helium II pada cairan helium yang suhunya di bawah T_λ . Di

laboratoriumnya di Leiden, Keesom menemukan bahwa helium II mampu mengalir melalui pori-pori sangat mungil pada tahun 1930 (Keesom,1930).

Pada tahun 1935 di Toronto, JO Wilhelm, AD Misener dan AR Clark mengukur viskositas helium cair dengan pendulum torsi dan ditemukan bahwa viskositasnya menurun tajam di bawah $T\lambda$. Mereka memulai sebuah studi sistematis tentang aliran cairan helium ini. Mereka mencoba mengalirkannya melalui kapiler cairan klasik yang mematuhi hukum Poiseuille. Dari percobaan ini, mereka mendapati laju alirannya proporsional meski tekanan di kapiler berbeda-beda, dan tetap proporsional dalam berbagai jari-jari kapiler. Oleh karena itu, Allen dan Misener menemukan bahwa, di bawah $T\lambda$, laju alirannya tidak hanya tinggi, tapi memang tidak terpengaruh oleh tekanan dan jari-jari kapiler yang telah mereka ganti sebanyak 50 kali. Jelas, ini menunjukkan bahwa cairan ini bukan cairan klasik (Misener, 1935).

Sesuai dengan hasil temuan JF Allen dan AD Misener, Kapitza memperkenalkan kata superfluida sebagai istilah perilaku anomali ini. Istilah ini diperkenalkan oleh Kapitza dalam jurnal Nature. Namun dalam jurnal itu, Kapitza tidak menjelaskan bahwa superfluida memiliki hubungan dengan superkonduktor. Artikelnya pada tahun 1938 tidak mengandung kuantitatif pengukuran. Dia baru melakukan pengukuran eksperimental yang luar biasa selama tahun-tahun berikutnya (Kapitza, 1938).

Penemuan superfluida ini adalah penemuan baru. Sehingga belum ada teori yang menjelaskan mengenai superfluida. Untuk itu, F. London menyarankan agar helium superfluida membentuk gelombang materi makroskopik, sebagai

konsekuensi dari *Bose-Einstein Condensation* (BEC). Superfluiditas gas dingin ini segera ditunjukkan juga (Pines, 1999).

Pada bulan Februari 1938, JF Allen dan H. Jones menerbitkan penemuan menakjubkan lainnya. Mereka telah menemukan efek termomekanis yang luar biasa. Saat Helium superfluida dipanaskan pada satu sisi media berpori atau kapiler tipis, tekanannya meningkat sehingga menghasilkan sedikit air mancur di ujung tabung yang berisi cairan. Fenomena ini kemudian dinamai efek air mancur. Efek air mancur adalah fenomena spektakuler yang tidak mungkin bisa dipahami dengan termodinamika klasik. Inilah yang memacu Fritz London untuk meneliti lebih lanjut mengenai helium cair ini (Allen, 1938).

2.3 Teori BEC

Partikel berdasarkan spinnya, bisa dikelompokkan menjadi boson dan fermion. Fermion memiliki spin pecahan yang merupakan kelipatan setengah. Sehingga keadaan statistiknya mengikuti prinsip larangan Pauli. Sedangkan boson memiliki spin bulat. Hal ini menyebabkan statistik boson mengikuti statistik Bose-Einstein. Dimana statistik Bose-Einstein tidak mengikuti prinsip larangan Pauli. Hal ini membolehkan semua boson menempati keadaan kuantum yang sama (Jones, 2002).

Pada saat didinginkan, partikel boson dari suatu material akan mengalami perpindahan keadaan kuantum. Perpindahan ini terjadi dari keadaan tinggi menuju ke keadaan rendah. Jika material itu terus didinginkan hingga suhu yang sangat rendah, mendekati nol mutlak. Maka semua partikel bosonnya akan menempati tingkat energi yang terendah. Inilah yang dinamakan sebagai kondensasi Bose-

Einstein, yakni keadaan dimana seluruh partikel bosonnya berada dalam tingkat energi terendah (Pethick, 2001).

2.4 Prediksi Teori BEC

Pada akhir tahun 1930an, setelah kemunculan prediksi Einstein tentang BEC, ditemukan fase superfluida atom ^4He . Fase superfluida atom ^4He ditemukan di bawah titik lambda, yakni sekitar 2.2 K. Karena ^4He memiliki jumlah neutron genap, yakni dua neutron. Maka ^4He termasuk atom bosonik. Sehingga superfluiditas atom ^4He bisa dihubungkan dengan teori BEC milik Bose-Einstein. Bose-Einstein memprediksi suhu kritis BEC sebesar (Griffith, 2005).

$$T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{mk_B} \left(\frac{n}{2,612} \right)^{2/3} \quad (2.1)$$

Dengan menggunakan densitas atom ^4He , $\rho \approx 145 \text{ kg/m}^3$ dan massa atomik, $m \approx 4m_p$, untuk mencari mol atom, $n = m/p$ didapatkan nilai $n = 1,05 \times 10^{34}$. Dengan menggunakan nilai $n = 1,05 \times 10^{34}$ bisa didapatkan nilai suhu kritis, T_c dengan menggunakan persamaan (2.1). Nilai suhu kritis yang didapatkan adalah 3,1 K. Akan tetapi nilai ini tidak sama dengan hasil eksperimen. Suhu kritis yang diperoleh dari eksperimen adalah 2,2 K (Annet, 2004).

Kesalahan ini disebabkan teori BEC hanya berlaku pada gas boson ideal, dan mengabaikan interaksi antar partikel. Sedangkan pada kasus atom ^4He , interaksi partikel tidak bisa diabaikan. Oleh karena itu, kasus ^4He tidak bisa dijadikan sebagai kasus yang pas untuk teori BEC.

Pada tahun 1995, eksperimen yang membuktikan kebenaran teori BEC berhasil dilakukan. Tapi keberhasilan ini tidak pada atom Helium. Keberhasilan

ini terjadi pada atom kumpulan gas alkali atom logam. Teknik untuk menjebak dan mendinginkan atom dalam medan magnetik dan *laser traps* telah dikembangkan secara bertahap dalam dua dekade terakhir. Densitas atom di dalam *trap* adalah sekitar 10^{11} - 10^{15} cm^{-3} , yang beberapa orde lebih kecil dari kepadatan atom ^4He , yaitu sekitar $n \sim 2 \times 10^{22}$ cm^{-3} . Selanjutnya massa atom alkali jauh lebih tinggi daripada untuk ^4He , terutama untuk atom alkali berat seperti ^{87}Rb . Dengan menggunakan persamaan 2.1, bisa didapatkan nilai T_c , sekitar $10^{-6} - 10^{-8}$ kali lebih kecil daripada nilai T_c milik ^4He . Sehingga didapatkan nilai suhu kritis, T_c , sekitar 10 nK – 1 μK (Annet, 2004).

2.5 Teori BCS

Teori BCS adalah tentang superkonduktor yang lebih terinci melibatkan mekanika kuantum yang dalam. Teori ini diajukan oleh Barden, Cooper dan Schrieffer pada tahun 1957, kemudian dikenal dengan nama teori BCS. Pada tahun 1972 mereka memenangkan hadiah Nobel sebagai penghargaan atas penemuan teori BCS (Waldram, 1996).

Seperti yang telah dijelaskan, teori BCS adalah teori untuk superkonduktor. Karena superkonduktor dan superfluida memiliki kesamaan dalam hal tidak adanya hambatan. Maka beberapa ilmuwan mengusulkan adanya hubungan antara superkonduktor dan superfluida. Oleh karena itu, teori BCS digunakan sebagai teori penjelas superfluida.

Dalam teori ini dikatakan bahwa semua fermion selalu dalam keadaan berpasang-pasangan. Pasangan-pasangan ini disebut pasangan Cooper. Fermion berpasangan agar mereka bisa berubah menjadi boson. Karena fermion telah

berubah menjadi boson, maka pasangan fermion bisa membentuk kondensat Bose-Einstein (Khalatnikov, 1965).

Dalam fluida biasa atom bergerak sendiri-sendiri, dan akan kehilangan sebagian energinya, akibat tumbukan dengan atom yang lainnya. Sedangkan pada superkonduktor, atom bergerak dengan kecepatan seragam dan searah. Keadaan ini bisa terjadi akibat semua atom berada pada keadaan kuantum yang sama. Oleh karena keadaan kuantum mereka semuanya sama, maka suatu atom tidak dapat terhambur tanpa mengganggu pasangannya, padahal pada suhu $T < T_c$ getaran kerangka tidak memiliki cukup energi untuk mematahkan ikatan pasangan tersebut. Akibatnya mereka tahan terhadap hamburan, jadilah bahan tersebut superkonduktor (Rickayzen, 1965).

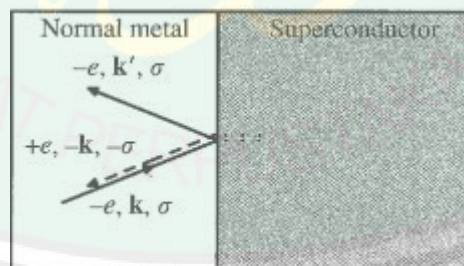
2.6 Prediksi Teori BCS

Teori BCS ini berangkat dari asumsi Cooper yang menyatakan bahwa elektron berpasangan. Teori ini memprediksi nilai energi *gap* antara fase normal dan fase superkonduktor. Energi *gap* ini adalah energi yang diperlukan partikel untuk masuk dari fase normal ke dalam material superkonduktor. Energi *gap* ini telah berhasil dikonfirmasi oleh eksperimen. Selain itu, pasangan Cooper juga telah berhasil dikonfirmasi (Annet, 2004).

Sebuah konfirmasi lebih lanjut mengenai keberadaan pasangan Cooper, dan energi *gap* BCS disediakan oleh hamburan Andreev. Anggap sebuah *interface* antara logam normal dan logam superkonduktor, seperti yang ditunjukkan pada gambar 2.2. Anggaplah sebuah elektron bergerak dalam logam dengan energi E_k . Jika energinya berada di bawah energi *gap* superkonduktor, maka elektron

tidak dapat menyebar ke superkonduktor, dan karenanya elektron tersebut terpantul sempurna pada *interface*. Ini adalah refleksi partikel normal. Tapi Andreev menyadari bahwa proses lain mungkin dilakukan. Jika energi elektron lebih besar daripada energi *gap* superkonduktor, maka elektron dapat bergabung dengan elektron lain dan membentuk pasangan Cooper, dan akan lolos dengan bebas ke superkonduktor (Annet, 2004).

Pada saat terjadi pantulan pada *interface* Andreev, ada beberapa syarat yang harus terpenuhi. Syarat tersebut antara lain: Dengan hukum kekekalan muatan, sebuah *hole* harus tertinggal. Dengan hukum kekekalan momentum, *hole* ini harus memiliki momentum yang sama persis namun berlawanan dengan elektron aslinya, $-k$. Untuk alasan yang sama, *hole* juga akan memiliki spin yang berlawanan. Oleh karena itu, didapatkan situasi seperti ditunjukkan pada gambar 2.2



Gambar 2.2 Hamburan Elektron dalam Logam dan Superkonduktor (Annet,2004)

Elektron masuk dapat direfleksikan baik sebagai elektron, dengan vektor k yang terproyeksi secara *specular*, atau dapat direfleksikan sebagai *hole* dengan spin dan momentum yang berlawanan. Dan *hole* bergerak kembali persis di sepanjang jalur elektron asal. Bukti langsung untuk kejadian hamburan semacam itu dapat ditemukan dengan menyuntikkan elektron ke *interface* seperti gambar

2.2. Katakanlah dengan *tunneling* elektron. *Hole* akan kembali dengan membawa muatan positif, dan bergerak ke arah yang berlawanan dengan elektron yang disuntikkan, jika $\Delta = 0$, atau jika elektron *tunnelling* disuntikkan dengan tegangan di atas energi *gap*, $V > \Delta$ (Annet,2004).

Sebuah fitur menarik dari pantulan Andreev adalah bahwa elektron dan *hole*-nya memiliki keadaan kuantum yang persis namun terbalik, hal ini berkorespondensi dengan,

$$\begin{aligned} -e &\rightarrow e, \\ k &\rightarrow -k, \\ \sigma &\rightarrow -\sigma, \end{aligned} \quad (2.2)$$

muatan, momentum, dan spin. Pada dasarnya ini timbul karena pasangan Cooper dalam fungsi gelombang BCS adalah pasangan waktu yang dibalikkan keadaan partikel tunggal. Implikasi yang sangat mengejutkan dari fakta ini ditunjukkan oleh PW Anderson. Dia mencatat bahwa jika kisi kristal teratur karena impuriti, maka teorema Bloch tidak lagi berlaku, dan momentum kristal k bukan bilangan kuantum yang baik. Tapi, meski dalam sistem yang sangat kacau fungsi partikel partikel tunggal masih datang dalam waktu pasang terbalik (Annet,2004).

2.7 Superfluida ^3He

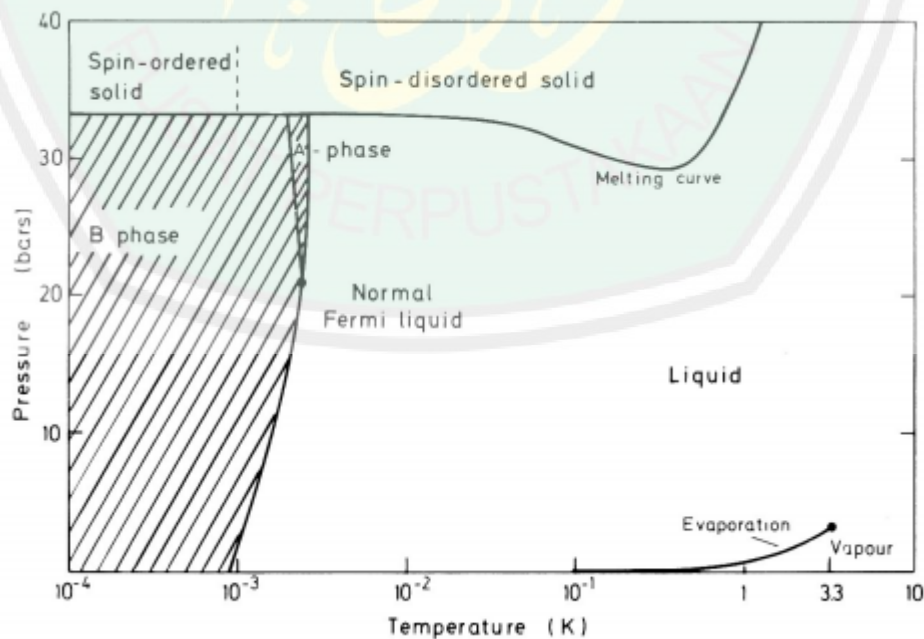
2.7.1 Observasi Eksperimental Kondensasi Superfluida dalam ^3He

Pada tahun 1972, Osheroff, Richardson dan Lee melaporkan beberapa pengamatan menarik tentang cairan ^3He pada suhu di bawah 3 mK. Mereka menempatkan helium di dalam sel Pomeranchuk yang merupakan pendinginan kompresi sel. Dalam sel itu, mereka mendinginkan ^3He hingga suhu 2 mK.

Sehingga mereka mendapatkan fase padat yang hampir bersamaan fase cair (Osheroff, 1972)

Mereka mengamati sifat cairan helium pada daerah dalam kurva V seperti yang ditunjukkan gambar 2.3. Pada daerah ini, mereka menemukan sifat superfluida. Mereka menyebut keadaan ini sebagai fase A. Pada fase A, laju perubahan tekanan dengan waktu (dP/dt) turun secara kontinu dengan faktor 1,8 pada suhu sekitar 2,65 mK (Osheroff, 1972).

Selain pada fase A, sifat superfluida juga ditemukan pada daerah di bawah fase A. Pada fase B, singularitas lain diamati pada suhu kurang dari 2 mK. Ini awalnya dikaitkan dengan spin nuklir efek dalam fase padat. Sampai akhirnya eksperimen NMR menunjukkan bahwa fase A dan B memiliki hubungan dengan efek magnetik dinamis dalam fase cair (Osheroff, 1972).



Gambar 2.3 Diagram Fasa dalam Suhu Logaritmik Superfluida ^3He (Vollhardt, 1990)

Gambar 2.3 menunjukkan bahwa fase A dan B adalah fase superfluida yang dicapai pada suhu yang sangat rendah. Dalam diagram fasa ini ada dua garis transisi. Transisi yang pertama adalah transisi pemisah antara fase normal dan fase superfluida. Transisi yang kedua adalah transisi yang memisahkan antara fase A ke B. Fase B memiliki sifat superfluida yang lebih stabil dibandingkan dengan fase A.

2.7.2 Potensi Interaksi Interatomis dalam Cairan ^3He

Tak lama setelah teori BCS dikembangkan, dan berhasil diterapkan pada logam superkonduktor. Teori ini dicoba untuk diterapkan ke atom fermionik. Dalam hal ini, atom fermionik yang dimaksud adalah atom ^3He . Hal pertama yang diperhatikan tentang ^3He adalah bahwa atom-atom itu tidak mungkin berpasangan dalam keadaan gelombang- s (momentum sudut nol). Hal ini dikarenakan tolakan yang keras memastikan bahwa fungsi gelombang menghilang untuk jarak interatomik kecil (Legget, 2002).

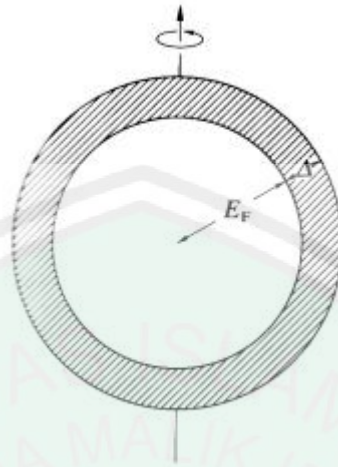
Salah satu yang paling awal dilakukan oleh Brueckner (1960), menyatakan bahwa keadaan $l = 2$ dalam ^3He dapat membentuk kondensat pada suhu kurang dari 0,07 K. Kemudian, Anderson dkk. (1961), meramalkan bahwa keadaan $l = 1$ dalam ^3He dapat membentuk kondensat pada suhu kurang dari 0,02 K. Sudah jelas suhu ultra rendah perlu dicapai untuk mengamati kondensasi dalam ^3He .

2.7.3 Fase BW

Balian dan Werthamer menunjukkan bahwa dalam interaksi lemah, keadaan yang mungkin hanya ada satu keadaan, yaitu keadaan BW. Keadaan ini adalah yang menggambarkan fase B superfluida ^3He . Fase BW digambarkan isotropik. Isotropik adalah keadaan yang tampak sama meski dilihat dari berbagai sudut pandang. Balian dan Werthamer menunjukkan bahwa pasangan Cooper kasus BCS yang terbentuk tidak pada *ground state*, tapi pada $l = 1$. Dalam hal ini adalah kasus gelombang-p. Keadaan dasar adalah superposisi dari ketiga spin S_z (1, 0 dan -1). Fase BW memiliki beberapa poin penting (Balian, 1963):

1. Spektrum partikel tunggal dan energi *gap* adalah isotropik (seperti kasus *singlet* BCS).
2. Total momentum angular dan spin (S dan L) sama dengan 1.
3. Suseptibilitas spinnya adalah berhingga pada suhu nol.

Keadaan BW ini memiliki energi *gap*, Δ yang isotropik seperti gambar 2.4. Karena isotropinya, jelas bahwa keadaan BW cukup banyak memiliki kesamaan dengan keadaan BCS. Sehingga tidak mungkin membedakan antara dua keadaan tersebut hanya dengan bantuan data termodinamik (Balian, 1963).

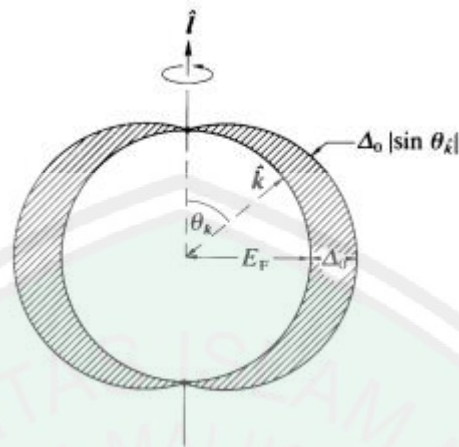


Gambar 2.4 Energi *Gap* Keadaan BW (Balian, 1963).

