PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINIER *FUZZY* BILANGAN TRAPESIUM MENGGUNAKAN *SINGULAR VALUE DECOMPOSITION*

SKRIPSI

OLEH
MUKHAMAD LUKMAN
NIM. 12610036

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018

PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINIER *FUZZY* BILANGAN TRAPESIUM MENGGUNAKAN *SINGULAR VALUE DECOMPOSITION*

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Mukhamad Lukman
NIM. 12610036

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018

PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINIER *FUZZY* BILANGAN TRAPESIUM MENGGUNAKAN *SINGULAR VALUE DECOMPOSITION*

SKRIPSI

Oleh
Mukhamad Lukman
NIM. 12610036

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 05 Desember 2017

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Evawati Alisah, M.Pd	Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd
NIP. 19720604 199903 2 001	NIP. 19630502 198703 1 005

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINIER *FUZZY* BILANGAN TRAPESIUM MENGGUNAKAN *SINGULAR VALUE DECOMPOSITION*

SKRIPSI

Oleh
Mukhamad Lukman
NIM. 12610036

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 22 Desember 2017

Penguji Utama	:	Dr. Abdussakir, M.Pd	....
Ketua Penguji	:	H. Wahyu H. Irawan, M.Pd	....
Sekretaris Penguji	:	Evawati Alisah, M.Pd	....
Anggota Penguji	:	Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	Mukhamad Lukman
NIM	:	12610036
Jurusan	:	Matematika
Fakultas	:	Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	:	Penyelesaian Sistem Persamaan Linier *Fuzzy* Bilangan Trapesium Menggunakan Metode *Singular Value Decomposition*

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 05 Desember 2017
Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL
A637EAEF859546259
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Mukhamad Lukman
NIM. 12610036

MOTO

Kesabaran adalah sebuah proses dari kehidupan yang lebih baik.

Dan yakinlah ada sesuatu yang menantimu selepas banyak kesabaran
(yang kau jalani), yang akan membuatmu terpana hingga
kau lupa betapa pedihnya rasa sakit.
(Ali bin Abi Thalib)

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ibunda Sumarmi meski beliau tak dapat mendampingi secara lahir dan Ayahanda Soleh yang senantiasa dengan ikhlas mendoakan, mendukung, memotivasi, dan merestui penulis dalam menuntut ilmu serta selalu memberikan teladan yang baik bagi penulis.

Terima kasih untuk kakak Nisful Laili Fitriyah yang selalu dengan ikhlas memberi semangat serta motivasi kepada penulis

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt. yang telah melimpahkan rahmat serta hidayah-Nya sehingga penulis mampu menyelesaikan skripsi dengan judul "Penyelesaian Sistem Persamaan Linier *Fuzzy* Bilangan Trapesium Menggunakan Metode *Singular Value Decomposition*". Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada nabi Muhammad Saw. yang telah menunjukkan manusia dari jalan yang gelap menuju jalan yang terang benderang yaitu agama Islam.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Abdul Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Evawati Alisah, M.Pd, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan berbagi pengalaman yang berharga kepada penulis.
5. Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd, selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan saran dan bantuan dalam penulisan skripsi ini.

6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, terutama seluruh dosen. Terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.
7. Ayah dan ibu tercinta yang telah mencurahkan kasih sayang, doa, bimbingan, dan motivasi hingga selesai skripsi ini.
8. Teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2012, yang berjuang bersama-sama untuk meraih mimpi dan terima kasih untuk kenang-kenangan indah yang dirajut bersama dalam menggapai impian.
9. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materiil.

Akhirnya penulis hanya dapat berharap, dibalik skripsi ini dapat ditemukan sesuatu yang dapat memberikan manfaat dan wawasan yang lebih luas atau bahkan hikmah bagi penulis, pembaca, dan bagi seluruh mahasiswa Jurusan Matematika.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, Desember 2017

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Lukman, Mukhamad. 2017. **Penyelesaian Sistem Persamaan Linier *Fuzzy* Bilangan Trapesium Menggunakan Metode *Singular Value Decomposition*.** Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Evawati Alisah, M.Pd (II) Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd.

Kata kunci: Sistem persamaan linier *fuzzy*, bilangan *fuzzy* trapesium, metode *singular value decomposition.*

Sistem persamaan linier *fuzzy* dapat ditulis dalam bentuk persamaan matriks $A\tilde{x} = \tilde{b}$, dengan A adalah matriks koefisien dari bilangan *fuzzy* $\tilde{x}$, $\tilde{x}$ adalah variabel bilangan *fuzzy* trapesium yang tidak diketahui dan $\tilde{b}$ adalah konstanta bilangan *fuzzy* trapesium. Permasalahan yang melibatkan sistem persamaan linier *fuzzy* adalah bagaimana menyelesaikan sistem persamaan tersebut. Salah satu metode yang dapat digunakan dalam menyelesaikan sistem persamaan linier *fuzzy* adalah *singular value decomposition*. Penelitian ini bertujuan untuk mendeskripsikan langkah-langkah penyelesaian sistem persamaan linier *fuzzy* bilangan trapesium menggunakan metode *singular value decomposition*. Dengan mengubah sistem persamaan linier *fuzzy* bilangan trapesium menjadi sistem persamaan linier biasa, kemudian memfaktorisasi A menjadi perkalian matriks uniter, matriks diagonal, dan matriks uniter. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa sistem persamaan linier *fuzzy* akan mempunyai solusi yang konsisten jika b berada dalam basis ortonormal $R(A)$ yang artinya $proy_{R(A)}b = b$ dengan $proy_{R(A)}b$ ditunjukkan oleh

$$proy_{R(A)}b = \sum_{k=1}^{r} \langle b, u_k \rangle u_k .$$

Sehingga didapatkan solusi yang konsisten dari sistem persamaan linier *fuzzy* yang ditunjukkan oleh

$$x = \sum_{k=1}^{r} \frac{\langle b, u_k \rangle}{\sigma_k} v_k .$$

Jika b tidak berada dalam basis ortonormal $R(A)$ yang artinya $proy_{R(A)}b \neq b.$ Maka didapatkan solusi tak konsisten dari sistem persamaan linier *fuzzy* yang ditunjukkan oleh

$$x_r = \sum_{k=1}^{r} \frac{\langle b, u_k \rangle}{\sigma_k} v_k .$$

Untuk penelitian selanjutnya, diharapkan untuk menggunakan sistem persamaan linier *fuzzy* selain bilangan trapesium ataupun metode lainnya.

ABSTRACT

Lukman, Mukhamad. 2017. **Solving Trapezoidal Fuzzy Linear Equation System using Singular Value Decomposition Method.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisor: (I) Evawati Alisah, M.Pd (II) Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd.

Keywords: fuzzy linear equation system, trapezodial fuzzy number, singular value decomposition method.

The system of linear fuzzy equations can be written in the form of the matrix equation $A\tilde{x} = \tilde{b}$, where A is the coefficient matrix of the fuzzy number $\tilde{x}$, $\tilde{x}$is the unknown trapezoidal fuzzy number variable and $\tilde{b}$ is the trapezoid fuzzy number constant. The problem involving a system of linear fuzzy equations is how to solve the system of equations. One method that can be used in solving systems of linear fuzzy equations is singular value decomposition. This study aims to describe the steps of solving linear equations of trapezoidal linear equation system using singular value decomposition method. By changing the system of linear equations of fuzzy trapezoidal numbers into ordinary linear equations systems, then the A factorization becomes the multiplication of the unitary matrix, the diagonal matrix and the unitary matrix. The results of this study indicate that the system of linear fuzzy equations will have a consistent solution if b is in the orthonormal basis $R(A)$ has mean $proy_{R(A)}b = b$ with $proy_{R(A)}b$ which is indicated by

$$proy_{R(A)}b = \sum_{k=1}^{r} \langle b, u_k \rangle u_k .$$

Thus, a consistent solution of the linear fuzzy equation system is shown

$$x = \sum_{k=1}^{r} \frac{\langle b, u_k \rangle}{\sigma_k} v_k .$$

If b is not in an orthonormal basis $R(A)$ which means $proy_{R(A)}b \neq b$. Then we find an inconsistent solution of the fuzzy linear equation system shown by

$$x_r = \sum_{k=1}^{r} \frac{\langle b, u_k \rangle}{\sigma_k} v_k .$$

For next research, it is expected to use another fuzzy linear equation system in addition to trapezoidal fuzzy number or other methods.

ملخص

لقمان، محمد. ٢٠١٧. تحليل نظام معادلة الخطية *fuzzy* عدد المنحرف بطريقة *Singular Value Decomposition*. البحث الجامعي. الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج.

المشرف: (١) افاوتي اليشه، الماجستير

(٢) د.ح. إمام سوجروو، الماجستير.

الكلمات المفتاحية: نظام المعادلة الخطية *fuzzy*، عدد *fuzzy* المنحرف، طريقة *singular value decomposition*.

نظام معادلة الخطية *fuzzy* يكتب في المنهج معادلة قلب $Ax = b$ مع A هو قالب درجة من عدد *fuzzy* x، x هو متغير عدد *fuzzy* المنحرف. أسئلة من نظام معادلة الخطية *fuzzy* هو كيف تحليل نظام معادلته. إحد من الطريقة في *singular value decomposition*. أهداف البحث هو خطوات تحليل نظام معادلة الخطقة *fuzzy* عدد المنحرف بطريقة *singular value decomposition*. تغير نظام معادلة الخطية *fuzzy* عدد المنحرف يكون نظام معادلة الخط العادة، ثم يسبب A أن يكون ضربا الخط *unitary*، الخط قطري و الخط *unitary*. نتائج البحث يعني نظام معادلة الخطية *fuzzy* عندك حلول الثبوت إذا b في القاعدة $R(A)$ *orthonormal* بمعنى $proy_{R(A)}b = b$ مع $proy_{R(A)}b$ يلي:

$$proy_{R(A)}b = \sum_{k=1}^{r} \langle b, u_k \rangle u_k.$$

ثم حلول الثبوت من يعني نظام معادلة الخط فوزي *fuzzy* كما يلي:

$$x = \sum_{k=1}^{r} \frac{\langle b, u_k \rangle}{\sigma_k} v_k.$$

إذاكان b لا يكون في القاعدة $R(A)$ *orthonormal* بمعنى $proy_{R(A)}b \neq b$ فنتائج حلول ليس ثابتا من نظام معادلة الخط *(Fuzzy)* كما يلي:

$$x_r = \sum_{k=1}^{r} \frac{\langle b, u_k \rangle}{\sigma_k} v_k$$

لبحث الأتي لإستخدام نظام معادلة الخطية *fuzzy* سود نظام معادلة الخط فوزي أو طريقه افرد.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan salah satu cabang ilmu yang mempunyai bahasa dan aturan yang terdefinisi dengan baik, penalaran yang jelas, dan struktur yang kuat. Salah satu cabang ilmu matematika yang digunakan sebagai perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi adalah logika *fuzzy* (Martono, 1999).

Logika *fuzzy* merupakan perluasan dari logika tegas yang mempunyai dua nilai kebenaran, yakni benar atau salah. Jika nilai derajat kebenaran suatu pernyataan logika adalah nol, berarti pernyataan tersebut salah. Dan jika nilai derajat kebenaran suatu pernyataan logika adalah satu, maka pernyataan tersebut benar. Namun, jika nilai derajat kebenaran suatu pernyataan logika bernilai antara nol dan satu, maka pernyataan logika tersebut tidak mutlak benar melainkan nilai kebenarannya samar-samar sehingga logika *fuzzy* adalah logika dengan tak hingga banyak nilai kebenaran yang dinyatakan dalam interval $[0, 1]$ (Wati, 2004).

Al-Quran menjelaskan bahwa terdapat perkara yang jelas dan samar-samar yang terkandung dalam surat Ali Imran/3:7:

هُوَ ٱلَّذِىٓ أَنزَلَ عَلَيۡكَ ٱلۡكِتَٰبَ مِنۡهُ ءَايَٰتٞ مُّحۡكَمَٰتٌ هُنَّ أُمُّ ٱلۡكِتَٰبِ وَأُخَرُ مُتَشَٰبِهَٰتٞۖ فَأَمَّا ٱلَّذِينَ فِى قُلُوبِهِمۡ زَيۡغٞ فَيَتَّبِعُونَ مَا تَشَٰبَهَ مِنۡهُ ٱبۡتِغَآءَ ٱلۡفِتۡنَةِ وَٱبۡتِغَآءَ تَأۡوِيلِهِۦۗ وَمَا يَعۡلَمُ تَأۡوِيلَهُۥٓ إِلَّا ٱللَّهُۗ وَٱلرَّٰسِخُونَ فِى ٱلۡعِلۡمِ يَقُولُونَ ءَامَنَّا بِهِۦ كُلّٞ مِّنۡ عِندِ رَبِّنَاۗ وَمَا يَذَّكَّرُ إِلَّآ أُوْلُواْ ٱلۡأَلۡبَٰبِ ٧

"Dia-lah yang menurunkan al-kitab (al-Quran) kepada kamu. Di antara (isi) nya ada ayat-ayat yang muhkamat, itulah pokok-pokok isi al-Quran dan yang lain (ayat-ayat) mutasyabihat. Adapun orang-orang yang dalam hatinya condong

kepada kesesatan, maka mereka mengikuti sebagian ayat-ayat yang mutasyabihat dari padanya untuk menimbulkan fitnah untuk mencari-cari ta'wilnya, padahal tidak ada yang mengetahui ta'wilnya melainkan Allah. Dan orang-orang yang mendalam ilmunya berkata: "Kami beriman kepada ayat-ayat yang mutasyabihat, semuanya itu dari sisi Tuhan kami." Dan tidak dapat mengambil pelajaran (dari padanya) melainkan orang-orang yang berakal" (QS. Ali Imran/3:7).

Jalaluddin (2010) menafsirkan ayat tersebut bahwa (Dialah yang menurunkan kepadamu al-Quran, di antara isinya ada ayat-ayat yang *muhkamat*) jelas maksud dan tujuannya (itulah dia pokok-pokok al-Quran) yakni yang menjadi pegangan dalam menetapkan (sedangkan yang lainnya *mutasyabihat*) tidak dimengerti secara jelas maksudnya, misalnya permulaan-permulaan surat. Semuanya disebut sebagai *'muhkam'* seperti dalam firman-Nya *'uhkimat aayaatuh'* dengan arti tak ada cacat atau celanya, dan *'mutasyabiha'* pada firman-Nya, *'Kitaaban mutasyaabiha,'* dengan makna bahwa sebagian menyamai lainnya dalam keindahan dan kebenaran. (Adapun orang-orang yang dalam hatinya ada kecenderungan pada kesesatan) menyeleweng dari kebenaran, (maka mereka mengikuti ayat-ayat *mutasyabihat* untuk membangkitkan fitnah) di kalangan orang-orang bodoh dengan menjerumuskan mereka ke dalam hal-hal yang *syubhat* dan kabur pengertiannya (dan demi untuk mencari-cari *ta'wil*nya) tafsirnya (padahal tidak ada yang tahu *ta'wil*) tafsirnya (kecuali Allah) sendiri-Nya (dan orang-orang yang mendalam) luas lagi kokoh (ilmunya) menjadi *mubtada*, sedangkan *khabar*nya: (Berkata, "Kami beriman kepada ayat-ayat *mutasyabihat*) bahwa ia dari Allah, sedangkan kami tidak tahu akan maksudnya, (semuanya itu) baik yang *muhkam* maupun yang *mutasyabih* (dari sisi Tuhan kami," dan tidak ada yang mengambil pelajaran) '*Ta*' yang pada asalnya terdapat pada '*dzal*' di*idgham*kan pada *dzal* itu hingga berbunyi *'yadzdzakkaru'* (kecuali orang-orang yang berakal) yang mau berpikir.

Logika *fuzzy* dapat digunakan dalam bidang teori kontrol, teori keputusan, dan beberapa bagian dalam ilmu sains. Bidang-bidang tersebut memerlukan sistem persamaan berbasis teori *fuzzy* sebagai model matematikanya. Friedman dkk (1998) merumuskan lebih tegas mengenai solusi sistem linier *fuzzy*, khususnya daerah fisibel dari permasalahan sistem linier tersebut.

Seiring berkembangnya ilmu matematika sistem persamaan linier tidak hanya digunakan dalam bilangan riil saja, namun dapat digunakan dalam bilangan *fuzzy*. Penyelesaian sistem persamaan linier dapat menggunakan metode langsung dan metode tak langsung. Bentuk sistem persamaan linier *fuzzy* sama seperti persamaan linier biasa, perbedaannya terletak pada unsur-unsurnya. Unsur dalam sistem persamaan linier *fuzzy* merupakan bentuk parameter yang berbeda pada interval tertentu (Marzuki & Herawati, 2015).

Sistem persamaan linier *fuzzy* dapat ditulis dalam bentuk $A\tilde{x} = \tilde{y}$ dengan A adalah matriks koefisien dari x, $\tilde{x}$ adalah variabel dengan bilangan *fuzzy* trapesium, dan $\tilde{y}$ adalah konstanta dengan bilangan *fuzzy* trapesium. Banyak metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linier *fuzzy*, salah satunya adalah metode *singular value decomposition*. Dengan menggunakan metode *singular value decomposition* solusi dari sistem persamaan linier selalu dapat dicari, meskipun matriks koefisien yang terbentuk bukanlah matriks persegi maupun matriks yang tidak mempunyai invers. Kelebihan lain dari metode ini adalah solusi dari sistem persamaan linier tetap dapat dicari, meskipun sistem persamaan linier tersebut tidak mempunyai solusi. Dalam hal ini solusi yang diperoleh adalah solusi pendekatan terbaik (Ratnasari & Irdam, 2010).

Afidatus Sholichah (2016) dan Ratna Muffidah (2016) telah melakukan penelitian skripsi tentang penyelesaian sistem persamaan *fuzzy* menggunakan aturan Cramer. Penelitian Afidatus Sholichah membahas tentang penyelesaian sistem persamaan linier *fuzzy* bilangan segitiga menggunakan matriks berordo $n \times n$. Sedangkan penelitian Ratna Muffidah membahas tentang penyelesaian sistem persamaan linier *fuzzy* bilangan trapesium menggunakan matriks berordo $n \times n$.

Berdasarkan uraian yang telah dikemukakan, peneliti mengambil tema bagaimana menyelesaikan sistem persamaan linier *fuzzy* bilangan trapesium menggunakan metode *singular value decomposition*, dengan judul "Penyelesaian Sistem Persamaan Linier *Fuzzy* Bilangan Trapesium Menggunakan Metode *Singular Value Decomposition*" .

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, maka rumusan masalah dalam penelitian ini sebagai berikut:

1. Bagaimana penyelesaian sistem persamaan linier *fuzzy* bilangan trapesium menggunakan metode *singular value decomposition*?
2. Bagaimana kajian agama Islam tentang konsep *fuzzy* dalam al-Quran?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, maka tujuan yang akan dicapai dalam penelitan ini sebagai berikut:

1. Mengetahui langkah-langkah dan solusi dalam penyelesaian sistem persamaan linier *fuzzy* bilangan trapesium menggunakan metode *singular value decomposition*.
2. Mengetahui kajian agama Islam tentang konsep *fuzzy* dalam al-Quran.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang didapat dari pengerjaan penelitian ini sebagai berikut:

1. Bagi Peneliti

Sebagai tambahan materi dalam melakukan penelitian dan penyusunan karya ilmiah dalam bentuk penelitian, serta media untuk mengaplikasikan ilmu matematika yang telah diterima dalam bidang keilmuannya.

2. Bagi Lembaga

Sebagai tambahan bahan kepustakaan untuk dapat dijadikan sebagai sarana pengembangan wawasan keilmuan terutama bidang matematika.

3. Bagi pembaca

Sebagai bahan pembelajaran dan pengetahuan mengenai sistem persamaan linier *fuzzy* dan sebagai titik awal pembahasan yang dapat dilanjutkan atau dikembangkan.

