ANALISIS TRANSFORMASI FOURIER DALAM PENYELESAIAN PERSAMAAN PANAS

SKRIPSI

OLEH
MOH. ALEX MAGHFUR
NIM. 13610028

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018

ANALISIS TRANSFORMASI FOURIER DALAM PENYELESAIAN PERSAMAAN PANAS

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Moh. Alex Maghfur
NIM. 13610028

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018

ANALISIS TRANSFORMASI FOURIER DALAM PENYELESAIAN PERSAMAAN PANAS

SKRIPSI

Oleh
Moh. Alex Maghfur
NIM. 13610028

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 4 Desember 2017

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si	Ach. Nashichuddin, MA
NIP. 19770521 200501 2 004	NIP. 19730705 200003 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

ANALISIS TRANSFORMASI FOURIER DALAM PENYELESAIAN PERSAMAAAN PANAS

SKRIPSI

Oleh
Moh. Alex Maghfur
NIM. 13610028

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 21 Desember 2017

Penguji Utama	: Dr. Usman Pagalay, M.Si	....
Ketua Penguji	: Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D	....
Sekretaris Penguji	: Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si	....
Anggota Penguji	: Ach. Nashichuddin, MA	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 196510414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama	: Moh. Alex Maghfur
NIM	: 13610028
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Analisis Transformasi Fourier dalam Penyelesaian Persamaan Panas

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri. Bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang 6 Desember 2017
Yang membuat pernyataan

METERAI TEMPEL
TGL. 20
1395FAEF859261209
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Moh. Alex Maghfur
NIM. 13610028

MOTO

"If they can do it, why not us?"

(Jika mereka bisa melakukannya, mengapa kita tidak?)

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Kedua orang tua tercinta, Imam Syafaat dan Parmiatin, keluarga besar Imam Syafaat, Bani Supriyadi dan Bani Tukah, serta teman-teman Matematika 2013 “SABSET” yang senantiasa memberikan dukungan, doa, dan motivasi bagi penulis.

KATA PENGANTAR

Assalamu 'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Puji syukur ke hadirat Allah Swt, sehingga dengan rahmat, taufik serta hidayah-Nya skripsi dengan judul "Analisis Transformasi Fourier dalam Penyelesaian Persamaan Panas" ini dapat diselesaikan. Sholawat dan salam semoga tetap tercurahkan kepada nabi Muhammad Saw yang telah membimbing manusia menuju jalan yang lurus.

Dalam proses penyelesaian skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan, arahan, dan sumbangan pemikiran dari berbagai pihak. Oleh karena itu penulis menyampaikan banyak terima kasih kepada :

1. Prof. Dr. H. Abd. Haris, M.Ag selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si selaku Dosen Pembimbing I yang telah banyak memberikan bimbingan dengan segala ilmu yang dimiliki serta senantiasa memberikan doa, arahan, nasihat, dan motivasi kepada penulis.
5. Ach. Nashichuddin, M.A selaku Dosen Pembimbing II yang telah banyak memberikan bimbingan dengan segala ilmu yang dimiliki serta senantiasa memberikan doa, arahan, nasihat, dan motivasi kepada penulis.

6. Kedua orang tua dan seluruh keluarga yang telah mendukung dan memberikan motivasi kepada saya baik secara moril maupun spiritual sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik.
7. Teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2013 “SABSET”, Matematika kelas A, dan teman-teman kelompok peminatan matematika terapan “APPLIED MATH” yang senantiasa memberikan dukungan dan semangat.
8. Semua pihak yang telah membantu dalam pengerjaan serta dalam penyelesaian penyusunan skripsi ini.

Akhirnya pemulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang membacanya.

Wassalamu’alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Malang, Desember 2017

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR SIMBOL

Simbol-simbol yang digunakan dalam skripsi ini mempunyai makna yaitu sebagai berikut

ρ	: Massa jenis batang
x	: Variabel ruang
t	: Variabel waktu
$u(x,t)$	: Temperatur batang pada posisi x dan waktu t
$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$	: Turunan parsial pertama panas terhadap waktu t
$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$	: Turunan parsial kedua panas terhadap ruang x
k	: Konstanta difusifitas termal
$\mathcal{F}$	: Operator transformasi Fourier
ω	: Transformasi variabel ruang

ABSTRAK

Maghfur, Moh. Alex . 2017. Analisis Transformasi Fourier dalam Penyelesaian Persamaan Panas. Skripsi Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si. (II) Ach. Nashichuddin, MA

Kata kunci: Domain tak hingga, persamaan panas, transformasi Fourier.

Persamaan diferensial parsial merupakan persamaan yang memuat turunan parsial dari satu atau lebih variabel terikat terhadap dua atau lebih variabel bebas. Salah satu contoh dari persamaan diferensial parsial adalah persamaan panas linier satu dimensi yang merepresentasikan distribusi panas pada suatu batang. Permasalahan perambatan panas umumnya digambarkan dalam suatu domain material batang yang memiliki panjang berhingga, namun permasalahan akan menjadi lebih sulit jika daerah tersebut berukuran sangat panjang, seperti contoh kabel panjang. Permasalahan tersebut akan lebih mudah diselesaikan dengan mengasumsikan panjang kabel tersebut mendekati tak hingga. Transformasi Fourier dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan panas pada kasus domain tak hingga. Oleh karena itu, penelitian ini bertujuan untuk menganalisis transformasi Fourier dalam penyelesaian persamaan panas pada domain tak hingga.

Persamaan panas ditransformasikan sehingga diperoleh persamaan diferensial biasa. Selanjutnya, persamaan diferensial biasa tersebut diselesaikan untuk menghasilkan penyelesaian transformasi. Penyelesaian persamaan diferensial parsial diperoleh dengan melakukan invers transformasi. Selanjutnya, diterapkan prinsip konvolusi sehingga menghasilkan penyelesaian dalam bentuk integral tunggal yang selanjutnya bisa diperiksa keabsahan penyelesaiannya. Setelah diperoleh penyelesaian persamaan, dilakukan simulasi dengan menggunakan fungsi error pada software Matlab.

Berdasarkan hasil simulasi, panas berdistribusi dari temperatur tinggi ke temperatur rendah sepanjang kabel. Untuk waktu yang semakin besar, maka panas akan semakin menyebar ke seluruh kabel sedemikian sehingga temperatur mendekati nol di sepanjang kabel. Konstanta difusifitas termal mempengaruhi kecepatan perambatan panas. Simulasi pada batang berhingga menunjukkan temperatur kedua ujung batang yang selalu bernilai nol, sedangkan karena tidak memungkinkan simulasi keseluruhan kabel maka simulasi pada kabel panjang hanya dilakukan pada bagian yang diberikan panas, sehingga kedua ujung temperaturnya tidak nol.

ABSTRACT

Maghfur, Moh. Alex. 2017. Fourier Transform Analysis on Solving Heat Equation. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si. (II) Ach. Nashichuddin, MA.

Keyword: Fourier transform, heat equation, infinite domain.

Partial differential equation is an equation containing a partial derivative of one or more dependent variables to two or more independent variables. One example of a partial differential equation is one-dimensional linear heat equation that represents the heat distribution on a rod. Most of the problem of heat diffusion are described on a finite domain, but the problem will become more difficult if the domain is very long, for example a long cable. The problem will be more easily solved by assuming the cable length tends to infinite. Fourier transforms can be used to solve heat diffusion equations in the case of infinite domain. Therefore, this study aims to analyze Fourier transform on solving heat equations in infinite domains.

The heat equation is transformed to obtain the ordinary differential equation. Furthermore, that ordinary differential equations are solved to produce a solution in the form of transformation. The solution of the partial differential equation is obtained by inverse transformation. Then by applying the principle of convolution, it produced a solution with a single integral form, which can be checked for the validity of the solution. After obtaining the equation solution, simulation is done by using the error function in Matlab software.

Based on the simulation results, the heat is distributed from high temperature to low temperature along the cable. For an increasingly large time, the heat will spread further throughout the cable so that the temperature approaches zero along the cable. The thermal diffusivity constant affects the speed of the heat diffusion. The simulation on the finite rod indicates the temperature of both ends of the rod which is always zero, but since it does not allow the simulation of the whole cable then the simulation on the long cable is only done on the part given the heat, so that both ends of the temperature are not zero.

ملخص

مغفور، محمد عليك. ٢٠١٧. تحليل تحويل Fourier على حل المعادلة الحرارية. البحث الجامعي. شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعة مولانا مالك إبراهيم مالانج الإسلامية الحكومية. المشرف: (١) آري كسمستوتي الماجستير. (٢) احمد نصيح الدين الماجستير.

الكلمات الرئيسية: تحويل Fourier، معادلات الحرارة، نطاقات غير محدودة.

تصوير مشكلة عن انتشار الحرارة بشكل عام في نطاق المادة القضيب محدود، ولكن المشكلة الحبل تصبح كالحبل الطويل أصعب إذا ذلك المنطقة طويلة جدا. يتم المشكلة بسهولة أكبر بافتراض طول الحبل قريب من غير محدود. تستخدم تحويل Fourier في حل معادلة نشر الحرارة في حالة النطاق غير المحدود.

معادلة نشر الحرارة تحويل للحصول المعادلة التفاضلية المعتمد. ثم يتم حل المعادلات التفاضلية المعتمد للحصول التمام التحويل. يتم حتى تحصول التمام معادلة التفاضلية الجزئية تواجد التحول العكسي. ثم يطبق مبدأ الإلتواء ليؤدي حتى تحصول في التمام انتخرال واحد بعد ذلك تستطع من صحة التسوية. بعد الحصول على المعادلة، فعل المحاكاة باستخدام وظيفة الخطأ في برنامج Matlab.

على نتائج المحاكاة، توزيع الحرارة من درجة عالية إلى درجة منخفضة على طول الحبل. لوقت أكبر، فالحرارة تنتشر الى جميع الحبل حتى درجة الحرارة تقترب الصفر على طول الحبل. يؤثر تأثير الانتشارية الحرارية على سرعة انتشار الحرارة. المحاكاة على الحبل المحدود يظهر درجة حرارة كلا طرفي الحبل صفر دائما ، ولكن أنه لا يسمح لمحاكاة جميع الحبل فالمحاكاة على الحبل طويل فعل الجزء الذى يعطى الحرارة يتم فقط على جزء نظرا للحرارة، حتى كلا طرفي درجتها ليس صفر.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Persamaan diferensial parsial merupakan persamaan yang memuat turunan parsial dari satu atau lebih variabel terikat terhadap dua atau lebih variabel bebas (Zill, 2009:2). Salah satu contoh dari persamaan diferensial adalah persamaan panas linier satu dimensi yang merepresentasikan distribusi panas pada suatu batang. Banyak metode yang dapat digunakan untuk menyelesaian persamaan diferensial parsial. Metode yang dapat digunakan dapat bersifat analitik maupun numerik. Penyelesaian persamaan diferensial dapat dilakukan secara analitik untuk memperoleh penyelesaian persamaan yang sesungguhnya, sehingga mampu menjadi acuan untuk metode-metode penyelesaian yang lainnya, seperti metode numerik.

Salah satu metode yang dapat digunakan untuk menyelesaian persamaan diferensial parsial adalah transformasi Fourier. Transformasi Fourier untuk suatu fungsi $f(x)$ diperoleh dengan mengekspansi deret Fourier dalam bentuk kompleks, sehingga diperoleh transformasi Fourier $F(\omega)$ dalam bentuk kompleks, dengan ω merupakan transformasi variabel x (Strauss, 2008:344). Untuk fungsi dua variabel seperti suhu $u(x,t)$, transformasi Fourier dari $u(x,t)$ terhadap ruang adalah $U(\omega,t)$. Transformasi Fourier dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial pada kasus domain yang besar.

Persamaan panas satu dimensi berbentuk persamaan diferensial parsial dengan suatu variabel terikat $u(x,t)$ dan variabel bebas x dan t (O'Neil, 2014:3).

Variabel u menyatakan suhu batang pada suatu titik di mana bergantung pada posisi titik x yang menyatakan ruang dan t yang menyatakan waktu. Selain itu, terdapat konstanta k yang menyatakan difusifitas termal dari material batang. Difusifitas termal menyatakan laju perambatan panas pada material batang dari daerah bersuhu tinggi ke daerah bersuhu rendah, yang besarnya sama dengan perbandingan antara konduktifitas termal material batang dengan panas jenis dan massa jenis material batang.

Persamaan panas dapat diselesaikan jika diberikan suatu informasi pada kondisi tertentu, yaitu kondisi awal dan kondisi batas. Kondisi pada waktu permulaan sebelum terjadinya perambatan panas disebut kondisi awal. Selain itu, diberikan juga kondisi pada kedua ujung batang yang disebut kondisi batas. Banyak metode yang bisa digunakan untuk menyelesaikan persamaan panas pada domain berhingga, seperti metode pemisahan variabel (Zauderer, 2006:211) dan metode numerik seperti metode beda hingga (Yang, 2005:406). Akan tetapi, permasalahan menjadi lebih sulit apabila domain yang digunakan sangat besar, sebagai contoh masalah perambatan panas pada suatu kabel atau yang sangat panjang. Permasalahan tersebut akan lebih mudah diselesaikan dengan menganggap panjang kabel mendekati tak hingga, sehingga menjadi permasalahan pada domain tak hingga (Humi, 1991:214).

Untuk menyelesaikan persamaan panas pada domain tak-hingga tersebut, dapat dilakukan dengan menggunakan metode transformasi dalam bentuk integral. Terdapat beberapa macam metode transformasi, salah satunya adalah metode transformasi Fourier. Penyelesaian persamaan diferensial parsial dengan menggunakan transformasi Fourier telah dibahas oleh beberapa penelitian. Negero

(2014) meneliti mengenai metode transformasi Fourier untuk penyelesaian persamaan diferensial parsial dengan penyelesaian berupa $u(x,t)$. Pertama, kedua ruas persamaan ditransformasikan sehingga menghasilkan persamaan diferensial biasa dengan variabel $U(\omega,t)$. Selanjutnya, persamaan diferensial biasa tersebut diselesaikan untuk menghasilkan penyelesaian dalam bentuk $U(\omega,t)$. Penyelesaian persamaan diferensial parsial dapat diperoleh dengan melakukan invers transformasi Fourier terhadap $U(\omega,t)$ sehingga menghasilkan penyelesaian $u(x,t)$.

Islam mengajarkan bahwa setiap permasalahan pasti memiliki jalan keluar. Begitu juga mengenai permasalahan perambatan panas pada domain tak hingga. Jika suatu persamaan panas menggunakan domain berhingga, mungkin permasalahan tersebut bisa diselesaikan dengan metode pemisahan variabel maupun metode numerik. Akan tetapi, jika permasalahan tersebut menggunakan domain yang sangat besar, maka terdapat cara lain untuk menyelesaikan permasalahan tersebut, yaitu menggunakan transformasi Fourier.

Allah swt berfiman dalam Q.S. Yusuf: 67

وَقَالَ يَٰبَنِيَّ لَا تَدۡخُلُواْ مِنۢ بَابٖ وَٰحِدٖ وَٱدۡخُلُواْ مِنۡ أَبۡوَٰبٖ مُّتَفَرِّقَةٖۖ وَمَآ أُغۡنِي عَنكُم مِّنَ ٱللَّهِ
مِن شَيۡءٍۖ إِنِ ٱلۡحُكۡمُ إِلَّا لِلَّهِۖ عَلَيۡهِ تَوَكَّلۡتُۖ وَعَلَيۡهِ فَلۡيَتَوَكَّلِ ٱلۡمُتَوَكِّلُونَ ٦٧

"Dan Ya´qub berkata: "Hai anak-anakku janganlah kamu (bersama-sama) masuk dari satu pintu gerbang, dan masuklah dari pintu-pintu gerbang yang berlain-lain; namun demikian aku tiada dapat melepaskan kamu barang sedikitpun dari pada (takdir) Allah.

Ayat ini menjelaskan mengenai kisah Nabi Yakub. Ketika beliau menyuruh anak-anaknya untuk pergi ke Mesir, mereka disuruh untuk tidak masuk secara bersamaan melalui satu pintu atau jalur masuk. Hal ini dilakukan karena untuk menghindari sifat dengki dan hasad karena mereka memiliki penampilan yang menarik (Ad-Dimasyqi, 2009:43). Begitu pula ketika manusia memiliki permasalahan. Ketika manusia mengalami kesulitan menyelesaikan suatu permasalahan dengan menggunakan suatu pendekatan maka dianjurkan untuk menggunakan pendekatan lain.

Penelitian ini diharapkan mampu menyelesaikan permasalahan perambatan panas pada suatu domain yang sangat besar, yang kemudian didekati dengan domain tak hingga, sehingga memudahkan untuk menentukan penyelesaiannya. Selain itu, karena domain yang digunakan sangat besar, maka simulasi tidak perlu dilakukan untuk keseluruhan domain, tetapi cukup dilakukan di sekitar domain yang terdapat sumber panas, sehingga akan memudahkan analisis simulasi. Fokus penelitian ini adalah pembahasan mengenai penyelesaian persamaan panas dengan menggunakan transformasi Fourier pada domain tak-hingga. Mengingat pentingnya pembahasan mengenai penyelesaian persamaan panas pada domain tak hingga, maka penelitian ini menjadi penting untuk dilakukan. Berdasarkan hal tersebut, maka penelitian ini berjudul "Analisis Transformasi Fourier dalam Penyelesaian Persamaan Panas".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang permasalahan, maka rumusan permasalahan dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimanakah analisis transformasi Fourier dalam penyelesaian persamaan panas pada domain tak hingga?

