

**SIFAT-SIFAT SUBMODUL MAKSIMAL
DALAM MODUL PERKALIAN**

SKRIPSI

**OLEH
MUCH. FUAD HASAN
NIM. 12610055**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018**

**SIFAT-SIFAT SUBMODUL MAKSIMAL
DALAM MODUL PERKALIAN**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
Much. Fuad Hasan
NIM. 12610055**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018**

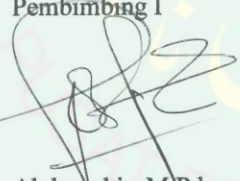
**SIFAT-SIFAT SUBMODUL MAKSIMAL
DALAM MODUL PERKALIAN**

SKRIPSI

Oleh
Much. Fuad Hasan
NIM. 12610055

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 2 Oktober 2017

Pembimbing I


Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006200312 1 001

Pembimbing II


Ari Kusumastuti, M.Si., M.Pd
NIP. 19770521 200501 2 004

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

**SIFAT-SIFAT SUBMODUL MAKSIMAL
DALAM MODUL PERKALIAN**

SKRIPSI

Oleh
Much. Fuad Hasan
NIM. 12610055

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal 17 November 2017

Penguji Utama : H. Wahyu H. Irawan, M.Pd

Ketua Penguji : Dr. Usman Pagalay, M.Si

Sekretaris Penguji : Dr. Abdussakir, M.Pd

Anggota Penguji : Ari Kusumastuti, M.Si., M.Pd

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Much. Fuad Hasan

NIM : 12610055

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul : Sifat-sifat Submodul Maksimal dalam Modul Perkalian

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 17 November 2017
Yang membuat pernyataan,



Much. Fuad Hasan
NIM. 12610055

MOTO

“Jadilah kamu manusia yang pada kelahiranmu semua orang tertawa bahagia, tetapi hanya kamu sendiri yang menangis, dan pada kematianmu semua orang menangis sedih, tetapi hanya kamu sendiri yang tersenyum.” (Mahatma Gandhi)



PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Kedua orang tua yang tersayang Abdul Rokhim dan Suharwati yang tidak pernah lelah mendidik penulis dengan sangat sabar. Sahabat-sahabat yang selalu mendukung dan memberi semangat untuk penulis dan rival-rival yang selalu memotivasi penulis untuk terus berkembang.



KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt atas rahmat taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Abdul Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, dan motivasi kepada penulis.
5. Ari Kusumastuti, M.Si., M.Pd, selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan arahan, nasihat, dan berbagai pengalaman kepada penulis.
6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.

7. Bapak dan Ibu yang selalu memberikan doa, semangat, serta motivasi kepada penulis sampai saat ini.
8. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika, khususnya Pinglan Anta Maulana, M. Amir Hamzah, Aan Sa'adillah, Luqman El Hakim, Mukhammad Lukman, Grafik Akbar Muttaqin, Achmad Sirojuddin, Okta Dwi Cahyono, Icha Risqie Meirissa, Firma Lianaharu, Erny Widiastuti, Maya Puspita Sari, Vany Linda F, Eka Fenia D.P, dan semua anggota matematika kelas-B angkatan 2012 yang telah bersama-sama berjuang menyelesaikan mata kuliah demi mata kuliah di Jurusan Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
9. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materiil.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan bagi pembaca.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, September 2017

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
ABSTRAK	xii
ABSTRACT	xiii
ملخص	xiv
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Tujuan Penelitian	4
1.4 Manfaat Penelitian	4
1.5 Metode Penelitian	4
1.6 Sistematika Penulisan	5
BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Gelanggang	7
2.2 Ideal	15
2.3 Pengertian Dasar Modul	33
2.4 Modul Perkalian	41
2.5 Kewajiban Menuntut Ilmu Menurut Al-Quran	43
BAB III PEMBAHASAN	
3.1 Keterkaitan Antara Ideal Maksimal dengan Submodul Maksimal	46
3.2 Keutamaan Orang yang Menuntut Ilmu	61
BAB IV PENUTUP	
4.1 Kesimpulan	63
4.2 Saran	63

DAFTAR RUJUKAN	64
RIWAYAT HIDUP	



ABSTRAK

Hasan, Much. Fuad. 2017. **Sifat-sifat Submodul Maksimal dalam Modul Perkalian**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Abdussakir, M.Pd. (II) Ari Kusumastuti, M.Si, M.Pd.

Kata kunci: modul perkalian, submodul maksimal.

Dalam teori modul terdapat modul khusus yang disebut modul perkalian (*multiplication module*). Misalkan R adalah gelanggang komutatif dengan elemen satuan dan M adalah R -modul, maka M disebut modul perkalian jika untuk setiap submodul N di M terdapat ideal presentasi I di gelanggang R sehingga berlaku $N = I \cdot M$. Selain itu juga dikenal submodul maksimal yang ada dalam suatu R -modul M , yang termotivasi dari definisi ideal maksimal dalam suatu gelanggang R , yaitu dengan memandang gelanggang R sebagai modul atas dirinya sendiri (R adalah R -modul). Tujuan penelitian ini adalah untuk mempelajari sifat-sifat submodul maksimal dalam modul perkalian.

Akhirnya dapat disimpulkan bahwa beberapa sifat yang terdapat dalam ideal maksimal dalam suatu gelanggang dapat dibawa menjadi sifat-sifat submodul maksimal dalam modul perkalian, yaitu:

1. Misalkan R adalah gelanggang komutatif dengan satuan, M adalah R -modul perkalian dan N adalah submodul dari M . Maka submodul maksimal memuat semua submodul sejati dari M .
2. Misalkan M adalah R -modul perkalian dengan R adalah lapangan dan N adalah submodul dari M , maka N adalah submodul maksimal jika dan hanya jika M/N adalah submodul sederhana.
3. Misalkan R adalah gelanggang Artinian dan M adalah R -modul perkalian maka setiap submodul maksimal adalah submodul prima.

ABSTRACT

Hasan, Much. Fuad. 2017. **The Properties of Maximal Submodule in the Multiplication Module**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Islamic State University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisor: (I) Dr. Abdussakir, M.Pd. (II) Ari Kusumastuti, M.Si, M.Pd.

Keyword: multiplication module, maximal submodule.

In the module theory there is a special module called multiplication module. Let R is a commutative ring with unity and M is R -module, then M is called multiplication module if for every N submodule in M there is presentation ideal I in R so that $N = I \cdot M$. It is also known to be the maximal submodule present in an R -module M , which is motivated from the maximal ideal definition in an ring R , by looking at the ring R as a module over itself (R is R -module). The purpose of this article is to describe maximal submodule properties in the multiplication module.

Finally it can be concluded that some of the properties contained in the maximal ideal in an ring can be brought into the maximal submodule properties in the multiplication module:

1. Let R be the commutative ring with unity, M is R -multiplication module and N is a submodule of M . Then maximal submodule contains every proper submodule of M .
2. Let M be the R -multiplication module with R is the field and N is the submodule of M , then N is maximal submodule if only if M/N is a simple module.
3. Let R be the Artinian ring and M is the R -multiplication module then every maximal submodule is prime submodule.

ملخص

حسن, محمد فؤد. ٢٠١٧. خصائص الوحدات الفرعية كحد أقصى وحدة الضرب. بحث جامعي. قسم الرياضيات. كلية العلوم والتكنولوجيا. جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرف (١) الدكتور عبد الشاكر الماجستير (٢) أري كسومستوني الماجستير.

الكلمة المفتاحية: وحدة الضرب، الوحدات الفرعية القصوى.

في نظرية وحدة هناك وحدة خاصة تسمى وحدة الضرب. اسمحو R تكون الساحة التبادلية مع عنصر الوحدة و M هو R -وحدة، ثم M يسمى وحدة الضرب إذا كان لكل N سوبودول في M هناك مثالية للعرض الأول في R أرينا بحيث يتم تطبيق $N = I \cdot M$. ومن المعروف أيضا أن الحد الأقصى من سوبودول موجودة في M وحدة- R ، الذي هو الدافع من التعريف المثالي الأقصى في الساحة R ، أي من خلال النظر في R أرينا وحدة خاصة بها (R هو R وحدة). وكان الغرض من هذه الدراسة لدراسة خصائص الحبيبات الفرعية القصوى في وحدة الضرب.

وأخيرا يمكن استنتاج أن بعض الخصائص الواردة في مثالية القصوى في الساحة يمكن أن توضع في خصائص الحد الأقصى سوبودول في وحدة الضرب، وهي:

١. السماح R يكون الساحة كوموتاتيف مع وحدات، M هو R -وحدة الضرب و N هو سوبودول من M . ثم الحد الأقصى سوبودول يحتوي على جميع الحلقات الفرعية الحقيقية من M .
٢. اسمحو M أن يكون الضرب R -وحدة مع R يجري الحقل و N يجري سوبودول من M ، ثم N هو الحد الأقصى سوبودول إذا وفقط إذا M / N هو سوبودول بسيطة.
٣. اسمحو R تكون الساحة أرتينيان و M هو الضرب وحدة R ثم كل سوبودول هو سوبودول رئيس الوزراء.

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Al-Quran adalah sumber ilmu pengetahuan sekaligus sumber ajaran agama Islam. Ilmu menempati kedudukan yang sangat penting dalam ajaran Islam, hal ini terlihat dari banyaknya ayat al-Quran yang memandang orang berilmu dalam posisi yang tinggi dan mulia serta banyak hadits-hadits nabi yang memberi dorongan bagi umatnya untuk terus menuntut ilmu (Hidayat, 2016). Allah Swt telah mengingatkan pentingnya menuntut ilmu di dalam surat at-Taubah/9:122.

﴿ وَمَا كَانَ الْمُؤْمِنُونَ لِيَنْفِرُوا كَافَّةً ۚ فَلَوْلَا نَفَرَ مِنْ كُلِّ فِرْقَةٍ مِّنْهُمْ طَائِفَةٌ لِّيَتَفَقَّهُوا فِي الدِّينِ وَلِيُنذِرُوا قَوْمَهُمْ إِذَا رَجَعُوا إِلَيْهِمْ لَعَلَّهُمْ يَحْذَرُونَ ﴾

“Tidak sepatutnya bagi mukminin itu pergi semuanya (ke medan perang). mengapa tidak pergi dari tiap-tiap golongan di antara mereka beberapa orang untuk memperdalam pengetahuan mereka tentang agama dan untuk memberi peringatan kepada kaumnya apabila mereka telah kembali kepadanya, supaya mereka itu dapat menjaga dirinya” (QS. at-Taubah/9:122).

Ayat ini adalah asal perintah untuk menuntut ilmu, karena makna ayat tersebut adalah tidaklah patut semua mukmin keluar untuk berjihad, sedangkan nabi Muhammad Saw berada di Madinah tidak ikut berperang. Jika setiap orang pergi berjihad, maka tidak akan ada lagi generasi muda. Oleh karena itu, sebaiknya ada satu kelompok pergi berjihad dan kelompok lain menetap untuk mendalami ilmu agama serta menjaga kaum wanita. Dengan demikian apabila kelompok yang pergi berjihad kembali dari medan perang, maka kelompok

penuntut ilmu mengajarkan kepada mereka hukum-hukum syariat (al-Qurtubi, 2007:732).

Ilmu pengetahuan yang memiliki manfaat sangat besar dalam kehidupan salah satunya adalah matematika. Pentingnya matematika tidak lepas dari perannya dalam segala jenis dimensi kehidupan. Banyak persoalan kehidupan yang memerlukan kemampuan *menghitung* dan *mengukur*. Menghitung mengarah pada *aritmetika* (studi tentang bilangan) dan mengukur mengarah pada *geometri* (studi tentang bangun, ukuran dan posisi benda). Aritmetika dan geometri merupakan dasar dari matematika. Saat ini, banyak ditemukan kaidah atau aturan untuk memecahkan masalah-masalah yang berhubungan dengan pengukuran, yang biasanya ditulis dalam rumus atau formula matematika, dan ini dipelajari dalam *aljabar* (Syahwahid, 2011). Oleh karena besarnya manfaat ilmu matematika maka sangat penting juga untuk mempelajari dan mendalami ilmu matematika tersebut.

Salah satu cabang ilmu dalam matematika adalah aljabar abstrak. Materi dalam aljabar abstrak yang paling sederhana adalah struktur aljabar. Suatu himpunan tak kosong G dengan satu atau lebih operasi biner di G disebut struktur aljabar atau sistem aljabar (Raisinghania dkk, 1980:29). Beberapa bagian dari struktur aljabar yang memenuhi sifat-sifat tertentu adalah grup, gelanggang, dan modul. Himpunan tak kosong dengan dua operasi biner yang memenuhi sifat tertentu disebut dengan gelanggang.

Dalam teori gelanggang terdapat struktur penting yang dinamakan ideal. Suatu subgelanggang I dari gelanggang R disebut ideal dari R jika untuk setiap $r \in R$ maka $r \times I = \{r \times a | a \in I\} \subseteq I$ dan $I \times r = \{a \times r | a \in I\} \subseteq I$ (Dummit

dkk, 2004:242). Ideal I disebut ideal trivial jika idealnya hanya $I = \{0\}$ dan gelanggang R itu sendiri. Ideal I disebut ideal sejati jika $I \neq R$. Ideal I disebut ideal maksimal dari gelanggang R jika $I \neq R$ dan ideal yang memuat I adalah I dan R (Dummit dkk, 2004:253).

Modul adalah generalisasi dari ruang vektor yaitu dengan memperluas struktur lapangan pada ruang vektor menjadi gelanggang yang strukturnya lebih umum. Jika M adalah R -modul, N disebut submodul dari M jika N adalah subset dari M dan memenuhi aksioma-aksioma modul. Suatu submodul N dari M dikatakan maksimal jika $N \neq M$ dan untuk setiap L submodul dari M dengan $N \subseteq L \subseteq M$ maka $L = N$ atau $L = M$ (Irwan dkk, 2012). Dalam teori modul juga dipelajari tentang modul perkalian. Suatu R -modul M disebut R -modul perkalian jika untuk setiap submodul N dari M , ada suatu ideal I di R sedemikian sehingga $N = I \cdot M$. Ideal I yang memenuhi $N = I \cdot M$ pada definisi tersebut disebut ideal presentasi dari N (Arifin, 2008).

Setiap gelanggang dapat dipandang sebagai grup abelian terhadap operasi penjumlahan. Oleh karena itu, setiap gelanggang dapat dipandang sebagai modul atas dirinya sendiri. Hal ini membuka peluang bagi konsep-konsep pada gelanggang untuk digeneralisasikan ke teori modul.

Pada penelitian sebelumnya telah dijelaskan oleh Samsul Arifin (2008), bahwa beberapa sifat dalam ideal prima dalam suatu gelanggang dapat dibawa menjadi sifat-sifat submodul prima dalam suatu modul perkalian. Dalam penelitian ini dipelajari tentang sifat-sifat submodul maksimal dalam modul perkalian dan juga dipelajari tentang sifat-sifat ideal maksimal mana saja yang dapat dibawa ke sifat-sifat submodul maksimal dalam suatu modul perkalian. Dari

uraian di atas, penulis membahas tentang sifat-sifat submodul maksimal dalam modul perkalian dengan judul “Sifat-sifat Submodul Maksimal dalam Modul Perkalian”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, maka rumusan masalah penelitian ini adalah bagaimana sifat-sifat submodul maksimal dalam modul perkalian?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, maka tujuan penelitian ini adalah mendeskripsikan sifat-sifat submodul maksimal dalam modul perkalian.

1.4 Manfaat Penelitian

Dengan adanya penelitian ini penulis berharap agar pembahasan ini bermanfaat bagi berbagai kalangan dalam mempelajari dan memperdalam wawasan mengenai teori modul, khususnya dalam sifat-sifat submodul maksimal dalam modul perkalian.

1.5 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini yaitu pendekatan penelitian kepustakaan (*library research*). Kajian yang diambil tentang ideal dan sifat-sifatnya, teori modul, dan modul perkalian.

