

**SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN LINIER *KLEIN-GORDON*
MENGUNAKAN JARINGAN FUNGSI RADIAL BASIS**

SKRIPSI

**OLEH
FARAZIZA NUR'AINI
NIM. 12610021**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018**

**SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN LINIER *KLEIN-GORDON*
MENGUNAKAN JARINGAN FUNGSI RADIAL BASIS**

SKRIPSI

**Diajukan kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
Faraziza Nur'aini
NIM. 12610021**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018**

**SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN LINIER *KLEIN-GORDON*
MENGUNAKAN JARINGAN FUNGSI RADIAL BASIS**

SKRIPSI

Oleh
FARAZIZA NUR'AINI
NIM. 12610021

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 02 Juni 2017

Pembimbing I,



Mohammad Jamhuri, M.Si
NIP. 19810502 200501 1 004

Pembimbing II,



Ach. Nasichuddin, MA
NIP. 19730705 200003 0 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 1975006 200312 1 001

**SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN LINIER *KLEIN-GORDON*
MENGUNAKAN JARINGAN FUNGSI RADIAL BASIS**

SKRIPSI

Oleh
Faraziza Nur'aini
NIM. 12610021

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
Dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal 01 Agustus 2017

Penguji Utama : Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si

Ketua Penguji : Dr. Usman Pagalay, M.Si

Sekretaris Penguji : Mohammad Jamhuri, M.Si

Anggota Penguji : Ach. Nasichuddin, MA

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Faraziza Nur'aini
NIM : 12610021
Jurusan : Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi
Judul Skripsi : Solusi Numerik Persaman Linier *Klein-Gordon*

Menggunakan Jaringan Fungsi Radial Basis

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 26 Oktober 2017
Yang membuat pernyataan,



[Signature]
Faraziza Nur'aini
NIM. 12610021

MOTO

“Barang siapa yang bersungguh-sungguh pasti berhasil”



PERSEMBAHAN

Dengan mengucapkan syukur alhamdulillah, skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Kedua orang tua tercinta bapak Nachrudji dan ibu Susiati
yang telah memberikan nasihat, kasih sayang, tauladan, do'a serta biaya
pendidikan, yang sampai saat ini penulis tidak bisa membalas apa-apa.

Saudari-saudariku tersayang
Khasanatul Umami sekeluarga & Rina Sofwatin sekeluarga.



KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Alhamdulillah, puji syukur kepada Allah Swt. atas limpahan rahmat, taufik, hidayah, dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan dengan baik penyusunan skripsi yang berjudul “*Solusi Numerik Persamaan Linier Klein-Gordon Menggunakan Jaringan Fungsi Radial Basis*”. Sholawat serta salam semoga tetap terlimpahkan kepada Nabi Muhammad Saw, yang telah menuntun umatnya dari zaman yang gelap menuju zaman yang terang benderang yakni agama Islam.

Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Dalam proses penyusunannya tidak mungkin dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan, bimbingan, serta arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Mohammad Jamhuri, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang senantiasa memberikan doa, arahan, nasihat dan motivasi dalam penulisan skripsi ini.
5. Ach. Nasichuddin, MA, selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, arahan, dan berbagai ilmunya kepada penulis.

6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.
7. Bapak dan ibu yang selalu memberikan doa, nasihat, dan motivasi kepada penulis.
8. Segenap keluarga besar mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2012.
9. Seluruh keluarga besar LPQ Wardatul Ishlah dan untuk “Kontrakan Penuh Cinta”, terima kasih atas semangat dan dukungannya.
10. Semua pihak yang secara langsung atau tidak langsung telah ikut memberikan bantuan dalam menyelesaikan skripsi ini yang tidak bisa penulis sebutkan satu per satu.

Akhirnya penulis hanya dapat berharap, di dalam skripsi ini dapat ditemukan sesuatu yang dapat memberikan manfaat dan wawasan yang lebih luas atau bahkan hikmah bagi penulis, pembaca, dan bagi seluruh mahasiswa.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, Oktober 2017

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN PENULISAN	
HALAMAN MOTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR LAMPIRAN	xiv
ABSTRAK	xv
ABSTRACT	xvi
ملخص	xvii
 BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Tujuan Penelitian	5
1.4 Batasan Masalah	5
1.5 Manfaat Penelitian	6
1.6 Metode Penelitian	6
1.7 Sistematika Penelitian	7
 BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Jaringan Fungsi Radial Basis	8
2.1.1 Turunan-Turunan Hampiran dengan Jaringan Fungsi Radial Basis	12
2.2 Persamaan <i>Klein Gordon</i>	13
2.3 Metode Beda Hingga	18
2.4 Basis	21
2.5 Galat	24
2.6 Keteraturan Alam Semesta	26

BAB III PEMBAHASAN

3.1 Solusi Numerik Persamaan Linier <i>Klein-Gordon</i> Menggunakan Jaringan Fungsi Radial Basis	30
3.1.1 Diskritisasi	30
3.1.2 Aproksimasi menggunakan Jaringan Fungsi Radial Basis	33
3.1.3 Menghitung Solusi $u^{(2)}$	35
3.1.4 Menghitung Solusi $u^{(3)}, u^{(4)}, \dots, u^{(n)}$	37
3.2 Analisis Galat	41
3.2.1 Simulasi	42
3.2.2 Perhitungan Galat	58
3.3 Kejadian <i>Klein-Gordon</i> dalam Al-Quran	65

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan	70
4.2 Saran	71

DAFTAR RUJUKAN**LAMPIRAN-LAMPIRAN****RIWAYAT HIDUP**

DAFTAR TABEL

Tabel 3.1 Hasil Perhitungan $u^{(2)}$ Menggunakan MATLAB 51

Tabel 3.2 Hasil Perhitungan $u^{(3)}$ Menggunakan MATLAB 57

Tabel 3.3 Perbandingan Solusi Numerik *RBFN* & *OHAM* terhadap Solusi Eksak 60



DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Skema Jaringan Fungsi Radial Basis	8
Gambar 3.1	Grafik Solusi Numerik	57
Gambar 3.2	Grafik Solusi Numerik	58
Gambar 3.3	Grafik Solusi Eksak	58
Gambar 3.4	Grafik Galat Solusi Numerik	59
Gambar 3.5	Grafik Solusi Numerik <i>RBFN</i> dan Solusi Eksak Saat $t = 1$	61
Gambar 3.6	Grafik Solusi Numerik <i>RBFN</i> dan Solusi Eksak Saat $t = 3$	61
Gambar 3.7	Grafik Pertumbuhan Galat Menggunakan <i>RBFN</i> dari $t = 1$ Sampai $t = 3$	62
Gambar 3.8	Grafik Solusi Numerik <i>OHAM</i> dan Solusi Eksak Saat $t = 1$	63
Gambar 3.9	Grafik Solusi Numerik <i>OHAM</i> dan Solusi Eksak Saat $t = 3$	63
Gambar 3.10	Grafik Pertumbuhan Galat Menggunakan <i>OHAM</i> dari $t = 1$ Sampai $t = 3$	64

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1 <i>M-file</i> MATLAB untuk Solusi Numerik, Eksak, dan Galatnya	74
Lampiran 2 <i>M-file</i> MATLAB untuk Menghitung Fungsi Basis	76
Lampiran 3 Perbandingan Solusi Numerik <i>RBFN</i> & <i>OHAM</i> terhadap Solusi Eksak	78



ABSTRAK

Nur'aini, Faraziza. 2018. **Solusi Numerik Persamaan Linier *Klein-Gordon* Menggunakan Jaringan Fungsi Radial Basis**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Mohammad Jamhuri, M.Si. (II) Ach. Nasichuddin, MA.

Kata Kunci: jaringan fungsi radial basis, linier, persamaan *Klein-Gordon*, solusi numerik

Persamaan linier *Klein-Gordon* merupakan persamaan diferensial parsial orde dua. Persamaan linier *Klein-Gordon* adalah suatu fungsi gelombang relativistik yang dapat diterapkan pada pergerakan partikel-partikel elementer. Partikel elementer adalah partikel paling dasar yang membentuk partikel lainnya dan tidak lagi terbentuk dari partikel lain yang lebih kecil.

Solusi numerik persamaan linier *Klein-Gordon* dalam skripsi ini dikerjakan dengan menggunakan jaringan fungsi radial basis. Setiap fungsi dan turunannya dapat diaproksimasi secara langsung dengan sebuah fungsi basis *multiquadrics*. Dengan menggunakan metode tersebut, solusi numerik persamaan linier *Klein-Gordon* yang diperoleh dalam penelitian ini dapat menghasilkan galat yang relatif kecil jika dibandingkan dengan kondisi awalnya. Semakin kecil nilai Δt yang diberikan, maka semakin kecil pula galat yang dihasilkan. Dalam penelitian ini juga dilakukan perbandingan terhadap solusi yang dihasilkan dari *Optimal Homotopy Asymtotic Method* orde tiga. Dan diperoleh kesimpulan bahwa dalam menyelesaikan solusi numerik persamaan linier *Klein-Gordon* ini lebih baik menggunakan *Optimal Homotopy Asymtotic Method* dibandingkan menggunakan jaringan fungsi radial basis karena galat yang dihasilkan dari *Optimal Homotopy Asymtotic Method* lebih kecil daripada ketika menggunakan jaringan fungsi radial basis.

ABSTRACT

Nur'aini, Faraziza. 2018. **Numerical Solution of *Klein-Gordon* Linear Equation Using Radial Basis Function Network**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Supervisors: (I) Mohammad Jamhuri, M.Si. (II) Ach. Nasichuddin, MA.

Keywords: radial basis function network, linear, *Klein-Gordon* equation, numerical solution

The *Klein-Gordon* linear equation is a two-order partial differential equation. The *Klein-Gordon* linear equation is a relativistic wave function that can be applied to the movement of elementary particles. The elementary particles are the most basic particles that make up other particles and are no longer formed from other smaller particles.

The numerical solution of linear equations of *Klein-Gordon* in this thesis is done by using radial basis function network. Each function and its derivative can be approximated directly with a base multiquadrics function. Using this method, the numerical solution of the *Klein-Gordon* linear equations obtained in this study can result in a relatively minor error when compared to the initial conditions. The smaller the given value Δt , the smaller the resulting error. In this study also made a comparison of the solutions resulting from *Optimal Homotopy Asymptotic Method* third order. And it can be concluded that in solving the numerical solution of the *Klein-Gordon* linear equation it is better to use the *Optimal Homotopy Asymptotic Method* instead of using the radial basis function network because the error resulting from *Optimal Homotopy Asymptotic Method* is less than when using the radial basis function network.

ملخص

نور عين، فارازيزا. 2018. الحلول العددية للمعادلات الخطية *Klein-Gordon* باستخدام شبكة دالة شعاع اساسي. أطروحة. شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعة الحكومية الإسلامية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف: (1) محمد جمهري، الماجستير (2). أحمد ناسح الدين الماجستير.

كلمات الرئيسية: أساس شعاعي شبكة دالة، خطية، معادلة *Klein-Gordon*، الحل العددي

المعادلة الخطية *Klein-Gordon* هي معادلة تفاضلية جزئية. المعادلة الخطية لـ *Klein-Gordon* هي دالة موجة النسبية التي يمكن تطبيقها على حركة الجسيمات الأولية. الجسيمات الأولية هي الجسيمات الأساسية التي تشكل جزيئات أخرى ولم تعد تشكل من جسيمات أصغر أخرى. الحل العددي للمعادلات الخطية من *Klein-Gordon* في هذه الأطروحة يتم باستخدام شبكة دالة شعاع اساسي ويمكن تقريب كل دالة ومشتقاتها مباشرة مع دالة مولتيكوادريكس قاعدة. باستخدام هذه الطريقة، فإن الحل العددي للمعادلات الخطية *Klein-Gordon* التي تم الحصول عليها في هذه الدراسة يمكن أن يؤدي إلى خطأ صغير نسبيا بالمقارنة مع الظروف الأولية. وكلما كانت القيمة Δt أصغر، كلما كان الخطأ الناتج أصغر. في هذه الدراسة أجرت أيضا مقارنة بين الحلول الناتجة عن أفضل طريقة هوموتوبي الأسيمتوتية من أجل ثلاثة. ويمكن استنتاج أنه في حل الحل العددي للمعادلات الخطية *Klein-Gordon* فمن الأفضل استخدام أوبتيمال هوموتوبي أسيمتوتيك ميثود من استخدام شبكة دالة شعاع اساسي لأن الخطأ ولدت من الأمثل هوموتوبي أسيمتوتيك الأسلوب هو أصغر من عند استخدام شبكة دالة شعاع اساسي.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Allah Swt. berfirman:

الَّذِي لَهُ مُلْكُ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُنْ لَهُ شَرِيكٌ فِي
الْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَرَهُ تَقْدِيرًا ۝

“yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan Allah tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya), dan Allah telah menciptakan segala sesuatu, dan Allah menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya.(QS. Al-Furqan/25:2).

Menurut tafsir Ibn Katsir (2004), pada akhir ayat di atas dijelaskan bahwa segala sesuatu selain Allah adalah *makhluk* (yang diciptakan) dan *marbub* (yang berada di bawah kekuasaan-Nya). Allahlah pencipta segala sesuatu, Rabb, Raja, dan Ilah-Nya. Sedangkan segala sesuatu berada di bawah kekuasaan, aturan, tatanan, dan takdir-Nya.

Dijelaskan pula dalam Tafsir Al-Maraghi (1993) bahwa Allah mengadakan segala sesuatu sesuai dengan tuntutan kehendak-Nya yang didasarkan atas hikmah yang sempurna, serta mempersiapkannya untuk menerima apa yang dikehendaki-Nya, berupa keistimewaan dan perbuatan yang sesuai dengannya. Sehingga Allah mempersiapkan manusia untuk dapat memahami dan memikirkan urusan dunia dan akhirat dan memanfaatkan apa yang terdapat di permukaan serta di dalam perut bumi. Allah juga mempersiapkan berbagai jenis hewan untuk melakukan berbagai pekerjaan yang sesuai dengannya dan kemampuannya.

Alam dunia yang meliputi langit, bumi dan seluruh isinya terdiri dari benda-benda yang beraneka ragam. Nainggolan (2012) menjelaskan bahwa semua benda yang ada di alam ini terdiri atas partikel-partikel elementer yang menyusunnya. Partikel elementer merupakan partikel paling dasar yang membentuk partikel lainnya (materi) dan tidak lagi tersusun atas partikel yang lebih kecil. Dalam kenyataannya, atom dianggap sebagai partikel-partikel dasar yang dimaksud. Sehingga atom merupakan unsur pokok yang membangun setiap materi yang ditemukan di alam ini (Djayadi, 2008).

Atom digambarkan seperti bola yang mempunyai suatu inti bermuatan positif serta dikelilingi elektron bermuatan negatif yang berputar mengelilingi inti atom. Berdasarkan teori elektromagnetis, bila ada partikel bermuatan (elektron) bergerak atau berputar mengelilingi inti akan memancarkan gelombang elektromagnetis. Setiap elektron akan berputar mengelilingi inti atom dalam lintasan (*orbit*) tertentu dan secara fisis perputaran mempunyai momentum sudut tertentu (Djayadi, 2008). Nainggolan (2012) dalam penelitiannya menyatakan bahwa persamaan *Klein-Gordon* dapat menjelaskan pergerakan elektron saat mengelilingi atom dalam lintasan (*orbit*) tertentu.

Persamaan *Klein-Gordon* dinyatakan sebagai persamaan diferensial parsial orde dua dengan variabel bebas u dan variabel-variabel tak bebas x dan t . Variabel bebas u merupakan suatu fungsi gelombang yang menggambarkan keadaan gerak sistem suatu partikel pada posisi x dan pada waktu t . (Deghan & Shokri, 2009).

Persamaan *Klein-Gordon* merupakan persamaan diferensial parsial yang menjelaskan fenomena-fenomena alam, khususnya pada pembahasan atom.

Persamaan diferensial parsial tidak selalu mudah diselesaikan secara analitik. Oleh karena itu, untuk memeriksa prediksi model-model persamaan diferensial parsial seringkali dibutuhkan pendekatan solusi secara numerik (Morton & Mayers, 2005).

Fungsi radial basis merupakan suatu alat untuk menyelesaikan masalah interpolasi data acak yang merupakan salah satu dari metode numerik. Gagasan jaringan fungsi radial basis diperoleh dari teori aproksimasi fungsi, yaitu menghampiri fungsi tersebut dengan fungsi lainnya (Hajek, 2005). Jaringan fungsi radial basis merupakan salah satu metode jaringan syaraf tiruan yang menggunakan fungsi aktivasi berupa fungsi radial basis (Setiawan, 2002). Jaringan syaraf tiruan itu sendiri dikembangkan pertama kali oleh seorang ahli neurofisiologi Warren McCulloch dan ahli logika Walter Pitts pada tahun 1943 sebagai algoritma untuk memproses informasi yang terinspirasi dari sistem kerja jaringan syaraf biologis manusia (Hajek, 2005).

Struktur dari jaringan fungsi radial basis ini terdiri dari tiga bagian, yaitu lapisan masukan (*input layer*), lapisan tersembunyi (*hidden layer*) dan lapisan keluaran (*output layer*). Setiap masukan dari jaringan ini akan mengaktifkan semua fungsi aktivasi pada lapisan tersembunyi. Setiap unit dari lapisan tersembunyi merupakan fungsi aktivasi tertentu yang disebut sebagai fungsi basis. Setiap fungsi basis akan menghasilkan sebuah keluaran dengan bobot tertentu. Keluaran dari jaringan ini merupakan jumlah dari seluruh output fungsi basis dikalikan dengan bobot masing-masing (Setiawan, 2002).

Perkembangan fungsi radial basis untuk mengaproksimasi solusi dari persamaan diferensial parsial telah menarik perhatian banyak peneliti sains dan

teknik. Di antaranya Dehghan & Shokri (2009) yang membahas penyelesaian solusi numerik persamaan nonlinier *Klein-Gordon* menggunakan jaringan fungsi radial basis. Kemudian penyelesaian persamaan numerik persamaan Poisson pada koordinat polar (Mufidah, 2014) dan untuk mencari solusi numerik persamaan gelombang dua dimensi menggunakan jaringan fungsi radial basis (Zuhriyah, 2015). Pada penelitian-penelitian di atas, solusi numerik yang dihasilkan menunjukkan galat yang relatif kecil.

Penelitian ini membahas solusi numerik persamaan linier *Klein-Gordon* menggunakan jaringan fungsi radial basis beserta galat yang dihasilkan. Jaringan fungsi radial basis digunakan untuk mengaproksimasi fungsi yang bergantung pada ruang. Fungsi basis yang digunakan dalam penelitian ini adalah *multiquadric*. Solusi numerik yang diperoleh akan dibandingkan dengan solusi eksak sehingga diketahui galat dari solusi numerik persamaan linier *Klein-Gordon* menggunakan jaringan fungsi radial basis.

1.2 Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah pada penelitian ini adalah:

1. Bagaimana solusi numerik persamaan linier *Klein-Gordon* menggunakan jaringan fungsi radial basis?
2. Bagaimana galat yang dihasilkan dari solusi numerik persamaan linier *Klein-Gordon* menggunakan jaringan fungsi radial basis?

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian ini adalah:

1. Menentukan solusi numerik persamaan linier *Klein-Gordon* menggunakan jaringan fungsi radial basis.
2. Menentukan galat yang dihasilkan dari solusi numerik persamaan linier *Klein-Gordon* menggunakan jaringan fungsi radial basis dengan membandingkannya dengan solusi eksak.

1.4 Batasan Masalah

Penelitian ini mengkaji masalah yang diambil dari jurnal yang ditulis oleh Iqbal, dkk (2010), yaitu:

$$u_{tt} + \alpha u_{xx} + \beta u + \gamma u = f(x, t), \quad x \in \Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}, \quad 0 < t \leq T,$$

dengan kondisi awal:

$$u(x, 0) = g_1(x), \quad u_t(x, 0) = g_2(x), \quad x \in \Omega,$$

dan kondisi batas:

$$u(a, t) = g_3(t), \quad t > 0$$

$$u(b, t) = g_4(t), \quad t > 0$$

dengan α , β , dan γ adalah suatu konstanta, $f(x, t)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(t)$, dan $g_4(t)$ adalah suatu fungsi yang diketahui, dan fungsi $u(x, t)$ merupakan fungsi gelombang tertentu yang akan dicari. Penelitian tersebut juga menghasilkan solusi eksak sebagai berikut.

$$u(x, t) = \sin(x) + \cosh(t) \tag{1.1}$$

1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan mampu memberikan metode alternatif secara numerik dalam menyelesaikan persamaan *Klein-Gordon* linier menggunakan jaringan fungsi radial basis dengan meninjau nilai galat yang diperoleh.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini mengikuti langkah-langkah yang digunakan oleh Zuhriyah (2015) dengan langkah-langkah sebagai berikut.