1.5 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kepustakaan yaitu dengan mengumpulkan data dan informasi dari berbagai sumber seperti buku dan jurnal. Dalam prosesnya peneliti menggunakan beberapa literatur yang berkaitan dengan penyelesaian sistem persamaan linier *fuzzy* menggunakan *singular value decomposition.*

Langkah-langkah yang digunakan oleh peneliti dalam menyelesaikan sistem persamaan linier *fuzzy* menggunakan *singular value decomposition* sebagai berikut:

1. Mendeskripsikan bentuk umum dari sistem persamaan linier *fuzzy* bilangan trapesium dengan m persamaan dan n variabel.
2. Mengubah sistem persamaan linier *fuzzy* bilangan trapesium $A\tilde{x} = \tilde{y}$ menjadi sistem persamaan linier sehingga didapatkan $Ax^L = b^L$, $Ax^U = b^U$, $Ax^\alpha = b^\alpha$, dan $Ax^\beta = b^\beta$.
3. Mengubah matriks A menjadi perkalian tiga unsur matriks, sehingga matriks $A = U\Sigma V^T$.
   a. Matriks Σ adalah matriks diagonal yang berordo $n \times n$ yang unsur-unsur diagonal utamanya adalah nilai-nilai singular dari matriks A. Matriks Σ mempunyai bentuk

$$\sum = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \end{bmatrix}.$$

b. Matriks V adalah matriks uniter yang berordo $n \times n$. Vektor-vektor kolom dari matriks V merupakan himpunan ortonormal yang berasal dari vektor-vektor eigen dari $A^T A$ yang dinormalisasikan sebagai berikut:

$$v_i = \frac{1}{\|x_i\|} x_i.$$

c. Matriks U adalah matriks uniter berordo $n \times n$. Vektor-vektor kolom dari matriks U merupakan himpunan ortonormal yang didefinisikan sebagai berikut:

$$u_i = \frac{1}{\|\sigma_i\|} Av_i.$$

4. Menentukan basis ortonormal $R(A)$, $N(A^T)$, $R(A^T)$, dan $N(A)$.
5. Menentukan solusi dari sistem persamaan linier dengan mengetahui apakah b berada di dalam $R(A)$ atau tidak di dalam $R(A)$. Sehingga akan diuji apakah b sama dengan proyeksi b pada $R(A)$ yang diberikan oleh persamaan di bawah ini:

$$proy_{R(A)}b = \sum_{k=1}^{r} \langle b, u_k \rangle u_k.$$

a. Jika $b \in R(A)$, maka $b = proy_{R(A)}b$. Sehingga dapat ditentukan solusi dari sistem persamaan liniernya yang diberikan oleh persamaan berikut:

$$x = \sum_{k=1}^{r} \frac{\langle b, u_k \rangle}{\sigma_k} v_k.$$

b. Jika $b \notin R(A)$, maka $b \neq proy_{R(A)}b$. Sehingga dapat ditentukan solusi dari sistem persamaan liniernya yang diberikan oleh persamaan berikut:

$$x_r = \sum_{k=1}^{r} \frac{\langle b, u_k \rangle}{\sigma_k} v_k.$$

6. Mensubstitusikan hasil dari penyelesaian empat sistem persamaan linier ke sistem persamaan linier *fuzzy*.

1.6 Sistematika Penulisan

Adapun sistematika penulisan dalam penelitian sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pendahuluan berisi tentang latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Kajian pustaka menjelaskan tentang teori yang dikaji, yaitu memuat: himpunan *fuzzy*, fungsi keanggotaan, bilangan *fuzzy*, sistem persamaan linier, sistem persamaan linier *fuzzy*, matriks, operasi pada matriks, macam-macam matriks, rank dan basis, norma, nilai eigen dan vektor eigen, ortogonalitas, ortonormal, metode *singular value decomposition*, menyelesaikan sistem persamaan linier menggunakan *singular value decomposition*, dan konsep *fuzzy* dalam al-Quran.

Bab III Pembahasan

Pembahasan berisi penjelasan tentang penyelesaian sistem persamaan linier *fuzzy* bilangan trapesium menggunakan metode *singular value decomposition*, serta kajian agama tentang konsep *fuzzy* dalam pandangan Islam.

Bab IV Penutup

Penutup berisi kesimpulan dari pembahasan yang telah dilakukan pada seluruh kajian dan beberapa saran yang berkaitan dengan hasil penelitian.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Himpunan *Fuzzy*

Zadeh mengaitkan himpunan dengan fungsi yang menyatakan derajat kesesuaian unsur-unsur dalam semestanya dengan konsep yang merupakan syarat keanggotaan himpunan untuk mengatasi permasalahan himpunan dengan batas yang tidak tegas. Fungsi itu disebut fungsi keanggotaan dan nilai fungsi itu disebut derajat keanggotaan suatu unsur dalam himpunan yang disebut himpunan *fuzzy*. Derajat keanggotaan dinyatakan dengan suatu bilangan riil dalam interval tertutup $[0, 1]$. Fungsi keanggotaan himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ pada himpunan semesta X, dinotasikan dengan $\mu_{\tilde{A}}$, yaitu:

$$\mu_{\tilde{A}} : X \rightarrow [0,\ 1] \text{ (Susilo, 2006).} \tag{2.1}$$

Secara matematis suatu himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ dalam semesta X dapat dinyatakan sebagai himpunan pasangan terurut

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | x \in X\} \tag{2.2}$$

dengan $\mu_{\tilde{A}}$ adalah fungsi keanggotaan dari himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ yang merupakan suatu pemetaan dari himpunan semesta X dalam interval $[0, 1]$. Apabila semesta X adalah himpunan yang kontinu, maka himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ dinyatakan dengan

$$\tilde{A} = \int_{x \in X} \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x} \tag{2.3}$$

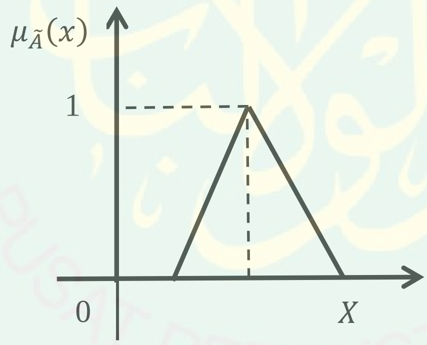
dengan lambang $\int$ bukan lambang integral seperti yang dikenalkan pada kalkulus, tetapi melambangkan keseluruhan unsur-unsur $x \in X$ bersama dengan derajat keanggotaannya dalam himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$. Apabila semesta X adalah himpunan yang diskret, maka himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ dinyatakan dengan

$$\tilde{A} = \sum_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x) / x. \tag{2.4}$$

Lambang Σ tidak melambangkan operasi penjumlahan seperti yang dikenal dalam aritmetika, tetapi melambangkan keseluruhan unsur-unsur $x \in X$ bersama dengan derajat keanggotaannya dalam himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ (Susilo, 2006).

Definisi 2.1

Misalkan $\tilde{A}$ adalah himpunan *fuzzy* pada X, maka himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ disebut himpunan *fuzzy* normal jika fungsi keanggotaannya mempunyai paling sedikit satu unsur di X dengan derajat keanggotaannya sama dengan 1 (Sivanandam dkk, 2007).



Gambar 2.1 Himpunan *Fuzzy* Normal

Definisi 2.2

Misalkan $\tilde{A}$ adalah himpunan *fuzzy* pada X. *Support* atau pendukung dari $\tilde{A}$ adalah himpunan tegas yang memuat semua anggota $\tilde{A}$ yang mempunyai derajat keanggotaan tidak nol (Klir & Yuan, 1995).

Contoh:

Dalam semesta $X = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \}$ himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ dengan derajat keanggotaan masing-masing

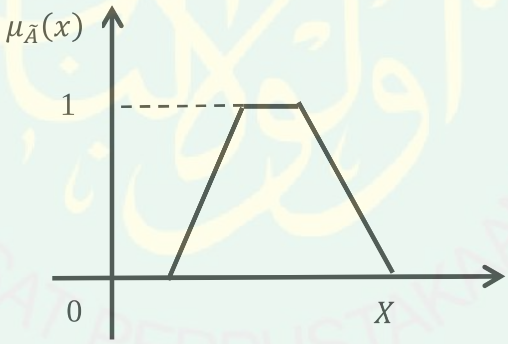
$$\tilde{A} = \sum_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x)\,/x \ = 0/-5 + 0{,}1/-4 + 0{,}3/-3 + 0{,}5/-2 + 0{,}7/-1 + 1/0$$

$$+0{,}7/1 + 0{,}5/2 + 0{,}3/3 + 0{,}1/4 + 0/5.$$

Maka *support* dari $\tilde{A}$ adalah $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.

Definisi 2.3

Misalkan $\tilde{A}$ adalah himpunan *fuzzy* pada X. Himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ disebut konveks jika fungsi keanggotaannya monoton naik atau monoton turun, atau monoton naik dan turun pada saat nilai unsur pada himpunan semesta semakin naik (Sivanandam dkk, 2007).



Gambar 2.2 Himpunan *Fuzzy* Konveks

Definisi 2.4

Misalkan $\tilde{A}$ adalah himpunan *fuzzy* pada X. α-*cut* pada $\tilde{A}$ adalah himpunan tegas ${}^{\alpha}\tilde{A}$ yang didefinisikan dengan

$${}^{\alpha}\tilde{A} = \{x | \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}, \alpha \in [0, 1],$$

strong α-*cut* pada $\tilde{A}$ adalah himpunan tegas ${}^{\alpha+}\tilde{A}$ yang didefinisikan dengan

$${}^{\alpha+}\tilde{A} = \{x | \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\}, \alpha \in [0, 1] \text{ (Klir \& Yuan, 1995).}$$

Contoh:

Dalam semesta $X = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5,\}$ himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ dengan derajat keanggotaan masing-masing

$$\tilde{A} = \sum_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x)\,/x \ = 0{,}1/{-4} + 0{,}3/{-3} + 0{,}5/{-2} + 0{,}7/{-1} + 1/0 +$$

$$0{,}7/1 + 0{,}5/2 + 0{,}3/3 + 0{,}1/4.$$

Maka 0,5-*cut* dari $\tilde{A}$ adalah ${}^{0{,}5}\tilde{A} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, sedangkan *strong* 0,5-*cut* pada $\tilde{A}$ adalah ${}^{0{,}5+}\tilde{A} = \{-1, 0, 1\}$.

Definisi 2.5

Misalkan $\tilde{A}$ adalah himpunan *fuzzy* pada X. *Core* dari $\tilde{A}$ yang ditulis dengan Teras$(\tilde{A})$ adalah himpunan tegas yang memuat semua anggota $\tilde{A}$ yang mempunyai derajat keanggotaan satu (Sivanandam dkk, 2007).

Contoh:

Dalam semesta $X = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ dengan derajat keanggotaan masing-masing

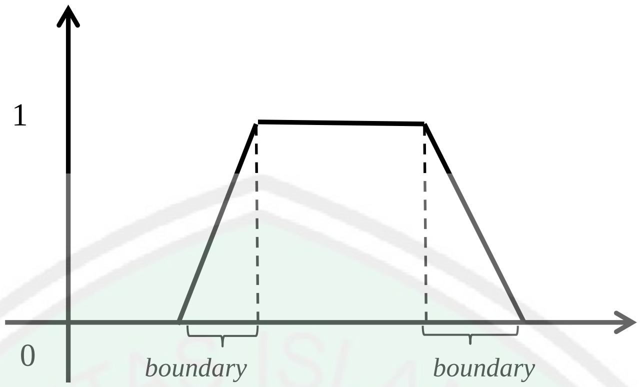
$$\tilde{A} = \sum_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x)\,/x \ = 0{,}1/{-4} + 0{,}3/{-3} + 0{,}5/{-2} + 0{,}7/{-1} + 1/0 +$$

$$0{,}7/1 + 0{,}5/2 + 0{,}3/3 + 0{,}1/4.$$

Maka dapat diketahui bahwa Teras$\left(\tilde{A}\right) = \{0\}$.

Definisi 2.6

Misalkan $\tilde{A}$ adalah himpunan *fuzzy* pada X. *Boundary* dari $\tilde{A}$ adalah himpunan tegas yang memuat semua anggota $\tilde{A}$ yang mempunyai derajat keanggotaan antara nol dan satu (Sivanandam dkk, 2007).



Gambar 2.3 *Boundary* dari $\tilde{A}$

2.2 Fungsi Keanggotaan

Setiap himpunan *fuzzy* dapat dinyatakan dengan suatu fungsi keanggotaan. Ada beberapa cara untuk menyatakan himpunan *fuzzy* dengan fungsi keanggotaannya, untuk semesta hingga diskret menggunakan cara daftar, yaitu dengan mendaftar anggota semesta bersama dengan derajat keanggotaannya. Untuk semesta tak hingga kontinu, salah satu caranya adalah cara analitik, yaitu mempresentasikan fungsi keanggotaan himpunan *fuzzy* yang bersangkutan dalam suatu formula matematis yang dapat disajikan dalam bentuk grafik (Susilo, 2006).

2.3 Bilangan *Fuzzy*

Misalkan $\tilde{A}$ adalah himpunan *fuzzy* pada bilangan riil. $\tilde{A}$ disebut bilangan *fuzzy* jika memenuhi syarat-syarat sebagai berikut:

1. $\tilde{A}$ merupakan himpunan *fuzzy* normal.
2. $\tilde{A}_\alpha$ tertutup pada interval untuk semua $\alpha \in [0, 1]$.
3. *Support* dari $\tilde{A}$ merupakan himpunan terbatas (Klir & Yuan, 1995).

Syarat bahwa $\tilde{A}_\alpha$ merupakan interval tertutup untuk semua $\alpha \in [0,1]$ sama dengan syarat bahwa $\tilde{A}$ merupakan bilangan konveks. Bilangan *fuzzy* yang paling banyak diaplikasikan adalah bilangan *fuzzy* dengan fungsi keanggotaan segitiga, yang disebut dengan bilangan *fuzzy* segitiga dan bilangan *fuzzy* dengan fungsi keanggotaan trapesium, yang disebut bilangan *fuzzy* trapesium. Kedua jenis bilangan *fuzzy* ini memenuhi keempat sifat bilangan *fuzzy* (Susilo, 2006).

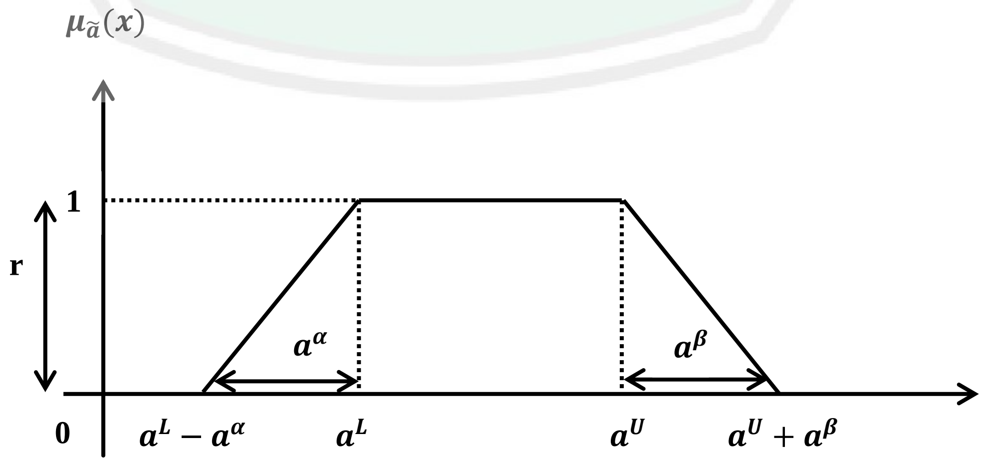
2.3.1 Bilangan *Fuzzy* Trapesium

Definisi 2.7

Bilangan *fuzzy* $\tilde{a} = (a^L, a^U, a^\alpha, a^\beta)$ dikatakan bilangan *fuzzy* trapesium dengan interval $[a^L, a^U]$ lebar sebelah kiri a^α dan kanan a^β, jika fungsi keanggotaan bilangan *fuzzy* sebagai berikut:

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{a^L - x}{a^\alpha} & a^L - a^\alpha \le x \le a^L \qquad a^\alpha > 0 \\ 1 & \alpha^L \le x \le \mathrm{a}^U \\ 1 - \dfrac{x - a^U}{a^\beta} & a^U \le x \le a^U + a^\beta \qquad a^\beta > 0 \\ 0 & \text{untuk lainnya (Kumar dkk, 2010).} \end{cases} \tag{2.5}$$

Bilangan *fuzzy* trapesium $\tilde{a} = (a^L, a^U, a^\alpha, a^\beta)$ dengan parameter r ditunjukkan pada Gambar 2.4.



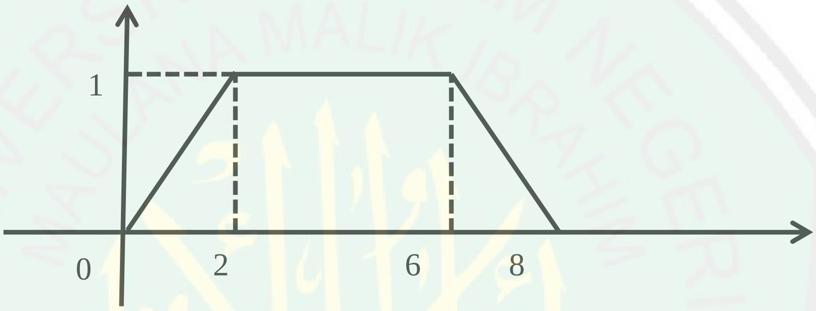
Gambar 2.4 Bilangan *Fuzzy* Trapesium $\tilde{a} = (a^L, a^U, a^\alpha, a^\beta)$ dengan Parameter r

Definisi 2.8

Bilangan *fuzzy* trapesium $\tilde{a} = (a^L, a^U, a^\alpha, a^\beta)$ dapat dikatakan bilangan *fuzzy* trapesium positif dituliskan $\tilde{a} > 0$, jika dan hanya jika $a^L - a^\alpha \geq 0$ (Kumar dkk, 2010).

Contoh:

Jika diberikan bilangan *fuzzy* trapesium $(2, 6, 2, 2)$ yang ditunjukkan oleh gambar berikut



Gambar 2.5 Bilangan *Fuzzy* Trapesium $(2, 6, 2, 2)$

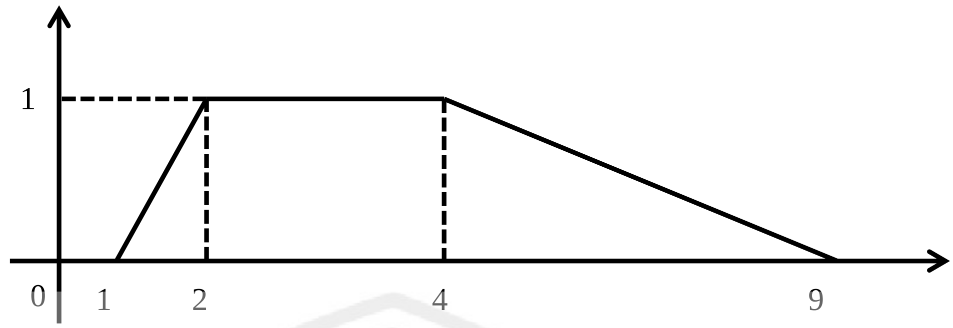
Dapat diketahui bahwa $(2, 6, 2, 2)$ adalah bilangan *fuzzy* trapesium positif karena $2 - 2 \geq 0$.

Definisi 2.9

Dua bilangan *fuzzy* trapesium $\tilde{a} = \left(a^L, a^U, a^\alpha, a^\beta\right)$ dan $\tilde{b} = \left(b^L,\ b^U,\ b^\alpha,\ b^\beta\right)$ dapat dikatakan sama, jika dan hanya jika $a^L = b^L$, $a^U = b^U$, $b^\alpha = a^\alpha$, dan $a^\beta = b^\beta$ (Kumar dkk, 2010).

Contoh:

Jika diberikan bilangan *fuzzy* trapesium $(2, 4, 1, 5)$ dan $(2, 4, 1, 5)$ dikatakan sama karena $2 = 2$, $4 = 4$, $1 = 1$, dan $5 = 5$.