2. Bagaimanakah simulasi dan interpretasi dari penyelesaian persamaan panas pada domain tak hingga dengan menggunakan variasi difusifitas termal dan kondisi awal?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan yang hendak dicapai dalam penelitian ini adalah:

1. Menganalisis transformasi Fourier dalam penyelesaian persamaan panas pada domain tak hingga.
2. Menyimulasikan dan menginterpretasi penyelesaian persamaan panas pada domain tak hingga dengan menggunakan variasi difusifitas termal dan kondisi awal.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah:

1. Menghasilkan penyelesaian persamaan panas pada domain yang sangat besar yang didekati dengan domain tak hingga dengan menggunakan transformasi Fourier.
2. Mengetahui analisis simulasi dari distribusi penyebaran panas dengan kondisi awal dan difusifitas termal yang bervariasi tanpa perlu menyimulasikan keseluruhan domain.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah pada penelitian ini adalah:

1. Persamaan yang akan diselesaikan adalah persamaan panas satu dimensi pada domain tak-hingga (*infinite domain*) dengan menggunakan transformasi Fourier, yaitu

$$u_t = ku_{xx}, -\infty < x < \infty \tag{1.1}$$

yang memiliki kondisi awal

$$u(x,0) = f(x) \tag{1.2}$$

dan kondisi batas

$$\lim_{x \to \pm\infty} u(x,t) = 0. \tag{1.3}$$

(Negero, 2014:52)

2. Kondisi awal $f(x)$ yang digunakan berbentuk fungsi tangga (Negero, 2014:52) yaitu apabila diberikan satu atau beberapa daerah yang memiliki suhu selain nol tetapi daerah lainnya bersuhu nol, dengan nilai difusifitas termal k yang bervariasi.
3. Simulasi dilakukan secara analitik dengan menggunakan fungsi error yang telah tersedia pada MATLAB untuk menganalisis distribusi panas pada suatu domain tak-hingga untuk kondisi awal dan difusifitas termal yang bervariasi, serta membandingkan dengan simulasi penyelesaian panas pada domain berhingga.

1.6 Metode Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian studi kepustakaan (*library research*) dengan mengkaji literatur-literatur mengenai persamaan panas dan transformasi

Fourier. Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menyelesaikan persamaan panas dengan menggunakan transformasi Fourier, dengan langkah-langkah sebagai berikut:
   a. Mentransformasi setiap suku persamaan dengan menggunakan transformasi Fourier, sehingga diperoleh persamaan diferensial biasa dengan variabel $U(\omega, t)$.
   b. Menyelesaikan persamaan diferensial biasa, sehingga diperoleh penyelesaian $U(\omega, t)$ yang masih memuat konstanta C.
   c. Mentransformasi kondisi awal $u(x, 0) = f(x)$ menjadi $U(\omega, 0) = F(\omega)$ dengan menggunakan transformasi Fourier.
   d. Menerapkan transformasi kondisi awal ke dalam penyelesaian $U(\omega, t)$ untuk menentukan C.
   e. Melakukan invers transformasi Fourier $\mathcal{F}^{-1}[U(\omega, t)]$ untuk menghasilkan penyelesaian $u(x, t)$ yang memuat integral ganda.
   f. Menerapkan prinsip konvolusi sehingga menghasilkan penyelesaian akhir $u(x, t)$ dalam bentuk integral tunggal.
   g. Memeriksa keabsahan solusi $u(x, t)$ sehingga memenuhi persamaan awal dan kondisi awal.
2. Menyimulasikan penyelesaian persamaan panas pada domain tak hingga serta menginterpretasikannya untuk kondisi awal yang bervariasi dengan langkah-langkah sebagai berikut:
   a. Menerapkan kondisi awal $f(x)$ ke dalam penyelesaian $u(x, t)$.dan menyatakan penyelesaian $u(x, t)$ ke dalam bentuk kombinasi fungsi error.

b. Menyimulasikan penyelesaian $u(x,t)$ dengan kondisi awal $f(x)$ ke dalam Matlab.

c. Menginterpretasikan hasil simulasi penyelesaian $u(x,t)$ untuk kondisi awal $f(x)$ dengan menganalisis distribusi panas.

d. Menginterpretasikan hasil simulasi penyelesaian $u(x,t)$ untuk kondisi awal $f(x)$ dengan menganalisis pengaruh difusifitas termal k yang berbeda-beda terhadap laju penyebaran panas pada kabel.

e. Membandingkan simulasi penyelesaian persamaan panas pada domain berhingga dengan domain tak hingga.

3. Menyimpulkan hasil penelitian serta memberikan saran untuk penelitian selanjutnya.

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam penelitian ini terdiri dari empat bab, yaitu:

Bab I Pendahuluan

Bab ini menjelaskan mengenai latar belakang permasalahan pada penelitian, perumusan permasalahan, tujuan dari penelitian, metode yang digunakan pada penelitian, batasan permasalahan, manfaat yang akan diperoleh dari penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bab ini berisi kajian-kajian kepustakaan dan dasar teori yang menjadi landasan dalam penelitian mengenai penyelesaian persamaan panas dengan menggunakan transformasi Fourier. Kajian pustaka ini berisi deskripsi persamaa diferensial parsial, Transformasi Fourier, penurunan persamaan panas pada domain tak hingga, prinsip konvolusi dan definisi fungsi error, ayat Al-Qur'an yang membahas mengenai panas dan penyelesaian masalah, serta rujukan dan penelitian yang membahas mengenai penyelesaian persamaan panas dan transformasi Fourier.

Bab III Hasil Dan Pembahasan

Bab ini membahas mengenai penyelesaian persamaan panas dengan menggunakan transformasi Fourier, penerapan konvolusi untuk menghasilkan penyelesaian dalam bentuk integral tunggal, simulasi penyelesaian persamaan panas dan interpretasinya untuk kondisi awal, difusifitas termal, dan kondisi batas yang berbeda, serta kajian keagamaan yang berhubungan dengan penyelesaian persamaan panas dengan menggunakan transformasi Fourier.

Bab IV Penutup

Bab ini berisi kesimpulan dari hasil penelitian yang telah dibahas serta saran untuk penelitian kedepannya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial parsial merupakan persamaan yang memuat turunan parsial dari satu atau lebih variabel terikat terhadap dua atau lebih variabel bebas (Zill, 2009:2). Salah satu sifat dari persamaan diferensial parsial adalah terdapat lebih dari satu variabel bebas $x, y, \ldots$ Terdapat suatu variabel terikat $u(x, y, \ldots)$ yang merupakan fungsi yang belum diketahui. Terkadang turunan-turunannya ditulis $\partial u/\partial x = u_x$. Bentuk umum dari persamaan diferensial parsial orde satu dengan dua variabel bebas adalah

$$F\left(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)\right) = F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \tag{2.1}$$

dengan orde dari persamaan adalah derajat turunan tertinggi pada persamaan. Sedangkan bentuk umum dari persamaan diferensial parsial orde dua dengan dua variabel bebas adalah

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0 \tag{2.2}$$

(Strauss, 2008:3)

Seperti persamaan diferensial biasa, persamaan diferensial parsial juga diklasifikasikan menjadi persamaan linier dan non linier. Jika variabel terikat dan turunan parsial dari persamaan hanya berpangkat satu, maka persamaan tersebut dikatakan linier. Misalkan u adalah variabel terikat dan misalkan x dan y adalah variabel bebas, maka bentuk umum dari persamaan diferensial parsial linier orde dua adalah

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G \tag{2.3}$$

di mana koefisien-koefisien $A, B, C, \dots, G$ merupa fungsi dari x dan y. jika $G(x, y) = 0$, persamaan (2.3) dikatakan homogen. Sebaliknya, jika $G(x, y) \neq 0$, maka persamaan (2.3) dikatakan non homogen. Sebagai contoh, persamaan panas satu dimensi

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

adalah persamaan linier homogen. Penyelesaian dari persamaan diferensial parsial linier adalah suatu fungsi $u(x, y)$ yang memiliki semua turunan-turunan parsial dari persamaan dan memenuhi persamaan pada beberapa bidang-xy (Zill, 2009:433).

2.2 Transformasi Fourier

Berikut ini akan didefinisikan deret Fourier dari suatu fungsi.

Definisi 2.1. Misalkan terdapat suatu masalah dengan kondisi batas periodik pada interval $-L \leq x \leq L$ di dalam kasus deret yang melibatkan fungsi sinus dan cosinus. Didefinisikan suatu deret tak-hingga yang disebut deret Fourier, yaitu

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L} \tag{2.4}$$

dengan koefisien-koefisien

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\, dx \tag{2.5}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \tag{2.6}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \tag{2.7}$$

(Haberman, 2013:88).

Selanjutnya akan ditentukan bentuk kompleks dari deret Fourier. Ingat kembali formula DeMoivre yang menyatakan sinus dan cosinus ke dalam bentuk eksponensial kompleks

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{i\theta}}{2i} \tag{2.8}$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{i\theta}}{2}. \tag{2.9}$$

Misalkan $\theta = n\pi x/L$ didapatkan $e^{\frac{in\pi x}{L}}$ dan $e^{-\frac{in\pi x}{L}}$. Koleksi dari fungsi trigonometri $\{\sin n\theta, \cos n\theta)$ diganti dengan koleksi dari eksponensial kompleks

$$\left\{1, e^{\frac{i\pi x}{L}}, e^{\frac{2i\pi x}{L}}, \dots, e^{\frac{-i\pi x}{L}}, e^{\frac{-2i\pi x}{L}}, \dots\right\}.$$

Dengan kata lain, diperoleh koleksi $\left\{e^{\frac{in\pi x}{L}}\right\}$, di mana n sebarang bilangan bulat. Sehingga diperoleh bentuk kompleks dari deret Fourier yaitu

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{L}} \tag{2.10}$$

di mana

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-\frac{in\pi x}{L}}\,dx \tag{2.11}$$

(Strauss, 2008:115-116).

Jika penyelesaian masalah persamaan diferensial parsial dalam interval berhingga dapat dilakukan dengan menggunakan deret Fourier, maka permasalahan pada garis utuh $(-\infty,\infty)$ dilakukan dengan menggunakan integral Fourier. Untuk memahami hubungan ini, diberikan fungsi $f(x)$ yang terdefinisi pada interval $(-L,L)$. Deret Fourier dari fungsi $f(x)$ apabila dinyatakan dengan notasi kompleks adalah

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{L}}$$

di mana

$$c_n=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(y)e^{\frac{-in\pi y}{L}}\,dy$$

Integral Fourier diperoleh dengan memisalkan $L\to\infty$.. Jika dimisalkan $\omega=n\pi/L$, dan substitusikan c_n ke dalam barisan, diperoleh

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(y)e^{\frac{-in\pi y}{L}}\,dy\right)e^{\frac{in\pi x}{L}}\\&=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\int_{-L}^{L} f(y)e^{\frac{-in\pi y}{L}}\,dy\right)e^{\frac{in\pi x}{L}}\frac{\pi}{L}\,.\end{aligned}$$

Karena $L\to\infty$, interval diperluas menjadi garis utuh dan titik-titik ω menjadi semakin rapat. Pada masalah limit, ω menjadi variabel kontinyu, dan jumlahannya menjadi suatu integral. Jarak antara dua titik k yang berdekatan adalah $\Delta\omega=\pi/L$, yang selanjutnya menjadi $d\omega$ pada permasalahan limit. Oleh karena itu, diperoleh hasil

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\int_{-L}^{L} f(y)e^{-i\omega y}\,dy\right)e^{-i\omega x}\Delta\omega$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\omega y} \, dy \right) e^{i\omega x} \, d\omega. \tag{2.12}$$

Cara lain untuk menuliskan (2.12) adalah

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} \, d\omega, \tag{2.13}$$

di mana

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega y} \, dx. \tag{2.14}$$

$F(\omega)$ disebut transformasi Fourier dari $f(x)$. Perlu diingat bahwa transformasi tersebut berlaku kebalikannya, yaitu $f(x)$ adalah transformasi Fourier dari $F(\omega)$. Perbedaannya hanya terletak pada tanda minus pada pangkat eksponen dan faktor 2π. Variabel x dan ω memiliki dua peran, dan ω disebut variabel frekuensi (Strauss, 2008:343-344)

Berikut ini adalah tabel dari beberapa transformasi yang penting menurut Strauss (2008:345)

Tabel 2.1 Beberapa transformasi Fourier dari fungsi $\boldsymbol{f(x)}$ yang penting (Strauss, 2008:345)

	$f(x)$	$F(\omega)$
Fungsi Delta	$\delta(x)$	1
Square Pulse	$H(a - \|x\|)$	$\frac{2}{k} \sin a\omega$
Eksponensial	$e^{-a\|x\|}$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}, (a > 0)$
Fungsi Heaviside	$H(x)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega}$
Sign	$H(x) - H(-x)$	$\frac{2}{i\omega}$
Konstan	1	$2\pi\delta(\omega)$
Gaussian	$e^{-\frac{x^2}{2}}$	$\sqrt{2\pi} e^{-\frac{\omega^2}{2}}$

Misalkan $F(\omega)$ adalah transformasi dari $f(x)$ dan misalkan $G(\omega)$ adalah transformasi dari $g(x)$. Maka diperoleh sifat-sifat seperti pada tabel berikut

Tabel 2.2 Beberapa sifat-sifat transformasi Fourier (Strauss, 2008:346)

	Fungsi	Transformasi
1.	$\frac{df}{dx}$	$i\omega F(\omega)$
2.	$xf(x)$	$i\frac{dF}{d\omega}$
3.	$f(x-a)$	$e^{-ia\omega}F(\omega)$
4.	$e^{iax}f(x)$	$F(\omega-a)$
5.	$af(x)+bg(x)$	$aF(\omega)+bG(\omega)$
6.	$f(ax)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right), (a \neq 0)$

Teorema 2.2. Untuk suatu fungsi $f(x)$ berlaku

$$\mathcal{F}[f'(x)] = i\omega\mathcal{F}[f(x)] \tag{2.15}$$

$$\mathcal{F}[f''(x)] = -\omega^2\mathcal{F}[f(x)]. \tag{2.16}$$

Bukti: Misalkan f adalah fungsi kontinyu dan terintegral pada interval $(-\infty,\infty)$ dan f' kontinyu sebagian pada setiap interval berhingga. Jika $f(x)\to 0$ ketika $x\to\pm\infty$, maka diperoleh integrasi

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f'(x)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\omega x}\,dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}\,df(x)\\ &= f(x)e^{i\omega x}\Big|_{-\infty}^{\infty} + i\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx\\ &= i\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx,\end{aligned}$$

sehingga

$$\mathcal{F}[f'(x)] = i\omega\mathcal{F}[f(x)].$$

Dengan cara yang sama diperoleh

$$\mathcal{F}[f''(x)] = -\omega^2\mathcal{F}[f(x)]$$

(Zill, 2009:505).

Di dalam beberapa referensi, karena

$$\frac{1}{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Maka transformasi Fourier dapat juga ditulis

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega \tag{2.17}$$

di mana

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\omega y}\,dy. \tag{2.18}$$

Beberapa referensi mengenalkan $1/\sqrt{2\pi}$ pada bentuk transformasi dan inversnya, yang menunjukkan kesimetrian pada representasinya. Bahkan para ahli teknik elektro terkadang menghilangkan faktor ini pada transformasi dan justru meletakkanya pada invers transformasi. Mereka juga menggunakan (i) pada transformasi dan $-i$ pada inversnya. Selain itu, mereka juga menggunakan j untuk bilangan imajiner untuk membedakannya dengan i pada kuat arus listrik. Perubahan-perubahan ini hanya merupakan alternatif dan tidak akan mengubah transformasi itu sendiri (Nair, 2011:100).

2.3 Persamaan Panas Satu Dimensi

Akan diturunkan persamaan diferensial parsial untuk model aliran panas pada suatu medium. Diberikan suatu batang dengan massa jenis material batang ρ

konstan yang memiliki bagian-bagian melintang seragam dengan luas A. Permukaan samping batang mengisolasi batang, sehingga diasumsikan tidak ada panas yang menghilang melalui permukaan batang. Tempatkan sumbu-x sepanjang batang yang memiliki panjang L, asumsikan bahwa pada suatu waktu yang diberikan, suhu sepanjang sebarang bagian melintang pada batang adalah sama, meskipun mungkin suhunya bervariasi antara setiap bagian. Akan diturunkan suatu persamaan untuk $u(x,t)$ yang menyatakan temperatur batang di titik x pada waktu t. Pada konteks masalah difusi, $u(x,t)$ disebut fungsi distribusi kepadatan (*density distribution function*) (O'Neil, 2014:1).