1. Solusi numerik persamaan linier *Klein-Gordon* dengan jaringan fungsi radial basis menggunakan langkah-langkah sebagai berikut.
 - a. Mendiskritkan persamaan linier *Klein-Gordon* dan kondisi awalnya terhadap waktu menggunakan metode implisit beda pusat. Kemudian diskritisasi terhadap waktu untuk kondisi awal yang diberikan.
 - b. Mengaproksimasi fungsi u pada persamaan *Klein-Gordon* linier yang sudah didiskritkan beserta kondisi batasnya menggunakan jaringan fungsi radial basis.
 - c. Menghitung solusi $u^{(2)}$, dengan cara menentukan nilai koefisien w terlebih dahulu, kemudian solusi $u^{(2)}$ dapat diperoleh dengan mensubstitusikan nilai koefisien w .
 - d. Menghitung solusi $u^{(3)}, u^{(4)}, \dots, u^{(n)}$.
2. Analisis galat dengan menggunakan langkah-langkah berikut.
 - a. Mensimulasikan penyelesaian solusi numerik persamaan linier *Klein-Gordon* menggunakan jaringan fungsi radial basis dan menggambarkan grafik dari semua solusi u .

- b. Menghitung galat dengan membandingkan solusi numerik yang dihasilkan dari langkah a terhadap solusi eksak (persamaan (1.1)) dan solusi numerik yang dihasilkan dari penelitian Iqbal, dkk (2010).

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan penelitian ini adalah sebagai berikut.

Bab I Pendahuluan

Berisi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Berisi kajian tentang jaringan fungsi radial basis, persamaan *Klein-Gordon*, metode beda hingga, basis, galat, dan keteraturan alam semesta dalam Al-Quran.

Bab III Pembahasan

Berisi penjelasan dan uraian secara keseluruhan langkah-langkah dari metode penelitian dan menjawab permasalahan penelitian, serta pembahasan tentang kejadian *Klein-Gordon* dalam Al-Quran.

Bab IV Penutup

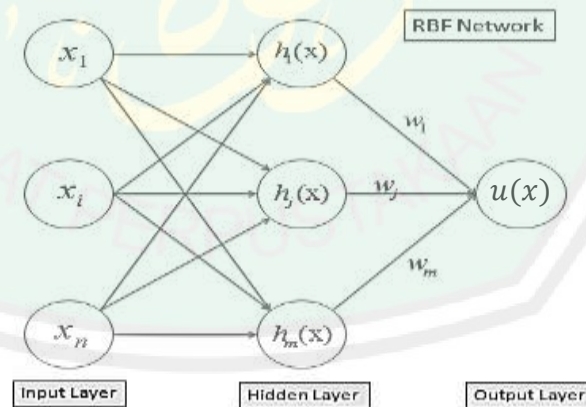
Berisi rangkuman hasil penelitian yang berupa kesimpulan dari pembahasan yang telah dibahas dan dilengkapi dengan saran-saran yang berkaitan dengan penelitian.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Jaringan Fungsi Radial Basis

Jaringan fungsi radial basis merupakan salah satu metode jaringan syaraf tiruan yang menggunakan fungsi aktivasi berupa fungsi radial basis (Setiawan, 2002). Struktur dari jaringan fungsi radial basis ini terdiri dari tiga bagian, yaitu lapisan masukan (*input layer*), lapisan tersembunyi (*hidden layer*) dan lapisan keluaran (*output layer*). Setiap masukan dari jaringan ini akan mengaktifkan semua fungsi aktivasi pada lapisan tersembunyi. Setiap unit dari lapisan tersembunyi merupakan fungsi aktivasi tertentu yang disebut sebagai fungsi basis. Setiap fungsi basis akan menghasilkan sebuah keluaran dengan bobot tertentu. Keluaran dari jaringan ini merupakan jumlah dari seluruh output fungsi basis dikalikan dengan bobot masing-masing (Setiawan, 2002).



Gambar 2.1 Skema Jaringan Fungsi Radial Basis

Lapisan masukan (*input layer*) merupakan lapisan dimana akan dimasukkan variabel *input* yang pada Gambar 2.1 dituliskan sebagai $x_i = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Dari *input layer*, data masukan tersebut akan diolah pada lapisan tersembunyi (*hidden layer*). Di dalam *hidden layer* terdapat sejumlah fungsi basis

yang sejenis sesuai dengan perancangan. Setiap fungsi basis akan menghasilkan sebuah keluaran dengan bobot tertentu (koefisien w_j). Keluaran dari jaringan ini diperoleh dengan menjumlahkan seluruh keluaran fungsi basis dikalikan dengan bobot masing-masing. Keluaran atau pada Gambar 2.1 ditulis sebagai $u(x)$, merupakan hasil aproksimasi dari suatu fungsi tertentu yang diaproksimasi menggunakan jaringan fungsi radial basis (Setiawan, 2002).

Setiap jaringan fungsi radial basis akan menggunakan fungsi basis dalam prosesnya. Biasanya akan digunakan lebih dari satu buah fungsi basis. Tiap-tiap fungsi basis mempunyai satu *center* dan satu bobot tertentu sehingga jumlah *center* dan bobot memori yang digunakan sama dengan jumlah fungsi basis yang digunakan. Untuk m buah masukan pada jaringan maka diperlukan bobot memori sebesar $m \times$ jumlah fungsi basis yang digunakan pada satu jaringan.

Diberikan sebuah himpunan yang terdiri dari pasangan variabel bebas x dan variabel terikat y . Himpunan tersebut dilambangkan dengan $\{x_i, y_i\}_{i=1}^m$ dengan m adalah banyaknya titik *input*, yaitu $x = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$ dengan T adalah operasi transpose (Mai-Duy & Tran-Cong, 2003).

Suatu jaringan fungsi radial basis merupakan pemetaan dari ruang *input* yang berdimensi p ke ruang *output* yang berdimensi 1, atau dituliskan $u: R^p \rightarrow R^1$ yang terdiri dari himpunan bobot $\{w_j\}_{j=1}^N$, dan himpunan fungsi radial basis $\{g_i\}_{i=1}^m$. Ada bermacam-macam jenis fungsi radial basis yang secara umum bisa ditulis dalam bentuk matematis $g_i(x_i) = \phi_i(\|x_i - c\|)$, dengan $\|\cdot\|$ melambangkan norma Euclid dan $c = \{c_j\}_{j=1}^N$ adalah suatu himpunan *center* yang bisa dipilih dari sekitar data *input* (Mai-Duy & Tran-Cong, 2003).

Aproksimasi fungsi satu variabel $u(x)$ menggunakan fungsi radial basis dilakukan sebagaimana rumus di bawah ini.

$$u(x) = \sum_{j=1}^N w_j \phi(x, c_j) \quad (2.1)$$

Aproksimasi fungsi dua variabel $u(x_1, x_2)$ dilakukan sebagaimana rumus di bawah ini.

$$u(x_1, x_2) = \sum_{j=1}^N w_j \phi(x_1, x_2, c_j, d_j) \quad (2.2)$$

Aproksimasi terhadap fungsi tiga variabel sampai p variabel, hanya mengubah fungsi basisnya saja, mengikuti fungsi yang diaproksimasi tersebut.

Terdapat beberapa jenis fungsi basis yang digunakan sebagai fungsi aktivasi dalam jaringan fungsi radial basis. Fungsi basis yang paling umum digunakan di antaranya adalah fungsi basis *multiquadrics*, *invers multiquadrics*, dan *Gaussian*.

Bentuk umum fungsi *multiquadrics* dalam mengaproksimasi fungsi yaitu:

1. Untuk fungsi 1 variabel

$$\phi(x, c_j) = \sqrt{(x - c_j)^2 + \alpha}, \quad (2.3)$$

dengan $\alpha = \text{var}(c)^2$, dan $\mathbf{c} = \{c_j\}_{j=1}^n$.

2. Untuk fungsi 2 variabel

$$\phi(x_1, x_2, c_j, d_j) = \sqrt{(x_1 - c_j)^2 + (x_2 - d_j)^2 + \beta}, \quad (2.4)$$

dengan $\beta = (\frac{\text{var}(c) + \text{var}(d)}{2})^2$, $\mathbf{c} = \{c_j\}_{j=1}^n$ dan $\mathbf{d} = \{d_j\}_{j=1}^n$.

Keterangan:

x_1 : vektor *input* pertama

x_2 : vektor *input* kedua

c_j : titik center ke- j dari x_1

d_j : titik center ke- j dari x_2

α : nilai parameter untuk fungsi 1 variabel.

β : nilai parameter untuk fungsi 2 variabel (Zuhriyah, 2015).

Parameter α dan β dalam fungsi basis *multiquadrics* dengan menghitung nilai varians dari $\mathbf{c}$. Varians merupakan ukuran yang menyatakan variasi atau keragaman data sehingga sering disebut dengan ragam. Varians untuk data sampel $\mathbf{c}$ diberi simbol $Var(\mathbf{c})$ atau s_c^2 dan dapat dihitung sebagaimana persamaan berikut.

$$Var(\mathbf{c}) = \frac{N \sum_{j=1}^N c_j^2 - \left(\sum_{j=1}^N c_j \right)^2}{N(N-1)} \quad (2.5)$$

dengan N adalah banyaknya titik $\mathbf{c}$ (Simbolon, 2013).

Aminataei & Mazarei (2008) menyatakan bahwa pembahasan yang penting dalam jaringan fungsi radial basis adalah menghitung nilai bobot w_j yang belum diketahui. Langkah-langkah dalam mengaproksimasi suatu fungsi menggunakan jaringan fungsi radial basis setelah dipilih sebuah himpunan fungsi ϕ , adalah menghitung nilai-nilai bobot w_j . Langkah selanjutnya, jika telah didapatkan himpunan nilai-nilai bobot w_j maka jaringan fungsi radial basis bisa dibentuk. Jaringan fungsi radial basis dibentuk oleh himpunan nilai bobot w_j dan himpunan fungsi radial basis ϕ .

Himpunan nilai bobot w_j bersifat linier sehingga menghasilkan suatu kombinasi linier dari N fungsi radial basis. Fungsi $u(x)$ membangun suatu

kombinasi linier dari N fungsi basis. Kumpulan dari fungsi basis ini akan membentuk suatu vektor-vektor basis yang pada akhirnya hal tersebut dipergunakan untuk menghitung nilai bobot w_j .

Kumpulan dari fungsi basis yang membentuk vektor basis ditulis sebagai ϕ . Himpunan nilai bobot w_j ditulis sebagai $\mathbf{w}$. Sedangkan fungsi-fungsi $u(x)$ untuk $x = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ ditulis sebagai $\mathbf{y}$. Mai-Duy & Tran-Cong (2003) menyatakan bahwa hubungan antara nilai bobot $\mathbf{w}$, $\mathbf{y}$, dan ϕ adalah:

$$\phi \mathbf{w} = \mathbf{y} \quad (2.6)$$

$$(\phi^{-1} \phi) \mathbf{w} = \phi^{-1} \mathbf{y} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{w} = \phi^{-1} \mathbf{y} \quad (2.8)$$

dimana

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_1(x_1, c_1) & \phi_2(x_1, c_2) & \dots & \phi_N(x_1, c_N) \\ \phi_1(x_2, c_1) & \phi_2(x_2, c_2) & \dots & \phi_N(x_2, c_N) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_1(x_n, c_1) & \phi_2(x_n, c_2) & \dots & \phi_N(x_n, c_N) \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$$\mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_N]^T \quad (2.10)$$

$$\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_m]^T \quad (2.11)$$

Fungsi ϕ merupakan fungsi basis yang telah diturunkan ataupun diintegralkan terhadap variabel bebasnya. Pada kasus tertentu $m = N$.

2.1.1. Turunan-Turunan Hampiran dengan Jaringan Fungsi Radial Basis

Untuk memperoleh fungsi turunan hampiran dengan jaringan fungsi radial basis *multiquadric* dapat diperoleh dengan menurunkan fungsi basis terhadap variabel bebasnya.

Pada fungsi basis *multiquadric* satu variabel, turunan pertama dari $\phi(x, c_j)$ adalah $\phi_x(x, c_j)$ yang bisa diperoleh dengan menurunkan persamaan (2.3) terhadap x , sehingga diperoleh:

$$\phi_x(x, c_j) = \frac{x - c_j}{\sqrt{(x - c_j)^2 + \alpha^2}} \quad (2.12)$$

Turunan kedua dari $\phi(x, c_j)$, yaitu $\phi_{xx}(x, c_j)$ diperoleh dengan menurunkan persamaan (2.12) terhadap x , sehingga diperoleh:

$$\phi_{xx}(x, c_j) = \frac{1}{\sqrt{\alpha + (c_j - x)^2}} - \frac{(2c_j - 2x)^2}{4(\beta^2 + (c_j - x)^2) \cdot \sqrt{4(\alpha^2 + (c_j - x)^2)}} \quad (2.13)$$

2.2 Persamaan Klein-Gordon

Persamaan *Klein Gordon* pertama kali diperkenalkan oleh fisikawan Oskar Klein dan Walter Gordon pada tahun 1927. Persamaan ini sangat cocok diterapkan untuk partikel-partikel elementer karena partikel elementer dapat bergerak dengan kecepatan mendekati kecepatan cahaya ($v \approx c$) (Nainggolan, 2012). Pada tahun 1926, Oskar Klein dan Walter Gordon menawarkan bahwa persamaan tersebut dapat menjelaskan relativitas elektron. Persamaan *Klein Gordon* dapat diturunkan dari hubungan energi dan momentum relativistik dengan mensubstitusikan operator-operator diferensial untuk energi dan momentum yang diberikan dalam mekanika kuantum (Easif dkk, 2013).

Tahun 1926 pula seorang ilmuwan bernama Edwin Schrodinger telah berhasil merumuskan persamaan *Schrodinger*, yaitu suatu persamaan yang digunakan untuk mendapatkan fungsi gelombang bagi suatu sistem mikroskopis.

Ketika efek relativitas diperhitungkan maka persamaan *Schrodinger* tersebut akan berubah menjadi persamaan *Klein-Gordon*.

Persamaan *Klein-Gordon* dapat pula dipahami melalui penjelasan tentang persamaan *Schrodinger*. Penyelesaian persamaan *Schrodinger* merupakan suatu fungsi gelombang $\Psi(x, t)$, yaitu fungsi dua variabel yang terdiri dari variabel x dan t , sehingga didapatkan petunjuk bahwa persamaan *Schrodinger* harus berbentuk persamaan diferensial parsial.

Berdasarkan postulat tentang pendeskripsian keadaan gerak sistem, yaitu keadaan gerak sistem dideskripsikan sebagai fungsi gelombang $\Psi(x, t)$. Artinya, sebagai pendeskripsi keadaan maka fungsi gelombang tersebut memuat semua informasi tentang sistem yang dibicarakan, misalnya: posisi, momentum linier, energi, momentum sudut dan besaran-besaran dinamis lain yang diperlukan. Sehingga didapatkan petunjuk berikutnya tentang persamaan *Schrodinger* bahwa fungsi gelombang $\Psi(x, t)$ yang dihasilkan harus dapat digunakan untuk mengetahui nilai berbagai besaran fisika yang dimiliki sistem (Sutopo, 2005).

Cara mengetahui nilai besaran fisika adalah dengan melakukan pengukuran. Menurut postulat tentang pengukuran, mengukur adalah mengerjakan operator (yang mewakili besaran fisika yang diukur) pada fungsi gelombang yang mendeskripsikan keadaan sistem saat pengukuran. Kemudian hal tersebut akan diterapkan pada kasus khusus, yaitu pengukuran energi total bagi sistem konservatif.

Hukum kekekalan energi berlaku pada sistem konservatif, yaitu jumlah energi kinetik ditambah energi potensial bersifat kekal: artinya tidak bergantung pada waktu maupun posisi. Hukum kekekalan energi tersebut telah dapat

dijelaskan dengan baik oleh fisika klasik. Dengan demikian sebagai teori yang lebih baru, persamaan *Schrodinger* harus konsisten dengan hukum kekekalan energi tersebut.

Secara matematis hukum kekekalan energi dapat diungkapkan dengan rumusan:

$$\frac{p^2}{2m} + V(x) = E. \quad (2.14)$$

Suku pertama ruas kiri menyatakan energi kinetik, suku kedua menyatakan energi potensial, dan ruas kanan menyatakan suatu tetapan yang biasa disebut sebagai energi total.

Rumusan kuantum bagi hukum kekekalan energi tersebut diperoleh dengan merubah persamaan (2.14) menjadi persamaan operator yaitu:

$$\frac{\hat{P}^2}{2m} + V(\hat{X}) = \hat{E}. \quad (2.15)$$

Cara kerja operator $\hat{P}$ dan $V(\hat{X})$ dalam ruang posisi adalah $\hat{P} = -i\hbar\partial/\partial x$ dan $V(\hat{X}) = V(x)$. Jika ungkapan tersebut disubstitusikan pada persamaan (2.15) kemudian masing-masing ruas persamaannya dikerjakan pada sebarang fungsi gelombang $\Psi(x, t)$ maka didapatkan persamaan berikut.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x)\Psi(x, t) = \hat{E}\Psi(x, t). \quad (2.16)$$

Postulat pengukuran selanjutnya akan digunakan untuk mengetahui cara kerja operator E khususnya yang berhubungan dengan dampak pengukuran terhadap keadaan sistem. Menurut postulat ini, fungsi gelombang tidak berubah akibat pengukuran jika fungsi gelombang tersebut merupakan fungsi eigen bagi besaran yang diukur.

Fungsi gelombang $\Psi(x, t) = e^{i(kx - \hbar\omega t)}$ ini memiliki frekuensi sudut sebesar ω . Berdasarkan kaitan Planck-Einstein $E = \hbar\omega$, dapat disimpulkan bahwa fungsi gelombang tadi mendeskripsikan keadaan partikel yang memiliki energi sebesar $E = \hbar\omega$. Dengan kata lain, fungsi gelombang tadi merupakan fungsi eigen bagi operator energi $\hat{E}$ dengan nilai eigen $E = \hbar\omega$. Dengan demikian, fungsi gelombang tadi harus memenuhi persamaan nilai eigen:

$$\hat{E}\Psi(x, t) = \hbar\omega\Psi(x, t). \quad (2.17)$$

Jadi, dengan menggunakan fungsi gelombang $\Psi(x, t) = e^{i(kx - \hbar\omega t)}$, disimpulkan bahwa operator $\hat{E}$ berbentuk $\hat{E} = i\hbar\partial/\partial t$, sebab

$$i\hbar \frac{\partial\Psi(x, t)}{\partial t} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}(e^{i(kx - \hbar\omega t)}) = \hbar\omega(e^{i(kx - \hbar\omega t)}) = \hbar\omega\Psi(x, t). \quad (2.18)$$

Operator $\hat{E}$ yang telah diperoleh kemudian disubstitusikan pada persamaan (2.16) menjadi

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2\Psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x)\Psi(x, t) = -i\hbar \frac{\partial\Psi(x, t)}{\partial t}. \quad (2.19)$$

Persamaan (2.19) merupakan persamaan diferensial parsial yang jika diselesaikan akan menghasilkan fungsi gelombang $\Psi(x, t)$, namun persamaan tersebut hanya berlaku untuk sistem yang energi potensialnya secara eksplisit tidak bergantung pada waktu t . Untuk itu, perubahan yang perlu dilakukan adalah cukup dengan mengubah $V(x)$ menjadi $V(x, t)$. Dengan demikian didapatkan persamaan akhir:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2\Psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x, t)\Psi(x, t) = -i\hbar \frac{\partial\Psi(x, t)}{\partial t}. \quad (2.20)$$

Persamaan (2.20) inilah yang disebut dengan persamaan *Schrodinger* (dalam satu dimensi) (Sutopo, 2005).

Selanjutnya, untuk memperoleh bentuk persamaan *Klein-Gordon* akan digunakan persamaan energi dan momentum 4-vektor relativistik.

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \quad (2.21)$$

Sebagaimana pada penurunan persamaan *Schrodinger*, definisi operator p dan E disubstitusikan pada persamaan (2.21) kemudian masing-masing ruas persamaannya dikerjakan pada sebarang fungsi gelombang $\Psi(x, t)$ sehingga didapatkan persamaan berikut.

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial t^2} - \hbar^2 c^2 \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} = m_0^2 c^4 \Psi(x, t) \quad (2.22)$$

Penyederhanaan persamaan (2.22) dilakukan dengan memindahkan $\hbar^2$ ke ruas kanan, sehingga diperoleh

$$-\frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{m_0^2 c^4 \Psi(x, t)}{\hbar^2} \quad (2.23)$$

atau bisa juga ditulis

$$\frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + \frac{m_0^2 c^4 \Psi(x, t)}{\hbar^2} = 0 \quad (2.24)$$

Easif dkk, (2013) dalam jurnalnya yang berjudul *The Finite Difference Methods for ϕ^4 -Nonlinear Klein Gordon Equation* menyatakan persamaan *Klein-Gordon* dalam bentuk

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u - f(u) \quad (2.25)$$

Persamaan (2.25) diberi nama persamaan *Klein-Gordon* setelah Oskar Klein dan Walter Gordon mengemukakan bahwa persamaan tersebut menjelaskan elektron relativitas pada tahun 1926. Ketika gaya $f(u) = mu - \alpha u^3$ maka persamaan (2.25) disebut persamaan nonlinear ϕ^4 - *Klein Gordon* (persamaan ϕ^4).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u - mu - \alpha u^3 \quad (2.26)$$

dengan m merupakan massa dan α adalah suatu konstanta.

Iqbal, dkk (2010) dalam jurnalnya mendefinisikan persamaan *Klein-Gordon* dalam bentuk yang lebih matematis dengan menuliskan fungsi $\Psi(x, t)$ sebagai fungsi u , yaitu:

$$u_{tt} + \alpha u_{xx} + \beta u + \gamma u = f(x, t), \quad x \in \Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}, \quad 0 < t \leq T,$$

dengan kondisi awal:

$$u(x, 0) = g_1(x), \quad u_t(x, 0) = g_2(x), \quad x \in \Omega,$$

dan kondisi batas:

$$u(a, t) = g_3(t), \quad t > 0$$

$$u(b, t) = g_4(t), \quad t > 0$$

di mana α , β dan γ adalah suatu konstanta, $f(x, t)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(t)$, dan $g_4(t)$ adalah suatu fungsi yang diketahui, dan fungsi $u(x, t)$ merupakan fungsi gelombang tertentu yang akan dicari.