Gambar 2.6 Bilangan *Fuzzy* Trapesium $(2, 4, 1, 5)$

Definisi 2.10

Jika diberikan dua bilangan *fuzzy* trapesium $\tilde{a} = (a^L, a^U, a^\alpha, a^\beta)$, $\tilde{b} = (b^L, b^U, b^\alpha, b^\beta)$, dan suatu skalar λ. Maka akan berlaku rumus sebagai berikut:

1. Penjumlahan

$$\tilde{a} \oplus \tilde{b} = (a^L + b^L, a^U + b^U, \alpha^\alpha + b^\alpha, a^\beta + b^\beta).$$

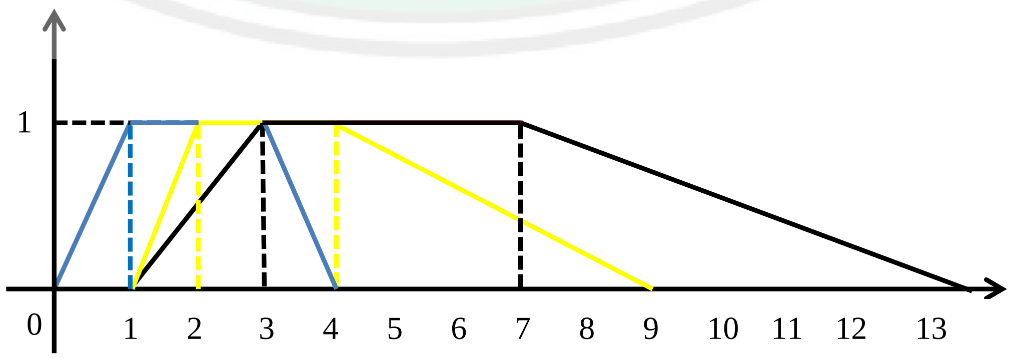
2. Perkalian

Jika $\tilde{a} = (a^L, a^U, a^\alpha, a^\beta)$ dan λ adalah skalar. Maka:

$$\lambda \otimes \tilde{a} = \begin{cases} \lambda a^U,\ \lambda a^L,\ \lambda a^\alpha,\ \lambda a^\beta & \lambda \geq 0 \\ -\lambda a^L,\ -\lambda a^U,\ \lambda a^\beta,\ \lambda a^\alpha & \lambda < 0 \end{cases}$$ (Kumar dkk, 2010).

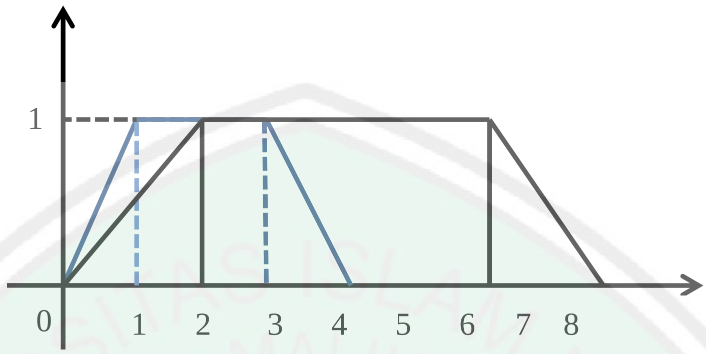
Contoh:

1. Diberikan bilangan *fuzzy* trapesium $(1, 3, 1, 1)$ dan $(2, 4, 1, 5)$, maka $(1, 3, 1, 1) \oplus (2, 4, 1, 5) = (1 + 2, 3 + 4, 1 + 1,\ 1 + 5) = (3, 7, 2, 6)$.



Gambar 2.7 Penjumlahan Bilangan *Fuzzy* Trapesium $(1, 3, 1, 1) \oplus (2, 4, 1, 5)$

2. Diberikan bilangan *fuzzy* trapesium $(1, 3, 1, 1)$ dan skalar $\lambda = 2$ maka $(1, 3, 1, 1) \otimes 2 = (2, 6, 2, 2)$.



Gambar 2.8 Perkalian Bilangan *Fuzzy* Trapesium dengan Skalar $(1, 3, 1, 1) \otimes 2$

2.4 Sistem Persamaan Linier

Secara umum persamaan linier didefinisikan dengan n variabel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sebagai persamaan yang dapat dinyatakan dalam bentuk

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b, \tag{2.6}$$

dengan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dan b merupakan konstanta riil. Variabel-variabel dalam persamaan linier disebut sebagai faktor-faktor yang tidak diketahui (Anton & Rorres, 2004).

Contoh:

$$2x - y = 5,\ 7x + 2y - 5z = 10, \text{ dan } 2x_1 - 1x_2 + 4x_3 = 9\ .$$

Suatu sistem sebarang dari m persamaan linier dengan n faktor yang tidak diketahui dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}, \tag{2.7}$$

dengan $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah faktor yang tidak diketahui, a dan b merupakan konstanta bilangan riil (Anton & Rorres, 2004).

Tidak semua sistem persamaan linier mempunyai penyelesaian. Suatu sistem persamaan yang tidak mempunyai penyelesaian dinamakan tidak konsisten, dan jika terdapat sedikitnya satu penyelesaian, maka sistem tersebut dinamakan konsisten. Sehingga sistem persamaan linier dapat mempunyai solusi tunggal dan penyelesaian tidak tunggal (Lipson, 2006).

2.5 Sistem Persamaan Linier *Fuzzy*

Sistem persamaan linier *fuzzy* adalah himpunan berhingga dari persamaaan-persamaan linier *fuzzy* dalam variabel $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$ adalah bilangan *fuzzy* dan konstantanya merupakan bilangan *fuzzy* yang dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\tilde{x}_1 & + & a_{12}\tilde{x}_2 & + & \cdots & + & a_{1n}\tilde{x}_n & = & \tilde{b}_1 \\ a_{21}\tilde{x}_1 & + & a_{22}\tilde{x}_2 & + & \cdots & + & a_{2n}\tilde{x}_n & = & \tilde{b}_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\tilde{x}_1 & + & a_{m2}\tilde{x}_2 & + & \cdots & + & a_{mn}\tilde{x}_n & = & \tilde{b}_m \end{array}, \tag{2.8}$$

dengan $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$ adalah variabel dengan bilangan *fuzzy* trapesium, $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_m$ adalah konstanta dengan bilangan *fuzzy* trapesium, dan $A = (a_{ij})$ adalah koefisien dari variabel berupa bilangan riil untuk $1 \le i \le m, 1 \le j \le n$ (Nasseri & Gholami, 2011).

Definisi 2.11

Suatu vektor bilangan *fuzzy* trapesium $\tilde{x} = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n]^T$ dengan $\tilde{x}_i = \left(x_i^L, x_i^U, x_i^\alpha, x_i^\beta\right)$, untuk $1 \leq i \leq n$ disebut selesaian dari sistem persamaan linier *fuzzy* trapesium jika memenuhi persamaan berikut:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{x}_j = \tilde{y}_i \text{ (Nasseri \& Gholami, 2011).} \tag{2.9}$$

Contoh:

Diketahui persamaan *fuzzy* $2\tilde{x} = (4, 8, 2, 2)$. Misalkan bilangan *fuzzy* $\tilde{x} = (x^L, x^U, x^\alpha, x^\beta)$, sehingga menggunakan Definisi 2.10 didapatkan:

$$\begin{gathered} 2\left(x^L, x^U, x^\alpha, x^\beta\right) = (4,\ 8,\ 2,\ 2) \\ \left(2x^L, 2x^U, 2x^\alpha, 2x^\beta\right) = (4,\ 8,\ 2,\ 2). \end{gathered} \tag{2.10}$$

Maka dari Definisi 2.9 didapatkan $2x^L = 4$, $2x^U = 8$, $2x^\alpha = 2$, dan $2x^\beta = 2$. Sehingga penyelesaian persamaan *fuzzy* tersebut adalah $\tilde{x} = (2, 4, 1, 1)$.

2.6 Matriks

Definisi 2.12

Suatu matriks adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut disebut unsur matriks (Anton & Rorres, 2004).

Contoh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}. \tag{2.11}$$

Ukuran suatu matriks dinyatakan dalam jumlah baris dan kolom yang dimilikinya. Sebagai contoh, pada persamaan (2.11) memiliki tiga baris dan dua kolom, sehingga ukuran matriksnya adalah 3 kali 2 yang dituliskan 3×2. Suatu matriks yang hanya terdiri dari satu kolom disebut matriks kolom (vektor kolom) dan suatu matriks yang hanya terdiri dari satu baris disebut matriks baris (vektor baris) (Anton & Rorres, 2004).

Matriks umum $m \times n$ dituliskan sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}. \tag{2.12}$$

Untuk menyingkat penulisan persamaan (2.12), maka dapat dituliskan $A = (a_{ij})$. Dengan cara yang serupa, matriks B dituliskan sebagai (b_{ij}), matriks C dituliskan sebagai (c_{ij}), dan seterusnya (Leon, 2001).

2.7 Operasi pada Matriks

2.7.1 Penjumlahan Matriks

Dua matriks dengan ordo yang sama, dapat dijumlahkan dengan menjumlahkan unsur-unsur yang seletak.

Definisi 2.13

Jika matriks $A = (a_{ij})$ dan matriks $B = (b_{ij})$ keduanya adalah matriks $m \times n$, maka jumlah $A + B$ adalah matriks $m \times n$ yang unsur ke-ij adalah $a_{ij} + b_{ij}$ untuk setiap pasang $(i,\ j)$ (Leon, 2001).

Contoh:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

2.7.2 Perkalian Skalar dengan Matriks

Jika A suatu matriks dan α suatu skalar, maka αA adalah matriks yang terbentuk oleh perkalian masing-masing unsur dari matriks A dengan α.

Definisi 2.14

Jika A suatu matriks $m \times n$ dan α suatu skalar, maka αA adalah matriks $m \times n$ yang unsur ke-ijnya adalah αa_{ij} (Leon, 2001).

Contoh:

Jika diberikan

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

maka,

$$3A = \begin{bmatrix} 12 & 24 & 6 \\ 18 & 24 & 30 \end{bmatrix}.$$

2.7.3 Perkalian Matriks dengan Matriks

Perkalian matriks A dengan matriks B dapat dioperasikan, jika banyaknya kolom dari mariks A sama dengan banyaknya baris matriks B.

Definisi 2.15

Jika $A = (a_{ij})$ adalah matriks $m \times n$ dan $B = (b_{ij})$ adalah matriks $n \times r$, maka hasil kali $AB = C = (c_{ij})$ adalah matriks $m \times r$ yang unsur-unsurnya didefinisikan sebagai berikut:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \text{ (Leon, 2001).} \tag{2.13}$$

Contoh:

Jika diberikan persamaan matriks A dan B sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Maka,

$$AB = \begin{bmatrix} (-2)\times(3)+(1)\times(2)+(3)\times(1) & (-2)\times(-2)+(1)\times(4)+(3)\times(-3) \\ (4)\times(3)+(1)\times(2)+(6)\times(1) & (4)\times(-2)+(1)\times(4)+(6)\times(-3) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 20 & -22 \end{bmatrix}.$$

2.7.4 Perkalian Matriks dan Sistem Persamaan Linier

Perkalian matriks memiliki aplikasi penting dalam sistem persamaan linier. Perhatikan sistem yang terdiri dari m persamaan linier dengan n faktor yang tidak diketahui berikut ini:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}.$$

Karena dua matriks adalah setara jika dan hanya jika unsur-unsur yang bersesuaian adalah setara, maka m persamaan dalam persamaan (2.7) dapat diganti dengan persamaan matriks tunggal

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Matriks $m \times 1$ pada ruas kiri persamaan dapat ditulis sebagai hasil kali, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Masing-masing matriks di atas disebut sebagai $A, x,$ dan y. Maka persamaan (2.7) yang terdiri dari m persamaan dengan n faktor yang tidak diketahui telah digantikan dengan persamaan matriks tunggal sebagai berikut:

$$Ax = b \ (\text{Anton \& Rorres, 2004}). \tag{2.14}$$

Matriks A pada persamaan (2.14) disebut matriks koefisien dari sistem persamaan (2.7).

Contoh:

Diberikan suatu sistem persamaan linier sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 3x_3 &= -4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= 2. \end{aligned}$$

Maka persamaan di atas dapat diubah menjadi persamaan matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

2.8 Macam-macam Matriks

2.8.1 Matriks Bujursangkar

Definisi 2.16

Suatu matriks yang memiliki baris dan kolom yang sama disebut matriks bujursangkar (Lipschutz & Lipson, 2001).

Contoh:

Diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dapat diketahui bahwa matriks A adalah matriks bujursangkar karena A mempunyai ordo 3×3.

2.8.2 Matriks Identitas

Matriks Identitas adalah matriks bujursangkar dengan bilangan 1 pada diagonal utamanya dan 0 pada unsur-unsur lainnya, seperti

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

Matriks di atas disebut matriks identitas (*identity matrix*) dan dinyatakan dengan I. Jika ukurannya $n \times n$ maka akan ditulis I_n untuk matriks $n \times n$ (Anton & Rorres, 2004).

2.8.3 Matriks Transpos

Definisi 2.17

Jika A merupakan matriks $m \times n$ maka transpos dari A dinyatakan dengan A^T yang didefinisikan sebagai matriks $n \times m$ yang didapatkan dengan mempertukarkan baris-baris dan kolom-kolom dari A. Sehingga kolom pertama dari A^T adalah baris pertama dari A, kolom kedua dari A^T adalah baris kedua dari A, dan seterusnya (Anton & Rorres, 2004).

Contoh:

Diberikan matriks

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix},$$

maka

$$A^T=\begin{bmatrix}2 & 1 & 5\\ 3 & 4 & 6\end{bmatrix}.$$

2.8.4 Matriks Diagonal

Definisi 2.18

Matriks diagonal adalah matriks bujursangkar yang semua unsur-unsur penyusun selain diagonal utamanya bernilai nol.

Contoh:

Diberikan matriks

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}.$$

Matriks A diketahui sebagai matriks diagonal karena semua unsur-unsur penyusun selain diagonal utamanya bernilai nol.

2.8.5 Matriks Simetrik

Definisi 2.19

Suatu matriks bujursangkar A adalah simetrik jika $A = A^T$ (Anton & Rorres, 2004).

Contoh:

Diberikan

$$A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 5\\ 4 & -3 & 0\\ 5 & 0 & 7\end{bmatrix},$$

sehingga,

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Maka dapat diketahui A adalah matriks simetrik karena $A = A^T$.

2.8.6 Matriks Ortogonal

Definisi 2.20

Suatu matriks bujursangkar A yang memiliki sifat $A^{-1} = A^T$ disebut sebagai matriks ortogonal (Anton & Rorres, 2004)

Dari definisi ini dapat diketahui bahwa suatu matriks bujursangkar A ortogonal jika dan hanya jika $AA^T = A^T A = I$.

Contoh:

Matriks

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{6}{7} \\ -\frac{6}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

adalah ortogonal, karena

$$A^T A = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{6}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{6}{7} \\ -\frac{6}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ (Anton & Rorres, 2004).

2.8.7 Matriks Pendiagonal

Definisi 2.21

Suatu matriks bujursangkar A dikatakan dapat didiagonalisasi jika terdapat suatu matriks P yang memiliki invers sedemikian rupa sehingga $P^{-1}AP$

adalah matriks diagonal, matriks P dikatakan mendiagonalisasi A (Anton & Rorres, 2004).

Contoh:

Misalkan

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Nilai-nilai eigen dari A adalah $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = -4$. Sesuai dengan λ_1 dan λ_2, maka A mempunyai vektor-vektor eigen $x_1 = [3,1]^T$ dan $x_2 = [1,2]^T$. Misalkan

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

maka

$$P^{-1}AP = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Sehingga dapat diketahui

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

adalah pendiagonal matriks A.

2.8.8 Matriks Uniter

Definisi 2.22

Suatu matriks bujursangkar U disebut matriks uniter jika vektor-vektor kolomnya membentuk suatu himpunan ortonormal dalam R^n (Leon, 2001).

Jadi matriks U disebut uniter jika dan hanya jika $U^T U = I$. Jika U uniter, maka karena vektor-vektor kolomnya ortonormal dan U harus mempunyai rank n.

Dengan demikian $U^{-1} = U^T$. Sehingga suatu matriks uniter merupakan suatu matriks ortogonal.

2.8.9 Matriks Invers

Definisi 2.23

Jika A adalah matriks bujursangkar, dan jika terdapat matriks B yang ukurannya sama sedimikian rupa sehingga $AB = BA = I$, maka A disebut *invertible* dan B disebut sebagai invers dari A. Jika B tidak dapat didefinisikan, maka A dinyatakan sebagai matriks singular (Anton & Rorres, 2004).

Contoh:

Matriks

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ adalah invers dari } A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Karena

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I,$$

dan

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

2.8.10 Determinan Matriks

Definisi 2.24

Misalkan $A = a_{ij}$ adalah matriks berordo $n \times n$ dan M_{ij} menyatakan matriks berordo $(n-1) \times (n-1)$ yang diperoleh dari A dengan menghapus baris dan kolom yang mengandung a_{ij}. Determinan dari M_{ij}

disebut minor dari a_{ij}. Sehingga kofaktor dari A_{ij} dari a_{ij} dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det\left(M_{ij}\right) \text{ (Leon, 2001).} \quad (2.15)$$

Definisi 2.25

Determinan dari suatu matriks A berordo $n \times n$, dinyatakan sebagai $\det(A)$. $\det(A)$ adalah suatu skalar yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\det(A) = \begin{cases} a_{11} & \text{jika } n = 1 \\ a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} & \text{jika } n > 1 \end{cases} \quad (2.16)$$

dengan $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$ adalah matriks baris pertama dari A dan $A_{ij} = (-1)^{1+j} \det(M_{1j})$, untuk $j = 1, \ldots, n$ adalah faktor-faktor yang diasosiasikan dengan unsur-unsur dalam baris pertama dari A (Leon, 2001).

Contoh:

Diberikan Matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 6 \end{bmatrix},$$

maka diketahui kofaktor dari

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\ &= (-1)^2 a_{11}\det(M_{11}) + (-1)^3 a_{12}\det(M_{12}) + (-1)^4 a_{13}\det(M_{13}) \\ &= 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 2(6-8) - 5(18-10) + 4(12-5) \\ &= -16. \end{aligned}$$

2.9 Rank dan Basis

Definisi 2.26

Rank dari suatu matriks A adalah dimensi dari ruang baris dari A (Leon, 2001).

Untuk menentukan rank dari suatu matriks, dapat mereduksi matriks yang bersangkutan menjadi bentuk ekselon baris. Baris-baris tak nol dari matriks eselon baris akan membentuk basis untuk ruang barisnya.

Contoh:

Misalkan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & -4 & -7 \end{bmatrix}.$$

Dengan mereduksi A menjadi bentuk eselon baris, maka diperoleh

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dapat dilihat bahwa $(1, -2, 3)$ dan $(0, 1, 5)$ membentuk basis untuk ruang baris dari U. Karena U dan A ekivalen baris, maka matriks memiliki ruang baris yang sama sehingga rank dari A adalah 2.

Definisi 2.27

Misalkan $v_1, v_2, \dots, v_n$ adalah vektor-vektor dalam suatu ruang vektor V. Jumlah vektor-vektor terbentuk $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$ dengan $a_1, \dots, a_n$ adalah skalar-skalar disebut suatu kombinasi linier dari $v_1, v_2, \dots, v_n$. Himpunan semua kombinasi linier dari $v_1, v_2, \dots, v_n$ disebut rentang (*span*) dari $v_1, \dots, v_n$. Rentang dari $v_1, \dots, v_n$ akan dinyatakan dengan rentang $(v_1, \dots, v_n)$ (Leon, 2001).

Definisi 2.28

Himpunan $\{v_1, \dots, v_n\}$ disebut himpunan perentang untuk V jika dan hanya jika setiap vektor dalam V dapat ditulis sebagai kombinasi linier dari $v_1, v_2, \dots, v_n$ (Leon, 2001).

Definisi 2.29

Vektor-vektor $v_1, v_2, \dots, v_n$ dalam suatu vektor V disebut bebas linier jika

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n = 0.$$

Maka semua skalar-skalar $c_1, c_2, \dots, c_n$ harus sama dengan nol (Leon, 2001).

Definisi 2.30

Vektor-vektor $v_1, v_2, \dots, v_n$ membentuk basis untuk ruang vektor V jika dan hanya jika:

1. $v_1, v_2, \dots, v_n$ bebas linier.
2. $v_1, v_2, \dots, v_n$ merentang V (Anton & Rorres, 2004).

Contoh:

Misalkan $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (2, 9, 0)$, dan $v_3 = (3, 3, 4)$. Tunjukkan bahwa himpunan $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ adalah suatu basis untuk R^3.