2.7.4 Fase ABM

Selain fase BW, jenis lain dari keadaan dasar yang muncul dalam cairan superfluida ^3He adalah fase Anderson, Brinkman, Morel (ABM). Anderson dan Morel (1961) berhipotesis bahwa pasangan Cooper bisa terbentuk dari atom yang memiliki spin yang sama pada $l=1$. Sehingga pasangan Cooper $^3\text{He-A}$ hanya terdiri dari keadaan $|\uparrow\uparrow\rangle$ dan $|\downarrow\downarrow\rangle$. Keadaan ABM ini menggambarkan fase superfluida $^3\text{He-A}$.

Fase ini memiliki sifat berbeda dengan $^3\text{He-B}$, yang susceptibilitas magnetiknya sama dengan cairan normal. Ini adalah indikasi yang jelas bahwa pada fase ini memiliki spin $S_z = 0$. Ini menyiratkan bahwa sumbu anisotropi bagian spin dari Fungsi gelombang pasangan Cooper, disebut \mathbf{d} , memiliki arah tetap sama pada setiap pasangan. (Lebih tepatnya, \mathbf{d} adalah arahnya sepanjang keadaan yang spin total pasangan Cooper adalah nol: $\mathbf{d} \cdot \mathbf{S} = 0$). ABM sangat anisotropik karena adanya energi *gap* yang memiliki dua simpul seperti gambar 2.5 (Anderson, 1961).



Gambar 2.5 Energi *Gap* Keadaan ABM (Aderson, 1961).

2.8 Pandangan Islam tentang Superfluida

Superfluida merupakan cairan yang memiliki viskositas nol. Sehingga cairan ini benar benar-benar encer. Superfluida pertama kali ditemukan pada tahun 1938. Penemunya adalah seorang peneliti Sovyet, Pyotr L. Kapitsa. Akan tetapi fenomena superfluida ini belum ada teori yang menjelaskannya. Kemudian Fritz London mengusulkan *Bose Einstein Condensation* (BEC) sebagai teori penjelas superfluida (Kapitsa, 1938).

BEC adalah keadaan dimana seluruh partikel boson berada dalam tingkat energi terendahnya atau terkondensasi. Kondisi BEC ini memiliki suhu kritis, yakni suhu maksimum yang dimiliki suatu bahan untuk tetap berperilaku sebagai superfluida. Akan tetapi suhu ini sangat rendah. Kapitsa (1938) menyatakan bahwa suhu kritis ^4He adalah 2,17 K. Suhu ini sangat rendah karena sudah mendekati suhu nol mutlak. Pada suhu di bawah 2,17 K, semua partikel elektronnya menempati tingkat energi terendah. Superfluida menempatkan dirinya pada keadaan yang sangat rendah agar bisa menjadi fluida yang istimewa. Hal ini sesuai dengan Hadits Nabi,

قَالَ رَسُولُ اللَّهِ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ مَنْ تَوَاضَعَ رَفَعَهُ اللَّهُ (رَوَاهُ ابْنُ مَجَّهٍ)

“Rasulullah SAW bersabda: barang siapa yang merendahkan hatinya maka Allah akan mengangkatnya” (diriwayatkan oleh Imam Ibnu Majjah)

Menurut Ma'shum (2010) kata تَوَاضَعَ mengikuti wazan تَفَاعَلَ dan berasal dari kata وَضَعَ yang artinya meletakkan. Meletakkan berarti menempatkan sesuatu pada tempat yang rendah. Dalam hal ini, helium menempatkan semua partikel bosonnya pada tingkat energi terendah. Hal ini menjadikan helium berubah fase dari fase normal menjadi fase superfluida. Allah mengangkat derajat atom ${}^4\text{He}$ dengan menjadikannya sebagai fluida super. ${}^4\text{He}$ yang sudah menjadi superfluida tentu bukan barang yang mudah ditemui di pasaran, dan bukan barang yang murah lagi.

Bose (1910) menyatakan bahwa partikel yang terkondensasi adalah boson (partikel yang memiliki spin bulat). Sedangkan di dalam atom terdapat elektron, dimana elektron adalah partikel fermion (partikel yang memiliki spin setengah). Karena itulah Cooper mengusulkan adanya pasangan elektron, dengan tujuan elektron yang berpasangan ini bisa menjadi boson. Karena elektron yang berpasangan, kedua spinnya akan dijumlahkan. Sehingga spin setengah dijumlahkan sehingga menjadi spin bulat. Di sinilah elektron bisa berpasangan. Pasangan elektron ini dikenal sebagai pasangan Cooper, sesuai nama penemunya. Pasangan elektron ini sesuai dengan firman Allah SWT,

سُبْحَانَ الَّذِي خَلَقَ الْأَزْوَاجَ كُلَّهَا مِمَّا تُنْبِتُ الْأَرْضُ وَمِنْ أَنْفُسِهِمْ وَمِمَّا لَا يَعْلَمُونَ

“Maha Suci Tuhan yang telah menciptakan pasangan-pasangan semuanya, baik dari apa yang ditumbuhkan oleh bumi dan dari diri mereka maupun dari apa yang tidak mereka ketahui”. (Q.S. Yasin: 36)

Mahasuci Allah Yang Mahamulia. Mahasuci Allah Yang Maha agung. Mahasuci Allah yang telah menciptakan aneka ragam pepohonan, buah-buahan, biji-bijian, dan manusia; pria dan wanita, serta semua makhluk. Juga bermacam benda yang tidak diketahui oleh manusia. Berhubung hanya Allah semata yang telah menciptakan itu semua maka hanya Allah yang berhak untuk disembah dan tidak disekutukan dengan sesuatu apapun (Al-Qarni, 2008).

Hal yang menarik dari ayat ini adalah nomor surat dan ayatnya sama yakni 36. Yang lebih menarik lagi adalah pemilihan bilangan 36 pada ayat ini. Dimana 36 adalah bilangan dua digit yang memiliki pasangan faktor bilangan bulat terbanyak. Jumlah pasangan faktornya sebanyak 5 pasang, yakni 1 dengan 36, 2 dengan 18, 3 dengan 12, 4 dengan 9, dan 6 dengan 6. Ini menunjukkan bahwa angka 36 muncul dari beberapa pasangan angka. Dari nomor ayat dan suratnya sudah mengisyaratkan tentang penciptaan pasangan.

Sementara ulama membatasi makna kata **أَزْوَاجٌ** yang berarti pasangan pada ayat ini, hanya pada makhluk hidup saja. Tim penulis tafsir Al Muntakhab misalnya menulis bahwa: “kata **مِنْ** dalam ayat ini berfungsi sebagai penjelas. Yakni bahwa Allah telah menciptakan pejantan dan betina pada semua makhluk ciptaan-Nya, baik berupa tumbuh-tumbuhan, hewan, manusia dan makhluk hidup lainnya yang tak kasat mata dan belum diketahui manusia” (Shihab, 2003).

Allah SWT menciptakan segala sesuatu itu berpasang-pasang, mulai materi yang kasat mata hingga yang tidak kasat mata. Dalam ayat tersebut, sesuatu yang kasat mata dicontohkan dengan **مِمَّا تُنْبِتُ الْأَرْضُ** yakni tumbuh-

tumbuhan yang ada di bumi dan مِنْ أَنْفُسِهِمْ yakni manusia. Sedangkan sesuatu yang tidak kasat mata disebutkan dengan istilah مِمَّا لَا يَعْزَمُونَ.

Dalam ranah sains sesuatu yang tidak kasat mata itu jumlahnya banyak sekali. Misalnya bakteri, virus, atom hingga elektron. Dalam superfluida ada yang namanya pasangan Cooper, yakni pasangan elektron. Dan pasangan Cooper ini termasuk katagori pasangan yang tidak kasat mata. Semua itu berkat kemajuan teknologi.

Giancoli (2001) menyatakan bahwa umumnya elektron berinteraksi saling tolak-menolak, sebagai konsekuensi gaya Coluomb. Akan tetapi dalam superfluida, elektron berpasangan dengan elektron lain. Hal ini merupakan sesuatu yang ajaib. Fenomena ajaib ini sesuai dengan permulaan ayat di atas. Ayat tersebut dimulai dengan kata سُبْحَانَ. Dimana ayat yang dimulai dengan kata سُبْحَانَ selalu menunjukkan suatu keajaiban di balik peristiwa yang diceritakan ayat سُبْحَانَ.

Pasangan elektron ini muncul akibat adanya gaya fonon (deformasi getaran kristal). Fonon adalah paket energi akibat getaran kisi kristal bahan. Elektron tersebut akan memunculkan distorsi terhadap kerangka kristal sehingga menyebabkan adanya daerah tarikan. Tarikan ini dalam superfluida dapat mengalahkan gaya tolak-menolak antar elektron, sehingga dengan pertukaran fonon antara dua elektron akan terbentuk pasangan Cooper. Oleh karena kecepatan dan energinya sama, elektron tidak bisa terhambur dan menghamburkan pasangannya. Sehingga pasangan elektron ini tahan terhadap hamburan, karena itulah mereka dinamakan superfluida (Khomskii, 2010).

BAB III TEORI BEC DAN BCS

3.1 Teori BEC

3.1.1 Statistik Bose-Einstein

Boson adalah partikel yang memiliki spin bulat. Partikel boson terbebas dari larangan Pauli. Oleh karena itu, semua partikel boson bisa menempati keadaan kuantum yang sama persis. Adapun keadaan statistik boson itu mengikuti keadaan statistik Bose-Einstein. Jumlah keadaan yang mungkin untuk kulit s , W_s adalah,

$$W_s = \frac{(N_s + M_s - 1)!}{N_s! (M_s - 1)!} \quad (3.1)$$

Dimana N_s adalah jumlah partikel boson, dan M_s adalah ruang momentum yang mungkin ditempati boson.

Partikel boson ini diasumsikan menempati kotak potensial tak hingga yang memiliki ukuran sisi L_x , L_y dan L_z . Dengan menggunakan persamaan Schrodinger,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi = E \psi \quad (3.2)$$

didapatkan fungsi gelombang partikel dalam kotak sebagai fungsi eksponensial, $\psi(r)$,

$$\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{ik \cdot r} \quad (3.3)$$

Dimana V adalah volume total dan k adalah ruang momentum. Dan didapatkan juga energi partikelnya, ϵ_k ,

$$\epsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (3.4)$$

Dimana \hbar adalah konstanta Planck, m adalah massa partikel. Vektor gelombang yang dibolehkan adalah

$$\mathbf{k} = \left(\frac{2\pi n_x}{L_x}, \frac{2\pi n_y}{L_y}, \frac{2\pi n_z}{L_z} \right). \quad (3.5)$$

Dimana L_x , L_y , dan L_z adalah panjang masing-masing sisi dari volume. volume infinitesimal $d^3k = dk_x dk_y dk_z$ dari ruang momentum- k memiliki keadaan kuantum

$$\frac{V}{(2\pi)^3} d^3k. \quad (3.6)$$

Oleh karena itu, keadaan kuantum suatu partikel bisa dibagi ke dalam jumlah kulit bola tipis, seperti yang ditunjukkan oleh gambar 3.1.



Gambar 3.1 Kulit Tipis dari Vektor Gelombang antara k_s dan $k_s + \delta k_s$ (Annet, 2004)

dengan menggunakan persamaan (3.6) didapatkan ruang momentum dengan radius k_s dan ketebalan δk_s yang bisa memuat

$$M_s = 4\pi k_s^2 \delta k_s \frac{V}{(2\pi)^3} \quad (3.7)$$

keadaan suatu partikel. Sehingga jumlah keadaan yang mungkin antara energi ϵ_s dan $\epsilon_s + \delta \epsilon_s$ adalah

$$\begin{aligned}
 M_s &= \frac{V m^{3/2} \epsilon^{1/2}}{\sqrt{2\pi^2 \hbar^3}} \delta \epsilon_s \\
 &= V g(\epsilon_s) \delta \epsilon_s.
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Dimana $g(\epsilon_s)$ adalah rapat keadaan yang mungkin. Nilainya adalah

$$g(\epsilon_s) = \frac{m^{3/2}}{\sqrt{2\pi^2 \hbar^3}} \epsilon_s^{-1/2}. \tag{3.9}$$

Dari mekanika statistik dapat diperoleh entropi total dari gas $S = k_B \ln W$, dimana k_B adalah konstanta Boltzmann dan W adalah jumlah keadaan mikro yang mungkin terjadi dengan energi total E .

Keadaan mikrostatistik total yang mungkin adalah hasil perkalian dari seluruh keadaan yang mungkin dalam volume tersebut

$$W = \prod_s W_s = \prod_s \frac{(N_s + M_s - 1)!}{N_s! (M_s - 1)!}. \tag{3.10}$$

Kemudian entropi gas bisa ditulis menggunakan aproksimasi Stirling. Yaitu, $\ln N! \sim N \ln N! - \ln N$

$$S = k_B \ln W. \tag{3.11}$$

Dimana k_B adalah konstanta Boltzman. Kemudian pers. (3.10) disubstitusi ke pers.

(3.11)

$$\begin{aligned}
 S &= k_b \ln \left(\prod_s \frac{(N_s + M_s - 1)!}{N_s! (M_s - 1)!} \right) \\
 &= k_b \sum_s [\ln(N_s + M_s - 1)! - \ln(N_s)! - \ln(M_s - 1)!] \\
 &\approx k_b \sum_s [(N_s + M_s) \ln(N_s + M_s) - N_s \ln(N_s) - M_s \ln(M_s)].
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Pada suhu setimbang, entropi maksimum diselesaikan menggunakan persamaan

$$\frac{\partial S}{\partial N_s} - k_b \beta \frac{\partial U}{\partial N_s} + k_b \beta \mu \frac{\partial N}{\partial N_s} = 0. \quad (3.13)$$

Dimana $k_b \beta$ dan $k_b \beta \mu$ adalah konstanta pengali Lagrange, $\beta = 1/k_b T$, μ adalah potensial kimia dan T adalah suhu. Potensial kimia adalah ukuran stabilitas kimia yang dapat digunakan untuk memprediksi perubahan fase dan reaksi kimia. Untuk mendapatkan solusi persamaan (3.13), diturunkan satu per satu. Suku pertama,

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial N_s} &= \frac{\partial (k_b \sum_s [(N_s + M_s) \ln(N_s + M_s) - N_s \ln(N_s) - M_s \ln(M_s)])}{\partial N_s} \\ &= k_b \left[\frac{\partial \sum_s (N_s + M_s)}{\partial N_s} \ln(N_s + M_s) + \frac{\partial \sum_s \ln(N_s + M_s)}{\partial N_s} (N_s + M_s) - \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial \sum_s N_s}{\partial N_s} \ln N_s - \frac{\partial \sum_s \ln N_s}{\partial N_s} N_s \right] \\ &= k_b \left[\ln(N_s + M_s) + \frac{(N_s + M_s)}{(N_s + M_s)} - \ln(N_s) - \frac{N_s}{N_s} \right] \\ &= k_b [\ln(N_s + M_s) - \ln(N_s)]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Suku kedua

$$\frac{\partial U}{\partial N_s} = \frac{\partial (\sum_s \epsilon_s N_s)}{\partial N_s} = \epsilon_s. \quad (3.15)$$

Suku ketiga

$$\frac{\partial N}{\partial N_s} = \frac{\partial (\sum_s N_s)}{\partial N_s} = 1. \quad (3.16)$$

Kemudian pers. (3.14), (3.15) dan (3.16) disubstitusi ke pers. (3.13). Sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned} k_b [\ln(N_s + M_s) - \ln(N_s)] - k_b \beta \epsilon_s + k_b \beta \mu &= 0 \\ \ln\left(\frac{N_s + M_s}{N_s}\right) &= \beta(\epsilon_s - \mu) \\ \frac{N_s + M_s}{N_s} &= e^{\beta(\epsilon_s - \mu)}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Kemudian diperoleh fungsi distribusi Bose-Einstein,

$$F_{BE}(\epsilon) = \frac{N_s}{M_s} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_s - \mu)} - 1}. \quad (3.18)$$

Fungsi distribusi ini bisa memberikan banyak informasi fisik tentang keadaan partikel boson. Keadaan fisik itu bisa berupa jumlah total partikel, energi partikel dan lain-lain.

3.1.2 Bose Einstein Condensation (BEC)

Menggunakan fungsi distribusi Bose, jumlah partikel gas boson bisa didapatkan dengan mengalikan fungsi distribusi Bose Einstein dengan jumlah keadaan kuantumnya, \sum_k

$$\begin{aligned} N &= \sum_k F_{BE}(\epsilon) \\ &= \sum_k \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} - 1}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Dalam batas termodinamik, $V \rightarrow \infty$, maka nilai k yang mungkin bisa menjadi kontinyu. Oleh karena itu, bentuk sigma dari persamaan (3.19) berubah menjadi bentuk integral

$$\sum_k \rightarrow \int \frac{V}{(2\pi)^3} d^3k. \quad (3.20)$$

Maka persamaan (3.19) menjadi

$$N = \frac{V}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} - 1} d^3k. \quad (3.21)$$

Dan kerapatan partikel menjadi

$$n = \frac{N}{V} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} - 1} d^3k \quad (3.22)$$

atau dalam istilah rapat keadaan per satuan volum $g(\epsilon)$

$$n = \int_0^\infty \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1} g(\epsilon) d\epsilon. \quad (3.23)$$

Persamaan (3.23) mendefinisikan densitas partikel $n(T, \mu)$ sebagai fungsi suhu dan potensial kimia. Selanjutnya dimisalkan $z = e^{\beta\mu}$ dan $x = \beta\epsilon$ maka

$$\begin{aligned}
 n &= \int_0^\infty \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1} g(\epsilon) d\epsilon \\
 &= \int_0^\infty \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1} \frac{m^{3/2} \epsilon^{1/2}}{\sqrt{2\pi^2 \hbar^3}} d\epsilon \\
 &= \int_0^\infty \frac{1}{e^{xz} - 1} \frac{m^{3/2}}{\sqrt{2\pi^2 \hbar^3}} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{1/2} \frac{dx}{\beta} \\
 &= \frac{(m/\beta)^{3/2}}{\sqrt{2\pi^2 \hbar^3}} \int_0^\infty \frac{e^{-xz}}{1 - e^{-xz}} (x)^{1/2} dx.
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Dengan menggunakan deret Mac Laurin,

$$\frac{e^{-xz}}{1 - e^{-xz}} = \sum_{p=1}^\infty z^p e^{-px}, \tag{3.25}$$

persamaan (3.24) berubah menjadi

$$\begin{aligned}
 n &= \frac{(m/\beta)^{3/2}}{\sqrt{2\pi^2 \hbar^3}} \int_0^\infty \sum_{p=1}^\infty z^p e^{-px} (x)^{1/2} dx \\
 &= \frac{(m/\beta)^{3/2}}{\sqrt{2\pi^2 \hbar^3}} \sum_{p=1}^\infty z^p \int_0^\infty e^{-px} x^{1/2} dx.
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Untuk menghitung integral $\int_0^\infty e^{-px} x^{1/2} dx$, digunakan fungsi gamma, dengan cara memisalkan $y = px$

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty e^{-px} x^{1/2} dx &= \int_0^\infty e^{-y} \left(\frac{y}{p}\right)^{1/2} \frac{dy}{p} \\
 &= \frac{1}{p^{3/2}} \int_0^\infty e^{-y} y^{1/2} dy \\
 &= \frac{1}{p^{3/2}} \Gamma(3/2) \\
 &= \frac{1}{p^{3/2}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Sehingga persamaan (3.26) menjadi

$$n = \frac{(m/\beta)^{3/2}}{\sqrt{2\pi^2 \hbar^3}} \sum_{p=1}^\infty \frac{z^p}{p^{3/2}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{mk_B T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{z^p}{p^{3/2}} \\
&= \left(\frac{mk_B T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} g_{3/2}(z).
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Dimana $g_{3/2}(z)$ dikenal sebagai fungsi zeta Reinmann

$$g_{3/2}(z) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{z^p}{p^{3/2}}. \tag{3.29}$$

Untuk kondisi BEC, nilai potesial kimia adalah nol, maka $z = e^{\beta\mu} = e^0 = 1$. Maka

$$g_{3/2}(1) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1^p}{p^{3/2}} = \zeta\left(\frac{3}{2}\right) = 2,612. \tag{3.30}$$

Sehingga

$$n = 2,612 \left(\frac{mk_B T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}. \tag{3.31}$$

Pada kondisi BEC, suhunya adalah suhu kritis. Sehingga dari pers. (3.31) diperoleh persamaan suhu kritisnya,

$$\begin{aligned}
n &= 2,612 \left(\frac{mk_B T_c}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \\
\frac{n}{2,612} &= \left(\frac{mk_B T_c}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \\
\frac{mk_B T_c}{2\pi\hbar^2} &= \left(\frac{n}{2,612}\right)^{2/3} \\
T_c &= \frac{2\pi\hbar^2}{mk_B} \left(\frac{n}{2,612}\right)^{2/3}.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Dimana T_c adalah suhu BEC atau dikenal sebagai suhu kritis. Suhu kritis ini adalah suhu maksimum yang dimiliki suatu bahan untuk tetap berperilaku sebagai superfluida.