2.3 Metode Beda Hingga

Persamaan diferensial tidak selalu mudah diselesaikan secara analitik. Oleh karena itu, seringkali dibutuhkan pendekatan solusi secara numerik untuk menyelesaikannya. Salah satu metode numerik yang sering digunakan adalah metode beda hingga. Metode beda hingga merupakan metode yang umum digunakan dalam menyelesaikan permasalahan persamaan diferensial biasa maupun persamaan diferensial parsial yang didasarkan pada ekspansi deret Taylor (Strauss, 2007).

Adapun operator metode beda hingga menurut Strauss (2007) yaitu:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x}, \quad (2.27)$$

untuk persamaan beda maju.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}, \quad (2.28)$$

untuk persamaan beda mundur.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}, \quad (2.29)$$

untuk persamaan beda pusat.

Persamaan (2.27), (2.28) dan (2.29) dapat diperoleh dari ekspansi deret Taylor. Misalkan diberikan fungsi $u(x + \Delta x, t)$, $u(x - \Delta x, t)$, $u(x, t + \Delta t)$ dan $u(x, t - \Delta t)$ di aproksimasi ke dalam deret Taylor di sekitar $u(x, t)$ sebagaimana berikut.

$$u(x + \Delta x, t) = u(x, t) + u_x(x, t)\Delta x + \frac{1}{2}u_{xx}(x, t)\Delta x^2 + \frac{1}{6}u_{xxx}(x, t)\Delta x^3 + \dots \quad (2.30)$$

$$u(x - \Delta x, t) = u(x, t) - u_x(x, t)\Delta x + \frac{1}{2}u_{xx}(x, t)\Delta x^2 - \frac{1}{6}u_{xxx}(x, t)\Delta x^3 + \dots \quad (2.31)$$

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + u_t(x, t)\Delta t + \frac{1}{2}u_{tt}(x, t)\Delta t^2 + \frac{1}{6}u_{ttt}(x, t)\Delta t^3 + \dots \quad (2.32)$$

$$u(x, t - \Delta t) = u(x, t) - u_t(x, t)\Delta t + \frac{1}{2}u_{tt}(x, t)\Delta t^2 - \frac{1}{6}u_{ttt}(x, t)\Delta t^3 + \dots \quad (2.33)$$

Turunan hampiran pertama terhadap x untuk beda maju, beda mundur dan beda pusat dapat dilakukan dengan menggunakan ekspansi deret Taylor dari persamaan (2.30), (2.31), (2.32) dan (2.33) yang dipotong sampai orde tertentu.

Aproksimasi turunan pertama terhadap x untuk beda pusat dapat dilakukan dengan mengurangkan persamaan (2.30) dengan persamaan (2.31), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t) &= 2u_x(x, t)\Delta x + \frac{1}{6}u_{xxx}(x, t)\Delta x^3 + \dots \\
2\Delta xu_x(x, t) &= u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t) + O(\Delta x)^3 \\
u_x(x, t) &= \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t)}{2\Delta x} + O(\Delta x)^3 \quad (2.34)
\end{aligned}$$

Aproksimasi turunan pertama terhadap t untuk beda pusat dapat dilakukan dengan mengurangkan persamaan (2.32) dengan persamaan (2.33), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
u(x, t + \Delta t) - u(x, t - \Delta t) &= 2u_t(x, t)\Delta t + \frac{1}{6}u_{ttt}(x, t)\Delta t^3 + \dots \\
2\Delta tu_t(x, t) &= u(x, t + \Delta t) - u(x, t - \Delta t) + O(\Delta t)^3 \\
u_t(x, t) &= \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t - \Delta t)}{2\Delta t} + O(\Delta t)^3 \quad (2.35)
\end{aligned}$$

Jika digunakan subskrip j untuk menyatakan titik diskrit pada arah x dan superskrip n untuk menyatakan titik diskrit pada arah t , maka persamaan (2.34) dan (2.35) berturut-turut dapat ditulis

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} \quad (2.37)$$

Adapun aproksimasi turunan kedua terhadap x untuk beda pusat diperoleh dengan menjumlahkan persamaan (2.30) dengan persamaan (2.31), sehingga diperoleh

$$u(x + \Delta x, t) + u(x - \Delta x, t) = 2u(x, t) + 2\frac{1}{2}u_{xx}(x, t)\Delta x^2 + \dots$$

$$u(x + \Delta x, t) + u(x - \Delta x, t) = 2u(x, t) + u_{xx}(x, t)\Delta x^2 + O(\Delta x)^4$$

$$u_{xx}(x, t)\Delta x^2 = u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t) + O(\Delta x)^4$$

$$u_{xx}(x, t) = \frac{u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2} + O(\Delta x)^4 \quad (2.38)$$

Apresiasi turunan kedua terhadap t untuk beda pusat diperoleh dengan menjumlahkan persamaan (2.32) dengan persamaan (2.33), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} u(x, t + \Delta t) + u(x, t - \Delta t) &= 2u(x, t) + 2\frac{1}{2}u_{tt}(x, t)\Delta t^2 + \dots \\ u(x, t + \Delta t) + u(x, t - \Delta t) &= 2u(x, t) + u_{tt}(x, t)\Delta t^2 + O(\Delta t)^4 \\ u_{tt}(x, t)\Delta t^2 &= u(x, t + \Delta t) - 2u(x, t) + u(x, t - \Delta t) + O(\Delta t)^4 \\ u_{tt}(x, t) &= \frac{u(x, t + \Delta t) - 2u(x, t) + u(x, t - \Delta t)}{\Delta t^2} + O(\Delta t)^4 \quad (2.39) \end{aligned}$$

Jika digunakan subskrip j untuk menyatakan titik diskrit pada arah x dan superskrip n untuk menyatakan titik diskrit pada arah t , maka persamaan (2.38) dan (2.39) berturut-turut dapat ditulis

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} \quad (2.41)$$

2.4 Basis

Basis mempunyai definisi jika V adalah suatu ruang vektor sebarang dan $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ adalah suatu himpunan vektor-vektor pada V , maka S disebut basis untuk V jika dua syarat berikut berlaku:

- (a) S bebas linier.
- (b) S merentang V (Anton & Rorres, 2004).

Sebagai contoh, jika $v_1, v_2, v_3, \dots, v_N$ merupakan vektor-vektor berikut

$$v_1 = (\phi(a, c_1), h(x_2, c_1), \dots, h(x_{m-1}, c_1), \phi(b, c_1))$$

$$v_2 = (\phi(a, c_2), h(x_2, c_2), \dots, h(x_{m-1}, c_2), \phi(b, c_2))$$

$$\mathbf{v}_3 = (\phi(a, c_3), h(x_2, c_3), \dots, h(x_{m-1}, c_3), \phi(b, c_3))$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{v}_N = (\phi(a, c_N), h(x_2, c_N), \dots, h(x_{m-1}, c_N), \phi(b, c_N))$$

dan $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_N\}$ serta $N = m$, maka selanjutnya akan ditunjukkan bahwa S adalah basis di ruang R^N . Oleh karena itu, perlu ditunjukkan bahwa S merentang R^N dan S bebas linier.

Cara menunjukkan bahwa himpunan S merentang R^N adalah dengan menunjukkan bahwa suatu vektor sebarang $\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3, \dots, d_m)$ yang dapat dinyatakan sebagai suatu kombinasi linier dari vektor-vektor pada S sebagaimana berikut.

$$\mathbf{d} = w_1 \mathbf{v}_1 + w_2 \mathbf{v}_2 + \dots + w_N \mathbf{v}_N$$

atau

$$\begin{aligned} \mathbf{d} = & w_1(\phi(a, c_1), h(x_2, c_1), \dots, h(x_{m-1}, c_1), \phi(b, c_1)) \\ & + w_2(\phi(a, c_2), h(x_2, c_2), \dots, h(x_{m-1}, c_2), \phi(b, c_2)) + \dots \\ & + w_N \phi(a, c_N), h(x_2, c_N), \dots, h(x_{m-1}, c_N), \phi(b, c_N) \end{aligned}$$

atau, dengan menyetarakan komponen-komponen yang bersesuaian sehingga diperoleh bentuk berikut.

$$\phi(a, c_1)w_1 + \phi(a, c_2)w_2 + \dots + \phi(a, c_N)w_N = d_1$$

$$h(x_2, c_1)w_1 + h(x_2, c_2)w_2 + \dots + h(x_2, c_N)w_N = d_2$$

$$h(x_3, c_1)w_1 + h(x_3, c_2)w_2 + \dots + h(x_3, c_N)w_N = d_3 \quad (2.42)$$

$$\vdots$$

$$h(x_{m-1}, c_1)w_1 + h(x_{m-1}, c_2)w_2 + \dots + h(x_{m-1}, c_N)w_N = d_{m-1}$$

$$\phi(b, c_1)w_1 + \phi(b, c_2)w_2 + \cdots + \phi(b, c_N)w_N = d_m$$

Dalam bentuk matriks dapat ditulis dalam bentuk berikut.

$$\begin{bmatrix} \phi(a, c_1) & \phi(a, c_2) & \cdots & \phi(a, c_N) \\ h(x_2, c_1) & h(x_2, c_2) & \cdots & h(x_2, c_N) \\ h(x_3, c_1) & h(x_3, c_2) & \cdots & h(x_3, c_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h(x_{m-1}, c_1) & h(x_{m-1}, c_2) & \cdots & h(x_{m-1}, c_N) \\ \phi(b, c_1) & \phi(b, c_2) & \cdots & \phi(b, c_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Jadi untuk menunjukkan S merentang R^N harus ditunjukkan bahwa sistem (2.27) memiliki satu solusi untuk setiap pilihan dari $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_m)$.

Cara untuk membuktikan bahwa S bebas linier adalah dengan menunjukkan bahwa satu-satunya solusi dari

$$w_1\mathbf{v}_1 + w_2\mathbf{v}_2 + \cdots + w_N\mathbf{v}_N = \mathbf{0} \quad (2.44)$$

adalah $w_1 = w_2 = \cdots = w_N = 0$. Jika persamaan (2.28) dinyatakan dalam bentuk komponen-komponennya maka hanya akan ditunjukkan bahwa sistem homogen

$$\begin{aligned} \phi(a, c_1)w_1 + \phi(a, c_2)w_2 + \cdots + \phi(a, c_N)w_N &= 0 \\ h(x_2, c_1)w_1 + h(x_2, c_2)w_2 + \cdots + h(x_2, c_N)w_N &= 0 \\ h(x_3, c_1)w_1 + h(x_3, c_2)w_2 + \cdots + h(x_3, c_N)w_N &= 0 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$h(x_{m-1}, c_1)w_1 + h(x_{m-1}, c_2)w_2 + \cdots + h(x_{m-1}, c_N)w_N = 0$$

$$\phi(b, c_1)w_1 + \phi(b, c_2)w_2 + \cdots + \phi(b, c_N)w_N = 0$$

hanya akan memiliki solusi trivial.

Jadi, dibuktikan bahwa S bebas linier dan merentang R^N untuk $m = N$. Dengan demikian S adalah basis untuk R^N .

2.5 Galat

Penyelesaian secara numerik dari suatu persamaan matematik hanya memberikan nilai perkiraan yang mendekati nilai eksak dari penyelesaian analitik. Berarti dalam penyelesaian numerik tersebut terdapat kesalahan atau galat terhadap nilai eksak (Triatmodjo, 2002).

Galat bawaan adalah galat dari nilai data. Galat tersebut bisa terjadi karena kekeliruan dalam menyalin data ataupun salah membaca skala pada suatu alat ukur. Galat pembulatan terjadi karena tidak diperhitungkannya beberapa angka terakhir dari suatu bilangan. Galat ini terjadi apabila bilangan perkiraan digunakan untuk menggantikan bilangan eksak. Sedangkan galat pemotongan terjadi karena tidak dilakukannya hitungan sesuai dengan prosedur matematik yang benar. Sebagai contoh suatu proses tak terhingga diganti dengan proses berhingga.

Hubungan antara nilai eksak, nilai perkiraan dan galat adalah sebagai berikut.

$$u = \hat{u} + E \quad (2.46)$$

dengan:

u : nilai eksak

$\hat{u}$: nilai perkiraan

E : kesalahan terhadap nilai eksak

Berdasarkan bentuk persamaan (2.46) dapat disimpulkan bahwa galat adalah selisih antara nilai eksak dan nilai perkiraan, yaitu:

$$E = u - \hat{u} \quad (2.47)$$

Bentuk galat seperti diberikan oleh persamaan (2.47) disebut dengan galat absolut. Galat absolut tidak menunjukkan besarnya tingkat kesalahan.

Besarnya tingkat kesalahan dapat dinyatakan dalam bentuk galat relatif, yaitu dengan membandingkan kesalahan yang terjadi dengan nilai eksak (Triatmodjo, 2002).

$$\varepsilon = \frac{E}{u}$$

dengan ε adalah galat relatif terhadap nilai eksak. Galat relatif sering diberikan dalam bentuk persen seperti berikut ini.

$$\varepsilon = \frac{E}{u} \times 100\% \quad (2.48)$$

Mai-Duy & Tran-Cong (2003) juga menyebutkan bahwa untuk menentukan galat juga dapat dilakukan dengan menghitung jumlah galat kuadrat atau *sum square error* (SSE) antara fungsi aproksimasi jaringan fungsi radial basis dan fungsi asalnya, yaitu:

$$SSE = \sum_{j=1}^N (u_j - \hat{u}_j)^2 \quad (2.49)$$

Galat pada masing-masing titik dapat diketahui dengan menghitung rata-rata dari SSE dengan menggunakan

$$\overline{SSE} = \frac{\sum_{j=1}^N (u_j - \hat{u}_j)^2}{p} \quad (2.50)$$

dengan p adalah banyaknya titik.

2.6 Keteraturan Alam Semesta

Ukuran bulan dan matahari tampak sama jika dilihat dari bumi meskipun sebenarnya matahari berukuran jauh lebih besar dari pada bumi. Penampakan bumi dan matahari yang sama besar ini memungkinkan gerhana matahari. Keteraturan penciptaan Allah Swt. tersebut merupakan sebuah anugrah bagi kehidupan di bumi. Ukuran-ukuran yang sangat ideal itu tidak mungkin terjadi secara kebetulan. Hal tersebut merupakan rahmat Allah yang memungkinkan orang untuk meneliti mahkota matahari (Sani, 2014). Dalam Al-Quran, Allah Swt. berfirman:

الَّذِي لَهُ مُلْكُ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُنْ لَهُ شَرِيكٌ فِي الْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَرَهُ تَقْدِيرًا ۝

“yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan Allah tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya), dan Allah telah menciptakan segala sesuatu, dan Allah menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya.” (QS. Al-Furqan/25:2).

Dijelaskan dalam tafsir Ibn Katsir (2004) bahwa lafadz خَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَرَهُ

تَقْدِيرًا yang artinya “Allah telah menciptakan segala sesuatu, dan Allah menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya” mempunyai maksud bahwa segala sesuatu selain Allah adalah *makhluk* (yang diciptakan) dan *marbub* (yang berada di bawah kekuasaan-Nya). Allahlah pencipta segala sesuatu, Rabb, Raja, dan Ilah-Nya. Sedangkan segala sesuatu berada dibawah kekuasaan, aturan, tatanan dan takdir-Nya.

Al-Qurthubi (2009) menjelaskan bahwa maksud dari lafadz **فَقَدَرَهُ تَقْدِيرًا**

adalah menetapkan segala sesuatu dari apa yang diciptakan-Nya sesuai dengan hikmah yang diinginkan-Nya, dan bukan karena nafsu dan kelalaian, melainkan segala sesuatu berjalan sesuai dengan ketentuan-Nya hingga hari kiamat dan setelah kiamat. Karena Allah adalah Sang Pencipta Yang Maha Kuasa, dan untuk itulah semua makhluk beribadah kepada-Nya.

Keteraturan penciptaan alam semesta juga dijelaskan pada Al-Quran surat Al-Qamar ayat 49.

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ

“Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran”. (QS. Al-Qamar /54:49).

Katsir (2004) menjelaskan bahwa maksud dari ayat di atas adalah Allah menetapkan suatu ukuran dan memberikan petunjuk terhadap semua makhluk kepada ketetapan tersebut. Oleh karena itu, para ulama' sunnah menjadikan ayat yang mulia ini sebagai dalil untuk menetapkan takdir Allah bagi suatu makhluk sebelum makhluk itu diciptakan. Dan itu merupakan ilmu Allah terhadap segala sesuatu sebelum adanya dan pencatatan ketentuan masing-masing makhluk sebelum semuanya tercipta.

Menurut Al-Qarni (2007), ayat tersebut menjelaskan bahwa Allah menciptakan segala sesuatu dan menentukan ukurannya sesuai ketetapan, ilmu pengetahuan, dan suratan takdir. Jadi semua yang terjadi di alam semesta pasti berdasarkan takdir-Nya.

Semua diciptakan Allah dengan ukuran yang ideal dan memiliki fungsi tersendiri. Begitu pula dengan struktur dan susunan benda serta makhluk hidup.

Misalnya, buah semangka yang memiliki pohon yang tinggi, sedangkan buah durian yang berkulit keras memiliki pohon yang cukup tinggi. Firman Allah Swt.:

وَالْأَرْضَ مَدَدْنَاهَا وَأَلْقَيْنَا فِيهَا رَوَاسِيَ وَأَنْبَتْنَا فِيهَا مِنْ كُلِّ شَيْءٍ مَوْزُونٍ ﴿١٩﴾

“dan Kami telah menghamparkan bumi dan menjadikan padanya gunung-gunung dan Kami tumbuhkan padanya segala sesuatu menurut ukuran”. (QS. Al-Hijr /15:19).

Kemudian Allah ta’ala menuturkan bagaimana Allah menciptakan bumi dan menjadikannya membentang luas dan datar, menjadikan gunung-gunung yang tegak, lembah-lembah, tanah (daratan), pasir, dan berbagai tumbuh-tumbuhan dan buah-buahan yang sesuai. Ibnu Abbas mengatakan tentang *مَوْزُونٌ* *“Segala sesuatu dengan ukurannya”*, *مَوْزُونٌ* artinya maklum (diketahui tertentu) (Katsir, 2004).

Tafsir Muyassar menjelaskan maksud dari QS. Al-Hijr/15:19 yaitu bahwa Allah telah menghamparkan bumi, meratakannya, dan menegakkan gunung-gunung yang kokoh di atasnya, yang menguatkan agar tidak bergoyang. Allah juga menumbuhkan di bumi dari setiap pasangan, dari berbagai macam tumbuhan dengan ukuran yang sudah ditentukan, yang dibutuhkan manusia dan binatang (Al-Qarni, 2007).

Struktur, susunan, dan fungsi hewan juga diciptakan dengan sangat sesuai. Keragaman hewan sangat bermanfaat bagi kehidupan di bumi. Ukuran dan karakteristik hewan juga mengikuti aturan yang ideal untuk kehidupan di bumi. Ukuran lebah dan kupu-kupu sesuai untuk penyerbukan bunga. Semut berukuran kecil membantu menyebarkan biji dari buah-buahan yang dimakannya. Tidak hanya ukuran yang dibuat teratur, namun bentuk serta posisi anggota tubuh dan

warna hewan memiliki fungsi masing sesuai dengan kebutuhannya. Semua yang diciptakan Allah adalah berdasarkan ukuran dan ketentuan yang sangat sesuai dengan kebutuhan makhluknya dan tidak ada yang diciptakan dengan sia-sia (Sani, 2014).

Seluruh benda yang diciptakan Allah mempunyai kesesuaian masing-masing, bahkan dari benda yang sangat kecil. Sebagaimana firman Allah:

يَعْلَمُ مَا يَلْجُ فِي الْأَرْضِ وَمَا يَخْرُجُ مِنْهَا وَمَا يَنْزِلُ مِنَ السَّمَاءِ وَمَا يَعْرُجُ فِيهَا
وَهُوَ الرَّحِيمُ الْغَفُورُ

“Allah mengetahui apa yang masuk ke dalam bumi, apa yang ke luar daripadanya, apa yang turun dari langit dan apa yang naik kepadanya. dan Allah-lah yang Maha Penyayang lagi Maha Pengampun.” (QS. Saba’:2).