Analisis sifat-sifat submodul maksimal dalam modul perkalian ini melalui langkah-langkah sebagai berikut :

1. Mendeskripsikan sifat-sifat ideal maksimal yang dapat dibawa ke sifat-sifat submodul maksimal, yaitu:
 - a. Pada gelanggang R dengan elemen satuan, setiap ideal sejati termuat dalam ideal maksimal.
 - b. Misalkan R adalah gelanggang komutatif, ideal M adalah ideal maksimal jika dan hanya jika gelanggang hasil bagi R/M adalah lapangan.
 - c. Misalkan R adalah gelanggang komutatif maka setiap ideal maksimal dari R adalah ideal prima.
2. Mendeskripsikan keterkaitan antara ideal dan submodul.
3. Mendeskripsikan sifat-sifat submodul maksimal dalam modul perkalian.

1.6 Sistematika Penulisan

Agar dalam membaca hasil penelitian ini pembaca mudah memahami dan tidak menemukan kesulitan, maka dalam penyajiannya ditulis berdasarkan suatu sistematika yang secara garis besar dibagi menjadi empat bab, yaitu:

Bab I Pendahuluan

Pada bab ini meliputi beberapa subbab yaitu latar belakang, rumusan masalah, tujuan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Pada bab ini meliputi beberapa subbab yaitu tentang gelanggang, ideal, modul, modul perkalian, dan kajian agama.

Bab III Pembahasan

Pada bab ini meliputi subbab yang mendeskripsikan tentang sifat-sifat submodul maksimal dalam modul perkalian dan kajian agama.

Bab IV Penutup

Pada bab ini meliputi subbab yaitu kesimpulan serta saran-saran yang berkaitan dengan permasalahan yang dikaji.



BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Gelanggang

Definisi 2.1.1

1. Suatu gelanggang R adalah himpunan dengan dua operasi biner $+$ dan $\times$ (disebut penjumlahan dan perkalian) yang memenuhi beberapa aksioma:
 - a. $(R, +)$ adalah grup abelian.
 - b. Operasi perkalian bersifat assosiatif di R , yaitu:

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c) \text{ untuk setiap } a, b, c \in R.$$
 - c. Operasi perkalian bersifat distributif terhadap operasi penjumlahan di R , yaitu:

$$(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c), \text{ dan}$$

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c) \text{ untuk setiap } a, b, c \in R.$$
2. Gelanggang R disebut gelanggang komutatif jika operasi perkalian memenuhi sifat komutatif, yaitu $a \times b = b \times a$ untuk setiap $a, b \in R$.
3. Gelanggang R dikatakan mempunyai identitas perkalian (atau disebut gelanggang dengan satuan) jika terdapat $1 \in R$ sehingga $1 \times a = a \times 1 = a$ untuk setiap $a \in R$ (Dummit dkk, 2004:223).

Selanjutnya untuk lebih menyederhanakan penulisan operasi perkalian akan dinotasikan dengan $a \cdot b$ daripada $a \times b$ untuk setiap $a, b \in R$. Identitas dari operasi penjumlahan dinotasikan dengan 0 dan identitas dari operasi perkalian dinotasikan dengan 1, sedangkan invers dari operasi penjumlahan pada suatu elemen a di gelanggang R dinotasikan dengan $(-a)$ dan invers dari operasi perkalian dinotasikan dengan a^{-1} .

Dalam tulisan ini gelanggang yang digunakan adalah gelanggang komutatif dengan satuan dengan dua operasi biner yaitu penjumlahan sebagai operasi pertama dan perkalian sebagai operasi kedua yang dinotasikan dengan $(R, +, \cdot)$ yang selanjutnya untuk mempersingkat penulisan dinotasikan dengan R .

Contoh:

Akan dibuktikan bahwa himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ adalah suatu gelanggang.

1. $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup abelian.

a. Operasi $+$ tertutup di $\mathbb{Z}$.

Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$, maka $a + b \in \mathbb{Z}$.

b. Operasi $+$ bersifat asosiatif di $\mathbb{Z}$.

Ambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}$, maka

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

c. Mempunyai identitas terhadap operasi $+$ yaitu bilangan $0 \in \mathbb{Z}$ sehingga untuk sebarang $a \in \mathbb{Z}$ berlaku $a + 0 = 0 + a = a$.

d. Mempunyai invers terhadap operasi $+$. Artinya untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ terdapat $(-a) \in \mathbb{Z}$ sehingga berlaku $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

e. Operasi $+$ bersifat komutatif di $\mathbb{Z}$.

Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$ sehingga berlaku $a + b = b + a$.

Terbukti bahwa $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup abelian.

2. Operasi $\cdot$ bersifat asosiatif di $\mathbb{Z}$.

Ambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}$, maka

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

3. Operasi $\cdot$ bersifat distributif terhadap operasi $+$ di $\mathbb{Z}$.

Ambil $a, b, c \in \mathbb{Z}$, maka

$$a. (a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$$

$$b. a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

Oleh karena itu terbukti bahwa $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ adalah gelanggang.

Definisi 2.1.2

Suatu gelanggang dengan satuan $1 \neq 0$ (identitas operasi pertama tidak sama dengan identitas operasi kedua) disebut gelanggang pembagian (*division ring*) jika setiap elemen tak nol $a \in R$ mempunyai invers terhadap operasi perkalian artinya untuk setiap $a \in R$ terdapat $b \in R$ sehingga $a \cdot b = b \cdot a = 1$ (Dummit dkk, 2004:224).

Dengan kata lain suatu gelanggang $(R, +, \cdot)$ disebut dengan gelanggang pembagian jika setiap elemen di R yang tidak sama dengan identitas operasi pertama mempunyai invers terhadap operasi kedua.

Contoh:

Himpunan semua bilangan real $\mathbb{R}$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian merupakan gelanggang pembagian, karena setiap elemen tak nol di $\mathbb{R}$ mempunyai invers terhadap operasi perkalian.

Definisi 2.1.3

Suatu gelanggang pembagian komutatif dengan satuan R disebut dengan lapangan (*field*) (Dummit dkk, 2004:224).

Contoh:

Himpunan semua bilangan rasional $\mathbb{Q}$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ merupakan lapangan karena $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ adalah gelanggang komutatif dan $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ gelanggang pembagian.

Definisi 2.1.4

Misalkan R adalah suatu gelanggang

1. Suatu elemen tak nol a di R disebut dengan pembagi nol (*zero divisor*) jika terdapat elemen tak nol b di R sedemikian sehingga $a \cdot b = 0$ atau $b \cdot a = 0$.
2. Asumsikan R adalah gelanggang dengan satuan $1 \neq 0$. Suatu elemen u di R disebut unit pada R jika terdapat elemen v di R sedemikian sehingga $u \cdot v = v \cdot u = 1$. Himpunan unit pada R dinotasikan dengan $R^\times$ (Dummit dkk, 2004:226).

Contoh:

Gelanggang bilangan bulat $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ tidak mempunyai pembagi nol dan hanya mempunyai unit $\mathbb{Z}^\times = \{1, -1\}$.

Definisi 2.1.5

Gelanggang komutatif dengan satuan $1 \neq 0$ disebut daerah integral (*integral domain*) jika tidak mempunyai pembagi nol (Dummit dkk, 2004:228).

Contoh:

Gelanggang bilangan bulat $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ merupakan daerah integral karena tidak mempunyai pembagi nol.

Teorema 2.1.6

Suatu gelanggang tidak mempunyai pembagi nol jika dan hanya jika memenuhi sifat kanselasi (Raisinghanian dkk, 1980:327).

Bukti:

($\Rightarrow$) Misalkan R adalah gelanggang yang tidak mempunyai pembagi nol.

Misalkan $a, b, c \in R$ dengan $a \neq 0$ dan $a \cdot b = a \cdot c$, maka:

$$a \cdot b = a \cdot c$$

$$a \cdot b - a \cdot c = a \cdot c - a \cdot c \text{ (dioperasikan dengan invers } (a \cdot c))$$

$$a \cdot b - a \cdot c = 0$$

$$a \cdot (b - c) = 0 \text{ (sifat distributif)}$$

$$(b - c) = 0 \text{ (karena } a \neq 0 \text{ dan } R \text{ adalah tidak mempunyai pembagi nol)}$$

$$b = c.$$

Sehingga terbukti memenuhi sifat kanselasi kiri.

Selanjutnya akan dibuktikan sifat kanselasi kanan juga terpenuhi di R .

Misalkan $a, b, c \in R$ dengan $a \neq 0$ dan $b \cdot a = c \cdot a$, maka:

$$b \cdot a = c \cdot a$$

$$b \cdot a - c \cdot a = c \cdot a - c \cdot a \text{ (dioperasikan dengan invers } (c \cdot a))$$

$$b \cdot a - c \cdot a = 0$$

$$(b - c) \cdot a = 0 \text{ (sifat distributif)}$$

$$(b - c) = 0 \text{ (karena } a \neq 0 \text{ dan } R \text{ adalah tidak mempunyai pembagi nol)}$$

$$b = c.$$

Sehingga terbukti bahwa sifat kanselasi terpenuhi di R .

($\Leftarrow$) Misalkan R adalah gelanggang yang memenuhi sifat kanselasi. Akan

ditunjukkan bahwa R tidak memiliki pembagi nol. Misalkan untuk $a, b \in R$,

jika $a \cdot b = 0$ dan $a \neq 0$ maka:

$$a \cdot b = 0$$

$$a \cdot b = a \cdot 0$$

$$b = 0$$

Selanjutnya $a, b \in R$, jika $a \cdot b = 0$ dan $b \neq 0$ maka:

$$a \cdot b = 0$$

$$a \cdot b = 0 \cdot b$$

$$a = 0$$

Sehingga jika $a \cdot b = 0$ maka $a = 0$ atau $b = 0$ yang artinya R tidak mempunyai pembagi nol.

Teorema 2.1.7

Suatu lapangan tidak mempunyai pembagi nol (Raisinghanian dkk 1980:327).

Bukti:

Jika R adalah lapangan maka R adalah gelanggang komutatif dengan elemen satuan dan setiap elemen tak nol dari R mempunyai invers terhadap operasi perkalian. Akan dibuktikan bahwa R tidak mempunyai pembagi nol. Misalkan a dan b adalah sebarang elemen dari R sedemikian sehingga $a \cdot b = 0$

Untuk $a \neq 0$ terdapat (a^{-1}) , maka:

$$a \cdot b = 0$$

$$a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0$$

$$(a^{-1} \cdot a) \cdot b = 0$$

$$1 \cdot b = 0$$

$$b = 0$$

Sehingga untuk $a \neq 0$, jika $a \cdot b = 0$ maka $b = 0$.

Selanjutnya untuk $b \neq 0$ terdapat (b^{-1}) , maka:

$$a \cdot b = 0$$

$$(a \cdot b) \cdot b^{-1} = 0 \cdot b^{-1}$$

$$a \cdot (b \cdot b^{-1}) = 0$$

$$a \cdot 1 = 0$$

$$a = 0$$

Sehingga untuk $b \neq 0$, jika $a \cdot b = 0$ maka $a = 0$.

Jadi jika $a \cdot b = 0$ maka $a = 0$ atau $b = 0$. Oleh karena itu terbukti bahwa R tidak mempunyai pembagi nol.

Karena lapangan tidak mempunyai pembagi nol maka dapat disimpulkan bahwa setiap lapangan adalah daerah integral.

Suatu subhimpunan S dari gelanggang R adalah subgelanggang dari R jika S memenuhi aksioma-aksioma gelanggang terhadap operasi yang sama dengan di R .

Teorema 2.1.8

Suatu subhimpunan S dari gelanggang R disebut subgelanggang jika dan hanya jika memenuhi:

- a. $S \neq \emptyset$
- b. Untuk $x \in S$ dan $y \in S$ maka $x - y \in S$ dan $x \cdot y \in S$ (Gallian, 2012:248).

Bukti:

($\Leftarrow$) Misalkan $S \subseteq R$ yang memenuhi a dan b. Akan dibuktikan bahwa S adalah subgelanggang dari R .

1. S adalah grup abelian.

Karena $S \neq \emptyset$ artinya terdapat $a \in S$. Maka $a - a = 0 \in S$. Sehingga S mempunyai elemen identitas yaitu 0. Karena $a, 0 \in S$ maka $0 - a = -a \in S$. Jadi setiap unsur di S mempunyai invers.

Ambil $a, b, c \in S$, maka $a, b, c \in R$. Karena R gelanggang maka $a + (b + c) = (a + b) + c$. Jadi operasi $+$ bersifat assosiatif di S .

Ambil $a, b \in S$ maka $a, b \in R$ karena R gelanggang maka $a + b = b + a$.

Jadi operasi $+$ bersifat komutatif di S .

2. Operasi perkalian bersifat asosiatif di S .

Ambil sebarang $a, b, c \in S$ maka $a, b, c \in R$. Karena R gelanggang maka:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

3. Operasi perkalian bersifat distributif terhadap operasi penjumlahan di S .

Ambil sebarang $a, b, c \in S$ maka $a, b, c \in R$. Karena R gelanggang maka:

a. $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$

b. $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

Karena S memenuhi aksioma-aksioma gelanggang sehingga terbukti bahwa S adalah subgelanggang dari R .

($\Rightarrow$) Misalkan S adalah subgelanggang dari R maka S memenuhi aksioma-aksioma gelanggang terhadap operasi yang sama dengan di R . ambil $a, b \in S$ maka terdapat $-a, -b \in S$ sehingga $a + (-b) = a - b \in S$. Selanjutnya ambil $a, b \in S$ karena S memenuhi aksioma-aksioma gelanggang sehingga $a \cdot b \in S$. Jadi terbukti bahwa jika S subgelanggang maka S memenuhi a dan b.

Berdasarkan Teorema 2.1.8 Untuk menunjukkan bahwa subset S dari gelanggang R adalah subgelanggang, cukup ditunjukkan bahwa S adalah himpunan tak kosong, operasi pengurangan tertutup di S , dan operasi perkalian tertutup di S .

Contoh:

1. Setiap gelanggang merupakan subgelanggang dari dirinya sendiri.

2. Akan dibuktikan bahwa $(n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ untuk setiap $n \in \mathbb{Z}^+$ merupakan subgelanggang atas gelanggang $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. Cukup ditunjukkan bahwa $n\mathbb{Z} \neq \emptyset$, operasi pengurangan $(-)$ tertutup di $n\mathbb{Z}$ dan operasi perkalian $(\cdot)$ tertutup di $n\mathbb{Z}$.

a. Karena $0 = n \cdot 0 \in n\mathbb{Z}$ maka $n\mathbb{Z} \neq \emptyset$.

b. Ambil sebarang $a, b \in n\mathbb{Z}$ maka $a = n \cdot k$ dan $b = n \cdot l$ untuk suatu $k, l \in \mathbb{Z}$. Akan dibuktikan operasi $-$ tertutup di $n\mathbb{Z}$, yaitu:

$$\begin{aligned} a - b &= (n \cdot k) - (n \cdot l) \\ &= n \cdot (k - l) \end{aligned}$$

Karena $k, l \in \mathbb{Z}$ sehingga $(k - l) \in \mathbb{Z}$ maka $n \cdot (k - l) \in n\mathbb{Z}$. Oleh karena itu terbukti bahwa operasi $-$ tertutup di $n\mathbb{Z}$.

c. Ambil sebarang $a, b \in n\mathbb{Z}$ sehingga $a = n \cdot k$ dan $b = n \cdot l$ untuk suatu $k, l \in \mathbb{Z}$. Akan dibuktikan operasi $\cdot$ tertutup di $n\mathbb{Z}$, yaitu:

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (n \cdot k) \cdot (n \cdot l) \\ &= n \cdot (n \cdot k \cdot l) \end{aligned}$$

Karena $n, k, l \in \mathbb{Z}$ maka $(n \cdot k \cdot l) \in \mathbb{Z}$ dan $n \cdot (n \cdot k \cdot l) \in n\mathbb{Z}$. Oleh karena itu terbukti bahwa operasi $\cdot$ tertutup di $n\mathbb{Z}$.

Sehingga terbukti bahwa $(n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ adalah subgelanggang dari $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

2.2 Ideal

Definisi 2.2.1

Misalkan R adalah gelanggang, dan I adalah subset dari R dan $r \in R$.

1. $r \cdot I = \{r \cdot a | a \in I\}$ dan $I \cdot r = \{a \cdot r | a \in I\}$.

2. Suatu subset I dari R adalah ideal kiri dari R jika:

- a. I adalah subgelanggang dari R , dan
- b. I tertutup terhadap perkalian kiri dengan elemen dari R ($r \cdot I \subseteq I$, untuk setiap $r \in R$).