Untuk menunjukkan bahwa himpunan S merentang R^3, harus ditunjukkan bahwa suatu vektor sebarang $b = (b_1, b_2, b_3)$ dapat dinyatakan sebagai suatu kombinasi linier

$$b = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3,$$

dari vektor-vektor pada S. Dengan menyatakan persamaan ini ke dalam bentuk unsur-unsurnya diperoleh

$$(b_1, b_2, b_3) = c_1(1,2,1) + c_2(2,9,0) + c_3(3,3,4),$$

atau

$$(b_1, b_2, b_3) = (c_1 + 2c_2 + 3c_3, 2c_1 + 9c_2 + 3c_3, c_1 + 4c_3),$$

atau dengan menyetarakan unsur-unsur yang bersesuaian

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= b_1 \\ 2c_1 + 9c_2 + 3c_3 &= b_2 \\ c_1 + 4c_3 &= b_3. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Jadi untuk menunjukkan bahwa S merentang R^3, harus ditunjukkan bahwa sistem persamaan (2.17) memiliki satu solusi untuk setiap pilihan dari $b = (b_1, b_2, b_3)$. Untuk membuktikan S bebas linier harus ditunjukkan bahwa satu-satunya solusi dari

$$c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = 0 \tag{2.18}$$

adalah $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Sebagaimana di atas, jika persamaan (2.18) dinyatakan dalam bentuk unsur-unsurnya, pembuktian akan berkurang dengan menunjukkan bahwa sistem homogen

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= 0 \\ 2c_1 + 9c_2 + 3c_3 &= 0 \\ c_1 + 4c_3 &= 0 \end{aligned} \tag{2.19}$$

hanya memiliki solusi trivial. Amati bahwa persamaan (2.17) dan persamaan (2.18) memiliki matriks koefisien yang sama. Jadi dapat dibuktikan secara simultan bahwa S bebas linier dan merentang R^3 dengan menunjukkan bahwa pada sistem persamaan (2.17) dan persamaan (2.18) matriks koefisiennya memiliki det(A) tak nol. Maka

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&9&3\\1&0&4\end{bmatrix} \text{ diperoleh } \det(A)=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&9&3\\1&0&4\end{vmatrix}=-1,$$

dengan demikian S adalah basis untuk R^3.

2.10 Norma

Norma *Euclidan* dari suatu vektor $u=(u_1,u_2,\dots,u_n)$ pada R^n dinyatakan sebagai berikut:

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2} \text{ (Anton \& Rorres, 2004).}$$

Contoh:

Jika $u=(1,3,-2,7)$, maka pada ruang *Euclidan* R^4

$$\|u\|=\sqrt{(1)^2+(3)^2+(-2)^2+(7)^2}=\sqrt{63}=3\sqrt{7}.$$

2.11 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi 2.31

Misalkan A adalah suatu matriks $n\times n$. Skalar λ disebut sebagai suatu nilai eigen atau nilai karakteristik dari A jika terdapat suatu vektor tak nol x, sehingga $Ax=\lambda x$. Vektor x disebut vektor eigen atau vektor karakteristik dari λ (Leon, 2001).

Contoh:

Diberikan matriks A sebagai berikut:

$$A=\begin{bmatrix}1&-2\\1&4\end{bmatrix},$$

maka untuk menentukan nilai eigen dari A sebagai berikut

$$(A-\lambda I)x=0$$

$$\left(\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & 4\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)x=0$$

$$\left(\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}\right)x=0,$$

ditentukan nilai λ, sehingga berlaku:

$$\det\left(\begin{bmatrix}1-\lambda & -2\\ 1 & 4-\lambda\end{bmatrix}\right)=0$$

$$(\lambda-1)(\lambda-4)-(2)(-1)=0$$

$$(\lambda^2-5\lambda+6)=0$$

$$(\lambda-2)(\lambda-3)=0.$$

Maka didapatkan $\lambda_1=2$ dan $\lambda_2=3$. Dari $\lambda_1=2$ dan $\lambda_2=3$, maka didapatkan vektor eigen sebagai berikut:

Untuk $\lambda_1=2$, sehingga diperoleh:

$$\begin{bmatrix}1-\lambda_1 & -2\\ 1 & 4-\lambda_1\end{bmatrix}x=0$$

$$\begin{bmatrix}1-2 & -2\\ 1 & 4-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=0$$

$$\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=0$$

$$\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=0$$

diperoleh $x_1=-2$ dan $x_2=1$. Maka untuk $\lambda_1=2$ vektor eigennya adalah $[-2,1]^T$.

Untuk $\lambda_2=3$, sehingga diperoleh:

$$\begin{bmatrix}1-\lambda_1 & -2\\ 1 & 4-\lambda_1\end{bmatrix}x=0$$

$$\begin{bmatrix} 1-3 & -2 \\ 1 & 4-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$
$$\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

diperoleh x_1=1 dan $x_2 = -1$. Maka untuk $\lambda_2 = 3$ vektor eigennya adalah $[1, -1]^T$.

Persamaan $Ax = \lambda x$ dapat dituliskan dalam bentuk:

$$(A - \lambda I)x = 0 \text{ (Leon, 2001).} \tag{2.20}$$

2.12 Ortogonalitas

Definisi 2.32

Misalkan $v_1, v_2, \dots, v_n$ adalah vektor-vektor di dalam suatu ruang hasil kali dalam V. Jika $(v_i, v_j) = 0$ bilamana $i \neq j$, maka $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dikatakan sebagai suatu himpunan ortogonal dari vektor-vektor (Leon, 2001).

Contoh:

Himpunan $\{[1,\ 1,\ 1]^T, [2,\ 1,\ -3]^T, \text{dan } [4,\ -5,\ 1]^T\}$ adalah himpunan ortogonal yang berada di dalam R^3, karena

$$[1,\ 1,\ 1][2,\ 1,\ -3]^T = 0$$
$$[1,\ 1,\ 1][4,\ -5,\ 1]^T = 0$$
$$[2,\ 1,\ -3][4,\ -5,\ 1]^T = 0.$$

2.13 Ortonormal

Definisi 2.33

Suatu himpunan ortonormal dari vektor-vektor adalah suatu himpunan ortogonal dari vektor-vektor satuan. Himpunan $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ akan menjadi ortonormal, jika dan hanya jika

$$\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij} \tag{2.21}$$

dengan

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jika } i = j \\ 0 & \text{jika } i \neq j. \end{cases}$$

Jika diberikan himpunan ortogonal dari vektor-vektor taknol $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, maka dimungkinkan untuk membentuk suatu himpunan ortonormal dengan mendefinisikan:

$$u = \left(\frac{1}{\|v_i\|}\right) v_i \quad \text{untuk } i = 1, 2, \dots, n. \text{ (Leon, 2001)} \tag{2.22}$$

Contoh:

Jika $v_1 = [1,\ 1,\ 1]^T$, $v_2 = [2,\ 1,\ -3]^T$, dan $v_3 = [4,\ -5,\ 1]^T$ maka $\{v_1, v_2, v_3\}$ adalah suatu himpunan ortogonal di dalam R^3. Untuk membentuk suatu himpunan ortonormal, maka

$$u_1 = \left(\frac{1}{\|v_1\|}\right) v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}[1,\ 1,\ 1]^T$$

$$u_2 = \left(\frac{1}{\|v_2\|}\right) v_2 = \frac{1}{\sqrt{14}}[2,\ 1,\ -3]^T$$

$$u_3 = \left(\frac{1}{\|v_3\|}\right) v_3 = \frac{1}{\sqrt{42}}[4,\ -5,\ 1]^T.$$

2.14 Metode *Singular Value Decomposition*

Singular value decomposition atau dekomposisi nilai singular adalah suatu metode yang mendekomposisikan A berordo $m \times n$ menjadi tiga unsur matriks $A = U\Sigma V^T$, dengan U adalah matriks ortogonal $m \times m$, V adalah matriks ortogonal $n \times n$, dan Σ adalah matriks $m \times n$ yang semua unsur di luar diagonal utamanya adalah 0, dan unsur-unsur diagonal utamanya memenuhi $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n$

$$\sum = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \end{bmatrix}. \tag{2.23}$$

Semua σ_i yang ditentukan dengan faktorisasi ini adalah tunggal.

Definisi 2.34

Diberikan matriks A dengan rank r. Nilai eigen positif dari $(A^T A)^{\frac{1}{2}}$ disebut nilai singular dari A. Sehingga jika σ adalah nilai singular dari A maka σ adalah nilai eigen positif dari $(A^T A)^{\frac{1}{2}}$ atau σ^2 adalah nilai eigen dari $A^T A$ (Goldberg, 1991).

Teorema 2.1

Jika A adalah matriks $m \times n$, maka A mempunyai suatu *singular value decomposition* (Leon, 2001).

Bukti:

$A^T A$ adalah matriks simetrik $n \times n$. Oleh karena itu semua nilai eigennya adalah bilangan riil dan mempunyai matriks pendiagonal yang ortogonal yaitu V. Lebih dari itu, semua nilai eigennya adalah taknegatif. Untuk melihat hal ini, misalkan λ adalah nilai eigen dari $A^T A$ dan x adalah vektor eigen dari λ. Berdasarkan hal ini maka

$$\| Ax \|^2 = x^T A^T Ax = \lambda x^T x = \lambda \| x \|^2.$$

Oleh karena itu

$$\lambda = \frac{\| Ax \|^2}{\| x \|^2} \geq 0.$$

Sehingga dapat diasumsikan bahwa kolom-kolom dari V telah tersusun urut sehingga nilai-nilai eigen yang bersesuaian memenuhi

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0.$$

Nilai-nilai singular dari matriks A diberikan oleh

$$\sigma_j = \sqrt{\lambda_j} \qquad j = 1, \dots, n.$$

Misalkan r merupakan rank dari A. Matriks $A^T A$ juga merupakan rank r. Karena $A^T A$ simetrik, maka ranknya sama dengan jumlah nilai eigen taknolnya. Jadi,

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r > 0 \qquad \text{dan} \qquad \lambda_{r+1} = \lambda_{r+2} = \cdots = \lambda_n = 0$$

Hubungan yang sama juga berlaku bagi nilai-nilai singularnya

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0 \qquad \text{dan} \qquad \sigma_{r+1} = \sigma_{r+2} = \cdots = \sigma_n = 0$$

Kemudian, misalkan

$$V_1 = (v_1, \dots, v_r), \qquad V_2 = (v_{r+1}, \dots, v_n)$$

dan

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_r \end{pmatrix},$$

Jadi, Σ_1 adalah matriks diagonal $r \times r$ yang unsur-unsur diagonal utamanya adalah nilai-nilai singular tak nol $\sigma_1, \dots, \sigma_r$. Matriks $\sum m \times n$ ini selanjutnya dinyatakan oleh

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

Vektor-vektor kolom dari V_2 adalah vektor-vektor eigen dari $A^T A$ dari $\lambda = 0$. Jadi

$$A^T A v_j = 0 \qquad j = r+1, \ldots, n.$$

sehingga vektor-vektor kolom dari V_2 membentuk suatu basis otonormal untuk $N(A^T A) = N(A)$. Dengan demikian,

$$AV_2 = O.$$

Dan karena V adalah matriks ortogonal, maka

$$\begin{gathered} I = VV^T = V_1V_1^T + V_2V \\ A = AI = AV_1V_1^T + AV_2V_2^T = AV_1V_1^T. \end{gathered} \qquad (2.24)$$

Telah diperlihatkan bagaimana menyusun matriks-matriks V dan Σ. Untuk melengkapi bukti ini, harus diperlihatkan bagaimana menyusun suatu matriks ortogonal U berordo $m \times m$ sehingga

$$A = U\Sigma V^T.$$

Atau ekivalen dengan

$$AV = U\Sigma. \qquad (2.25)$$

Dengan membandingkan r kolom-kolom pertama dari setiap ruas dari persamaan (2.25), akan dilihat bahwa

$$Av_j = \sigma_j u_j \qquad j = 1, \ldots, r$$

Jadi didefinisikan

$$u_j = \frac{1}{\sigma_j} Av_j \qquad j = 1, \ldots, r, \qquad (2.26)$$

dan

$$U_1 = (u_1, \cdots, u_r).$$

Berdasarkan hal tersebut maka

$$AV_1 = U_1\Sigma_1. \qquad (2.27)$$

Vektor-vektor kolom dari U_1 akan membentuk suatu himpunan ortonormal karena

$$\begin{aligned} u_i^T u_j &= \left(\frac{1}{\sigma_i} v_i^T A^T\right)\left(\frac{1}{\sigma_j} A v_j\right) \quad 1 \le i \le r, \quad 1 \le j \le r \\ &= \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} v_i^T \left(A^T A v_j\right) \\ &= \frac{\sigma_j}{\sigma_i} v_i^T v_j \\ &= \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (2.26) maka setiap u_j untuk $1 \le j \le r$ akan berada di dalam ruang kolom dari A. Dimensi ruang kolom tersebut adalah r, sehingga $u_1, \dots, u_r$ membentuk basis ortonormal untuk $R(A)$. Ruang vektor $R(A^T) = N(A)^{\perp}$ mempunyai dimensi $m - r$. Misalkan $\{u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_{r+n}\}$ adalah basis ortonormal untuk $N(A^T)$ dan ditetapkan

$$\begin{aligned} U_2 &= (u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_{r+m}) \\ U &= (U_1 \quad U_2). \end{aligned}$$

Maka $u_1, \dots, u_m$ akan membentuk basis ortonormal untuk R^m. Oleh karena itu U adalah matriks ortogonal. Selanjutnya akan diperlihatkan bahwa sebenarnya $U\Sigma V^T$ adalah A. Akibat dari persamaan (2.27) dan (2.24)

$$\begin{aligned} U\Sigma V^T &= (U_1 \quad U_2)\begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix} \\ &= U_1 \Sigma_1 V_1^T \\ &= A V_1 V_1^T \\ &= A \text{ (Leon, 2001).} \end{aligned}$$

Berikut ini diberikan penjelasan tentang matriks U, Σ, dan V:

1. Matriks Σ

Matriks Σ adalah matriks diagonal yang diagonal utamanya adalah nilai singular dari $A^T A$, sedangkan unsur selain diagonal utamanya adalah nol. Matriks Σ berukuran $m \times n$ dan mempunyai bentuk:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{dengan } \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{r-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sigma_r \end{bmatrix}. \tag{2.28}$$

2. Matriks V

Matriks V adalah matriks uniter berukuran $n \times n$. Karena V adalah matriks uniter, maka vektor-vektor kolom dari V membentuk himpunan ortonormal. Vektor-vektor kolom matriks V adalah vektor-vektor eigen dari $A^T A$. Agar vektor-vektor kolom matriks V membentuk himpunan ortonormal, maka vektor-vektor eigen dari $A^T A$ tersebut dinormalisasikan, yaitu:

$$v_i = \frac{1}{\|x_i\|} x_i, \tag{2.29}$$

x_i adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ_i. Untuk setiap $r + 1 \leq i \leq n$, v_i akan membentuk basis ortonormal untuk $N(A)$. Sedangkan untuk setiap $1 \leq i \leq r$, v_i akan membentuk basis ortonormal untuk $R(A^T)$ dan himpunan $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ membentuk basis ortonormal untuk R^N.

3. Matriks U

Matriks U adalah matriks uniter berukuran $m \times m$. Basis ortonormal dari $R(A)$ didefinisikan:

$$u_i = \frac{1}{\|\sigma_i\|} A v_i, \tag{2.30}$$

untuk setiap u_i dengan $1 \leq i \leq r$ berada di dalam ruang kolom dari A. Sedangkan untuk setiap u_i dengan $r + 1 \leq i \leq m$ akan membentuk basis ortonormal untuk $N(A^T)$ dan himpunan $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ membentuk basis ortonormal untuk R^M.

Berikut ini akan dijelaskan untuk menentukan matriks $U, \Sigma,$ dan V dalam 3 kasus: $m = n, m > n,$ dan $m < n$.

1. Jika $m = n$, maka U, Σ, dan V adalah matriks persegi dan ukurannya sama.
2. Jika $m > n$, maka $\Sigma \in R^{m \times n}$ dapat dipartisi sebagai berikut:

$$\Sigma = \left[\frac{\Sigma_1}{0} \right] \tag{2.31}$$

dengan

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

dan 0 adalah $(m - n) \times n$ matriks nol. Dapat dituliskan $U = [U_1 | U_2]$, dengan

$$U_1 = [u_1 | \cdots | u_n] \in R^{m \times n}, \quad U_2 = [u_{n+1} | \cdots | u_m] \in R^{m \times (m-n)}. \tag{2.33}$$

Sehingga,

$$A = U \Sigma V^T = [U_1 | U_2] \left[\frac{\Sigma_1}{0} \right] V^T = U_1 \Sigma_1 V^T. \tag{2.34}$$

3. Jika $m < n$, maka Σ mempunyai bentuk

$$\Sigma = [\Sigma_1 | 0], \tag{2.35}$$

dengan $\Sigma_1 \in R^{m\times n}$ mempunyai diagonal-diagonal utamanya $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ dan 0 adalah $m \times (n-m)$ matriks nol. Dituliskan $V = [V_1|V_2]$, dengan

$$V_1 = [v_1 | \cdots | v_m] \in R^{n\times m}, \quad V_2 = [v_{m+1} | \cdots | v_n] \in R^{n\times(n-m)}. \tag{2.36}$$

Dan diperoleh persamaan (2.37)

$$A = U\Sigma V^T = U[\Sigma_1 | 0]\begin{bmatrix} V_1^T \\ \hline V_2^T \end{bmatrix} = U\Sigma_1 V_1^T, \tag{2.37}$$

untuk kasus kedua dan ketiga, $A = U_1\Sigma_1 V^T$ dan $U\Sigma_1 V_1^T$ disebut reduksi *singular value decomposition* dari A (Gockenbach, 2010).

2.15 Menyelesaikan Sistem Persamaan Linier Menggunakan *Singular Value Decomposition*

Sistem persamaan linier mempunyai bentuk umum pada persamaan (2.7) dengan A merupakan matriks koefisien dari x yang akan dicari bentuk *singular value decomposition*-nya. Langkah-langkah yang dilakukan untuk menyelesaikan sistem persamaan linier menggunakan analisis *singular value decomposition* adalah:

Langkah Pertama

Dengan mengubah A menjadi $U\Sigma V^T$ menggunakan *singular value decomposition* akan didapatkan:

1. Vektor $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ membentuk basis ortonormal untuk $R(A^T)$.
2. Vektor $\{v_{r+1}, v_{r+2}, \ldots, v_n\}$ membentuk basis ortonormal untuk $N(A)$.
3. Vektor $\{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$ membentuk basis ortonormal untuk $R(A)$.
4. Vektor $\{u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots, u_n\}$ membentuk basis ortonormal untuk $N(A^T)$.

Langkah Kedua

Menguji bahwa b berada dalam $R(A)$, sehingga akan dilihat b sama dengan proyeksi b pada $R(A)$, dengan $R(A)$ direntang oleh vektor $\{u_1,u_2,\ldots,u_r\}$. Proyeksi b pada $R(A)$ diberikan oleh persamaan (2.38):

$$proy_{R(A)}b=\sum_{k=1}^{r}\langle b,u_k\rangle u_k \text{ (Akritas dkk, 2006).} \tag{2.38}$$

berdasarkan pengujian di atas akan diperoleh dua kasus, yaitu :

Kasus pertama

Untuk $b \in R(A)$. Jika $b \in R(A)$ maka sistem persamaan linier mempunyai paling sedikit satu solusi. Karena $b \in R(A)$, maka $b = proy_{R(A)}b$ sehingga dari persamaan (2.38) diperoleh:

$$b=\sum_{k=1}^{r}\langle b,u_k\rangle u_k. \tag{2.39}$$

Diketahui bahwa $u_k = \frac{1}{\sigma_k}Av_k$, sehingga

$$b=\sum_{k=1}^{r}\langle b,u_k\rangle \frac{Av_k}{\sigma_k}. \tag{2.40}$$

Operasi pada matriks bersifat linier, sehingga persamaan (2.40) didapatkan

$$b=A\sum_{k=1}^{r}\langle b,u_k\rangle \frac{v_k}{\sigma_k}. \tag{2.41}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.41) pada persamaan (2.14) didapatkan

$$x=\sum_{k=1}^{r}\frac{\langle b,u_k\rangle}{\sigma_k}v_k \tag{2.42}$$

sebagai solusi dari sistem persamaan linier pada persamaan (2.14).