Diberikan suatu segmen pada batang. Misalkan c adalah konstanta panas jenis pada material batang tertentu, atau dapat diartikan sebagai banyak energi panas yang harus diberikan kepada suatu unit massa dari material untuk menaikkan suhu sebesar satu derajat. Segmen pada batang di antara x dan $x + \Delta x$ memiliki massa $\rho V = \rho A \Delta x$, dan segmen ini akan mengambil energi panas kurang lebih sebesar $\rho c A u(x,t) \Delta x$ satuan untuk mengubah suhu segmen dari nol ke $u(x,t)$. Energi panas total pada segmen pada sebarang waktu $t > 0$ adalah

$$E(x, \Delta x, t) = \int_{x}^{x+\Delta x} \rho c A u(\xi, t)\, d\xi. \tag{2.19}$$

sedangkan laju perubahan energi di dalam segmen terhadap waktu adalah

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \text{fluks} + \text{sumber atau gaya luar} = \int_{x}^{x+\Delta x} \rho c A \frac{\partial u}{\partial t}(\xi, t)\ d\xi \tag{2.20}$$

Asumsikan bahwa tidak ada sumber atau energi yang hilang di dalam batang, maka

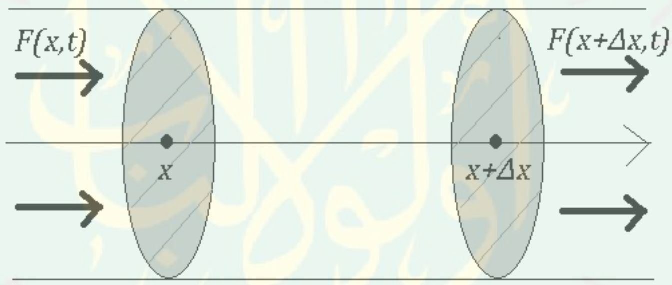
$$\text{fluks} = \int_{x}^{x+\Delta x} \rho c A \frac{\partial u}{\partial t}(\xi, t)\ d\xi \tag{2.21}$$

Sekarang misalkan $F(x,t)$ adalah banyaknya energi panas per satuan luas yang mengalir melalui bagian melintang di titik x pada waktu t dan searah dengan peningkatan nilai x. Maka fluks energi pada segmen di antara x dan $x + \Delta x$ pada waktu t adalah laju aliran energi masuk segmen yang melalui x dikurangi dengan laju aliran energi keluar segmen yang melalui $x + \Delta x$ (Gambar 2.1)

$$\text{fluks} = AF(x,t) - AF(x + \Delta x, t)$$

atau dapat ditulis

$$\text{fluks} = -A\big(F(x + \Delta x, t) - F(x,t)\big). \tag{2.22}$$



Gambar 2.1 Fluks energi pada segmen sama dengan laju aliran energi masuk dikurangi laju aliran energi keluar. (O'Neil, 2014:3)

Ingat kembali hukum pendinginan Newton yang menyatakan bahwa energi panas mengalir dari daerah hangat (suhu tinggi) ke daerah dingin (suhu rendah), dan banyaknya energi panas sebanding dengan perubahan suhu u terhadap perpindahan x (gradien). Sehingga dapat ditulis

$$F(x,t) = -K \frac{\partial u}{\partial x}(x,t). \tag{2.23}$$

Konstanta kesebandingan K disebut konduktifitas panas dari batang. Tanda negatif pada persamaan menunjukkan bahwa energi mengalir dari segmen bersuhu tinggi ke segmen bersuhu rendah. Substitusikan (2.23) ke dalam persamaan (2.22), sehingga

$$\text{fluks} = -A\left(-K\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t) + K\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)$$

$$= KA\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)$$

atau

$$\text{fluks} = \int_{x}^{x+\Delta x} \frac{\partial}{\partial x}\left(KA\frac{\partial u}{\partial x}(\xi,t)\right)d\xi, \tag{2.24}$$

dari (2.21) dan (2.24) diperoleh

$$\int_{x}^{x+\Delta x} \rho cA\frac{\partial u}{\partial t}(\xi,t)\ d\xi = \int_{x}^{x+\Delta x} \frac{\partial}{\partial x}\left(KA\frac{\partial u}{\partial x}(\xi,t)\right)d\xi$$

$$\int_{x}^{x+\Delta x} \rho c\frac{\partial u}{\partial t}(\xi,t)\ d\xi = \int_{x}^{x+\Delta x} \frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial u}{\partial x}(\xi,t)\right)d\xi$$

$$\int_{x}^{x+\Delta x} \left(\rho c\frac{\partial u}{\partial t}(\xi,t) - \frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial u}{\partial x}(\xi,t)\right)\right)d\xi = 0. \tag{2.25}$$

Persamaan ini valid untuk sebarang x dan $x+\Delta x$ karena $0 < x < x+\Delta x < L$. Integran harus bernilai sama dengan nol, artinya

$$\rho c\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \tag{2.26}$$

atau biasa ditulis

$$u_t = ku_{xx} \tag{2.27}$$

di mana

$$k = \frac{K}{c\rho} \tag{2.28}$$

adalah difusifitas dari material batang. Persamaan (2.26) disebut persamaan panas atau persamaan difusi satu dimensi (O'Neil, 2014:3).

2.4 Kondisi Awal dan Kondisi Batas pada Domain Tak Hingga

Untuk mengetahui suhu pada suatu batang pada waktu tertentu kita harus mengetahui beberapa informasi, seperti suhu yang melalui suatu batang pada beberapa waktu partikular (kondisi awal), yang juga diiringi dengan informasi mengenai suhu pada kedua ujung batang (kondisi batas). Kondisi awal secara khusus memiliki bentuk

$$u(x,0) = f(x), 0 < x < L, \tag{2.29}$$

di mana $f(x)$ adalah fungsi yang diberikan. Sedangkan kondisi batas menentukan kondisi pada kedua titik ujung batang pada variabel ruang. Kondisi-kondisi tersebut bisa saja memiliki bentuk-bentuk yang berbeda. Salah satu jenis kondisi yang umum digunakan adalah

$$u(0,t) = \alpha(t), u(L,t) = \beta(t), 0 < x < L, \tag{2.30}$$

di mana $\alpha(t)$ dan $\beta(t)$ adalah fungsi yang diberikan (O'Neil, 2014:4).

Pada beberapa kondisi, solusi dari persamaan diferensial parsial diperoleh dari suatu himpunan masalah nilai batas pada suatu daerah di mana dimensinya mungkin tak hingga. Sebagai contoh, diberikan masalah dalam menentukan besar medan listrik yang dihasilkan dari antena kutub horizontal ketika tegangan listrik diberikan sepanjang antena. Tegangan listrik muncul pada antena, tetapi juga memancar ke segala arah secara tak terhingga. Terdapat juga masalah nilai batas pada daerah yang memiliki dimensi berhingga tetapi sangat besar. Artinya, dimensi yang sangat besar tersebut dapat dianggap sebagai suatu interval yang tak terhingga. Sebagai contoh, misalkan akan dicari tegangan pada suatu kabel transatlantik. Meskipun panjang kabel tersebut berhingga, misalkan sepanjang 4000 kilometer, tetapi akan lebih mudah untuk menganggapnya sebagai suatu masalah nilai batas yang sama di mana panjang kabelnya tak berhingga. Sehingga untuk permasalahan domain tak hingga akan ditentukan solusi dari masalah nilai batas yang melalui dua jenis interval, yaitu interval semi-berhingga (*semi-infinite interval*) dan interval tak-hingga (*infinite interval*). Interval semi-berhingga dimulai pada suatu titik c dan merentang menuju tak terhingga. Sedangkan interval tak-hingga merentang dari $-\infty$ sampai $+\infty$ (Humi, 1992:214).

2.5 Konvolusi dan Fungsi Error

Berikut ini akan didefinisikan konvolusi dari dua fungsi.

Definisi 2.3. Jika f dan g adalah sebarang fungsi di $\mathbb{R}$, konvolusi dari keduanya adalah fungsi $f * g$ yang didefinisikan sebagai berikut

$$(f * g)(x) = \int f(x-y)g(y)\,dy \qquad (2.31)$$

asalkan integralnya ada.

Teorema 2.4. Konvolusi memenuhi hukum-hukum aljabar yang sama dengan perkalian biasa

1. $f * (ag + bh) = a(f * g) + b(f * h)$ untuk sebarang konstanta a, b
2. $f * g = g * f$
3. $f * (g * h) = (f * g) * h$

Bukti: Jelas untuk (1) karena integrasi adalah operasi linier. Untuk (2), misalkan terdapat variabel $z = x - y$

$$
\begin{aligned}
(f * g)(x) &= \int f(x-y)g(y)\,dy \\
&= \int f(z)g(x-z)\,dz \\
&= (g * f)(x)
\end{aligned}
$$

Untuk (3), gunakan (2) dan dengan mengubah urutan integrasi, diperoleh

$$
\begin{aligned}
\big((f * g) * h\big)(x) &= \int (f * g)(x-y)h(y))\,dy \\
&= \int\int f(z)g\big((x-y)-z\big)h(y)\,dz\,dy \\
&= \int\int f(z)g\big((x-z)-y\big)h(y)\,dy\,dz \\
&= \int f(z)(g * h)(x-z)\,dz \\
&= \big(f * (g * h)\big)(x)
\end{aligned}
$$

Teorema 2.5 Diberikan fungsi $f(x)$ dan $g(x)$, $F(\omega)$ dan $G(\omega)$ adalah transformasi Fourier kedua fungsi tersebut, maka

$$(F * G)(\omega) = F(\omega)G(\omega)$$

Bukti:

$$
\begin{aligned}
(F * G)(\omega) &= \int\int f(x-y)g(y)e^{-i\omega x}\,dy\,dx \\
&= \int\int f(x-y)g(y)e^{-i\omega(x-y)}e^{-i\omega y}\,dy\,dx
\end{aligned}
$$

misalkan terdapat variabel $z = x - y$, maka

$$
\begin{aligned}
(F * G)(\omega) &= \int\int f(z)g(y)e^{-i\omega z}e^{-i\omega y}\,dz\,dy \\
&= \int f(z)e^{-i\omega z}dz \int g(y)e^{-i\omega y}\,dy \\
&= F(\omega)G(\omega)
\end{aligned}
$$

(Folland, 1992:214-215).

Berikut ini akan didefinisikan fungsi error.

Definisi 2.6. Fungsi error $\text{erf}(x)$ dan komplemen fungsi error $\text{erfc}(x)$ didefinisikan sebagai berikut

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2}\, du \qquad (2.32)$$

$$\text{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-u^2}\, du. \qquad (2.33)$$

Selanjutnya, dengan bantuan koordinat polar, diperoleh

$$\int_0^\infty e^{-u^2}\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad (2.34)$$

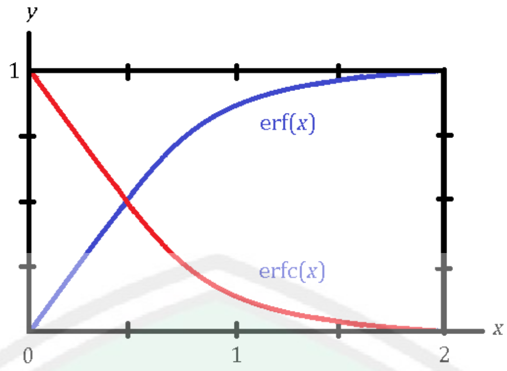
$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-u^2}\, du = 1. \qquad (2.35)$$

Sehingga diperoleh sifat

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\int_0^x e^{-u^2}\, du + \int_x^\infty e^{-u^2}\, du \right] = 1 \qquad (2.36)$$

$$\text{erf}(x) + \text{erfc}(x) = 1 \qquad (2.37)$$

Grafik dari fungsi $\text{erf}(x)$ dan $\text{erfc}(x)$ untuk $x \geq 0$ diberikan pada gambar 2. Perlu diingat bahwa $\text{erf}(0) = 0, \text{erfc}(0) = 1,$ dan $\text{erf}(x) \to 1, \text{erfc}(x) \to 0$ untuk $x \to \infty$. Pada tabel, fungsi error sering merujuk pada suatu integral probabilitas. Domain dari $\text{erf}(x)$ dan $\text{erfc}(x)$ adalah $(-\infty, \infty)$ (Zill, 2009:489)



Gambar 2.2 Grafik fungsi $y = \mathrm{erf}(x)$ dan $y = \mathrm{erf\,c}(x)$ untuk $x > 0$. (Zill, 2009:489)

2.6 Penelitian Sebelumnya Mengenai Penyelesaian Persamaan Panas dan Transformasi Fourier

Pembahasan awal mengenai penyelesaian persamaan panas telah dilakukan oleh Zauderer (2006:211) yang membahas mengenai penyelesaian persamaan konduksi panas pada batang berhingga. Diberikan masalah nilai awal dan nilai batas

$$
\begin{gathered}
u_t(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0, 0 < x < L, t > 0 \\
u(0,t) = u(L,t) = 0 \\
u(x,0) = f(x)
\end{gathered}
\tag{2.38}
$$

Dengan menggunakan metode pemisahan variabel, diperoleh solusi

$$
u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\left(\frac{\pi k c}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi k}{L} x\right) \tag{2.39}
$$

di mana

$$
a_k = \frac{2}{L} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{\pi k}{L}\right) dx, k = 1,2, \dots \tag{2.40}
$$

Selain itu, Yang (2005:406) membahas mengenai penyelesaian persamaan panas satu dimensi pada batang berhingga, menghasilkan skema numerik eksplisit

$$u_i^{k+1} = r\left(u_{i+1}^k + u_{i-1}^k\right) + (1 - 2r)u_i^k$$

Dengan $r = A\Delta t / \Delta x^2$ untuk $i = 1,2, \dots, M - 1$.

Di sisi lain, metode pemisahan variabel hanya bisa digunakan untuk domain berhingga. Salah satu metode yang digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai awal pada domain tak-hingga adalah metode faktorisasi operator diferensial, seperti yang telah dilakukan Zauderer (2006:64) pada persamaan gelombang. Tetapi, tidak semua persamaan dapat dilakukan faktorisasi. Selain itu, terdapat juga metode karakteristik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial orde satu. Strauss (2008:46-48) membahas mengenai penyelesaian untuk domain tak-hingga. Diberikan masalah nilai awal

$$\begin{aligned} u_t &= k u_{xx}, (-\infty < x < \infty) \\ u(x,0) &= \phi(x) \end{aligned} \tag{2.41}$$

Dengan menggunakan sifat-sifat invarian, diperoleh solusi fundamental

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \phi(y)\, dy \tag{2.42}$$

Negero (2014:52) meneliti mengenai metode transformasi Fourier untuk penyelesaian persamaan diferensial parsial dengan solusi berupa $u(x,t)$. Langkah-langkah untuk menyelesaikan persamaan diferensial dengan menggunakan transformasi Fourier adalah

1. Mentransformasikan persamaan diferensial parsial sehingga diperoleh persamaan diferensial biasa dengan variabel $U(\omega, t)$
2. Menyelesaikan persamaan diferensial biasa sehingga diperoleh solusi $U(\omega, t)$
3. Menentukan solusi $u(x,t)$ dengan melakukan invers transformasi Fourier $U(\omega, t)$

Salah satu contoh yang dibahas adalah masalah nilai awal persamaan panas

$$u_t = c^2 u_{xx} - \infty < x < \infty \tag{2.43}$$

$$u(x,0) = f(x) = f(x) = \begin{cases} s, & a \le x \le b \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases} \tag{2.44}$$

yang menghasilkan penyelesaian

$$u(x,t) = s\Phi\left(\frac{x-a}{\sqrt{2c^2t}}\right) - s\Phi\left(\frac{x-b}{\sqrt{2c^2t}}\right) \tag{2.45}$$

di mana Φ merupakan fungsi error. Dengan menggunakan teknik yang sama, Surur (2013:37-39) menggunakan transformasi Fourier untuk menyelesaikan persamaan gelombang, yang merupakan kondisi khusus untuk $\alpha = \beta^2$ pada persamaan telegraf

$$u_{xx} = CLu_{tt} + (RC + CL)u_T + RGu$$

Diberikan masalah nilai awal

$$v_{tt} - c^2 v_{xx} = 0$$

$$v(x,0) = f_1(x)$$

$$v_t(x,0) = f_2(x)$$

Dengan menggunakan transformasi Fourier, diperoleh penyelesaian

$$v(x,t) = \frac{1}{2}\big(f_1(x+ct) + f_1(x-ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} f_2(\xi)\, d\xi$$

Di sisi lain, Oktavia (2013:14) menggunakan transformasi Fourier untuk menyelesaikan persamaan Korteweg de Vries (KdV) pada kasus linier dispersif

$$\phi_\tau + \phi_{\xi\xi\xi} = 0$$

Dengan menggunakan konvolusi, dihasilkan penyelesaian

$$\phi(\xi,\tau)=f(\xi)*\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(-k\xi-k^3\tau)}\,dk$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi-p)\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(-k\xi-k^3\tau)}\,dk\right)dp$$

Selanjutnya penyelesaiannya disimulasikan secara numerik.

2.7 Usaha dalam Menyelesaian Masalah (Problem Solving) di dalam Al-Qur’an

Di dalam Al-Qur’an dijelaskan bahwa Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya. Firman Allah dalam Q.S. Al-Baqarah:286

لَا يُكَلِّفُ ٱللَّهُ نَفْسًا إِلَّا وُسْعَهَا ۚ لَهَا مَا كَسَبَتْ وَعَلَيْهَا مَا ٱكْتَسَبَتْ ۗ رَبَّنَا لَا تُؤَاخِذْنَآ إِن نَّسِينَآ أَوْ
أَخْطَأْنَا ۚ رَبَّنَا وَلَا تَحْمِلْ عَلَيْنَآ إِصْرًا كَمَا حَمَلْتَهُۥ عَلَى ٱلَّذِينَ مِن قَبْلِنَا ۚ رَبَّنَا وَلَا تُحَمِّلْنَا مَا لَا
طَاقَةَ لَنَا بِهِۦ ۖ وَٱعْفُ عَنَّا وَٱغْفِرْ لَنَا وَٱرْحَمْنَآ ۚ أَنتَ مَوْلَىٰنَا فَٱنصُرْنَا عَلَى ٱلْقَوْمِ ٱلْكَٰفِرِينَ
٢٨٦

“Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya. Ia mendapat pahala (dari kebajikan) yang diusahakannya dan ia mendapat siksa (dari kejahatan) yang dikerjakannya. (Mereka berdoa): "Ya Tuhan kami, janganlah Engkau hukum kami jika kami lupa atau kami tersalah. Ya Tuhan kami, janganlah Engkau bebankan kepada kami beban yang berat sebagaimana Engkau bebankan kepada orang-orang sebelum kami. Ya Tuhan kami, janganlah Engkau pikulkan kepada kami apa yang tak sanggup kami memikulnya. Beri maaflah kami; ampunilah kami; dan rahmatilah kami. Engkaulah Penolong kami, maka tolonglah kami terhadap kaum yang kafir".

Firman Allah SWT

لَا يُكَلِّفُ ٱللَّهُ نَفْسًا إِلَّا وُسْعَهَا

“*Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya*,”.

Taklif (pembebanan) adalah sesuatu yang memberatkan seseorang. Terbebani sesuatu artinya adalah menanggung atau menahan beban tersebut. Makna ini disampaikan oleh Al Jauhari. Sedang kata وُسْعَهَا sendiri artinya adalah kesungguhan, kemampuan dan kesanggupan. Pada ayat ini Allah SWT memberitahukan bahwa dari awal diturunkannya ayat pertama hamba-hamba-Nya tidak pernah dibebani dengan sebuah ibadah, entah itu yang dilakukan dengan anggota badan yang terlihat ataupun yang tidak terlihat, kecuali pembebanan itu masih dapat dilakukan oleh mereka. (Al-Qurthubi, 2008:959-960)

Dengan kata lain, seseorang tidak dibebani melainkan sebatas kesanggupannya. Ini merupakan kelembutan, kasih sayang, dan kebaikan-Nya terhadap makhluk-Nya. Dan ayat inilah yang menasakh apa yang dirasakan berat oleh para Sahabat Nabi, yaitu dalam firman-Nya Q.S. Al-Baqarah: 284

وَإِن تُبۡدُواْ مَا فِيٓ أَنفُسِكُمۡ أَوۡ تُخۡفُوهُ يُحَاسِبۡكُم بِهِ ٱللَّهُۖ

Dan jika kalian melahirkan apa yang ada di dalam hati kalian atau kalian menyembunyikannya, niscaya Allah akan membuat perhitungan dengan kalian tentang perbuatan itu.