Suatu subset I adalah ideal kanan dari R jika:

- a. I adalah subgelanggang dari R , dan
 - b. I tertutup terhadap perkalian kanan dengan elemen dari R ($I \cdot r \subseteq I$, untuk setiap $r \in R$).
3. Jika subset I adalah ideal kiri dan ideal kanan maka I disebut ideal dari R .

Suatu ideal disebut ideal sejati jika $I \neq R$. Ideal $\{0\}$ disebut ideal trivial (Dummit dkk, 2004:242).

Sama halnya pada himpunan, ideal pada dasarnya dapat dibagi menjadi dua jenis yaitu ideal tidak sejati dan ideal sejati. Suatu ideal I pada gelanggang R dikatakan ideal tidak sejati jika $I = R$ dan dikatakan ideal sejati jika $I \neq R$. Ideal sejati dibagi menjadi dua jenis, yaitu ideal sejati trivial (atau disebut ideal trivial) dan ideal sejati nontrivial. Ideal I dikatakan ideal sejati trivial jika $I = \{0\}$ dan dikatakan ideal sejati nontrivial jika $I \neq R$ dan $I \neq \{0\}$ (Halikin, 2015).

Contoh:

1. Jika R adalah gelanggang, subgelanggang R dan $\{0\}$ adalah ideal.
2. Misalkan $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ adalah suatu gelanggang dan $(n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ untuk setiap $n \in \mathbb{Z}^+$ adalah subgelanggang dari $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. Akan ditunjukkan bahwa $(n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ adalah ideal dari $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.
 - a. Karena telah diketahui bahwa $(n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ untuk setiap $n \in \mathbb{Z}^+$ adalah subgelanggang dari $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ maka terbukti bahwa $n\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ untuk setiap $n \in \mathbb{Z}^+$.

- b. Akan ditunjukkan $(n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ untuk setiap $n \in \mathbb{Z}^+$ tertutup terhadap operasi perkalian kiri dan kanan dengan setiap elemen dari $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, yaitu:

Ambil $x \in n\mathbb{Z}$ dan $r \in \mathbb{Z}$, maka $x = n \cdot z$, untuk suatu $z \in \mathbb{Z}$. Maka $r \cdot x \in r \cdot n\mathbb{Z}$ dan $r \cdot x = r \cdot (n \cdot z) = n \cdot r \cdot z \in n\mathbb{Z}$. Selain itu, $x \cdot r \in n\mathbb{Z} \cdot r$ dan $x \cdot r = n \cdot z \cdot r \in n\mathbb{Z}$. Jadi $r \cdot n\mathbb{Z} \subseteq n\mathbb{Z}$ dan $n\mathbb{Z} \cdot r \subseteq n\mathbb{Z}$.

Karena $(n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ adalah ideal kanan dan ideal kiri maka terbukti bahwa $(n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ adalah ideal dari $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

Definisi 2.2.2

Misalkan A adalah subhimpunan dari gelanggang R

1. Misalkan $\langle A \rangle$ menotasikan ideal terkecil dari R yang memuat A , maka $\langle A \rangle$ disebut ideal yang dibangun oleh A .
2. Misalkan $R \cdot A$ menotasikan himpunan semua penjumlahan dari perkalian setiap anggota R dan A yang didefinisikan dengan $R \cdot A = \{r_1 a_1 + r_2 a_2 + \dots + r_n a_n | r_i \in R, a_i \in A, n \in \mathbb{Z}^+\}$ (jika $A = \emptyset$ maka $R \cdot A = 0$).

Sama halnya $A \cdot R = \{a_1 r_1 + a_2 r_2 + \dots + a_n r_n | a_i \in A, r_i \in R, n \in \mathbb{Z}^+\}$

dan $R \cdot A \cdot R = \{r_1 a_1 r'_1 + r_2 a_2 r'_2 + \dots + r_n a_n r'_n | r_i, r'_i \in R, a_i \in A, n \in \mathbb{Z}^+\}$.

3. Suatu ideal yang dibangun oleh satu elemen disebut dengan ideal utama (*principal ideal*).
4. Suatu ideal yang dibangun oleh suatu himpunan yang berhingga disebut ideal yang dibangun secara berhingga (*finitely generated ideal*) (Dummit dkk, 2004:251).

Contoh:

Pada ideal trivial, 0 dan R keduanya adalah ideal utama karena $0 = \langle 0 \rangle$ dan $R = \langle 1 \rangle$.

Teorema 2.2.3

Misalkan I adalah ideal dari gelanggang R , maka himpunan semua koset $a + I$ dinotasikan dengan R/I adalah gelanggang terhadap operasi:

1. Penjumlahan yang didefinisikan dengan: $(r + I) + (s + I) = (r + s) + I$.
2. Perkalian yang didefinisikan dengan: $(r + I) \cdot (s + I) = (r \cdot s) + I$ untuk setiap $r, s \in R$ (Raisinghanian dkk, 1980:371).

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa R/I adalah gelanggang.

1. R/I adalah grup abelian.

- a. Operasi penjumlahan tertutup di R/I .

Ambil sebarang $a + I, b + I \in R/I$ maka

$$(a + I) + (b + I) = (a + b) + I \in R/I.$$

- b. Operasi penjumlahan bersifat assosiatif di R/I .

Ambil sebarang $(a + I), (b + I), (c + I) \in R/I$, maka:

$$\begin{aligned} ((a + I) + (b + I)) + (c + I) &= ((a + b) + I) + (c + I) \\ &= ((a + b) + c) + I \\ &= (a + (b + c)) + I \\ &= (a + I) + ((b + c) + I) \\ &= (a + I) + ((b + I) + (c + I)) \end{aligned}$$

- c. Mempunyai identitas terhadap operasi penjumlahan.

$(I + 0)$ merupakan unsur di R/I , dan untuk sebarang $(a + I) \in R/I$, berlaku:

$$(a + I) + (0 + I) = (a + 0) + I = a + I$$

$$(0 + I) + (a + I) = (0 + a) + I = a + I$$

Jadi $0 + I$ adalah identitas penjumlahan di R/I .

d. Mempunyai invers terhadap operasi penjumlahan.

Ambil sebarang $(a + I)$ maka terdapat $((-a) + I) \in R/I$, sehingga berlaku:

$$(a + I) + ((-a) + I) = ((a + (-a)) + I) = 0 + I$$

$$((-a) + I) + (a + I) = ((-a) + a) + I = 0 + I$$

Jadi $(-a) + I$ adalah invers penjumlahan dari $a + I$

e. Operasi penjumlahan bersifat komutatif.

Ambil sebarang $(a + I), (b + I) \in R/I$, maka:

$$\begin{aligned} (a + I) + (b + I) &= (a + b) + I \\ &= (b + a) + I \\ &= (b + I) + (a + I) \end{aligned}$$

2. Operasi perkalian bersifat asosiatif di R/I

Ambil sebarang $(a + I), (b + I), (c + I) \in R/I$, maka:

$$\begin{aligned} ((a + I) \cdot (b + I)) \cdot (c + I) &= ((a \cdot b) + I) \cdot (c + I) \\ &= (a \cdot b) \cdot c + I \\ &= a \cdot (b \cdot c) + I \\ &= (a + I) \cdot ((b \cdot c) + I) \\ &= (a + I) \cdot ((b + I) \cdot (c + I)) \end{aligned}$$

3. Operasi perkalian bersifat distributif terhadap operasi penjumlahan di R/I .

Ambil sebarang $(a + I), (b + I), (c + I) \in R/I$, maka:

$$\begin{aligned}
 \text{a. } ((a + I) + (b + I)) \cdot (c + I) &= ((a + b) + I) \cdot (c + I) \\
 &= ((a + b) \cdot c) + I \\
 &= ((a \cdot c) + (b \cdot c)) + I \\
 &= ((a \cdot c) + I) + ((b \cdot c) + I) \\
 &= ((a + I) \cdot (c + I)) + ((b + I) \cdot (c + I)) \\
 \text{b. } (a + I) \cdot ((b + I) + (c + I)) &= (a + I) \cdot ((b + c) + I) \\
 &= (a \cdot (b + c)) + I \\
 &= ((a \cdot b) + (a \cdot c)) + I \\
 &= ((a \cdot b) + I) + ((a \cdot c) + I) \\
 &= ((a + I) \cdot (b + I)) + ((a + I) \cdot (c + I))
 \end{aligned}$$

Sehingga terbukti bahwa R/I adalah gelanggang.

Selanjutnya dibahas mengenai definisi terurut parsial, batas atas, batas bawah, dan elemen maksimal untuk mempermudah memahami Teorema 2.2.7.

Definisi 2.2.4

Himpunan tak kosong S disebut terurut parsial dengan relasi " $\leq$ " jika memenuhi aksioma di bawah ini:

1. $a \leq a$ untuk setiap $a \in S$.
2. Jika $a \leq b$ dan $b \leq a$ maka $a = b$ untuk setiap $a, b \in S$.
3. Jika $a \leq b$ dan $b \leq c$ maka $a \leq c$ untuk setiap $a, b, c \in S$ (Adamson, 1998:40).

Contoh:

Misalkan $\mathbb{Z}^+$ adalah himpunan bulat positif maka $\mathbb{Z}^+$ terurut parsial dengan relasi " $\leq$ ", karena:

1. Untuk setiap $a \in \mathbb{Z}^+$ berlaku $a \leq a$.
2. Untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}^+$, berlaku $a \leq b$ dan $b \leq a$ maka $a = b$.
3. Untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ berlaku $a \leq b$ dan $b \leq c$ maka $a \leq c$.

Definisi 2.2.5

Elemen $a \in S$ disebut batas atas pada subhimpunan $A \subseteq S$ jika untuk setiap $u \in A$ berlaku $u \leq a$, dan disebut batas bawah pada subhimpunan $A \subseteq S$ jika untuk setiap $u \in A$ berlaku $u \geq a$ (Adamson, 1998:42).

Contoh:

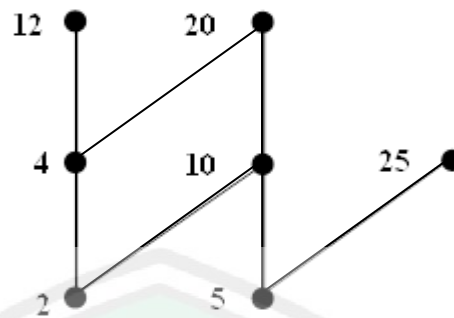
Himpunan $S = \{x \in \mathbb{Z} | x \leq 2\}$ adalah himpunan yang terbatas di atas dengan batas atas adalah sebarang elemen dari $\mathbb{Z}$ yang lebih dari 2. Himpunan S tidak memiliki batas bawah sehingga himpunan S tidak terbatas di bawah.

Definisi 2.2.6

Misalkan S adalah himpunan tak kosong. Elemen $a \in S$ disebut elemen minimal jika untuk setiap $c \in S$ maka berlaku jika $c \leq a$ maka $a = c$. Sebaliknya $a \in S$ disebut elemen maksimal jika untuk setiap $c \in S$ maka berlaku jika $c \geq a$ maka $a = c$ (Adamson, 1998:42).

Contoh:

Misalkan $A = \{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}$ dengan relasi habis dibagi " $|$ ", maka dapat dibuat diagram sebagai berikut:



dari diagram tersebut dapat diketahui bahwa elemen maksimalnya adalah 12, 20 dan 25.

Lema 2.2.7

Misalkan himpunan S terurut parsial maka setiap rantai di dalamnya memiliki batas atas di dalam himpunan S , sehingga himpunan S memiliki suatu elemen maksimal (Dummit dkk, 2004:909).

Bukti:

Misalkan S adalah himpunan terurut parsial dan setiap rantai di dalamnya memiliki batas atas. Kemudian diandaikan bahwa S tidak memiliki elemen maksimal. Ambil sebarang rantai T di himpunan S yang memiliki batas atas M_T di rantai T , artinya $a \leq M_T$ untuk setiap $a \in T$. Berdasarkan hipotesis M_T bukanlah elemen maksimal di S , artinya terdapat $s \in S$ sehingga berlaku $M_T \leq s$ dan $M_T \neq s$. Maka jelas bahwa $s \notin T$ karena $M_T \neq s$ dan M_T merupakan batas atas dari T . Selain itu juga akan terdapat $s', s'', \dots \in S$ sehingga berlaku $M_T \leq s', M_T \leq s'', \dots$ dan seterusnya yang berarti bahwa rantai T tidak mempunyai batas atas.

Kemudian dapat diperoleh juga bahwa rantai $T \cup \{s\}$ juga rantai dengan batas atas $s \in S$. Berdasarkan hipotesis $s \in S$ bukan elemen maksimal di S ,

sehingga terdapat $t, t', t'', \dots \in S$ yang berakibat $t \leq s, t' \leq s, t'' \leq s, \dots$ dan $t \neq s, t' \neq s, t'' \neq s, \dots$, artinya rantai $T \cup \{s\}$ tidak mempunyai batas atas.

Seterusnya akan selalu terbentuk rantai baru yang lebih panjang dan tidak memiliki batas atas di rantai tersebut. Sehingga telah timbul kontradiksi karena telah disebutkan bahwa setiap rantai di himpunan S memiliki batas atas. Jadi pengandaian salah dan haruslah himpunan S memiliki minimal satu elemen maksimal. Dengan demikian, terbukti bahwa jika S adalah himpunan terurut parsial dan setiap rantai di dalamnya mempunyai batas atas di S , maka S mempunyai minimal satu elemen maksimal.

Definisi 2.2.8

Suatu ideal M pada sebarang gelanggang S disebut ideal maksimal jika $M \neq S$ dan ideal yang memuat M adalah M dan S (Dummit dkk, 2004:253).

Contoh:

Telah diketahui bahwa pada $(n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ adalah ideal dari gelanggang $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, sehingga dari ideal $(n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ dapat dibentuk suatu rantai yaitu:

$$2\mathbb{Z} \supseteq 4\mathbb{Z} \supseteq 6\mathbb{Z} \supseteq \dots$$

$$3\mathbb{Z} \supseteq 6\mathbb{Z} \supseteq 9\mathbb{Z} \supseteq \dots$$

$$5\mathbb{Z} \supseteq 10\mathbb{Z} \supseteq 15\mathbb{Z} \supseteq \dots$$

Dari rantai tersebut didapatkan bahwa ideal maksimal dari $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ adalah $2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z}, 5\mathbb{Z}, \dots, p\mathbb{Z}$ dengan p adalah suatu bilangan prima. Karena untuk setiap bilangan prima p , $p\mathbb{Z}$ merupakan ideal yang tidak termuat dalam ideal sejati lain di $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ sehingga $p\mathbb{Z}$ merupakan ideal maksimal di $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

Teorema-teorema yang disajikan di bawah ini juga sangat berguna dalam memberikan pemahaman teorema-teorema yang berkaitan dengan submodul maksimal dalam modul perkalian.

Teorema 2.2.9

Pada gelanggang R dengan elemen satuan, setiap ideal sejati termuat dalam ideal maksimal (Dummit dkk, 2004:254).

Bukti :

Misalkan I adalah ideal sejati dari R maka $I \neq R$. Misalkan S adalah himpunan semua ideal sejati di R yang memuat I , sehingga $S \neq \emptyset$ karena $I \in S$. Himpunan S terurut parsial dengan relasi " $\subseteq$ ", karena untuk sebarang ideal-ideal sejati $I_1, I_2, I_3 \in S$, berlaku:

1. $I_1 \subseteq I_1$ untuk setiap $I_1 \in S$.
2. Jika $I_1 \subseteq I_2$ dan $I_2 \subseteq I_1$ maka $I_1 = I_2$.
3. Jika $I_1 \subseteq I_2$ dan $I_2 \subseteq I_3$ maka $I_1 \subseteq I_3$.

Misalkan C adalah rantai di himpunan S dan didefinisikan himpunan $J = \bigcup_{A \in C} A$ yang merupakan gabungan dari semua ideal A di rantai C . Himpunan J merupakan ideal karena:

- a. Karena $C \neq \emptyset$ maka $J \neq \emptyset$.
- b. Jika $a, b \in J$ maka terdapat $A, B \in C$ sehingga berlaku $a \in A$ dan $b \in B$.