Kasus kedua

Untuk $b \notin R(A)$. Jika $b \notin R(A)$ maka sistem persamaan linier tidak mempunyai solusi, sehingga akan dihitung pendekatan terbaik dari solusinya. Dalam hal ini, solusi pendekatan terbaik tersebut adalah vektor x_r sehingga

$$Ax_r = b_r \tag{2.43}$$

dengan b_r di dalam $R(A)$, dan b_r adalah vektor yang terdekat dengan b. Solusi pendekatan terbaik pada kasus ini diberikan oleh persamaan (2.42), yaitu

$$x_r = \sum_{k=1}^{r} \frac{\langle b, u_k \rangle}{\sigma_k} v_k. \tag{2.44}$$

x_r disebut sebagai solusi pendekatan terbaik, artinya jika $Ax_r = b_r$, maka b_r adalah vektor di $R(A)$ yang terdekat dengan b. Sehingga vektor $(b - br)$ akan tegak lurus dengan setiap vektor di $R(A)$ termasuk vektor yang merentang $R(A)$ yaitu vektor-vektor u_i dengan $1 \leq i \leq r$, u_i adalah vektor yang ortonormal, maka berlaku:

$$\begin{aligned}
\langle (b - b_r), u_i \rangle &= \langle (b - Ax_r) u_i \rangle \\
&= \left\langle \left(b - A\left(\sum_{k=1}^{r} \frac{\langle b, u_k \rangle}{\sigma_k} v_k \right) \right), u_i \right\rangle \\
&= \left\langle \left(b - \sum_{k=1}^{r} \frac{\langle b, u_k \rangle}{\sigma_k} Av_k \right), u_i \right\rangle \\
&= \left\langle \left(b - \sum_{k=1}^{r} \frac{\langle b, u_k \rangle}{\sigma_k} \sigma_k v_k \right), u_i \right\rangle \\
&= \left\langle \left(b - \sum_{k=1}^{r} \langle b, u_k \rangle v_k \right), u_i \right\rangle \\
&= \langle b, u_i \rangle - b \sum_{k=1}^{r} \langle b, u_k \rangle \langle u_k, u_i \rangle \\
&= \langle b, u_i \rangle - \langle b, u_i \rangle
\end{aligned}$$

Hal ini menunjukkan bahwa $(b - Ax_r)$ adalah tegak lurus dengan setiap vektor di $R(A)$ dan persamaan (2.44) merupakan solusi pendekatan terbaik (Akritas dkk, 2006).

Contoh:

Diketahui suatu sistem persamaan linier

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 &= 2. \\ 2x_1 + x_3 &= 3 \end{aligned} \tag{2.45}$$

Sistem persamaan linier pada persamaan (2.45) akan dicari solusinya.

Penyelesaian :

Dari sistem persamaan (2.45), dapat disusun menjadi $Ax = b$, yaitu

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^L \\ x_2^L \\ x_3^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Maka A dapat difaktorisasi menjadi $U\Sigma V^T$ dengan langkah-langkah sebagai berikut:

(i) Mencari nilai-nilai eigen dan vektor-vektor eigen dari $A^T A$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{2.46}$$

Dari persamaan (2.46) didapatkan polinomial karakteristik sebagai berikut:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 5-\lambda & 1 \\ 2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda^3 + 12\lambda^2 - 36\lambda + 25 = 0.$$

Sehingga didapatkan $\lambda_1 = \frac{\sqrt{21}+11}{2}, \lambda_2 = \frac{-\sqrt{21}+11}{2}$, dan $\lambda_3 = 1$. Kemudian didapatkan vektor eigen dari λ_1 adalah $\left[2,\ \frac{\sqrt{21}-1}{2},\ \ 1\right]$, vektor eigen dari λ_2 adalah $\left[2,\ \frac{-\sqrt{21}-1}{2},\ \ 1\right]$, dan λ_3 adalah $\left[-\frac{1}{2},\ 0, 1\right]$.

(ii) Menyusun matriks Σ

Dari langkah (i) maka dapat diketahui nilai-nilai singular dari matriks A sehingga didapatkan matriks Σ sebagai berikut

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{\sqrt{21}+11}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{-\sqrt{21}+11}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(iii) Menyusun matriks V

Dengan mendefinisikan v_i seperti persamaan (2.29) dapat dicari v_1, v_2, dan v_3 sebagai berikut:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{(2)^2 + \left(\frac{\sqrt{21}-1}{2}\right)^2 + (1)^2}} \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{\sqrt{21}-1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{4}{\sqrt{42-2\sqrt{21}}} \\ \frac{2\left(\frac{1}{2}\sqrt{21}-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{42-2\sqrt{21}}} \\ \frac{2}{\sqrt{42-2\sqrt{21}}} \end{bmatrix}.$$

$$v_2=\frac{1}{\sqrt{(2)^2+\left(\frac{-\sqrt{21}-1}{2}\right)^2+(1)^2}}\begin{bmatrix}2\\ \frac{-\sqrt{21}-1}{2}\\ 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{4}{\sqrt{42+2\sqrt{21}}}\\ \frac{2\left(-\frac{1}{2}\sqrt{21}-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{42+2\sqrt{21}}}\\ \frac{2}{\sqrt{42+2\sqrt{21}}}\end{bmatrix}.$$

$$v_3=\frac{1}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+(0)^2+(1)^2}}\begin{bmatrix}\frac{-1}{2}\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-\frac{1}{5}\sqrt{5}\\ 0\\ \frac{2}{5}\sqrt{5}\end{bmatrix}.$$

Sehingga,

$$V^T = \begin{bmatrix} \dfrac{4}{\sqrt{42-2\sqrt{21}}} & \dfrac{2\left(\frac{1}{2}\sqrt{21}-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{42-2\sqrt{21}}} & \dfrac{2}{\sqrt{42-2\sqrt{21}}} \\ \dfrac{4}{\sqrt{42+2\sqrt{21}}} & \dfrac{2\left(-\frac{1}{2}\sqrt{21}-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{42+2\sqrt{21}}} & \dfrac{2}{\sqrt{42+2\sqrt{21}}} \\ -\frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & \frac{2}{5}\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

(iv) Menyusun matriks U

Dengan menggunakan persamaan (2.30) $u_1, u_2,$ dan u_3 dapat ditentukan. Sehingga didapatkan

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{\sqrt{21}+11}{2}}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{4}{\sqrt{42-2\sqrt{21}}} \\ \dfrac{2\left(\frac{1}{2}\sqrt{21}-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{42-2\sqrt{21}}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{42-2\sqrt{21}}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{42-2\sqrt{21}}} \\ \dfrac{4}{\sqrt{42-2\sqrt{21}}} \\ \dfrac{20}{\left(\sqrt{21}+1\right)\sqrt{42-2\sqrt{21}}} \end{bmatrix}.$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{-\sqrt{21}+11}{2}}}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{4}{\sqrt{42+2\sqrt{21}}} \\ \frac{2\left(-\frac{1}{2}\sqrt{21}-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{42+2\sqrt{21}}} \\ \frac{2}{\sqrt{42+2\sqrt{21}}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{42+2\sqrt{21}}} \\ -\frac{4}{\sqrt{42+2\sqrt{21}}} \\ \frac{20}{\left(\sqrt{21}-1\right)\sqrt{42+2\sqrt{21}}} \end{bmatrix}.$$

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{1}}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 \\ \frac{2}{5}\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{5}\sqrt{5} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Setelah didapatkan u_1, u_2, dan u_3 matriks U dapat disusun sebagai berikut:

$$U = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{42-2\sqrt{21}}} & -\frac{2}{\sqrt{42+2\sqrt{21}}} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{4}{\sqrt{42-2\sqrt{21}}} & -\frac{4}{\sqrt{42+2\sqrt{21}}} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{20}{\left(\sqrt{21}+1\right)\sqrt{42-2\sqrt{21}}} & \frac{20}{\left(\sqrt{21}-1\right)\sqrt{42+2\sqrt{21}}} & 0 \end{bmatrix}$$

Dari langkah (i) sampai langkah (iv) dapat diketahui U, Σ, dan V^T sehingga

$$A = U\Sigma V^T. \tag{2.47}$$

Dari matriks-matriks U, S, dan V dapat ditentukan basis-basis ortonormal untuk $R(A)$, $R(A^H)$, $N(A)$, dan $N(A^H)$, yaitu:

$$\text{Basis dari } (RA): \{u_1, u_2, u_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{42-2\sqrt{21}}} \\ \frac{4}{\sqrt{42-2\sqrt{21}}} \\ \frac{20}{\left(\sqrt{21}+1\right)\sqrt{42-2\sqrt{21}}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{42+2\sqrt{21}}} \\ -\frac{4}{\sqrt{42+2\sqrt{21}}} \\ \frac{20}{\left(\sqrt{21}-1\right)\sqrt{42+2\sqrt{21}}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\text{Basis dari } R(A^H): \{v_1, v_2, v_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{42-2\sqrt{21}}} \\ \frac{2\left(\frac{1}{2}\sqrt{21}-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{42-2\sqrt{21}}} \\ \frac{2}{\sqrt{42-2\sqrt{21}}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{42+2\sqrt{21}}} \\ \frac{2\left(-\frac{1}{2}\sqrt{21}-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{42+2\sqrt{21}}} \\ \frac{2}{\sqrt{42+2\sqrt{21}}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{5}\sqrt{5} \\ 0 \\ \frac{2}{5}\sqrt{5} \end{pmatrix} \right\}.$$

Basis dari $N(A)$: $\{v_3\} = \{\emptyset\}$.

Basis dari $N(A^H)$: $\{u_3\} = \{\emptyset\}$.

Sehingga dapat ditentukan proyeksi b pada $R(A)$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} proy_{R(A)} b &= \sum_{k=1}^{r} \langle b, u_k \rangle u_k \\ &= \langle b, u_1 \rangle u_1 + \langle b, u_2 \rangle u_2 + \langle b, u_3 \rangle u_3 \end{aligned}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{20\left(\sqrt{21}+7\right)}{\left(\sqrt{21}+1\right)\left(42-2\sqrt{21}\right)}\\ \dfrac{40\left(\sqrt{21}+7\right)}{\left(\sqrt{21}+1\right)\left(42-2\sqrt{21}\right)}\\ \dfrac{200\left(\sqrt{21}+7\right)}{\left(\sqrt{21}+1\right)^2\left(42-2\sqrt{21}\right)}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{20\left(\sqrt{21}-7\right)}{\left(\sqrt{21}-1\right)\left(42+2\sqrt{21}\right)}\\ \dfrac{40\left(\sqrt{21}-7\right)}{\left(\sqrt{21}-1\right)\left(42+2\sqrt{21}\right)}\\ -\dfrac{200\left(\sqrt{21}+7\right)}{\left(\sqrt{21}-1\right)^2\left(42+2\sqrt{21}\right)}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

Berdasarkan perhitungan tersebut diperoleh $proy_{R(A)}b=b=(1,2,3)$. Karena $proy_{R(A)}b=b$, sehingga $b\in R(A)$. Hal tersebut menandakan sistem persamaan linier ini mempunyai solusi, yaitu :

$$x=\sum_{k=1}^{2}\frac{\langle b,u_k\rangle}{\sigma_k}v_k \quad =\frac{\langle b,u_1\rangle}{\sigma_1}v_1+\frac{\langle b,u_2\rangle}{\sigma_2}v_2+\frac{\langle b,u_3\rangle}{\sigma_3}v_3$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{6}{5}\\ \frac{2}{5}\\ \frac{3}{5}\end{bmatrix}.$$

Jadi solusi dari sistem persamaan linier ini adalah : $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{6}{5}\\ \frac{2}{5}\\ \frac{3}{5}\end{bmatrix}.$

2.16 Konsep *Fuzzy* dalam Al-Quran

Fuzzy dalam bahasa diartikan sebagai sesuatu yang kabur atau samar-samar. Dalam al-Quran pembahasan tentang *fuzzy* yang membahas tentang kebenaran atau kesalahan suatu nilai disebutkan dalam QS. Ali Imran/3:7 yaitu:

هُوَ ٱلَّذِىٓ أَنزَلَ عَلَيْكَ ٱلْكِتَٰبَ مِنْهُ ءَايَٰتٌ مُّحْكَمَٰتٌ هُنَّ أُمُّ ٱلْكِتَٰبِ وَأُخَرُ مُتَشَٰبِهَٰتٌ ۖ فَأَمَّا ٱلَّذِينَ
فِى قُلُوبِهِمْ زَيْغٌ فَيَتَّبِعُونَ مَا تَشَٰبَهَ مِنْهُ ٱبْتِغَآءَ ٱلْفِتْنَةِ وَٱبْتِغَآءَ تَأْوِيلِهِۦ ۗ وَمَا يَعْلَمُ تَأْوِيلَهُۥٓ إِلَّا ٱللَّهُ ۗ
وَٱلرَّٰسِخُونَ فِى ٱلْعِلْمِ يَقُولُونَ ءَامَنَّا بِهِۦ كُلٌّ مِّنْ عِندِ رَبِّنَا ۗ وَمَا يَذَّكَّرُ إِلَّآ أُو۟لُوا۟ ٱلْأَلْبَٰبِ ﴿٧﴾

"Dia-lah yang menurunkan al-kitab (al-Quran) kepada kamu. Di antara (isi) nya ada ayat-ayat yang muhkamat, itulah pokok-pokok isi al-Quran dan yang lain (ayat-ayat) mutasyabihat. Adapun orang-orang yang dalam hatinya condong kepada kesesatan, maka mereka mengikuti sebagian ayat-ayat yang mutasyabihat dari padanya untuk menimbulkan fitnah untuk mencari-cari ta'wilnya, padahal tidak ada yang mengetahui ta'wilnya melainkan Allah. Dan orang-orang yang mendalam ilmunya berkata: "Kami beriman kepada ayat-ayat yang mutasyabihat, semuanya itu dari sisi Tuhan kami." Dan tidak dapat mengambil pelajaran (dari padanya) melainkan orang-orang yang berakal" (*QS. Ali Imran/3:7*).

Dalam surat Ali Imran ayat 93 disebutkan:

۞ كُلُّ ٱلطَّعَامِ كَانَ حِلًّا لِّبَنِىٓ إِسْرَٰٓءِيلَ إِلَّا مَا حَرَّمَ إِسْرَٰٓءِيلُ عَلَىٰ نَفْسِهِۦ مِن قَبْلِ أَن تُنَزَّلَ
ٱلتَّوْرَىٰةُ ۗ قُلْ فَأْتُوا۟ بِٱلتَّوْرَىٰةِ فَٱتْلُوهَآ إِن كُنتُمْ صَٰدِقِينَ ﴿٩٣﴾

"Semua makanan adalah halal bagi Bani Israil melainkan makanan yang diharamkan oleh Israil (Ya'qub) untuk dirinya sendiri sebelum Taurat diturunkan. Katakanlah: "(Jika kamu mengatakan ada makanan yang diharamkan sebelum turun Taurat), maka bawalah Taurat itu, lalu bacalah ia jika kamu orang-orang yang benar" (QS. Ali Imran/3:93).

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Bentuk Umum Sistem Persamaan Linier *Fuzzy* Bilangan Trapesium

Bentuk umum sistem persamaan linier *fuzzy* dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\tilde{x}_1 & + & a_{12}\tilde{x}_2 & + & \cdots & + & a_{1n}\tilde{x}_n & = & \tilde{b}_1 \\ a_{21}\tilde{x}_1 & + & a_{22}\tilde{x}_2 & + & \cdots & + & a_{2n}\tilde{x}_n & = & \tilde{b}_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\tilde{x}_1 & + & a_{m2}\tilde{x}_2 & + & \cdots & + & a_{mn}\tilde{x}_n & = & \tilde{b}_m \end{array} \tag{3.1}$$

dengan $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$ adalah variabel bilangan *fuzzy* trapesium, $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_m$ adalah konstanta bilangan *fuzzy* trapesium, dan a_{ij} adalah koefisien dari variabel berupa bilangan riil untuk $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$.

Bilangan *fuzzy* $\tilde{x}$ dan $\tilde{b}$ berdasarkan definisi bilangan *fuzzy* dapat dinyatakan dengan $\tilde{x} = (x^L, x^U, x^\alpha, x^\beta)$ dan $\tilde{b} = (b^L, b^U, b^\alpha, b^\beta)$. Sehingga persamaan (3.1) dapat diuraikan sebagai berikut:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}(x_1^L, x_1^U, x_1^\alpha, x_1^\beta) & + & \cdots & + & a_{1n}(x_n^L, x_n^U, x_n^\alpha, x_n^\beta) & = & (b_1^L, b_1^U, b_1^\alpha, b_1^\beta) \\ a_{21}(x_1^L, x_1^U, x_1^\alpha, x_1^\beta) & + & \cdots & + & a_{2n}(x_n^L, x_n^U, x_n^\alpha, x_n^\beta) & = & (b_2^L, b_2^U, b_2^\alpha, b_2^\beta) \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}(x_1^L, x_1^U, x_1^\alpha, x_1^\beta) & + & \cdots & + & a_{mn}(x_n^L, x_n^U, x_n^\alpha, x_n^\beta) & = & (b_m^L, b_m^U, b_m^\alpha, b_m^\beta) \end{array}. \tag{3.2}$$

Dengan menggunakan definisi perkalian bilangan *fuzzy* dengan skalar didapatkan bentuk umum sistem persamaan linier *fuzzy* trapesium sebagai berikut:

$$\begin{array}{ccccccc} (a_{11}x_1^L, a_{11}x_1^U, a_{11}x_1^\alpha, a_{11}x_1^\beta) & + & \cdots & + & (a_{1n}x_n^L, a_{1n}x_n^U, a_{1n}x_n^\alpha, a_{1n}x_n^\beta) & = & (b_1^L, b_1^U, b_1^\alpha, b_1^\beta) \\ (a_{21}x_1^L, a_{21}x_1^U, a_{21}x_1^\alpha, a_{21}x_1^\beta) & + & \cdots & + & (a_{2n}x_n^L, a_{2n}x_n^U, a_{2n}x_n^\alpha, a_{2n}x_n^\beta) & = & (b_2^L, b_2^U, b_2^\alpha, b_2^\beta) \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ (a_{m1}x_1^L, a_{m1}x_1^U, a_{m1}x_1^\alpha, a_{m1}x_1^\beta) & + & \cdots & + & (a_{mn}x_n^L, a_{mn}x_n^U, a_{mn}x_n^\alpha, a_{mn}x_n^\beta) & = & (b_m^L, b_m^U, b_m^\alpha, b_m^\beta) \end{array} \tag{3.3}$$

dengan interval bilangan *fuzzy* $\tilde{x}$ adalah $[x^L, x^U]$ lebar sebelah kiri x^α dan kanan x^β, interval bilangan *fuzzy* $\tilde{b}$ adalah $[b^L, b^U]$ lebar sebelah kiri y^α dan kanan y^β, dan $a_{i,j}$ adalah koefisien dari variabel berupa bilangan riil untuk $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$.

3.1.1 Mengubah Sistem Persamaan Linier *Fuzzy* Bilangan Trapesium Menjadi Sistem Persamaan Linier

Perbedaan sistem persamaan linier *fuzzy* bilangan trapesium dengan sistem persamaan linier terletak pada unsur-unsurnya. Jika pada sistem persamaan linier *fuzzy* bilangan trapesium variabel yang tidak diketahui dan konstantanya adalah bilangan *fuzzy*, sedangkan pada sistem persamaan linier koefisien, variabel, dan konstantanya bukan merupakan bilangan *fuzzy*. Sehingga untuk memudahkan penyelesaian sistem persamaan linier *fuzzy* bilangan trapesium akan diubah terlebih dahulu dari sistem persamaan linier *fuzzy* bilangan trapesium menjadi sistem persamaan linier. Sehingga untuk mengubah sistem persamaan linier *fuzzy* bilangan trapesium dari persamaan (3.3) berdasarkan definisi penjumlahan dan kesamaan bilangan *fuzzy* dapat diketahui bahwa:

1. Sistem persamaan linier yang menyatakan batas interval sebelah kiri dari bilangan *fuzzy* x dan y sebagai berikut:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1^L & + & a_{12}x_2^L & + & \cdots & + & a_{1n}x_n^L & = & b_1^L \\ a_{21}x_1^L & + & a_{22}x_2^L & + & \cdots & + & a_{2n}x_n^L & = & b_2^L \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1^L & + & a_{m2}x_2^L & + & \cdots & + & a_{mn}x_n^L & = & b_m^L \end{array} \tag{3.4}$$

dengan $x_1^L, x_2^L, \dots, x_n^L$ variabel tidak diketahui, $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ dan $b_1^L, b_2^L, \dots, b_m^L$ adalah konstanta bilangan riil untuk $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$.