Maksudnya, meskipun Dia menghisab dan meminta pertanggungjawaban, namun Dia (Allah swt.) tidak mengadzab melainkan disebabkan dosa yang seseorang memiliki kemampuan untuk menolaknya. Adapun sesuatu yang seseorang tidak memiliki kemampuan untuk menolaknya seperti godaan dan bisikan jiwa (hati), maka hal itu tidak dibebankan kepada manusia. Dan kebencian terhadap godaan bisikan yang jelek atau jahat merupakan bagian dari iman. (Ad-Dimasyqi, 2009:582)

Menurut Al-Qarni (2007:229), ayat ini menjelaskan bahwa tatkala mereka menyambut dan berserah diri maka Allah memberi kabar gembira dengan menghapus segala beban berat dan belenggu. Dia juga memberitahukan bahwa

Dia tidak akan menyulitkan mereka dalam segala perintah dan larangan, bahkan mereka akan diberikan beban menurut ukuran kesungguhan dan kemampuan mereka, sebagai rahmat dari-Nya. Setiap jiwa akan diberi pahala menurut kadar kesalehannya dan akan disiksa menurut kadar keburukannya, tanpa adanya tambahan dan tidak pula pengurangan.

Menurut Al-Jazairi (2006:490-491), Allah Ta'ala memberitahukan bahwa karena rasa belas kasihan-Nya kepada mereka dan hikmah dalam perlakuan-Nya terhadap makhluk yang diciptakannya, Allah Ta'ala tidak membebani seorangpun melainkan sesuai dengan kesanggupan dan daya kemampuannya untuk mengerjakannya, dan bahwa ia mendapatkan pahala dari kebajikan yang diusahakannya, serta ia mendapat siksa dari kejahatan yang ia lakukan, kecuali jika Allah Ta'ala memaafkan dan mengampuninya. Allah Ta'ala berfirman

لَا يُكَلِّفُ ٱللَّهُ نَفْسًا إِلَّا وُسْعَهَا ۚ لَهَا مَا كَسَبَتْ وَعَلَيْهَا مَا ٱكْتَسَبَتْ

"*Allah tidak membebani seorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya, baginya pahala dari kebajikan yang diusahakannya, dan baginya siksa dari kejahatan yang ia lakukan...*"

Dan memang Allah Ta'ala telah memaafkan mereka dalam kealpaan dan kesalahan, dan memberikan dispensasi (keringanan) hukum syari'at dengan tidak membuat kesempitan kepada mereka dalam agama, memberi maaf, ampunan dan kasih sayang kepada mereka. Juga Allah menolong mereka dalam menghadapi orang-orang kafir dengan argumentasi dan penjelasan, dan menolong mereka dalam peperangan dengan pedang dan tombak (persenjataan). Bagi-Nya lah segala puji dan anugerah, Dialah Yang Maha besar dan Maha Tinggi.

BAB III

HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Penyelesaian Persamaan Panas untuk Domain Tak Hingga dengan Menggunakan Transformasi Fourier

Diberikan persamaan panas

$$u_t = ku_{xx}, -\infty < x < \infty \tag{3.1}$$

yang memiliki kondisi awal

$$u(x,0) = f(x) \tag{3.2}$$

dan kondisi batas

$$\lim_{x\to\pm\infty} u(x,t) = 0. \tag{3.3}$$

Permasalahan ini tidak bisa diselesaikan dengan pendekatan domain berhingga karena kedua ujung domain menuju ke tak hingga, sehingga digunakan transformasi Fourier untuk menyelesaikan permasalahan ini.

3.1.1 Penyelesaian Persamaan Panas dengan menggunakan Transformasi Fourier

Transformasi Fourier dari suatu fungsi $f(x)$, yaitu fungsi $F(\omega)$, didefinisikan sebagai berikut

$$\mathcal{F}[f(x)] = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx, \tag{3.4}$$

sedangkan invers transformasinya adalah

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}\,dx. \tag{3.5}$$

Transformasi Fourier (3.4) diterapkan pada persamaan panas (3.1). Diketahui transformasi Fourier dari $u(x,t)$ adalah

$$\mathcal{F}[u(x,t)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-i\omega x}\,dx = U(\omega,t), \tag{3.6}$$

Transformasi dari turunan pertama $u(x,t)$ terhadap variabel t adalah

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t}u(x,t)e^{-i\omega x}\,dx \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-i\omega x}\,dx \\ &= \frac{\partial}{\partial t}U(\omega,t).\end{aligned}$$

Transformasi dari turunan pertama $u(x,t)$ terhadap variabel x adalah

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x}u(x,t)e^{-i\omega x}\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}\,du(x,t) \\ &= \left(e^{-i\omega x}u(x,t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)(-i\omega)e^{-i\omega x}\,dx\right)\end{aligned}$$

terapkan kondisi batas (3.3), maka

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\right] &= 0 + \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)(-i\omega)e^{-i\omega x}\,dx \\ &= (-i\omega)\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-i\omega x}\,dx \\ &= -i\omega U(\omega,t).\end{aligned}$$

Dengan cara yang serupa, maka transformasi dari turunan kedua $u(x,t)$ terhadap variabel x adalah

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)e^{-i\omega x}\,dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\right)e^{-i\omega x}\,dx$$
$$= (-i\omega)\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\right)e^{-i\omega x}\,dx$$
$$= (-i\omega)(-i\omega)\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-i\omega x}\,dx$$
$$= -\omega^2 U(\omega,t).$$

Sehingga transformasi Fourier dari kedua ruas persamaan panas (3.1) menghasilkan penyelesaian $U(\omega,t)$

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = k\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)$$
$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\right] = \mathcal{F}\left[k\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)\right]$$
$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\right] = k\mathcal{F}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)\right]$$
$$\frac{\partial}{\partial t}U(\omega,t) = -k\omega^2 U(\omega,t)$$

Persamaan terakhir merupakan persamaan diferensial biasa orde satu, sehingga dapat dicari penyelesaian dari $U(\omega,t)$

$$\frac{1}{U(\omega,t)}dU(\omega,t) = -k\omega^2 dt$$
$$\int \frac{1}{U(\omega,t)}\partial U(\omega,t) = \int -k\omega^2\,\partial t$$
$$\ln|U(\omega,t)| = -k\omega^2 t + C_1$$
$$|U(\omega,t)| = e^{-k\omega^2 t + C_1}$$
$$= C_2 e^{-k\omega^2 t}$$

Jadi, penyelesaiannya adalah

$$U(\omega,t) = Ce^{-k\omega^2 t}. \quad (3.7)$$

Selanjutnya akan ditentukan nilai C. Diketahui $u(x,0) = f(x)$, maka

$$\begin{aligned} U(\omega,0) &= \mathcal{F}[u(x,0)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(x,0)e^{-i\omega x}\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx \\ &= F(\omega). \end{aligned}$$

Sedangkan berdasarkan (3.7), karena

$$U(\omega,0) = Ce^{-k\omega^2(0)} = C,$$

maka diperoleh

$$C = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx.$$

Jadi, diperoleh penyelesaian

$$U(\omega,t) = F(\omega)e^{-k\omega^2 t}.$$

Untuk menentukan penyelesaian $u(x,t)$ maka akan dilakukan invers transformasi terhadap $U(\omega,t)$.

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \mathcal{F}^{-1}[U(\omega,t)] \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(\omega,t)e^{i\omega x}\,d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-k\omega^2 t}e^{i\omega x}\,d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx\right)e^{-k\omega^2 t}e^{i\omega x}\,d\omega \end{aligned}$$

Jadi, penyelesaian dari persamaan panas (3.1) dengan kondisi awal $f(x)$ adalah

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx\right)e^{-k\omega^2 t}e^{i\omega x}\,d\omega. \tag{3.8}$$

3.1.2 Penerapan Konvolusi pada Penyelesaian Persamaan Panas dengan Menggunakan Transformasi Fourier

Penyelesaian persamaan panas (3.1) masih memuat integral ganda, sehingga perlu dilakukan penyederhanaan ke dalam bentuk persamaan integral tunggal. Hal ini dapat dilakukan dengan menggunakan prinsip konvolusi. Perhatikan bahwa berdasarkan tabel diketahui

$$\mathcal{F}\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\right] = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{\omega^2}{2}} \tag{3.9}$$

Dengan menggunakan penurunan transformasi Fourier dari fungsi Gaussian pada lampiran, maka transformasi Fourier dari fungsi $e^{-\frac{ax^2}{2}}$ adalah

$$\mathcal{F}\left[e^{-\frac{ax^2}{2}}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ax^2}{2}}e^{-i\omega x}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ax^2}{2}-i\omega x}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ax^2}{2}-\frac{2i\omega x}{2}}\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-a^2x^2-2ai\omega x}{2a}}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-a^2x^2-2ai\omega x+\omega^2-\omega^2}{2a}}\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-a^2x^2-2ai\omega x+\omega^2}{2a}}e^{-\frac{\omega^2}{2a}}\,dx = e^{-\frac{\omega^2}{2a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(ax+i\omega)^2}{2a}}\,dx$$

Misalkan

$$y = \frac{ax+i\omega}{\sqrt{2a}} \Leftrightarrow dy = \frac{a}{\sqrt{2a}}dx \Leftrightarrow dx = \sqrt{\frac{2}{a}}dy$$

maka

$$\mathcal{F}\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\right] = e^{-\frac{\omega^2}{2a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(ax+i\omega)^2}{2a}} dx = e^{-\frac{\omega^2}{2a}} \sqrt{\frac{2}{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = e^{-\frac{\omega^2}{2a}} \sqrt{\frac{2}{a}} \sqrt{\pi}$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{2a}}$$

Jadi, terbukti bahwa

$$\mathcal{F}\left[e^{-\frac{ax^2}{2}}\right] = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{2a}}$$

Selanjutnya substitusikan $a = 1/2kt$, diperoleh

$$\mathcal{F}\left[e^{-\frac{\left(\frac{1}{2kt}\right)x^2}{2}}\right] = \sqrt{\frac{2\pi}{\left(\frac{1}{2kt}\right)}} e^{-\frac{\omega^2}{2\left(\frac{1}{2kt}\right)}}$$

$$\mathcal{F}\left[e^{-\frac{x^2}{4kt}}\right] = 2\sqrt{\pi kt} e^{-k\omega^2 t}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \mathcal{F}\left[e^{-\frac{x^2}{4kt}}\right] = e^{-k\omega^2 t}$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}\right] = e^{-k\omega^2 t}. \qquad (3.9)$$

Selanjutnya, misalkan

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}\right] = e^{-k\omega^2 t} = G(\omega)$$

maka

$$g(x) = \mathcal{F}^{-1}[G(\omega)] = \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}\right]\right] = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}$$

sehingga penyelesaian (3.8) menjadi

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-k\omega^2 t} e^{i\omega x}\, d\omega$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)G(\omega)e^{i\omega x}\, d\omega$$

Berdasarkan teorema 2.5, maka

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (F * G)(\omega)e^{i\omega x}\, d\omega$$
$$= (f * g)(x)$$

dan berdasarkan teorema 2.4.2, maka

$$u(x,t) = (g * f)(x)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y)f(y)\, dy$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi k t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} f(y)\, dy$$

adi, setelah konvolusi diperoleh penyelesaian

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{k\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{\frac{-(x-y)^2}{4kt}}\, dy. \qquad (3.10)$$

3.1.3 Analisis Keabsahan Penyelesaian Persamaan Panas dengan Menggunakan Transformasi Fourier

Untuk memeriksa keabsahan dari penyelesaian (3.10) maka akan dilakukan analisis keabsahan penyelesaian sehingga memenuhi persamaan panas (3.1), kondisi awal (3.2), dan kondisi batas (3.3). Diketahui penyelesaian persamaan panas pada domain tak hingga

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{k\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{\frac{-(x-y)^2}{4kt}}\, dy$$

Akan dicari turunan pertama terhadap t. Misalkan

$$A(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{k\pi t}}$$

$$B(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{\frac{-(x-y)^2}{4kt}} dy$$

Maka

$$u(x,t) = A(x,t)B(x,t)$$

Sehingga turunan $A(x,t)$ terhadap t adalah

$$\begin{aligned} \frac{\partial A(x,t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\sqrt{k\pi t}}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}(k\pi t)^{-\frac{1}{2}}\right) \\ &= -\frac{1}{4}(k\pi t)^{-\frac{3}{2}}(k\pi) \\ &= -\frac{k\pi}{4(k\pi t)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

dan turunan $B(x,t)$ terhadap t adalah

$$\begin{aligned} \frac{\partial B(x,t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{\frac{-(x-y)^2}{4kt}} dy\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{\frac{-(x-y)^2}{4kt}}\right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left(e^{\frac{-(x-y)^2}{4kt}}\right)\left(\frac{(x-y)^2}{4kt^2}\right) dy \\ &= \frac{1}{4kt^2} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)(x-y)^2 e^{\frac{-(x-y)^2}{4kt}} dy \end{aligned}$$

Jadi, turunan pertama $u(x,t)$ terhadap t adalah

$$
\begin{aligned}
u_t &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \\
&= \frac{\partial A(x,t)}{\partial t} B(x,t) + A(x,t)\frac{\partial B(x,t)}{\partial t} \\
&= \left(-\frac{k\pi}{4(k\pi t)^{\frac{3}{2}}}\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{\frac{-(x-y)^2}{4kt}}\,dy\right) \\
&\quad + \left(\frac{1}{2\sqrt{k\pi t}}\right)\left(\frac{1}{4kt^2}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)(x-y)^2 e^{\frac{-(x-y)^2}{4kt}}\,dy\right) \\
&= -\frac{1}{4t\sqrt{k\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{\frac{-(x-y)^2}{4kt}}\,dy \\
&\quad + \frac{1}{8kt^2\sqrt{k\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)(x-y)^2 e^{\frac{-(x-y)^2}{4kt}}\,dy \\
&= -\frac{1}{4t\sqrt{k\pi t}}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{\frac{-(x-y)^2}{4kt}}\,dy - \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\frac{(x-y)^2}{2kt}e^{\frac{-(x-y)^2}{4kt}}\,dy\right) \\
&= -\frac{1}{4t\sqrt{k\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\left(1-\frac{(x-y)^2}{2kt}\right)e^{\frac{-(x-y)^2}{4kt}}\,dy. \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

Selanjutnya akan dicari turunan kedua terhadap x. Diketahui

$$A(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{k\pi t}}$$

$$B(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{\frac{-(x-y)^2}{4kt}}\,dy$$

Maka

$$u(x,t) = A(x,t)B(x,t)$$

Sehingga turunan pertama $A(x,t)$ terhadap x adalah

$$\frac{\partial A(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2\sqrt{k\pi t}}\right) = 0$$

dan turunan pertama $B(x,t)$ terhadap x adalah

$$\frac{\partial B(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{\frac{-(x-y)^2}{4kt}}\,dy\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\frac{-(x-y)^2}{4kt}}\right)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\left(e^{\frac{-(x-y)^2}{4kt}}\right)\left(-\frac{2(x-y)}{4kt}\right)dy$$

$$= -\frac{1}{2kt}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)(x-y)e^{\frac{-(x-y)^2}{4kt}}\,dy$$

Jadi, turunan pertama $u(x,t)$ terhadap x adalah

$$u_x = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial A(x,t)}{\partial x}B(x,t) + A(x,t)\frac{\partial B(x,t)}{\partial x}$$

$$= (0)\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{\frac{-(x-y)^2}{4kt}}\,dy\right)$$

$$+\left(\frac{1}{2\sqrt{k\pi t}}\right)\left(-\frac{1}{2kt}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)(x-y)e^{\frac{-(x-y)^2}{4kt}}\,dy\right)$$

$$= -\frac{1}{4kt\sqrt{k\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)(x-y)e^{\frac{-(x-y)^2}{4kt}}\,dy$$

sedangkan turunan kedua $u(x,t)$ terhadap x adalah

$$u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{4kt\sqrt{k\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)(x-y)e^{\frac{-(x-y)^2}{4kt}}\,dy\right)$$

$$= -\frac{1}{4kt\sqrt{k\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\frac{\partial}{\partial x}\left((x-y)e^{\frac{-(x-y)^2}{4kt}}\right)dy$$

$$= -\frac{1}{4kt\sqrt{k\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\left(\left(e^{\frac{-(x-y)^2}{4kt}}\right)+(x-y)\left(-\frac{2(x-y)}{4kt}e^{\frac{-(x-y)^2}{4kt}}\right)\right)dy$$

$$= -\frac{1}{4kt\sqrt{k\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\left(1-\frac{(x-y)^2}{2kt}\right)e^{\frac{-(x-y)^2}{4kt}}\,dy$$

kalikan u_{xx} dengan k, diperoleh

$$ku_{xx} = k\left(-\frac{1}{4kt\sqrt{k\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\left(1-\frac{(x-y)^2}{2kt}\right)e^{\frac{-(x-y)^2}{4kt}}\,dy\right)$$

$$= -\frac{1}{4t\sqrt{k\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\left(1-\frac{(x-y)^2}{2kt}\right)e^{\frac{-(x-y)^2}{4kt}}\,dy \qquad (3.12)$$

Dari (3.11) dan (3.12) diperoleh $u_t = ku_{xx}$. Jadi, penyelesaian (3.10) memenuhi persamaan awal.