Karena C adalah suatu rantai di himpunan S maka $A \subseteq B$ atau $B \subseteq A$ sehingga diperoleh $a - b \in J$ karena jika $A \subseteq B$ maka untuk setiap $a \in A$ berlaku $a \in B$ dan berlaku juga $a - b \in B \subseteq J$ untuk sebarang $b \in B$. Selanjutnya jika $B \subseteq A$ maka untuk setiap $b \in B$ berlaku $b \in A$ dan berlaku juga $a - b \in A \subseteq J$ untuk sebarang $a \in A$. Artinya $a - b \in J$.

Untuk sebarang $r \in R$ dan ideal A juga berlaku $r \cdot a \in J$ karena $r \cdot A \in A \subseteq J$. Oleh karena itu terbukti bahwa himpunan J ideal.

Selanjutnya andaikan J bukan ideal sejati maka berlaku $1 \in J$. Dengan definisi J , maka diperoleh $1 \in A$ untuk suatu ideal A di rantai C , sehingga berlaku $A = R$. Dari sini terjadi kontradiksi karena setiap ideal A merupakan ideal sejati. Oleh karena itu terbukti bahwa setiap rantai di himpunan S memiliki batas atas.

Karena setiap rantai di himpunan S memiliki batas atas, maka dengan menggunakan Lema 2.2.7 maka himpunan S pasti mempunyai suatu elemen maksimal, yaitu sebuah ideal maksimal yang membuat ideal I . Oleh karena itu terbukti bahwa setiap ideal sejati I di ring R termuat dalam sebuah ideal maksimal.

Definisi 2.2.10

Misalkan R adalah gelanggang komutatif. Ideal P disebut ideal prima jika

- $P \neq R$, dan
- Misalkan $a, b \in R$ dan $a \cdot b \in P$, maka salah satu dari a atau b adalah elemen dari P (Dummit dkk, 2004:254).

Contoh:

Telah diketahui bahwa $(n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ merupakan ideal dari gelanggang $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. Misalkan $p \in \mathbb{Z}$ adalah suatu bilangan prima yang memenuhi $(p\mathbb{Z}, +, \cdot)$. $(p\mathbb{Z}, +, \cdot)$ merupakan ideal prima dari gelanggang $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ karena jika $a \cdot b \in p\mathbb{Z}$ maka $a \in p\mathbb{Z}$ atau $b \in p\mathbb{Z}$. Ambil contoh bilangan prima $5 \in \mathbb{Z}$ sehingga $(5\mathbb{Z}, +, \cdot)$ merupakan ideal prima dari $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ karena untuk $2, 5 \in \mathbb{Z}$ maka $2 \cdot 5 = 10 \in 5\mathbb{Z}$ untuk $5 \in 5\mathbb{Z}$ dan $2 \notin 5\mathbb{Z}$.

Teorema 2.2.11

Misalkan R adalah gelanggang komutatif, ideal M adalah ideal maksimal jika dan hanya jika gelanggang hasil bagi R/M adalah lapangan (Dummit dkk, 2004:254).

Bukti:

($\Rightarrow$) Karena R adalah gelanggang komutatif dengan satuan, maka gelanggang hasil bagi R/M juga gelanggang komutatif dengan satuan. Misalkan M adalah ideal maksimal, akan dibuktikan bahwa R/M adalah lapangan. Untuk itu harus ditunjukkan bahwa setiap elemen tak nol di R/M mempunyai invers.

Misalkan $a + M$ adalah sebarang elemen tak nol dari R/M sedemikian sehingga $a + M \neq 0 + M$ dan $a \notin M$.

Misalkan T adalah ideal yang dibangun oleh a sehingga $T = \{r \cdot a | r \in R\}$, karena penjumlahan dari dua ideal dari R adalah juga ideal di R sehingga $M + T$ juga merupakan ideal di R yang memuat M .

Karena $a \notin M$ dan $a \neq 0$ dan $a = 0 + 1 \cdot a \in M + T$, sehingga ideal M termuat dalam $M + T$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $M + T = R$.

Misalkan diambil sebarang $m \in M$, maka m dapat ditulis dengan $m = m + 0 \cdot a$ sehingga $m \in M + T$. Karena untuk setiap $m \in M$ dan $m \in M + T$ sehingga $M \subseteq M + T$. Karena M adalah ideal maksimal maka $M + T = M$ atau $M + T = R$. Perhatikan bahwa $a = 0 + 1 \cdot a \in M + T$ dan $a \notin M$, hal ini mengakibatkan $M \neq M + T$ sehingga terbukti bahwa $M + T = R$.

Karena $1 \in R$ maka $1 = b + (a' \cdot a)$ untuk suatu $b \in M$ dan $a' \in R$.

Sehingga $1 - (a' \cdot a) = b \in M$. Akibatnya:

$$1 + M = (a' \cdot a) + M$$

$$1 + M = (a' + M) \cdot (a + M) \text{ maka } a' \in R.$$

Dengan cara yang sama, maka:

$$1 + M = (a + M) \cdot (a' + M)$$

Sehingga $(a + M)^{-1} = (a' + M) \in R/M$. Oleh karena itu terbukti bahwa setiap elemen tak nol di R/M mempunyai invers terhadap operasi perkalian, sehingga R/M adalah lapangan.

($\Leftarrow$) Misalkan M adalah ideal dari R dan R/M adalah lapangan. Akan ditunjukkan bahwa M adalah ideal maksimal di R . Misalkan T adalah ideal dari R yang memuat M , maka setiap elemen di R yang termuat di M juga termuat di T . Untuk menunjukkan bahwa $R = T$ cukup ditunjukkan bahwa setiap elemen di R yang tidak termuat di M akan termuat di T .

Misalkan a adalah sebarang elemen di R yang tidak termuat di M maka $a \notin M$ dan $M + a \neq M + 0$. Oleh karena itu $a + M$ adalah elemen tak nol dari R/M .

Karena T memuat M , maka terdapat elemen b di T yang tidak termuat di M sehingga $b + M$ juga elemen tak nol dari R/M . Karena R/M adalah lapangan, maka:

Untuk $(a + M), (b + M) \in R/M$, maka:

$$(a + M) \cdot (b + M)^{-1} \in R/M$$

$$(a + M) \cdot (b^{-1} + M) \in R/M$$

$$(a \cdot b^{-1}) + M \in R/M$$

$$a \cdot b^{-1} \in R$$

Karena T adalah ideal, maka untuk $a \cdot b^{-1} \in R$ dan $b \in T$, berlaku:

$$a \cdot b^{-1} \cdot b \in T$$

$$a \in T$$

Sehingga setiap elemen di R yang tidak termuat di M juga termuat di T . Oleh karena itu setiap elemen di R termuat di T , artinya $R \subseteq T$. Karena $R \subseteq T$ dan $T \subseteq R$ maka $R = T$. Jadi terbukti bahwa M adalah ideal maksimal dari R .

Teorema 2.2.12

Misalkan suatu gelanggang komutatif R dengan elemen satuan. Maka I merupakan ideal prima jika dan hanya jika R/I merupakan daerah integral (Dummit dkk, 2004:255).

Bukti:

($\Rightarrow$) Misalkan I adalah ideal prima dan R adalah gelanggang komutatif dengan satuan, sehingga R/I juga gelanggang komutatif dengan satuan. Karena I adalah ideal prima maka $I \neq R$ sehingga $1_{R/I} \neq 0_{R/I}$. Akan dibuktikan bahwa R/I tidak memiliki pembagi nol. Ambil sebarang $a + I, b + I \in R/I$ dengan $(a + I) \cdot (b + I) = 0 + I$. Artinya $a \cdot b + I = 0 + I$ sehingga $a \cdot b \in I$. Karena I merupakan ideal prima, ini berarti bahwa $a \in I$ atau $b \in I$, yaitu $a + I = 0 + I$ atau $b + I = 0 + I$. Jadi, R/I tidak memiliki pembagi nol sehingga R/I merupakan daerah integral.

($\Leftarrow$) Misalkan R/I adalah daerah integral. Ambil sebarang $a, b \in R$ dengan $a \cdot b \in I$. Artinya $0 + I = a \cdot b + I = (a + I) \cdot (b + I)$, sehingga $a + I = 0 + I$ atau $b + I = 0 + I$, yaitu $a \in I$ atau $b \in I$. Jadi terbukti bahwa I adalah ideal prima.

Akibat 2.2.13

Misalkan R adalah gelanggang komutatif maka setiap ideal maksimal dari R adalah ideal prima (Dummit dkk, 2004:255).

Bukti:

Misalkan M adalah ideal maksimal dari R maka dari Teorema 2.2.11 diketahui bahwa R/M adalah lapangan. Dari Teorema 2.1.11 diketahui bahwa setiap lapangan adalah daerah integral sehingga dari Teorema 2.2.12 terbukti bahwa M adalah ideal prima.

Selanjutnya akan dibahas mengenai gelanggang Artinian dan teorema yang terkait yang berguna untuk membantu pembahasan di bab III.

Definisi 2.2.14

Misalkan R adalah gelanggang. R disebut gelanggang Artinian jika setiap rantai turun atas idealnya membentuk rantai yang stasioner atau dengan kata lain, R disebut gelanggang Artinian jika setiap himpunan tak kosong atas idealnya memuat suatu unsur minimal (Fauziah dkk, 2009).

Contoh:

Akan dibuktikan bahwa himpunan bilangan bulat modulo 6 yang dinotasikan dengan $\mathbb{Z}_6$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ adalah gelanggang.

1. $(\mathbb{Z}_6, +)$ adalah grup abelian.

Untuk mempermudah membuktikan bahwa $(\mathbb{Z}_6, +)$ adalah grup abelian akan disajikan tabel penjumlahan Cayley sebagai berikut:

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$

Dari tabel penjumlahan Cayley tersebut diketahui bahwa operasi $+$ tertutup di $\mathbb{Z}_6$, operasi $+$ bersifat asosiatif di $(\mathbb{Z}_6, +)$, mempunyai elemen identitas yaitu $\bar{0}$, setiap elemen di $\mathbb{Z}_6$ mempunyai invers terhadap operasi penjumlahan, operasi $+$ bersifat komutatif di $\mathbb{Z}_6$. Jadi $(\mathbb{Z}_6, +)$ adalah grup abelian.

2. Operasi $\cdot$ bersifat asosiatif di $\mathbb{Z}_6$.

Untuk membuktikan operasi $\cdot$ bersifat asosiatif ditunjukkan terlebih dahulu tabel perkalian Cayley sebagai berikut:

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Dari tabel perkalian Cayley tersebut dapat diketahui bahwa untuk sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}_6$ berlaku:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Jadi operasi $\cdot$ bersifat asosiatif di $\mathbb{Z}$

3. Operasi $\cdot$ bersifat distributif terhadap operasi $+$ di $\mathbb{Z}_6$.

Dari tabel perkalian Cayley tersebut dapat diketahui bahwa untuk sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}_6$ berlaku:

- a. $(a \cdot b) + c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$
- b. $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

Jadi operasi $\cdot$ distributif terhadap operasi $+$ di $\mathbb{Z}_6$.

Oleh karena itu $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ adalah gelanggang.

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ adalah gelanggang Artinian dengan menentukan semua rantai turun yang terbentuk dari ideal di $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ dan dengan menentukan semua unsur minimalnya.

Pertama ditentukan terlebih dahulu semua ideal sejati yang ada di $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$, yaitu:

$$\langle \bar{1} \rangle = \{\bar{1} \cdot k \mid k \in \mathbb{Z}_6\} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$$

$$\langle \bar{2} \rangle = \{\bar{2} \cdot k \mid k \in \mathbb{Z}_6\} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$$

$$\langle \bar{3} \rangle = \{\bar{3} \cdot k \mid k \in \mathbb{Z}_6\} = \{\bar{0}, \bar{3}\}$$

$$\langle \bar{4} \rangle = \{\bar{4} \cdot k \mid k \in \mathbb{Z}_6\} = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{2}\}$$

$$\langle \bar{5} \rangle = \{\bar{5} \cdot k \mid k \in \mathbb{Z}_6\} = \{\bar{0}, \bar{5}, \bar{4}, \bar{3}, \bar{2}, \bar{1}\}$$

Dari ideal-ideal tersebut dapat didapatkan suatu rantai, yaitu:

- a. $\langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{5} \rangle \supseteq \langle \bar{2} \rangle$, dari rantai ini dapat diketahui unsur minimalnya adalah $\langle \bar{2} \rangle$ karena juga termuat di $\langle \bar{5} \rangle$ dan $\langle \bar{1} \rangle$.
- b. $\langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{5} \rangle \supseteq \langle \bar{3} \rangle$ dari rantai ini dapat diketahui unsur minimalnya adalah $\langle \bar{3} \rangle$ karena juga termuat di $\langle \bar{5} \rangle$ dan $\langle \bar{1} \rangle$.

Jadi, karena pada setiap rantai ideal di $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ terdapat unsur minimal, maka $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ adalah gelanggang Artinian.

Teorema 2.2.15

Misalkan R gelanggang komutatif dengan satuan. Jika R adalah gelanggang Artinian maka setiap ideal prima dari R adalah ideal maksimal (Fauziah dkk, 2009).

Bukti:

Misalkan R gelanggang komutatif dengan satuan dan R adalah gelanggang Artinian. Akan ditunjukkan setiap ideal prima di R adalah ideal maksimal. Misalkan P ideal prima dari R . Karena P ideal prima maka R/P adalah daerah integral. Karena R/P daerah integral dan R gelanggang Artinian, maka R/P adalah gelanggang Artinian. Ambil sebarang $\langle p \rangle \in R/P$ dengan $p \neq 0$. Karena $\langle p \rangle \in R/P$ maka rantai turunnya adalah:

$$\langle p^1 \rangle \supseteq \langle p^2 \rangle \supseteq \langle p^3 \rangle \supseteq \dots \supseteq \langle p^k \rangle = \langle p^{k+1} \rangle = \dots = \langle p^n \rangle \text{ untuk } k, n \in \mathbb{N}.$$

Karena rantai turunnya stasioner, maka terdapat $\langle p^k \rangle = \langle p^{k+1} \rangle$. Karena $\langle p^k \rangle = \langle p^{k+1} \rangle$ maka terdapat $p^k \in \langle p^{k+1} \rangle$. Karena $p^k \in \langle p^{k+1} \rangle$ maka terdapat $p^k = p^{k+1} \cdot \lambda$ untuk suatu $\lambda \in R/P$. Oleh karena hukum kanselasi berlaku di R/P , maka:

$$p^k = p^{k+1} \cdot \lambda$$

$$p^k = p^k \cdot p \cdot \lambda$$

$$1 = p \cdot \lambda$$

Karena $\lambda \in R/P$ dan $p \cdot \lambda = \lambda \cdot p = 1$, maka $\lambda = p^{-1}$. Artinya p mempunyai invers. Akibatnya, setiap unsur tak nol di R/P mempunyai invers sehingga R/P adalah lapangan. Karena R/P adalah lapangan maka terbukti bahwa P adalah ideal maksimal.

2.3 Pengertian Dasar Modul

Definisi 2.3.1

Misalkan R adalah gelanggang (tidak harus komutatif atau dengan satuan).

Himpunan M disebut R -modul kiri dari R jika:

1. M adalah grup abelian terhadap operasi penjumlahan.
 2. Terdapat aksi dari R ke M (aksi adalah pemetaan $R \times M \rightarrow M$) yang dinotasikan dengan $r \cdot m$, untuk setiap $r \in R$ dan $m \in M$ yang memenuhi:
 - a. $(r + s) \cdot m = r \cdot m + s \cdot m$, untuk setiap $r, s \in R$ dan $m \in M$.
 - b. $(r \cdot s) \cdot m = r \cdot (s \cdot m)$, untuk setiap $r, s \in R$ dan $m \in M$.
 - c. $r \cdot (m + n) = r \cdot m + r \cdot n$, untuk setiap $r \in R$ dan $m, n \in M$.
- Jika R adalah gelanggang dengan satuan maka:
- d. $1 \cdot m = m$, untuk setiap $m \in M$ (Dummit dkk, 2004:337).

Contoh:

1. Diberikan gelanggang $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ dan $(\mathbb{Z}_6, +)$ adalah suatu grup abelian.

Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}_6, +)$ merupakan modul atas $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

- a. $(r + s) \cdot m = r \cdot m + s \cdot m$, untuk setiap $r, s \in \mathbb{Z}$ dan $m \in (\mathbb{Z}_6, +)$.