Dengan mengubah persamaan (3.4) menjadi persamaan matriks $Ax^L = b^L$ didapatkan persamaan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^L \\ x_2^L \\ \vdots \\ x_n^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^L \\ b_2^L \\ \vdots \\ b_m^L \end{bmatrix}. \tag{3.5}$$

2. Sistem persamaan linier yang menyatakan batas interval sebelah kanan dari bilangan *fuzzy* x dan y sebagai berikut:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1^U & + & a_{12}x_2^U & + & \cdots & + & a_{1n}x_n^U & = & b_1^U \\ a_{21}x_1^U & + & a_{22}x_2^U & + & \cdots & + & a_{2n}x_n^U & = & b_2^U \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1^U & + & a_{m2}x_2^U & + & \cdots & + & a_{mn}x_n^U & = & b_m^U \end{array} \tag{3.6}$$

dengan $x_1^U, x_2^U, \dots, x_n^U$ variabel tidak diketahui, $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ dan $b_1^U, b_2^U, \dots, b_m^U$ adalah konstanta bilangan riil untuk $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$.

Dengan mengubah persamaan (3.6) menjadi persamaan matriks $Ax^U = y^U$ didapatkan persamaan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^U \\ x_2^U \\ \vdots \\ x_n^U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^U \\ b_2^U \\ \vdots \\ b_m^U \end{bmatrix}. \tag{3.7}$$

3. Sistem persamaan linier yang menyatakan lebar sebelah kiri dari bilangan *fuzzy* x dan y sebagai berikut:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1^\alpha & + & a_{12}x_2^\alpha & + & \cdots & + & a_{1n}x_n^\alpha & = & b_1^\alpha \\ a_{21}x_1^\alpha & + & a_{22}x_2^\alpha & + & \cdots & + & a_{2n}x_n^\alpha & = & b_2^\alpha \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1^\alpha & + & a_{m2}x_2^\alpha & + & \cdots & + & a_{mn}x_n^\alpha & = & b_m^\alpha \end{array} \tag{3.8}$$

dengan $x_1^\alpha, x_2^\alpha, \dots, x_n^\alpha$ variabel tidak diketahui, $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ dan $b_1^\alpha, b_2^\alpha, \dots, b_m^\alpha$ adalah konstanta bilangan riil untuk $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$.

Dengan mengubah persamaan (3.8) menjadi persamaan matriks $Ax^{\alpha} = b^{\alpha}$ didapatkan persamaan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{\alpha} \\ x_2^{\alpha} \\ \vdots \\ x_n^{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{\alpha} \\ b_2^{\alpha} \\ \vdots \\ b_m^{\alpha} \end{bmatrix}. \tag{3.9}$$

4. Sistem persamaan linier yang menyatakan lebar sebelah kanan dari bilangan *fuzzy* x dan y sebagai berikut:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1^{\beta} & + & a_{12}x_2^{\beta} & + & \cdots & + & a_{1n}x_n^{\beta} & = & b_1^{\beta} \\ a_{21}x_1^{\beta} & + & a_{22}x_2^{\beta} & + & \cdots & + & a_{2n}x_n^{\beta} & = & b_2^{\beta} \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1^{\beta} & + & a_{m2}x_2^{\beta} & + & \cdots & + & a_{mn}x_n^{\beta} & = & b_m^{\beta} \end{array} \tag{3.10}$$

dengan $x_1^{\beta}, x_2^{\beta}, \dots, x_n^{\beta}$ variabel tidak diketahui, $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ dan $b_1^{\beta}, b_2^{\beta}, \dots, b_m^{\beta}$ adalah konstanta bilangan riil untuk $1 \le i \le m, 1 \le j \le n$. Dengan mengubah persamaan (3.10) menjadi persamaan matriks $Ax^{\beta} = b^{\beta}$ didapatkan persamaan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{\beta} \\ x_2^{\beta} \\ \vdots \\ x_n^{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{\beta} \\ b_2^{\beta} \\ \vdots \\ b_m^{\beta} \end{bmatrix}. \tag{3.11}$$

3.1.2 Memfaktorisasi A menjadi $U\Sigma V^T$

Matriks A pada persamaan (3.5), (3.7), (3.9), dan (3.11) dapat difaktorisasi menjadi perkalian matriks $U\Sigma V^T$. Sebagai contoh akan dicari faktorisasi A pada persamaan (3.5) sebagai berikut:

Diketahui,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = A, \begin{bmatrix} x_1^L \\ x_2^L \\ \vdots \\ x_n^L \end{bmatrix} = x^L \text{ dan } \begin{bmatrix} b_1^L \\ b_2^L \\ \vdots \\ b_m^L \end{bmatrix} = b^L$$

dengan $x_1^L, x_2^L, \dots, x_n^L$ variabel tidak diketahui, $a_{11}, a_{12}, \dots a_{mn}$ dan $b_1^L, b_2^L, \dots, b_m^L$ adalah konstanta-konstanta bilangan riil untuk $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$.

Maka A dapat difaktorisasi menjadi $U\Sigma V^T$ yang terbagi menjadi 3 kasus:

a. Jika $m = n$

Jika A adalah matriks berordo $m \times n$ dengan $m = n$, maka matriks A dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

untuk menentukan $U\Sigma V^T$, matriks A akan dibentuk menjadi matriks simetrik sehingga nilai-nilai singularnya dapat diketahui. Sehingga $A^T A$ mempunyai pendiagonal yang ortogonal, yaitu V. Dari persamaan (3.12) dapat diketahui A^T berordo $n \times n$. Selanjutnya dengan menggunakan definisi kesamaan matriks, A^T dapat dimisalkan sebagai berikut:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = B.$$

Dengan matriks B berordo $n \times n$ untuk $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$. Kemudian dicari nilai-nilai eigen dan vektor-vektor eigen dari $A^T A$, dengan cara sebagai berikut:

$$A^T A = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Dengan matriks C berordo $n \times n$ untuk $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$.

Dari persamaan (3.13) didapatkan matriks C yang unsur-unsurnya didefinisikan berdasarkan persamaan (2.13)

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Dari matriks C dapat diketahui nilai-nilai eigennya dengan menyelesaikan persamaan berikut:

$$\det(C - \lambda I) = 0$$

sehingga,

$$\left| \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \lambda & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} - \lambda & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (3.14)$$

Didapatkan polinomial karakteristik dari matriks C sebagai berikut:

$$p(\lambda)=\begin{vmatrix} c_{11}-\lambda & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22}-\lambda & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0. \quad (3.15)$$

Dengan menguraikan $\det(C-\lambda I)$ sepanjang kolom pertama didapatkan

$$p(\lambda)=\det\left(C-\lambda I\right)=(c_{11}-\lambda)\det\left(M_{11}\right)+\sum_{i=1}^{n} c_{i1}\left(-1\right)^{i+1}\det\left(M_{i1}\right)=0. \quad (3.16)$$

Dengan menyelesaikan persamaan polinomial karakteristik dari matriks C didapatkan nilai-nilai eigen sebanyak n dari matriks C berturut-turut $\lambda_i = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n)$ dengan $i = 1, 2, 3, \ldots, n.$ Selanjutnya dengan mensubstitusikan λ_i ke persamaan

$$\begin{bmatrix} c_{11}-\lambda_i & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22}-\lambda_i & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn}-\lambda_i \end{bmatrix} x = 0$$

diperoleh persamaan matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} c_{11}-\lambda_i & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22}-\lambda_i & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn}-\lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Dengan menyelesaikan persamaan (3.17) diperoleh vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_i sebagai berikut

$$\left\{x_1^{\lambda_i}, x_2^{\lambda_i}, \ldots, x_n^{\lambda_i}\right\} \quad (3.18)$$

dengan $i = 1, 2, 3, \ldots, n.$

Langkah selanjutnya dapat disusun matriks $U\Sigma V^T$ sebagai berikut:

(i) Menyusun matriks Σ

Dari λ_i maka dapat diketahui nilai-nilai singular dari persamaan $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ sehingga matriks Σ dapat disusun sebagai berikut:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \end{bmatrix}. \tag{3.19}$$

(ii) Menyusun matriks V

Dari λ_i maka dapat diketahui vektor-vektor eigennya yang akan dinormalisasikan sehingga matriks V akan menjadi matriks uniter. Maka v_i dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$v_i = \frac{1}{\sqrt{\left(x_1^{\lambda_i}\right)^2 + \left(x_2^{\lambda i}\right)^2 + \cdots + \left(x_n^{\lambda_i}\right)^2}} \begin{bmatrix} x_1^{\lambda_i} \\ x_2^{\lambda_i} \\ \vdots \\ x_n^{\lambda_i} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{x_1^{\lambda_i}}{\sqrt{\left(x_1^{\lambda_i}\right)^2 + \left(x_2^{\lambda_i}\right)^2 + \cdots + \left(x_n^{\lambda_i}\right)^2}} \\ \dfrac{x_2^{\lambda_i}}{\sqrt{\left(x_1^{\lambda_i}\right)^2 + \left(x_2^{\lambda_i}\right)^2 + \cdots + \left(x_n^{\lambda_i}\right)^2}} \\ \vdots \\ \dfrac{x_n^{\lambda_i}}{\sqrt{\left(x_1^{\lambda_i}\right)^2 + \left(x_2^{\lambda_i}\right)^2 + \cdots + \left(x_n^{\lambda_i}\right)^2}} \end{bmatrix}.$$

Sehingga matriks V dapat disusun

$$V = \left[v_1 \,|\, v_2 \,|\, \cdots \,|\, v_i\right] \in R^{n \times n}. \tag{3.20}$$

(iii) Menyusun matriks U

Setelah diketahui σ_i dan v_i, maka u_i dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{x_1^{\lambda_i}}{\sqrt{\left(x_1^{\lambda_i}\right)^2 + \left(x_2^{\lambda_i}\right)^2 + \cdots + \left(x_n^{\lambda_i}\right)^2}} \\ \dfrac{x_2^{\lambda_i}}{\sqrt{\left(x_1^{\lambda_i}\right)^2 + \left(x_2^{\lambda_i}\right)^2 + \cdots + \left(x_n^{\lambda_i}\right)^2}} \\ \vdots \\ \dfrac{x_n^{\lambda_i}}{\sqrt{\left(x_1^{\lambda_i}\right)^2 + \left(x_2^{\lambda_i}\right)^2 + \cdots + \left(x_n^{\lambda_i}\right)^2}} \end{bmatrix}$$

maka matriks U dapat disusun sebagai berikut:

$$U = \left[u_1 \,|\, u_2 \,|\cdots|\, u_i\right] \in R^{n\times n}. \qquad (3.21)$$

Sehingga matriks A dapat difaktorisasi menjadi $A = U\Sigma V^T$ yang disusun dari persamaan (3.21), (3.19), dan (3.20).

b. Jika $m > n$

Jika A adalah matriks berordo $m \times n$ dengan $m > n$, maka matriks A dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}. \qquad (3.22)$$

Dari matriks A dapat diketahui A^T adalah matriks berordo $n \times m$. Selanjutnya dengan menggunakan definisi kesamaan matriks, A^T dapat dimisalkan sebagai berikut:

$$A^T = B$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

Dengan matriks B berordo $n \times m$ untuk $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$. Kemudian dicari nilai-nilai eigen dan vektor-vektor eigen dari $A^T A$, dengan cara sebagai berikut:

$$A^T A = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \qquad (3.23)$$

dengan C berordo $n \times n$ untuk $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$.

Dari persamaan (3.23) didapatkan matriks C yang unsur-unsurnya didefinisikan berdasarkan persamaan (2.13)

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Dari matriks C dapat diketahui nilai-nilai eigennya dengan menyelesaikan persamaan berikut:

$$\det(C - \lambda I) = 0,$$

sehingga,

$$\left| \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \lambda & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} - \lambda & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.24)$$

Didapatkan polinomial karakteristik dari matriks C sebagai berikut:

$$p(\lambda)=\begin{vmatrix} c_{11}-\lambda & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22}-\lambda & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0. \qquad (3.25)$$

Dengan menguraikan $\det(C-\lambda I)$ sepanjang kolom pertama didapatkan

$$p(\lambda)=\det\left(C-\lambda I\right)=(c_{11}-\lambda)\det\left(M_{11}\right)+\sum_{i=1}^{n} c_{i1}\left(-1\right)^{i+1}\det\left(M_{i1}\right)=0. \quad (3.26)$$

Dengan menyelesaikan persamaan polinomial karakteristik dari matriks C didapatkan nilai-nilai eigen dari matriks C berturut-turut $\lambda_i = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n)$ dengan $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Selanjutnya dengan mensubstitusikan λ_i ke persamaan

$$\begin{bmatrix} c_{11}-\lambda_i & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22}-\lambda_i & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn}-\lambda_i \end{bmatrix} X = 0$$

diperoleh persamaan matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} c_{11}-\lambda_i & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22}-\lambda_i & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn}-\lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (3.27)$$

Dengan menyelesaikan persamaan (3.17) diperoleh vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_i sebagai berikut:

$$\left\{x_1^{\lambda_i}, x_2^{\lambda_i}, \ldots, x_n^{\lambda_i}\right\} \qquad (3.28)$$

dengan $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Langkah selanjutnya dapat disusun matriks $U\Sigma V^T$ sebagai berikut:

(i) Menyusun matriks Σ

Jika $m > n$, dari $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ maka Σ dapat disusun sebagai berikut:

$$\Sigma = \left[\frac{\Sigma_1}{0} \right] \tag{3.29}$$

dengan

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \end{bmatrix} \tag{3.30}$$

dan 0 adalah matriks 0 berordo $(m-n) \times n$.

(ii) Menyusun matriks V

Dari λ_i maka dapat diketahui vektor-vektor eigennya sehingga v_i dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$v_i = \frac{1}{\sqrt{\left(x_1^{\lambda_i}\right)^2 + \left(x_2^{\lambda i}\right)^2 + \cdots + \left(x_n^{\lambda_i}\right)^2}} \begin{bmatrix} x_1^{\lambda_i} \\ x_2^{\lambda_i} \\ \vdots \\ x_n^{\lambda_i} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{x_1^{\lambda_i}}{\sqrt{\left(x_1^{\lambda_i}\right)^2 + \left(x_2^{\lambda_i}\right)^2 + \cdots + \left(x_n^{\lambda_i}\right)^2}} \\ \dfrac{x_2^{\lambda_i}}{\sqrt{\left(x_1^{\lambda_i}\right)^2 + \left(x_2^{\lambda_i}\right)^2 + \cdots + \left(x_n^{\lambda_i}\right)^2}} \\ \vdots \\ \dfrac{x_n^{\lambda_i}}{\sqrt{\left(x_1^{\lambda_i}\right)^2 + \left(x_2^{\lambda_i}\right)^2 + \cdots + \left(x_n^{\lambda_i}\right)^2}} \end{bmatrix}.$$

Sehingga matriks V dapat disusun

$$V = \left[v_1 \mid v_2 \mid \cdots \mid v_i \right] \in R^{n \times n}. \tag{3.31}$$

(iii) Menyusun matriks U

Setelah diketahui σ_i dan v_i, maka u_i dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$u_i = \frac{1}{\sigma_i} Av_i$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{x_1^{\lambda_i}}{\sqrt{\left(x_1^{\lambda_i}\right)^2 + \left(x_2^{\lambda_i}\right)^2 + \cdots + \left(x_n^{\lambda_i}\right)^2}} \\ \dfrac{x_2^{\lambda_i}}{\sqrt{\left(x_1^{\lambda_i}\right)^2 + \left(x_2^{\lambda_i}\right)^2 + \cdots + \left(x_n^{\lambda_i}\right)^2}} \\ \vdots \\ \dfrac{x_n^{\lambda_i}}{\sqrt{\left(x_1^{\lambda_i}\right)^2 + \left(x_2^{\lambda_i}\right)^2 + \cdots + \left(x_n^{\lambda_i}\right)^2}} \end{bmatrix}.$$

Sehingga matriks U dapat disusun $U = [U_1 \mid U_2]$, dengan

$$U_1 = [u_1 \mid \cdots \mid u_n] \in R^{m \times n}, \quad U_2 = [u_{n+1} \mid \cdots \mid u_m] \in R^{m \times (m-n)}. \tag{3.32}$$

Sehingga diperoleh

$$A = U\Sigma V^T = [U_1 \mid U_2] \begin{bmatrix} \Sigma_1 \\ 0 \end{bmatrix} V^T = U_1 \Sigma_1 V^T. \tag{3.33}$$

c. Jika $m < n$

Jika A adalah matriks berordo $m \times n$ dengan $m < n$, maka matriks A dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}. \tag{3.34}$$

Dari matriks A dapat diketahui A^T adalah matriks berordo $n \times m$. Selanjutnya dengan menggunakan definisi kesamaan matriks, A^T dapat dimisalkan sebagai berikut:

$$A^T = B$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

dengan matriks B berordo $n \times m$ untuk $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$. Kemudian dicari nilai-nilai eigen dan vektor-vektor eigen dari $A^T A$, dengan cara sebagai berikut:

$$A^T A = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

dengan C berordo $n \times n$ untuk $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$.

Dari persamaan (3.23) didapatkan matriks C yang unsur-unsurnya didefinisikan berdasarkan persamaan (2.13) diperoleh:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Dari matriks C dapat diketahui nilai-nilai eigennya dengan menyelesaikan persamaan berikut:

$$\det(C - \lambda I) = 0$$

sehingga,

$$\left| \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} c_{11}-\lambda & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22}-\lambda & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{3.36}$$

Didapatkan polinomial karakteristik dari matriks C sebagai berikut:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} c_{11}-\lambda & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22}-\lambda & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{3.37}$$

Dengan menguraikan $\det(C - \lambda I)$ sepanjang kolom pertama didapatkan persamaan (3.38)

$$p(\lambda) = \det\left(C - \lambda I\right) = (c_{11}-\lambda)\det\left(M_{11}\right) + \sum_{i=1}^{n} c_{i1}\left(-1\right)^{i+1}\det\left(M_{i1}\right) = 0. \tag{3.38}$$

Dengan menyelesaikan persamaan polinomial karakteristik dari matriks C didapatkan nilai-nilai eigen dari matriks C berturut-turut $\lambda_i = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n)$ dengan $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Selanjutnya dengan mensubstitusikan λ_i ke persamaan

$$\begin{bmatrix} c_{11}-\lambda_i & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22}-\lambda_i & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn}-\lambda_i \end{bmatrix} X = 0$$

diperoleh persamaan matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} c_{11}-\lambda_i & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22}-\lambda_i & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn}-\lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.39}$$

Dengan menyelesaikan persamaan (3.17) diperoleh vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_i sebagai berikut

$$\left\{x_1^{\lambda_i}, x_2^{\lambda_i}, \dots, x_n^{\lambda_i}\right\} \tag{3.40}$$

dengan $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Langkah selanjutnya dapat disusun matriks $U\Sigma V^T$ sebagai berikut:

(i) Menyusun matriks Σ

Jika $m < n$, dari $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ maka Σ dapat disusun sebagai berikut

$$\Sigma = [\Sigma_1 \,|\, 0], \tag{3.41}$$

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_m \end{bmatrix} \tag{3.42}$$

dengan $\Sigma_1 \in R^{m \times n}$ mempunyai diagonal-diagonal utamanya $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ dan 0 adalah $m \times (n - m)$ matriks nol.

(ii) Menyusun matriks V

Dari λ_i maka dapat diketahui vektor-vektor eigennya sehingga v_i dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$v_i = \frac{1}{\sqrt{\left(x_1^{\lambda_i}\right)^2 + \left(x_2^{\lambda i}\right)^2 + \cdots + \left(x_n^{\lambda_i}\right)^2}} \begin{bmatrix} x_1^{\lambda_i} \\ x_2^{\lambda_i} \\ \vdots \\ x_n^{\lambda_i} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{x_1^{\lambda_i}}{\sqrt{\left(x_1^{\lambda_i}\right)^2 + \left(x_2^{\lambda_i}\right)^2 + \cdots + \left(x_n^{\lambda_i}\right)^2}} \\ \dfrac{x_2^{\lambda_i}}{\sqrt{\left(x_1^{\lambda_i}\right)^2 + \left(x_2^{\lambda_i}\right)^2 + \cdots + \left(x_n^{\lambda_i}\right)^2}} \\ \vdots \\ \dfrac{x_n^{\lambda_i}}{\sqrt{\left(x_1^{\lambda_i}\right)^2 + \left(x_2^{\lambda_i}\right)^2 + \cdots + \left(x_n^{\lambda_i}\right)^2}} \end{bmatrix}.$$

Dituliskan $V = [V_1 | V_2]$, dengan

$$V_1 = \left[v_1 | \cdots | v_m \right] \in R^{n \times m}, \quad V_2 = \left[v_{m+1} | \cdots | v_n \right] \in R^{n \times (n-m)}. \tag{3.43}$$

(iii) Menyusun matriks U

Setelah diketahui σ_i dan v_i, maka u_i dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{x_1^{\lambda_i}}{\sqrt{\left(x_1^{\lambda_i}\right)^2 + \left(x_2^{\lambda_i}\right)^2 + \cdots + \left(x_n^{\lambda_i}\right)^2}} \\ \dfrac{x_2^{\lambda_i}}{\sqrt{\left(x_1^{\lambda_i}\right)^2 + \left(x_2^{\lambda_i}\right)^2 + \cdots + \left(x_n^{\lambda_i}\right)^2}} \\ \vdots \\ \dfrac{x_n^{\lambda_i}}{\sqrt{\left(x_1^{\lambda_i}\right)^2 + \left(x_2^{\lambda_i}\right)^2 + \cdots + \left(x_n^{\lambda_i}\right)^2}} \end{bmatrix}$$

maka matriks U dapat didefinisikan

$$U = [u_1 | u_2 | \cdots | u_i].$$

Sehingga diperoleh

$$A = U \Sigma V^T = U \left[\Sigma_1 | 0 \right] \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} = U \Sigma_1 V_1^T. \tag{3.44}$$

3.1.3 Menyelesaikan Sistem Persamaan Linier Bilangan *Fuzzy* Trapesium Menggunakan *Singular Value Decomposition*

Sistem persamaan linier bilangan *fuzzy* trapesium dapat diselesaikan menggunakan *singular value decomposition* menggunakan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Sistem persamaan linier bilangan *fuzzy* trapesium diubah menjadi sistem persamaan linier. Sehingga dengan menguraikan bilangan *fuzzy* yang terdapat di sistem persamaan linier bilangan *fuzzy* trapesium didapatkan persamaan (3.4), (3.5), (3.6), dan (3.7).