Suhu kritis BEC ini diujikan pada fase superfluida dari atom ${}^4\text{He}$. Dimana massa jenis ${}^4\text{He}$ adalah $0,15 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, dan massa atom relatifnya adalah $4(1,67 \times 10^{-27} \text{ kg})$. Nilai molnya dapat diperoleh dengan $n = \rho/Mr$, $n = 0,15 \times 10^3 / 4(1,67 \times 10^{-27}) = 2,2 \times 10^{28} \text{ mol}$. Kemudian T_c dihitung menggunakan persamaan (3.32),

$$T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{mk_B} \left(\frac{n}{2,612} \right)^{2/3}$$

$$T_c = \frac{2\pi(1,05 \times 10^{-34})^2}{4(1,67 \times 10^{-27})(1,38 \times 10^{-23})} \left(\frac{2,2 \times 10^{28}}{2,612} \right)^{2/3}$$

$$T_c = 3,1 \text{ K.} \quad (3.33)$$

Suhu kritis ${}^4\text{He}$ dari hasil perhitungan diperoleh 3,1 K. Sedangkan hasil eksperimen diperoleh 2,17 K. Kesalahan ini terjadi, karena persamaan (3.32) hanya berlaku untuk gas boson ideal. Sedangkan pada ${}^4\text{He}$ interaksi antar partikelnya tidak bisa diabaikan. Sehingga diperlukan perbaikan pada masalah interaksinya.

3.2 Teori BCS

Keberhasilan BEC dalam prediksi kondensasi BE tentunya adalah suatu prestasi besar, terutama dalam memprediksi nilai suhu kritis BEC. Namun prediksi ini hanya berlaku untuk gas boson ideal. Kemudian Cooper mengusulkan adanya ikatan antar elektron pada saat kondisi BEC. Ikatan antar elektron ini dinamakan pasangan Cooper.

Secara matematis, pasangan Cooper ini digambarkan dengan operator kreasi, P_k^+ dan operator annihilasi, P_k ,

$$P_k^+ \equiv c_{k\uparrow}^+ c_{-k\downarrow}^+$$

$$P_k \equiv c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow}. \quad (3.34)$$

Dimana $c_{k\uparrow}^+$ adalah operator kreasi untuk elektron yang memiliki spin *up*, $c_{-k\downarrow}^+$ adalah operator kreasi untuk elektron yang memiliki spin *down*, $c_{k\uparrow}$ adalah operator annihilasi untuk elektron yang memiliki spin *up* $c_{-k\downarrow}$ adalah operator annihilasi untuk elektron yang memiliki spin *down*.

Akan tetapi, operator pada persamaan (3.34) tidak memenuhi hubungan komutasi secara umum,

$$\begin{aligned} [P_k, P_k^+] &= c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow} c_{k\uparrow}^+ c_{-k\downarrow}^+ - c_{k\uparrow}^+ c_{-k\downarrow}^+ c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow} \\ &= c_{-k\downarrow} (1 - c_{k\uparrow}^+ c_{k\uparrow}) c_{-k\downarrow}^+ - c_{k\uparrow}^+ c_{-k\downarrow}^+ c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow} \\ &= (1 - c_{-k\downarrow}^+ c_{-k\downarrow}) (1 - c_{k\uparrow}^+ c_{k\uparrow}) - c_{k\uparrow}^+ c_{-k\downarrow}^+ c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow} \\ &= 1 - c_{-k\downarrow}^+ c_{-k\downarrow} - c_{k\uparrow}^+ c_{k\uparrow} + c_{-k\downarrow}^+ c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow}^+ c_{k\uparrow} - c_{-k\downarrow}^+ c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow}^+ c_{k\uparrow} \\ &= 1 - c_{-k\downarrow}^+ c_{-k\downarrow} - c_{k\uparrow}^+ c_{k\uparrow} \\ &= 1 - n_{-k\downarrow} - n_{k\uparrow} \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$[P_k, P_k^+] \neq 1.$$

Begitu juga untuk hubungan komutasi berikut,

$$P_k^+ P_k^+ = c_{k\uparrow}^+ c_{-k\downarrow}^+ c_{k\uparrow}^+ c_{-k\downarrow}^+ = 0$$

$$(P_k^+)^2 = 0$$

$$[P_k^+, P_k^+] = c_{k\uparrow}^+ c_{-k\downarrow}^+ c_{k\uparrow}^+ c_{-k\downarrow}^+ - c_{k\uparrow}^+ c_{-k\downarrow}^+ c_{k\uparrow}^+ c_{-k\downarrow}^+ = 0. \quad (3.36)$$

Fungsi gelombang BCS untuk banyak partikel didefinisikan sebagai berikut (Annet, 2004),

$$|\Psi_{BCS}\rangle = A e^{\sum_k \alpha_k P_k^+} |0\rangle$$

$$|\Psi_{BCS}\rangle = A e^{\alpha_1 P_1^+ + \alpha_2 P_2^+ + \alpha_3 P_3^+ + \dots} |0\rangle$$

$$|\Psi_{BCS}\rangle = A e^{\alpha_1 P_1^+} e^{\alpha_2 P_2^+} e^{\alpha_3 P_3^+} \dots |0\rangle$$

$$|\Psi_{BCS}\rangle = A \prod_k \exp(\alpha_k P_k^+) |0\rangle. \quad (3.37)$$

Dimana A adalah konstanta. Bilangan kompleks, α_k adalah parameter yang bisa digunakan untuk meminimalkan energi total. Kondisi vakum, $|0\rangle$ adalah keadaan dimana semua pasangan elektron berada di bawah permukaan Fermi. Kemudian bentuk eksponen ini diekspansi menggunakan deret Mac Laurint. Sehingga diperoleh bentuk sebagai berikut,

$$|\Psi_{BCS}\rangle = A \prod_k (1 + \alpha_k P_k^+) |0\rangle \quad (3.38)$$

Normalisasi pers. (3.38) dinyatakan dengan,

$$\begin{aligned} 1 &= A^2 \langle 0 | (1 + \alpha_k^* P_k) (1 + \alpha_k P_k^+) | 0 \rangle \\ &= A^2 [\langle 0 | 0 \rangle + \langle 0 | \alpha_k^* P_k | 0 \rangle + \langle 0 | \alpha_k P_k^+ | 0 \rangle + \langle 0 | \alpha_k^* P_k \alpha_k P_k^+ | 0 \rangle] \\ &= A^2 [1 + |\alpha_k|^2 \langle 0 | P_k P_k^+ | 0 \rangle] \\ &= A^2 [1 + |\alpha_k|^2] \\ A^2 &= \frac{1}{1 + |\alpha_k|^2} \\ A &= \frac{1}{\sqrt{1 + |\alpha_k|^2}}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Sehingga

$$\begin{aligned} |\Psi_{BCS}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{1 + |\alpha_k|^2}} \prod_k (1 + \alpha_k P_k^+) |0\rangle \\ &= \prod_k \left(\frac{1}{\sqrt{1 + |\alpha_k|^2}} + \frac{\alpha_k}{\sqrt{1 + |\alpha_k|^2}} P_k^+ \right) |0\rangle \\ &= \prod_k (u_k^* + v_k^* P_k^+) |0\rangle. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Fungsi gelombang tidak memiliki definisi jumlah partikel, N. Oleh karena itu, fungsi gelombang merupakan superposisi dari keadaan vakum $|0\rangle$. Dan fungsi gelombang adalah vakum ditambah 2,4,6 ... elektron. Dimana

$$u_k^* = \frac{1}{\sqrt{1+|\alpha_k|^2}} \quad (3.41)$$

$$v_k^* = \frac{\alpha_k}{\sqrt{1+|\alpha_k|^2}} \quad (3.42)$$

dan

$$\begin{aligned} |u_k|^2 + |v_k|^2 &= u_k u_k^* + v_k v_k^* \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+|\alpha_k|^2}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{1+|\alpha_k|^2}} \right) + \left(\frac{\alpha_k^*}{\sqrt{1+|\alpha_k|^2}} \right) \left(\frac{\alpha_k}{\sqrt{1+|\alpha_k|^2}} \right) \\ &= \frac{1+|\alpha_k|^2}{1+|\alpha_k|^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

sehingga

$$|u_k|^2 + |v_k|^2 = 1. \quad (3.43)$$

3.2.1 Hamiltonian BCS

Setelah mendapatkan fungsi gelombang BCS. Selanjutnya menentukan parameter u_k dan v_k untuk meminimalkan energi.

Hamiltonian merupakan penjumlahan antara energi kinetik, potensial dan inetraksi. Dalam hal ini potensial BCS adalah nol. Dengan menggunakan aproksimasi BCS, didapatkan bentuk hamiltonian yang relevan, (Annet, 2004)

$$H = \sum_{k,\sigma} \epsilon_k c_{k\sigma}^+ c_{k\sigma} - |g_{eff}|^2 \sum_{k,k'} c_{k_1\sigma_1}^+ c_{k_2\sigma_2}^+ c_{k'_1\sigma_1} c_{k'_2\sigma_2}. \quad (3.44)$$

Dimana ϵ_k adalah energi kinetik partikel, dan $|g_{eff}|^2$ adalah ineteraksi antar partikel.

Diasumsikan bahwa elektron yang berpasangan memiliki momentum berkebalikan $k_1 = -k_2$ dan spin yang berlawanan $\sigma_1 = -\sigma_2$. Untuk itu pers.

(3.44) berubah menjadi,

$$\begin{aligned}
H &= \sum_{k,\sigma} \epsilon_k c_{k\sigma}^+ c_{k\sigma} - |g_{eff}|^2 \sum_{k,k'} c_{k\uparrow}^+ c_{-k\downarrow}^+ c_{k'\uparrow} c_{-k'\downarrow} \\
&= \sum_k \epsilon_k (c_{k\uparrow}^+ c_{k\uparrow} + c_{k\downarrow}^+ c_{k\downarrow}) - |g_{eff}|^2 \sum_{k,k'} c_{k\uparrow}^+ c_{-k\downarrow}^+ c_{k'\uparrow} c_{-k'\downarrow}. \quad (3.44)
\end{aligned}$$

Pers. (3.45) dioperasikan ke pers. (3.40)

$$\begin{aligned}
E &= \langle \Psi_{BCS} | H | \Psi_{BCS} \rangle \\
E &= \left\langle \Psi_{BCS} \left| \sum_k \epsilon_k (c_{k\uparrow}^+ c_{k\uparrow} + c_{k\downarrow}^+ c_{k\downarrow}) - |g_{eff}|^2 \sum_{k,k'} c_{k\uparrow}^+ c_{-k\downarrow}^+ c_{k'\uparrow} c_{-k'\downarrow} \right| \Psi_{BCS} \right\rangle \\
E &= \sum_k \epsilon_k (\langle \Psi_{BCS} | c_{k\uparrow}^+ c_{k\uparrow} | \Psi_{BCS} \rangle + \langle \Psi_{BCS} | c_{k\downarrow}^+ c_{k\downarrow} | \Psi_{BCS} \rangle) \\
&\quad - |g_{eff}|^2 \sum_{k,k'} \langle \Psi_{BCS} | c_{k\uparrow}^+ c_{-k\downarrow}^+ c_{k'\uparrow} c_{-k'\downarrow} | \Psi_{BCS} \rangle. \quad (3.46)
\end{aligned}$$

Untuk menghitung energi, dihitung satu per satu tiap sukunya. Suku pertama

$$\begin{aligned}
\langle n_{k\uparrow} \rangle &= \langle \Psi_{BCS} | c_{k\uparrow}^+ c_{k\uparrow} | \Psi_{BCS} \rangle \\
&= \langle 0 | (u_k + v_k c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow}) c_{k\uparrow}^+ c_{k\uparrow} (u_k^* + v_k^* c_{k\uparrow}^+ c_{-k\downarrow}^+) | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | u_k u_k^* c_{k\uparrow}^+ c_{k\uparrow} | 0 \rangle + \langle 0 | u_k v_k^* c_{k\uparrow}^+ c_{k\uparrow} c_{k\uparrow}^+ c_{-k\downarrow}^+ | 0 \rangle \\
&\quad + \langle 0 | v_k u_k^* c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow} c_{k\uparrow}^+ c_{k\uparrow} | 0 \rangle + \langle 0 | v_k v_k^* c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow} c_{k\uparrow}^+ c_{k\uparrow} c_{k\uparrow}^+ c_{-k\downarrow}^+ | 0 \rangle \\
&= |v_k|^2 \langle 0 | c_{-k\downarrow} c_{-k\downarrow}^+ c_{k\uparrow} c_{k\uparrow}^+ c_{k\uparrow} c_{k\uparrow}^+ | 0 \rangle \\
&= |v_k|^2. \quad (3.47)
\end{aligned}$$

Suku kedua

$$\begin{aligned}
\langle n_{-k\downarrow} \rangle &= \langle \Psi_{BCS} | c_{-k\downarrow}^+ c_{-k\downarrow} | \Psi_{BCS} \rangle \\
&= \langle 0 | (u_k + v_k c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow}) c_{-k\downarrow}^+ c_{-k\downarrow} (u_k^* + v_k^* c_{k\uparrow}^+ c_{-k\downarrow}^+) | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | u_k u_k^* c_{k\uparrow}^+ c_{k\uparrow} | 0 \rangle + \langle 0 | u_k v_k^* c_{k\downarrow}^+ c_{k\downarrow} c_{k\downarrow}^+ c_{-k\downarrow}^+ | 0 \rangle \\
&\quad + \langle 0 | v_k u_k^* c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow} c_{k\downarrow}^+ c_{k\downarrow} | 0 \rangle + \langle 0 | v_k v_k^* c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow} c_{-k\downarrow}^+ c_{-k\downarrow} c_{k\downarrow}^+ c_{-k\downarrow}^+ | 0 \rangle \\
&= |v_k|^2 \langle 0 | c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow} c_{-k\downarrow}^+ c_{-k\downarrow} c_{k\downarrow}^+ c_{-k\downarrow}^+ | 0 \rangle \\
&= |v_k|^2. \quad (3.48)
\end{aligned}$$

Suku ketiga

$$\begin{aligned}\langle \Psi_{BCS} | c_{k\uparrow}^+ c_{-k\downarrow}^+ c_{-k'\downarrow} c_{k'\uparrow} | \Psi_{BCS} \rangle &= \langle \Psi_{BCS} | P_k^+ P_{k'} | \Psi_{BCS} \rangle \\ &= \langle 0 | \Pi_q (u_q + v_q P_q) P_k^+ P_{k'} \Pi_{q'} (u_{q'}^* + v_{q'}^* P_{q'}^+) | 0 \rangle.\end{aligned}$$

Keadaan momentum sudut partikel sebelum terhambur adalah $q' = k'$ dan $q = k$.

$$\begin{aligned}\langle \Psi_{BCS} | P_k^+ P_{k'} | \Psi_{BCS} \rangle &= \langle 0 | (u_q + v_q P_q) P_k^+ P_{k'} (u_{q'}^* + v_{q'}^* P_{q'}^+) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | (u_k + v_k P_k) P_k^+ P_{k'} (u_{k'}^* + v_{k'}^* P_{k'}^+) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | v_k v_{k'}^* | 0 \rangle \\ &= v_k v_{k'}^*.\end{aligned}\tag{3.49}$$

Setelah terhambur keadaan momentum partikel menjadi $q' = k$ dan $q = k'$

$$\begin{aligned}\langle \Psi_{BCS} | P_k^+ P_{k'} | \Psi_{BCS} \rangle &= \langle 0 | (u_q + v_q P_q) P_k^+ P_{k'} (u_{q'}^* + v_{q'}^* P_{q'}^+) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | (u_{k'} + v_{k'} P_{k'}) P_k^+ P_{k'} (u_k^* + v_k^* P_k^+) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | (u_{k'} + v_{k'} P_{k'}) P_{k'} P_k^+ (u_k^* + v_k^* P_k^+) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | u_{k'} u_k^* | 0 \rangle \\ &= u_{k'} u_k^*.\end{aligned}\tag{3.50}$$

$\langle c_{k\uparrow}^+ c_{-k\downarrow}^+ c_{-k'\downarrow} c_{k'\uparrow} \rangle$ adalah perkalian hasil pengoperasian operator sebelum dan sesudah hamburan. Maka didapatkan

$$\langle c_{k\uparrow}^+ c_{-k\downarrow}^+ c_{-k'\downarrow} c_{k'\uparrow} \rangle = v_k v_{k'}^* u_{k'} u_k^*.\tag{3.51}$$

Oleh karena itu, dengan mensubstitusikan persamaan (3.47), (3.48) dan (3.51) ke persamaan (3.46) didapatkan energi total,

$$E = 2 \sum_k \epsilon_k |v_k|^2 - |g_{eff}|^2 \sum_{k,k'} v_k v_{k'}^* u_{k'} u_k^*.\tag{3.52}$$

Dengan menggunakan ketetapan normalisasi $|v_k|^2 + |u_k|^2 = 1$. Bentuk energi total bisa ditulis menjadi,

$$E = \sum_k \epsilon_k (|v_k|^2 - |u_k|^2 + 1) - |g_{eff}|^2 \sum_{k,k'} v_k v_{k'}^* u_{k'} u_k^*.\tag{3.53}$$

Dimana jumlah elektronnya adalah

$$N = \sum_k (|v_k|^2 - |u_k|^2 + 1). \quad (3.54)$$

Dengan menggunakan metode pengali Lagrange. Kondisi minimum untuk energi total adalah,

$$0 = \frac{\partial E}{\partial u_k^*} + \mu \frac{\partial N}{\partial u_k^*} + E_k u_k \quad (3.55)$$

$$0 = \frac{\partial E}{\partial v_k^*} + \mu \frac{\partial N}{\partial v_k^*} + E_k v_k. \quad (3.56)$$

Untuk mendapatkan hasilnya, diturunkan satu per satu. Turunan energi terhadap

u_k^* ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial u_k^*} &= \frac{\partial}{\partial u_k^*} \left(\sum_k \epsilon_k (|v_k|^2 - |u_k|^2 + 1) - |g_{eff}|^2 \sum_k v_k v_k^* u_k u_k^* \right) \\ &= -\epsilon_k u_k - |g_{eff}|^2 \sum_k v_k v_k^* u_k \\ &= -\epsilon_k u_k - \Delta v_k. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Turunan N terhadap u_k^*

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial u_k^*} &= \frac{\partial}{\partial u_k^*} (\sum_k (|v_k|^2 - |u_k|^2 + 1)) \\ &= -u_k. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Turunan E terhadap v_k^*