Ambil sebarang $a, b \in (\mathbb{Z}, +, \cdot)$ dan $\bar{c} \in (\mathbb{Z}_6, +)$, maka:

$$\begin{aligned}
 (a + b) \cdot \bar{c} &= (a + b) \cdot \{c_1, c_2, c_3, \dots\} \\
 &= \{(a + b) \cdot c_1, (a + b) \cdot c_2, (a + b) \cdot c_3, \dots\} \\
 &= \{(a \cdot c_1) + (b \cdot c_1), (a \cdot c_2) + (b \cdot c_2), (a \cdot c_3) \\
 &\quad + (b \cdot c_3), \dots\} \\
 &= \{(a \cdot c_1), (a \cdot c_2), (a \cdot c_3), \dots\} + \{(b \cdot c_1), (b \cdot c_2), (b \cdot c_3), \dots\} \\
 &= (a \cdot \{c_1, c_2, c_3, \dots\}) + (b \cdot \{c_1, c_2, c_3, \dots\}) \\
 &= (a \cdot \bar{c}) + (b \cdot \bar{c})
 \end{aligned}$$

b. $(r \cdot s) \cdot m = r \cdot (s \cdot m)$, untuk setiap $r, s \in (\mathbb{Z}, +, \cdot)$ dan $m \in (\mathbb{Z}_6, +)$.

Ambil sebarang $a, b \in (\mathbb{Z}, +, \cdot)$ dan $\bar{c} \in (\mathbb{Z}_6, +)$, maka:

$$\begin{aligned}
 (a \cdot b) \cdot \bar{c} &= (a \cdot b) \cdot \{c_1, c_2, c_3, \dots\} \\
 &= \{(a \cdot b) \cdot c_1, (a \cdot b) \cdot c_2, (a \cdot b) \cdot c_3, \dots\} \\
 &= \{(a \cdot (b \cdot c_1)), (a \cdot (b \cdot c_2)), (a \cdot (b \cdot c_3)), \dots\} \\
 &= a \cdot \{(b \cdot c_1), (b \cdot c_2), (b \cdot c_3), \dots\} \\
 &= a \cdot (b \cdot \{c_1, c_2, c_3, \dots\}) \\
 &= a \cdot (b \cdot \bar{c})
 \end{aligned}$$

c. $r \cdot (m + n) = r \cdot m + r \cdot n$, untuk setiap $r \in (\mathbb{Z}, +, \cdot)$ dan $m, n \in (\mathbb{Z}_6, +)$.

Ambil sebarang $a \in (\mathbb{Z}, +, \cdot)$ dan $\bar{b}, \bar{c} \in (\mathbb{Z}_6, +)$, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
 a \cdot (\bar{b} + \bar{c}) &= a \cdot (\{b_1, b_2, b_3, \dots\} + \{c_1, c_2, c_3, \dots\}) \\
 &= a \cdot \{(b_1 + c_1), (b_2 + c_2), (b_3 + c_3), \dots\} \\
 &= \{(a \cdot (b_1 + c_1)), (a \cdot (b_2 + c_2)), (a \cdot (b_3 + c_3)), \dots\} \\
 &= \{((a \cdot b_1) + (a \cdot c_1)), ((a \cdot b_2) + (a \cdot c_2)), ((a \cdot b_3) + (a \cdot c_3)), \dots\} \\
 &= \{(a \cdot b_1), (a \cdot b_2), (a \cdot b_3), \dots\} + \{(a \cdot c_1), (a \cdot c_2), (a \cdot c_3), \dots\} \\
 &= (a \cdot \{b_1, b_2, b_3, \dots\}) + (a \cdot \{c_1, c_2, c_3, \dots\}) \\
 &= (a \cdot \bar{b}) + (a \cdot \bar{c})
 \end{aligned}$$

d. Ambil sebarang $1 \in (\mathbb{Z}, +, \cdot)$ dan ambil sebarang $(\mathbb{Z}_6, +)$. sehingga diperoleh:

$$1 \cdot \bar{a} = 1 \cdot \{a_1, a_2, a_3, \dots\} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\} = \bar{a}$$

Oleh karena itu terbukti bahwa $(\mathbb{Z}_6, +)$. merupakan modul atas gelanggang $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

2. Misalkan R adalah gelanggang komutatif dengan satuan, maka gelanggang R adalah R -modul.

Definisi 2.3.2

Misalkan R adalah gelanggang dan M adalah R -modul. Himpunan N disebut R -submodul jika:

1. N adalah subgrup dari M
2. $r \cdot n \in N$ untuk setiap $r \in R$ dan $n \in N$ (Dummit dkk, 2004:337).

Pada dasarnya submodul dapat dibagi menjadi dua yaitu submodul tidak sejati dan submodul sejati. Submodul N dari suatu modul M disebut submodul submodul tidak sejati jika $N = M$, dan dikatakan submodul sejati jika $N \neq M$.

Contoh:

Telah diketahui bahwa $(\mathbb{Z}_6, +)$ merupakan modul atas gelanggang $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

Selanjutnya akan dibentuk submodul-submodul N dari $(\mathbb{Z}_6, +)$.

$$N_1 = \{0 \cdot k | k \in \mathbb{Z}_6\} = \{0\}$$

$$N_2 = \{1 \cdot k | k \in \mathbb{Z}_6\} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$$

$$N_3 = \{2 \cdot k | k \in \mathbb{Z}_6\} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$$

$$N_4 = \{3 \cdot k | k \in \mathbb{Z}_6\} = \{\bar{0}, \bar{3}\}$$

Oleh karena itu dapat diketahui bahwa submodul dari $(\mathbb{Z}_6, +)$ adalah $N_1 =$

$$\{0\}, N_2 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}, N_3 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}, \text{ dan } N_4 = \{\bar{0}, \bar{3}\}.$$

Teorema 2.3.3

Misalkan R adalah gelanggang, M adalah R -modul dan N adalah submodul dari M . Grup hasil bagi M/N (dengan operasi penjumlahan dan bersifat komutatif) dapat dijadikan suatu R -modul dengan mendefinisikan aksi dari suatu elemen di R dengan:

$r \cdot (x + N) = (r \cdot x) + N$, untuk setiap $r \in R, x + N \in M/N$ (Dummit dkk, 2004:348).

Bukti:

Misalkan $r, s \in R$ dan $x + N, y + N \in M/N$, akan ditunjukkan bahwa M/N adalah R -modul.

$$\begin{aligned}
 \text{a. } (r + s) \cdot (x + N) &= ((r + s) \cdot x) + N \\
 &= ((r \cdot x) + (s \cdot x) + N) \\
 &= ((r \cdot x) + N) + ((s \cdot x) + N) \\
 &= r \cdot (x + N) + s \cdot (x + N) \\
 \text{b. } (r \cdot s) \cdot (x + N) &= ((r \cdot s) \cdot x) + N \\
 &= (r \cdot (s \cdot x)) + N \\
 &= r \cdot ((s \cdot x) + N) \\
 &= r \cdot (s \cdot (x + N)) \\
 \text{c. } r \cdot ((x + N) + (y + N)) &= r \cdot ((x + y) + N) \\
 &= (r \cdot (x + y)) + N \\
 &= ((r \cdot x) + (r \cdot y)) + N \\
 &= ((r \cdot x) + N) + ((r \cdot y) + N) \\
 &= r \cdot (x + N) + r \cdot (y + N) \\
 \text{d. } 1 \cdot (x + N) &= (1 \cdot x + N) \\
 &= x + N
 \end{aligned}$$

Sehingga terbukti bahwa M/N adalah R -modul.

Teorema 2.3.4

Misalkan A, B adalah submodul dari R -modul M . Penjumlahan dari A dan B didefinisikan dalam himpunan:

$$A + B = \{a + b | a \in A, b \in B\}$$

Penjumlahan dari dua submodul A dan B adalah submodul (Dummit dkk, 2004:349).

Bukti:

Untuk menunjukkan penjumlahan dari dua submodul adalah submodul, dimisalkan M adalah R -modul dan A dan B merupakan submodul dari M . Ambil sebarang $n_1, n_2 \in A + B$ sehingga $n_1 = a_1 + b_1$ dan $n_2 = a_2 + b_2$ untuk setiap $a_1, a_2 \in A$ dan $b_1, b_2 \in B$. Karena A dan B adalah submodul maka $a_1 - a_1 \in A$ dan $b_1 - b_2 \in B$, akibatnya $n_1 - n_2 = (a_1 + b_1) - (a_2 + b_2) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) \in A + B$.

Selanjutnya ambil sebarang $r \in R$. Karena A dan B adalah submodul, maka $r \cdot a \in A$ dan $r \cdot b \in B$, akibatnya $r \cdot n_1 = r \cdot (a_1 + b_1) = r \cdot a_1 + r \cdot b_1 \in A + B$. Oleh karena itu terbukti bahwa $A + B$ merupakan submodul dari M .

Definisi 2.3.5

Misalkan M adalah R -modul dan $N_1, N_2, \dots, N_n$ adalah submodul dari M .

1. Penjumlahan dari $N_1, N_2, \dots, N_n$ adalah himpunan dari semua penjumlahan berhingga dari himpunan N_i yaitu $\{a_1 + a_2 + \dots + a_n | a_i \in N_i\}$. Penjumlahan ini dinotasikan dengan $N_1 + N_2 + \dots + N_n$.
2. Untuk suatu subhimpunan A dari M . Misalkan $R \cdot A = \{r_1 a_1 + r_2 a_2 + \dots + r_m a_m | r_1, r_2, \dots, r_m \in R, a_1, a_2, \dots, a_m \in A, m \in \mathbb{Z}^+\}$ (jika $R \cdot A = 0$ maka $A = \emptyset$). Jika A adalah suatu himpunan berhingga $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ dapat ditulis $Ra_1 + Ra_2 + \dots + Ra_n$ untuk $R \cdot A$. $R \cdot A$ disebut submodul dari M yang dibangun oleh A . Jika N adalah submodul dari M dan

$N = R \cdot A$, untuk suatu A subhimpunan dari M . A disebut himpunan pembangun dari N dan dapat disebut juga N dibangun oleh A .

3. Suatu submodul N dari M disebut dibangun secara berhingga (*finitely generated*) jika terdapat suatu subhimpunan berhingga A dari M sedemikian sehingga $N = R \cdot A$. Artinya N dibangun oleh suatu subhimpunan berhingga (Dummit dkk, 2004:351).

Definisi 2.3.6

Suatu submodul N dari M dikatakan maksimal jika $N \neq M$ dan untuk setiap L submodul dari M dengan $N \subseteq L \subseteq M$ maka $L = N$ atau $L = M$ (Irwan dkk, 2012).

Contoh:

Diberikan $\mathbb{Z}_6$ merupakan $\mathbb{Z}$ -modul. Dari contoh Definisi 2.3.2 telah diketahui bahwa submodul dari $\mathbb{Z}_6$ adalah $N_1 = \{\bar{0}\}$, $N_2 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$, $N_3 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$, dan $N_4 = \{\bar{0}, \bar{3}\}$. Sehingga dapat diketahui bahwa submodul maksimal dari $(\mathbb{Z}_6, +)$ adalah N_3 dan N_4 karena tidak ada submodul sejati lain yang memuat N_3 dan N_4 , $N_3 \neq \mathbb{Z}_6$ dan $N_4 \neq \mathbb{Z}_6$.

Definisi 2.3.7

R -modul M disebut modul sederhana jika $M \neq \{0\}$, dan submodulnya hanya $\{0\}$ dan M (Smith dkk, 1988).

Definisi 2.3.8

Misalkan N submodul dari R -modul M . Didefinisikan

$$(N:M) = \{r \in R | r \cdot M \subseteq N\}$$

N disebut submodul prima jika $N \neq M$ dan untuk sebarang $r \in R$ dan $r \cdot m \in N$ berlaku $m \in N$ atau $r \in (N:M)$ (Irwan dkk, 2012).

Lema 2.3.9

Jika M adalah R -modul dan N adalah submodul dari M , maka $(N:M)$ adalah ideal dari gelanggang R (Ghalandarzadeh dkk, 2008).

Bukti:

Misalkan M adalah R -modul. Akan dibuktikan bahwa $(N:M)$ adalah ideal dari gelanggang R , dibuktikan terlebih dahulu untuk sebarang $a, b \in (N:M)$ dan $r \in R$ maka berlaku $a - b \in (N:M)$ dan $r \cdot a \in (N:M)$.

a. Ambil $a, b \in (N:M)$ maka $a \in R$ dan $b \in R$ sehingga $a - b \in R$.

Karena $a, b \in (N:M)$ sehingga dari definisi $(N:M)$ berlaku $a \cdot M \subseteq N$ dan $b \cdot M \subseteq N$ sehingga $a \cdot M - b \cdot M \subseteq N$ oleh karena itu $(a - b) \cdot M \subseteq N$.

Sehingga terbukti bahwa $a - b \in (N:M)$

b. Ambil sebarang $a \cdot M \subseteq N$ dan $r \in R$ sehingga $(r \cdot a) \cdot M = r \cdot (a \cdot M) \subseteq N$ (sifat asosiatif), oleh karena itu $r \cdot a \in (N:M)$.

Karena untuk sebarang $a, b \in (N:M)$ dan $r \in R$ berlaku $a - b \in (N:M)$ dan $r \cdot a \in (N:M)$ maka $(N:M)$ adalah ideal dari gelanggang R .

Contoh:

1. Diberikan $\mathbb{Z}_6$ adalah $\mathbb{Z}$ -modul dan didefinisikan $(N:\mathbb{Z}_6) = \{x \in \mathbb{Z} | x \cdot \mathbb{Z}_6 \subseteq N\}$ dengan N adalah submodul dari $\mathbb{Z}_6$. Ambil submodul $N_1 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ dan $N_2 = \{\bar{0}, \bar{3}\}$ dari $\mathbb{Z}_6$, sehingga:

a. Untuk $(N_1:\mathbb{Z}_6) = \{x \in \mathbb{Z} | x \cdot \mathbb{Z}_6 \subseteq N_1\}$, ambil $x = 2\mathbb{Z}$, maka:

$$\begin{aligned} x \cdot \mathbb{Z}_6 &= 2\mathbb{Z} \cdot \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\} \\ &= \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} \end{aligned}$$

Karena $2\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}$ dan $2\mathbb{Z} \cdot \mathbb{Z}_6 \subseteq N_1$ maka terbukti bahwa $(N_1:\mathbb{Z}_6) = 2\mathbb{Z}$.

b. Untuk $N_2 = \{\bar{0}, \bar{3}\}$, ambil $x = 3\mathbb{Z}$, maka:

$$\begin{aligned} x \cdot \mathbb{Z}_6 &= 3\mathbb{Z} \cdot \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\} \\ &= \{\bar{0}, \bar{3}\} \end{aligned}$$

Karena $3\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}$ dan $3\mathbb{Z} \cdot \mathbb{Z}_6 \subseteq N_1$ maka terbukti bahwa $(N_1 : \mathbb{Z}_6) = 2\mathbb{Z}$.

Telah diketahui bahwa $n\mathbb{Z}$ untuk setiap $n \in \mathbb{Z}^+$ merupakan ideal dari gelanggang $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, sehingga $2\mathbb{Z}$ dan $3\mathbb{Z}$ juga merupakan ideal dari gelanggang $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

2. Diberikan $\mathbb{Z}_6$ merupakan $\mathbb{Z}$ -modul. Dari contoh Definisi 2.3.2 telah diketahui bahwa submodul dari $\mathbb{Z}_6$ adalah $N_1 = \{0\}$, $N_2 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$, $N_3 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$, $N_4 = \{\bar{0}, \bar{3}\}$ sehingga submodul sejati dari $\mathbb{Z}_6$ adalah N_3 dan N_4 . Selanjutnya akan dibuktikan bahwa N_3 dan N_4 adalah submodul prima.

a. Untuk $N_3 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$, telah diketahui bahwa $(N_3 : \mathbb{Z}_6) = 2\mathbb{Z}$, ambil sebarang $2\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}$ dan $\bar{5} \in \mathbb{Z}_6$ sehingga:

$$\begin{aligned} 2\mathbb{Z} \cdot \bar{5} &= \{\dots, 0, 2, 4, \dots\} \cdot \{\dots, -11, -5, 5, 11, \dots\} \\ &= \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} \end{aligned}$$

sehingga untuk setiap $r \in \mathbb{Z}$ dan $m \in \mathbb{Z}_6$ jika $r \cdot m = N_3$ maka r yang memenuhi adalah $r \in (N_3 : \mathbb{Z}_6)$. Sehingga terbukti bahwa N_3 adalah submodul prima.

b. Untuk $N_4 = \{\bar{0}, \bar{3}\}$, telah diketahui bahwa $(N_4 : \mathbb{Z}_6) = 3\mathbb{Z}$, ambil sebarang $3\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}$ dan $\bar{5} \in \mathbb{Z}_6$ sehingga:

$$\begin{aligned} 3\mathbb{Z} \cdot \bar{5} &= \{\dots, 0, 3, 6, \dots\} \cdot \{\dots, -11, -5, 5, 11, \dots\} \\ &= \{\bar{0}, \bar{3}\} \end{aligned}$$

sehingga untuk setiap $r \in \mathbb{Z}$ dan $m \in \mathbb{Z}_6$ jika $r \cdot m = N_4$ maka r yang memenuhi adalah $r \in (N_4 : \mathbb{Z}_6)$. Sehingga terbukti bahwa N_4 adalah submodul prima.