2. Mengubah persamaan (3.4), (3.5), (3.6), dan (3.7) ke dalam bentuk persamaan matriks

$$Ax = b.$$

Sehingga persamaan (3.4) menjadi $Ax^L = b^L$, persamaan (3.5) menjadi $Ax^U = b^U$, persamaan (3.6) menjadi $Ax^\alpha = b^\alpha$, dan persamaan (3.7) menjadi $Ax^\beta = b^\beta$.

3. Memfaktorisasi A menjadi $U\Sigma V^T$, untuk mendapatkan basis ortonormal $R(A)$, $N(A^T)$, $R(A^T)$, dan $N(A)$.

4. Menentukan solusi dari sistem persamaan linier dari $Ax^L = b^L$ dengan mengetahui apakah b^L berada di dalam $R(A)$ atau tidak di dalam $R(A)$. Maka ada dua kemungkinan, yakni:

   i. Jika $b^L \in R(A)$, maka $b^L = proy_{R(A)} b^L$ yang menunjukkan bahwa $Ax^L = b^L$ mempunyai solusi yang diberikan oleh

   $$x^L = \sum_{k=1}^{r} \frac{\langle b^L, u_k \rangle}{\sigma_k} v_k.$$

   ii. Jika $b \notin R(A)$, maka $b \neq proy_{R(A)} b$ yang menunjukkan bahwa $Ax^L = b^L$ tidak mempunyai solusi. Namun dapat dicari solusi terdekatnya yang diberikan oleh

   $$x_r^L = \sum_{k=1}^{r} \frac{\langle b^L, u_k \rangle}{\sigma_k} v_k.$$

5. Menentukan solusi dari sistem persamaan linier dari $Ax^U = b^U$ dengan mengetahui apakah b^U berada di dalam $R(A)$ atau tidak di dalam $R(A)$. Maka ada dua kemungkinan, yakni:

i. Jika $b^U \in R(A)$, maka $b^U = proy_{R(A)} b^U$ yang menunjukkan bahwa $Ax^U = b^U$ mempunyai solusi yang diberikan oleh

$$x^U = \sum_{k=1}^{r} \frac{\langle b^U, u_k \rangle}{\sigma_k} v_k.$$

ii. Jika $b^U \notin R(A)$, maka $b^U \neq proy_{R(A)} b^U$ yang menunjukkan bahwa $Ax^U = b^U$ tidak mempunyai solusi. Namun dapat dicari solusi terdekatnya yang diberikan oleh

$$x_r^U = \sum_{k=1}^{r} \frac{\langle b^U, u_k \rangle}{\sigma_k} v_k.$$

6. Menentukan solusi dari sistem persamaan linier dari $Ax^\alpha = b^\alpha$ dengan mengetahui apakah b^α berada di dalam $R(A)$ atau tidak di dalam $R(A)$. Maka ada dua kemungkinan, yakni:

i. Jika $b^\alpha \in R(A)$, maka $b^\alpha = proy_{R(A)} b^\alpha$ yang menunjukkan bahwa $Ax^\alpha = b^\alpha$ mempunyai solusi yang diberikan oleh

$$x^\alpha = \sum_{k=1}^{r} \frac{\langle b^\alpha, u_k \rangle}{\sigma_k} v_k.$$

ii. Jika $b^\alpha \notin R(A)$, maka $b^\alpha \neq proy_{R(A)} b^\alpha$ yang menunjukkan bahwa $Ax^\alpha = b^\alpha$ tidak mempunyai solusi. Namun dapat dicari solusi terdekatnya yang diberikan oleh

$$x_r^\alpha = \sum_{k=1}^{r} \frac{\langle b^\alpha, u_k \rangle}{\sigma_k} v_k.$$

7. Menentukan solusi dari sistem persamaan linier dari $Ax^\beta = b^\beta$ dengan mengetahui apakah b^β berada di dalam $R(A)$ atau tidak di dalam $R(A)$. Maka ada dua kemungkinan, yakni:

i. Jika $b^{\beta} \in R(A)$, maka $b^{\beta} = proy_{R(A)} b^{\beta}$ yang menunjukkan bahwa $Ax^{\beta} = b^{\beta}$ mempunyai solusi yang diberikan oleh

$$x^{\beta} = \sum_{k=1}^{r} \frac{\langle b^{\beta}, u_k \rangle}{\sigma_k} v_k.$$

ii. Jika $b^{\beta} \notin R(A)$, maka $b^{\beta} \neq proy_{R(A)} b^{\beta}$ yang menunjukkan bahwa $Ax^{\beta} = b^{\beta}$ tidak mempunyai solusi. Namun dapat dicari solusi terdekatnya yang diberikan oleh

$$x_r^{\beta} = \sum_{k=1}^{r} \frac{\langle b^{\beta}, u_k \rangle}{\sigma_k} v_k.$$

8. Mensubstitusikan hasil penyelesaian sistem persamaan linier ke sistem persamaan linier *fuzzy*.

Berikut ini adalah contoh penyelesaian sistem persamaan linier *fuzzy* bilangan trapesium menggunakan *singular value decomposition*:

Contoh:

Diberikan sistem persamaan linier *fuzzy* trapesium sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 &= (3,\ 5,\ 2,\ 3) \\ 2\tilde{x}_1 + 3\tilde{x}_2 &= (1,\ 3,\ 1,\ 2) \\ 2\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 &= (10,\ 12,\ 9,\ 10), \end{aligned} \tag{3.45}$$

dengan

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= (x_1^L, x_1^U, x_1^{\alpha}, x_1^{\beta}) \\ \tilde{x}_2 &= (x_2^L, x_2^U, x_2^{\alpha}, x_2^{\beta}). \end{aligned} \tag{3.46}$$

Maka persamaan (3.45) menjadi

$$\begin{aligned} (x_1^L, x_1^U, x_1^{\alpha}, x_1^{\beta}) + (x_2^L, x_2^U, x_2^{\alpha}, x_2^{\beta}) &= (3,\ 5,\ 2,\ 3) \\ 2(x_1^L, x_1^U, x_1^{\alpha}, x_1^{\beta}) + 3(x_2^L, x_2^U, x_2^{\alpha}, x_2^{\beta}) &= (1,\ 3,\ 1,\ 2) \\ 2(x_1^L, x_1^U, x_1^{\alpha}, x_1^{\beta}) + (x_2^L, x_2^U, x_2^{\alpha}, x_2^{\beta}) &= (10,\ 12,\ 9,\ 10). \end{aligned} \tag{3.47}$$

Dengan menggunakan definisi perkalian matriks dengan skalar persamaan (3.47) menjadi

$$\begin{gathered}(x_1^L, x_1^U, x_1^\alpha, x_1^\beta) + (x_2^L, x_2^U, x_2^\alpha, x_2^\beta) = (3,\ 5,\ 2,\ 3)\\ (2x_1^L, 2x_1^U, 2x_1^\alpha, 2x_1^\beta) + (3x_2^L, 3x_2^U, 3x_2^\alpha, 3x_2^\beta) = (1,\ 3,\ 1,\ 2)\\ (2x_1^L, 2x_1^U, 2x_1^\alpha, 2x_1^\beta) + (x_2^L, x_2^U, x_2^\alpha, x_2^\beta) = (10,\ 12,\ 9,\ 10).\end{gathered} \tag{3.48}$$

Dari persamaan (3.48) didapatkan empat persamaan matriks dengan menggunakan definisi kesamaan pada bilangan *fuzzy*, sehingga persamaan (3.48) menjadi

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1^L\\ x_2^L\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\ 1\\ 10\end{bmatrix} \tag{3.49}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1^U\\ x_2^U\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\ 3\\ 12\end{bmatrix} \tag{3.50}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1^\alpha\\ x_2^\alpha\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\ 1\\ 9\end{bmatrix} \tag{3.51}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1^\beta\\ x_2^\beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\ 2\\ 10\end{bmatrix}. \tag{3.52}$$

Diberikan persamaan (3.49) yakni:

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1^L\\ x_2^L\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\ 1\\ 10\end{bmatrix}$$

dapat diketahui

$$A = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix}x_1^L\\ x_2^L\end{bmatrix}, \text{ dan } \quad b = \begin{bmatrix}3\\ 1\\ 10\end{bmatrix}.$$

Maka A dapat difaktorisasi menjadi $U\Sigma V^T$ dengan langkah-langkah sebagai berikut:

(i) Mencari nilai-nilai eigen dan vektor-vektor eigen dari $A^T A$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 9 \\ 9 & 11 \end{bmatrix}. \qquad (3.53)$$

Dari persamaan (3.53) didapatkan polinomial karakteristik sebagai berikut:

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda_i & 9 \\ 9 & 11-\lambda_i \end{vmatrix} = 0$$
$$\lambda_i^2 - 20\lambda_i + 18 = 0.$$

Sehingga didapatkan $\lambda_1 = \sqrt{82} + 10$ dan $\lambda_2 = -\sqrt{82} + 10$. Kemudian didapatkan vektor eigen dari λ_1 adalah $\left[\frac{\sqrt{82}-1}{9},\ 1\right]$, vektor eigen dari λ_2 adalah $\left[\frac{-\sqrt{82}-1}{9},\ 1\right]$.

(ii) Menyusun matriks Σ

Dari langkah (i) maka dapat diketahui nilai-nilai singular dari matriks A sehingga didapatkan matriks Σ sebagai berikut:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{\sqrt{82}+10} & 0 \\ 0 & \sqrt{-\sqrt{82}+10} \end{bmatrix}.$$

(iii) Menyusun matriks V

Dengan mendefinisikan v_i berdasarkan persamaan (2.29) dapat dicari v_1 dan v_2 sebagai berikut:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{82}-1}{8}\right)^2 + (1)^2}} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{82}-1}{8} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{9\left(\frac{1}{9}\sqrt{82}-\frac{1}{9}\right)}{\sqrt{164-2\sqrt{82}}} \\ \dfrac{9}{\sqrt{164-2\sqrt{82}}} \end{bmatrix}.$$

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{-\sqrt{82}-1}{9}\right)^2 + (1)^2}} \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{82}-1}{9} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{9\left(-\frac{1}{9}\sqrt{82}-\frac{1}{9}\right)}{\sqrt{164+2\sqrt{82}}} \\ \dfrac{9}{\sqrt{164+2\sqrt{82}}} \end{bmatrix}.$$

Sehingga,

$$V^T = \begin{bmatrix} \dfrac{9\left(\frac{1}{9}\sqrt{82}-\frac{1}{9}\right)}{\sqrt{164-2\sqrt{82}}} & \dfrac{9}{\sqrt{164-2\sqrt{82}}} \\ \dfrac{9\left(-\frac{1}{9}\sqrt{82}-\frac{1}{9}\right)}{\sqrt{164+2\sqrt{82}}} & \dfrac{9}{\sqrt{164+2\sqrt{82}}} \end{bmatrix}.$$

(iv) Menyusun matriks U

Berdasarkan persamaan (2.30) u_1 dan u_2 dapat ditentukan. Sehingga didapatkan

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{82}+10}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{9\left(\frac{1}{9}\sqrt{82}-\frac{1}{9}\right)}{\sqrt{164-2\sqrt{82}}} \\ \dfrac{9}{\sqrt{164-2\sqrt{82}}} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{82}+8}{\left(\sqrt{\sqrt{82}+10}\right)\left(\sqrt{164-2\sqrt{82}}\right)} \\ \dfrac{2\sqrt{82}+25}{\left(\sqrt{\sqrt{82}+10}\right)\left(\sqrt{164-2\sqrt{82}}\right)} \\ \dfrac{2\sqrt{82}+7}{\left(\sqrt{\sqrt{82}+10}\right)\left(\sqrt{164-2\sqrt{82}}\right)} \end{bmatrix}.$$

$$u_2=\frac{1}{\sqrt{-\sqrt{82}+10}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{9\left(-\frac{1}{9}\sqrt{82}-\frac{1}{9}\right)}{\sqrt{164+2\sqrt{82}}} \\ \dfrac{9}{\sqrt{164+2\sqrt{82}}} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{1476}\sqrt{-\sqrt{82}+10}\sqrt{164+2\sqrt{82}}\sqrt{82} \\ \dfrac{-2\sqrt{82}+25}{\left(\sqrt{-\sqrt{82}+10}\right)\left(\sqrt{164+2\sqrt{82}}\right)} \\ \dfrac{-2\sqrt{82}+7}{\left(\sqrt{-\sqrt{82}+10}\right)\left(\sqrt{164+2\sqrt{82}}\right)} \end{bmatrix}.$$

Setelah didapatkan u_1 dan u_2 matriks U dapat disusun sebagai berikut:

$$U=\begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{82}+8}{\left(\sqrt{\sqrt{82}+10}\right)\left(\sqrt{164-2\sqrt{82}}\right)} & -\dfrac{1}{1476}\sqrt{-\sqrt{82}+10}\sqrt{164+2\sqrt{82}}\sqrt{82} \\ \dfrac{2\sqrt{82}+25}{\left(\sqrt{\sqrt{82}+10}\right)\left(\sqrt{164-2\sqrt{82}}\right)} & \dfrac{-2\sqrt{82}+25}{\left(\sqrt{-\sqrt{82}+10}\right)\left(\sqrt{164+2\sqrt{82}}\right)} \\ \dfrac{2\sqrt{82}+7}{\left(\sqrt{\sqrt{82}+10}\right)\left(\sqrt{164-2\sqrt{82}}\right)} & \dfrac{-2\sqrt{82}+7}{\left(\sqrt{-\sqrt{82}+10}\right)\left(\sqrt{164+2\sqrt{82}}\right)} \end{bmatrix}.$$

Dari langkah (i) sampai langkah (iv) dapat diketahui $U, \Sigma,$ dan V^T sehingga

$$A = U\Sigma V^{T}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{82}+8}{\left(\sqrt{\sqrt{82}+10}\right)\left(\sqrt{164-2\sqrt{82}}\right)} & -\dfrac{1}{1476}\sqrt{-\sqrt{82}+10}\sqrt{164+2\sqrt{82}}\sqrt{82} \\ \dfrac{2\sqrt{82}+25}{\left(\sqrt{\sqrt{82}+10}\right)\left(\sqrt{164-2\sqrt{82}}\right)} & \dfrac{-2\sqrt{82}+25}{\left(\sqrt{-\sqrt{82}+10}\right)\left(\sqrt{164+2\sqrt{82}}\right)} \\ \dfrac{2\sqrt{82}+7}{\left(\sqrt{\sqrt{82}+10}\right)\left(\sqrt{164-2\sqrt{82}}\right)} & \dfrac{-2\sqrt{82}+7}{\left(\sqrt{-\sqrt{82}+10}\right)\left(\sqrt{164+2\sqrt{82}}\right)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\sqrt{82}+10} & 0 \\ 0 & \sqrt{-\sqrt{82}+10} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{9\left(\frac{1}{9}\sqrt{82}-\frac{1}{9}\right)}{\sqrt{164-2\sqrt{82}}} & \dfrac{9}{\sqrt{164-2\sqrt{82}}} \\ \dfrac{9\left(-\frac{1}{9}\sqrt{82}-\frac{1}{9}\right)}{\sqrt{164+2\sqrt{82}}} & \dfrac{9}{\sqrt{164+2\sqrt{82}}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{82}+8}{\sqrt{164-2\sqrt{82}}} & -\dfrac{1}{1476}\left(-\sqrt{82}+10\right)\sqrt{164+2\sqrt{82}\sqrt{82}} \\ \dfrac{2\sqrt{82}+25}{\sqrt{164-2\sqrt{82}}} & \dfrac{-2\sqrt{82}+25}{\sqrt{164+2\sqrt{82}}} \\ \dfrac{2\sqrt{82}+7}{\sqrt{164-2\sqrt{82}}} & \dfrac{-\sqrt{82}+7}{\sqrt{164+2\sqrt{82}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{9\left(\frac{1}{9}\sqrt{82}-\frac{1}{9}\right)}{\sqrt{164-2\sqrt{82}}} & \dfrac{9}{\sqrt{164-2\sqrt{82}}} \\ \dfrac{9\left(-\frac{1}{9}\sqrt{82}-\frac{1}{9}\right)}{\sqrt{164+2\sqrt{82}}} & \dfrac{9}{\sqrt{164+2\sqrt{82}}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\left(\sqrt{82}+8\right)\left(\sqrt{82}-1\right)}{164-2\sqrt{82}} - \dfrac{1}{1476}\left(-\sqrt{82}+10\right)\sqrt{82}\left(-\sqrt{82}-1\right) & \dfrac{9\left(\sqrt{82}+8\right)}{164-2\sqrt{82}} - \dfrac{1}{164}\left(-\sqrt{82}+10\right)\sqrt{82} \\ \dfrac{\left(2\sqrt{82}+25\right)\left(\sqrt{82}-1\right)}{164-2\sqrt{82}} + \dfrac{\left(-2\sqrt{82}+25\right)\left(-\sqrt{82}-1\right)}{164+2\sqrt{82}} & \dfrac{9\left(2\sqrt{82}+25\right)}{164-2\sqrt{82}} + \dfrac{9\left(-2\sqrt{82}+25\right)}{164+2\sqrt{82}} \\ \dfrac{\left(2\sqrt{82}+7\right)\left(\sqrt{82}-1\right)}{164-2\sqrt{82}} + \dfrac{\left(-2\sqrt{82}+7\right)\left(-\sqrt{82}-1\right)}{164+2\sqrt{82}} & \dfrac{9\left(2\sqrt{82}+7\right)}{164-2\sqrt{82}} + \dfrac{9\left(-2\sqrt{82}+7\right)}{164+2\sqrt{82}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Dari hasil faktorisasi persamaan (3.49), dapat ditentukan basis-basis ortonormal untuk $R(A)$, $R(A^H)$, $N(A)$, dan $N(A^H)$, yaitu :

$$\text{Basis dari } (RA):\{u_1,u_2\}=\left\{\begin{bmatrix}\dfrac{\sqrt{82}+8}{\left(\sqrt{\sqrt{82}+10}\right)\left(\sqrt{164-2\sqrt{82}}\right)}\\ \dfrac{2\sqrt{82}+25}{\left(\sqrt{\sqrt{82}+10}\right)\left(\sqrt{164-2\sqrt{82}}\right)}\\ \dfrac{2\sqrt{82}+7}{\left(\sqrt{\sqrt{82}+10}\right)\left(\sqrt{164-2\sqrt{82}}\right)}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{1476}\sqrt{-\sqrt{82}+10}\sqrt{164+2\sqrt{82}}\sqrt{82}\\ \dfrac{-2\sqrt{82}+25}{\left(\sqrt{-\sqrt{82}+10}\right)\left(\sqrt{164+2\sqrt{82}}\right)}\\ \dfrac{-2\sqrt{82}+7}{\left(\sqrt{-\sqrt{82}+10}\right)\left(\sqrt{164+2\sqrt{82}}\right)}\end{bmatrix}\right\}.$$

$$\text{Basis dari } R(A^T):\{v_1,v_2\}=\left\{\begin{bmatrix}\dfrac{9\left(\frac{1}{9}\sqrt{82}-\frac{1}{9}\right)}{\sqrt{164-2\sqrt{82}}}\\ \dfrac{9}{\sqrt{164-2\sqrt{82}}}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\dfrac{9\left(-\frac{1}{9}\sqrt{82}-\frac{1}{9}\right)}{\sqrt{164+2\sqrt{82}}}\\ \dfrac{9}{\sqrt{164+2\sqrt{82}}}\end{bmatrix}\right\}.$$

Basis dari $N(A)$: $\{v_3\}=\{\emptyset\}$.