Selanjutnya, untuk menghindari pembagian terhadap nol, maka penyelesaian sebelum konvolusi (3.8) digunakan untuk menganalisis keabsahan penyelesaian terhadap kondisi awal (3.2). Diketahui

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx\right)e^{-k\omega^2 t}e^{i\omega x}\,d\omega$$

Substitusikan $t = 0$ sehingga

$$u(x,0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx\right)e^{i\omega x}\,d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega$$

$$= f(x)$$

Jadi, penyelesaian memenuhi kondisi awal. Selain itu, karena

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{k\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{\frac{-(x-y)^2}{4kt}}\,dy$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{k\pi t}}\lim_{t\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\frac{1}{e^{\frac{(x-y)^2}{4kt}}}\,dy$$

$$= (0)\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,dy$$

$$= 0$$

maka $u(x,t) \to 0$ untuk $t \to \infty$.

Terakhir, akan diperiksa apakah penyelesaian memenuhi kondisi batas $\lim_{x\to\pm\infty} u(x,t) = 0$. Diketahui penyelesaian

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{k\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{\frac{-(x-y)^2}{4kt}}\, dy$$

Untuk $x \to \infty$, maka

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} u(x,t) &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{k\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{\frac{-(x-y)^2}{4kt}}\, dy \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{k\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{1}{e^{\frac{(x-y)^2}{4kt}}}\, dy \\
&= \frac{1}{2\sqrt{k\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{\frac{(x-y)^2}{4kt}}}\, dy \\
&= \frac{1}{2\sqrt{k\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)(0)\, dy \\
&= 0
\end{aligned}$$

dan untuk $x \to -\infty$, maka

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} u(x,t) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2\sqrt{k\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{\frac{-(x-y)^2}{4kt}}\, dy \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2\sqrt{k\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{1}{e^{\frac{(x-y)^2}{4kt}}}\, dy \\
&= \frac{1}{2\sqrt{k\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{\frac{(x-y)^2}{4kt}}}\, dy \\
&= \frac{1}{2\sqrt{k\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)(0)\, dy \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Jadi, penyelesaian memenuhi kondisi batas.

3.1.4 Penerapan Kondisi Awal pada Penyelesaian Persamaan Panas dengan Menggunakan Transformasi Fourier

Diberikan penyelesaian

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{k\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{\frac{-(x-y)^2}{4kt}} \, dy.$$

Simulasi dilakukan dengan menyatakan penyelesaian (24) ke dalam fungsi error. Karena $(x-y)^2 = (y-x)^2, \forall x, y \in \mathbb{R}$, misalkan

$$\theta = \frac{y-x}{\sqrt{4kt}}$$

maka

$$\theta^2 = \frac{(y-x)^2}{4kt} = \frac{(x-y)^2}{4kt}$$

$$d\theta = \frac{dy}{\sqrt{4kt}}$$

sehingga penyelesaiannya menjadi

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-\theta^2} \, d\theta \tag{3.13}$$

Diberikan suatu kondisi awal fungsi tangga

$$f(y) = \begin{cases} h, & a \le y \le b \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases} \tag{3.14}$$

Artinya, untuk bagian domain di antara a dan b temperaturnya sebesar h dan untuk bagian lainnya bernilai nol. Jika y diganti dengan $x - \theta\sqrt{4kt}$ maka

$$f\left(x - \theta\sqrt{4kt}\right) = \begin{cases} h, & a \le x - \theta\sqrt{4kt} \le b \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

atau dapat ditulis

$$f\left(x-\theta\sqrt{4kt}\right)=\begin{cases} h, & \dfrac{x-b}{\sqrt{4kt}}\le\theta\le\dfrac{x-a}{\sqrt{4kt}} \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

Sehingga penyelesaiannya menjadi

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x-b}{\sqrt{4kt}}}^{\frac{x-a}{\sqrt{4kt}}} he^{-\theta^2}\;d\theta$$

Karena $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$ dan $\int_a^b c\,f(x)\,dx=c\int_a^b f(x)\,\boldsymbol{dx}$, maka

$$u(x,t)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\left(\int_0^{\frac{x-a}{\sqrt{4kt}}} e^{-\theta^2}\;d\theta+\int_{\frac{x-b}{\sqrt{4kt}}}^{0} e^{-\theta^2}\;d\theta\right)$$

dan karena $\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx$, maka

$$u(x,t)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\left(\int_0^{\frac{x-a}{\sqrt{4kt}}} e^{-\theta^2}\;d\theta-\int_0^{\frac{x-b}{\sqrt{4kt}}} e^{-\theta^2}\;d\theta\right)$$

Berdasarkan definisi fungsi error (2.32), maka diperoleh solusi

$$u(x,t)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{x-a}{\sqrt{4kt}}\right)-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{x-b}{\sqrt{4kt}}\right)\right)$$

$$u(x,t)=\frac{h}{2}\left(\operatorname{erf}\left(\frac{x-a}{\sqrt{4kt}}\right)-\operatorname{erf}\left(\frac{x-b}{\sqrt{4kt}}\right)\right) \tag{3.15}$$

Dengan cara yang sama, jika diberikan suatu kondisi awal fungsi tangga

$$f(y)=\begin{cases} h_1, & a\le y\le b \\ h_2, & c\le y\le d \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases} \tag{3.16}$$

Maka penyelesaiannya adalah

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x-b}{\sqrt{4kt}}}^{\frac{x-a}{\sqrt{4kt}}} h_1 e^{-\theta^2}\,d\theta + +\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x-d}{\sqrt{4kt}}}^{\frac{x-c}{\sqrt{4kt}}} h_2 e^{-\theta^2}\,d\theta$$

$$=\frac{h_1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{x-a}{\sqrt{4kt}}\right)-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{x-b}{\sqrt{4kt}}\right)\right)$$

$$+\frac{h_2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{x-c}{\sqrt{4kt}}\right)-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{x-d}{\sqrt{4kt}}\right)\right)$$

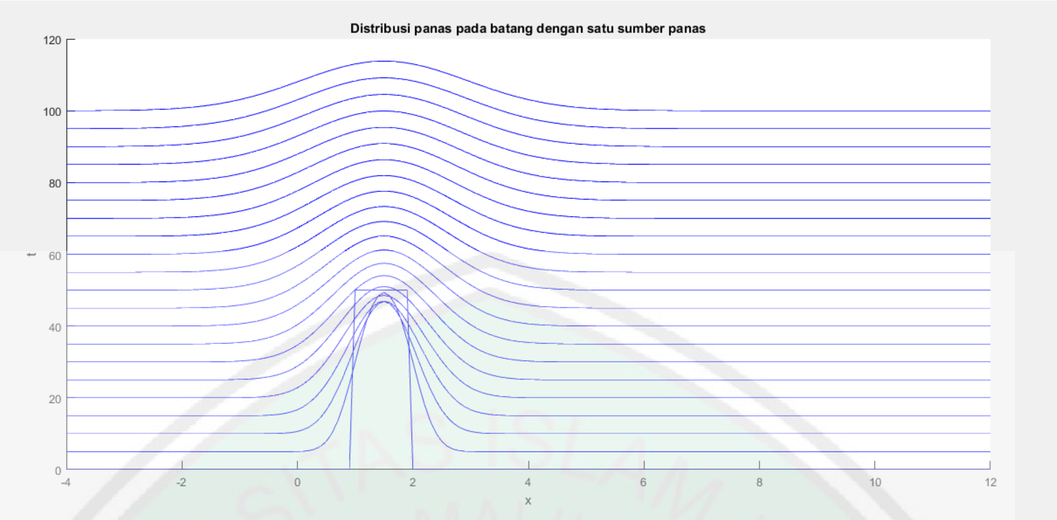
$$u(x,t)=\frac{h_1}{2}\left(\operatorname{erf}\left(\frac{x-a}{\sqrt{4kt}}\right)-\operatorname{erf}\left(\frac{x-b}{\sqrt{4kt}}\right)\right)+\frac{h_2}{2}\left(\operatorname{erf}\left(\frac{x-c}{\sqrt{4kt}}\right)-\operatorname{erf}\left(\frac{x-d}{\sqrt{4kt}}\right)\right) \tag{3.17}$$

3.2 Analisis Simulasi dan Interpretasi Penyelesaian Persamaan Panas untuk Domain Tak Hingga dengan Menggunakan Transformasi Fourier

Simulasi penyelesaian persamaan panas pada domain tak hingga dilakukan dengan menggunakan software Matlab R2015a. Terdapat lima simulasi penyelesaian persamaan panas. Simulasi pertama dan kedua dilakukan padakondisi awal yang berbeda. Simulasi ketiga dilakukan pada konstanta difusifitas termal yang berbeda. Simulasi keempat dan kelima dilakukan pada kondisi batas yang berbeda.

3.2.1 Simulasi Penyelesaian Persamaan Panas pada Kondisi Awal yang Berbeda

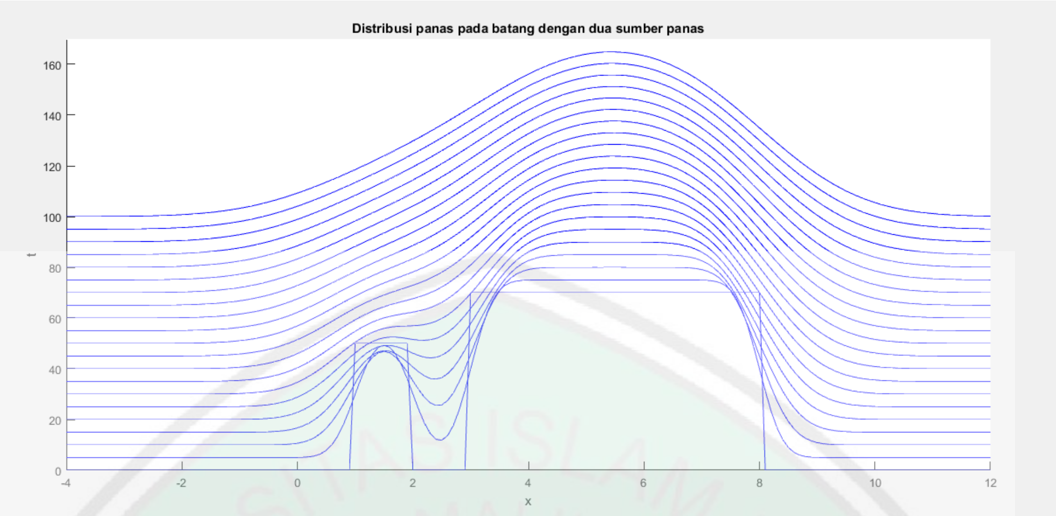
Berikut ini adalah simulasi dari penyelesaian (3.15) dengan menggunakan Matlab. Sumbu-x menyatakan ruang dan sumbu-y menyatakan waktu. Simulasi dilakukan untuk nilai-nilai $a = 1$, $b = 2$, dan $h = 50$, sedangkan difusifitas termalnya adalah $k = 0.01$.



Gambar 3.1 Simulasi penyelesaian untuk $a = 1$, $b = 2$, $k = 0.01$, dan $h = 50$

Simulasi pertama (Gambar 3.1) menunjukkan bahwa mula-mula panas terjadi pada daerah $1 \leq x \leq 2$, sedangkan untuk daerah lainnya temperaturnya bernilai nol. Kemudian seiring dengan meningkatnya waktu, maka perlahan panas di sekitar titik $a = 1$ dan $b = 2$ mulai berkurang dan semakin menyebar, sehingga temperatur di sekitar kedua titik tersebut mengalami perubahan. Hal ini sesuai dengan hukum pendinginan Newton yang menyatakan bahwa energi panas mengalir dari daerah hangat (suhu tinggi) ke daerah dingin (suhu rendah). Daerah yang mula-mula temperaturnya nol perlahan mengalami kenaikan temperatur. Sebaliknya, daerah yang mula-mula terdapat panas perlahan temperaturnya menurun. Untuk t yang semakin besar, maka panas pada batang akan semakin menyebar, sehingga temperatur mendekati nol di sepanjang batang.

Berikut ini adalah simulasi dari penyelesaian (3.17) dengan menggunakan Matlab. Sumbu-x menyatakan ruang dan sumbu-y menyatakan waktu. $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 8$, $h_1 = 50$, dan $h_2 = 80$, sedangkan difusifitas termalnya adalah $k = 0.01$.

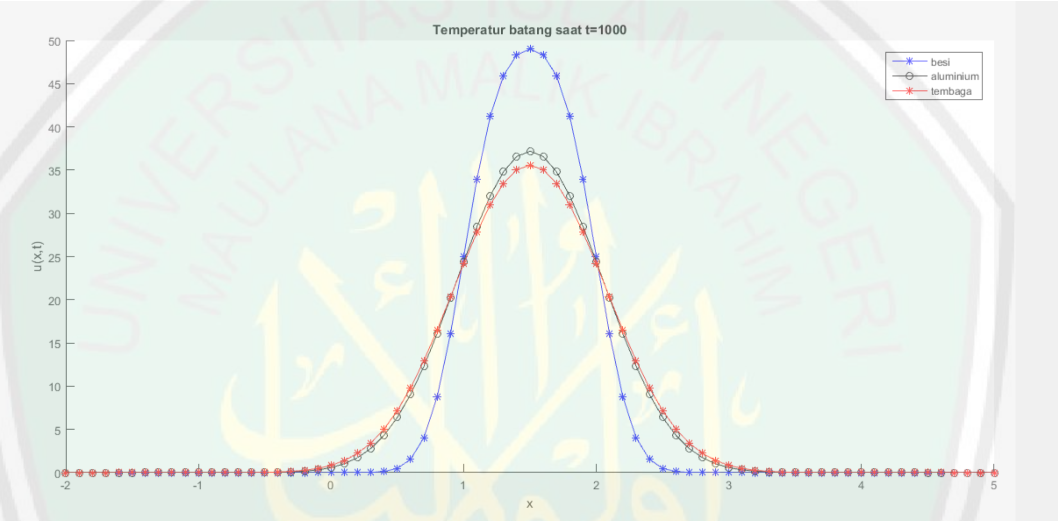


Gambar 3.2 Simulasi penyelesaian untuk $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 8$, $k = 0.01$, $h_1 = 50$, dan $h_2 = 80$

Simulasi kedua (Gambar 3.2) menunjukkan bahwa mula-mula panas terjadi pada daerah $1 \leq x \leq 2$ dan $3 \leq x \leq 8$, sedangkan untuk daerah lainnya temperaturnya bernilai nol. Perbedaan dengan simulasi pertama adalah adanya daerah kedua yang diberikan panas. Distribusi panas hampir sama seperti simulasi pertama. Perbedaanya terletak pada perubahan temperatur di antara kedua daerah yang diberikan panas. Seperti pada daerah lain, mula-mula temperaturnya nol, tetapi karena diapit oleh kedua panas, maka distribusi panas mengalami perbedaan. Untuk daerah yang dekat dengan panas yang lebih tinggi tentunya memiliki temperatur yang lebih tinggi. Semakin meningkat t, maka distribusi panas pada daerah $a \leq x \leq b$ akan semakin menyesuaikan dengan daerah $c \leq x \leq d$ karena memiliki temperatur yang lebih kecil. Untuk t yang semakin besar, maka panas pada batang akan semakin menyebar, sehingga temperatur mendekati nol di sepanjang batang.

3.2.2 Simulasi Penyelesaian Persamaan Panas pada Konstanta Difusifitas Termal yang Berbeda

Simulasi ketiga dilakukan untuk difusifitas termal batang yang bervariasi. Diberikan difusifitas termal tiga logam, yaitu besi, aluminium, tembaga (k_{besi} = $2{,}3.10^{-5} m^2/s$, $k_{aluminium} = 9{,}7.10^{-5} m^2/s$, dan $k_{tembaga} = 1{,}11.10^{-4} m^2/s$,). Sedangkan kondisi awal dan kondisi batas sama seperti simulasi pertama.

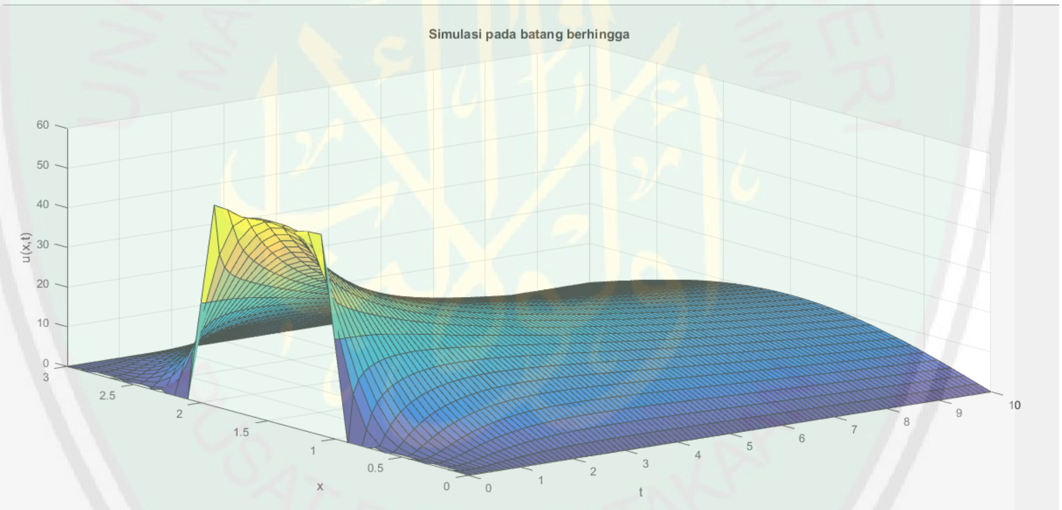


Gambar 3.3 Simulasi penyelesaian untuk difusifitas termal materi yang bervariatif, yaitu besi (biru, style -*), aluminium (hitam, style -o), dan tembaga (merah, style -*).