2.4 Modul Perkalian

Definisi 2.4.1 (Modul Perkalian)

Misalkan M adalah R -modul. M disebut modul perkalian jika untuk setiap submodul N di M terdapat ideal I di gelanggang R sehingga berlaku $N = I \cdot M$ (Smith dkk, 1988).

Contoh:

1. Untuk sebarang gelanggang komutatif R dengan elemen satuan, maka R adalah R -modul perkalian, karena untuk setiap submodul N akan berlaku:
 - a. Jika $N = \{0\}$ maka terdapat ideal $I = \{0\}$ di gelanggang R sehingga berlaku $N = \{0\} \cdot R$.
 - b. Jika $N \neq \{0\}$ maka terdapat ideal $I = N$ di gelanggang R sehingga berlaku $N = N \cdot R$, karena jelas $N \cdot R \subseteq N$ (N submodul) dan untuk setiap $x \in N$ berlaku $x = 1 \cdot x \in N$ sehingga $N \subseteq N \cdot R$.

Dari sini, maka untuk setiap submodul N di R -modul R terdapat ideal I di gelanggang R sehingga berlaku $N = I \cdot R$, yang artinya R adalah R -modul perkalian.

2. Telah diketahui bahwa $(\mathbb{Z}_6, +)$ merupakan modul atas gelanggang $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}_6, +)$ merupakan modul perkalian sehingga untuk setiap submodul N di $(\mathbb{Z}_6, +)$ terdapat ideal I di $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ sehingga berlaku $N = I \cdot \mathbb{Z}_6$.

Untuk $N_1 = \{\bar{0}\}$, ambil ideal $\{0\}$ di gelanggang $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, sehingga:

$$\begin{aligned}
N_1 &= I \cdot \mathbb{Z}_6 \\
&= \{0\} \cdot \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\} \\
&= \{\bar{0}\}
\end{aligned}$$

Untuk $N_2 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$, ambil ideal $\mathbb{Z}$ di gelanggang $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, sehingga:

$$\begin{aligned}
N_2 &= I \cdot \mathbb{Z}_6 \\
&= \mathbb{Z} \cdot \mathbb{Z}_6 \\
&= \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \cdot \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\} \\
&= \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}
\end{aligned}$$

Untuk $N_3 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$, ambil ideal $2\mathbb{Z}$ di gelanggang $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, sehingga:

$$\begin{aligned}
N_3 &= I \cdot \mathbb{Z}_6 \\
&= 2\mathbb{Z} \cdot \mathbb{Z}_6 \\
&= \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\} \cdot \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\} \\
&= \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}
\end{aligned}$$

Untuk $N_4 = \{\bar{0}, \bar{3}\}$, ambil ideal $3\mathbb{Z}$ di gelanggang $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, sehingga:

$$\begin{aligned}
N_4 &= I \cdot \mathbb{Z}_6 \\
&= 3\mathbb{Z} \cdot \mathbb{Z}_6 \\
&= \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\} \cdot \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\} \\
&= \{\bar{0}, \bar{3}\}
\end{aligned}$$

Karena untuk setiap submodul di $(\mathbb{Z}_6, +)$ terdapat ideal I di gelanggang $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ sehingga berlaku $N = I \cdot \mathbb{Z}$, maka terbukti bahwa $(\mathbb{Z}_6, +)$ adalah modul perkalian.

2.5 Kewajiban Menuntut Ilmu Menurut Al-Quran

Al-Quran tidak secara langsung mengutarakan tentang kewajiban mencari ilmu atau mengembangkan ilmu pengetahuan, namun tersirat dalam beberapa ayat yang mengisyaratkan tentang hal itu. Dalam al-Quran surat al-Alaq/96:1-5 Allah Swt berfirman:

أَقْرَأْ بِاسْمِ رَبِّكَ الَّذِي خَلَقَ ۝ خَلَقَ الْإِنْسَانَ مِنْ عَلَقٍ ۝ اقْرَأْ وَرَبُّكَ الْأَكْرَمُ ۝ الَّذِي عَلَّمَ بِالْقَلَمِ ۝ عَلَّمَ الْإِنْسَانَ مَا لَمْ يَعْلَمْ

"1. bacalah dengan (menyebut) nama Tuhanmu yang Menciptakan, 2. Dia telah menciptakan manusia dari segumpal darah. 3. Bacalah, dan Tuhanmulah yang Maha pemurah, 4. yang mengajar (manusia) dengan perantaran kalam, 5. Dia mengajar kepada manusia apa yang tidak diketahuinya" (QS. al-Alaq/96:1-5).

Perintah membaca dalam surat ini terulang dua kali, yaitu pada ayat pertama dan pada ayat ketiga. Perintah membaca pada ayat pertama berkaitan dengan syarat yang harus dipenuhi oleh seseorang ketika membaca. Sedangkan perintah membaca pada ayat ketiga berkaitan dengan manfaat yang diperoleh dari hasil bacaan tersebut. Hal ini dapat dipahami dari ayat selanjutnya (keempat) bahwa dari kerja membaca itu seseorang akan memperoleh ilmu pengetahuan.

Allah Swt dalam al-Quran surat at-Taubah/9:122 menerangkan bahwa tidak perlu semua orang mukmin berangkat ke medan perang. Tetapi harus ada pembagian tugas. Sebagian berangkat ke medan perang, dan sebagian lagi tekun menuntut ilmu-ilmu agama Islam supaya ajaran-ajaran agama itu dapat diajarkan kepada generasi selanjutnya.

Menurut (al-Qurtubi: 734), hukum menuntut ilmu terbagi menjadi dua :

1. *Fardhu Ain*

Hukum mencari ilmu dihukumi *fardhu ain* apabila ilmu itu tentang syariat agama, karena mempelajari tentang syariat agama diperlukan setiap individu

untuk mengetahui tentang cara ibadah yang benar, seperti ilmu tentang shalat, zakat, dan puasa. Dalilnya adalah hadis berikut ini :

طَلَبُ الْعِلْمِ فَرِيضَةٌ عَلَى كُلِّ مُسْلِمٍ

“Menuntut ilmu adalah suatu keharusan bagi setiap muslim.” (HR. Ibnu Majah).

Seperti hadits di atas bahwa ilmu yang wajib dipelajari adalah ilmu agama. Menurut Ibnu Qayyim, ada 3 ilmu agama yang wajib dipelajari oleh setiap muslim, yaitu:

1. Ilmu tentang pokok-pokok keimanan, yakni iman kepada Allah, malaikatNya, kitab-kitabNya, RasulNya, dan hari akhir.
2. Ilmu tentang syariat Islam. Di antara yang wajib adalah tentang ilmu wudhu, shalat, puasa, haji, dan zakat. Kita wajib untuk mempelajari hal-hal yang berkaitan dengan ibadah-ibadah tersebut, misalnya tentang syarat, rukun, dan pembatalnya.
3. Ilmu tentang lima hal yang diharamkan yang disepakati oleh para rasul dan syariat sebelumnya. Kelima hal ini disebutkan dalam al-Quran surat al-A'raf/7:33.

قُلْ إِنَّمَا حَرَّمَ رَبِّيَ الْفَوَاحِشَ مَا ظَهَرَ مِنْهَا وَمَا بَطَنَ وَالْإِثْمَ وَالْبَغْيَ بِغَيْرِ الْحَقِّ وَأَنْ تُشْرِكُوا بِاللَّهِ مَا لَمْ يُنَزَّلْ بِهِ سُلْطَانًا وَأَنْ تَقُولُوا عَلَى اللَّهِ مَا لَا تَعْلَمُونَ ٣٣

"Katakanlah, Rabbku hanya mengharamkan perbuatan keji, baik yang tampak maupun yang tersembunyi, dan perbuatan dosa, melanggar hak manusia tanpa alasan yang benar, (mengharamkan) mempersekutukan Allah dengan sesuatu yang Allah tidak menurunkan hujjah untuk itu dan (mengharamkan) mengada-adakan terhadap Allah apa yang tidak kamu ketahui." (QS. al-A'raf/7: 33).

2. Fardhu Kifayah

Hukum menuntut ilmu dihukumi *fardhu kifayah* apabila ilmu tersebut bukan tentang syariat namun sangat dibutuhkan terkait dengan kemaslahatan dunia. Ilmu tersebut wajib dipelajari oleh sebagian masyarakat Islam, bukan

seluruhnya. Dalam hal ini imam al-Ghazali memberikan contoh: kedokteran, matematika, ilmu teknik, pertanian, pelayaran, politik, bekam, dan menjahit.

Imam al-Ghazali beralasan bahwa ilmu kedokteran penting bagi kemaslahatan masyarakat sebab ilmu kedokteran dibutuhkan dalam kesehatan. Begitu pula ilmu matematika sangat dibutuhkan dalam kehidupan sehari-hari semisal dalam perdagangan, pembagian waris, dan wasiat. Ilmu-ilmu di atas menurut imam al-Ghazali apabila tidak ada satu dari kelompok suatu masyarakat yang mempelajari, maka semua masyarakat yang ada mendapatkan dosa. Imam al-Ghazali mencontohkan apabila satu kelompok masyarakat tidak ada yang mempelajari ilmu kedokteran, maka banyak orang yang terkena penyakit, hal ini yang kemudian akan mempercepat kerusakan.

BAB III PEMBAHASAN

3.1 Keterkaitan Antara Ideal Maksimal dengan Submodul Maksimal

Sebelum membahas sifat ideal maksimal pada submodul maksimal akan ditunjukkan terlebih dahulu kaitan antara ideal dan submodul. Pada Definisi 2.3.2 dijelaskan suatu himpunan N disebut dengan submodul jika N adalah subgrup dari R dan berlaku $r \cdot n \in N$ dengan $r \in R$ dan $n \in N$. Terdapat kaitan antara definisi submodul dengan definisi ideal kiri pada Definisi 2.2.1 yang menjelaskan bahwa suatu himpunan I merupakan ideal dari suatu gelanggang R jika I adalah subgelanggang dari R dan berlaku $a \cdot r \in I$ dengan $a \in I$ dan $r \in R$. Sedangkan pada Definisi 2.3.2, pada suatu R -modul M , himpunan N disebut R -submodul jika N adalah subgrup dari M dan $r \cdot n \in N$ untuk setiap $r \in R$ dan $n \in N$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa suatu ideal dari suatu gelanggang adalah submodul dari R -modul. Pandang gelanggang R sebagai R -modul. Misalkan R adalah gelanggang komutatif dengan satuan dan I adalah ideal dari R . Untuk menunjukkan bahwa I adalah submodul dari R -modul pertama menunjukkan bahwa I subgrup dari R . Karena I adalah ideal dari R maka terbukti bahwa I adalah subgrup dari R . Kedua, karena I adalah ideal maka untuk setiap $a \in I$ dan $r \in R$ berlaku $a \cdot r \in I$. Sehingga terbukti bahwa I adalah submodul dari R -modul. Oleh karena itu jika gelanggang R dipandang sebagai R -modul atas dirinya sendiri maka I yang merupakan ideal dari gelanggang R dapat dipandang sebagai submodul dari R -modul.

Dari penjelasan tersebut, jika diasumsikan bahwa setiap ideal I pada gelanggang R merupakan subgrup dari M maka setiap ideal dari gelanggang R

merupakan submodul dari R -modul M . Hal ini mendasari peneliti untuk membahas sifat-sifat ideal yang berlaku pada sifat submodul khususnya sifat ideal maksimal yang berlaku pada submodul maksimal.

Pada Definisi 2.4.1 disebutkan bahwa suatu R -modul M disebut dengan modul perkalian jika untuk setiap submodul N di M terdapat ideal I di gelanggang R sehingga berlaku $N = I \cdot M$. Ideal I disebut ideal presentasi dari submodul N atau secara singkat disebut presentasi dari submodul N . Dari Definisi 2.4.1 didapatkan bahwa setiap submodul dari R -modul M memiliki ideal presentasi jika dan hanya jika M adalah R -modul perkalian.

Teorema 3.1.1

M adalah R -modul perkalian jika dan hanya jika untuk setiap $m \in M$, terdapat ideal I di gelanggang R sehingga berlaku $R \cdot m = I \cdot M$ (Arifin, 2008).

Bukti:

($\Rightarrow$) Diketahui M adalah R -modul perkalian, yang artinya setiap submodul N di M memiliki ideal I sehingga berlaku $N = I \cdot M$. Selanjutnya ambil sebarang $m \in M$. Dari sini dapat dibentuk submodul yang dibangun oleh m , yaitu $\langle m \rangle = R \cdot m$. Karena M adalah R -modul perkalian, maka untuk submodul $\langle m \rangle = R \cdot m$ terdapat ideal I sehingga berlaku $\langle m \rangle = R \cdot m = I \cdot M$. Dengan demikian terbukti bahwa jika M adalah R -modul perkalian, maka untuk setiap $m \in M$ terdapat ideal I di gelanggang R sehingga berlaku $R \cdot m = I \cdot M$.

($\Leftarrow$) Misalkan untuk sebarang $m \in M$ terdapat ideal I di gelanggang R sehingga berlaku $R \cdot m = I \cdot M$. Ambil sebarang submodul N di R -modul M

dan selanjutnya ambil sebarang $n \in N$ yang berarti juga $n \in M$. Maka terdapat ideal I di gelanggang R sehingga berlaku $R \cdot n = I \cdot M$.

- a. Karena N adalah submodul di R -modul M maka untuk setiap $n \in N$ dan $r \in R$ berlaku $r \cdot n \in N$ atau $R \cdot n \subseteq N$ yang artinya $I \cdot M \subseteq N$ (karena $R \cdot n = I \cdot M \subseteq N$).
- b. Selanjutnya, untuk setiap $n \in N$ berlaku $n \in R \cdot n$ sehingga $N \subseteq \sum_{i=1}^n R \cdot n_i = I \cdot M$

Dari penjelasan tersebut diperoleh $N = I \cdot M$, yang artinya untuk setiap submodul N di R -modul M terdapat ideal I pada gelanggang R sehingga berlaku $N = I \cdot M$. Dengan demikian terbukti bahwa jika untuk setiap $m \in M$ terdapat ideal I di gelanggang R sehingga berlaku $R \cdot m = I \cdot M$ maka M adalah R -modul perkalian.

Contoh:

Diberikan $\mathbb{Z}_6$ adalah $\mathbb{Z}$ -modul perkalian sehingga untuk setiap submodul N di $\mathbb{Z}_6$ berlaku $N = I \cdot \mathbb{Z}_6$ dengan I adalah ideal dari gelanggang $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. Akan dibuktikan bahwa $\mathbb{Z} \cdot m = I \cdot \mathbb{Z}_6$ dengan $m \in \mathbb{Z}_6$.

- a. Untuk $m = \bar{0}$ ambil ideal $I = \{0\}$, maka:

$$\begin{aligned}\mathbb{Z} \cdot m &= \mathbb{Z} \cdot \bar{0} \\ &= \{\dots, -1, 0, 1, \dots\} \cdot \{\dots, -6, 0, 6, \dots\} \\ &= \{\bar{0}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I \cdot \mathbb{Z}_6 &= \{0\} \cdot \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\} \\ &= \{\bar{0}\}\end{aligned}$$

Jadi untuk $m = \bar{0}$ terdapat $I = \{0\}$ sehingga $\mathbb{Z} \cdot m = I \cdot M$.