Katsir (2004) menjelaskan bahwa Mujahid dan Qatadah berkata: “Tidak ada yang tersembunyi dari pada-Nya, yaitu semua berada di bawah ilmu-Nya, dimana tidak ada sesuatu pun yang tersembunyi dari-Nya.” Tulang-tulang itu sekalipun sudah saling berserakan, berpisah dan berantakan, maka Allah Maha Mengetahui kemana dia pergi dan dimana dia berserakan. Kemudian Allah mengembalikannya, sebagaimana Allah menciptakannya pertama kali. Karena sesungguhnya Allah Maha Mengetahui segala sesuatu.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Solusi Numerik Persamaan Linier *Klein-Gordon* Menggunakan Jaringan Fungsi Radial Basis

Pembahasan ini mengkaji tentang solusi numerik dari persamaan:

$$u(x, t)_{tt} + \alpha u(x, t)_{xx} + \beta u(x, t) + \gamma u(x, t) = f(x, t), \quad (3.51)$$

dimana $x \in \Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $0 < t \leq T$, dan dengan kondisi awal:

$$u(x, 0) = g_1(x), \quad x \in \Omega, \quad (3.52)$$

$$u_t(x, 0) = g_2(x), \quad x \in \Omega, \quad (3.53)$$

serta kondisi batas:

$$u(a, t) = g_3(t), \quad t > 0 \quad (3.54)$$

$$u(b, t) = g_4(t), \quad t > 0 \quad (3.55)$$

dimana α , β dan γ adalah suatu konstanta, $f(x, t)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(t)$, dan $g_4(t)$ adalah suatu fungsi yang diketahui, dan fungsi $u(x, t)$ merupakan variabel yang akan dicari (Iqbal dkk, 2010).

Persamaan (2.14) akan diselesaikan secara numerik menggunakan beberapa langkah yang akan diuraikan pada subbab berikut.

3.1.1 Diskritisasi

Proses diskritisasi dilakukan pada beberapa persamaan. Diskritisasi yang pertama yaitu diskritisasi persamaan (2.14) terhadap waktu menggunakan metode implisit beda pusat sebagaimana pada persamaan (2.41). Sehingga u menjadi suatu fungsi yang hanya bergantung pada variabel x .

$$\frac{u^{(n+1)}(x) - 2u^{(n)}(x) + u^{(n-1)}(x)}{\Delta t^2} + \alpha u_{xx}^{(n+1)}(x) + \beta u^{(n+1)}(x) + \gamma u^{(n+1)}(x) = f(x, t^{(n+1)})$$

dengan pangkat bertanda kurung menjelaskan indeks dari variabel yang diikuti.

Ruas kanan dan ruas kiri dikalikan dengan Δt^2 untuk mempermudah pengelompokan variabel $u^{(n+1)}(x)$. Untuk penyederhanaan penulisan, selanjutnya $u(x)$ akan ditulis dengan u saja.

$$\frac{u^{(n+1)} - 2u^{(n)} + u^{(n-1)}}{\Delta t^2} \Delta t^2 + \alpha \Delta t^2 u_{xx}^{(n+1)} + (\beta + \gamma) \Delta t^2 u^{(n+1)} = \Delta t^2 f(x, t^{(n+1)})$$

Semua suku yang mempunyai indeks $(n + 1)$ dikumpulkan di ruas kiri dan yang lain di ruas kanan.

$$u^{(n+1)} + \alpha \Delta t^2 u_{xx}^{(n+1)} + \Delta t^2 (\beta + \gamma) u^{(n+1)} = 2u^{(n)} - u^{(n-1)} + \Delta t^2 f(x, t^{(n+1)})$$

Koefisien dari $u^{(n+1)}$ dikumpulkan menjadi satu pada ruas kiri untuk penyederhanaan penulisan.

$$\alpha \Delta t^2 u_{xx}^{(n+1)} + (1 + \Delta t^2 (\beta + \gamma)) u^{(n+1)} = 2u^{(n)} - u^{(n-1)} + \Delta t^2 f(x, t^{(n+1)}) \quad (3.56)$$

yang pada akhirnya $u^{(n+1)}$ merupakan solusi u pada waktu ke $(n + 1)$ yang akan dicari.

Langkah selanjutnya adalah melakukan diskritisasi pada persamaan (3.52) dan (3.53) menggunakan metode beda pusat dengan mengikuti persamaan (2.36) untuk memperoleh nilai $u^{(0)}$ dan $u^{(1)}$, sehingga persamaan (3.52) menjadi:

$$u^{(1)} = g_1(x). \quad (3.57)$$

dan persamaan (3.53) menjadi:

$$\frac{u^{(2)} - u^{(0)}}{2\Delta t} = g_2(x),$$

$$u^{(0)} = u^{(2)} - 2\Delta t g_2(x). \quad (3.58)$$

Bentuk diskrit persamaan (2.14) pada saat $n = 1$ selanjutnya diperoleh dengan mensubstitusikan $n = 1$ pada persamaan (3.56) yang pada akhirnya bertujuan untuk memperoleh nilai $u^{(2)}$.

$$\alpha \Delta t^2 u_{xx}^{(2)} + (1 + \Delta t^2(\beta + \gamma))u^{(2)} = 2u^{(1)} - u^{(0)} + \Delta t^2 f(x, t^{(2)}) \quad (3.59)$$

dimana $u^{(1)}$ dan $u^{(0)}$ merupakan nilai yang dapat diperoleh dari persamaan (3.57) dan (3.58), sehingga persamaan (3.59) menjadi:

$$\alpha \Delta t^2 u_{xx}^{(2)} + (1 + \Delta t^2(\beta + \gamma))u^{(2)} = 2g_1(x) - (u^{(2)} - 2\Delta t g_2(x)) + \Delta t^2 f(x, t^{(2)}) \quad (3.60)$$

Persamaan (3.60) ditulis dalam bentuk yang lebih sederhana sebagaimana berikut.

$$\alpha \Delta t^2 u_{xx}^{(2)} + (1 + \Delta t^2(\beta + \gamma))u^{(2)} = 2g_1(x) - u^{(2)} + 2\Delta t g_2(x) + \Delta t^2 f(x, t^{(2)}) \quad (3.61)$$

Suku yang memuat $u^{(2)}$ pada ruas kanan dikumpulkan di ruas kiri, sehingga persamaan (3.61) menjadi:

$$\alpha \Delta t^2 u_{xx}^{(2)} + (2 + \Delta t^2(\beta + \gamma))u^{(2)} = 2g_1(x) + 2\Delta t g_2(x) + \Delta t^2 f(x, t^{(2)}) \quad (3.62)$$

3.1.2 Aproksimasi Fungsi u menggunakan Jaringan Fungsi Radial Basis

Langkah selanjutnya adalah mengaproksimasi fungsi yang masih mengandung variabel x . Dengan demikian, aproksimasi yang dilakukan akan mengikuti persamaan (2.1). Pada persamaan (3.62) terdapat dua fungsi yang mengandung variabel x , yaitu u dan u_{xx} , sehingga persamaan (3.62) menjadi

$$\begin{aligned} \alpha \Delta t^2 \sum_{j=1}^N w_j^{(2)} \phi_{xx}(x, c_j) + (2 + \Delta t^2(\beta + \gamma)) \sum_{j=1}^N w_j^{(2)} \phi(x, c_j) \\ = 2g_1(x) + 2\Delta t g_2(x) + \Delta t^2 f(x, t^{(2)}) \end{aligned} \quad (3.63)$$

Persamaan (3.63) disederhanakan lagi menjadi

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N w_j^{(2)} (\alpha \Delta t^2 \phi_{xx}(x, c_j) + (2 + \Delta t^2(\beta + \gamma)) \phi(x, c_j)) \\ = 2g_1(x) + 2\Delta t g_2(x) + \Delta t^2 f(x, t^{(2)}) \end{aligned} \quad (3.64)$$

Persamaan (3.64) dimisalkan sebagaimana bentuk berikut untuk menyederhanakan penulisan.

$$\alpha \Delta t^2 \phi_{xx}(x, c_j) + (2 + \Delta t^2(\beta + \gamma)) \phi(x, c_j) = h(x, c_j),$$

dan

$$2g_1(x) + 2\Delta t g_2(x) + \Delta t^2 f(x, t^{(2)}) = B(x, t^{(2)})$$

sehingga persamaan (3.64) menjadi:

$$\sum_{j=1}^N w_j^{(2)} h(x, c_j) = B(x, t^{(2)}), \quad a \leq x \leq b \quad (3.65)$$

Aproksimasi selanjutnya dilakukan pada kondisi-kondisi batas yang telah diberikan. Aproksimasi kondisi batas kiri yaitu persamaan (3.4) menjadi:

$$\sum_{j=1}^N w_j^{(2)} \phi(a, c_j) = g_3(t^{(2)}), \quad (3.66)$$

Aproksimasi kondisi batas kanan yaitu persamaan (3.55) menghasilkan:

$$\sum_{j=1}^N w_j^{(2)} \phi(b, c_j) = g_4(t^{(2)}). \quad (3.67)$$

Persamaan (3.66), (3.65) dan (3.67) akan dijabarkan menjadi suatu persamaan linier, sehingga untuk persamaan (3.66) diperoleh:

$$w_1^{(2)} \phi(a, c_1) + w_2^{(2)} \phi(a, c_2) + \cdots + w_N^{(2)} \phi(a, c_N) = g_3(t^{(2)}). \quad (3.68)$$

Dan untuk persamaan (3.65) menjadi:

$$w_1^{(2)} h(x, c_1) + w_2^{(2)} h(x, c_2) + \cdots + w_N^{(2)} h(x, c_N) = B(x, t^{(2)}). \quad (3.69)$$

Sedangkan persamaan (3.67) menjadi:

$$w_1^{(2)} \phi(b, c_1) + w_2^{(2)} \phi(b, c_2) + \cdots + w_N^{(2)} \phi(b, c_N) = g_4(t^{(2)}). \quad (3.70)$$

Dengan $\phi(x, c_j)$ merupakan fungsi real dan $w_j^{(2)}$ merupakan suatu koefisien konstan sehingga $w_j^{(2)} \phi(x, c_j)$ adalah suatu perkalian yang bersifat komutatif. Oleh karena itu, persamaan (3.68) menjadi

$$\phi(a, c_1)w_1^{(2)} + \phi(a, c_2)w_2^{(2)} + \cdots + \phi(a, c_N)w_N^{(2)} = g_3(a, t^{(2)}). \quad (3.71)$$

Variabel x pada persamaan (3.69) berbentuk diskrit yaitu $x = (x_2, x_3, \dots, x_{m-1})$, sehingga untuk masing-masing x , diperoleh bentuk persamaan (3.69) sebagai berikut. Untuk $x = x_2$ menjadi,

$$h(x_2, c_1)w_1^{(2)} + h(x_2, c_2)w_2^{(2)} + \cdots + h(x_2, c_N)w_N^{(2)} = B(x_2, t^{(2)}) \quad (3.72)$$

Untuk $x = x_3$ menjadi,

$$h(x_3, c_1)w_1^{(2)} + h(x_3, c_2)w_2^{(2)} + \dots + h(x_3, c_N)w_N^{(2)} = B(x_3, t^{(2)}) \quad (3.73)$$

Dan seterusnya demikian sampai pada $x = x_{m-1}$. Untuk $x = x_{m-1}$ menjadi,

$$h(x_{m-1}, c_1)w_1^{(2)} + h(x_{m-1}, c_2)w_2^{(2)} + \dots + h(x_{m-1}, c_N)w_N^{(2)} = B(x_{m-1}, t^{(2)}). \quad (3.74)$$

Selanjutnya persamaan (3.70) menjadi

$$\phi(b, c_1)w_1^{(2)} + \phi(b, c_2)w_2^{(2)} + \dots + \phi(b, c_N)w_N^{(2)} = g_4(t^{(2)}) \quad (3.75)$$

Persamaan (3.71) sampai dengan (3.75) ditulis dalam bentuk sistem persamaan linier sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \phi(a, c_1)w_1^{(2)} + \phi(a, c_2)w_2^{(2)} + \dots + \phi(a, c_N)w_N^{(2)} &= g_3(a, t) \\ h(x_2, c_1)w_1^{(2)} + h(x_2, c_2)w_2^{(2)} + \dots + h(x_2, c_N)w_N^{(2)} &= B(x_2, t^{(2)}) \\ h(x_3, c_1)w_1^{(2)} + h(x_3, c_2)w_2^{(2)} + \dots + h(x_3, c_N)w_N^{(2)} &= B(x_3, t^{(2)}) \\ &\vdots \\ h(x_{m-1}, c_1)w_1^{(2)} + h(x_{m-1}, c_2)w_2^{(2)} + \dots + h(x_{m-1}, c_N)w_N^{(2)} &= B(x_{m-1}, t^{(2)}) \\ \phi(b, c_1)w_1^{(2)} + \phi(b, c_2)w_2^{(2)} + \dots + \phi(b, c_N)w_N^{(2)} &= g_4(b, t) \end{aligned} \quad (3.76)$$

3.1.3 Menghitung Solusi $u^{(2)}$

Solusi $u^{(2)}$ merupakan solusi dari persamaan (3.62) pada saat t yang ke-2.

Solusi $u^{(2)}$ dapat diperoleh dengan mengikuti bentuk pada persamaan (2.1).

Dengan demikian terlebih dahulu dibutuhkan nilai koefisien $w_j^{(2)}$ untuk keperluan

tersebut. Nilai koefisien $w_j^{(2)}$ akan dicari menggunakan persamaan yang telah

diperoleh dari hasil aproksimasi. Sistem persamaan linier (3.76) dapat ditulis dalam bentuk matriks untuk mempermudah perhitungan. Sistem persamaan linier (3.76) akan ditulis menjadi bentuk matriks sehingga diperoleh:

$$\begin{bmatrix} \phi(a, c_1) & \phi(a, c_2) & \phi(a, c_3) & \cdots & \phi(a, c_N) \\ h(x_2, c_1) & h(x_2, c_2) & h(x_2, c_3) & \cdots & h(x_2, c_N) \\ h(x_3, c_1) & h(x_3, c_2) & h(x_3, c_3) & \cdots & h(x_3, c_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h(x_{m-1}, c_1) & h(x_{m-1}, c_2) & h(x_{m-1}, c_3) & \cdots & h(x_{m-1}, c_N) \\ \phi(b, c_1) & \phi(b, c_2) & \phi(b, c_3) & \cdots & \phi(b, c_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^{(2)} \\ w_2^{(2)} \\ w_3^{(2)} \\ \vdots \\ w_N^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_3(a, t^{(2)}) \\ B(x_2, t^{(2)}) \\ B(x_3, t^{(2)}) \\ \vdots \\ B(x_{m-1}, t^{(2)}) \\ g_4(b, t^{(2)}) \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

Sistem persamaan (3.77) dimisalkan sebagaimana berikut untuk menyederhanakan penulisan.

$$A = \begin{bmatrix} \phi(a, c_1) & \phi(a, c_2) & \phi(a, c_3) & \cdots & \phi(a, c_N) \\ h(x_2, c_1) & h(x_2, c_2) & h(x_2, c_3) & \cdots & h(x_2, c_N) \\ h(x_3, c_1) & h(x_3, c_2) & h(x_3, c_3) & \cdots & h(x_3, c_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h(x_{m-1}, c_1) & h(x_{m-1}, c_2) & h(x_{m-1}, c_3) & \cdots & h(x_{m-1}, c_N) \\ \phi(b, c_1) & \phi(b, c_2) & \phi(b, c_3) & \cdots & \phi(b, c_N) \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} w_1^{(2)} \\ w_2^{(2)} \\ w_3^{(2)} \\ \vdots \\ w_N^{(2)} \end{bmatrix}, \text{ dan } B = \begin{bmatrix} g_3(a, t) \\ B(x_2, t^{(2)}) \\ B(x_3, t^{(2)}) \\ \vdots \\ B(x_{m-1}, t^{(2)}) \\ g_4(b, t) \end{bmatrix}.$$

Matriks A merupakan himpunan dari vektor basis sehingga sudah tentu nilai koefisien $w_j^{(2)}$ dapat ditentukan, yaitu dengan mengalikan A^{-1} dengan B .

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Nilai koefisien $w_j^{(2)}$ yang telah diperoleh kemudian digunakan untuk menentukan solusi $u^{(2)}$. Dengan mengikuti persamaan (2.1) diperoleh bentuk $u^{(2)}$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} u_1^{(2)} &= w_1^{(2)}\phi(a, c_1) + w_2^{(2)}\phi(a, c_2) + w_3^{(2)}\phi(a, c_3) + \cdots w_N^{(2)}\phi(a, c_N) \\ u_2^{(2)} &= w_1^{(2)}\phi(x_2, c_1) + w_2^{(2)}\phi(x_2, c_2) + w_3^{(2)}\phi(x_2, c_3) + \cdots w_N^{(2)}\phi(x_2, c_N) \\ u_3^{(2)} &= w_1^{(2)}\phi(x_3, c_1) + w_2^{(2)}\phi(x_3, c_2) + w_3^{(2)}\phi(x_3, c_3) + \cdots w_N^{(2)}\phi(x_3, c_N) \end{aligned}$$

dan seterusnya demikian hingga solusi $u_N^{(2)}$, dimana $u_1^{(2)}$ merupakan solusi $u^{(2)}$ yang dicari dengan $x_1 = a$ dan seterusnya.

3.1.4 Menghitung Solusi $u^{(3)}, u^{(4)}, \dots u^{(n)}$

Langkah selanjutnya adalah menghitung solusi $u^{(3)}$. Menghitung solusi $u^{(3)}$ tidak sama dengan sebagaimana langkah untuk menghitung solusi $u^{(2)}$ pada pembahasan sebelumnya. Solusi $u^{(2)}$ membutuhkan nilai awal dalam proses menghitungnya, sedangkan untuk menghitung solusi $u^{(3)}$ dan seterusnya tidak diperlukan nilai awal akan tetapi hanya menggunakan nilai u sebelumnya. Meskipun terdapat perbedaan, dalam menghitung solusi $n^{(3)}$ tetap mengikuti alur yang sama dengan ketika menghitung solusi $u^{(2)}$, yaitu melalui langkah diskritisasi dan aproksimasi. Dari persamaan (3.56) disubstitusikan nilai $n = 2$, maka menjadi

$$\alpha \Delta t^2 u_{xx}^{(3)} + (1 + \Delta t^2(\beta + \gamma))u^{(3)} = 2u^{(2)} - u^{(1)} + \Delta t^2 f(x, t^{(3)}) \quad (3.78)$$

Solusi yang akan dicari dari persamaan (3.78) adalah $u^{(3)}$. Bentuk $u^{(3)}$ dapat dinyatakan sebagai suatu jaringan fungsi radial basis sebagaimana berikut.

$$u^{(3)} = \sum_{j=1}^N w_j^{(3)} \phi(x, c_j) \quad (3.79)$$

Persamaan (3.78) selanjutnya diaproksimasi menggunakan jaringan fungsi radial basis, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \alpha \Delta t^2 \sum_{j=1}^N w_j^{(3)} \phi_{xx}(x, c_j) + (1 + \Delta t^2(\beta + \gamma)) \sum_{j=1}^N w_j^{(3)} \phi(x, c_j) \\ = 2u^{(2)} - u^{(1)} + \Delta t^2 f(x, t^{(3)}) \end{aligned} \quad (3.80)$$

dengan solusi $u^{(1)}$ dan $u^{(2)}$ adalah nilai yang telah diperoleh sebelumnya.

Persamaan (3.80) ditulis dalam bentuk yang lebih sederhana menjadi

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N w_j^{(3)} (\alpha \Delta t^2 \phi_{xx}(x, c_j) + (1 + \Delta t^2(\beta + \gamma)) \phi(x, c_j)) \\ = 2u^{(2)} - u^{(1)} + \Delta t^2 f(x, t^{(3)}). \end{aligned} \quad (3.81)$$

Persamaan (3.81) dimisalkan sebagaimana berikut untuk menyederhanakan penulisan.

$$\alpha \Delta t^2 \phi_{xx}(x, c_j) + (1 + \Delta t^2(\beta + \gamma)) \phi(x, c_j) = l(x, c_j),$$

dan

$$2u^{(2)} - u^{(1)} + \Delta t^2 f(x, t^{(3)}) = D(x, t^{(3)}).$$

sehingga persamaan (3.81) menjadi:

$$\sum_{j=1}^N w_j^{(3)} l(x, c_j) = D(x, t^{(3)}). \quad (3.82)$$

Bentuk penjabaran persamaan (3.82) adalah sebagai berikut.

$$w_1^{(3)} l(x, c_1) + w_2^{(3)} l(x, c_2) + \dots + w_N^{(3)} l(x, c_N) = D(x, t^{(3)}). \quad (3.83)$$

Dengan $\phi(x, c_j)$ merupakan fungsi real dan $w_j^{(3)}$ merupakan suatu koefisien konstan sehingga $w_j^{(3)}\phi(x, c_j)$ adalah suatu perkalian yang bersifat komutatif. Diketahui bahwa x berbentuk diskrit dengan $x = (x_2, x_3, \dots, x_{m-1})$, sehingga untuk masing-masing x , diperoleh bentuk persamaan (3.83) menjadi sebagai berikut.