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial v_k^*} &= \frac{\partial}{\partial v_k^*} \left(\sum_k \epsilon_k (|v_k|^2 - |u_k|^2 + 1) - |g_{eff}|^2 \sum_k v_k v_k^* u_k u_k^* \right) \\ &= \epsilon_k v_k - |g_{eff}|^2 \sum_k v_k u_k^* u_k \\ &= \epsilon_k v_k - \Delta^* u_k. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Turunan N terhadap v_k^*

$$\frac{\partial N}{\partial v_k^*} = \frac{\partial}{\partial v_k^*} (\sum_k (|v_k|^2 - |u_k|^2 + 1))$$

$$= v_k. \quad (3.60)$$

Kemudian didefinisikan parameter *gap* BCS,

$$\Delta \equiv |g_{eff}|^2 \sum_k u_k v_k^* \quad (3.61)$$

$$\Delta^* \equiv |g_{eff}|^2 \sum_k v_k u_k^*. \quad (3.62)$$

Parameter *gap* BCS adalah selisih energi antara fase normal dan fase superfluida. Kemudian persamaan (3.57), (3.58), (3.59) dan (3.60) disubstitusi ke persamaan (3.55) dan (3.56), sehingga diperoleh solusi linier untuk energi minimum,

$$E_k u_k = (\epsilon_k - \mu) u_k + \Delta v_k \quad (3.63)$$

$$E_k v_k = -(\epsilon_k - \mu) v_k + \Delta^* u_k. \quad (3.64)$$

Untuk menentukan parameter *gap*, Δ , kedua persamaan (3.63) dan (3.64) diubah ke dalam bentuk matriks,

$$\begin{pmatrix} (\epsilon_k - \mu) & \Delta \\ \Delta^* & -(\epsilon_k - \mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} = E_k \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix}. \quad (3.65)$$

Dalam pers (3.65), jelas bahwa (u_k, v_k) adalah vektor eigen dari dua buah matriks. Dan E_k adalah nilai eigennya. Nilai eigen dihitung dengan rumus $|A - E_k I| = 0$. Sehingga,

$$\begin{aligned} 0 &= \left| \begin{pmatrix} (\epsilon_k - \mu) & \Delta \\ \Delta^* & -(\epsilon_k - \mu) \end{pmatrix} - E_k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{pmatrix} (\epsilon_k - \mu - E_k) & \Delta \\ \Delta^* & -(\epsilon_k - \mu + E_k) \end{pmatrix} \right| \\ &= -(\epsilon_k - \mu - E_k)(\epsilon_k - \mu + E_k) - \Delta \Delta^* \\ &= -((\epsilon_k - \mu)^2 - E_k^2) - |\Delta|^2 \end{aligned}$$

didapatkan nilai eigen

$$E_k = \sqrt{(\epsilon_k - \mu)^2 + |\Delta|^2}. \quad (3.67)$$

Kemudian dicari solusi dari vektor eigen (u_k, v_k) dengan cara memanipulasi persamaan (3.63)

$$(\epsilon_k - \mu)u_k + \Delta v_k = E_k u_k$$

$$v_k = \frac{(E_k - (\epsilon_k - \mu))u_k}{\Delta}. \quad (3.68)$$

Kemudian dinormalisasi,

$$\begin{aligned} 1 &= (u_k^* \quad v_k^*) \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} \\ &= \left(u_k^* \quad \frac{(E_k - (\epsilon_k - \mu))u_k^*}{\Delta^*} \right) \begin{pmatrix} u_k \\ \frac{(E_k - (\epsilon_k - \mu))u_k}{\Delta} \end{pmatrix} \\ &= |u_k|^2 + \frac{(E_k - (\epsilon_k - \mu))^2 |u_k|^2}{|\Delta|^2} \\ &= |u_k|^2 \left(1 + \frac{(E_k - (\epsilon_k - \mu))^2}{|\Delta|^2} \right) \\ &= |u_k|^2 \left(1 + \frac{(E_k - (\epsilon_k - \mu))^2}{E_k^2 - (\epsilon_k - \mu)^2} \right) \\ &= |u_k|^2 \left(1 + \frac{(E_k - (\epsilon_k - \mu))^2}{(E_k - (\epsilon_k - \mu))(E_k + (\epsilon_k - \mu))} \right) \\ &= |u_k|^2 \left(1 + \frac{(E_k - (\epsilon_k - \mu))}{(E_k + (\epsilon_k - \mu))} \right) \\ &= |u_k|^2 \left(\frac{(E_k + (\epsilon_k - \mu)) + (E_k - (\epsilon_k - \mu))}{(E_k + (\epsilon_k - \mu))} \right) \\ &= |u_k|^2 \left(\frac{2E_k}{(E_k + (\epsilon_k - \mu))} \right) \end{aligned}$$

$$|u_k|^2 = \left(\frac{(E_k + (\epsilon_k - \mu))}{2E_k} \right)$$

didapatkan solusi

$$|u_k|^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{(\epsilon_k - \mu)}{E_k} \right). \quad (3.68)$$

Dengan menggunakan cara yang sama untuk mendapatkan $|v_k|^2$

$$-(\epsilon_k - \mu)v_k + \Delta^* u_k = E_k v_k$$

$$u_k = \left(\frac{E_k + (\epsilon_k - \mu)}{\Delta^*} \right) v_k. \quad (3.69)$$

Kemudian dinormalisasi,

$$\begin{aligned} 1 &= \begin{pmatrix} u_k^* & v_k^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} \\ &= \left(\left(\frac{E_k + (\epsilon_k - \mu)}{\Delta} \right) v_k^* \quad v_k^* \right) \begin{pmatrix} \left(\frac{E_k + (\epsilon_k - \mu)}{\Delta^*} \right) v_k \\ v_k \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{(E_k + (\epsilon_k - \mu))^2}{|\Delta|^2} + 1 \right) |v_k|^2 \\ &= \left(\frac{(E_k + (\epsilon_k - \mu))^2}{E_k^2 - (\epsilon_k - \mu)^2} + 1 \right) |v_k|^2 \\ &= \left(\frac{(E_k + (\epsilon_k - \mu))^2}{(E_k + (\epsilon_k - \mu))(E_k - (\epsilon_k - \mu))} + 1 \right) |v_k|^2 \\ &= \left(\frac{(E_k + (\epsilon_k - \mu))}{(E_k - (\epsilon_k - \mu))} + 1 \right) |v_k|^2 \\ &= \left(\frac{(E_k + (\epsilon_k - \mu)) + (E_k - (\epsilon_k - \mu))}{(E_k - (\epsilon_k - \mu))} \right) |v_k|^2 \\ &= \left(\frac{2E_k}{(E_k - (\epsilon_k - \mu))} \right) |v_k|^2 \\ |v_k|^2 &= \left(\frac{(E_k - (\epsilon_k - \mu))}{2E_k} \right) \end{aligned}$$

didapatkan solusi,

$$|v_k|^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(\epsilon_k - \mu)}{E_k} \right). \quad (3.70)$$

Untuk mendapatkan parameter *gap* BCS, u_k dan v_k^* dari persamaan matriks (3.61), dilakukan eliminasi pada persamaan (3.63) yang sudah dikali v_k^* dan persamaan (3.64) yang sudah dikali u_k

$$E_k u_k v_k^* = (\epsilon_k - \mu) u_k v_k^* + \Delta |v_k|^2$$

$$\begin{aligned}
E_k v_k^* u_k &= -(\epsilon_k - \mu) v_k^* u_k + \Delta |u_k|^2 + \\
2E_k u_k v_k^* &= \Delta (|v_k|^2 + |u_k|^2) \\
2E_k u_k v_k^* &= \Delta \\
u_k v_k^* &= \frac{\Delta}{2E_k}.
\end{aligned} \tag{3.71}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.71) ke persamaan (3.61). Maka diperoleh

$$\Delta = |g_{eff}|^2 \sum_k \frac{\Delta}{2E_k}. \tag{3.72}$$

Disubstitusikan persamaan (3.66) ke persamaan (3.72)

$$1 = \frac{|g_{eff}|^2}{2} \sum_k \frac{1}{\sqrt{(\epsilon_k - \mu)^2 + |\Delta|^2}}. \tag{3.73}$$

Karena $k < k_F$, maka bentuk sigma k pada persamaan (3.73) diubah ke dalam bentuk integral energi. Sehingga menjadi

$$\sum_k \rightarrow g(\epsilon_F) \int d\epsilon. \tag{3.74}$$

Dimana $g(\epsilon_F)$ adalah kerapatan keadaan per spin pada energi fermi. Persamaan *gap* menjadi,

$$1 = \frac{|g_{eff}|^2 g(\epsilon_F)}{2} \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} \frac{d\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2 + |\Delta|^2}} \tag{3.75}$$

atau

$$1 = \lambda \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2 + |\Delta|^2}}. \tag{3.76}$$

Dimana

$$\lambda = |g_{eff}|^2 g(\epsilon_F), \tag{3.78}$$

λ adalah konstanta kopling elektron-fonon, yang menyatakan besar interaksi.

Untuk menghitung integral pada persamaan (3.76), dimisalkan $\epsilon = \Delta \tan \theta$ dan $d\epsilon = \Delta \sec^2 \theta d\theta$. Maka persamaan (3.76),

$$\begin{aligned}
1 &= \lambda \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2 + |\Delta|^2}} \\
&= \lambda \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{\Delta \sec^2 \theta d\theta}{\sqrt{(\Delta \tan \theta)^2 + |\Delta|^2}} \\
&= \lambda \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\sqrt{(\tan \theta)^2 + 1}} \\
&= \lambda \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\sec \theta} \\
&= \lambda \int_0^{\hbar\omega_D} \sec \theta d\theta \\
&= \lambda \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{\sec \theta (\sec \theta + \tan \theta) d\theta}{(\sec \theta + \tan \theta)}. \tag{3.78}
\end{aligned}$$

Dimisalkan $u = \sec \theta + \tan \theta$ dan $du = (\sec^2 \theta + \sec \theta \tan \theta) d\theta$.

$$\begin{aligned}
&= \lambda \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{\sec \theta (\sec \theta + \tan \theta) d\theta}{(\sec \theta + \tan \theta)} \\
&= \lambda \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{du}{u} \\
&= \lambda \ln u \Big|_0^{\hbar\omega_D} \\
&= \lambda \ln (\sec \theta + \tan \theta) \Big|_0^{\hbar\omega_D} \\
&= \lambda \ln \left(\frac{\sqrt{\epsilon^2 + |\Delta|^2}}{\Delta} + \frac{\epsilon}{\Delta} \right) \Big|_0^{\hbar\omega_D} \\
&= \lambda \ln \left(\frac{\sqrt{(\hbar\omega_D)^2 + |\Delta|^2}}{\Delta} + \frac{\hbar\omega_D}{\Delta} \right) - \ln \left(\frac{\sqrt{(0)^2 + |\Delta|^2}}{\Delta} + \frac{0}{\Delta} \right) \\
&= \lambda \ln \left(\frac{\sqrt{(\hbar\omega_D)^2 + |\Delta|^2}}{\Delta} + \frac{\hbar\omega_D}{\Delta} \right) - \ln 1.
\end{aligned}$$

Karena $|\Delta|^2 \ll (\hbar\omega_D)^2$ maka

$$1 = \lambda \ln \left(\frac{2\hbar\omega_D}{\Delta} \right).$$

Kemudian diperoleh,

$$\Delta = 2\hbar\omega_D e^{-1/\lambda}. \tag{3.79}$$

Persamaan (3.79) menunjukkan bahwa parameter *gap* BCS, Δ memiliki ketergantungan terhadap interaksi partikel, λ . Ketika λ lemah maka $e^{-1/\lambda}$ bernilai kecil sehingga parameter *gap* BCS-nya juga kecil. Dan ketika λ kuat maka $e^{-1/\lambda}$ bernilai besar sehingga parameter *gap* BCS-nya juga besar.

3.2.2 Energi *Gap* BCS dan Keadaan kuasipartikel

Kuasipartikel adalah penambahan suatu dari partikel luar. Untuk menemukan energi de-eksitasi untuk menambahkan satu partikel. Digunakan suatu aproksimasi yang sesuai dengan teorema Wick,

$$c_{k\uparrow}^+ c_{-k\downarrow}^+ c_{-k'\downarrow} c_{k'\uparrow} \approx \langle c_{k\uparrow}^+ c_{-k\downarrow}^+ \rangle c_{-k'\downarrow} c_{k'\uparrow} + c_{k\uparrow}^+ c_{-k\downarrow}^+ \langle c_{-k'\downarrow} c_{k'\uparrow} \rangle. \quad (3.80)$$

Pers. (3.80) disubstitusikan ke pers. (3.44). Sehingga diperoleh,

$$H = \sum_{k,\sigma} (\epsilon_k - \mu) c_{k\sigma}^+ c_{k\sigma} - |g_{eff}|^2 \sum_{k,k'} (\langle c_{k\uparrow}^+ c_{-k\downarrow}^+ \rangle c_{-k'\downarrow} c_{k'\uparrow} + c_{k\uparrow}^+ c_{-k\downarrow}^+ \langle c_{-k'\downarrow} c_{k'\uparrow} \rangle). \quad (3.81)$$

Dimana μ adalah potensial kimia. Dengan menggunakan persamaan (3.61) dan (3.62). Maka hamiltonian BCS berubah menjadi

$$H = \sum_{k,\sigma} (\epsilon_k - \mu) c_{k\sigma}^+ c_{k\sigma} - \sum_k (\Delta^* c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow} + \Delta c_{k\uparrow}^+ c_{-k\downarrow}^+). \quad (3.82)$$

Kemudian persamaan (3.80) dibuat dalam bentuk persamaan matriks

$$\begin{aligned} H &= \sum_{k,\sigma} (\epsilon_k - \mu) c_{k\sigma}^+ c_{k\sigma} - \sum_k (\Delta^* c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow} + \Delta c_{k\uparrow}^+ c_{-k\downarrow}^+) \\ &= \sum_k (\epsilon_k - \mu) (c_{k\uparrow}^+ c_{k\uparrow} - c_{-k\downarrow} c_{-k\downarrow}^+) - (\Delta^* c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow} + \Delta c_{k\uparrow}^+ c_{-k\downarrow}^+) \\ &= \sum_k ((\epsilon_k - \mu) c_{k\uparrow}^+ c_{k\uparrow} - (\epsilon_k - \mu) c_{-k\downarrow} c_{-k\downarrow}^+ - \Delta^* c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow} - \Delta c_{k\uparrow}^+ c_{-k\downarrow}^+) \\ &= \sum_k ((\epsilon_k - \mu) c_{k\uparrow}^+ - \Delta^* c_{-k\downarrow}) c_{k\uparrow} - ((\epsilon_k - \mu) c_{-k\downarrow} + \Delta c_{k\uparrow}^+) c_{-k\downarrow}^+ \end{aligned} \quad (3.83)$$

Dengan mengeluarkan $c_{k\uparrow}$ dan $c_{-k\downarrow}^+$ dari pers. (3.83). Maka diperoleh bentuk matriks berikut,

$$\begin{aligned}
&= \sum_k [(\epsilon_k - \mu)c_{k\uparrow}^+ - \Delta^*c_{-k\downarrow} \quad -(\epsilon_k - \mu)c_{-k\downarrow} - \Delta c_{k\uparrow}^+] \begin{bmatrix} c_{k\uparrow} \\ c_{-k\downarrow}^+ \end{bmatrix} \\
&= \sum_k \begin{bmatrix} c_{k\uparrow}^+ & c_{-k\downarrow} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\epsilon_k - \mu) & \\ & -\Delta^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{k\uparrow}^+ & c_{-k\downarrow} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Delta \\ -(\epsilon_k - \mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{k\uparrow} \\ c_{-k\downarrow}^+ \end{bmatrix} \\
&= \sum_k \begin{bmatrix} c_{k\uparrow}^+ & c_{-k\downarrow} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_k - \mu & -\Delta \\ -\Delta^* & -(\epsilon_k - \mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{k\uparrow} \\ c_{-k\downarrow}^+ \end{bmatrix} \quad (3.84)
\end{aligned}$$

Matrik pada persamaan (3.84)

$$\begin{bmatrix} \epsilon_k - \mu & -\Delta \\ -\Delta^* & -(\epsilon_k - \mu) \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

adalah matriks yang identik dengan matrik pada persamaan (3.65), hanya saja yang membedakan adalah tanda minus di depan Δ . Matrik pers.(3.85) memiliki dua vektor eigen. Yaitu,

$$\begin{pmatrix} u_k \\ -v_k \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} v_k^* \\ u_k^* \end{pmatrix} \quad (3.86)$$

dengan energi $E_k = \sqrt{(\epsilon_k - \mu)^2 + |\Delta|^2}$.

Lalu diperkenalkan matrik transformasi U. Dimana matrik transformasi U adalah gabungan dua matrik eigenvektor pada persamaan (3.86). Sehingga diperoleh

$$U = \begin{pmatrix} u_k & v_k^* \\ -v_k & u_k^* \end{pmatrix}. \quad (3.87)$$

Dimana

$$\begin{aligned}
UU^+ &= \begin{pmatrix} u_k & v_k^* \\ -v_k & u_k^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k^* & -v_k^* \\ -v_k & u_k \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} |u_k|^2 + |v_k|^2 & -u_k v_k^* + v_k^* u_k \\ -v_k u_k^* + u_k^* v_k & |u_k|^2 + |v_k|^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= I. \quad (3.88)$$

Persamaan matrik (3.85) diubah menjadi bentuk diagonal dengan mengalikan U di kiri matrik (3.85) dan U^+ di kirinya kanan. Sehingga,

$$\begin{aligned} U^+ \begin{pmatrix} \epsilon_k - \mu & -\Delta \\ -\Delta^* & -(\epsilon_k - \mu) \end{pmatrix} U &= \begin{pmatrix} u_k^* & -v_k^* \\ v_k & u_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_k - \mu & -\Delta \\ -\Delta^* & -(\epsilon_k - \mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k & v_k^* \\ -v_k & u_k^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\epsilon_k - \mu)u_k^* + \Delta^* \Delta & -\Delta u_k^* + (\epsilon_k - \mu)v_k^* \\ (\epsilon_k - \mu)v_k - \Delta^* u_k & -\Delta v_k - (\epsilon_k - \mu)u_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k & v_k^* \\ -v_k & u_k^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E_k u_k^* & -E_k v_k^* \\ -E_k v_k & -E_k u_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k & v_k^* \\ -v_k & u_k^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E_k u_k^* u_k + E_k v_k^* v_k & E_k u_k^* v_k^* - E_k v_k^* u_k^* \\ -E_k v_k u_k + E_k u_k v_k & -E_k v_k v_k^* - E_k u_k u_k^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E_k (|u_k|^2 + |v_k|^2) & 0 \\ 0 & -E_k (|u_k|^2 + |v_k|^2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & -E_k \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Dengan menggunakan transformasi unitari ini maka Hamiltonian BCS menjadi

$$H = \sum_k (c_{k\uparrow}^+ \quad c_{-k\downarrow}) U \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & E_k \end{pmatrix} U^+ \begin{pmatrix} c_{k\uparrow} \\ c_{-k\downarrow}^+ \end{pmatrix}. \quad (3.90)$$

Diperkenalkan pasangan operator baru yang didefinisikan

$$\begin{pmatrix} b_{k\uparrow} \\ b_{-k\downarrow}^+ \end{pmatrix} = U^+ \begin{pmatrix} c_{k\uparrow} \\ c_{-k\downarrow}^+ \end{pmatrix} \quad (3.91)$$

$$(b_{k\uparrow}^+ \quad b_{-k\downarrow}) = (c_{k\uparrow}^+ \quad c_{-k\downarrow}) U. \quad (3.92)$$

Secara eksplisit dapat ditulis

$$b_{k\uparrow}^+ = u_k c_{k\uparrow}^+ - v_k c_{-k\downarrow} \quad (3.93)$$

$$b_{-k\downarrow} = v_k^* c_{k\uparrow}^+ + u_k^* c_{-k\downarrow} \quad (3.94)$$

$$b_{k\uparrow} = u_k^* c_{k\uparrow} - v_k^* c_{-k\downarrow}^+ \quad (3.95)$$

$$b_{-k\downarrow}^+ = v_k c_{k\uparrow} + u_k c_{-k\downarrow}^+. \quad (3.96)$$

Operator b^+ , b adalah operator gabungan operator kreasi, c^+ dan operator anihilasi, c . Ini menunjukkan bahwa keadaan-keadaan yang mereka ciptakan atau hancurkan itu tidak murni elektron dan tidak murni eksitasi *hole*, malah merupakan superposisi kuantum elektron dan lubang. Sebenarnya u dan v memiliki interpretasi fisik bahwa $|v_k|^2$ adalah peluang eksitasi dari sebuah elektron ketika diukur muatannya, sedangkan $|u_k|^2$ adalah peluang eksitasi *hole*.