- b. Untuk $m = \bar{1}$ ambil ideal $I = \mathbb{Z}$, sehingga:

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z} \cdot m &= \mathbb{Z} \cdot \bar{1} \\
&= \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \cdot \{\dots, -7, -1, 1, 7, \dots\} \\
&= \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I \cdot \mathbb{Z}_6 &= \mathbb{Z} \cdot \mathbb{Z}_6 \\
&= \{\dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \cdot \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\} \\
&= \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}
\end{aligned}$$

Jadi untuk $m = \bar{1}$ terdapat $I = \mathbb{Z}$ sehingga $\mathbb{Z} \cdot m = I \cdot M$.

c. Untuk $m = \bar{2}$ ambil ideal $I = 2\mathbb{Z}$, sehingga:

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z} \cdot m &= \mathbb{Z} \cdot \bar{2} \\
&= \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \cdot \{\dots, -8, -2, 2, 8, \dots\} \\
&= \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I \cdot \mathbb{Z}_6 &= 2\mathbb{Z} \cdot \mathbb{Z}_6 \\
&= \{\dots - 4, -2, 0, 2, 4, \dots\} \cdot \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\} \\
&= \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}
\end{aligned}$$

Jadi untuk $m = \bar{2}$ terdapat $I = 2\mathbb{Z}$ sehingga $\mathbb{Z} \cdot m = I \cdot M$.

d. Untuk $m = \bar{3}$ ambil ideal $I = 3\mathbb{Z}$, sehingga:

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z} \cdot m &= \mathbb{Z} \cdot \bar{3} \\
&= \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \cdot \{\dots, -9, -3, 3, 9, \dots\} \\
&= \{\bar{0}, \bar{3}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I \cdot \mathbb{Z}_6 &= 3\mathbb{Z} \cdot \mathbb{Z}_6 \\
&= \{\dots - 6, -3, 0, 3, 6, \dots\} \cdot \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\} \\
&= \{\bar{0}, \bar{3}\}
\end{aligned}$$

Jadi untuk $m = \bar{3}$ terdapat $I = 3\mathbb{Z}$ sehingga $\mathbb{Z} \cdot m = I \cdot M$.

e. Untuk $m = \bar{4}$ ambil ideal $I = 2\mathbb{Z}$, sehingga:

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z} \cdot m &= \mathbb{Z} \cdot \bar{4} \\
&= \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \cdot \{\dots, -10, -4, 4, 10, \dots\} \\
&= \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I \cdot \mathbb{Z}_6 &= 2\mathbb{Z} \cdot \mathbb{Z}_6 \\
&= \{\dots - 4, -2, 0, 2, 4, \dots\} \cdot \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\} \\
&= \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}
\end{aligned}$$

Jadi untuk $m = \bar{4}$ terdapat $I = 2\mathbb{Z}$ sehingga $\mathbb{Z} \cdot m = I \cdot M$.

f. Untuk $m = \bar{5}$ ambil ideal $I = \mathbb{Z}$, sehingga:

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z} \cdot m &= \mathbb{Z} \cdot \bar{5} \\
&= \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \cdot \{\dots, -11, -5, 5, 11, \dots\} \\
&= \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I \cdot \mathbb{Z}_6 &= \mathbb{Z} \cdot \mathbb{Z}_6 \\
&= \{\dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \cdot \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\} \\
&= \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}
\end{aligned}$$

Jadi untuk $m = \bar{5}$ terdapat $I = \mathbb{Z}$ sehingga $\mathbb{Z} \cdot m = I \cdot M$.

Sehingga terbukti untuk setiap $m \in \mathbb{Z}_6$ terdapat ideal I di $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ sehingga

$$\mathbb{Z} \cdot m = I \cdot \mathbb{Z}_6.$$

Selanjutnya berdasarkan Lema 2.3.9 telah diketahui bahwa $(N:M)$ adalah ideal dari suatu gelanggang R . Karena M adalah R -modul perkalian sehingga untuk setiap submodul N di M berlaku $N = I \cdot M$ sehingga akan dibuktikan bahwa $N = (N:M) \cdot M$ juga berlaku pada R -modul perkalian M .

Lema 3.1.2

Misalkan M adalah R -modul perkalian. Jika N adalah submodul di R -modul M maka berlaku $N = (N:M) \cdot M$ (Ghalandarzadeh dkk, 2008).

Bukti:

Misalkan M adalah R -modul perkalian sehingga untuk setiap submodul N di M berlaku $N = I \cdot M$ untuk I adalah ideal dari gelanggang R . Dari Lema 2.3.9 diketahui bahwa $(N:M)$ merupakan ideal dari gelanggang R . Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $N = (N:M) \cdot M$.

- a. Untuk sebarang $x \in (N:M) \cdot M$, x dapat ditulis dalam $x = a \cdot b$ untuk setiap $a \in (N:M)$ dan $b \in M$. Karena $a \in (N:M)$ maka berlaku $a \cdot M \subseteq N$, artinya untuk setiap $m \in M$ berlaku $a \cdot m \in N$, sehingga untuk $b \in M$ berlaku $a \cdot b \in N$. Oleh karena itu $x = a \cdot b \in N$ yang artinya $(N:M) \cdot M \subseteq N$.
- b. Untuk sebarang $n \in N$, n dapat dinyatakan dalam $n = a \cdot b$ (karena $N = I \cdot M$) untuk suatu $a \in I$ dan $b \in M$. Karena $a \in I$ maka $a \in (N:M)$ karena untuk setiap $m \in M$ berlaku $a \cdot m = a \cdot M \subseteq N$, sehingga didapatkan $n = a \cdot b \in (N:M) \cdot M$. Artinya $N \subseteq (N:M) \cdot M$.

Karena $(N:M) \cdot M \subseteq N$ dan $N \subseteq (N:M) \cdot M$ sehingga $N = (N:M) \cdot M$.

Contoh:

Diberikan $\mathbb{Z}_6$ adalah $\mathbb{Z}$ -modul perkalian sehingga untuk setiap submodul N di $\mathbb{Z}_6$ berlaku $N = I \cdot M$ dengan I adalah ideal dari gelanggang $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. Misalkan diambil sebarang submodul $N = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$. Dari contoh Lema 2.3.9 diketahui bahwa $(N:\mathbb{Z}_6) = 2\mathbb{Z}$, akan dibuktikan bahwa $N = (N:\mathbb{Z}_6) \cdot \mathbb{Z}_6$ sehingga:

$$N = (N:\mathbb{Z}_6) \cdot \mathbb{Z}_6$$

$$\begin{aligned}
&= 2\mathbb{Z} \cdot \mathbb{Z}_6 \\
&= \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\} \cdot \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\} \\
&= \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}
\end{aligned}$$

Sehingga terbukti bahwa $N = (N : \mathbb{Z}_6) \cdot \mathbb{Z}_6$.

Lema 3.1.3

Misalkan M adalah R -modul perkalian, jika N adalah submodul dari M maka M/N merupakan R -modul perkalian (Smith dkk, 1988).

Bukti:

Untuk sebarang $m \in M$ dapat dibentuk submodul yang dibangun oleh m , yaitu $\langle m \rangle = R \cdot m \subseteq M$. Karena M adalah R -modul perkalian maka terdapat ideal I di gelanggang R sehingga berlaku $R \cdot m = I \cdot M$ selanjutnya untuk sebarang $m + N \in M/N$ dapat dibentuk submodul yang dibangun oleh $m + N$ yaitu $R \cdot (m + N) \in M/N$, sehingga:

$$\begin{aligned}
R \cdot (m + N) &= R \cdot m + N \\
&= I \cdot M + N \\
&= I \cdot (M/N)
\end{aligned}$$

Karena $R \cdot (m + N) = I \cdot (M/N)$ maka terbukti bahwa jika M adalah R -modul perkalian maka M/N adalah modul perkalian.

Contoh:

Diberikan $\mathbb{Z}_6$ adalah $\mathbb{Z}$ -modul perkalian dan $N = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ adalah submodul dari $\mathbb{Z}_6$. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{Z} \cdot (x + N) = I \cdot M + N$ dengan $x + N \in \mathbb{Z}_6/N$ dan I adalah ideal dari $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. Pertama ditentukan terlebih dahulu unsur-unsur dari $\mathbb{Z}_6/N$, yaitu:

$$0 + N = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$$

$$1 + N = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\}$$

$$2 + N = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{0}\}$$

$$3 + N = \{\bar{3}, \bar{5}, \bar{1}\}$$

$$4 + N = \{\bar{4}, \bar{0}, \bar{2}\}$$

$$5 + N = \{\bar{5}, \bar{1}, \bar{3}\}$$

maka:

$$0 + N = 2 + N = 4 + N = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$$

$$1 + N = 3 + N = 5 + N = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\}$$

Sehingga unsur-unsur dari $\mathbb{Z}_6/N = \{0 + N, 1 + N\}$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{Z} \cdot (x + N) = I \cdot \mathbb{Z}_6 + N$.

a. Untuk $x + N = 0 + N$ ambil ideal $I = \{0\}$ maka:

$$\begin{aligned}\mathbb{Z} \cdot (x + N) &= \mathbb{Z} \cdot (0 + N) \\ &= \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \cdot \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} \\ &= \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I \cdot \mathbb{Z}_6 + N &= \{0\} \cdot \mathbb{Z}_6 + N \\ &= \{0\} \cdot \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\} + \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} \\ &= \{\bar{0}\} + \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} \\ &= \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}\end{aligned}$$

Jadi untuk $x + N = 0 + N$ terdapat $I = \{0\}$ sehingga $\mathbb{Z} \cdot (x + N) = I \cdot \mathbb{Z}_6 + N$.

b. Untuk $x + N = 1 + N$ ambil ideal $I = \mathbb{Z}$ sehingga:

$$\begin{aligned}\mathbb{Z} \cdot (x + N) &= \mathbb{Z} \cdot (1 + N) \\ &= \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \cdot \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\} \\ &= \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I \cdot \mathbb{Z}_6 + N &= \mathbb{Z} \cdot \mathbb{Z}_6 + N \\
&= \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \cdot \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\} + \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} \\
&= \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\} + \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} \\
&= \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}
\end{aligned}$$

Jadi untuk $x + N = 1 + N$ terdapat $I = \mathbb{Z}$ sehingga $\mathbb{Z} \cdot (x + N) = I \cdot \mathbb{Z}_6 + N$.

Oleh karena itu terbukti bahwa $\mathbb{Z} \cdot (x + N) = I \cdot \mathbb{Z}_6 + N$.

Dari bab II telah dijelaskan sifat-sifat ideal maksimal yaitu pada Teorema 2.2.9, Teorema 2.2.11, dan Teorema 2.2.13. Sifat-sifat ideal maksimal tersebut menjadi dasar untuk membahas sifat-sifat submodul maksimal dalam modul perkalian.

Teorema 3.1.4

Misalkan R adalah gelanggang komutatif dengan satuan dan M adalah R -modul perkalian tak nol, maka setiap submodul sejati dari M termuat dalam submodul maksimal dari M (Smith dkk, 1988).

Bukti:

Misalkan M adalah R -modul perkalian, maka setiap submodul N di R -modul M berlaku $N = I \cdot M$ dengan I adalah ideal dari gelanggang R , oleh karena itu dapat diartikan bahwa I adalah pembangun N . Pada Teorema 2.2.9 disebutkan bahwa setiap ideal sejati termuat dalam suatu ideal maksimal artinya himpunan ideal sejati pada gelanggang R memiliki suatu batas atas. Karena I adalah pembangun dari N maka himpunan submodul sejati dari M juga memiliki batas atas. Dengan Lema 2.2.7 dapat diketahui bahwa himpunan submodul sejati pada M memiliki suatu elemen maksimal, artinya

R -modul M memiliki submodul maksimal. Sehingga terbukti bahwa setiap submodul sejati dari M termuat dalam submodul maksimal dari M .

Teorema 3.1.5

Misalkan R adalah gelanggang komutatif dengan satuan dan M adalah R -modul perkalian tak nol, maka K adalah submodul maksimal dari M jika dan hanya jika terdapat ideal maksimal P dari R sedemikian sehingga $K = P \cdot M \neq M$ (Smith dkk, 1988).

Bukti:

Misalkan M adalah R -modul perkalian dan N adalah submodul dari M sehingga berlaku $N = I \cdot M$. Misalkan P adalah ideal maksimal dari gelanggang R artinya P merupakan batas atas dari himpunan ideal-ideal sejati pada R atau dapat ditulis dengan $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq P$. Misalkan ideal-ideal tersebut merupakan ideal presentasi dari submodul-submodul pada M , maka akan berlaku $N_i = I_i \cdot M$. Sehingga terdapat submodul K dengan $K = P \cdot M$ yang artinya $N_1 = I_1 \cdot M \subseteq N_2 = I_2 \cdot M \subseteq \dots \subseteq K = P \cdot M$. Oleh karena itu tidak ada submodul lain yang memuat K sehingga K adalah submodul maksimal dari M .

Contoh:

Dari contoh Definisi 2.1.1 telah diketahui bahwa $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ adalah gelanggang komutatif dengan satuan. Dan diketahui juga dari contoh Definisi 2.2.8 bahwa $2\mathbb{Z}$ adalah ideal maksimal selanjutnya dari contoh Definisi 2.4.1 diketahui bahwa $(\mathbb{Z}_6, +)$ adalah modul perkalian atas gelanggang $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, sehingga untuk setiap submodul N di $\mathbb{Z}_6$ berlaku $N = I \cdot \mathbb{Z}_6$. Untuk N suatu submodul dari $\mathbb{Z}_6$ ambil ideal maksimal $2\mathbb{Z}$ di gelanggang $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, maka:

$$\begin{aligned}
N &= I \cdot \mathbb{Z}_6 \\
&= 2\mathbb{Z} \cdot \mathbb{Z}_6 \\
&= \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\} \cdot \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\} \\
&= \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}
\end{aligned}$$

Dari contoh 2.3.6 diketahui bahwa $N = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ adalah ideal maksimal.

Teorema 3.1.6

Jika M adalah R -modul sederhana dan R adalah lapangan, maka R -modul M adalah R -modul perkalian (Arifin, 2008).

Bukti:

Diketahui R -modul M merupakan modul sederhana, yang artinya submodul-submodul yang ada di M hanyalah $\{0\}$ dan modul M itu sendiri

1. Untuk submodul $\{0\}$, akan terdapat ideal $\{0\}$ di gelanggang R sehingga berlaku $\{0\} = \{0\} \cdot M$.
2. Untuk submodul M , akan terdapat ideal R sendiri di gelanggang R sehingga berlaku $M = R \cdot M$. Hal ini karena untuk sebarang $m \in M$ berlaku $m = 1_R \cdot m = m \in R \cdot M$ yang berarti $M \subseteq R \cdot M$ dan jelas $R \cdot M \subseteq M$ (karena M adalah R -modul). Sehingga karena $M \subseteq R \cdot M$ dan $R \cdot M \subseteq M$ maka $M = R \cdot M$.

Dengan demikian, terbukti bahwa jika R -modul M adalah modul sederhana atas lapangan R , maka M adalah R -modul perkalian.

Teorema 3.1.7

Misalkan M adalah R -modul perkalian, maka M adalah R -modul sederhana jika dan hanya jika R adalah lapangan (Arifin, 2008).

Bukti:

($\Leftarrow$) Misalkan R adalah lapangan. Selanjutnya ambil sebarang submodul N di M dengan $N = I \cdot M$ untuk suatu ideal I di gelanggang R . Karena R merupakan lapangan, maka ideal-idealnya hanya $\{0\}$ dan gelanggang R itu sendiri.

- a. Untuk ideal $I = \{0\}$, maka berlaku $N = I \cdot M = \{0\} \cdot M = \{0\}$.
- b. Untuk ideal $I = R$, maka berlaku $N = R \cdot M = M$, karena $R \cdot M \subseteq M$ dan $M \subseteq R \cdot M$ sehingga $M = R \cdot M$.

Dari penjelasan tersebut, maka terbukti bahwa submodul-submodul di R -modul M hanya submodul $\{0\}$ dan R -modul M sendiri. Dengan kata lain modul R -modul M adalah modul sederhana. Dengan demikian terbukti bahwa pada R -modul M , jika R adalah lapangan maka M adalah R -modul sederhana.