Untuk $x = x_2$ menjadi,

$$l(x_2, c_1)w_1^{(3)} + l(x_2, c_2)w_2^{(3)} + \dots + l(x_2, c_N)w_N^{(3)} = D(x_2, t^{(3)}) \quad (3.84)$$

Untuk $x = x_3$ menjadi,

$$l(x_3, c_1)w_1^{(3)} + l(x_3, c_2)w_2^{(3)} + \dots + l(x_3, c_N)w_N^{(3)} = D(x_3, t^{(3)}) \quad (3.85)$$

Dan seterusnya demikian sampai pada $x = x_{m-1}$. Untuk $x = x_{m-1}$ menjadi,

$$l(x_{m-1}, c_1)w_1^{(3)} + l(x_{m-1}, c_2)w_2^{(3)} + \dots + l(x_{m-1}, c_N)w_N^{(3)} = D(x_{m-1}, t^{(3)}). \quad (3.86)$$

Persamaan (3.71), (3.84), (3.85), (3.86) dan (3.75) selanjutnya dibentuk suatu sistem persamaan linier yang tetap menyertakan kondisi batas namun pada saat $t^{(3)}$.

$$\phi(a, c_1)w_1^{(3)} + \phi(a, c_2)w_2^{(3)} + \dots + \phi(a, c_N)w_N^{(3)} = g_3(t^{(3)})$$

$$l(x_2, c_1)w_1^{(3)} + l(x_2, c_2)w_2^{(3)} + \dots + l(x_2, c_N)w_N^{(3)} = D(x_2, t^{(3)})$$

$$l(x_3, c_1)w_1^{(3)} + l(x_3, c_2)w_2^{(3)} + \dots + l(x_3, c_N)w_N^{(3)} = D(x_3, t^{(3)}) \quad (3.87)$$

⋮

$$l(x_{m-1}, c_1)w_1^{(3)} + l(x_{m-1}, c_2)w_2^{(3)} + \dots + l(x_{m-1}, c_N)w_N^{(3)} = D(x_{m-1}, t^{(3)}).$$

$$\phi(b, c_1)w_1^{(3)} + \phi(b, c_2)w_2^{(3)} + \dots + \phi(b, c_N)w_N^{(3)} = g_4(t^{(3)})$$

Suatu sistem persamaan linier dapat ditulis dalam bentuk matriks untuk mempermudah dalam mencari solusi. Sistem persamaan linier (3.87) akan ditulis menjadi bentuk matriks sehingga diperoleh:

$$\begin{bmatrix} \phi(a, c_1) & \phi(a, c_2) & \phi(a, c_3) & \dots & \phi(a, c_N) \\ l(x_2, c_1) & l(x_2, c_2) & l(x_2, c_3) & \dots & l(x_2, c_N) \\ l(x_3, c_1) & l(x_3, c_2) & l(x_3, c_3) & \dots & l(x_3, c_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l(x_{m-1}, c_1) & l(x_{m-1}, c_2) & l(x_{m-1}, c_3) & \dots & l(x_{m-1}, c_N) \\ \phi(b, c_1) & \phi(b, c_2) & \phi(b, c_3) & \dots & \phi(b, c_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^{(3)} \\ w_2^{(3)} \\ w_3^{(3)} \\ \vdots \\ w_N^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_3(t^{(3)}) \\ D(x_2, t^{(3)}) \\ D(x_3, t^{(3)}) \\ \vdots \\ D(x_{m-1}, t^{(3)}) \\ g_4(t^{(3)}) \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

Sistem persamaan (3.88) ditulis dalam bentuk yang lebih sederhana dengan melakukan pemisalan berikut akan dimisalkan:

$$A = \begin{bmatrix} \phi(a, c_1) & \phi(a, c_2) & \phi(a, c_3) & \dots & \phi(a, c_N) \\ l(x_2, c_1) & l(x_2, c_2) & l(x_2, c_3) & \dots & l(x_2, c_N) \\ l(x_3, c_1) & l(x_3, c_2) & l(x_3, c_3) & \dots & l(x_3, c_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l(x_{m-1}, c_1) & l(x_{m-1}, c_2) & l(x_{m-1}, c_3) & \dots & l(x_{m-1}, c_N) \\ \phi(b, c_1) & \phi(b, c_2) & \phi(b, c_3) & \dots & \phi(b, c_N) \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} w_1^{(3)} \\ w_2^{(3)} \\ w_3^{(3)} \\ \vdots \\ w_N^{(3)} \end{bmatrix}, \text{ dan } B = \begin{bmatrix} g_3(t^{(3)}) \\ D(x_2, t^{(3)}) \\ D(x_3, t^{(3)}) \\ \vdots \\ D(x_{m-1}, t^{(3)}) \\ g_4(t^{(3)}) \end{bmatrix}$$

Matriks **A** merupakan himpunan dari vektor basis sehingga sudah tentu nilai koefisien $w_j^{(3)}$ dapat ditentukan, yaitu dengan mengalikan A^{-1} dengan **B**.

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$$

Dengan demikian dapat diperoleh nilai koefisien $w_j^{(3)}$ yang akan digunakan dalam menentukan solusi $u^{(3)}$.

Solusi $u^{(3)}$ selanjutnya dinyatakan dalam bentuk jaringan fungsi radial basis dengan mengikuti persamaan (3.79).

$$\begin{aligned} u_1^{(3)} &= w_1^{(3)}\phi(a, c_1) + w_2^{(3)}\phi(a, c_2) + w_3^{(3)}\phi(a, c_3) + \dots w_N^{(3)}\phi(a, c_N) \\ u_2^{(3)} &= w_1^{(3)}\phi(x_2, c_1) + w_2^{(3)}\phi(x_2, c_2) + w_3^{(3)}\phi(x_2, c_3) + \dots w_N^{(3)}\phi(x_2, c_N) \\ u_3^{(3)} &= w_1^{(3)}\phi(x_3, c_1) + w_2^{(3)}\phi(x_3, c_2) + w_3^{(3)}\phi(x_3, c_3) + \dots w_N^{(3)}\phi(x_3, c_N) \end{aligned}$$

dan seterusnya demikian hingga solusi $u_N^{(3)}$, dimana $u_1^{(3)}$ merupakan solusi $u^{(3)}$ dengan $x_1 = a$ dan seterusnya.

Solusi $u_1^{(3)}, u_2^{(3)}, u_3^{(3)}, \dots$ yang telah diperoleh di atas adalah nilai u pada saat $t^{(3)}$. Solusi $u_1^{(3)}$ menjelaskan solusi $u^{(3)}$ dengan $x_1 = a$ dan seterusnya. Sedangkan, untuk nilai u pada saat $t^{(4)}, t^{(5)}, \dots$ dapat diperoleh dengan cara yang sama sebagaimana cara mencari nilai u pada saat $t^{(3)}$. Yaitu dimulai dengan mensubstitusikan n selanjutnya pada persamaan (3.56).

3.2 Analisis Galat

Analisis galat dapat dilakukan jika persamaan (2.14) sudah disimulasikan dengan parameter tertentu. Selanjutnya persamaan (2.14) akan diselesaikan menggunakan jaringan fungsi radial basis sebagaimana pada pembahasan sebelumnya dengan parameter-parameter sesuai dengan jurnal yang ditulis oleh Iqbal, dkk (2010).

3.2.1 Simulasi

Penyelesaian persamaan linier *Klein-Gordon* menggunakan jaringan fungsi radial basis disimulasikan dengan menggunakan paramater $\alpha = -1$, $\beta = -1$, $\gamma = 0$ dan $f(x, t) = 0$ pada persamaan (2.14) (Iqbal dkk, 2010). Sehingga persamaan yang diselesaikan adalah sebagai berikut:

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = u(x, t) \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \quad (3.89)$$

dengan kondisi awal:

$$u(x, 0) = 1 + \sin(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \quad (3.90)$$

$$u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \quad (3.91)$$

dan kondisi batas:

$$u(0, t) = \cosh(t), \quad 0 \leq t \leq 3 \quad (3.92)$$

$$u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 1 + \cosh(t), \quad 0 \leq t \leq 3 \quad (3.93)$$

dengan $0 \leq t \leq 3$, $\Delta t = 0,01$ dan $\Delta x = 0,1571$.

Diskritisasi persamaan (3.89) terhadap waktu dilakukan menggunakan metode beda hingga mengikuti persamaan (2.41) sehingga diperoleh

$$\frac{u^{(n+1)} - 2u^n + u^{n-1}}{(0,01)^2} - u_{xx}^{n+1} = u^{n+1} \quad (3.94)$$

dengan u merupakan fungsi yang bergantung dengan x saja. Dalam bentuk yang lebih sederhana, persamaan (3.94) dapat ditulis sebagaimana berikut.

$$-(0,01)^2 u_{xx}^{(n+1)} + (1 - (0,01)^2) u^{(n+1)} = 2u^{(n)} - u^{(n-1)} \quad (3.95)$$

Kondisi awal persamaan *Klein-Gordon* linier juga akan ditulis dalam bentuk diskrit. Persamaan (3.90) menyatakan bahwa kondisi awal yang pertama adalah $u(x, 0) = 1 + \sin(x)$. Artinya $1 + \sin(x)$ adalah nilai u pada saat $t = 0$, yaitu t yang pertama. Oleh karena itu, indeks u dalam bentuk diskritnya adalah $n = 1$. Demikian pula berlaku nilai n yang sama pada kondisi awal yang kedua. Sehingga persamaan (3.90) menjadi:

$$u^{(1)} = 1 + \sin(x). \quad (3.96)$$

Pendekatan fungsi turunan pertama dengan metode beda hingga mengikuti persamaan (2.36). Sehingga pembentukan persamaan diskrit dari persamaan (3.91) menjadi:

$$\frac{u^{(n+1)} - u^{(n-1)}}{2(\Delta t)} = 0$$

$$\frac{u^{(1+1)} - u^{(1-1)}}{2(0,01)} = 0$$

$$\frac{u^{(2)} - u^{(0)}}{2(0,01)} = 0,$$

$$u^{(0)} = u^{(2)}. \quad (3.97)$$

Persamaan diskrit yang selanjutnya akan dibentuk dari kondisi batas (3.92) dan (3.93). Persamaan (3.92) dengan batas kiri $x = 0$ menjadi

$$u^{(n+1)}(0) = \cosh(t^{(n+1)}) \quad (3.98)$$

dan persamaan (3.93) dengan batas kanan $x = \frac{\pi}{2}$ menjadi

$$u^{(n+1)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + \cosh(t^{(n+1)}) \quad (3.99)$$

Persamaan (3.95) akan dibentuk kembali untuk $n = 1$ sehingga diperoleh persamaan (3.100).

$$-(0,01)^2 u_{xx}^{(2)} + (1 - (0,01)^2)u^{(2)} = 2u^{(1)} - u^{(0)}. \quad (3.100)$$

Langkah selanjutnya adalah mensubstitusikan persamaan (3.96) dan (3.97) untuk nilai $u^{(1)}$ dan $u^{(0)}$ pada persamaan (3.100) sehingga menjadi

$$\begin{aligned} -(0,01)^2 u_{xx}^{(2)} + (1 - (0,01)^2)u^{(2)} &= 2(1 + \sin(x)) - u^{(2)}. \\ -(0,01)^2 u_{xx}^{(2)} + (1 - (0,01)^2)u^{(2)} &= 2 + 2 \sin(x) - u^{(2)}. \end{aligned} \quad (3.101)$$

Suku yang mengandung $u^{(2)}$ dikumpulkan di ruas kiri sehingga diperoleh

$$-(0,01)^2 u_{xx}^{(2)} + (2 - (0,01)^2)u^{(2)} = 2 + 2 \sin(x). \quad (3.102)$$

Demikian pula persamaan (3.98) dan (3.99) berturut-turut menjadi

$$u^{(2)}(0) = \cosh(t^{(2)}) \quad (3.103)$$

dan

$$u^{(2)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + \cosh(t^{(2)}) \quad (3.104)$$

Aproksimasi fungsi u yang bergantung pada x menggunakan jaringan fungsi radial basis dinyatakan sebagaimana pada persamaan (2.1). Selanjutnya

untuk mengaproksimasi fungsi u pada waktu tertentu dapat dinyatakan dalam bentuk

$$u^{(n+1)} = \sum_{j=1}^N w_j^{(n+1)} \phi(x, c_j), \quad (3.105)$$

dengan indeks $(n + 1)$ menunjukkan waktu ke $n + 1$.

Solusi yang dicari dari persamaan (3.101) adalah $u^{(2)}$. Bentuk $u^{(2)}$ dapat dinyatakan sebagai suatu jaringan fungsi radial basis sebagaimana berikut.

$$u^{(2)} = \sum_{j=1}^N w_j^{(2)} \phi(x, c_j) \quad (3.106)$$

dengan $x = (x_1, x_2, \dots, x_{11}) = (0, 0,1571, 0,3142, 0,4712, 0,6283, 0,7854, 0,9425, 1,0996, 1,2566, 1,413, 1,5708)$ dan nilai $c = x$, yaitu $x_1 = c_1, x_2 = c_2, x_3 = c_3$, dan seterusnya sehingga $N = m = 11$. Hal tersebut bertujuan agar terbentuk matriks persegi pada saat akan menentukan nilai koefisien w_j pada langkah selanjutnya. Persamaan (3.106) menjadi:

$$u^{(2)} = \sum_{j=1}^{11} w_j^{(2)} \phi(x, c_j) \quad (3.107)$$

Aproksimasi selanjutnya dilakukan terhadap kondisi batas kiri menggunakan jaringan fungsi radial basis, sehingga persamaan (3.103) menjadi:

$$\sum_{j=1}^{11} w_j^{(2)} \phi(0, c_j) = \cosh(t^{(2)}), \quad (3.108)$$

Aproksimasi terhadap $u^{(2)}$ dan $u_{xx}^{(2)}$ pada persamaan (3.102) menggunakan jaringan fungsi radial basis akan menghasilkan:

$$\begin{aligned}
 & -(0,01)^2 \sum_{j=1}^{11} w_j^{(2)} \phi_{xx}(x, c_j) + (2 - (0,01)^2) \sum_{j=1}^{11} w_j^{(2)} \phi(x, c_j) = 2 + 2 \sin(x) \\
 & \sum_{j=1}^{11} w_j^{(2)} \left(-(0,01)^2 \phi_{xx}(x, c_j) + (2 - (0,01)^2) \phi(x, c_j) \right) = 2 + 2 \sin(x)
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

9)

Bentuk yang lebih sederhana dari persamaan (3.109) bisa ditulis sebagaimana berikut

$$\sum_{j=1}^{11} w_j^{(2)} h(x, c_j) = B(x), \tag{3.11}$$

0)

dengan

$$h(x, c_j) = -(0,01)^2 \phi_{xx}(x, c_j) + (2 - (0,01)^2) \phi(x, c_j), \tag{3.11}$$

1)

dan

$$B(x) = 2 + 2 \sin(x). \tag{3.11}$$

2)

Aproksimasi terhadap kondisi batas kanan, yaitu dari persamaan (3.104) akan menghasilkan:

$$\sum_{j=1}^{11} w_j^{(2)} \phi\left(\frac{\pi}{2}, c_j\right) = 1 + \cosh(t^{(2)}), \tag{3.11}$$

3)

Penjabaran persamaan (3.108), (3.110) dan (3.113) jika digabungkan maka membentuk sistem persamaan linier sebagai berikut.

$$\phi(0, 0)w_1^{(2)} + \phi(0, 0,1571)w_2^{(2)} + \dots + \phi(0, 1,5708)w_{11}^{(2)} = \cosh(0,01) \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}
 &h(0,1571,0)w_1^{(2)} + h(0,1571,0,1571)w_2^{(2)} + \dots \\
 &+ h(0,1571,1,5708)w_{11}^{(2)} = B(0,1571)
 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
 &h(0,3142,0)w_1^{(2)} + h(0,3142,0,1571)w_2^{(2)} + \dots \\
 &+ h(0,3142,1,5708)w_{11}^{(2)} = B(0,3142)
 \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}
 &h(1,4137,0)w_1^{(2)} + h(0,4137,0,1571)w_2^{(2)} + \dots \\
 &+ h(1,4137,1,5708)w_{11}^{(2)} = B(1,4137)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\phi(1,5708,0)w_1^{(2)} + \phi(1,5708,0,1571)w_2^{(2)} + \dots = 1 \\
 &+ \phi(1,5708,1,5708)w_{11}^{(2)} + \cosh(0,01)
 \end{aligned}$$

dimana baris pertama berasal dari persamaan (3.108), baris ke-2 sampai dengan baris ke-5 berasal dari persamaan (3.110) dengan $x = (x_2, x_3, \dots, x_{10})$ sebagaimana yang telah disebutkan, dan baris terakhir berasal dari persamaan (3.113).

Solusi $u^{(2)}$ merupakan solusi dari persamaan (3.102) pada saat t yang ke-2. Solusi $u^{(2)}$ dapat diperoleh dengan mengikuti bentuk pada persamaan (2.1). Dengan demikian terlebih dahulu dibutuhkan nilai koefisien $w_j^{(2)}$ untuk keperluan tersebut. Nilai koefisien $w_j^{(2)}$ akan dicari menggunakan persamaan yang telah diperoleh dari hasil aproksimasi. Sistem persamaan linier (3.114) dapat ditulis dalam bentuk matriks untuk mempermudah perhitungan, yaitu:

$$\begin{bmatrix} \phi(0,0) & \phi(0,0,1571) & \cdots & \phi(0,1,5708) \\ h(0,1571,0) & h(0,1571,0,1571) & \cdots & h(0,1571,1,5708) \\ h(0,3142,0) & h(0,3142,0,1571) & \cdots & h(0,3142,1,5708) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h(1,4137,0) & h(1,4137,0,1571) & \cdots & h(1,4137,1,5708) \\ \phi(1,5708,0) & \phi(1,5708,0,1571) & \cdots & \phi(1,5708,1,5708) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^{(2)} \\ w_2^{(2)} \\ w_3^{(2)} \\ \vdots \\ w_{11}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$= \begin{bmatrix} \cosh(0,01) \\ B(0,1571) \\ B(0,3142) \\ \vdots \\ B(1,4137) \\ 1 + \cosh(0,01) \end{bmatrix} \quad 5)$$

Masing-masing nilai yang terdapat pada sistem persamaan (3.115) dapat dihitung dengan mengikuti persamaan (2.3) untuk fungsi $\phi(x, c_j)$, persamaan (3.111) untuk fungsi $h(x, c_j)$ dan persamaan (3.112) untuk fungsi $B(x)$. Nilai dari fungsi ϕ dikerjakan dengan menghitung nilai varians dari c terlebih dahulu, dimana $c = \{c_j\}_{j=1}^{11}$. Varians dari c dapat dikerjakan sebagaimana pada persamaan (2.5). Sehingga diperoleh nilai varians dari c sebagai berikut.

$$Var(c) = \frac{11(9,4995) - 8,6394^2}{11(11 - 1)}$$

$$Var(c) = \frac{29,8553}{110}$$

$$Var(c) = 0,2714 \quad (3.11)$$

6)

Sehingga diperoleh sistem persamaan linier yang baru sebagaimana berikut.

$$\begin{bmatrix} 0,2714 & 0,3136 & 0,4152 & 0,5438 & 0,6844 & 0,8310 & 0,9808 & 1,1326 & 1,2856 & 1,4395 & 1,5941 \\ 0,6269 & 0,5424 & 0,6269 & 0,8302 & 1,0875 & 1,3688 & 1,6618 & 1,9615 & 2,2650 & 2,5711 & 2,8789 \\ 0,8302 & 0,6269 & 0,5424 & 0,6269 & 0,8302 & 1,0875 & 1,3688 & 1,6618 & 1,9615 & 2,2650 & 2,5711 \\ 1,0875 & 0,8302 & 0,6269 & 0,5424 & 0,6269 & 0,8302 & 1,0875 & 1,3688 & 1,6618 & 1,9615 & 2,2650 \\ 1,3688 & 1,0875 & 0,8302 & 0,6269 & 0,5424 & 0,6269 & 0,8302 & 1,0875 & 1,3688 & 1,6618 & 1,9615 \\ 1,6618 & 1,3688 & 1,0875 & 0,8302 & 0,6269 & 0,5424 & 0,6269 & 0,8302 & 1,0875 & 1,3688 & 1,6618 \\ 1,9615 & 1,6618 & 1,3688 & 1,0875 & 0,8302 & 0,6269 & 0,5424 & 0,6269 & 0,8302 & 1,0875 & 1,3688 \\ 2,2650 & 1,9615 & 1,6618 & 1,3688 & 1,0875 & 0,8302 & 0,6269 & 0,5424 & 0,6269 & 0,8302 & 1,0875 \\ 2,5711 & 2,2650 & 1,9615 & 1,6618 & 1,3688 & 1,0875 & 0,8302 & 0,6269 & 0,5424 & 0,6269 & 0,8302 \\ 2,8789 & 2,5711 & 2,2650 & 1,9615 & 1,6618 & 1,3688 & 1,0875 & 0,8302 & 0,6269 & 0,5424 & 0,6269 \\ 1,5941 & 1,4395 & 1,2856 & 1,1326 & 0,9808 & 0,8310 & 0,6844 & 0,5438 & 0,4152 & 0,3136 & 0,2714 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^{(2)} \\ w_2^{(2)} \\ w_3^{(2)} \\ w_4^{(2)} \\ w_5^{(2)} \\ w_6^{(2)} \\ \vdots \\ w_{11}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$= \begin{bmatrix} 1,0001 \\ 2,3129 \\ 2,6180 \\ 2,9080 \\ 3,1756 \\ 3,4142 \\ 3,6180 \\ 3,7820 \\ 3,9021 \\ 3,9754 \\ 2,0001 \end{bmatrix} \quad 7)$$

Sistem persamaan (3.117) ditulis dalam bentuk yang lebih sederhana dengan memisalkan:

$A =$

$$\begin{bmatrix} 0,2714 & 0,3136 & 0,4152 & 0,5438 & 0,6844 & 0,8310 & 0,9808 & 1,1326 & 1,2856 & 1,4395 & 1,5941 \\ 0,6269 & 0,5424 & 0,6269 & 0,8302 & 1,0875 & 1,3688 & 1,6618 & 1,9615 & 2,2650 & 2,5711 & 2,8789 \\ 0,8302 & 0,6269 & 0,5424 & 0,6269 & 0,8302 & 1,0875 & 1,3688 & 1,6618 & 1,9615 & 2,2650 & 2,5711 \\ 1,0875 & 0,8302 & 0,6269 & 0,5424 & 0,6269 & 0,8302 & 1,0875 & 1,3688 & 1,6618 & 1,9615 & 2,2650 \\ 1,3688 & 1,0875 & 0,8302 & 0,6269 & 0,5424 & 0,6269 & 0,8302 & 1,0875 & 1,3688 & 1,6618 & 1,9615 \\ 1,6618 & 1,3688 & 1,0875 & 0,8302 & 0,6269 & 0,5424 & 0,6269 & 0,8302 & 1,0875 & 1,3688 & 1,6618 \\ 1,9615 & 1,6618 & 1,3688 & 1,0875 & 0,8302 & 0,6269 & 0,5424 & 0,6269 & 0,8302 & 1,0875 & 1,3688 \\ 2,2650 & 1,9615 & 1,6618 & 1,3688 & 1,0875 & 0,8302 & 0,6269 & 0,5424 & 0,6269 & 0,8302 & 1,0875 \\ 2,5711 & 2,2650 & 1,9615 & 1,6618 & 1,3688 & 1,0875 & 0,8302 & 0,6269 & 0,5424 & 0,6269 & 0,8302 \\ 2,8789 & 2,5711 & 2,2650 & 1,9615 & 1,6618 & 1,3688 & 1,0875 & 0,8302 & 0,6269 & 0,5424 & 0,6269 \\ 1,5941 & 1,4395 & 1,2856 & 1,1326 & 0,9808 & 0,8310 & 0,6844 & 0,5438 & 0,4152 & 0,3136 & 0,2714 \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} w_1^{(2)} \\ w_2^{(2)} \\ w_3^{(2)} \\ w_4^{(2)} \\ w_5^{(2)} \\ w_6^{(2)} \\ \vdots \\ w_{11}^{(2)} \end{bmatrix}, \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 1,0001 \\ 2,3129 \\ 2,6180 \\ 2,9080 \\ 3,1756 \\ 3,4142 \\ 3,6180 \\ 3,7820 \\ 3,9021 \\ 3,9754 \\ 2,0001 \end{bmatrix}.$$

Matriks A merupakan himpunan dari vektor basis sehingga sudah tentu nilai koefisien $w^{(2)}$ dapat ditentukan, yaitu dengan mengalikan invers dari matriks A (ditulis A^{-1}) dengan B .

$$X = A^{-1} \cdot B$$

dengan

$$A^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} -25,6189 & 27,0264 & -21,6032 & 11,7743 & -5,9409 & 2,8470 & -1,2926 & 0,3795 & 0,2738 & -0,9494 & 2,0359 \\ 54,0767 & -69,7765 & 72,5635 & -46,4563 & 24,3564 & -12,0586 & 5,8037 & -2,5654 & 0,7344 & 0,5644 & -1,9055 \\ -43,2492 & 72,5885 & -106,2016 & 92,4655 & -56,5387 & 29,2706 & -14,4573 & 6,8864 & -2,9749 & 0,7324 & 0,5557 \\ 23,5723 & -46,4703 & 92,4659 & -117,0656 & 97,9600 & -59,1957 & 30,5255 & -14,9353 & 6,8863 & -2,5648 & 0,7557 \\ -11,8932 & 24,3632 & -56,5387 & 97,9598 & -119,8232 & 99,2484 & -59,7134 & 30,5254 & -14,4572 & 5,8046 & -2,5856 \\ 5,6986 & -12,0617 & 29,2707 & -59,1957 & 99,2485 & -120,3281 & 99,2485 & -59,1957 & 29,2707 & -12,0617 & 5,6986 \\ -2,5856 & 5,8046 & -14,4572 & 30,5254 & -59,7134 & 99,2484 & -119,8232 & 97,9598 & -56,5387 & 24,3632 & -11,8932 \\ 0,7557 & -2,5648 & 6,8863 & -14,9353 & 30,5255 & -59,1957 & 97,9600 & -117,0656 & 92,4659 & -46,4703 & 23,5723 \\ 0,5557 & 0,7324 & -2,9749 & 6,8864 & -14,4573 & 29,2706 & -56,5387 & 92,4655 & -106,2016 & 72,5885 & -43,2492 \\ -1,9055 & 0,5644 & 0,7344 & -2,5654 & 5,8037 & -12,0586 & 24,3564 & -46,4563 & 72,5635 & -69,7765 & 54,0767 \\ 2,0359 & -0,9494 & 0,2738 & 0,3795 & -1,2926 & 2,8470 & -5,9409 & 11,7743 & -21,6032 & 27,0264 & -25,6189 \end{bmatrix}$$

$$\text{sehingga diperoleh matriks } X = \begin{bmatrix} 3,5492 \\ -3,6555 \\ 2,0299 \\ -1,1368 \\ 0,5413 \\ -0,4915 \\ 0,3950 \\ -0,8505 \\ 1,3145 \\ -2,5346 \\ 2,2151 \end{bmatrix}$$

Nilai koefisien $w^{(2)}$ yang telah diperoleh selanjutnya digunakan untuk menghitung solusi $u^{(2)}$. Berdasarkan persamaan (3.106), solusi $u^{(2)}$ dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$u_1^{(2)} = w_1^{(2)} \phi(a, c_1) + w_2^{(2)} \phi(a, c_2) + w_3^{(2)} \phi(a, c_3) + \cdots w_{11}^{(2)} \phi(a, c_{11})$$

$$u_2^{(2)} = w_1^{(2)} \phi(x_2, c_1) + w_2^{(2)} \phi(x_2, c_2) + w_3^{(2)} \phi(x_2, c_3) + \cdots w_{11}^{(2)} \phi(x_2, c_{11})$$

$$u_3^{(2)} = w_1^{(2)} \phi(x_3, c_1) + w_2^{(2)} \phi(x_3, c_2) + w_3^{(2)} \phi(x_3, c_3) + \cdots w_{11}^{(2)} \phi(x_3, c_{11})$$

$\vdots$

$$u_{11}^{(2)} = w_1^{(2)} \phi(x_3, c_1) + w_2^{(2)} \phi(x_3, c_2) + w_3^{(2)} \phi(x_3, c_3) + \cdots w_{11}^{(2)} \phi(x_3, c_{11})$$

Substitusi nilai koefisien $w^{(2)}$ yang telah diperoleh sehingga menghasilkan

$$\begin{aligned}
 u_1^{(2)} &= (3,5492)\phi(0,0) + (-3,6555)\phi(0,0,1571) + \dots \\
 &\quad + (2,2151)\phi(0,1,5708) \\
 u_2^{(2)} &= (3,5492)\phi(0,1571,0) + (-3,6555)\phi(0,1571,0,1571) + \dots \\
 &\quad + (2,2151)\phi(0,1571,1,5708) \\
 u_3^{(2)} &= (3,5492)\phi(0,3142,0) + (-3,6555)\phi(0,3142,0,1571) + \dots \\
 &\quad + (2,2151)\phi(0,3142,1,5708)
 \end{aligned}$$

dan seterusnya demikian hingga solusi $u_{11}^{(2)}$.

Nilai koefisien $w^{(2)}$ dan solusi $u^{(2)}$ selanjutnya dihitung dengan bantuan program MATLAB sehingga diperoleh hasil sebagai berikut.

Tabel 3.1 Hasil Perhitungan $u^{(2)}$ Menggunakan MATLAB

x ke-	Nilai x	Solusi $u^{(2)}$
1	0	1,0001
2	0,1571	1,1565
3	0,3142	1,3091
4	0,4712	1,4540
5	0,6283	1,5878
6	0,7854	1,7072
7	0,9425	1,8091
8	1,0996	1,8911
9	1,2566	1,9511
10	1,4137	1,9877
11	1,5708	2,0001

Solusi $u^{(3)}$ dihitung dengan cara mensubstitusikan nilai $n = 2$ pada persamaan (3.95), sehingga diperoleh

$$-(0,01)^2 u_{xx}^{(3)} + (1 - (0,01)^2)u^{(3)} = 2u^{(2)} - u^{(1)} \quad (3.11)$$

8)

dimana nilai $u^{(2)}$ dan $u^{(1)}$ merupakan nilai yang telah diperoleh dari perhitungan sebelumnya.

Berdasarkan definisi jaringan fungsi radial basis untuk $u^{(3)}$ pada persamaan (3.79), maka bentuk persamaan (3.118) setelah diaproksimasi menggunakan jaringan fungsi radial basis adalah:

$$\begin{aligned} & -(0,01)^2 \sum_{j=1}^{11} w_j^{(3)} \phi_{xx}(x, c_j) + (1 - (0,01)^2) \sum_{j=1}^{11} w_j^{(3)} \phi(x, c_j) \\ & = 2u^{(2)} - u^{(1)} \end{aligned} \quad (3.119)$$

atau

$$\sum_{j=1}^{11} w_j^{(3)} (-(0,01)^2 \phi_{xx}(x, c_j) + (1 - (0,01)^2) \phi(x, c_j)) = 2u^{(2)} - u^{(1)} \quad (3.120)$$

Persamaan (3.120) ditulis dalam bentuk yang lebih sederhana dengan memisalkan

$$-(0,01)^2 \phi_{xx}(x, c_j) + (1 - (0,01)^2) \phi(x, c_j) = l(x, c_j), \quad (3.121)$$

dan

$$2u^{(2)} - u^{(1)} = D(x). \quad (3.122)$$

sehingga persamaan (3.120) menjadi:

$$\sum_{j=1}^{11} w_j^{(3)} l(x, c_j) = D(x). \quad (3.123)$$

Nilai masing-masing x disubstitusikan pada persamaan (3.108), (3.123), dan (3.113), kemudian dijabarkan sehingga

$$\begin{aligned}
\phi(0,0)w_1^{(3)} + \phi(0,0,1571)w_2^{(3)} + \dots + \phi(0,1,5708)w_{11}^{(3)} &= \cosh(0,02) \\
l(0,1571,0)w_1^{(3)} + l(0,1571,0,1571)w_2^{(3)} + \dots \\
+ l(0,1571,1,5708)w_{11}^{(3)} &= D(0,1571) \\
l(0,3142,0)w_1^{(3)} + l(0,3142,0,1571)w_2^{(3)} + \dots \\
+ l(0,3142,1,5708)w_{11}^{(3)} &= D(0,3142) \\
&\vdots \\
l(1,4137,0)w_1^{(3)} + l(1,4137,0,1571)w_2^{(3)} + \dots \\
+ l(1,4137,1,5708)w_{11}^{(3)} &= D(1,4137) \\
\phi(1,5708,0)w_1^{(3)} + \phi(1,5708,0,1571)w_2^{(3)} + \dots \\
+ \phi(1,5708,1,5708)w_{11}^{(3)} &= 1 + \cosh(0,02)
\end{aligned} \tag{3.12}$$

dimana baris pertama berasal dari persamaan (3.108) yaitu kondisi batas kiri, baris ke-2 sampai dengan baris ke-5 berasal dari persamaan (3.123) dengan $x = (x_2, x_3, \dots, x_{10})$ dan baris terakhir berasal dari persamaan (3.113) yaitu kondisi batas kanan.

Persamaan (3.124) dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} \phi(0,0) & \phi(0,0,1571) & \cdots & \phi(0,1,5708) \\ l(0,1571,0) & l(0,1571,0,1571) & \cdots & l(0,1571,1,5708) \\ l(0,3142,0) & l(0,3142,0,1571) & \cdots & l(0,3142,1,5708) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l(1,4137,0) & l(1,4137,0,1571) & \cdots & l(1,4137,1,5708) \\ \phi(1,5708,0) & \phi(1,5708,0,1571) & \cdots & \phi(1,5708,1,5708) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^{(3)} \\ w_2^{(3)} \\ w_3^{(3)} \\ \vdots \\ w_{11}^{(3)} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$= \begin{bmatrix} \cosh(0,02) \\ D(0,1571) \\ D(0,3142) \\ \vdots \\ D(1,4137) \\ 1 + \cosh(0,02) \end{bmatrix} \quad 5)$$

Masing-masing nilai yang terdapat pada sistem persamaan (3.125) dapat dihitung dengan mengikuti persamaan (2.3) untuk fungsi $\phi(x, c_j)$, persamaan (3.121) untuk fungsi $l(x, c_j)$ dan persamaan (3.122) untuk fungsi $D(x)$. Nilai varians dari c pada fungsi ϕ telah dikerjakan sebagaimana pada persamaan (3.116). Sehingga diperoleh sistem persamaan linier yang baru sebagaimana berikut.

$$\begin{bmatrix} 0,2714 & 0,3136 & 0,4152 & 0,5438 & 0,6844 & 0,8310 & 0,9808 & 1,1326 & 1,2856 & 1,4395 & 1,5941 \\ 0,3133 & 0,2710 & 0,3133 & 0,4150 & 0,5437 & 0,6843 & 0,8309 & 0,9807 & 1,1324 & 1,2855 & 1,4394 \\ 0,4150 & 0,3133 & 0,2710 & 0,3133 & 0,4150 & 0,5437 & 0,6843 & 0,8309 & 0,9807 & 1,1324 & 1,2855 \\ 0,5437 & 0,4150 & 0,3133 & 0,2710 & 0,3133 & 0,4150 & 0,5437 & 0,6843 & 0,8309 & 0,9807 & 1,1324 \\ 0,6843 & 0,5437 & 0,4150 & 0,3133 & 0,2710 & 0,3133 & 0,4150 & 0,5437 & 0,6843 & 0,8309 & 0,9807 \\ 0,8309 & 0,6843 & 0,5437 & 0,4150 & 0,3133 & 0,2710 & 0,3133 & 0,4150 & 0,5437 & 0,6843 & 0,8309 \\ 0,9807 & 0,8309 & 0,6843 & 0,5437 & 0,4150 & 0,3133 & 0,2710 & 0,3133 & 0,4150 & 0,5437 & 0,6843 \\ 1,1324 & 0,9807 & 0,8309 & 0,6843 & 0,5437 & 0,4150 & 0,3133 & 0,2710 & 0,3133 & 0,4150 & 0,5437 \\ 1,2855 & 1,1324 & 0,9807 & 0,8309 & 0,6843 & 0,5437 & 0,4150 & 0,3133 & 0,2710 & 0,3133 & 0,4150 \\ 1,4394 & 1,2855 & 1,1324 & 0,9807 & 0,8309 & 0,6843 & 0,5437 & 0,4150 & 0,3133 & 0,2710 & 0,3133 \\ 1,5941 & 1,4395 & 1,2856 & 1,1326 & 0,9808 & 0,8310 & 0,6844 & 0,5438 & 0,4152 & 0,3136 & 0,2714 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^{(3)} \\ w_2^{(3)} \\ w_3^{(3)} \\ w_4^{(3)} \\ w_5^{(3)} \\ w_6^{(3)} \\ \vdots \\ w_{11}^{(3)} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$= \begin{bmatrix} 1,0002 \\ 1,1564 \\ 1,3092 \\ 1,4541 \\ 1,5879 \\ 1,7072 \\ 1,8091 \\ 1,8911 \\ 1,9512 \\ 1,9877 \\ 2,0002 \end{bmatrix} \quad 6)$$

Sistem persamaan (3.126) ditulis dalam bentuk yang lebih sederhana dengan memisalkan

$$A =$$

0,2714	0,3136	0,4152	0,5438	0,6844	0,8310	0,9808	1,1326	1,2856	1,4395	1,5941
0,3133	0,2710	0,3133	0,4150	0,5437	0,6843	0,8309	0,9807	1,1324	1,2855	1,4394
0,4150	0,3133	0,2710	0,3133	0,4150	0,5437	0,6843	0,8309	0,9807	1,1324	1,2855
0,5437	0,4150	0,3133	0,2710	0,3133	0,4150	0,5437	0,6843	0,8309	0,9807	1,1324
0,6843	0,5437	0,4150	0,3133	0,2710	0,3133	0,4150	0,5437	0,6843	0,8309	0,9807
0,8309	0,6843	0,5437	0,4150	0,3133	0,2710	0,3133	0,4150	0,5437	0,6843	0,8309
0,9807	0,8309	0,6843	0,5437	0,4150	0,3133	0,2710	0,3133	0,4150	0,5437	0,6843
1,1324	0,9807	0,8309	0,6843	0,5437	0,4150	0,3133	0,2710	0,3133	0,4150	0,5437
1,2855	1,1324	0,9807	0,8309	0,6843	0,5437	0,4150	0,3133	0,2710	0,3133	0,4150
1,4394	1,2855	1,1324	0,9807	0,8309	0,6843	0,5437	0,4150	0,3133	0,2710	0,3133
1,5941	1,4395	1,2856	1,1326	0,9808	0,8310	0,6844	0,5438	0,4152	0,3136	0,2714

$$X = \begin{bmatrix} w_1^{(3)} \\ w_2^{(3)} \\ w_3^{(3)} \\ w_4^{(3)} \\ w_5^{(3)} \\ w_6^{(3)} \\ \vdots \\ w_{11}^{(3)} \end{bmatrix}, \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 1,0002 \\ 1,1564 \\ 1,3092 \\ 1,4541 \\ 1,5879 \\ 1,7072 \\ 1,8091 \\ 1,8911 \\ 1,9512 \\ 1,9877 \\ 2,0002 \end{bmatrix}.$$

Matriks A merupakan himpunan dari vektor basis sehingga sudah tentu nilai koefisien $w^{(3)}$ dapat ditentukan, yaitu dengan mengalikan invers dari matriks A (ditulis A^{-1}) dengan B .

$$X = A^{-1} \cdot B$$

dengan

$$A^{-1} =$$

-25,4446	53,5546	-42,6162	23,1132	-11,6136	5,5415	-2,5052	0,7245	0,5522	-1,8894	2,0297
53,6019	-138,1025	143,2273	-91,3465	47,6821	-23,5086	11,2690	-4,9561	1,3941	1,1465	-1,9028
-42,7005	143,3257	-209,5787	182,1510	-110,9873	57,2150	-28,1458	13,3535	-5,7421	1,3859	0,5679
23,1595	-91,4016	182,1524	-230,7452	192,8151	-116,1235	59,6334	-29,0640	13,3532	-4,9536	0,7178
-11,6356	47,7084	-110,9872	192,8146	-236,0774	195,2976	-117,1190	59,6332	-28,1454	11,2724	-2,5060
5,5507	-23,5207	57,2152	-116,1235	195,2977	-237,0476	195,2977	-116,1235	57,2152	-23,5207	5,5507
-2,5060	11,2724	-28,1454	59,6332	-117,1190	195,2976	-236,0774	192,8146	-110,9872	47,7084	-11,6356
0,7178	-4,9536	13,3532	-29,0640	59,6334	-116,1235	192,8151	-230,7452	182,1524	-91,4016	23,1595
0,5679	1,3859	-5,7421	13,3535	-28,1458	57,2150	-110,9873	182,1510	-209,5787	143,3257	-42,7005
-1,9028	1,1465	1,3941	-4,9561	11,2690	-23,5086	47,6821	-91,3465	143,2273	-138,102	53,6019
2,0297	-1,8894	0,5522	0,7245	-2,5052	5,5415	-11,6136	23,1132	-42,6162	53,5546	-25,4446

sehingga diperoleh matriks $X = \begin{bmatrix} 3,5384 \\ -3,6240 \\ 1,9897 \\ -1,1017 \\ 0,5138 \\ -0,4685 \\ 0,3720 \\ -0,8243 \\ 1,2861 \\ -2,5129 \\ 2,2080 \end{bmatrix}$.

Nilai koefisien $w^{(3)}$ yang telah diperoleh selanjutnya digunakan untuk menghitung solusi $u^{(3)}$. Berdasarkan definisi jaringan fungsi radial basis, solusi $u^{(3)}$ dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\begin{aligned} u_1^{(3)} &= w_1^{(3)}\phi(a, c_1) + w_2^{(3)}\phi(a, c_2) + w_3^{(3)}\phi(a, c_3) + \dots w_{11}^{(3)}\phi(a, c_{11}) \\ u_2^{(3)} &= w_1^{(3)}\phi(x_2, c_1) + w_2^{(3)}\phi(x_2, c_2) + w_3^{(3)}\phi(x_2, c_3) + \dots w_{11}^{(3)}\phi(x_2, c_{11}) \\ u_3^{(3)} &= w_1^{(3)}\phi(x_3, c_1) + w_2^{(3)}\phi(x_3, c_2) + w_3^{(3)}\phi(x_3, c_3) + \dots + w_{11}^{(3)}\phi(x_3, c_{11}) \\ &\vdots \\ u_{11}^{(3)} &= w_1^{(3)}\phi(x_3, c_1) + w_2^{(3)}\phi(x_3, c_2) + w_3^{(3)}\phi(x_3, c_3) + \dots + w_{11}^{(3)}\phi(x_3, c_{11}) \end{aligned}$$

Substitusi nilai koefisien $w^{(3)}$ yang telah diperoleh sehingga menghasilkan

$$\begin{aligned} u_1^{(3)} &= (3,5384)\phi(0, 0) + (-3,6240)\phi(0, 0,1571) + \dots \\ &\quad + (2,2080)\phi(0, 1,5708) \\ u_2^{(3)} &= (3,5384)\phi(0,1571, 0) + (-3,6240)\phi(0,1571, 0,1571) + \dots \\ &\quad + (2,2080)\phi(0,1571, 1,5708) \\ u_3^{(2)} &= (3,5384)\phi(0,3142, 0) + (-3,6240)\phi(0,3142, 0,1571) + \dots \\ &\quad + (2,2080)\phi(0,3142, 1,5708) \end{aligned}$$

dan seterusnya demikian hingga solusi $u_{11}^{(3)}$, dimana $u_1^{(3)}$ merupakan solusi $u^{(3)}$ dengan nilai x yang pertama dan demikian seterusnya.