Dengan menggunakan operator baru pada pers. (3.91) dan (3.92), Hamiltonian BCS dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} H &= -\sum_k (b_{k\uparrow}^+ \quad b_{-k\downarrow}) \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & E_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{k\uparrow} \\ b_{-k\downarrow}^+ \end{pmatrix} \\ &= \sum_k (E_k b_{-k\downarrow}^+ b_{-k\downarrow} - E_k b_{k\uparrow}^+ b_{k\uparrow}) \\ &= \sum_k E_k (b_{-k\downarrow}^+ b_{-k\downarrow} - b_{k\uparrow}^+ b_{k\uparrow}). \end{aligned} \quad (3.97)$$

Operator baru ini mematuhi aturan anti-kommut standar

$$\begin{aligned} \{b_{k\sigma}, b_{k'\sigma'}^+\} &= \delta_{kk'} \delta_{\sigma\sigma'} \\ \{b_{k\sigma}^+, b_{k'\sigma'}^+\} &= 0 \\ \{b_{k\sigma}, b_{k'\sigma'}\} &= 0. \end{aligned} \quad (3.98)$$

Ini mudah dibuktikan dari definisi yang diberikan pada pers. (3.91) dan (3.92) seperti yang terlampir di lampiran 1. Partikel baru yang diciptakan dan dimusnahkan oleh operator ini tidak ada dalam keadaan dasar BCS yang variasional, karena

$$\begin{aligned} b_{k\uparrow} |\Psi_{BCS}\rangle &= 0 \\ b_{-k\downarrow} |\Psi_{BCS}\rangle &= 0. \end{aligned} \quad (3.99)$$

Oleh karena itu, keadaan dasar BCS adalah keadaan vakum untuk partikel-partikel ini. Sehingga keadaan tereksitasi sesuai dengan penambahan satu, dua atau lebih dari partikelkuasi baru menuju ke keadaan dasar. Energi eksitasi untuk melakukan ini adalah E_k .

Pada suhu T yang hingga, kuasipartikel berperilaku sesuai dengan distribusi Fermi-Dirac. Karena itu (Annet, 2004)

$$\langle b_{k\uparrow}^+ b_{k\uparrow} \rangle = f(E_k) \quad (3.100)$$

$$\langle b_{-k\downarrow} b_{-k\downarrow}^+ \rangle = 1 - f(E_k). \quad (3.101)$$

Dimana $f(E_k) = 1/(e^{\beta E} + 1)$. Dengan menggunakan pers. (3.77), didapatkan energi *gap*,

$$\Delta = |g_{eff}|^2 \sum_k \langle c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow} \rangle. \quad (3.102)$$

Untuk mendapatkan nilai $\langle c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow} \rangle$, dicari dulu nilai $c_{-k\downarrow}$ dengan mengeliminasi pers. (3.93) yang sudah dikali v_k^* dan pers. (3.94) yang sudah dikali u_k ,

$$v_k^* b_{k\uparrow}^+ = u_k v_k^* c_{k\uparrow}^+ - v_k v_k^* c_{-k\downarrow}$$

$$u_k b_{-k\downarrow} = u_k v_k^* c_{k\uparrow}^+ + u_k u_k^* c_{-k\downarrow} \quad -$$

$$v_k^* b_{k\uparrow}^+ - u_k b_{-k\downarrow} = -(|u_k|^2 + |v_k|^2) c_{-k\downarrow}$$

$$c_{-k\downarrow} = u_k b_{-k\downarrow} - v_k^* b_{k\uparrow}^+ \quad (3.103)$$

dan dicari nilai $c_{k\uparrow}$ dengan mengeliminasi pers. (3.95) yang sudah dikali u_k dan pers. (3.96) yang sudah dikali v_k^* ,

$$u_k b_{k\uparrow} = u_k u_k^* c_{k\uparrow} - u_k v_k^* c_{-k\downarrow}^+$$

$$v_k^* b_{-k\downarrow}^+ = v_k^* v_k c_{k\uparrow} + v_k^* u_k c_{-k\downarrow}^+ \quad +$$

$$u_k b_{k\uparrow} + v_k^* b_{-k\downarrow}^+ = (|u_k|^2 + |v_k|^2) c_{-k\downarrow}^+$$

$$c_{-k\downarrow}^+ = u_k b_{k\uparrow} + v_k^* b_{-k\downarrow}^+. \quad (3.104)$$

Kemudian

$$\begin{aligned}
\langle c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow} \rangle &= \langle (u_k b_{-k\downarrow} - v_k^* b_{k\uparrow}^+) (u_k b_{k\uparrow} + v_k^* b_{-k\downarrow}^+) \rangle \\
&= \langle u_k u_k b_{-k\downarrow} b_{k\uparrow} \rangle + \langle u_k v_k^* b_{-k\downarrow} b_{-k\downarrow}^+ \rangle - \langle u_k v_k^* b_{k\uparrow}^+ b_{k\uparrow} \rangle - \langle v_k^* v_k^* b_{k\uparrow}^+ b_{-k\downarrow}^+ \rangle \\
&= u_k v_k^* (\langle b_{-k\downarrow} b_{-k\downarrow}^+ \rangle - \langle b_{k\uparrow}^+ b_{k\uparrow} \rangle) \\
&= u_k v_k^* ((1 - \langle b_{-k\downarrow}^+ b_{-k\downarrow} \rangle) - (1 - \langle b_{k\uparrow} b_{k\uparrow}^+ \rangle)) \\
&= u_k v_k^* (\langle b_{k\uparrow} b_{k\uparrow}^+ \rangle - \langle b_{-k\downarrow}^+ b_{-k\downarrow} \rangle) \\
&= u_k v_k^* ((1 - f(E)) - f(E)) \\
&= u_k v_k^* (1 - 2f(E)).
\end{aligned}$$

Sehingga

$$\langle c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow} \rangle = u_k v_k^* (1 - 2f(E)). \quad (3.105)$$

Kemudian pers (3.105) disubstitusikan ke pers. (3.102)

$$\Delta = |g_{eff}|^2 \sum_k u_k v_k^* (1 - 2f(E)). \quad (3.106)$$

Nilai $f(E)$ disubstitusikan ke pers. (3.106). Sehingga

$$\begin{aligned}
\Delta &= |g_{eff}|^2 \sum_k u_k v_k^* \left(1 - \frac{2}{e^{\beta E_{k+1}}}\right) \\
&= |g_{eff}|^2 \sum_k u_k v_k^* \left(\frac{e^{\beta E_{k-1}}}{e^{\beta E_{k+1}}}\right) \\
&= |g_{eff}|^2 \sum_k u_k v_k^* \left(\frac{e^{\beta E_k/2} - e^{\beta E_k/2}}{e^{\beta E_k/2} + e^{\beta E_k/2}}\right) \\
&= |g_{eff}|^2 \sum_k u_k v_k^* \tanh\left(\frac{\beta E_k}{2}\right)
\end{aligned} \quad (3.107)$$

Kemudian $u_k v_k^* = \frac{\Delta}{2E_k}$ dan $\beta = \frac{1}{k_B T}$ ke persamaan (3.106)

$$\Delta = |g_{eff}|^2 \sum_k \frac{\Delta}{2E_k} \tanh\left(\frac{E}{2k_B T}\right)$$

$$1 = |g_{eff}|^2 \sum_k \frac{1}{2E_k} \tanh\left(\frac{E_k}{2k_B T}\right). \quad (3.108)$$

Karena $k < k_F$, maka bentuk sigma k diubah menjadi bentuk integral energi dengan menggunakan persamaan (3.74)

$$1 = \lambda \int_0^{\hbar\omega_D} d\epsilon \frac{\tanh E/(2k_B T)}{E} \quad (3.109)$$

Dimana $\lambda = |g_{eff}|^2 g(\epsilon_F)$. Lalu disubstitusikan $E = \sqrt{\epsilon^2 + |\Delta|^2}$ ke pers. (3.109)

$$1 = \lambda \int_0^{\hbar\omega_D} d\epsilon \frac{\tanh \sqrt{\epsilon^2 + |\Delta|^2}/(2k_B T)}{\sqrt{\epsilon^2 + |\Delta|^2}} \quad (3.110)$$

Pada kondisi suhu kritis T_c , nilai energi *gap* mendekati nol, $\Delta \rightarrow 0$. Maka

$$1 = \lambda \int_0^{\hbar\omega_D} d\epsilon \frac{\tanh \epsilon/(2k_B T_c)}{\epsilon}. \quad (3.111)$$

Kemudian dimisalkan $x = \epsilon/(2k_B T_c)$ dan $dx = d\epsilon/(2k_B T_c)$. Adapun syarat batasnya, ketika $\epsilon = 0 \rightarrow x = 0$ dan ketika $\epsilon = \hbar\omega_D \rightarrow x_c = (\hbar\omega_D)/(2k_B T_c)$

$$1 = \lambda \int_0^{x_c} dx \frac{\tanh x}{x}. \quad (3.112)$$

Untuk mengintegrasikan pers. (3.112), dimisalkan $u = \tanh x$, $du = \text{sech}^2 x dx$, $dv = dx/x$ dan $v = \ln x$,

$$1 = \lambda \tanh(x_c) \ln(x_c) - \lambda \int_0^{x_c} dx \frac{\ln x}{\cosh^2 x}. \quad (3.113)$$

Dengan mengasumsikan bahwa $(\hbar\omega_D) \gg (2k_B T_c)$, maka didapatkan aproksimasi,

$$1 \approx \lambda \ln x_c - \lambda \int_0^{\infty} dx \frac{\ln x}{\cosh^2 x}. \quad (3.114)$$

Untuk menghitung integral pada pers. (3.114) digunakan teorema Integral Cauchy. Sehingga didapatkan,

$$1 \approx \lambda \ln x_c + \lambda \ln(4e^{0.5772}/\pi)$$

$$1 \approx \lambda \ln(x_c 2.26)$$

$$x_c 2.26 \approx e^{1/\lambda}$$

$$\frac{\hbar\omega_D}{2k_B T_c} 2.26 \approx e^{1/\lambda}$$

$$k_B T_c \approx 1.13 \hbar\omega_D \exp\left(-\frac{1}{\lambda}\right). \quad (3.115)$$

Disubstitusi pers. (3.79) ke pers. (3.115)

$$\begin{aligned} k_B T_c &= 1.13 \frac{|\Delta|}{2} \\ 4 \frac{k_B T_c}{1.13} &= 4 \frac{|\Delta|}{2} \\ 2|\Delta| &= 3.52 k_B T_c \end{aligned} \quad (3.116)$$

Pers. (3.116) sesuai dengan berbagai superfluida dalam rentang yang luas dan juga akurat.

BAB IV ENERGI KUASIPARTIKEL DAN PARAMETER *GAP* BCS

Model Hamiltonian pasangan BCS untuk atom fermionik adalah identik dengan Hamiltonian atom bosonik. Hanya saja pada suku interaksi, spin pasangan Cooper atom fermionik tidak dibatasi pada pasangan spin yang berkebalikan saja, tetapi diperbolehkan ada pasangan spin yang sama, sehingga didefinisikan Hamiltonian interaksi,

$$H_{int} = \sum_{kk'\alpha\beta\gamma\delta} V_{\alpha\beta\gamma\delta}(k, k') c_{k'\alpha}^+ c_{-k'\beta}^+ c_{-k\gamma} c_{k\delta} \quad (4.1)$$

Dimana $V_{\alpha\beta\gamma\delta}$ adalah potensial interaksi, $c_{k'\alpha}^+$ adalah operator kreasi partikel terhambur dengan momentum k , $c_{-k'\beta}^+$ adalah operator kreasi partikel terhambur dengan momentum $-k$, $c_{-k\gamma}$ adalah operator anihilasi partikel sebelum terhambur dengan momentum k , $c_{k\delta}$ adalah operator anihilasi partikel sebelum terhambur dengan momentum $-k$. Di sini H_{int} dianggap memiliki ketergantungan pada empat indeks spin partikel, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Sedangkan hamburan pasangan Cooper dibatasi dari $(k, -k)$ menjadi $(k', -k')$. Untuk mendapatkan aproksimasi Hamiltonian interaksi digunakan teorema Wick

$$H_{int} \approx \sum_{kk'\alpha\beta\gamma\delta} V_{\alpha\beta\gamma\delta}(k, k') \left(\langle c_{k'\alpha}^+ c_{-k'\beta}^+ \rangle c_{-k\gamma} c_{k\delta} + c_{k'\alpha}^+ c_{-k'\beta}^+ \langle c_{-k\gamma} c_{k\delta} \rangle \right). \quad (4.2)$$

Didefinisikan parameter *gap* BCS $\Delta_{\alpha\beta}(k)$

$$\Delta_{\alpha\beta}(k) = \sum_{k'\gamma\delta} V_{\alpha\beta\gamma\delta}(k, k') \langle c_{-k'\gamma} c_{k'\delta} \rangle. \quad (4.3)$$

Disubstitusi pers. (4.3) ke pers. (4.2)

$$H_{int} \approx \sum_{kk'\alpha\beta\gamma\delta} \Delta_{\alpha\beta} c_{-k\gamma} c_{k\delta} + \Delta_{\alpha\beta}^* c_{k'\alpha}^+ c_{-k'\beta}^+. \quad (4.4)$$

Suku interaksi pada pers. (3.82) diganti dengan Hamiltonian interaksi pada pers. (4.4). Maka diperoleh Hamiltonian untuk atom fermionik

$$H = \sum_{k,\sigma} (\epsilon_k - \mu) c_{k\sigma}^+ c_{k\sigma} - \sum_{k,\alpha,\beta} c_{k\alpha}^+ c_{-k\beta}^+ \Delta_{\alpha\beta}(k) + \Delta_{\alpha\beta}^*(k) c_{-k\alpha} c_{k\beta}.$$

Dengan menjalankan nilai σ, α dan β adalah spin *up* dan *down*. Maka diperoleh

$$\begin{aligned} H = & \sum_k (\epsilon_k - \mu) (c_{k\uparrow}^+ c_{k\uparrow} + c_{k\downarrow}^+ c_{k\downarrow}) - \sum_k c_{k\uparrow}^+ c_{-k\uparrow}^+ \Delta_{\uparrow\uparrow}(k) + \Delta_{\uparrow\uparrow}^*(k) c_{-k\uparrow} c_{k\uparrow} + \\ & c_{k\uparrow}^+ c_{-k\downarrow}^+ \Delta_{\uparrow\downarrow}(k) + \Delta_{\uparrow\downarrow}^*(k) c_{-k\uparrow} c_{k\downarrow} + c_{k\downarrow}^+ c_{-k\uparrow}^+ \Delta_{\downarrow\uparrow}(k) + \Delta_{\downarrow\uparrow}^*(k) c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow} + \\ & c_{k\downarrow}^+ c_{-k\downarrow}^+ \Delta_{\downarrow\downarrow}(k) + \Delta_{\downarrow\downarrow}^*(k) c_{-k\downarrow} c_{k\downarrow} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Pengoperasian fungsi gelombang, pers. (4.5) pada Hamiltonian pers. (3.40)

$$\begin{aligned} E &= \langle \Psi_{BCS} | H | \Psi_{BCS} \rangle \\ E &= \sum_k (\epsilon_k - \mu) (\langle \Psi_{BCS} | c_{k\uparrow}^+ c_{k\uparrow} | \Psi_{BCS} \rangle + \langle \Psi_{BCS} | c_{k\downarrow}^+ c_{k\downarrow} | \Psi_{BCS} \rangle) \\ &\quad - |g_{eff}|^2 \sum_{k,k'} \langle \Psi_{BCS} | c_{k\uparrow}^+ c_{-k\uparrow}^+ \Delta_{\uparrow\uparrow} | \Psi_{BCS} \rangle + \langle \Psi_{BCS} | \Delta_{\uparrow\uparrow}^* c_{-k\uparrow} c_{k\uparrow} | \Psi_{BCS} \rangle + \\ &\quad \langle \Psi_{BCS} | c_{k\uparrow}^+ c_{-k\downarrow}^+ \Delta_{\uparrow\downarrow} | \Psi_{BCS} \rangle + \langle \Psi_{BCS} | \Delta_{\uparrow\downarrow}^* c_{-k\uparrow} c_{k\downarrow} | \Psi_{BCS} \rangle + \\ &\quad \langle \Psi_{BCS} | c_{k\downarrow}^+ c_{-k\uparrow}^+ \Delta_{\downarrow\uparrow} | \Psi_{BCS} \rangle + \langle \Psi_{BCS} | \Delta_{\downarrow\uparrow}^* c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow} | \Psi_{BCS} \rangle + \\ &\quad \langle \Psi_{BCS} | c_{k\downarrow}^+ c_{-k\downarrow}^+ \Delta_{\downarrow\downarrow} | \Psi_{BCS} \rangle + \langle \Psi_{BCS} | \Delta_{\downarrow\downarrow}^* c_{-k\downarrow} c_{k\downarrow} | \Psi_{BCS} \rangle \\ E &= \sum_k (\epsilon_k - \mu) (|v_k|^2 - |u_k|^2 + 1) + \sum_k u_{k\uparrow}^* v_{k\uparrow} \Delta_{\uparrow\uparrow}(k) + \Delta_{\uparrow\uparrow}^*(k) v_{k\uparrow}^* u_{k\uparrow} + \\ &\quad u_{k\downarrow}^* v_{k\uparrow} \Delta_{\uparrow\downarrow}(k) + \Delta_{\uparrow\downarrow}^*(k) v_{k\downarrow}^* u_{k\uparrow} + u_{k\uparrow}^* v_{k\downarrow} \Delta_{\downarrow\uparrow}(k) + \Delta_{\downarrow\uparrow}^*(k) v_{k\uparrow}^* u_{k\downarrow} + \\ &\quad u_{k\downarrow}^* v_{k\downarrow} \Delta_{\downarrow\downarrow}(k) + \Delta_{\downarrow\downarrow}^*(k) v_{k\downarrow}^* u_{k\downarrow}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Dengan menggunakan metode pengali Lagrange, energi total minimum adalah,

$$0 = \frac{\partial E}{\partial u_{k\uparrow}^*} + E_k u_{k\uparrow} \quad (4.7)$$

$$0 = \frac{\partial E}{\partial u_{k\downarrow}^*} + E_k u_{k\downarrow} \quad (4.8)$$

$$0 = \frac{\partial E}{\partial v_{k\uparrow}^*} + E_k v_{k\uparrow} \quad (4.9)$$

$$0 = \frac{\partial E}{\partial v_{k\downarrow}^*} + E_k v_{k\downarrow}. \quad (4.10)$$