($\Rightarrow$) Misalkan M adalah R -modul sederhana, yang artinya submodul-submodulnya hanya $\{0\}$ dan modul M sendiri, sehingga berlaku $0 = I \cdot M$ dan $M = I \cdot M$. Andaikan gelanggang R bukan lapangan, maka akan terdapat $a \in R$ dengan $a \neq 0$ yang tidak memiliki invers sehingga berlaku $\{0\} = (I \cdot a) \cdot M$ dan $M = (I \cdot a) \cdot M$. Selanjutnya ambil sebarang $r \in I$ dengan $r \neq 0$ dan $m \in M$ dengan $m \neq 0$, maka akan berlaku:

- a. Untuk submodul $\{0\}$ berlaku $\{0\} = (r \cdot a) \cdot m = r \cdot (a \cdot m)$ untuk suatu $r \in I$ dengan $r \neq 0$, $a \in R$ dengan $a \neq 0$, dan $m \in M$ dengan $m \neq 0$,

artinya $r = 0$ atau $a \cdot m = 0$. Dari $a \cdot m = 0$ ini diperoleh $a = 0$ atau $m = 0$. Dengan demikian telah terjadi kontradiksi karena $r \neq 0$, $a \neq 0$ dan $m \neq 0$.

- b. Untuk submodul M , maka untuk suatu $r \in I$ dengan $r \neq 0$, $a \in R$ dengan $a \neq 0$, dan $m \in M$ dengan $m \neq 0$ berlaku:

$$m = (r \cdot a) \cdot m$$

$$m = (a \cdot r) \cdot m$$

$$m - m = (a \cdot r) \cdot m - m$$

$$0 = (a \cdot r) \cdot m - m$$

$$0 = (a \cdot r - 1) \cdot m$$

Dari sini diperoleh $a \cdot r = 1$ atau $m = 0$, dan terjadi kontradiksi.

Karena $a \in R$ dengan $a \neq 0$ tidak memiliki invers, $r \in I$ dengan $r \neq 0$, dan $m \in M$ dengan $m \neq 0$.

Jadi, dari penjelasan tersebut diperoleh pengandaian salah sehingga haruslah R merupakan lapangan. Dengan demikian, terbukti bahwa jika M adalah R -modul sederhana maka R adalah lapangan.

Akibat 3.1.8

Misalkan M adalah R -modul perkalian dengan R adalah lapangan dan N adalah submodul dari M , maka M/N adalah modul sederhana jika dan hanya jika N adalah submodul maksimal.

Bukti:

($\Rightarrow$) Misalkan M/N adalah modul sederhana sehingga submodul dari M/N adalah $0 + N$ dan M/N itu sendiri. Andaikan terdapat suatu submodul L dari M dengan $N \subseteq L$ dan $L \neq N$. Sehingga L/N submodul dari M/N . Karena

M/N adalah modul sederhana sehingga haruslah $L/N = M/N$. Sehingga diperoleh bahwa $L = M$. Oleh karena itu terbukti tidak ada submodule lain yang memuat N sehingga N merupakan submodule maksimal.

($\Leftarrow$) Misalkan N adalah submodule maksimal maka berlaku $N = P \cdot M$ dengan P adalah ideal maksimal dari gelanggang R . Karena R adalah lapangan sehingga ideal-ideal pada gelanggang R adalah $\{0\}$ dan R itu sendiri. Artinya $\{0\}$ adalah ideal maksimal dari R . Sehingga pada submodule maksimal N akan berlaku $N = \{0\} \cdot M$, artinya submodule maksimal dari R -modul M/N adalah $\{0\}$. Karena $\{0\}$ adalah submodule maksimal maka tidak ada submodule sejati lain yang memuat $\{0\}$ sehingga dapat diketahui bahwa submodule dari M/N adalah $\{0\}$ dan M/N itu sendiri. Oleh karena itu terbukti bahwa M/N adalah modul sederhana.

Teorema 3.1.9

Misalkan R adalah gelanggang Artinian dan M adalah R -modul perkalian maka setiap submodule prima adalah submodule maksimal (Ghalandarzadeh dkk, 2008).

Bukti:

Misalkan N adalah submodule prima, akan dibuktikan bahwa $(N:M)$ adalah ideal prima sehingga untuk $a \cdot b \in (N:M)$ maka $a \in (N:M)$ atau $b \in (N:M)$. Karena $a \cdot b \in (N:M)$ maka $a \cdot b \in R$ dan $(a \cdot b) \cdot m \in N$ untuk sebarang $m \in M$. Karena N merupakan submodule prima sehingga jika $(a \cdot b) \cdot m = a \cdot (b \cdot m) \in N$ berlaku $b \cdot m \in N$ atau $a \in (N:M)$. Karena N merupakan submodule prima sehingga N adalah submodule sejati atau $M \neq N$, artinya $m \notin N$ sehingga terdapat $b \cdot m \notin N$ atau $b \notin (N:M)$. Oleh karena itu

diketahui bahwa jika $a \cdot b \in (N:M)$ maka berlaku $a \in (N:M)$ atau $b \in (N:M)$. Dengan kata lain terbukti bahwa $(N:M)$ adalah ideal prima di gelanggang R .

Karena R adalah gelanggang Artinian sehingga dari Teorema 2.2.15 diketahui bahwa setiap ideal prima adalah ideal maksimal, sebelumnya telah diketahui bahwa $(N:M)$ adalah ideal prima oleh karena itu $(N:M)$ merupakan ideal maksimal.

Dari Teorema 3.1.5 telah dibuktikan bahwa untuk ideal maksimal P dari gelanggang R maka $K = P \cdot M$ adalah submodul maksimal dari R -modul perkalian M . Karena telah diketahui bahwa $(N:M)$ adalah ideal maksimal dan pada Lema 2.3.9 jika M adalah R -modul perkalian maka berlaku $N = (N:M) \cdot M$ artinya N adalah submodul maksimal dari M . Sehingga terbukti jika R adalah gelanggang artinian dan M adalah R -modul perkalian maka submodul prima dari M merupakan submodul maksimal.

Contoh:

Dari contoh Definisi 2.2.14 diketahui bahwa $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ merupakan gelanggang Artinian dan ideal maksimal dari $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ adalah $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ dan $\{\bar{0}, \bar{3}\}$. Diketahui dari Teorema 2.2.15 bahwa jika suatu gelanggang R adalah gelanggang Artinian maka setiap ideal maksimal adalah ideal prima. Sehingga $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ dan $\{\bar{0}, \bar{3}\}$ adalah ideal prima. Pandang $\mathbb{Z}_6$ sebagai $\mathbb{Z}_6$ -modul, sehingga ideal dari $\mathbb{Z}_6$ merupakan submodul dari $\mathbb{Z}_6$ -modul $\mathbb{Z}_6$ sehingga $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ dan $\{\bar{0}, \bar{3}\}$ adalah submodul maksimal dan juga merupakan submodul prima dari $\mathbb{Z}_6$ -modul $\mathbb{Z}_6$.

3.2 Keutamaan Orang yang Menuntut Ilmu

At-Tirmidzi meriwayatkan dari Abu ad-Darda', dia berkata, "Aku mendengar Rasulullah Saw. bersabda:"

مَنْ سَلَكَ طَرِيقًا يَطْلُبُ فِيهِ عِلْمًا سَلَكَ اللَّهُ بِهِ طَرِيقًا إِلَى الْجَنَّةِ، وَإِنَّ الْمَلَائِكَةَ لَتَضَعُ أَجْنِحَتَهَا رِضًا لِطَالِبِ الْعِلْمِ، وَإِنَّ الْعَالَمَ لَيَسْتَعْفِرُ لَهُ مَنْ فِي السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ حَتَّى الْحَيَّاتِ فِي الْمَاءِ، وَفَضْلُ الْعَالِمِ عَلَى الْعَابِدِ كَفَضْلِ الْقَمَرِ عَلَى سَائِرِ الْكَوَاكِبِ، إِنَّ الْعُلَمَاءَ وَرَثَةُ الْأَنْبِيَاءِ لَمْ يَرِثُوا دِينَارًا وَلَا دِرْهَمًا، وَإِنَّمَا وَرِثُوا الْعِلْمَ فَمَنْ أَخَذَهُ أَخَذَ بِحِطَّةٍ وَافِرٍ

"Barang siapa berjalan untuk menuntut ilmu maka Allah akan menunjukkan baginya jalan menuju surga. Sesungguhnya malaikat ridha dengan perbuatannya dan akan menaunginya dengan sayapnya. Sesungguhnya orang alim akan dimintakan maaf baginya oleh penghuni langit dan penghuni bumi. Bahkan ikan di dasar lautan. Keutamaan orang berilmu dari ahli ibadah adalah bagaikan bulan purnama yang bersinar di antara bintang-bintang yang berkedipan. Sesungguhnya ulama adalah pewaris para nabi, dan para nabi tidak mewariskan dinar atau dirham (harta) melainkan mewariskan ilmu. Barangsiapa memilih ilmu berarti dia telah mengambil bagian yang sempurna."

Sabda nabi Muhammad Saw yang menyebutkan bahwa para malaikat akan menaungi penuntut ilmu dengan sayapnya memiliki dua pengertian, yaitu:

1. Para malaikat merahmatinya, sebagaimana Allah wasiatkan kepada anak-anak untuk berbuat baik kepada orang tua mereka, seperti firman Allah Swt dalam surat al-Isra/17:24, yaitu:

وَاخْفِضْ لَهُمَا جَنَاحَ الذُّلِّ مِنَ الرَّحْمَةِ

"Dan rendahkanlah dirimu terhadap mereka berdua dengan penuh keagungan" (QS. al-Isra/17:24).

Maksudnya adalah malaikat akan merahmati orang yang menuntut ilmu sebagaimana malaikat merahmati orang yang bersikap *tawadhu* (rendah hati) kepada kedua orang tua.

2. Malaikat membentangkan sayapnya seperti yang disebutkan dalam riwayat, bahwa para malaikat membentangkan sayapnya. Atau apabila para malaikat

melihat orang menuntut ilmu karena mengharap ridha Allah, maka malaikat akan mengembangkan sayapnya untuk melindunginya dari segala kesusahan yang dia hadapi selama menuntut ilmu. Oleh karena itu, dengan naungan para malaikat, maka jarak yang jauh terasa dekat dan dia tidak akan terkena musibah dalam perjalanan, seperti sakit, kekurangan harta, dan tersesat di jalan (Abuhu, 2015).



BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan dalam skripsi ini dapat disimpulkan bahwa terdapat sifat-sifat submodul maksimal dalam modul perkalian, yaitu:

4. Misalkan R adalah gelanggang komutatif dengan satuan, M adalah R -modul perkalian dan N adalah submodul dari M . Maka submodul maksimal memuat semua submodul sejati dari M .
5. Misalkan M adalah R -modul perkalian dengan R adalah lapangan dan N adalah submodul dari M , maka N adalah submodul maksimal jika dan hanya jika M/N adalah submodul sederhana.
6. Misalkan R adalah gelanggang Artinian dan M adalah R -modul perkalian maka setiap submodul maksimal adalah submodul prima.

4.2 Saran

Dalam penelitian ini sifat-sifat yang dibahas hanya terbatas pada submodul maksimal, harapan penulis di masa yang akan datang akan dibahas sifat-sifat submodul pada modul perkalian secara umum.

DAFTAR RUJUKAN

- Abuhu, I. 2015. Ilmu dan Keutamaan Menuntut Ilmu. (Online). (<http://catatan-ibnuabuhu.blogspot.co.id/2015/05/ilmu-dan-keutamaan-menuntut-ilmu.html>), diakses 7 Desember 2017.
- Adamson, I.T. 1998. *A Set Theory Workbook*. Boston: Birkhauer.
- Al-Qurthubi, S. 2007. *Tafsir al-Qurthubi Jilid 3*. Jakarta: Pustaka Azzam
- Arifin, S. 2008. *Modul Perkalian*. Skripsi tidak dipublikasikan. Yogyakarta: Universitas Gajah Mada
- Dummit, D.S dan Foote, R.M. 2004. *Abstract Algebra Third Edition*. New York: John Wiley and Sons, Inc.
- El-Bast, Z.A dan Smith, P.F. 1988. Multiplication Module. *Communication in Algebra*. 16 (4): 755-779.
- Fauziah, I., Bakar, N.N dan Zulakmal. 2009. Gelanggang Artin. *Jurnal Matematika UNAND*. 2 (2): 108-114.
- Gallian, J.A. 2012. *Contemporary Abstract Algebra Eighth Edition*. Boston: Cengage Learning.
- Ghalandarzadeh, Sh. Rad, P.M dan Shirinkam, S. 2008. Multiplication Modules and Cohens Theorem. *Mathematical Sciences*. 2 (3): 251-260.
- Halikin, I. 2015. *Ideal Maksimal dan Ideal Prima*. (Online). (<http://e-modul-matematika.fmipa.unej.ac.id/ModulSA2/idealprimamaxima.html>), diakses 27 April 2017.
- Hidayat, R. 2016. *Pengertian Ilmu Pengetahuan dan Kedudukan Ilmu Menurut Islam*. (Online). (<http://suteki.co.id/pengertian-ilmu-pengetahuan-dan-kedudukan-ilmu-menurut-islam.html>), diakses 7 Desember 2016.
- Irwan, S.E, Garminia, H, dan Astuti, P. 2012. Sekitar Submodul Prima dan Submodul Maksimal Atas Gelanggang Komutatif. *Seminar Nasional Matematika 2012*, 69-72.
- Raisinghania, M.D dan Aggarwal, R.S. 1980. *Modern Algebra*. New Delhi: S. Chand dan Company Ltd.
- Syahrwahid, M. 2011. *Peran Matematika*. (Online). (<http://wahidkkt.blogspot.co.id/2011/11/peran-matematika.html>), diakses 6 november 2016.

Zaid, A. 2017. *Keutamaan Orang yang Mencari Ilmu dan Dalilnya*. (Online), (<http://www.abanaonline.com/2017/03/keutamaan-orang-yang-menuntut-ilmu-dan-dalilnya.html>), diakses tanggal 26 april 2017.



RIWAYAT HIDUP



Much. Fuad Hasan, lahir di Kabupaten Malang pada tanggal 16 Januari 1994, biasa dipanggil Fuad, tinggal di Jl. Sidorejo I Desa Wandanpuro Kec. Bululawang Kab. Malang. Anak kedua dari empat bersaudara dari pasangan bapak Rokhim dan ibu Suharwati.

Pendidikan dasarnya ditempuh di SDN Wandanpuro I dan lulus pada tahun 2005, setelah itu melanjutkan pendidikan ke SMP An-Nur sekaligus mondok selama 3 tahun di Pondok Pesantren An-Nur 2 Bululawang, setelah lulus dari SMP An-Nur pada tahun 2008 dia melanjutkan pendidikan di SMK Negeri 4 Malang dengan mengambil Jurusan PsG (Persiapan Grafika) dan lulus pada tahun 2011. Dia sempat bekerja setelah lulus dari SMK di CV. Sepakat Jaya Grafika di Solo sebagai operator mesin CTP selama satu tahun. Selanjutnya pada tahun 2012 menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil Jurusan Matematika

Selama menjadi mahasiswa, dia berperan aktif pada organisasi intra kampus di Himpunan Mahasiswa Jurusan (HMJ) Matematika dan pada organisasi ekstra kampus di Pergerakan Mahasiswa Islam Indonesia (PMII) Rayon Galileo.



KEMENTRIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341) 558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Much. Fuad Hasan
NIM : 12610055
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Sifat-sifat Submodul Maksimal dalam Modul Perkalian
Pembimbing I : Dr. Abdussakir, M.Pd
Pembimbing II : Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	12 September 2016	Konsultasi Bab I	1.
2.	19 September 2016	Konsultasi Bab II	2.
3.	11 Oktober 2016	Konsultasi Kajian Agama	3.
4.	18 Oktober 2016	Konsultasi Kajian Agama	4.
5.	10 Oktober 2016	Konsultasi Bab III	5.
6.	29 Agustus 2017	Revisi Bab III	6.
7.	11 September 2017	Konsultasi Kajian Agama	7.
8.	12 September 2017	Konsultasi Kajian Agama	8.
9.	12 September 2017	Konsultasi Bab IV	9.
10.	19 September 2017	ACC Bab IV, dan V	10.
11.	19 September 2017	ACC Kajian Agama	11.
12.	2 Oktober 2017	ACC Keseluruhan	12.

Malang, 2 Oktober 2017
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001