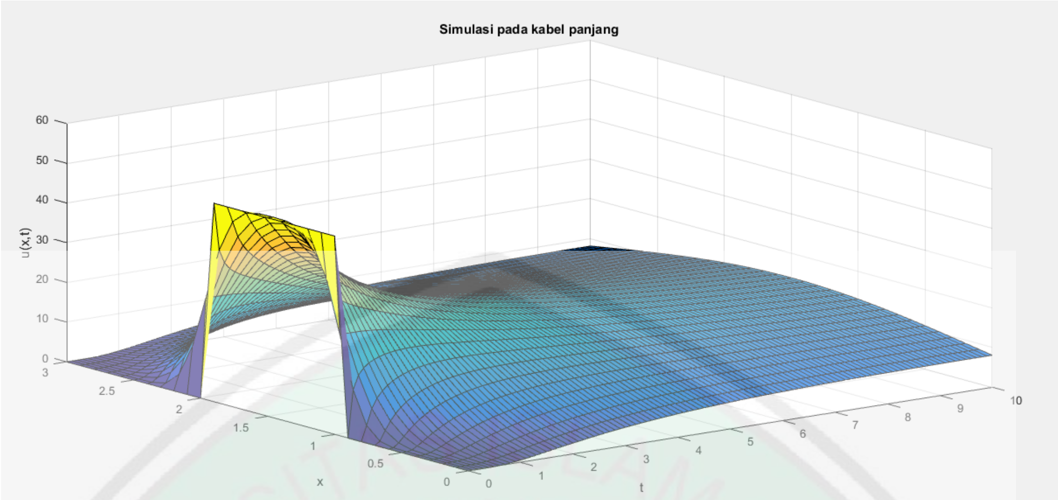
Berdasarkan hasil simulasi ketiga (Gambar 3), pada t=1000 diketahui bahwa panas pada kabel tembaga merambat lebih cepat, disusul dengan kabel aluminium dan kabel besi. Hal ini terjadi karena difusifitas termal tembaga paling besar. Perbedaan ini dapat diamati dari distribusi panas ketiga material yang berbeda-beda pada saat $t = 1000$. Ketika $t = 1000$, di titik $x = 1.5$ yang merupakan pusat sumber panas, temperatur besi sebesar 49.0130, temperatur aluminium sebesar 37.1852, dan temperatur tembaga sebesar 35.5698. Oleh karena itu, disimpulkan bahwa semakin besar difusifitas termal, maka semakin cepat panas menyebar, dan tembaga merupakan penghantar panas yang lebih baik dibandingkan dengan besi dan aluminium.

3.2.3 Simulasi Penyelesaian Persamaan Panas pada Kondisi Batas yang Berbeda

Simulasi keempat dan kelima persamaan panas dilakukan pada batang berhingga $(0 \leq x \leq 3)$ dengan menggunakan kondisi batas $u(0,t) = u(3,t) = 0$ dan pada kabel panjang (tak hingga) pada daerah $0 \leq x \leq 3$. Sedangkan kondisi awal sama seperti simulasi pertama dan difusifitas termal $k = 0.1$



Gambar 3.4 Simulasi persamaan panas pada batang berhingga $(0 \leq x \leq 3)$ dengan menggunakan kondisi batas $u(0,t) = u(3,t) = 0$



Gambar 3.5 Simulasi persamaan panas pada kabel panjang pada $0 \leq x \leq 3$

Berdasarkan simulasi pada kabel berhingga (Gambar 3.4), tampak pada kedua ujung batang temperaturnya selalu bernilai nol, karena kondisi batas yang diterapkan adalah nol untuk kedua ujung kabel. Hal ini sebenarnya berlaku juga untuk simulasi pada kabel tak hingga (Gambar 3.5). Hanya saja, karena kabel yang sangat panjang, maka simulasi tidak mungkin dilakukan sepanjang kabel. Sehingga yang dimunculkan pada simulasi hanya pada daerah yang diberikan panas saja. Seperti pada Gambar 3.5, kedua ujung temperaturnya terlihat tidak sama dengan nol untuk $t = 10$, yaitu sebesar 8.0550. Hal ini terjadi karena sebenarnya ujung tersebut bukan ujung kabel yang disimulasikan, melainkan hanya bagian persekitaran kabel yang diberikan sumber panas.

3.3 Penyelesaian Permasalahan dalam Islam

Umat muslim diwajibkan untuk menunaikan sholat lima waktu, karena hal ini adalah rukun Islam yang kedua. Kewajiban ini bersifat mutlak dan fardlu 'ain, artinya setiap muslim yang sudah baligh telah diwajibkan untuk menunaikannya. Perintah shalat ini terdapat pada Firman Allah swt. dalam Q.S. Al-Bayyinah: 5

وَمَآ أُمِرُوٓاْ إِلَّا لِيَعۡبُدُواْ ٱللَّهَ مُخۡلِصِينَ لَهُ ٱلدِّينَ حُنَفَآءَ وَيُقِيمُواْ ٱلصَّلَوٰةَ وَيُؤۡتُواْ ٱلزَّكَوٰةَۚ وَذَٰلِكَ دِينُ ٱلۡقَيِّمَةِ ۝٥

Padahal mereka tidak disuruh kecuali supaya menyembah Allah dengan memurnikan ketaatan kepada-Nya dalam (menjalankan) agama yang lurus, dan supaya mereka mendirikan shalat dan menunaikan zakat; dan yang demikian itulah agama yang lurus.

Akan tetapi permasalahan muncul ketika seorang muslim tidak memungkinkan untuk melaksanakan kewajiban sholat tersebut. Oleh karena itu, Islam memberikan beberapa keringanan untuk mengatasi permasalahan tersebut, sehingga umat Islam tetap bisa menjalankan kewajibannya.

Salah satu rukun di dalam sholat adalah berdiri, akan tetapi terdapat pengecualian, yaitu bagi yang mampu. Adakalanya seorang muslim tidak mampu untuk berdiri, misalnya ketika kakinya sakit atau mengalami kelumpuhan yang tidak memungkinkan untuk berdiri. Maka Islam memberikan keringanan yaitu sholat dengan cara duduk. Adakalanya juga seorang muslim tidak mampu untuk melakukan keduanya, baik berdiri ataupun duduk. Maka Islam memberikan keringanan yaitu sholat dengan cara tidur berbaring. Rasulullah saw. Bersabda

عَنْ عِمْرَانَ بْنِ حُصَيْنٍ اَنَّهُ قَالَ؛ كَانَتْ بِيْ بَوَاسِيْرُ فَسَأَلْتُ النَّبِيَّ ص.م.عَنِ الصَلَاةِ، فَقَالَ؛ صَلِّ قَائِمًا فَأِنْ لَمْ تَسْتَطِعْ فَقَاعِدًا فَإِنْ لَمْ تَسْتَطِعْ فَعَلَى جَنْبٍ. (رواه البخاري)

Dari Imam bin Husain r.a. bahwasannya ia bercerita,"Aku pernah menderita sakit bawasir (keluar ujung usus), lalu aku bertanya kepada Nabi SAW tentang cara melakukan salat. Nabi menjawab, 'Salatlah kamu berdiri. Jika tak kuat berdiri, salatlah kamu dengan duduk. Jika kamu tak kuat duduk, salatlah kamu dengan berbaring."

Sebelum menunaikan sholat, seorang muslim diwajibkan untuk bersuci dari hadats kecil dan besar. salah satu caranya adalah dengan berwudlu dengan menggunakan air suci. Apabila tidak bisa berwudlu dikarenakan tidak adanya air, maka Islam memberikan keringanan yaitu bersuci dengan menggunakan debu yang suci. Cara bersuci tersebut dinamakan *tayamum.* Allah swt. berfirman dalam Q.S. An-Nisa’: 43

وَإِن كُنتُم مَّرْضَىٰٓ أَوْ عَلَىٰ سَفَرٍ أَوْ جَآءَ أَحَدٌ مِّنكُم مِّنَ ٱلْغَآئِطِ أَوْ لَٰمَسْتُمُ ٱلنِّسَآءَ فَلَمْ تَجِدُوا۟ مَآءً
فَتَيَمَّمُوا۟ صَعِيدًا طَيِّبًا فَٱمْسَحُوا۟ بِوُجُوهِكُمْ وَأَيْدِيكُمْ ۗ إِنَّ ٱللَّهَ كَانَ عَفُوًّا غَفُورًا ﴿٤٣﴾

Dan jika kamu sakit atau sedang dalam musafir atau datang dari tempat buang air atau kamu telah menyentuh perempuan, kemudian kamu tidak mendapat air, maka bertayamumlah kamu dengan tanah yang baik (suci); sapulah mukamu dan tanganmu. Sesungguhnya Allah Maha Pemaaf lagi Maha Pengampun.

Tayamum artinya berniat atau menyengaja. Menurut istilah, tayamum ialah menyapukan tanah ke muka dan kedua telapak tangan dengan syarat-syarat yang ditentukan. Jika seorang muslim ditimpa sakit dan tak boleh menggunakan air atau ketika seorang muslim dalam perjalanan, atau ketika menetap di perkampungan yang tidak memiliki air, maka muslim tersebut diperbolehkan untuk bertayamum sebagai pengganti wudlu untuk menunaikan shalat. (Mas’ud, 2000:102)

Islam mengajarkan bahwa setiap permasalahan pasti memiliki jalan keluar. Seperti yang telah dijelaskan pada Q.S. Yusuf: 67

وَقَالَ يَٰبَنِىَّ لَا تَدْخُلُوا۟ مِنۢ بَابٍ وَٰحِدٍ وَٱدْخُلُوا۟ مِنْ أَبْوَٰبٍ مُّتَفَرِّقَةٍ ۖ وَمَآ أُغْنِى عَنكُم مِّنَ ٱللَّهِ
مِن شَىْءٍ ۖ إِنِ ٱلْحُكْمُ إِلَّا لِلَّهِ ۖ عَلَيْهِ تَوَكَّلْتُ ۖ وَعَلَيْهِ فَلْيَتَوَكَّلِ ٱلْمُتَوَكِّلُونَ ﴿٦٧﴾

‘‘Dan Ya´qub berkata: "Hai anak-anakku janganlah kamu (bersama-sama) masuk dari satu pintu gerbang, dan masuklah dari pintu-pintu gerbang yang berlain-lain; namun demikian aku tiada dapat melepaskan kamu barang sedikitpun dari pada (takdir) Allah.

Ayat ini menjelaskan mengenai kisah Nabi Yakub. Ketika beliau menyuruh anak-anaknya untuk pergi ke Mesir, mereka disuruh untuk tidak masuk secara bersamaan melalui satu pintu atau jalur masuk. Hal ini dilakukan karena untuk menghindari sifat dengki dan hasad karena mereka memiliki penampilan yang menarik. Begitu pula ketika manusia memiliki permasalahan. Ketika manusia mengalami kesulitan menyelesaikan suatu permasalahan dengan menggunakan suatu pendekatan maka dianjurkan untuk menggunakan pendekatan lain.

Hal tersebut juga terjadi pada penyelesaian masalah difusi panas. Secara umum penyelesaian persamaan panas pada domain berhingga dibagi menjadi dua jenis, yaitu penyelesaian secara analitik dan penyelesaian secara numerik. Persamaan panas dapat diperoleh solusi analitiknya jika persamaan masih berwujud persamaan linier, sehingga dapat diselesaikan dengan metode-metode analitik. Salah satu metode analitik adalah metode pemisahan variabel (*separating of variables*), yaitu dengan cara memisahkan variabel waktu dengan variabel ruang pada persamaan. Apabila persamaan sudah dimodifikasi sedemikian sehingga persamaan menjadi non-linier, maka penggunakan metode pemisahan variabel sulit dilakukan karena variabel waktu dengan variabel ruang lebih sulit untuk dipisahkan. Oleh karena itu, metode numerik bisa digunakan untuk menyelesaikan permasalahan tersebut.

Penyelesaian permasalahan perambatan panas umumnya diselesaikan pada kasus domain berhingga. Sedangkan untuk kasus pada domain tak hingga penyelesaian akan menjadi lebih sulit. Metode pemisahan variabel (*separating of variables*) sulit diterapkan pada penyelesaian permasalahan pada domain tak hingga, karena untuk menyatakan dalam ekspansi deret Fourier, nilai panjang domain L sangat besar. Begitu juga dengan metode numerik, untuk menghasilkan penyelesaian yang mendekati penyelesaian analitik tentunya membutuhkan pembagian *grid* pada domain yang banyak, hal ini mustahil dilakukan jika domain yang digunakan sangat besar. Oleh karena itu, digunakan transformasi Fourier untuk menyelesaikan permasalahan tersebut. Transformasi Fourier sangat berguna untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial jika domain yang digunakan sangat besar, di mana permasalahan tersebut sulit diselesaikan dengan metode-metode yang digunakan pada domain berhingga, seperti dua metode tersebut.

Kedua contoh tersebut, baik penyelesaian permasalahan dalam menjalankan shalat maupun penyelesaian permasalahan difusi panas merupakan bukti bahwa segala permasalahan di dunia ini pasti memiliki jalan keluar penyelesaiannya. Allah telah memberikan berbagai kemudahan untuk menyelesaikan permasalahan tersebut, karena Allah tidak akan membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya. Sebagaimana Firman Allah dalam Q.S. Al-Baqarah: 286

لَا يُكَلِّفُ ٱللَّهُ نَفْسًا إِلَّا وُسْعَهَا ۚ لَهَا مَا كَسَبَتْ وَعَلَيْهَا مَا ٱكْتَسَبَتْ ... ﴿٢٨٦﴾

Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya. Ia mendapat pahala (dari kebajikan) yang diusahakannya dan ia mendapat siksa (dari kejahatan) yang dikerjakannya.

Menurut Al-Jazairi (2006:490-491), Allah Ta'ala memberitahukan bahwa karena rasa belas kasihan-Nya kepada mereka dan hikmah dalam perlakuan-Nya terhadap makhluk yang diciptakannya, Allah Ta'ala tidak membebani seorangpun melainkan sesuai dengan kesanggupan dan daya kemampuannya untuk mengerjakannya, dan bahwa ia mendapatkan pahala dari kebajikan yang diusahakannya, serta ia mendapat siksa dari kejahatan yang ia lakukan, kecuali jika Allah Ta'ala memaafkan dan mengampuninya.

Karena Allah swt. telah memberikan kemudahan bagi manusia dalam menyelesaikan setiap permasalahan, maka manusia diwajibkan berusaha dan berikhtiyar dalam menyelesaikan setiap permasalahan. Sebagai contoh pada kedua permasalahan tersebut, yaitu masalah dalam menunaikan shalat dan masalah dalam menyelesaikan permasalahan difusi panas. Sebagai umat muslim, karena Allah telah memberikan beberapa keringanan dalam menjalankan ibadah shalat, maka umat muslim dituntut berusaha untuk tetap menjalankan kewajiban tersebut, bagaimanapun kondisi dan permasalahannya. Hal ini dikarenakan shalat merupakan salah satu rukun Islam yang tidak boleh ditinggalkan. Begitu juga dalam penyelesaian permasalahan difusi panas. Karena metode yang digunakan sangat banyak, maka diwajibkan untuk berusaha menyelesaikannya dengan metode yang tepat sesuai kondisi permasalahannya.

BAB V

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan dapat disimpulkan bahwa:

1. Permasalahan panas pada domain tak hingga dapat diselesaian dengan menggunakan transformasi Fourier. Persamaan panas ditransformasikan sehingga diperoleh persamaan diferensial biasa. Selanjutnya, persamaan diferensial biasa tersebut diselesaikan untuk menghasilkan penyelesaian transformasi. Penyelesaian persamaan diferensial parsial diperoleh dengan melakukan invers transformasi. Selanjutnya diterapkan prinsip konvolusi, sehingga menghasilkan penyelesaian dalam bentuk integral tunggal

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{k\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{\frac{-(x-y)^2}{4kt}} dy$$

yang selanjutnya bisa diperiksa keabsahan penyelesaiannya.

2. Setelah diperoleh penyelesaian persamaan, dilakukan simulasi dengan menggunakan fungsi error pada Matlab. Simulasi pertama menunjukkan bahwa panas menyebar dari temperatur tinggi ke temperatur rendah, begitu juga apabila diberikan dua daerah panas, seperti pada simulasi kedua. Untuk waktu yang semakin besar, maka panas akan semakin menyebar ke seluruh kabel sedemikian sehingga temperatur mendekati nol di sepanjang kabel. Simulasi ketiga untuk difusifitas termal yang berbeda menunjukan bahwa semakin besar difusifitas termal, maka semakin cepat panas menyebar. Terakhir, simulasi pada kabel berhingga menunjukkan kedua ujung kabel

yang selalu bernilai nol. Hal yang sama sebenarnya juga berlaku pada simulasi pada kabel panjang, hanya saja karena tidak memungkinkan simulasi keseluruhan kabel maka hanya dilakukan simulasi pada bagian yang diberikan panas.

4.2 Saran

Melihat permasalahan yang dibahas hanya pada masalah difusi panas kabel panjang saja, tanpa memperhatikan faktor eksternal, maka diharapkan penelitian selanjutnya mampu membahas faktor-faktor lain yang mempengaruhi penyebaran panas pada kabel, seperti faktor eksternal. Selain itu, diharapkan pembahasan ke depannya mampu menganalisis kondisi awal yang berbeda-beda dengan mengamati kasus nyata yang terjadi pada masalah perambatan panas suatu batang, sehingga hasil penelitian mampu menyelesaikan permasalahan nyata di kehidupan.

DAFTAR RUJUKAN

Ad-Dimasyqi, Al-Imam Ibnu Katsir. 2009. *Tafsir Ibnu Katsir*. Terjemahan M. Abdul Ghoffar. Cetakan Pertama. Jakarta: Pustaka Imam Asy-Syafi'i.

Al-Jazairi, Abu Bakar Jabir. 2006. *Tafsir Al-Aisar*. Cetakan Pertama. Jakarta: Darus Sunnah.

Al-Qarni, Aidh. 2007. *Tafsir Muyassar*. Terjemahan Tim Qisthi Press. Jakarta: Qisthi Press.

Al-Qurthubi, Syaikh Imam. 2008. *Tafsir Al-Qurthubi*. Terjemahan Fathurrahman dkk. Jakarta: Pustaka Azzam.

Boyce, William E. dan Richard C. DiPrima. 2009. *Elementary Differential Equation and Boundary Value Problems*. New Jersey: John Wiley & Sons.

Erich, Zauderer. *Partial Differential Equation of Applied Mathematics*. Third Edition. 2006. Danvers: John Wiley & Sons, Inc.