Untuk mendapatkan solusi dari pers. (4.7), (4.8), (4.9) dan (4.10), dicari turunannya satu per satu. Turunan E terhadap $u_{k\uparrow}^*$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial u_{k\uparrow}^*} &= \frac{\partial}{\partial u_{k\uparrow}^*} (\sum_k (\epsilon_k - \mu) (|v_k|^2 - |u_k|^2 + 1) - (\sum_k u_{k\uparrow}^* v_{k\uparrow} \Delta_{\uparrow\uparrow}(k) + \\ &\quad \Delta_{\uparrow\uparrow}^*(k) v_{k\uparrow}^* u_{k\uparrow} + u_{k\downarrow}^* v_{k\uparrow} \Delta_{\downarrow\uparrow}(k) + \Delta_{\downarrow\uparrow}^*(k) v_{k\downarrow}^* u_{k\uparrow} + u_{k\uparrow}^* v_{k\downarrow} \Delta_{\uparrow\downarrow}(k) + \\ &\quad \Delta_{\uparrow\downarrow}^*(k) v_{k\uparrow}^* u_{k\downarrow} + u_{k\downarrow}^* v_{k\downarrow} \Delta_{\downarrow\downarrow}(k) + \Delta_{\downarrow\downarrow}^*(k) v_{k\downarrow}^* u_{k\downarrow})) \\ &= -(\epsilon_k - \mu) u_{k\uparrow} - v_{k\uparrow} \Delta_{\uparrow\uparrow}(k) - v_{k\downarrow} \Delta_{\uparrow\downarrow}(k). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Turunan E terhadap $u_{k\downarrow}^*$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial u_{k\downarrow}^*} &= \frac{\partial}{\partial u_{k\downarrow}^*} (\sum_k (\epsilon_k - \mu) (|v_k|^2 - |u_k|^2 + 1) - (\sum_k u_{k\uparrow}^* v_{k\uparrow} \Delta_{\uparrow\uparrow}(k) + \\ &\quad \Delta_{\uparrow\uparrow}^*(k) v_{k\uparrow}^* u_{k\uparrow} + u_{k\downarrow}^* v_{k\uparrow} \Delta_{\downarrow\uparrow}(k) + \Delta_{\downarrow\uparrow}^*(k) v_{k\downarrow}^* u_{k\uparrow} + u_{k\uparrow}^* v_{k\downarrow} \Delta_{\uparrow\downarrow}(k) + \\ &\quad \Delta_{\uparrow\downarrow}^*(k) v_{k\uparrow}^* u_{k\downarrow} + u_{k\downarrow}^* v_{k\downarrow} \Delta_{\downarrow\downarrow}(k) + \Delta_{\downarrow\downarrow}^*(k) v_{k\downarrow}^* u_{k\downarrow})) \\ &= -(\epsilon_k - \mu) u_{k\downarrow} - v_{k\uparrow} \Delta_{\downarrow\uparrow}(k) - v_{k\downarrow} \Delta_{\downarrow\downarrow}(k). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Turunan E terhadap $v_{k\uparrow}^*$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial v_{k\uparrow}^*} &= \frac{\partial}{\partial v_{k\uparrow}^*} (\sum_k (\epsilon_k - \mu) (|v_k|^2 - |u_k|^2 + 1) - (\sum_k u_{k\uparrow}^* v_{k\uparrow} \Delta_{\uparrow\uparrow}(k) + \\ &\quad \Delta_{\uparrow\uparrow}^*(k) v_{k\uparrow}^* u_{k\uparrow} + u_{k\downarrow}^* v_{k\uparrow} \Delta_{\downarrow\uparrow}(k) + \Delta_{\downarrow\uparrow}^*(k) v_{k\downarrow}^* u_{k\uparrow} + u_{k\uparrow}^* v_{k\downarrow} \Delta_{\uparrow\downarrow}(k) + \\ &\quad \Delta_{\uparrow\downarrow}^*(k) v_{k\uparrow}^* u_{k\downarrow} + u_{k\downarrow}^* v_{k\downarrow} \Delta_{\downarrow\downarrow}(k) + \Delta_{\downarrow\downarrow}^*(k) v_{k\downarrow}^* u_{k\downarrow})) \\ &= (\epsilon_k - \mu) u_{k\uparrow} - u_{k\uparrow} \Delta_{\uparrow\uparrow}^*(k) - u_{k\downarrow} \Delta_{\uparrow\downarrow}^*(k). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Turunan E terhadap $v_{k\downarrow}^*$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial v_{k\downarrow}^*} &= \frac{\partial}{\partial v_{k\downarrow}^*} (\sum_k (\epsilon_k - \mu) (|v_k|^2 - |u_k|^2 + 1) - (\sum_k u_{k\uparrow}^* v_{k\uparrow} \Delta_{\uparrow\uparrow}(k) + \\
&\Delta_{\uparrow\uparrow}^*(k) v_{k\uparrow}^* u_{k\uparrow} + u_{k\downarrow}^* v_{k\uparrow} \Delta_{\downarrow\uparrow}(k) + \Delta_{\downarrow\uparrow}^*(k) v_{k\downarrow}^* u_{k\uparrow} + u_{k\uparrow}^* v_{k\downarrow} \Delta_{\uparrow\downarrow}(k) + \\
&\Delta_{\uparrow\downarrow}^*(k) v_{k\uparrow}^* u_{k\downarrow} + u_{k\downarrow}^* v_{k\downarrow} \Delta_{\downarrow\downarrow}(k) + \Delta_{\downarrow\downarrow}^*(k) v_{k\downarrow}^* u_{k\downarrow})) \\
&= (\epsilon_k - \mu) u_{k\downarrow} - u_{k\uparrow} \Delta_{\downarrow\uparrow}^*(k) - u_{k\downarrow} \Delta_{\downarrow\downarrow}^*(k). \tag{4.14}
\end{aligned}$$

Sehingga persamaan (4.7), (4.8), (4.9) dan (4.10) menjadi

$$(\epsilon_k - \mu) u_{k\uparrow} + v_{k\uparrow} \Delta_{\uparrow\uparrow}(k) + v_{k\downarrow} \Delta_{\uparrow\downarrow}(k) = E_k u_{k\uparrow} \tag{4.15}$$

$$(\epsilon_k - \mu) u_{k\downarrow} + v_{k\uparrow} \Delta_{\downarrow\uparrow}(k) + v_{k\downarrow} \Delta_{\downarrow\downarrow}(k) = E_k u_{k\downarrow} \tag{4.16}$$

$$-(\epsilon_k - \mu) u_{k\uparrow} + u_{k\uparrow} \Delta_{\uparrow\uparrow}^*(k) + u_{k\downarrow} \Delta_{\uparrow\downarrow}^*(k) = E_k v_{k\uparrow} \tag{4.17}$$

$$-(\epsilon_k - \mu) u_{k\downarrow} + u_{k\uparrow} \Delta_{\downarrow\uparrow}^*(k) + u_{k\downarrow} \Delta_{\downarrow\downarrow}^*(k) = E_k v_{k\downarrow}. \tag{4.18}$$

Persamaan *gap* BCS (4.15), (4.16), (4.17) dan (4.18) diubah menjadi persamaan matriks 4 x 4.

$$\begin{pmatrix}
\epsilon_k - \mu & 0 & \Delta_{\uparrow\uparrow}(k) & \Delta_{\uparrow\downarrow}(k) \\
0 & \epsilon_k - \mu & \Delta_{\downarrow\uparrow}(k) & \Delta_{\downarrow\downarrow}(k) \\
\Delta_{\uparrow\uparrow}^*(k) & \Delta_{\downarrow\uparrow}^*(k) & -\epsilon_k + \mu & 0 \\
\Delta_{\uparrow\downarrow}^*(k) & \Delta_{\downarrow\downarrow}^*(k) & 0 & -\epsilon_k + \mu
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
u_{k\uparrow} \\
u_{k\downarrow} \\
v_{k\uparrow} \\
v_{k\downarrow}
\end{pmatrix}
= E_k \begin{pmatrix}
u_{k\uparrow} \\
u_{k\downarrow} \\
v_{k\uparrow} \\
v_{k\downarrow}
\end{pmatrix}. \tag{4.20}$$

Kemudian didefinisikan

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \Delta_{\uparrow\uparrow}(k) & \Delta_{\uparrow\downarrow}(k) \\ \Delta_{\downarrow\uparrow}(k) & \Delta_{\downarrow\downarrow}(k) \end{pmatrix} &\equiv i(\Delta_k I + \mathbf{d}(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\sigma}) \sigma_y \\
&= i(\Delta_k I + d_x \sigma_x + d_y \sigma_y + d_z \sigma_z) \sigma_y \\
&= i \left(\Delta_k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + d_x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d_y \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \right. \\
&\quad \left. d_z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= i \left(\begin{pmatrix} \Delta_k & 0 \\ 0 & \Delta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & d_x \\ d_x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -id_y \\ id_y & 0 \end{pmatrix} + \right. \\
&\quad \left. \begin{pmatrix} d_z & 0 \\ 0 & -d_z \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\
&= \left(\begin{pmatrix} \Delta_k + d_z & d_x - id_y \\ d_x + id_y & \Delta_k - d_z \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -d_x(k) + id_y(k) & \Delta_k + d_z(k) \\ -\Delta_k + d_z(k) & d_x(k) + id_y(k) \end{pmatrix}. \tag{4.20}
\end{aligned}$$

Sifat simetri paritas pada persamaan (4.20) menyiratkan bahwa

$$\Delta_k = \Delta_{-k} \tag{4.21}$$

$$d(k) = -d(-k) \tag{4.22}$$

Komponen skalar pada persamaan (4.21) adalah genap di bawah operasi paritas $k \rightarrow -k$. Sedangkan komponen vektor pada persamaan (4.22) adalah ganjil. Dengan demikian, secara umum ditemukan bahwa persamaan gap memiliki solusi yang ganjil atau genap, dan tidak pernah ada komponen campuran. Karena itu dapat dibedakan dua kemungkinan, spin singlet berpasangan yang memiliki energi *gap*

$$\begin{pmatrix} \Delta_{\uparrow\uparrow}(k) & \Delta_{\uparrow\downarrow}(k) \\ \Delta_{\downarrow\uparrow}(k) & \Delta_{\downarrow\downarrow}(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \Delta_k \\ -\Delta_k & 0 \end{pmatrix} \tag{4.23}$$

dan spin triplet berpasangan, dimana parameter *gap*-nya adalah

$$\begin{pmatrix} \Delta_{\uparrow\uparrow}(k) & \Delta_{\uparrow\downarrow}(k) \\ \Delta_{\downarrow\uparrow}(k) & \Delta_{\downarrow\downarrow}(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_x(k) + id_y(k) & d_z(k) \\ d_z(k) & d_x(k) + id_y(k) \end{pmatrix}. \tag{4.24}$$

Persamaan (4.24) disubstitusi ke dalam persamaan (4.19). Maka didapatkan persamaan Hamiltonian yang baru,

$$\begin{pmatrix} \epsilon_k - \mu & 0 & -d_x + id_y & d_z \\ 0 & \epsilon_k - \mu & d_z & d_x + id_y \\ -d_x^* - id_y^* & d_z^* & -(\epsilon_k - \mu) & 0 \\ d_z^* & d_x^* - id_y^* & 0 & -(\epsilon_k - \mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{k\uparrow} \\ u_{k\downarrow} \\ v_{k\uparrow} \\ v_{k\downarrow} \end{pmatrix} = E_k \begin{pmatrix} u_{k\uparrow} \\ u_{k\downarrow} \\ v_{k\uparrow} \\ v_{k\downarrow} \end{pmatrix}. \quad (4.25)$$

Dari persamaan (4.25) dihitung energi kuasipartikel dengan menggunakan persamaan nilai eigen. Adapun perhitungannya sebagaimana yang terlampir di lampiran 2. Kemudian didapatkan nilai eigen sebagai berikut,

$$E_k = \pm \sqrt{(\epsilon_k - \mu)^2 + |\mathbf{d}|^2 \pm |\mathbf{d} \times \mathbf{d}^*|}. \quad (4.26)$$

Dengan mengasumsikan bahwa atom ${}^3\text{He}$ berbentuk bola. Maka koordinat bola dapat digunakan untuk mengekspansi komponen $\mathbf{d}(\mathbf{k})$ dalam bentuk fungsi Harmonik sferis,

$$d_v(k) \equiv \sum \eta_{vlm} Y_{lm}(\theta_k, \phi_k). \quad (4.27)$$

Dimana

$$Y_{lm}(\theta_k, \phi_k) = \sqrt{\frac{2l+1}{2} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^m(\cos \theta) \quad (4.28)$$

Dan

$$P_l^m(\cos \theta) = \frac{(\sin \theta)^{|m|}}{2^{|l|} l!} \frac{d^{l+|m|}}{d \cos \theta^{l+|m|}} (\cos^2 \theta - 1)^l \quad (4.29)$$

$P_l^m(\cos \theta)$ adalah polinom Rodrigues dan subskrip $v = x, y, z$ adalah tiga komponen vektor.

Dengan mengasumsikan pasangan gelombang-p untuk menjadi kasus, Persamaan (4.29) dapat ditulis ulang dalam bentuk

$$d_v(k) = \sum \eta_{vli} f_i(\theta_k, \phi_k). \quad (4.30)$$

Sebelum mendapatkan parameter $d_v(k)$, terlebih dahulu dicari $f_i(\theta_k, \phi_k)$. Anderson (1961) mengusulkan bahwa pasangan antar atom terbentuk pada kondisi $l = 1$. Sehingga diperoleh,

$$f_x(\theta_k, \phi_k) \equiv \frac{Y_{11}(\theta_k, \phi_k) + Y_{1-1}(\theta_k, \phi_k)}{\sqrt{2}} \quad (4.31)$$

$$f_y(\theta_k, \phi_k) \equiv \frac{Y_{11}(\theta_k, \phi_k) - Y_{1-1}(\theta_k, \phi_k)}{\sqrt{2}i} \quad (4.32)$$

$$f_z(\theta_k, \phi_k) \equiv Y_{10}(\theta_k, \phi_k). \quad (4.33)$$

Sebelum menghitung f_x, f_y dan f_z , terlebih dahulu ditampilkan $Y_{11}(\theta_k, \phi_k)$, $Y_{1-1}(\theta_k, \phi_k)$ dan $Y_{10}(\theta_k, \phi_k)$.

$$Y_{11}(\theta_k, \phi_k) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}. \quad (4.34)$$

$$Y_{1-1}(\theta_k, \phi_k) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\phi}. \quad (4.35)$$

$$Y_{10}(\theta_k, \phi_k) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta. \quad (4.36)$$

Perhitungan manual dari pers. (4.34), (3.35) dan (4.36) ditulis di lampian 3.

Setelah itu, dihitung $f_x(\theta_k, \phi_k)$ menggunakan persamaan (4.31)

$$\begin{aligned} f_x(\theta_k, \phi_k) &\equiv \frac{Y_{11}(\theta_k, \phi_k) + Y_{1-1}(\theta_k, \phi_k)}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi} + \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\phi}}{\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{\frac{3}{16\pi}} \sin \theta (e^{i\phi} + e^{-i\phi}) \\ &= \sqrt{\frac{3}{16\pi}} \sin \theta (2 \cos \phi) \\ &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin \theta \cos \phi. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Kemudian dihitung $f_y(\theta_k, \phi_k)$ menggunakan persamaan (4.32)

$$\begin{aligned}
 f_y(\theta_k, \phi_k) &\equiv \frac{Y_{11}(\theta_k, \phi_k) - Y_{1-1}(\theta_k, \phi_k)}{\sqrt{2}i} \\
 &= \frac{\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi} - \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\phi}}{\sqrt{2}i} \\
 &= \sqrt{\frac{3}{16\pi}} \sin \theta \frac{(e^{i\phi} - e^{-i\phi})}{i} \\
 &= \sqrt{\frac{3}{16\pi}} \sin \theta (2 \sin \phi) \\
 &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin \theta \sin \phi.
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

Lalu dihitung $f_z(\theta_k, \phi_k)$ menggunakan persamaan (4.33)

$$\begin{aligned}
 f_z(\theta_k, \phi_k) &\equiv Y_{10}(\theta_k, \phi_k) \\
 &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta.
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

Sehingga didapatkan

$$f_x(\theta_k, \phi_k) = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} \cos \phi_k \sin \theta_k \tag{4.40}$$

$$f_y(\theta_k, \phi_k) = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} \sin \phi_k \sin \theta_k \tag{4.41}$$

$$f_z(\theta_k, \phi_k) = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} \cos \theta_k. \tag{4.42}$$

Parameter gap $d(k)$ bergantung pada total sembilan koefisien kompleks,

$$[\eta_{vi}] = \begin{pmatrix} \eta_{xx} & \eta_{xy} & \eta_{xz} \\ \eta_{yx} & \eta_{yy} & \eta_{yz} \\ \eta_{zx} & \eta_{zy} & \eta_{zz} \end{pmatrix}. \tag{4.43}$$

Untuk menentukan koefisien ini, perlu untuk menyelesaikan analog persamaan

BCS gap. Keadaan Anderson-Brinkman-Morrel (ABM) (Annet, 2004),

$$[\eta_{vi}] = \eta \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

Sehingga

$$\begin{aligned} d_x(k) &= \sum \eta_{xi} f_i(\theta_k, \phi_k) \\ &= \eta (1 \quad i \quad 0) \begin{pmatrix} f_x(\theta, \phi) \\ f_y(\theta, \phi) \\ f_z(\theta, \phi) \end{pmatrix} \\ &= \eta (f_x(\theta, \phi) + i f_y(\theta, \phi)) \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} d_y(k) &= \sum \eta_{yi} f_i(\theta_k, \phi_k) \\ &= \eta (0 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} f_x(\theta, \phi) \\ f_y(\theta, \phi) \\ f_z(\theta, \phi) \end{pmatrix} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} d_z(k) &= \sum \eta_{zi} f_i(\theta_k, \phi_k) \\ &= \eta (0 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} f_x(\theta, \phi) \\ f_y(\theta, \phi) \\ f_z(\theta, \phi) \end{pmatrix} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.47)$$

dan keadaan Balain-Werthamer (BW) (Annet, 2004)

$$[\eta_{vi}] = \eta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.48)$$

Sehingga

$$\begin{aligned} d_x(k) &= \sum \eta_{xi} f_i(\theta_k, \phi_k) \\ &= \eta (1 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} f_x(\theta, \phi) \\ f_y(\theta, \phi) \\ f_z(\theta, \phi) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \eta(f_x(\theta, \phi)) \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} d_y(k) &= \sum \eta_{yi} f_i(\theta_k, \phi_k) \\ &= \eta(0 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} f_x(\theta, \phi) \\ f_y(\theta, \phi) \\ f_z(\theta, \phi) \end{pmatrix} \\ &= \eta(f_y(\theta, \phi)) \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} d_z(k) &= \sum \eta_{zi} f_i(\theta_k, \phi_k) \\ &= \eta(0 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} f_x(\theta, \phi) \\ f_y(\theta, \phi) \\ f_z(\theta, \phi) \end{pmatrix} \\ &= \eta(f_z(\theta, \phi)). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Energi kuasipartikel

$$E_k = \sqrt{(\epsilon_k - \mu)^2 + |\mathbf{d}(\mathbf{k})|^2 \pm |\mathbf{d}(\mathbf{k}) \times \mathbf{d}^*(\mathbf{k})|} \quad (4.53)$$

Untuk kedua solusi ABM dan BW, produk silang adalah nol $|\mathbf{d}(\mathbf{k}) \times \mathbf{d}^*(\mathbf{k})| = 0$.

Untuk keadaan ABM

$$\begin{aligned} |\mathbf{d}(\mathbf{k}) \times \mathbf{d}^*(\mathbf{k})| &= |(d_x + d_y + d_z) \times (d_x^* + d_y^* + d_z^*)| \\ &= \eta^2 \left((f_x + if_y)\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k} \right) \times \left((f_x - if_y)\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k} \right) \\ &= \eta^2 \left((f_x + if_y) \times 0 - 0 \times (f_x + if_y) \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.53)$$

Untuk keadaan ABM

$$\begin{aligned} |\mathbf{d}(\mathbf{k}) \times \mathbf{d}^*(\mathbf{k})| &= |(d_x + d_y + d_z) \times (d_x^* + d_y^* + d_z^*)| \\ &= \eta^2 \left((f_x\hat{i} + f_y\hat{j} + f_z\hat{k}) \times (f_x\hat{i} + f_y\hat{j} + f_z\hat{k}) \right) \\ &= \eta^2 \left((f_x f_y - f_y f_x)\hat{i} + (f_y f_z - f_z f_y)\hat{j} + (f_x f_z - f_z f_x)\hat{k} \right) \end{aligned}$$

$$= 0 \quad (4.54)$$

Sehingga energi kuasipartikel

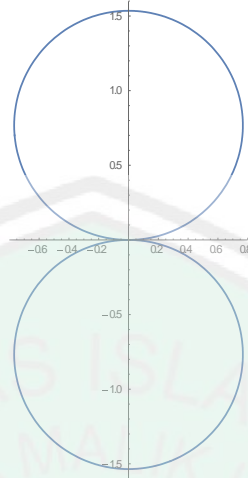
$$E_k = \sqrt{(\epsilon_k - \mu)^2 + |\mathbf{d}(\mathbf{k})|^2} \quad (4.55)$$

Jelas dari sini bahwa besarnya vektor $\mathbf{d}(\mathbf{k})$, $|\mathbf{d}(\mathbf{k})|$ memiliki peran yang sama dengan energi *gap* BCS $|\Delta|$.