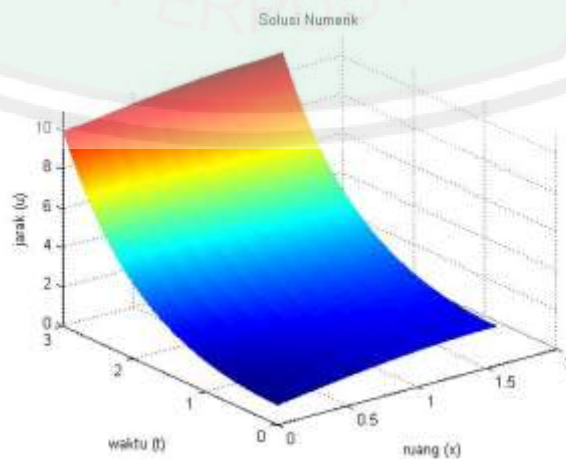
Nilai koefisien $w^{(3)}$ dan solusi $u^{(3)}$ selanjutnya dihitung dengan bantuan program MATLAB sehingga diperoleh hasil sebagai berikut.

Tabel 3.2 Hasil Perhitungan $u^{(3)}$ Menggunakan MATLAB

x ke-	Nilai x	Solusi $u^{(3)}$
1	0	1,0002
2	0,1571	1,1566
3	0,3142	1,3092
4	0,4712	1,4542
5	0,6283	1,5880
6	0,7854	1,7073
7	0,9425	1,8092
8	1,0996	1,8912
9	1,2566	1,9513
10	1,4137	1,9879
11	1,5708	2,0002

Solusi $u_1^{(3)}, u_2^{(3)}, u_3^{(3)}, \dots, u_{11}^{(3)}$ yang telah diperoleh di atas adalah nilai u pada saat $t^{(3)}$. Sedangkan, untuk nilai u pada saat $t^{(4)}, t^{(5)}, \dots$ dapat diperoleh dengan cara yang sama sebagaimana cara mencari nilai $u^{(3)}$. Yaitu dengan melanjutkan substitusikan $n = 3, 4, \dots, 301$ pada persamaan (3.95), dimana 301 adalah banyaknya t pada $0 \leq t \leq 3$ dengan $\Delta t = 0,01$

Solusi $u^{(4)}$ dan seterusnya ditampilkan pada lampiran. Keseluruhan solusi u pada $0 \leq t \leq 3$ dapat dilihat pada grafik di bawah ini.



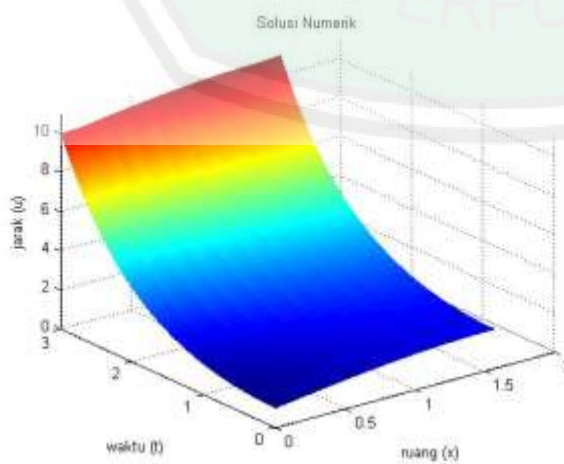
Gambar 3.1 Grafik Solusi Numerik

Gambar 3.1 menunjukkan hasil simulasi secara numerik dari persamaan (3.89) menggunakan jaringan fungsi radial basis dengan $\Delta t = 0,01$ dan $\Delta x = 0,1571$. Gambar 3.1 menggambarkan partikel berada pada ruang x pada waktu t . Dengan kata lain u menunjukkan jarak elektron terhadap inti atom pada saat t . Diketahui bahwa gerakan partikel dari waktu $t = 0$ akan semakin bergerak naik sampai pada $t = 3$.

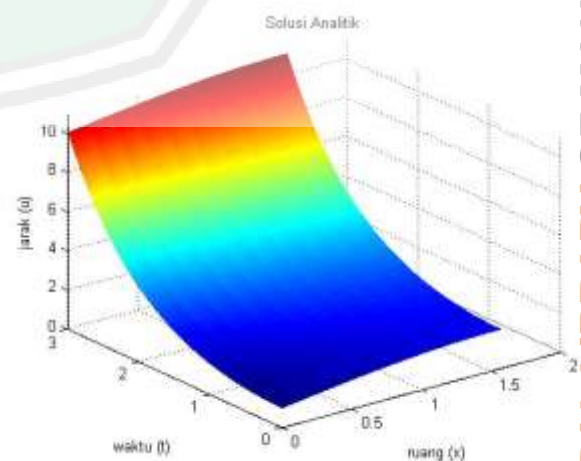
3.2.2 Perhitungan Galat

Subbab ini akan membahas galat dari solusi numerik persamaan linier *Klein-Gordon* menggunakan jaringan fungsi radial basis. Tujuan dari analisis galat adalah untuk mengetahui seberapa dekat solusi numerik dengan solusi eksaknya. Solusi eksak dari persamaan (3.89) telah diperoleh dari penelitian yang dilakukan oleh Iqbal, dkk (2010) sebagaimana tertulis pada persamaan (2.1).

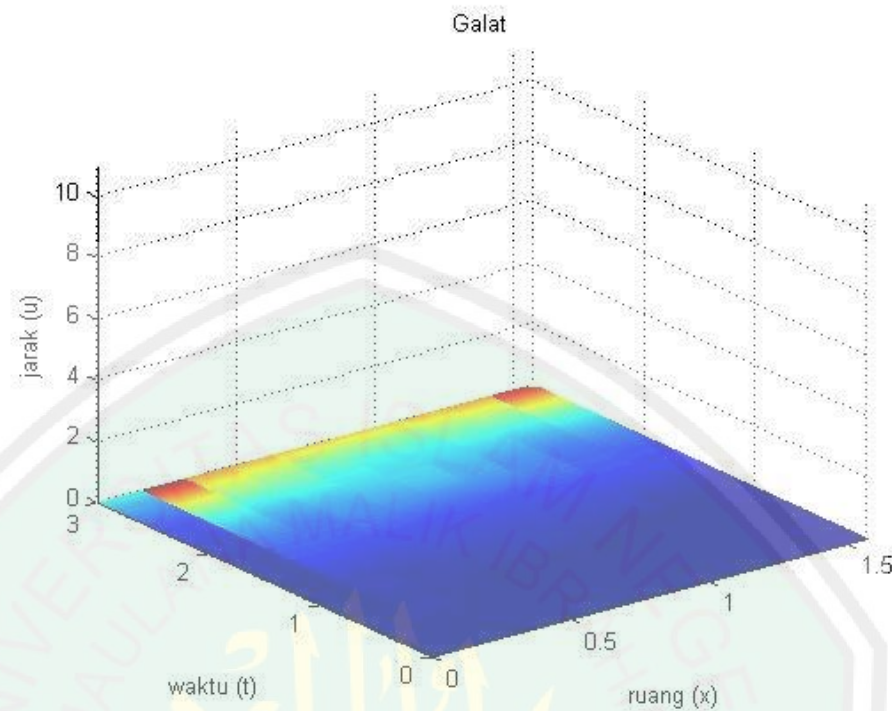
Hasil seluruh solusi dari simulasi yang dilakukan, yaitu dengan $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $\Delta x = 0.1571$ dan $0 \leq t \leq 3, \Delta t = 0,01$, ditampilkan pada Gambar 3.2 dan Gambar 3.3 dengan galat sebagaimana pada Gambar 3.4.



Gambar 3.2 Grafik Solusi Numerik



Gambar 3.3 Grafik Solusi Eksak



Gambar 3.4 Grafik Galat Solusi Numerik

Jumlah galat kuadrat antara hasil solusi eksak dengan hasil solusi numerik dapat diketahui dengan menghitung nilai SSE dengan mengikuti persamaan (2.49). SSE yang dihasilkan saat $\Delta t = 0,01$ adalah 1,9658. Sedangkan untuk mengetahui galat rata-rata di tiap titik dapat dilihat dari nilai $\overline{SSE}$. $\overline{SSE}$ yang dihasilkan saat $\Delta t = 0,01$ adalah $5,9372 \times 10^{-4}$.

Iqbal, dkk (2010) juga telah menyelesaikan solusi numerik dari persamaan (3.89) menggunakan *Optimal Homotopy Asymptotic Method* (OHAM). Berikut adalah perbandingan solusi eksak dengan solusi numerik persamaan (3.89) menggunakan jaringan fungsi radial basis atau *Radial Basis Function Network* (RBFN) dan menggunakan OHAM dengan $\Delta x = 0,1571$ pada saat $t = 1$ dan $t = 3$.

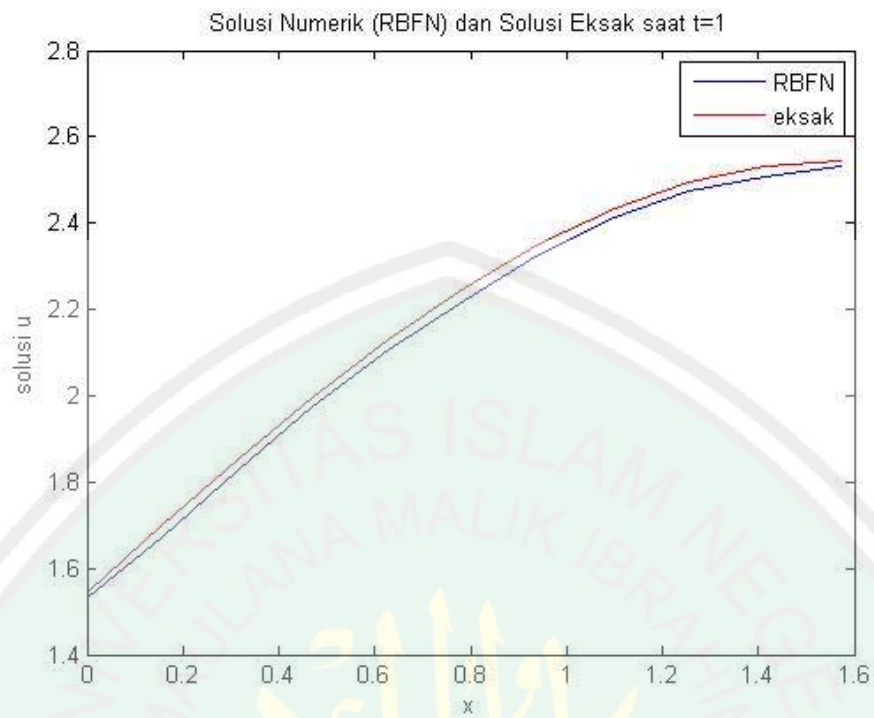
Tabel 3.3 Perbandingan Solusi Numerik dari *RBFN* dan *OHAM* terhadap Solusi Eksak

t	x	$u_{\text{numerik } RBFN}$	$u_{\text{numerik } OHAM}$	u_{eksak}	Galat <i>RBFN</i>	Galat <i>OHAM</i>
1	0	1,5431	1,5431	1,5431	0,0117	$4,44089 \times 10^{-16}$
	0,1571	1,6807	1,6995	1,6995	0,0285	$7,0934 \times 10^{-8}$
	0,3142	1,8368	1,8521	1,8521	0,0231	$7,96258 \times 10^{-8}$
	0,4712	1,9797	1,9971	1,9971	0,0233	$1,2616 \times 10^{-7}$
	0,6283	2,1091	2,1309	2,1309	0,0266	$4,82468 \times 10^{-8}$
	0,7854	2,2258	2,2502	2,2502	0,0290	$1,6673 \times 10^{-7}$
	0,9425	2,3320	2,3521	2,3521	0,0249	$4,82468 \times 10^{-8}$
	1,0996	2,4210	2,4341	2,4341	0,0191	$1,2616 \times 10^{-7}$
	1,2566	2,4836	2,4941	2,4941	0,0183	$7,96258 \times 10^{-8}$
	1,4137	2,5172	2,5308	2,5308	0,0233	$7,0934 \times 10^{-8}$
	1,5708	2,5431	2,5431	2,5431	0,0117	0,0
3	0	10,0677	10,0677	10,0677	0,0997	$1,77636 \times 10^{-15}$
	0,1571	10,1640	10,2241	10,2241	0,1614	$4,62801 \times 10^{-7}$
	0,3142	10,3383	10,3767	10,3767	0,1415	$5,1951 \times 10^{-7}$
	0,4712	10,4871	10,5217	10,5217	0,1387	$8,23114 \times 10^{-7}$
	0,6283	10,6258	10,6554	10,6554	0,1345	$3,14781 \times 10^{-7}$
	0,7854	10,7456	10,7748	10,7748	0,1342	$1,08781 \times 10^{-6}$
	0,9425	10,8472	10,8767	10,8767	0,1343	$3,14781 \times 10^{-7}$
	1,0996	10,9148	10,9587	10,9587	0,1381	$8,23114 \times 10^{-7}$
	1,2566	10,9815	11,0187	11,0187	0,1403	$5,1951 \times 10^{-7}$
	1,4137	10,9984	11,0554	11,0554	0,1581	$4,62802 \times 10^{-7}$
	1,5708	11,0677	11,0677	11,0677	0,0997	$1,77636 \times 10^{-15}$

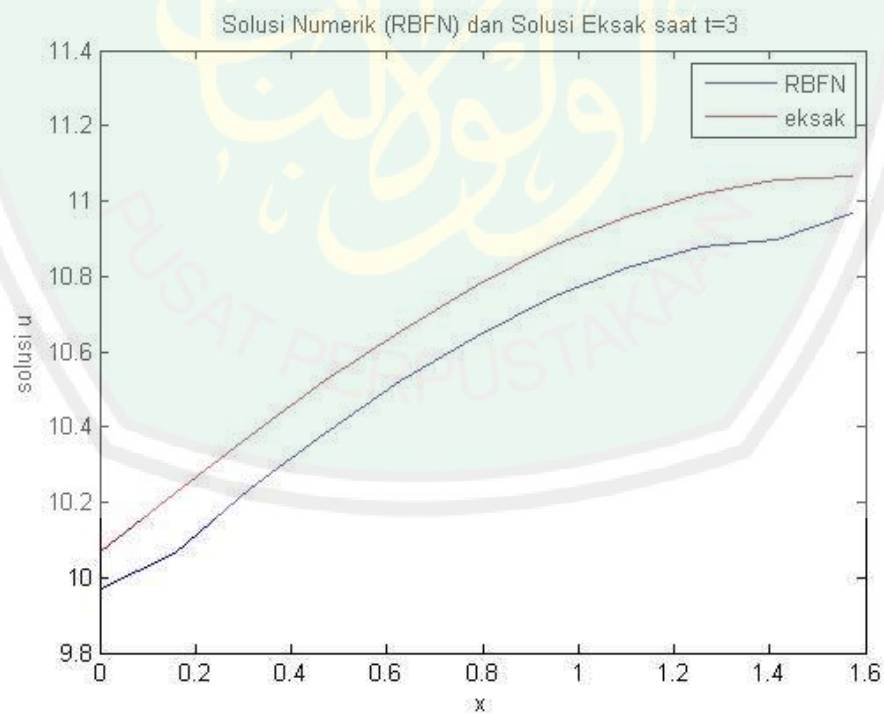
Nilai-nilai yang terdapat pada Tabel 3.3 dengan penulisan 15 angka di belakang koma ditampilkan pada Lampiran 3.

Masing-masing dari dua solusi numerik tersebut dapat diketahui nilai galatnya terhadap solusi eksak. Kolom ke-6 pada Tabel 3.3 merupakan galat dari solusi numerik *RBFN* terhadap solusi eksak yang dikerjakan dengan cara menghitung $|u_{\text{numerik } (RBFN)} - u_{\text{eksak}}|$. Sedangkan kolom ke-7 pada Tabel 3.3 merupakan galat dari solusi numerik (*OHAM*) terhadap solusi eksak yang dikerjakan dengan cara menghitung $|u_{\text{numerik } (OHAM)} - u_{\text{eksak}}|$.

Grafik perbandingan untuk solusi numerik *RBFN* solusi eksak pada saat $t = 1$ dan $t = 3$ adalah sebagai berikut.



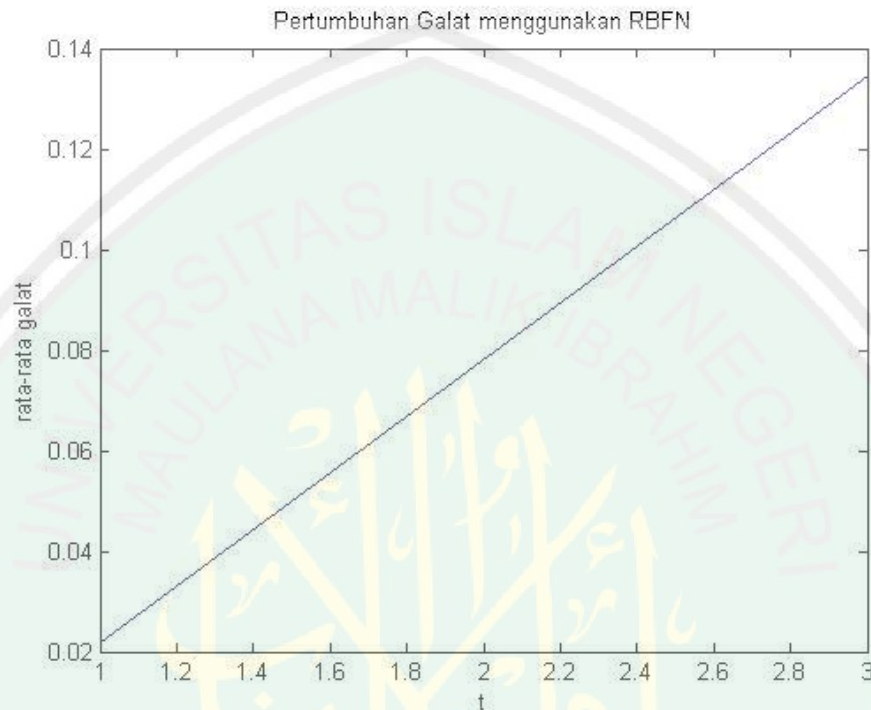
Gambar 3.5 Grafik Solusi Numerik *RBFN* dan Solusi Eksak saat $t = 1$



Gambar 3.6 Grafik Solusi Numerik *RBFN* dan Solusi Eksak saat $t = 3$

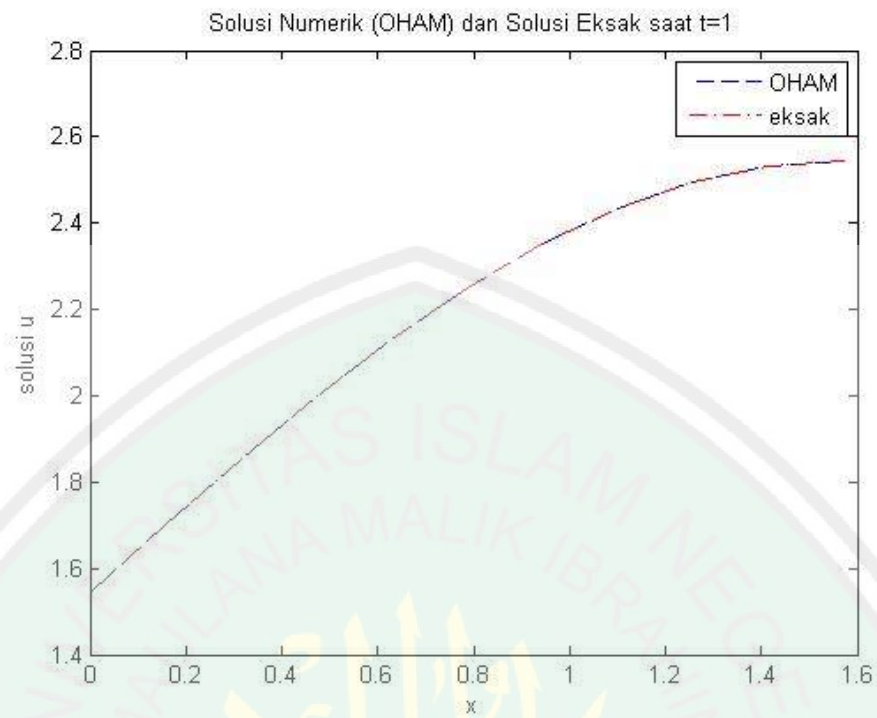
Galat *RBFN* yang terdapat pada Tabel 3.4 adalah galat yang dihasilkan dari perbandingan solusi eksak dan solusi numerik *RBFN* dari waktu ke waktu.

Gambar 3.7 menjelaskan pertumbuhan galat yang dihasilkan dari perbandingan solusi eksak dan solusi numerik *RBFN*. Nilai rata-rata galat merupakan hasil rata-rata galat dari x_1 sampai x_{11} untuk setiap t .