Folland, G. B. 1992. *Fourier Analysis and Its Applications*. California: Brooks/Cole Publishing Company.

Haberman, Richard. 2013. *Applied Partial Differential Equation with Fourier Series and Boundary Value Problems*. Fifth Edition. New Jersey: Pearson Education.

Humi, Mayer dan William B. Miller. 1992. *Boundary Value Problem and Partial Differential Equation.* Boston: PWS-KENT Publishing Company.

Maghfur, Moh. Alex dan Ari Kusumastuti. 2017. Penyelesaian Masalah Difusi Panas pada Suatu Kabel Panjang. Makalah Seminar Nasional Matematika dan Aplikasinya. Surabaya: Universitas Airlangga. 21 Oktober 2017.

Masud, Ibnu. 2000. *Fiqih Madzhab Syafii: Ibadah*.Bandung: Pustaka Setia.

Nair, Sudhakar. 2011. *Advanced Topics in Applied Mathematics: for Engineering and the Physical Sciences*. New York: Cambridge University Press.

Negero, Naol Tufa. 2014. Fourier Transform Methods for Partial Differential Equation. *International Journal of Partial Differential Equation and Applications*, (Online), 2 (3). 44-57, (http://pubs.sciepub.com/ijpdea/2/3/2), diakses 6 Maret 2017.

Oktavia, Aulia dan Mahdhivan Syafwan. 2013. Eksistensi Soliton pada Persamaan Korteweg-De Vries. *Jurnal Matematika Unand*, 3 (1). 9-16.

O'Neil, Peter V. 2014. *Beginning Partial Differential Equation*. New Jersey: John Wiley & Sons.

Strauss, Walter A. 2008. *Partial Differential Equation: An Introduction*. Second Edition. Danvers: John Wiley & Sons.

Surur, Agus Miftakus, Yudi Ari Adi, dan Sugianto. 2013. Penyelesaian Persamaan Telegraph dan Simulasinya. *Jurnal Fourier*, (Online), 2 (1). 33-43, (http://www.fourier.or.id), diakses 9 Juni 2017.

Yang, Won-young. 2005. *Applied Numerical Methods Using MATLAB*. New Jersey: John Wiley & Sons.

Zauderer, E. 2006. *Partial Differential Equation of Applied Mathematics*. Edisi Ketiga. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.

Zill, Dennis G. dan Michael R. Cullen. 2009. *Differential Equation with Boundary Value Problem*. Seventh Edition. Belmont:Cengage Learning.

LAMPIRAN-LAMPIRAN

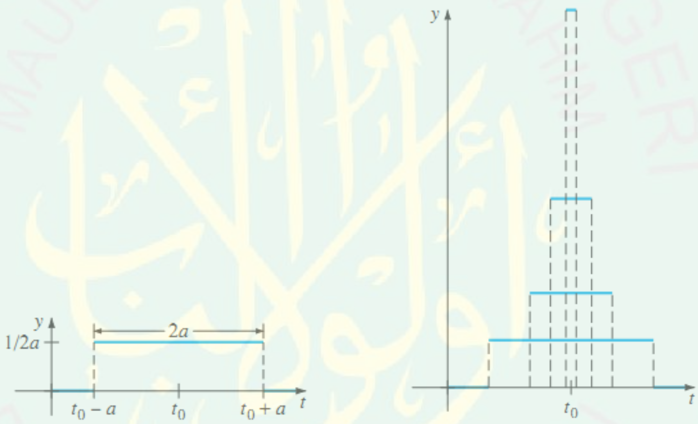
Lampiran 1. Transformasi Fourier dari beberapa Fungsi (Tabel 2.1)

Nomor 1: Fungsi Delta

Definisi: Menurut Zill (2006:292-293), fungsi $\delta(x)$ didefinisikan sebagai

$$\delta(x-x_0)=\lim_{a\to 0}\delta_a(x-x_0)=\begin{cases}0, & 0\le x<x_0-a\\ \dfrac{1}{2a}, & x_0-a\le x<x_0+a\\ 0, & x\ge x_0+a\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2a}, & x_0-a\le x<x_0+a\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$



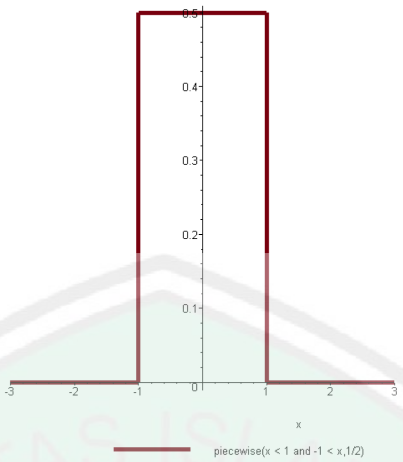
(a) graph of $\delta_a(t-t_0)$ **(b)** behavior of δ_a as $a\to 0$

Sehingga untuk $x_0=0$ diperoleh

$$\delta(x)=\lim_{a\to 0}\delta_a(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a}, & -a\le x<a\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

Contoh: Jika $a=1$ maka

$$\delta(x)=\delta_2(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & -1\le x<1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$



Sedangkan menurut Haberman (2013:385), fungsi $\delta(x-x_i)$ didefinisikan

$$\delta(x-x_i) = \begin{cases} 0, & x \neq x_i \\ \infty, & x = x_i \end{cases}$$

Sehingga jika $x_i = 0$ maka

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$$

Transformasi Fourier dari fungsi delta $\delta(x)$ adalah

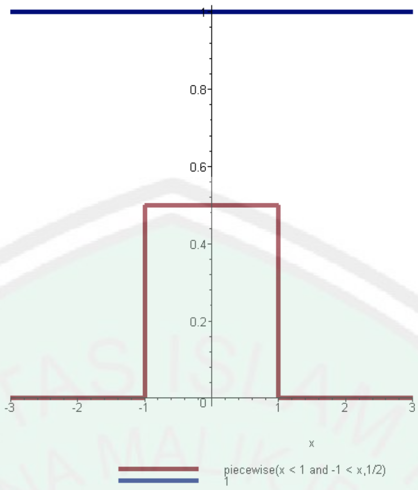
$$\mathcal{F}[\delta(x)] = \lim_{a\to 0} \mathcal{F}[\delta_a(x)] = \lim_{a\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(x) e^{-i\omega x}\, dx = \lim_{a\to 0} \int_{-a}^{a} \frac{1}{2a} e^{-i\omega x}\, dx$$

$$= \lim_{a\to 0} \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} e^{-i\omega x}\, dx = \lim_{a\to 0} \frac{1}{2a} \left[\frac{1}{-i\omega} e^{-i\omega x}\right]_{-a}^{a}$$

$$= \lim_{a\to 0} \frac{1}{-i\omega 2a}\left(e^{-i\omega a} - e^{i\omega a}\right) = \lim_{a\to 0} \frac{1}{i\omega 2a}\left(e^{i\omega a} - e^{-i\omega a}\right)$$

$$= \lim_{a\to 0} \frac{1}{i\omega 2a} 2i \sin \omega a = \lim_{a\to 0} \frac{\sin \omega a}{\omega a} = 1$$

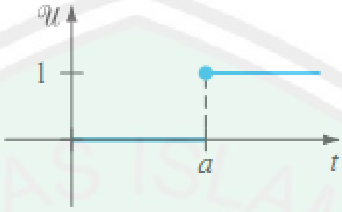
Berikut adalah plot fungsi $\delta(x)$ dengan transformasinya untuk $a = 1$



Nomor 2: Fungsi Square Pulse

Definisi: Menurut Zill (2006:274), fungsi $H(x-a)$ didefinisikan sebagai

$$H(x-a) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < a \\ 1, & x \ge a \end{cases}$$

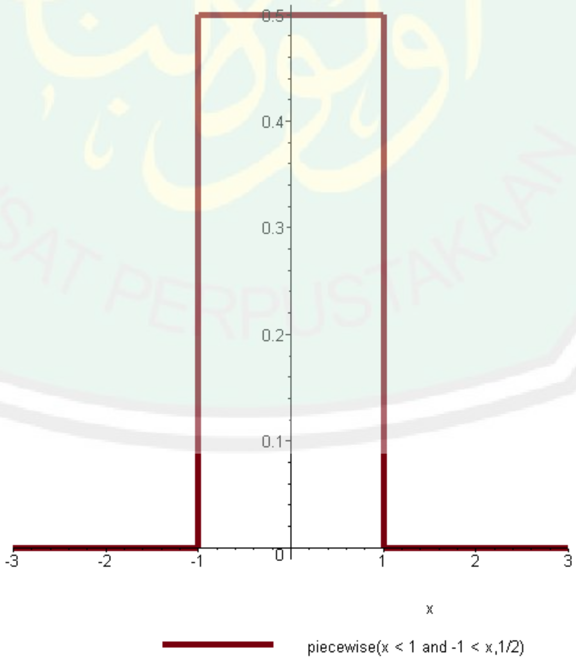


Untuk variabel $a-|x|$ maka

$$H(a-|x|) = \begin{cases} 0, & 0 \le a < |x| \\ 1, & a \ge |x| \end{cases} = \begin{cases} 1, & -a \le x \le a \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

Contoh: Jika $a = 1$ maka

$$H(1-|x|) = \begin{cases} 1, & -1 \le x \le 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$



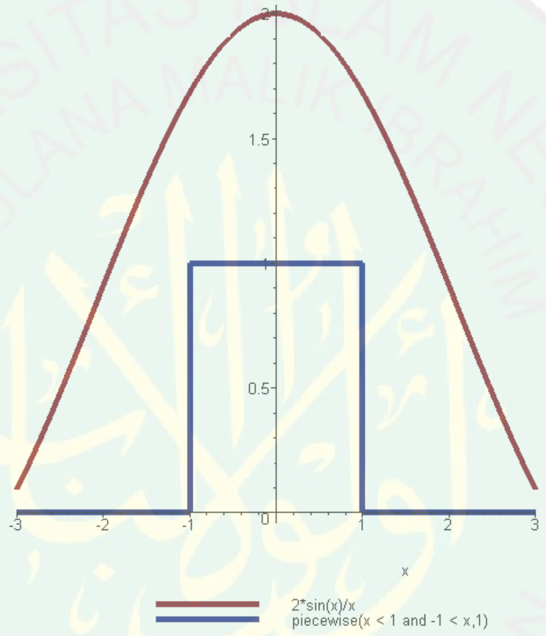
Transformasi Fourier dari fungsi Heaviside $H(a-|x|)$ adalah

$$\mathcal{F}[H(a-|x|)] = \int_{-\infty}^{\infty} H(a-|x|)e^{-i\omega x}\,dx = \int_{-a}^{a} e^{-i\omega x}\,dx = \left[\frac{1}{-i\omega}e^{-i\omega x}\right]_{-a}^{a}$$

$$= \frac{1}{-i\omega}\left(e^{-i\omega a} - e^{i\omega a}\right) = \frac{1}{i\omega}\left(e^{i\omega a} - e^{-i\omega a}\right) = \frac{1}{i\omega}2i\sin\omega a$$

$$= \frac{2\sin\omega a}{\omega}$$

Berikut adalah plot fungsi $H(a-|x|)$ dengan transformasinya untuk $a = 1$



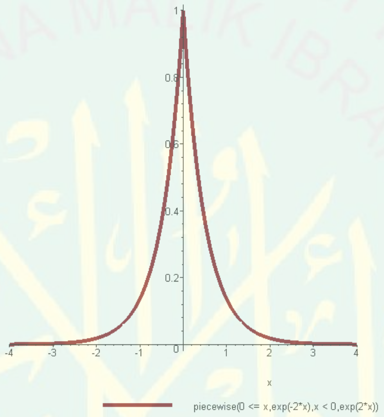
Nomor 3: Eksponensial

Definisi: Dengan menggunakan definisi pada nilai mutlak, fungsi $e^{-a|x|}$ didefinisikan sebagai

$$e^{-a|x|} = \begin{cases} e^{-ax}, & x \geq 0 \\ e^{ax}, & x < 0 \end{cases}$$

Contoh: Jika $a = 2$, maka

$$e^{-2|x|} = \begin{cases} e^{-2x}, & x \geq 0 \\ e^{2x}, & x < 0 \end{cases}$$



Transformasi Fourier dari fungsi eksponensial $e^{-a|x|}$ adalah

$$\mathcal{F}\left[e^{-a|x|}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} e^{-i\omega x}\, dx = \int_{0}^{\infty} e^{-ax} e^{-i\omega x}\, dx + \int_{-\infty}^{0} e^{ax} e^{-i\omega x}\, dx$$

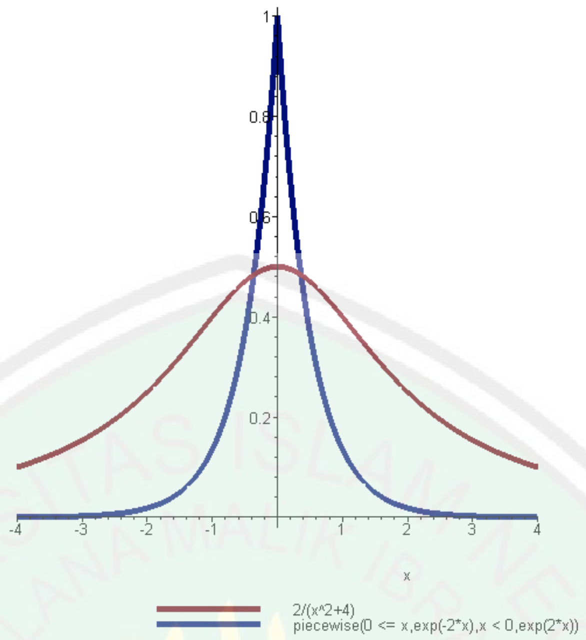
$$= \int_{0}^{\infty} e^{(-a-i\omega)x}\, dx + \int_{-\infty}^{0} e^{(a-i\omega)x}\, dx$$

$$= \left[\frac{1}{-a-i\omega} e^{(-a-i\omega)x}\right]_0^{\infty} + \left[\frac{1}{a-i\omega} e^{(a-i\omega)x}\right]_{-\infty}^{0}$$

$$= \left[\frac{1}{-a-i\omega} \frac{1}{e^{(a+i\omega)x}}\right]_0^{\infty} + \left[\frac{1}{a-i\omega} e^{(a-i\omega)x}\right]_{-\infty}^{0}$$

$$= 0 - \frac{1}{-a-i\omega} + \frac{1}{a-i\omega} - 0 = \frac{1}{a+i\omega} + \frac{1}{a-i\omega} = \frac{2}{a^2+\omega^2}$$

Berikut adalah plot fungsi $H(e^{-a|x|})$ dengan transformasinya untuk $a = 2$

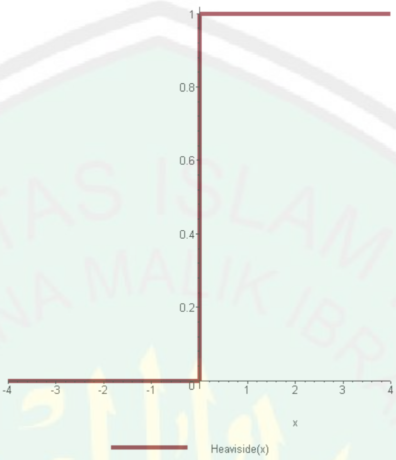


1
0.8
0.6
0.4
0.2
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
x
2/(x^2+4)
piecewise(0 <= x,exp(-2*x),x < 0,exp(2*x))

Nomor 4: Fungsi Heaviside

Definisi: Fungsi $H(x)$ didefinisikan sebagai

$$H(x) = \begin{cases} 1\,, & x \geq 0 \\ 0\,, & x < 0 \end{cases}$$



Dengan menggunakan invers transformasi Fourier, akan ditunjukkan bahwa

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega}\right] = H(x)$$

Invers transformasi Fourier dari $\pi\delta(\omega)$ adalah

$$\mathcal{F}^{-1}[\pi\delta(\omega)] = \lim_{a\to 0} \mathcal{F}^{-1}[\pi\delta_a(x)] = \lim_{a\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \big(\pi\delta_a(x)\big)e^{i\omega x}\,d\omega$$

$$= \left(\lim_{a\to 0}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(x)e^{i\omega x}\,d\omega\right) = \lim_{a\to 0}\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}\frac{1}{2a}e^{i\omega x}\,d\omega$$

$$= \lim_{a\to 0}\frac{1}{4a}\int_{-a}^{a} e^{i\omega x}\,d\omega = \lim_{a\to 0}\frac{1}{4a}\left[\frac{1}{ix}e^{i\omega x}\right]_{-a}^{a}$$

$$= \lim_{a\to 0}\frac{1}{4ixa}\left(e^{ixa} - e^{-ixa}\right) = \lim_{a\to 0}\frac{1}{4ixa}2i\sin xa = \frac{1}{2}\lim_{a\to 0}\frac{\sin xa}{xa}$$

$$= \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2}$$

Invers transformasi Fourier dari $1/i\omega$ adalah

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{i\omega}\right] = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{i\omega}\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{i\omega}e^{i\omega x}\,d\omega = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega x}}{\omega}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{0}^{\infty}\frac{e^{i\omega x}}{\omega}d\omega + \int_{-\infty}^{0}\frac{e^{i\omega x}}{\omega}d\omega\right)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{0}^{\infty}\frac{e^{i\omega x}}{\omega}d\omega - \int_{\infty}^{0}\frac{e^{-i\omega x}}{-\omega}d\omega\right), & x > 0 \\ \frac{1}{2\pi i}\left(-\int_{0}^{-\infty}\frac{e^{-i\omega x}}{-\omega}d\omega + \int_{-\infty}^{0}\frac{e^{i\omega x}}{\omega}d\omega\right), & x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{0}^{\infty}\frac{e^{i\omega x}}{\omega}d\omega - \int_{0}^{\infty}\frac{e^{-i\omega x}}{\omega}d\omega\right), & x > 0 \\ \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{i\omega x}}{\omega}d\omega - \int_{-\infty}^{0}\frac{e^{-i\omega x}}{\omega}d\omega\right), & x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{\infty}\frac{e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}}{\omega}d\omega, & x > 0 \\ \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}}{\omega}d\omega, & x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{\infty}\frac{2i\sin\omega x}{\omega}d\omega, & x > 0 \\ \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{0}\frac{2i\sin\omega x}{\omega}d\omega, & x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega x}{\omega}d\omega, & x > 0 \\ \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin\omega x}{\omega}d\omega, & x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} \dfrac{\sin \omega x}{\omega}\, d\omega, & x > 0 \\ \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \dfrac{\sin \omega x}{\omega}\, d\omega, & x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\pi}{2}, & x > 0 \\ \dfrac{1}{\pi}\left(-\dfrac{\pi}{2}\right), & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & x > 0 \\ -\dfrac{1}{2}, & x < 0 \end{cases}$$