Kemudian dihitung $|\mathbf{d}(\mathbf{k})|$ untuk keadaan ABM dan BW. Untuk keadaan ABM

$$\begin{aligned} |\mathbf{d}(\mathbf{k})| &= \sqrt{(d_x \hat{i} + d_y \hat{j} + d_z \hat{k}) \cdot (d_x^* \hat{i} + d_y^* \hat{j} + d_z^* \hat{k})} \\ &= \sqrt{d_x d_x^* + d_y d_y^* + d_z d_z^*} \\ &= \sqrt{(f_x + if_y)(f_x - if_y) + 0 + 0} \\ &= \sqrt{f_x^2 + f_y^2} \\ &= \eta \sqrt{\frac{3}{4\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \phi + \frac{3}{4\pi} \sin^2 \theta \sin^2 \phi} \\ &= \eta \sqrt{\frac{3}{4\pi} \sin^2 \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi)} \\ &= \eta \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin \theta. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Parameter *gap* BCS untuk keadaan ABM divisualisasikan dengan menggunakan Wolfram Mathematica 10.0 tahun 2014 dalam gambar 4.1



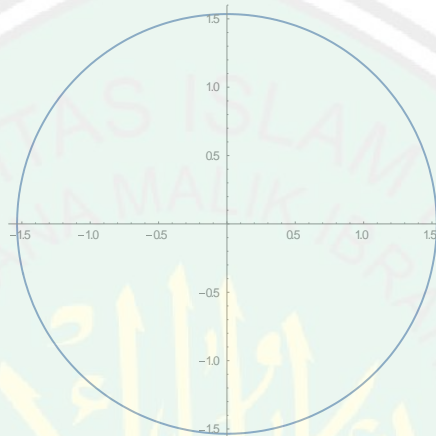
Gambar 4.1 Grafik Parameter *Gap* BCS dalam Koordinat Polar (r, θ) untuk Keadaan ABM

Dalam gambar 4.1, variabel r menunjukkan nilai Parameter *gap* BCS, $\mathbf{d}(\mathbf{k})$. Sedangkan θ menunjukkan perputaran sudut θ . Gambar 4.1 menunjukkan bahwa parameter *gap* BCS bernilai nol pada sudut θ sama dengan 0° dan 180° untuk keadaan ABM. Sehingga terbentuk simpul di titik pusat. Secara fisis, keadaan ABM menggambarkan fase A dari superfluida ^3He . Adapun untuk keadaan BW

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{d}(\mathbf{k})| &= \sqrt{(d_x \hat{i} + d_y \hat{j} + d_z \hat{k}) \cdot (d_x^* \hat{i} + d_y^* \hat{j} + d_z^* \hat{k})} \\
 &= \sqrt{d_x d_x^* + d_y d_y^* + d_z d_z^*} \\
 &= \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2} \\
 &= \eta \sqrt{\frac{3}{4\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \phi + \frac{3}{4\pi} \sin^2 \theta \sin^2 \phi + \frac{3}{4\pi} \cos^2 \theta} \\
 &= \eta \sqrt{\frac{3}{4\pi} (\sin^2 \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + \cos^2 \theta)} \\
 &= \eta \sqrt{\frac{3}{4\pi} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)}
 \end{aligned}$$

$$= \eta \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \quad (4.57)$$

Parameter *gap* BCS untuk keadaan ABM divisualisasikan dengan menggunakan Wolfram Mathematica 10.0 tahun 2014 dalam gambar 4.2



Gambar 4.2 Grafik Parameter *Gap* BCS dalam Koordinat Polar (r, θ) untuk Keadaan BW

Dalam gambar 4.2, variabel r menunjukkan nilai Parameter *gap* BCS, $d(\mathbf{k})$. Sedangkan θ menunjukkan perputaran sudut θ . Gambar 4.2 menunjukkan bahwa parameter *gap* BCS konstan pada setiap untuk keadaan ABM. Secara fisis, keadaan ABM menggambarkan fase B dari superfluida ^3He . Sehingga bisa dilihat perbedaan antara fase A dan fase B. Pada fase A, parameter *gap* BCS $d(k)$ memiliki arah konstan di segala ruang, dan lenyap pada dua titik. Sedangkan pada fase B, parameter *gap* BCS $d(k)$ selalu mengarah ke luar, dan memiliki besaran konstan di semua titik.

Pers. (4,56) disubstitusi ke pers. (4.55) diperoleh energi kuasipartikel untuk keadaan ABM

$$E_k = \sqrt{(\epsilon_k - \mu)^2 + \frac{3}{4\pi} \eta^2 \sin^2 \theta} \quad (4.58)$$

Energi kuasipartikel BCS untuk keadaan ABM divisualisasikan dengan menggunakan Wolfram Mathematica 10.0 tahun 2014 dalam gambar 4.3



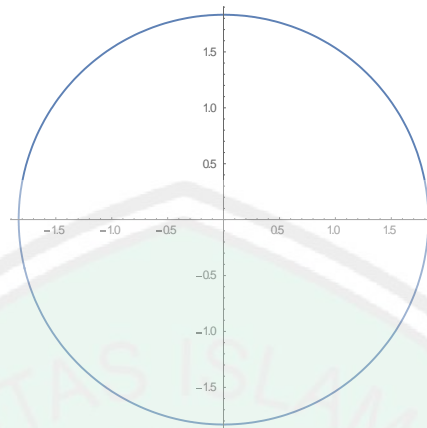
Gambar 4.3 Grafik Energi Kuasipartikel dalam Koordinat Polar (r, θ) untuk Keadaan ABM

Dalam gambar 4.3, variabel r menunjukkan nilai energi kuasipartikel E_k . Sedangkan θ menunjukkan perputaran sudut θ . Gambar 4.3 menunjukkan bahwa energi kuasipartikel nilainya mengecil pada sudut θ sama dengan 0° dan 180° untuk keadaan ABM.

Pers. (4,57) disubstitusi ke pers. (4.55) diperoleh energi kuasipartikel untuk keadaan BW

$$E_k = \sqrt{(\epsilon_k - \mu)^2 + \frac{3}{4\pi} \eta^2} \quad (4.59)$$

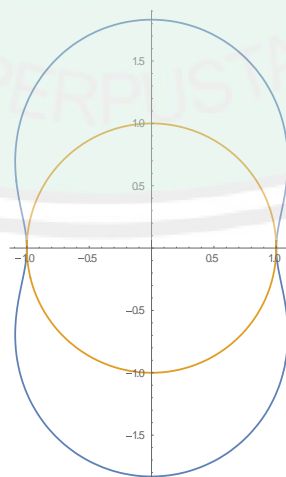
Energi kuasipartikel BCS untuk keadaan BW divisualisasikan dengan menggunakan Wolfram Mathematica 10.0 tahun 2014 dalam gambar 4.4



Gambar 4.4 Grafik Energi Kuasipartikel dalam Koordinat Polar (r, θ) untuk Keadaan BW

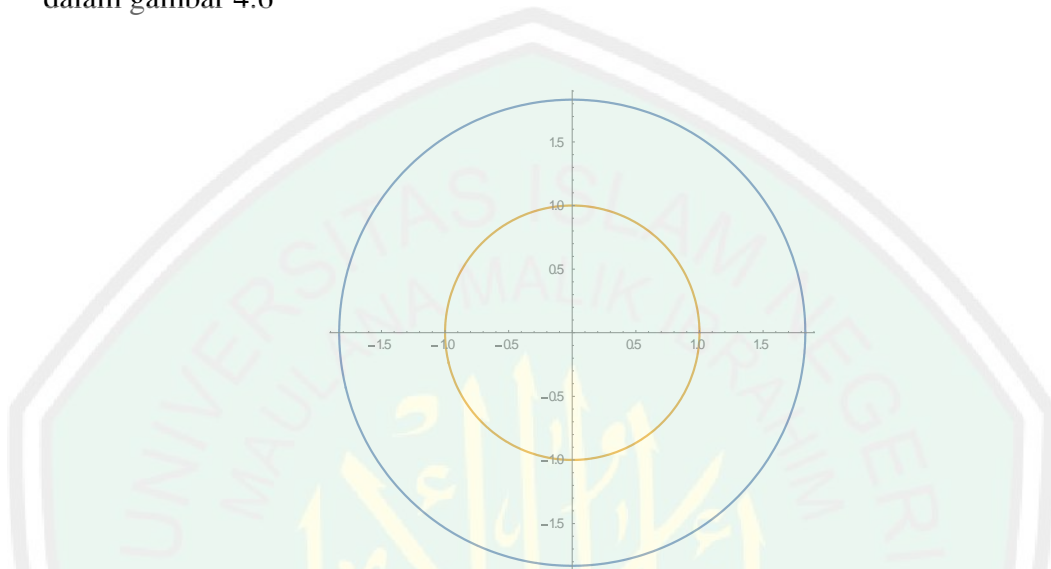
Dalam gambar 4.4, variabel r menunjukkan nilai energi kuasipartikel E_k . Sedangkan θ menunjukkan perputaran sudut θ . Gambar 4.3 menunjukkan bahwa energi kuasipartikel nilainya konstan pada sudut θ untuk keadaan BW.

Energi kuasipartikel BCS dan energi kinetik untuk keadaan ABM divisualisasikan dengan menggunakan Wolfram Mathematica 10.0 tahun 2014 dalam gambar 4.5



Gambar 4.5 Grafik Energi Kuasipartikel BCS (Biru) dan Energi Kinetik (Kuning) dalam Koordinat Polar (r, θ) untuk Keadaan ABM

Energi kuasipartikel BCS dan energi kinetik untuk keadaan BW divisualisasikan dengan menggunakan Wolfram Mathematica 10.0 tahun 2014 dalam gambar 4.6



Gambar 4.6 Grafik Energi Kuasipartikel BCS (Biru) dan Energi Kinetik (Kuning) dalam Koordinat Polar (r, θ) untuk Keadaan BW

Dalam gambar 4.5 dan 4.6, variabel r menunjukkan nilai energi kuasipartikel, E_k untuk warna biru dan energi kinetik, ϵ_k untuk warna kuning. Sedangkan θ menunjukkan perputaran sudut θ . Gambar 4.5 dan 4.6 menunjukkan bahwa *gap* antara warna biru dan kuning bernilai nol pada sudut θ sama dengan 0° dan 180° untuk keadaan ABM atau fase A. Akan tetapi pada keadaan BW atau fase B, *gap* bernilai konstan pada setiap sudut θ . Oleh karena itu, sifat superfluida fase B lebih stabil dibandingkan dengan fase A.

BAB V KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

1. Parameter *gap* BCS, $|\mathbf{d}(\mathbf{k})|$ memiliki dua keadaan yakni ABM dan BW.

Untuk keadaan ABM

$$|\mathbf{d}(\mathbf{k})| = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin \theta \quad (5.1)$$

Keadaan ABM ini merepresentasikan fase ${}^3\text{He-A}$. Untuk keadaan BW

$$|\mathbf{d}(\mathbf{k})| = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \quad (5.2)$$

Keadaan ABM ini merepresentasikan fase ${}^3\text{He-A}$

2. ${}^3\text{He}$ memiliki energi kuasipartikel yang identik dengan energi kuasipartikel ${}^4\text{He}$. Energi kuasipartikel ${}^4\text{He}$ adalah

$$E_k = \sqrt{(\epsilon_k - \mu)^2 + |\mathbf{d}(\mathbf{k})|^2} \quad (5.3)$$

Sedangkan Energi kuasipartikel ${}^3\text{He}$ adalah

$$E_k = \sqrt{(\epsilon_k - \mu)^2 + |\Delta|^2} \quad (5.4)$$

Dalam hal ini parameter *gap* BCS atom ${}^3\text{He}$, $|\mathbf{d}(\mathbf{k})|$ identik dengan energi *gap* BCS atom ${}^4\text{He}$ $|\Delta|$. Hanya saja $|\mathbf{d}(\mathbf{k})|$ berbentuk vektor sedangkan $|\Delta|$ berbentuk skalar.

5.2 Saran

Penelitian ini bisa dilanjutkan dengan kajian superfluida dalam ranah relativistik dan pada suhu tinggi.

DAFTAR PUSTAKA

- Allen, J.F. and Jones, H. 1938. *Nature*. 141.
- Anderson, P. W and Morel, P. 1961. *Phys. Rev.* 123.
- Annett, J.F. 2004. *Superconductivity, Superfluids and Condensates*. London: Oxford University Press.
- Balian, R dan Werthamer, N.R. 1963. *Phys. Rev.* 131.
- Bardeen, J, Cooper, L.N, dan Schrieffer, J.R. 1957. *Theory of Superconductivity*. Urbana: Physic Department University of Illinois.
- Boas, M.L. 1983. *Mathematical Methods in The Physical Sciences*. New York: John Wiley & Sons.
- Brueckner, K. A.; Soda, T.; Anderson, P. W.; Morel, P. 1960. *Phys. Rev.* 118.
- Einstein, Albert. 1925. *Sitzber*. Berlin: Kgl Preuss Akad Wiss.
- Griffith, David. 2005. *Introduction to Quantum Mechanic Second Edition*. New York: Pearson Prentice Hall.
- Jones, R.A.L. 2002. *Soft Condensed Matter*. Oxford: Oxford University Press.
- Kapitza, P. 1938. *Viscosity of Liquid Helium below the λ Point Nature*. 141.
- Keesom, W. H. and van der Ende, J. N. 1930. *Helium*. Amsterdam: Comm. Kamerlingh Onnes Lab.
- Khalatnikov, I. M. 1965. *Introduction to the Theory of Superfluidity*. New York: Benjamin.
- Khomskii, Daniel. 2010. *Basic Aspects of The Quantum Theory of Solids*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Legget, A. J. 1974. *A Theoretical Descriptoin of The New Phases of Liquid ^3He* . Falmer Brighton: University of Sussex.
- Leggett, A.J. 2002. *J. Superfluid ^3He* . Urbana: Department of Physics University of Illinois.
- London, Fritz. 1950. *Nature*. New York: John Wiley & Sons.

- Ma'shum, Muhammad. 2010. *Amshilatut Tashrifiyah Lil Madaris Salafuiyah Syafii'iyah*. Surabaya: Salim Nabhan.
- Misener, A. D; Wilhelm, J. O.; Clark, A. R. 1935. Proc. Roy. Soc. Amsterdam. 151.
- Onnes, H.K. 1913 *Further Experiments with Liquid Helium*. Leiden: Comm Physic Lab University Leiden.
- Osheroff, D. D.; Richardson, R. C.; Lee, D. M. 1972. *Evidence for a New Phase of Solid He³*. *Phys. Rev. Lett.* 29.
- Pethick, C.J.; Smith, H. 2001. *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*, Cambridge: Cambridge University Press.
- Pines, D.; Nozieres, P. 1999. *The Theory of Quantum Liquids, Vol. II, Superfluid Bose Liquids*. Cambridge: Perseus Books.
- Qarni, Aidh. 2008. *Tafsir Muyassar*. Jakarta: Qisthi Press.
- Rickayzen, G. 1965. *Theory of Superconductivity*. New York: Interscience.
- Schrieffer, J.R. 1964. *Theory of Superconductivity*. Reading: Benjamin.
- Shihab, M. Quraish. 2003. *Tafsir Al-Mishbah Pesan, Kesan dan Keserasian al-Quran*. Jakarta: Lentera Hati.
- Suyuti, Jalaluddin; Mahali, Jalaluddin. 2004. *Tafsirul Quranil Adhim*. Surabaya: Nurul Huda.
- Vollhardt, D. dan Wolfe, P. 1990. *The Superfluid Phases of ³He*. London: Taylor and Francis.
- Waldram, J.R. 1996. *Superconductivity of Metals and Cuprates*. Bristol: Institute of Physics.

LAMPIRAN 1

$$\begin{aligned}
\{b_{k\sigma}, b_{k'\sigma'}^+\} &= \{u_k^* c_{k\sigma} - v_k^* c_{k\sigma}^+, v_k c_{k'\sigma'} + u_k c_{k'\sigma'}^+\} \\
&= u_k^* v_k \{c_{k\sigma}, c_{k'\sigma'}\} + u_k^* u_k \{c_{k\sigma}, c_{k'\sigma'}^+\} - v_k^* v_k \{c_{k\sigma}^+, c_{k'\sigma'}\} - \\
&\quad v_k^* u_k \{c_{k\sigma}^+, c_{k'\sigma'}^+\} \\
&= u_k^* u_k \{c_{k\sigma}, c_{k'\sigma'}^+\} - v_k^* v_k \{c_{k\sigma}^+, c_{k'\sigma'}\} \\
&= u_k^* u_k \{c_{k\sigma}, c_{k'\sigma'}^+\} + v_k^* v_k \{c_{k'\sigma'}, c_{k\sigma}^+\} \\
&= (|u_k|^2 + |v_k|^2) \{c_{k'\sigma'}, c_{k\sigma}^+\} \\
&= \delta_{kk'} \delta_{\sigma\sigma'} \\
\{b_{k\sigma}^+, b_{k'\sigma'}^+\} &= \{v_k c_{k\sigma} + u_k c_{k\sigma}^+, v_k c_{k'\sigma'} + u_k c_{k'\sigma'}^+\} \\
&= v_k v_k \{c_{k\sigma}, c_{k'\sigma'}\} + v_k u_k \{c_{k\sigma}, c_{k'\sigma'}^+\} + u_k v_k \{c_{k\sigma}^+, c_{k'\sigma'}\} + \\
&\quad u_k u_k \{c_{k\sigma}^+, c_{k'\sigma'}^+\} \\
&= v_k u_k \{c_{k\sigma}, c_{k'\sigma'}^+\} + u_k v_k \{c_{k\sigma}^+, c_{k'\sigma'}\} \\
&= v_k u_k \{c_{k\sigma}, c_{k'\sigma'}^+\} - u_k v_k \{c_{k\sigma}, c_{k'\sigma'}^+\} \\
&= 0 \\
\{b_{k\sigma}, b_{k'\sigma'}\} &= \{u_k^* c_{k\sigma} - v_k^* c_{k\sigma}^+, u_k^* c_{k'\sigma'} - v_k^* c_{k'\sigma'}^+\} \\
&= u_k^* u_k^* \{c_{k\sigma}, c_{k'\sigma'}\} - u_k^* v_k^* \{c_{k\sigma}, c_{k'\sigma'}^+\} - v_k^* u_k^* \{c_{k\sigma}^+, c_{k'\sigma'}\} + \\
&\quad v_k^* v_k^* \{c_{k\sigma}^+, c_{k'\sigma'}^+\} \\
&= -u_k^* v_k^* \{c_{k\sigma}, c_{k'\sigma'}^+\} - v_k^* u_k^* \{c_{k\sigma}^+, c_{k'\sigma'}\} \\
&= -u_k^* v_k^* \{c_{k\sigma}, c_{k'\sigma'}^+\} + v_k^* u_k^* \{c_{k'\sigma'}, c_{k\sigma}^+\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

LAMPIRAN 2

$$\left| \begin{pmatrix} \epsilon_k - \mu & 0 & -d_x + id_y & d_z \\ 0 & \epsilon_k - \mu & d_z & d_x + id_y \\ -d_x^* - id_y^* & d_z^* & -(\epsilon_k - \mu) & 0 \\ d_z^* & d_x^* - id_y^* & 0 & -(\epsilon_k - \mu) \end{pmatrix} - E_k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{pmatrix} (\epsilon_k - \mu) - E_k & 0 & -d_x + id_y & d_z \\ 0 & (\epsilon_k - \mu) - E_k & d_z & d_x + id_y \\ -d_x^* - id_y^* & d_z^* & -(\epsilon_k - \mu) - E_k & 0 \\ d_z^* & d_x^* - id_y^* & 0 & -(\epsilon_k - \mu) - E_k \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$0 = ((\epsilon_k - \mu) - E_k) \left| \begin{pmatrix} (\epsilon_k - \mu) - E_k & d_z & d_x + id_y \\ d_z^* & -(\epsilon_k - \mu) - E_k & 0 \\ d_x^* - id_y^* & 0 & -(\epsilon_k - \mu) - E_k \end{pmatrix} \right| +$$

$$(-d_x + id_y) \left| \begin{pmatrix} d_x + id_y & 0 & (\epsilon_k - \mu) - E_k \\ 0 & -d_x^* - id_y^* & d_z^* \\ -(\epsilon_k - \mu) - E_k & d_z^* & d_x^* - id_y^* \end{pmatrix} \right| +$$

$$d_z \left| \begin{pmatrix} 0 & (\epsilon_k - \mu) - E_k & d_z \\ -d_x^* - id_y^* & d_z^* & -(\epsilon_k - \mu) - E_k \\ d_z^* & d_x^* - id_y^* & 0 \end{pmatrix} \right|$$