Basis dari $N(A^T)$: $\{u_3\}=\{\emptyset\}$.

Kemudian akan ditentukan apakah b sama dengan proyeksi b pada $R(A)$.

$$\begin{aligned} proy_{R(A)}b &= \sum_{k=1}^{r}\langle b,u_k\rangle u_k \\ &= \langle b,u_1\rangle u_1+\langle b,u_2\rangle u_2 \\ &= \begin{bmatrix}\frac{25}{9}\\ \frac{19}{18}\\ \frac{181}{18}\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}2,78\\ 1,02\\ 10,01\end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Berdasarkan perhitungan tersebut diperoleh $proy_{R(A)}b\neq b$. Karena $proy_{R(A)}b\neq b$, berarti $b\notin R(A)$. Hal tersebut menandakan sistem persamaan linier ini tidak mempunyai solusi, namun dapat dihitung pendekatan terbaik dari solusinya. Sehingga solusinya diketahui sebagai berikut :

$$x_r = \sum_{k=1}^{r} \frac{\langle b, u_k \rangle}{\sigma_k} v_k \quad = \frac{\langle b, u_1 \rangle}{\sigma_1} v_1 + \frac{\langle b, u_2 \rangle}{\sigma_2} v_2$$
$$= \begin{bmatrix} 7278 \times 10^{-3} \\ -45 \times 10^{-1} \end{bmatrix}.$$

Jadi solusi terdekat dari persamaan (3.49) adalah :

$$\begin{bmatrix} x_1^L \\ x_2^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7278 \times 10^{-3} \\ -45 \times 10^{-1} \end{bmatrix}.$$

Sehingga dengan menggunakan cara yang sama solusi pendekatan dari sistem persamaan linier pada persamaan (3.50), (3.51), dan (3.52) berturut-turut sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} x_1^U \\ x_2^U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8389 \times 10^{-3} \\ -45 \times 10^{-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1^\alpha \\ x_2^\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6444 \times 10^{-3} \\ -4 \end{bmatrix}, \text{ dan } \begin{bmatrix} x_1^\beta \\ x_2^\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Jika diberikan sistem persamaan (3.45), maka penyelesaiannya adalah sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} x_1^L \\ x_2^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7278 \times 10^{-3} \\ -45 \times 10^{-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1^U \\ x_2^U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8389 \times 10^{-3} \\ -45 \times 10^{-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1^\alpha \\ x_2^\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6444 \times 10^{-3} \\ -4 \end{bmatrix}, \text{ dan } \begin{bmatrix} x_1^\beta \\ x_2^\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \end{bmatrix}. \quad (3.54)$$

Sehingga dengan mensubstitusikan persamaan (3.54) ke persamaan (3.46) dapat diketahui

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= \left(7278 \times 10^{-3},\ 8389 \times 10^{-3},\ 6444 \times 10^{-3},\ 7\right) \\ \tilde{x}_2 &= \left(-45 \times 10^{-1},\ -45 \times 10^{-1},\ -4,\ -4\right) \end{aligned} \quad (3.55)$$

adalah solusi dari persamaan (3.45). Solusi dari persamaan (3.45) dapat diketahui valid apa tidak dengan menggunakan Definisi 2.11. Sehingga persamaan (3.55) dapat disubstitusikan ke salah satu persamaan (3.45) sebagai berikut:

$$\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = \tilde{4}$$

$$\left(7278\times10^{-3},\ 8389\times10^{-3},\ 6444\times10^{-3},\ 7\right)+\left(-45\times10^{-1},\ -45\times10^{-1},\ -4,\ -4\right)=(3,\ 5,\ 2,\ 3) \quad (3.56)$$

$$\left(2778\times10^{-3},\ 3889\times10^{-3},\ 2444\times10^{-3},\ 3\right)=(3,\ 5,\ 2,\ 3).$$

Sehingga dari persamaan (3.56) dapat diketahui bahwa persamaan (3.55) adalah solusi pendekatan dari persamaan (3.45).

3.2 Konsep *Fuzzy* dalam Agama Islam

Fuzzy dalam bahasa diartikan sebagai sesuatu yang kabur atau samar-samar. Dalam al-Quran pembahasan tentang *fuzzy* yang membahas tentang kebenaran atau kesalahan suatu nilai disebutkan dalam QS. Ali Imran/3:7 yaitu:

هُوَ ٱلَّذِيٓ أَنزَلَ عَلَيۡكَ ٱلۡكِتَٰبَ مِنۡهُ ءَايَٰتٞ مُّحۡكَمَٰتٌ هُنَّ أُمُّ ٱلۡكِتَٰبِ وَأُخَرُ مُتَشَٰبِهَٰتٞۖ فَأَمَّا ٱلَّذِينَ
فِي قُلُوبِهِمۡ زَيۡغٞ فَيَتَّبِعُونَ مَا تَشَٰبَهَ مِنۡهُ ٱبۡتِغَآءَ ٱلۡفِتۡنَةِ وَٱبۡتِغَآءَ تَأۡوِيلِهِۦۖ وَمَا يَعۡلَمُ تَأۡوِيلَهُۥٓ إِلَّا ٱللَّهُۗ
وَٱلرَّٰسِخُونَ فِي ٱلۡعِلۡمِ يَقُولُونَ ءَامَنَّا بِهِۦ كُلّٞ مِّنۡ عِندِ رَبِّنَاۗ وَمَا يَذَّكَّرُ إِلَّآ أُوْلُواْ ٱلۡأَلۡبَٰبِ ٧

"Dia-lah yang menurunkan al-kitab (al-Quran) kepada kamu. Di antara (isi) nya ada ayat-ayat yang muhkamat, itulah pokok-pokok isi al-Quran dan yang lain (ayat-ayat) mutasyabihat. Adapun orang-orang yang dalam hatinya condong kepada kesesatan, maka mereka mengikuti sebagian ayat-ayat yang mutasyabihat dari padanya untuk menimbulkan fitnah untuk mencari-cari ta'wilnya, padahal tidak ada yang mengetahui ta'wilnya melainkan Allah. Dan orang-orang yang mendalam ilmunya berkata: "Kami beriman kepada ayat-ayat yang mutasyabihat, semuanya itu dari sisi Tuhan kami." Dan tidak dapat mengambil pelajaran (dari padanya) melainkan orang-orang yang berakal" (*QS. Ali Imran/3:7*).

Jalaluddin (2010) menafsirkan ayat tersebut bahwa (Dialah yang menurunkan kepadamu al-Quran, di antara isinya ada ayat-ayat yang *muhkamat*) jelas maksud dan tujuannya (itulah dia pokok-pokok al-Quran) yakni yang menjadi pegangan dalam menetapkan (sedangkan yang lainnya *mutasyabihat*) tidak dimengerti secara jelas maksudnya, misalnya permulaan-permulaan surat. Semuanya disebut sebagai *'muhkam'* seperti dalam firman-Nya *'uhkimat aayaatuh'* dengan arti tak ada cacat atau celanya, dan *'mutasyabiha'* pada firman-Nya, *'Kitaaban mutasyabiha,'* dengan makna bahwa sebagian menyamai lainnya dalam keindahan dan kebenaran. (Adapun orang-orang yang dalam hatinya ada kecenderungan pada kesesatan) menyeleweng dari kebenaran, (maka mereka mengikuti ayat-ayat *mutasyabihat* untuk membangkitkan fitnah) di kalangan orang-orang bodoh dengan menjerumuskan mereka ke dalam hal-hal yang *syubhat* dan kabur pengertiannya (dan demi untuk mencari-cari *ta'wil*nya) tafsirnya (padahal tidak ada yang tahu *ta'wil*) tafsirnya (kecuali Allah) sendiri-Nya (dan orang-orang yang mendalam) luas lagi kokoh (ilmunya) menjadi *mubtada*, sedangkan *khabar*nya: (Berkata, "Kami beriman kepada ayat-ayat *mutasyabihat*) bahwa ia dari Allah, sedangkan kami tidak tahu akan maksudnya, (semuanya itu) baik yang *muhkam* maupun yang *mutasyabih* (dari sisi Tuhan kami," dan tidak ada yang mengambil pelajaran) '*Ta*' yang pada asalnya terdapat pada '*dzal*' di*idgham*kan pada *dzal* itu hingga berbunyi *'yadzdzakkaru'* (kecuali orang-orang yang berakal) yang mau berpikir.

Dalam surat Ali Imran ayat 93 disebutkan:

۞ كُلُّ ٱلطَّعَامِ كَانَ حِلًّا لِّبَنِىٓ إِسْرَٰٓءِيلَ إِلَّا مَا حَرَّمَ إِسْرَٰٓءِيلُ عَلَىٰ نَفْسِهِۦ مِن قَبْلِ أَن تُنَزَّلَ ٱلتَّوْرَىٰةُ ۗ قُلْ فَأْتُوا۟ بِٱلتَّوْرَىٰةِ فَٱتْلُوهَآ إِن كُنتُمْ صَٰدِقِينَ ﴿٩٣﴾

"Semua makanan adalah halal bagi Bani Israil melainkan makanan yang diharamkan oleh Israil (Ya'qub) untuk dirinya sendiri sebelum Taurat diturunkan. Katakanlah: "(Jika kamu mengatakan ada makanan yang diharamkan sebelum turun Taurat), maka bawalah Taurat itu, lalu bacalah ia jika kamu orang-orang yang benar" (QS. *Ali Imran*/3:93).

Jalaluddin (2010) menafsirkan bahwa, (Semua makanan halal bagi Bani Israel kecuali makanan yang diharamkan oleh Israel) atau Ya'kub As. (atas dirinya) yaitu unta yang ditimpa penyakit pada urat nadinya. Ia bernazar jika hewan itu sembuh tidak akan dimakannya, maka haramlah hukumnya bagi mereka (sebelum Taurat diturunkan) hal ini terjadi sesudah Ibrahim As., sedangkan pada masanya sendiri tidaklah haram sebagaimana yang telah diakuinya. (Katakanlah) kepada mereka ("Ambillah Taurat lalu bacalah) agar nyata benar atau tidaknya ucapanmu itu (jika kamu orang-orang yang benar") dalam masalah tersebut. Mendengar itu mereka pun kebingungan dan tak pernah mengemukakan Taurat.

Firman Allah Swt. dalam al-Quran sebelumnya memiliki beberapa pengertian, yaitu:

1. Pada kalimat (*Adapun orang-orang yang dalam hatinya condong kepada kesesatan, maka mereka mengikuti sebagian ayat-ayat yang mutasyabihat dari padanya untuk menimbulkan fitnah untuk mencari-cari ta'wilnya*) dalam penggalan ayat QS. Ali Imran/3:7 yang berbunyi:

   فَأَمَّا ٱلَّذِينَ فِي قُلُوبِهِمۡ زَيۡغٞ فَيَتَّبِعُونَ مَا تَشَٰبَهَ مِنۡهُ ٱبۡتِغَآءَ ٱلۡفِتۡنَةِ وَٱبۡتِغَآءَ تَأۡوِيلِهِۦۗ ۝٧

   memiliki arti bahwa dalam setiap perkara memiliki minimal dua nilai antara benar dan salah karena ditegaskan dengan kata “hingga nyata”. Kata tersebut juga menegaskan bahwa kebenaran masih belum terlihat dan ketika ada ayat-ayat *mutasyabihat* (hal yang memiliki nilai kebenaran yang samar). Sehingga konsep suatu hal yang samar sudah ada di dalam al-Quran.

2. Dan ketika nilai kebenaran yang samar tersebut tidak dikaji, maka Allah Swt. tegaskan dalam lanjutan ayat tersebut yang berbunyi:

   وَمَا يَذَّكَّرُ إِلَّآ أُوْلُواْ ٱلۡأَلۡبَٰبِ ۝٧

   ”Dan tidak dapat mengambil pelajaran (dari padanya) melainkan orang-orang yang berakal”.

Pada kalimat tersebut, memiliki arti bahwa setiap manusia diharuskan untuk terus berusaha agar kebenaran terlihat dengan jelas. Setelah berusaha, Allah Swt. akan memberikan petunjuk agar setiap persoalan tersebut menjadi jelas. Hal ini dalam penggalan ayat yang disebutkan dalam surat Ali Imran ayat 93 yaitu:

فَأۡتُواْ بِٱلتَّوۡرَىٰةِ فَٱتۡلُوهَآ إِن كُنتُمۡ صَٰدِقِينَ ٩٣

"Maka bawalah Taurat itu, lalu bacalah ia jika kamu orang-orang yang benar".

Allah Swt. telah memberi petunjuk melalui kitab-kitabNya, sehingga ketika manusia telah berusaha keras, ia harus membaca petunjuk yang diberikan Allah Swt. agar manusia menjadi orang-orang yang benar.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

1. Sistem persamaan linier *fuzzy* bilangan trapesium dalam bentuk $A\tilde{x} = \tilde{y}$ dapat diselesaikan menggunakan metode *singular value decomposition*. Adapun langkah-langkah untuk menyelesaikan sistem persamaan linier *fuzzy* bilangan trapesium menggunakan metode *singular value decomposition*:
   a. Mengubah sistem persamaan linier *fuzzy* bilangan trapesium $A\tilde{x} = \tilde{y}$ menjadi sistem persamaan linier $Ax = y$, sehingga didapatkan $Ax^L = b^L$, $Ax^U = b^U$, $Ax^\alpha = b^\alpha$, dan $Ax^\beta = b^\beta$.
   b. Memfaktorisasi matriks A menjadi $U\Sigma V^T$.
   c. Menentukan basis-basis ortonormal untuk $R(A)$, $R(A^H)$, $N(A)$, dan $N(A^H)$. Sehingga didapatkan dua kasus sebagai berikut:
      i. Untuk $b \in R(A)$. Maka sistem persamaan linier diketahui mempunyai paling sedikit satu solusi, yang diperoleh dari persamaan berikut:

$$x = \sum_{k=1}^{r} \frac{\langle b, u_k \rangle}{\sigma_k} v_k .$$

      ii. Untuk $b \notin R(A)$. Maka sistem persamaan linier diketahui tidak mempunyai solusi, namun dapat dihitung pendekatan terbaik dari solusinya, yang diperoleh dari persamaan berikut:

$$x_r = \sum_{k=1}^{r} \frac{\langle b, u_k \rangle}{\sigma_k} v_k .$$

d. Mensubstitusikan hasil penyelesaian sistem persamaan linier ke sistem persamaan linier *fuzzy* sehingga dapat diketahui $\tilde{x}_i = \left(x_i^L, x_i^U, x_i^\alpha, x_i^\beta\right)$ dengan $1 \leq i \leq n$ disebut selesaian dari sistem persamaan linier *fuzzy* trapesium jika memenuhi persamaan berikut:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{x}_j = \tilde{y}_i.$$

2. Kajian agama tentang linier *fuzzy* telah dijelaskan dalam al-Quran, sebagaimana terkandung dalam surat Ali Imran ayat 7 yang menjelaskan tentang ayat *muhkam* dan ayat *mutasyabih*. Dalam kehidupan, sebaiknya manusia bersifat hati-hati ketika memutuskan sesuatu yang *syubhat*, lebih baik selalu berpegang pada petunjuk Allah Swt. agar manusia termasuk orang-orang yang benar.

4.2 Saran

Pada penelitian ini, penulis menggunakan metode *singular value decomposition* untuk menyelesaikan sistem persamaan linier *fuzzy*. Penulis menyarankan untuk dapat menggunakan metode yang lain untuk menyelesaikan sistem persamaan linier *fuzzy*.

DAFTAR RUJUKAN

Akritas, A.G. Malaschonok G.I. & Vigklas, P.S. 2006. The SVD-Fundamental Theorem of Linear Algebra. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 11 (2): 123-136.

Anton, H & Rorres, C. 2004. *Aljabar Linier Elementer*. Jakarta: Penerbit Erlangga.

Friedman, M. Ming, M. & Kandel, A. 1998. Fuzzy Linear Systems. *Fuzy Sets and Systems*, 96: 201-209.

Gockenbach, M.S. 2010. *Finite-Dimensional Linear Algebra*. Houghton: CRC Press.

Goldberg, J. 1991. *Matrix Theory with Applications*. New Jersey: McGraw-Hill Inc.

Jalaluddin, A. 2010. *Tafsir Jalaluddin*. Surabaya: Penerbit Pustaka eLBA.

Klir, G & Yuan, B. 1995. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Application.* New York: Prentice Hall.

Kumar, A. Bansal, A. & Neetu. 2010. A Method for Solving Fully Fuzzy Linear System with Trapezoidal Fuzzy Numbers. *Iranian Journal of Optimization*. 2: 359-374.

Leon, S. J. 2001. *Aljabar Linear dan Aplikasinya.* Bandung: Penerbit Erlangga.

Lipschutz, S & Lipson, M. 2001. *Schaum's Outlines Aljabar Linear.* Jakarta: Penerbit Erlangga.

Lipson, M. 2006. *Aljabar Linear Schaum's.* Jakarta: Penerbit Erlangga.

Martono, K. 1999. *Kalkulus.* Jakarta: Penerbit Erlangga.

Marzuki, C & Herawati. 2015. Penyelesaian Sistem Persamaan Linier Fully Fuzzy Menggunakan Metode Iterasi Jacobian. *Jurnal Sains, Teknologi dan Statistika*,1 (1): 1-7.

Nasseri, S. & Gholami, M. 2011. Linear System of Equations with Trapezoidal Fuzzy Numbers. *The Journal of Mathematics and Computer Science*, 3 (1): 40-15.

Ratnasari. & Irdam, H. 2010. Menyelesaikan Sistem Persamaan Linier Menggunakan SVD. *Jurnal Matematika*, 13 (1): 40-45.

Sivanandam, S.N. Sumanthi, S & Deepa S.N. 2007. *Introduction to Fuzzy Logic Using MATLAB*. Berlin: Springer-Verlag.

Susilo, F. 2006. *Himpunan Logika Kabur dan Aplikasinya.* Yogyakarta: Graha Ilmu.

Wati. 2004. *Sistem Kendali Cerdas.* Yogyakarta: Graha Ilmu.

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Mukhamad Lukman, lahir di Mojokerto pada tanggal 7 Februari 1994 merupakan anak kedua dari dua bersaudara dari pasangan bapak Soleh dan ibu Sumarmi. Saat ini dia bertempat tinggal di dusun Wonokerto RT.07 RW.01 Desa Kertosari Kecamatan Kutorejo Mojokerto.

Adapun riwayat pendidikan sebagai berikut: SDN II Kertosari pada tahun 2006, SMP Negeri 1 Kutorejo lulus pada tahun 2009, SMA Negeri 1 Pacet lulus pada tahun 2012, dan melanjutkan pendidikan S1 di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Mukhamad Lukman
NIM : 12610036
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Penyelesaian Sistem Persamaan Linier *Fuzzy* Bilangan Trapesium Menggunakan *Singular Value Decomposition*

Pembimbing I : Evawati Alisah, M.Pd.
Pembimbing II : Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd.

No	Tanggal	Materi Konsultasi	Tanda Tangan
1.	18 Oktober 2016	Konsultasi Judul, Bab I, dan Bab II	1.
2.	25 Oktober 2016	Revisi Judul, Bab I, dan Bab II	2.
3.	01 November 2016	Konsultasi Bab III	3.
4.	02 November 2016	Konsultasi Bab I Agama	4.
5.	03 November 2016	Konsultasi Bab II Agama	5.
6.	04 September 2017	Revisi Judul, Bab I, dan Bab II	6.
7.	14 November 2017	Konsultasi Bab III dan Bab IV	7.
8.	22 November 2017	Revisi Bab III dan IV	8.
9.	29 November 2017	Revisi Bab I dan Bab II Agama	9.
10.	30 November 2017	Konsultasi Bab III Agama	10.
11.	04 Desember 2017	ACC Agama Keseluruhan	11.
12.	05 Desember 2017	ACC Keseluruhan	12.

Malang, 05 Desember 2017
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001