Maka invers transformasi Fourier dari $\pi\delta(\omega) + 1/i\omega$ adalah

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega}\right] = \mathcal{F}^{-1}[\pi\delta(\omega)] + \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{i\omega}\right] = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}, & x > 0 \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}, & x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} = H(x)$$

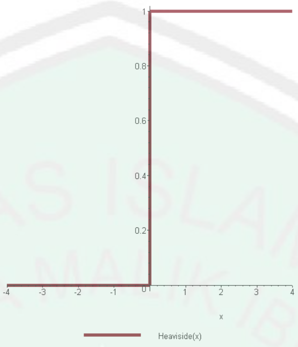
Jadi,

$$\mathcal{F}[H(x)] = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega}$$

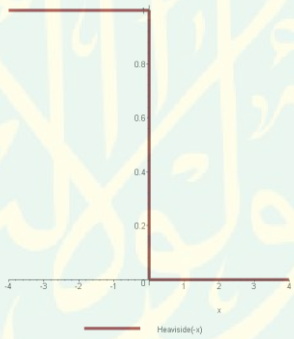
Nomor 5: Fungsi Sign

Definisi: Fungsi $H(x)$ dan $H(-x)$ didefinisikan sebagai

$$H(x) = \begin{cases} 1\,, & x \geq 0 \\ 0\,, & x < 0 \end{cases}$$



$$H(-x) = \begin{cases} 1\,, & x \leq 0 \\ 0\,, & x > 0 \end{cases}$$



Transformasi Fourier dari fungsi $H(x) - H(-x)$ adalah

$\mathcal{F}[H(x) - H(-x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \big(H(x) - H(-x)\big) e^{-i\omega x}\, dx = \int_{0}^{\infty} (1-0) e^{-i\omega x}\, dx +$

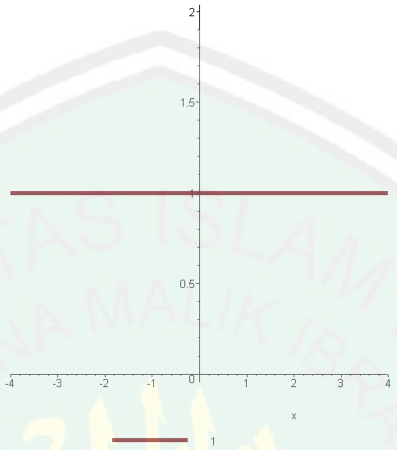
$\int_{-\infty}^{0} (0-1) e^{-i\omega x}\, dx = \int_{0}^{\infty} e^{-i\omega x}\, dx - \int_{-\infty}^{0} e^{-i\omega x}\, dx = \left[\frac{1}{-i\omega} e^{-i\omega x}\right]_{0}^{\infty} -$

$\left[\frac{1}{-i\omega} e^{-i\omega x}\right]_{-\infty}^{0} = \left(0 - \frac{1}{-i\omega}\right) - \left(\frac{1}{-i\omega} - 0\right) = \frac{2}{i\omega}$

Nomor 6: Fungsi Konstan

Diberikan fungsi konstan

$$f(x) = 1$$



Dengan menggunakan invers transformasi, akan ditunjukkan bahwa

$$\mathcal{F}^{-1}[2\pi\delta(x)] = 1$$

$$\mathcal{F}^{-1}[2\pi\delta(x)] = \lim_{a\to 0} \mathcal{F}^{-1}[2\pi\delta_a(x)] = \lim_{a\to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta_a(x) e^{i\omega x}\, d\omega$$

$$= \lim_{a\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(x) e^{i\omega x}\, d\omega = \lim_{a\to 0} \int_{-a}^{a} \frac{1}{2a} e^{i\omega x}\, d\omega$$

$$= \lim_{a\to 0} \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} e^{i\omega x}\, d\omega = \lim_{a\to 0} \frac{1}{2a} \left[\frac{1}{ix} e^{i\omega x}\right]_{-a}^{a}$$

$$= \lim_{a\to 0} \frac{1}{2ixa}\left(e^{ixa} - e^{-ixa}\right) = \lim_{a\to 0} \frac{1}{2ixa} 2i \sin xa = \lim_{a\to 0} \frac{\sin xa}{xa} = 1$$

Jadi,

$$\mathcal{F}^{-1}[2\pi\delta(x)] = 1$$

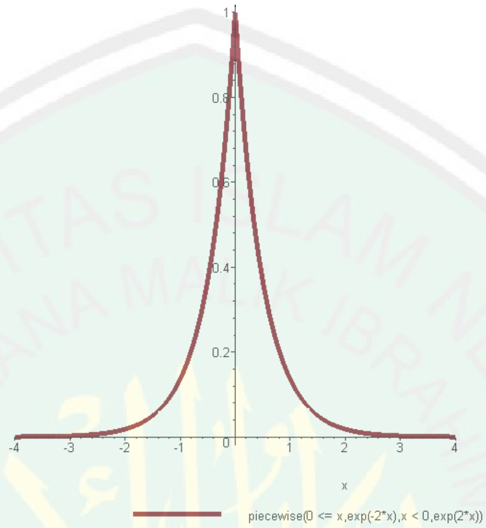
Sehingga

$$\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(x)$$

Nomor 7: Fungsi Gaussian

Diberikan fungsi Gaussian

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$



Transformasi Fourier dari fungsi Gaussian $e^{-\frac{x^2}{2}}$ adalah

$$\mathcal{F}\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-i\omega x}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2} - i\omega x}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2} - \frac{2i\omega x}{2}}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2 - 2i\omega x + \omega^2 - \omega^2}{2}}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2 - 2i\omega x + \omega^2}{2}} e^{-\frac{\omega^2}{2}}\, dx$$

$$= e^{-\frac{\omega^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(x+i\omega)^2}{2}}\, dx$$

Misalkan

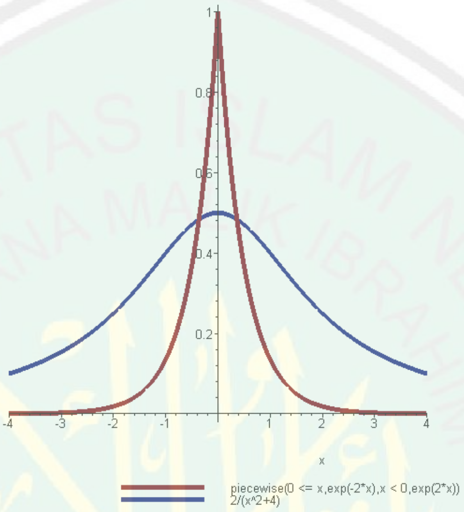
$$y = \frac{x + i\omega}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow dy = \frac{1}{\sqrt{2}} dx \Leftrightarrow dx = \sqrt{2} dy$$

maka

$$\mathcal{F}\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\right] = e^{-\frac{\omega^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(x+i\omega)^2}{2}} dx = e^{-\frac{\omega^2}{2}} \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = e^{-\frac{\omega^2}{2}} \sqrt{2}\sqrt{\pi}$$

$$= e^{-\frac{\omega^2}{2}} \sqrt{2\pi}$$

Berikut adalah plot fungsi $H(e^{-a|x|})$ dengan transformasinya untuk $a = 2$



Lampiran 2: Script Program

Script Program Simulasi Pertama

Distribusi Panas pada Batang dengan Dua Sumber Panas

```
clc,clear,clf
format short

k=0.01; %difusifitas termal

s=50; %temperatur awal
a=1; %batas kiri sumber panas
b=2; %batas kanan sumber panas

dt=5 ;

u=@(x,t) (s/2)*(erf((x - a)/(2*sqrt(k*t)))...
    - erf((x - b)/(2*sqrt(k*t))));

hold on
xx=-4:0.1:12;
tt=0:dt:100;
U=zeros(length(xx),length(tt));

for n=1:length(tt)
    for j=1:length(xx)
        U(j,n)=u(xx(j),tt(n));
    end
    U(:,1)=0;
    U(51:60,1)=s;

    plot(xx,U(:,n) + (n-1)*dt,'b'),...
        title('Distribusi panas pada batang dengan satu sumber
panas'),...
        xlabel('x'),ylabel('t'),
    ylim([0 120]), pause(0.01);
end
U;
```

Script Program Simulasi Kedua

Distribusi Panas pada Batang dengan Dua Sumber Panas

```
clc,clear,clf
format short

k=0.01; %difusifitas termal

s=50; %temperatur awal sumber panas pertama
a=1; %batas kiri sumber panas pertama
b=2; %batas kanan sumber panas pertama
h=70; %temperatur awal sumber panas kedua
c=3; %batas kiri sumber panas kedua
d=8; %batas kanan sumber panas kedua

dt=5 ;

u=@(x,t) (s*(erf(((x - a)*(1/(k*t))^(1/2))/2)...
    - erf(1/2*(x -
b)*(1/k/t)^(1/2))))/(2*(k*t)^(1/2)*(1/(k*t))^(1/2)) +...
   (h*(erf(((x - c)*(1/(k*t))^(1/2))/2)...
   - erf(1/2*(x -
d)*(1/k/t)^(1/2))))/(2*(k*t)^(1/2)*(1/(k*t))^(1/2));

hold on
xx=-4:0.1:12;
tt=0:dt:100;
U=zeros(length(xx),length(tt));

for n=1:length(tt)
    for j=1:length(xx)
        U(j,n)=u(xx(j),tt(n));
    end
    U(:,1)=0;
    U(51:60,1)=s;
    U(71:121,1)=h;


    plot(xx,U(:,n) + (n-1)*dt,'b'),...
        title('Distribusi panas pada batang dengan dua sumber
panas'),...
        xlabel('x'),ylabel('t'),
    ylim([0 170]), pause(0.01);
end
U;
```

Script Program Simulasi Ketiga

Simulasi untuk Difusifitas Termal yang Berbeda-beda

```
clc,clear,clf
format short

k=2.3*10^(-5); %besi

s=50; %temperatur mula-mula
a=1; %batas kiri x
b=2; %batas kanan x

dt=500; %perubahan waktu

%1 sumber panas
u=@(x,t) (s/2)*(erf((x - a)/(2*sqrt(k*t))) - erf((x -
b)/(2*sqrt(k*t))));

hold on
xx=-2:0.1:5;
tt=0:dt:1000;
U=zeros(length(xx),length(tt));
for n=1:length(tt)
    for j=1:length(xx)
        U(j,n)=u(xx(j),tt(n));
    end

end
U;

aaa=3;
plot(xx,U(:,aaa),'b-*'),title(['Temperatur batang saat t='
num2str(tt(aaa))]),...

xlabel('x'),ylabel('u(x,t)'),legend('besi','aluminium','tembaga');
ylim([0 50]), pause(0.001);

%========================

format short

k=9.7*10^(-5); %aluminium

s=50; %temperatur mula-mula
a=1; %batas kiri x
b=2; %batas kanan x

dt=500; %perubahan waktu

%1 sumber panas
u=@(x,t) (s/2)*(erf((x - a)/(2*sqrt(k*t))) - erf((x -
b)/(2*sqrt(k*t))));

hold on
```

```
xx=-2:0.1:5;
tt=0:dt:1000;
U=zeros(length(xx),length(tt));
for n=1:length(tt)
    for j=1:length(xx)
        U(j,n)=u(xx(j),tt(n));
    end

end
U;

aaa=3;
plot(xx,U(:,aaa),'k-o'),title(['Temperatur batang saat t='
num2str(tt(aaa))]),...

xlabel('x'),ylabel('u(x,t)'),legend('besi','aluminium','tembaga');
ylim([0 50]), pause(0.001);

%============

format short

k=1.11*10^(-4); %tembaga

s=50; %temperatur mula-mula
a=1; %batas kiri x
b=2; %batas kanan x

dt=500; %perubahan waktu

%1 sumber panas
u=@(x,t) (s/2)*(erf((x - a)/(2*sqrt(k*t))) - erf((x -
b)/(2*sqrt(k*t))));

hold on
xx=-2:0.1:5;
tt=0:dt:1000;
U=zeros(length(xx),length(tt));
for n=1:length(tt)
    for j=1:length(xx)
        U(j,n)=u(xx(j),tt(n));
    end

end
U;

aaa=3;
plot(xx,U(:,aaa),'r-*'),title(['Temperatur batang saat t='
num2str(tt(aaa))]),...

xlabel('x'),ylabel('u(x,t)'),legend('besi','aluminium','tembaga');
ylim([0 50]), pause(0.001);
```

Script Program Simulasi Keempat

Simulasi pada Batang Berhingga

```
clc,clear,clf

%kondisi batas kedua ujung 0

L   = 3;
T   = 10;
c   = 0.1;
a   = 50;

dx = 0.1;
dt = 0.1;

x = 0:dx:L;
t = 0:dt:T;

for m=1:length(t)
    for j=1:length(x)
        jml = 0;
        for n=1:100
            jml = jml + (2/L)*((L*a*(cos((1*pi*n)/L) -
cos(2/L*n*pi)))/(pi*n))*sin(n*pi*x(j)/L)*exp(-c*t(m)*(n*pi/L)^2);
        end
        u(j,m) = jml;
    end
    plot(x,u(:,m)),title(['t='
num2str(t(m))]),xlabel('x'),ylabel('u(x,t)')
    ylim([0 60])

    pause(0.01)
end

%plot(x,u(:,1)),title(['t=' num2str(t(m))])

surf(t,x,u),xlabel('t'),ylabel('x'),zlabel('u(x,t)'),...
    title('Simulasi pada batang berhingga'),grid on
```

Script Program Simulasi Kelima

Simulasi pada Batang Panjang

```
clc,clear,clf
format short

k=0.1;

s=50;
a=1;
b=2;

dt=0.1 ;

u=@(x,t) (s/2)*(erf((x - a)/(2*sqrt(k*t))) - erf((x -
b)/(2*sqrt(k*t))));

xx=0:0.1:3;
tt=0:dt:10;
U=zeros(length(xx),length(tt));
for n=1:length(tt)
    for j=1:length(xx)
        U(j,n)=u(xx(j),tt(n));
    end

    U(:,1)=0;
    U(11:20,1)=s;
    plot(xx,U(:,n)),title(['t= ',  num2str(tt(n))]),...
            xlabel('x'),ylabel('u(x,t)')
    ylim([0 60])

    pause(0.01)
end
U;

surf(tt,xx,U),xlabel('t'),ylabel('x'),zlabel('u(x,t)'),...
    title('Simulasi pada batang panjang'),grid on
```

RIWAYAT HIDUP

Moh. Alex Maghfur, biasa dipanggil Alex, lahir di Kediri pada tanggal 4 Mei 1995. Dia merupakan anak kelima dari Bapak Imam Syafaat dan Ibu Parmiatin dan tinggal di Dusun Bulurejo RT. 29 RW. 07 Desa Damarwulan Kec. Kepung Kab. Kediri.

Pendidikan dasarnya ditempuh di MI Islamiyah Bulurejo dan lulus pada tahun 2007, kemudian dia melanjutkan pendidikan menengah di lembaga yang sama, yaitu MTs. Islamiyah Bulurejo dan lulus pada tahun 2010. Setelah itu dia melanjutkan pendidikan di MAN Kandangan pada program Ilmu Pengetahuan Alam dan lulus pada tahun 2013. Selanjutnya, dia menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dengan mengambil jurusan Matematika bidang minat Matematika Terapan.

Selama menjadi mahasiswa, dia pernah aktif di beberapa unit kegiatan seperti Unit Kegiatan Mahasiswa (UKM) Taekwondo dan Ulul Albab Astronomy Club (UAAC). Selama menempuh pendidikan, baik di tingkat dasar sampai tingkat universitas dia juga tercatat meraih beberapa prestasi di bidang akademik dan non-akademik, beberapa di antarannya seperti Juara III dan Harapan I Olimpiade Matematika Tingkat SMA se-Jawa Timur, Juara I dan Harapan I Kompetisi Matematika se-Malang Raya, Penghargaan Perunggu Kompetisi Matematika Analisis dan Geometri tingkat nasional, dan Juara III dan Finalis Lomba Karya Tulis Matematika mahasiswa tingkat nasional.

Penulis dapat dihubungi via email: mmaghfur.muhammad01@gmail.com

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Moh. Alex Maghfur
NIM : 13610028
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Analisis Transformasi Fourier dalam Penyelesaian Persamaan Panas
Pembimbing I : Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si
Pembimbing II : Ach. Nashichuddin, MA

No.	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	13 Juni 2017	Konsultasi Bab I dan Bab II	1.
2.	19 Juli 2017	ACC Bab I dan Bab II	2.
3.	24 Juli 2017	Konsultasi Bab III	3.
4.	28 Juli 2017	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan Bab II	4.
5.	18 Agustus 2017	ACC Kajian Agama Bab I dan Bab II	5.
6.	25 Agustus 2017	Konsultasi Bab III	6.
7.	7 November 2017	Revisi Bab III	7.
8.	23 November 2017	ACC Bab III	8.
9.	23 November 2017	Konsultasi Bab IV	9.
10.	4 Desember 2017	ACC Bab IV	10.
11.	4 Desember 2017	Konsultasi Kajian Agama Bab III	11.
12.	4 Desember 2017	ACC Kajian Agama Bab III	12.
13.	4 Desember 2017	ACC Keseluruhan	13.

Malang, 6 Desember 2017
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001