Kemudian dihitung tiap sukunya. Suku pertama

$$= ((\epsilon_k - \mu) - E_k) \left| \begin{pmatrix} (\epsilon_k - \mu) - E_k & d_z & d_x + id_y \\ d_z^* & -(\epsilon_k - \mu) - E_k & 0 \\ d_x^* - id_y^* & 0 & -(\epsilon_k - \mu) - E_k \end{pmatrix} \right|$$

$$= ((\epsilon_k - \mu) - E_k) \{ ((\epsilon_k - \mu) - E_k) (-(\epsilon_k - \mu) - E_k)^2 - |d_z|^2 (-(\epsilon_k - \mu) - E_k) - (-(\epsilon_k - \mu) - E_k) (d_x^* - id_y^*) (d_x + id_y) \}$$

$$= ((\epsilon_k - \mu)^2 - E_k^2)^2 - |d_z|^2 ((\epsilon_k - \mu)^2 - E_k^2) - ((\epsilon_k - \mu)^2 - E_k^2) (|d_x|^2 + |d_y|^2 + id_x^* d_y - id_x d_y^*)$$

$$\begin{aligned}
&= ((\epsilon_k - \mu)^2 - E_k^2)^2 - ((\epsilon_k - \mu)^2 - E_k^2) (|d_x|^2 + |d_y|^2 + |d_z|^2 + id_x^* d_y - id_x d_y^*) \\
&= \{((\epsilon_k - \mu)^2 - E_k^2)^2 - ((\epsilon_k - \mu)^2 - E_k^2)(|d|^2 + id_x^* d_y - id_x d_y^*)\}
\end{aligned}$$

di mana $|d|^2 = |d_x|^2 + |d_y|^2 + |d_z|^2$. Kemudian suku kedua,

$$\begin{aligned}
&= (-d_x + id_y) \left| \begin{pmatrix} d_x + id_y & 0 & (\epsilon_k - \mu) - E_k \\ 0 & -d_x^* - id_y^* & d_z^* \\ -(\epsilon_k - \mu) - E_k & d_z^* & d_x^* - id_y^* \end{pmatrix} \right| \\
&= (-d_x + id_y) \left\{ (d_x + id_y) \left((-d_x^* - id_y^*)(d_x^* - id_y^*) - (d_z^*)^2 \right) - \right. \\
&\quad \left. ((\epsilon_k - \mu) - E_k)(-\epsilon_k - \mu) - E_k(-d_x^* - id_y^*) \right\} \\
&= (-d_x + id_y) \left\{ (d_x + id_y) \left(-(d_x^*)^2 - (d_y^*)^2 - (d_z^*)^2 \right) - (E_k^2 - \right. \\
&\quad \left. (\epsilon_k - \mu)^2)(-d_x^* - id_y^*) \right\} \\
&= \left\{ ((d_x)^2 + (d_y)^2) \left((d_x^*)^2 + (d_y^*)^2 + (d_z^*)^2 \right) - (E_k^2 - (\epsilon_k - \right. \\
&\quad \left. \mu)^2) (|d_x|^2 + |d_y|^2 - id_x^* d_y + id_x d_y^*) \right\}
\end{aligned}$$

Suku ketiga

$$\begin{aligned}
&= d_z \left| \begin{pmatrix} 0 & (\epsilon_k - \mu) - E_k & d_z \\ -d_x^* - id_y^* & d_z^* & -(\epsilon_k - \mu) - E_k \\ d_z^* & d_x^* - id_y^* & 0 \end{pmatrix} \right| \\
&= -d_z \left\{ (E_k^2 - (\epsilon_k - \mu)^2) d_z^* + d_z \left((-d_x^* - id_y^*)(d_x^* - id_y^*) - (d_z^*)^2 \right) \right\} \\
&= \left\{ -(E_k^2 - (\epsilon_k - \mu)^2) |d_z|^2 + (d_z)^2 \left((d_x^*)^2 + (d_y^*)^2 + (d_z^*)^2 \right) \right\}
\end{aligned}$$

Setelah itu, dihitung hasil penjumlahan ketiga suku tersebut

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \left(E_k^2 - (\epsilon_k - \mu)^2 \right)^2 - \left(E_k^2 - (\epsilon_k - \mu)^2 \right) (|\mathbf{d}|^2 + id_x^* d_y - id_x d_y^*) \right\} + \\
&\quad \left\{ \left((d_x)^2 + (d_y)^2 \right) \left((d_x^*)^2 + (d_y^*)^2 + (d_z^*)^2 \right) - \left(E_k^2 - (\epsilon_k - \mu)^2 \right) \left(|d_x|^2 + |d_y|^2 - id_x^* d_y + id_x d_y^* \right) \right\} + \left\{ - \left(E_k^2 - (\epsilon_k - \mu)^2 \right) |d_z|^2 + \right. \\
&\quad \left. (d_z)^2 \left((d_x^*)^2 + (d_y^*)^2 + (d_z^*)^2 \right) \right\} \\
&= \left\{ \left(E_k^2 - (\epsilon_k - \mu)^2 \right)^2 - \left(E_k^2 - (\epsilon_k - \mu)^2 \right) \left(|\mathbf{d}|^2 + |d_x|^2 + |d_y|^2 + |d_z|^2 \right) \right\} + \left\{ \left((d_x)^2 + (d_y)^2 + (d_z)^2 \right) \left((d_x^*)^2 + (d_y^*)^2 + (d_z^*)^2 \right) \right\} \\
&= \left(E_k^2 - (\epsilon_k - \mu)^2 \right)^2 - 2 \left(E_k^2 - (\epsilon_k - \mu)^2 \right) |\mathbf{d}|^2 + (|d_x|^2)^2 + (|d_y|^2)^2 + \\
&\quad (|d_z|^2)^2 + (d_x d_y^*)^2 + (d_x d_z^*)^2 + (d_x^* d_y)^2 + (d_x^* d_z)^2 + (d_y d_z^*)^2 + \\
&\quad (d_y^* d_z)^2.
\end{aligned}$$

Lalu diberi suku tambahan berupa $2|d_x|^2|d_y|^2 + 2|d_y|^2|d_z|^2 + 2|d_x|^2|d_z|^2 - 2|d_x|^2|d_y|^2 - 2|d_y|^2|d_z|^2 - 2|d_x|^2|d_z|^2$. Maka diperoleh

$$\begin{aligned}
&= \left(E_k^2 - (\epsilon_k - \mu)^2 \right)^2 - 2 \left(E_k^2 - (\epsilon_k - \mu)^2 \right) |\mathbf{d}|^2 + (|d_x|^2)^2 + (|d_y|^2)^2 + \\
&\quad (|d_z|^2)^2 + 2|d_x|^2|d_y|^2 + 2|d_y|^2|d_z|^2 + 2|d_x|^2|d_z|^2 - 2|d_x|^2|d_y|^2 - \\
&\quad 2|d_y|^2|d_z|^2 - 2|d_x|^2|d_z|^2 + (d_x d_y^*)^2 + (d_x d_z^*)^2 + (d_x^* d_y)^2 + \\
&\quad (d_x^* d_z)^2 + (d_y d_z^*)^2 + (d_y^* d_z)^2 \\
&= \left(E_k^2 - (\epsilon_k - \mu)^2 \right)^2 - 2 \left(E_k^2 - (\epsilon_k - \mu)^2 \right) |\mathbf{d}|^2 + (|\mathbf{d}|^2)^2 - \\
&\quad 2|d_x|^2|d_y|^2 - 2|d_y|^2|d_z|^2 - 2|d_x|^2|d_z|^2 - (d_x d_y^*)^2 + (d_x d_z^*)^2 + \\
&\quad (d_x^* d_y)^2 + (d_x^* d_z)^2 + (d_y d_z^*)^2 + (d_y^* d_z)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left((E_k^2 - (\epsilon_k - \mu)^2) \right)^2 - 2(E_k^2 - (\epsilon_k - \mu)^2)|\mathbf{d}|^2 + (|\mathbf{d}|^2)^2 + \\
&\quad \left((d_x d_y^*)^2 - 2|d_x|^2 |d_y|^2 + (d_x^* d_y)^2 \right) + \left((d_y d_z^*)^2 - 2|d_y|^2 |d_z|^2 + \right. \\
&\quad \left. (d_y^* d_z)^2 \right) + \left((d_x d_z^*)^2 - 2|d_x|^2 |d_z|^2 + (d_x^* d_z)^2 \right) \\
&= \left((E_k^2 - (\epsilon_k - \mu)^2) \right)^2 - 2(E_k^2 - (\epsilon_k - \mu)^2)|\mathbf{d}|^2 + (|\mathbf{d}|^2)^2 + \\
&\quad (d_x d_y^* - d_x^* d_y)^2 + (d_y d_z^* - d_y^* d_z)^2 + (d_x d_z^* - d_x^* d_z)^2 \\
&= \left((E_k^2 - (\epsilon_k - \mu)^2) \right)^2 - 2(E_k^2 - (\epsilon_k - \mu)^2)|\mathbf{d}|^2 + (|\mathbf{d}|^2)^2 + \\
&\quad \begin{vmatrix} d_x & d_y \\ d_x^* & d_y^* \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} d_y & d_z \\ d_y^* & d_z^* \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} d_x & d_z \\ d_x^* & d_z^* \end{vmatrix}^2 \\
&= \left((E_k^2 - (\epsilon_k - \mu)^2) - |\mathbf{d}|^2 \right)^2 - |\mathbf{d} \times \mathbf{d}^*|^2 \\
&\quad |\mathbf{d} \times \mathbf{d}^*|^2 = \left((E_k^2 - (\epsilon_k - \mu)^2) - |\mathbf{d}|^2 \right)^2 \\
&\quad \pm |\mathbf{d} \times \mathbf{d}^*| = \left((E_k^2 - (\epsilon_k - \mu)^2) - |\mathbf{d}|^2 \right) \\
&\quad E_k = \pm \sqrt{(\epsilon_k - \mu)^2 + |\mathbf{d}|^2 \pm |\mathbf{d} \times \mathbf{d}^*|}.
\end{aligned}$$

LAMPIRAN 3

Nilai $Y_{11}(\theta_k, \phi_k)$

$$\begin{aligned}
 Y_{11}(\theta_k, \phi_k) &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} \\
 &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} \frac{(\sin \theta)^{|m|}}{2^{|l|!}} \frac{d^{l+|m|}}{d \cos \theta^{l+|m|}}} (\cos^2 \theta - 1)^l e^{im\phi} \\
 &= \sqrt{\frac{2 \times 1 + 1}{4\pi} \frac{(1-1)!}{(1+1)!} \frac{(\sin \theta)^1}{2^{1!}} \frac{d^{1+1}}{d \cos \theta^{1+1}}} (\cos^2 \theta - 1) e^{i\phi} \\
 &= \sqrt{\frac{3}{4\pi} \frac{1}{2} \frac{\sin \theta}{2} \frac{d^2}{d \cos \theta^2}} (\cos^2 \theta - 1) e^{i\phi} \\
 &= \sqrt{\frac{3}{8\pi} \frac{1}{2} \sin \theta} (2) e^{i\phi} \\
 &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}.
 \end{aligned}$$

Kemudian $Y_{1-1}(\theta_k, \phi_k)$

$$\begin{aligned}
 Y_{1-1}(\theta_k, \phi_k) &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} \\
 &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} \frac{(\sin \theta)^{|m|}}{2^{|l|!}} \frac{d^{l+|m|}}{d \cos \theta^{l+|m|}}} (\cos^2 \theta - 1)^l e^{im\phi} \\
 &= \sqrt{\frac{2 \times 1 + 1}{4\pi} \frac{(1-1)!}{(1+1)!} \frac{(\sin \theta)^1}{2^{1!}} \frac{d^{1+1}}{d \cos \theta^{1+1}}} (\cos^2 \theta - 1) e^{-i\phi} \\
 &= \sqrt{\frac{3}{4\pi} \frac{1}{2} \frac{\sin \theta}{2} \frac{d^2}{d \cos \theta^2}} (\cos^2 \theta - 1) e^{-i\phi} \\
 &= \sqrt{\frac{3}{8\pi} \frac{1}{2} \sin \theta} (2) e^{-i\phi} \\
 &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\phi}.
 \end{aligned}$$

Lalu $Y_{10}(\theta_k, \phi_k)$

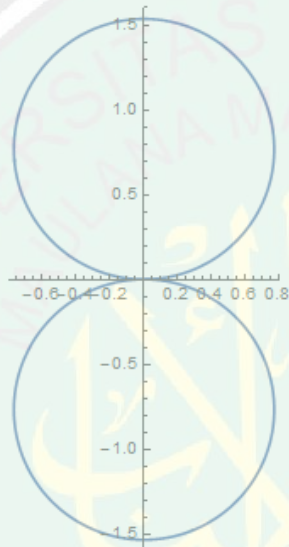
$$\begin{aligned} Y_{10}(\theta_k, \phi_k) &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} \\ &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} \frac{(\sin \theta)^{|m|}}{2^{|l|} l!} \frac{d^{l+|m|}}{d \cos \theta^{l+|m|}} (\cos^2 \theta - 1)^l e^{im\phi} \\ &= \sqrt{\frac{2 \times 1 + 1}{4\pi} \frac{(1-0)!}{(1+0)!}} \frac{(\sin \theta)^0}{2^{1!} 1!} \frac{d^{1+0}}{d \cos \theta^{1+0}} (\cos^2 \theta - 1) e^0 \\ &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{1}{2} \frac{d}{d \cos \theta} (\cos^2 \theta - 1) \\ &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{1}{2} \cos \theta (2) \\ &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta. \end{aligned}$$

Lampiran 4

Parameter *gap* BCS untuk keadaan ABM, dengan nilai $\eta = 1$.

$$|d| = \eta \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin \theta$$

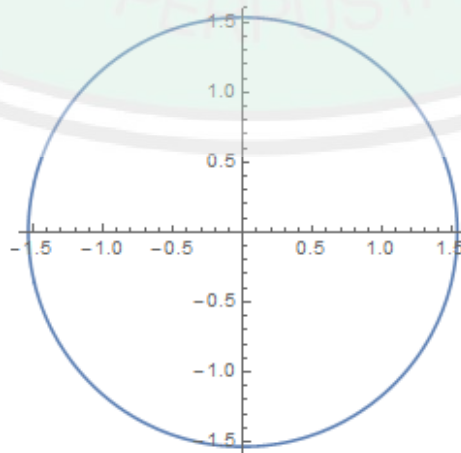
```
PolarPlot[Sqrt[(3/4 Pi) * (Sin [θ]) ^2], {θ, 0, 2 Pi}]
```



Parameter *gap* BCS untuk keadaan BW dengan nilai $\eta = 1$

$$|d| = \eta \sqrt{\frac{3}{4\pi}}$$

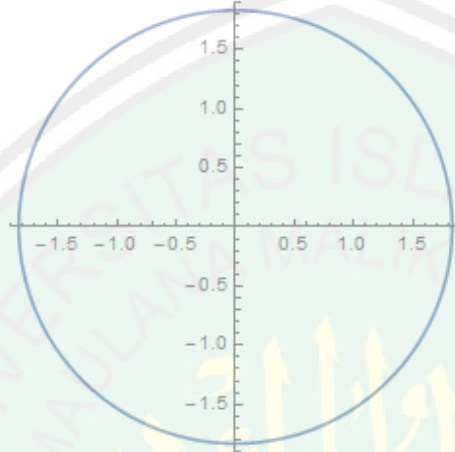
```
PolarPlot[Sqrt[(3/4 Pi)], {θ, 0, 2 Pi}]
```



Energi kuasipartikel untuk keadaan BW, dengan nilai $\epsilon_k = 3$, $\mu = 2$ dan $\eta = 1$

$$E_k = \sqrt{(\epsilon_k - \mu)^2 + \frac{3}{4\pi}\eta^2}$$

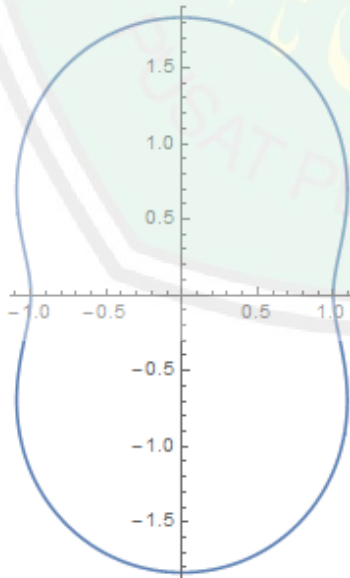
`PolarPlot[Sqrt[(3 - 2)^2 + (3/4 Pi)], {θ, 0, 2 Pi}]`



Energi kuasipartikel untuk keadaan ABM, dengan nilai $\epsilon_k = 3$, $\mu = 2$ dan $\eta = 1$

$$E_k = \sqrt{(\epsilon_k - \mu)^2 + \frac{3}{4\pi}\eta^2 \sin^2 \theta}$$

`PolarPlot[Sqrt[(3 - 2)^2 + (3/4 Pi) * (Sin [θ])^2], {θ, 0, 2 Pi}]`

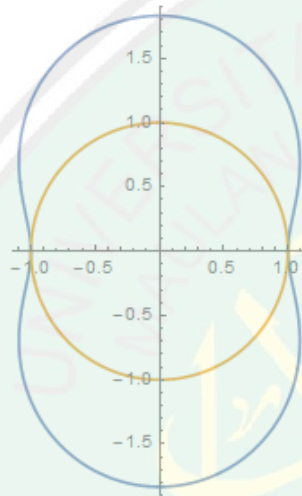


Energi kuasipartikel untuk keadaan ABM dan energi kinetik dikurang potensial kimia dengan nilai $\epsilon_k = 3, \mu = 2$ dan $\eta = 1$

$$E_k = \sqrt{(\epsilon_k - \mu)^2 + \frac{3}{4\pi} \eta^2 \sin^2 \theta}$$

$$\mathcal{E} = (\epsilon_k - \mu)$$

`PolarPlot[{Sqrt[(3 - 2)^2 + (3/4 Pi) * (Sin[θ])^2]}, 1], {θ, 0, 2 Pi}]`

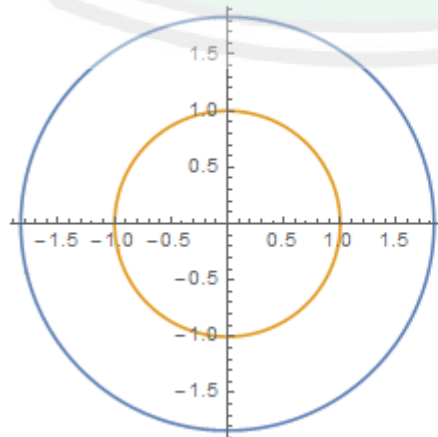


Energi kuasipartikel untuk keadaan BW dan energi kinetik dikurang potensial kimia dengan nilai $\epsilon_k = 3, \mu = 2$ dan $\eta = 1$

$$E_k = \sqrt{(\epsilon_k - \mu)^2 + \frac{3}{4\pi} \eta^2}$$

$$\mathcal{E} = (\epsilon_k - \mu)$$

`PolarPlot[{Sqrt[(3 - 2)^2 + (3/4 Pi)]}, 1], {θ, 0, 2 Pi}]`





KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341) 551345 Fax. (0341) 572553

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : AHMAD ZAINUL MUSTHOFA
NIM : 13640065
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Fisika
Judul Skripsi : Studi Fase Superfluida dari Atom ^3He dengan Pendekatan Teori BCS
Pembimbing I : Erika Rani, M.Si
Pembimbing II : Erna Hastuti, M.Si

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan
1	10 Juli 2017	Pembimbing I (Bab I, II, III)	
2	28 Juli 2017	Pembimbing I (Bab I, II, III ACC)	
3	15 Agustus 2017	Pembimbing I (Hamiltonian BCS)	
4	7 September 2017	Pembimbing I (Hasil Penurunan Parameter <i>Gap</i> BCS)	
5	15 September 2017	Pembimbing I (Hasil Penurunan Energi Kuasipartikel)	
6	17 Oktober 2017	Pembimbing I (Bab IV dan V, ACC)	
7	24 Oktober 2017	Pembimbing II (Integrasi dan Semua Bab)	
8	2 November 2017	Pembimbing II (Integrasi dan Semua Bab)	
9	29 November 2017	Pembimbing II (Integrasi dan Semua Bab)	
10	4 Desember 2017	Pembimbing II (ACC)	

Malang, 9 Januari 2018
Mengetahui,
Ketua Jurusan Fisika,



Dr. Abdul Basid, M.Si
NIP. 19650504199003 1 003