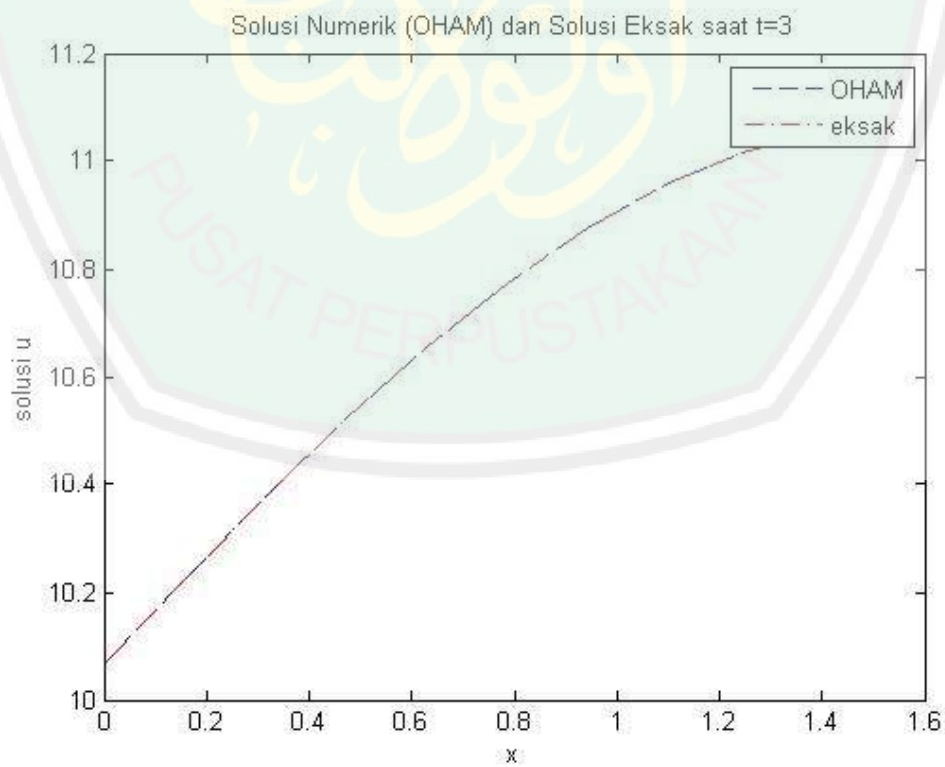


Gambar 3.7 Grafik Pertumbuhan Galat Menggunakan *RBFN* dari $t = 1$ sampai $t = 3$

Grafik perbandingan untuk solusi numerik *RBFN* solusi eksak pada saat $t = 1$ dan $t = 3$ adalah sebagai berikut.

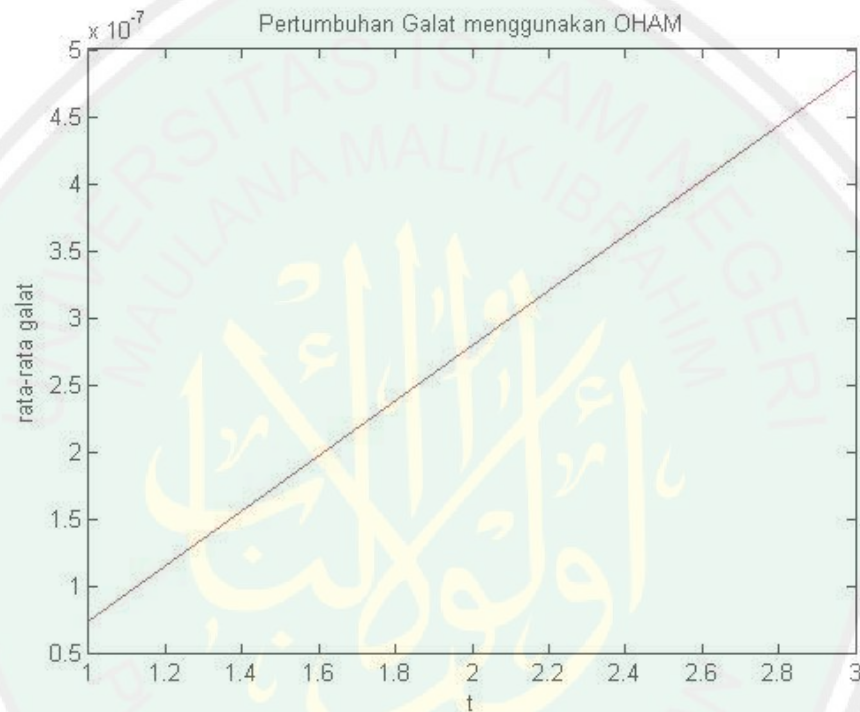


Gambar 3.8 Grafik Solusi Numerik *OHAM* dan Solusi Eksak saat $t = 1$



Gambar 3.9 Grafik Solusi Numerik *OHAM* dan Solusi Eksak saat $t = 3$

Galat *OHAM* yang terdapat pada Tabel 3.4 adalah galat yang dihasilkan dari perbandingan solusi eksak dan solusi numerik *OHAM* dari waktu ke waktu. Gambar 3.7 menjelaskan pertumbuhan galat yang dihasilkan dari perbandingan solusi eksak dan solusi numerik *OHAM*. Nilai rata-rata galat merupakan hasil rata-rata galat dari x_1 sampai x_{11} untuk setiap t .



Gambar 3.10 Grafik Pertumbuhan Galat Menggunakan *OHAM* dari $t = 1$ sampai $t = 3$

Gambar 3.7 dan Gambar 3.10 memperlihatkan hasil yang berbeda. Galat yang dihasilkan pada Gambar 3.7 berada pada rentang nilai 0.0218 sampai 0.1346. Sedangkan galat yang dihasilkan pada Gambar 3.10 berada pada rentang nilai $7,4242 \times 10^{-8}$ sampai $4,8438 \times 10^{-7}$. Dengan demikian, galat yang dihasilkan ketika menggunakan *OHAM* lebih kecil daripada ketika menggunakan jaringan fungsi radial basis. Hal ini menunjukkan dalam menyelesaikan solusi numerik persamaan linier *Klein-Gordon* khususnya persamaan (3.89) lebih baik menggunakan *OHAM* dibandingkan menggunakan jaringan fungsi radial basis.

Solusi numerik yang dihasilkan menggunakan jaringan fungsi radial basis melalui proses diskritisasi dalam proses menghitungnya. Sehingga nilai Δt yang diberikan dapat mempengaruhi galat yang dihasilkan. Sedangkan *OHAM* dikerjakan dengan mengintegrasikan langsung sesuai orde yang digunakan sebagaimana yang dijelaskan oleh Iqbal, dkk (2010). Galat yang dihasilkan bergantung pada seberapa tinggi orde yang digunakan. Semakin tinggi orde yang digunakan, semakin kecil pula galat yang dihasilkan. Kedua metode ini mempunyai karakteristik yang berbeda dalam proses pengerjaannya.

3.3 Kejadian *Klein-Gordon* dalam Al-Quran

Persamaan *Klein-Gordon* merupakan suatu fungsi gelombang relativistik yang diterapkan pada pergerakan partikel-partikel elementer atau partikel-partikel dasar. Partikel elementer adalah partikel yang paling dasar yang membentuk partikel lainnya (materi) yang ditemukan di alam dan tidak lagi terbentuk dari partikel yang lebih kecil. Kenyataannya, partikel-partikel elementer merupakan unsur pokok yang membangun materi. Dalam kehidupan nyata, partikel elementer yang dimaksud adalah berupa atom atau bahkan elektron yang menyusun atom (Nainggolan, 2012).

Kayu adalah materi, gula adalah materi, alam semesta dan seluruh isinya ini merupakan materi yang mana terdiri dari partikel-partikel elementer yang menyusunnya. Dalam kenyataannya, atom sering dianggap sebagai partikel-partikel elementer yang dimaksud. Atom diambil dari bahasa Yunani *atomos*, yang artinya “tidak dapat dibagi”. Ilmuwan Yunani seperti Demokritus dan Leocipus mengira bahwa atom adalah benda terkecil yang ada, dan atom tidak

dapat dibelah. Pendapat ini tentunya menjadi salah pada saat ini. Ilmuwan modern menunjukkan bahwa atom ternyata dapat dibelah. Akan tetapi memang atom adalah bagian terkecil yang berperilaku sebagai unsur kimia yang stabil. Ukuran atom kurang dari 1/10 juta inci atau tebal satu lembar kertas itu sama dengan 2 juta atom (Djayadi, 2008).

Atom terdiri atas dua bagian. Yaitu, inti dan elektron yang mengelilinginya. Inti atom berukuran 10.000 kali lebih kecil dari atom. Di pusat atom terdapat partikel (elektron) yang mengitari inti yang disebut proton dan neutron yang terikat oleh muatan listrik. Akan tetapi, kemudian ada pula materi yang lebih kecil lagi yaitu *quark*. *Quark* ditemukan pada tahun 1973 oleh David J. Gross, Frank Wilczek dan H. David Politzer. Mereka bertiga berhasil mengungkap *quark* yaitu partikel terkecil yang mampu menyusun materi atom. Atau dengan kata lain, atom tersusun dari nukleon yang disusun oleh *quark*. Penelitian yang dilakukan ketiganya mencoba menerangkan kekuatan yang mengikat *quark* dalam proton dan neutron. Kekuatan tersebut akan semakin bertambah kuat, dan pada akhirnya tidak dapat dipisahkan lagi (Djayadi, 2008).

Nainggolan (2012) dalam penelitiannya mengaplikasikan persamaan *Klein Gordon* pada atom pion. Atom pion sama seperti atom hidrogen hanya elektronnya diganti menjadi sebuah pion negatif. Partikel ini telah diteliti sekitar empat puluh tahun yang lalu, tetapi penyelidikan yang dilakukan dengan serius masih baru-baru ini. Seorang fisikawan Jepang Hideki Yukawa menyatakan bahwa terdapat partikel dengan besar massa antara elektron dan nukleon yang bertanggung jawab atas adanya gaya nuklir. Dia menamakan partikel tersebut sebagai pion. Pion dapat bermuatan positif, negatif dan netral, dan merupakan

anggota kelas partikel elementer yang secara kolektif disebut meson (kata pion merupakan singkatan dari meson). Menurut Yukawa, setiap nukleon terus menerus memancarkan dan menyerap pion. Jika terdapat nukleon lain didekatnya, pion yang dipancarkan dapat menyeberang alih-alih kembali ke nukleon induknya; transfer momentum yang menyertainya setara dengan aksi gaya. Atom pion hanya memiliki spin nol.

Al-Quran yang diturunkan 15 abad yang lalu, sungguh merupakan karunia besar sebagai “*hudal linnas*” dan “*hudal lilmuttaqien*” bagi umat manusia yang mau menggunakan akal pikirannya dalam rangka mendekatkan dirinya kepada Sang Pencipta alam raya ini. Segala yang ada di langit dan ada di bumi ini, semua adalah ciptaan Allah yang diperuntukkan bagi umat manusia, termasuk di dalamnya tentang atom yang mempunyai ukuran amat sangat kecil.

Cara berpikir manusia maju setapak demi setapak dan terus menggali hingga mendapatkan penemuan terbaru. Para ilmuwan terus mencoba membaca berbagai macam gejala alam yang kemudian dikaitkan atau disimpulkan sebagai pelengkap teori-teori yang diajukan. Usaha membaca berbagai macam gejala alam, sangat dianjurkan dalam islam, sebagai bagian untuk mengakui akan kebesaran Allah SWT sebagai pencipta alam semesta ini dan sekaligus sebagai pemilik ilmu pengetahuan yang ada di alam raya ini.

Istilah atom dalam Al-Quran didapatkan dari pemahaman tentang “*dzarrah*” yaitu buitr yang sangat kecil yang tidak lain adalah atom. Di antaranya disebutkan dalam QS. Saba’:3 berikut ini:

“Tiada yang tersembunyi pada-Nya seberat dzarrah pun yang ada di langit dan yang ada di bumi, dan tidak (pula) yang lebih kecil dari pada itudan yang lebih besar melainkan di dalam kitab yang terang.” (QS. Saba’:3)

Para ilmuwan pada saat ini telah dapat menemukan berapa ukuran atom. Kalau benda dengan ukuran (diameter) 1 cm, mata manusia masih bisa melihatnya dengan mudah. Akan tetapi untuk atom yang ukurannya per seratus juta cm, tentu mata manusia tidak mampu untuk melihatnya. Walaupun demikian kecilnya ukuran suatu atom, tetapi secara nyata atom itu ada. Setiap benda yang ada di alam semesta ini pasti ada ukurannya, sekalipun atom. Sebagaimana telah difirmankan Allah dalam surat Al-Qamar:49 yang menyatakan bahwa segala sesuatu yang ada di alam semesta ini diciptakan dengan ukuran.

“Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu dengan ukuran.” (QS. Al-Qamar:49)

Al-Quran telah memberi isyarat tentang adanya ukuran pada semua benda yang diciptakan Allah. Bila disimak dari ayat tersebut, sebenarnya bukan hanya benda saja yang mempunyai ukuran, akan tetapi semua besaran fisis yang dapat diukur pastilah diciptakan oleh Allah dengan suatu ukuran tertentu yang dalam bahasa ilmu sains disebut dengan satuan fisis. Contohnya adalah panas dapat diukur berapa derajat suhunya, kecepatan gerak suatu benda dapat ditentukan berapa kecepatannya, kuat cahaya dapat diukur berapa intensitasnya dan sebagainya (Wardhana, 2004).

Elemen-elemen atom bergerak pada lintasan tertentu yang disebut orbit. Dalam perjalanan perkembangan ilmu pengetahuan, pergerakan elemen-elemen atom telah dapat digambarkan dalam suatu persamaan yang pertama kali diperkenalkan oleh fisikawan Oskar Klein dan Walter Gordon pada tahun 1927, yaitu persamaan *Klein Gordon*. Hal tersebut juga tidak terlepas dari penjelasan Al-Quran sebagai sumber ilmu pengetahuan. Setiap ciptaan Allah yang ada di alam raya ini telah ditentukan hukum-hukumnya, atau disebut *sunnatullah*. Elektron

sebagai bagian terkecil dari suatu atom adalah juga ciptaan Allah yang akan tunduk pada hukum-hukum yang berlaku sebagai ketetapan-Nya.

Para ilmuwan mengemukakan bahwa setiap elektron berputar mengelilingi atom dengan orbit tertentu. Hal tersebut bukanlah merupakan sesuatu yang baru menurut sudut pandang Al-Quran, karena segala sesuatu yang diciptakan Tuhan pasti ada aturannya ataupun ada ukurannya dan Tuhan pula yang mengatur semua itu. Kalaupun hal tersebut dianggap suatu penemuan baru, maka penemuan baru tersebut disebabkan karena akal manusia baru sampai kepada tingkat tersebut. Manakala pikiran dan akal manusia telah bertambah maju, pastilah akan ditemukan suatu penemuan-penemuan baru lagi. Namun penemuan-penemuan baru tersebut tentu akan tetap tunduk pada hukum-hukum alam atau *sunnatullah*.

“Dia menciptakan segala sesuatu, lalu mengaturnya menurut ukuran tertentu”
(QS. Al-Furqan:2)

Allah menciptakan segala sesuatu, termasuk elektron yang lebih kecil dari atom, diatur berputar mengelilingi inti menurut orbit yang ukurannya tertentu, bahkan pergerakannya pun digambarkan mengikuti fungsi tertentu. Sesungguhnya seluruh ciptaan Allah Swt. tersusun dari sesuatu yang sangat kecil dan teratur. Semuanya terukur dengan sangat rapi. Bahkan partikel yang sangat kecil itu tidak hanya diam dalam posisi tertentu, tetapi terus berputar mengitari intinya. Maha suci Allah yang telah menciptakan seluruh ciptaan-Nya dengan sangat teratur sehingga dicapai suatu keseimbangan.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Persamaan linier *Klein-Gordon* merupakan suatu fungsi gelombang yang menunjukkan pergerakan partikel-partikel elementer. Solusi numerik persamaan *Klein-Gordon* pada skripsi ini diperoleh dengan metode jaringan fungsi radial basis. Persamaan *Klein-Gordon* dapat didekati secara langsung dengan suatu fungsi basis jenis *multiquadrics* untuk mendapatkan hasil numeriknya. Kesimpulan dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Solusi numerik yang dihasilkan dari persamaan linier *Klein-Gordon* menggunakan jaringan fungsi radial basis adalah suatu fungsi yang bergantung pada x dan t yaitu $u(x,t)$. Persamaan linier *Klein-Gordon* digunakan untuk menjelaskan tentang sistem gerak elektron mengelilingi inti atom dimana fungsi $u(x,t)$ menunjukkan jarak antara elektron dengan inti atom pada ruang x dan pada saat t .
2. Solusi numerik persamaan linier *Klein-Gordon* yang diperoleh dari hasil simulasi dalam penelitian ini menghasilkan nilai SSE sebesar 1,9658 dan $\overline{SSE}$ sebesar $5,9372 \times 10^{-4}$ dengan $\Delta t = 0,01$. Dan setelah dilakukan perbandingan antara solusi numerik menggunakan jaringan fungsi radial basis dan menggunakan *OHAM*, diperoleh kesimpulan bahwa solusi numerik dari *OHAM* dengan perhitungan sampai orde tiga memberikan hasil yang lebih baik dibandingkan menggunakan jaringan fungsi radial basis dalam menyelesaikan solusi numerik persamaan linier *Klein-Gordon* ini karena galat yang dihasilkan dari *OHAM* lebih kecil daripada ketika menggunakan

jaringan fungsi radial basis. Akan tetapi dalam proses perhitungan *OHAM* orde tiga diperlukan tiga kali pengintegralan. Jika *OHAM* dihitung menggunakan orde yang lebih rendah, maka galat yang dihasilkan menjadi lebih besar.

4.2 Saran

Saran untuk penelitian selanjutnya adalah sebagai berikut.

1. Melakukan penelitian tentang penyelesaian numerik persamaan linier *Klein-Gordon* menggunakan metode beda hingga.
2. Melakukan analisis galat dengan tetap menggunakan *OHAM* sebagai pembandingan.

DAFTAR PUSTAKA

- Al-Maraghi, A.M. 1993. *Tafsir Al-Maraghi*. Semarang: CV. TOHA PUTRA.
- Al-Qarni, 'A. 2007. *Tafsir Muyassar*. Jakarta: Qisthi Press.
- Al-Qurthubi, S. I. 2009. *Tafsir Al-Qurthubi*. Jakarta: Pustaka Azzam.
- Aminataei, A. & Mazarei, M.M. 2008. Numerical Solution of Poisson's Equation Using Radial Basis Function Networks on the Polar Coordinate. *Computers and Mathematics with Applications*, 56: 2887-2895.
- Anton, H. & Rorres, C. 2004. *Aljabar Linear Elementer versi Aplikasi*. Jakarta: Erlangga.
- Djayadi. 2008. *Alam Semesta Bertawaf*. Yogyakarta: Lingkaran.
- Dehghan, M. & Shokri, A. 2009. Numerical Solution of The Nonlinear Klein-Gordon Equation using Radial Basis Functions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 230: 400-410.
- Easif, F.H., Manaa, S.A., & Mekaeel, D. 2013. The Finite Difference Methods for ϕ^4 -Nonlinear Klein Gordon Equation. *IOSR Journal of Engineering*, 3: 01-05.
- Hajek, M. 2005. *Neural Networks*. Modul Kuliah Tidak Diterbitkan. California: University of California.
- Iqbal S., Idrees, M., Siddiqui, A.M., & Ansari, A.R. 2010. Some Solutions of The Linear and Nonlinear Klein-Gordon Equations using The Optimal Homotopy Asymptotic Method. *Applied Mathematics and Computation*, 216: 2898-2909.
- Katsir, I. 2004. *Tafsir Ibnu Katsir, Jilid 6*. Terjemahan M. Abdul Ghoffar E.M. & Abu Ihsan Al-Atsari. Bogor: Pustaka Imam As-Syafi'i.
- Mai-Duy, N. & Tran-Cong, T. 2003. Approximation of Function and Its Derivatives Using Radial Basis Functions Networks. *Applied Mathematical Modelling*, 27: 197-220.
- Mufidah, F. 2014. Solusi Numerik Persamaan Poisson Menggunakan Jaringan Fungsi Radial Basis pada Koordinat Polar. *Skripsi* Tidak Diterbitkan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

- Morton, K.W. & Mayers, D. 2005. *Numerical Solution of Partial Differential Equations*. New York: Cambridge University Press.
- Nainggolan, R.D. 2012. Penerapan Persamaan Klein-Gordon untuk Menentukan Tingkat Energi dari Atom Pion. *Skripsi Tidak Diterbitkan*. Medan: Universitas Sumatra Utara.
- Sani, R.A. 2014. *Sains Berbasis Al-Quran*. Jakarta: Bumi Aksara.
- Setiawan, I. 2002. *Jaringan Syaraf Tiruan Jenis AMN (Associative Memory Networks): CMAC, B-Spline dan RBF untuk Aplikasi Pemodelan dan Pengontrolan*. Modul Kuliah Tidak Diterbitkan. Semarang: Universitas Diponegoro.
- Simbolon, H. 2013. *Statistika*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Strauss, W.A. 2007. *Partial Differential Equations. Second Edition*. New York: John Wiley & Sons.
- Sutopo. 2005. *Pengantar Fisika Kuantum*. Malang: UM PRESS.
- Triatmodjo, B. 2002. *Metode Numerik*. Yogyakarta: BETA OFFSET.
- Wardhana, W.A. 2004. *Al-Quran dan Energi Nuklir*. Yogyakarta: PUSTAKA PELAJAR.
- Zuhriyah, S. 2015. Solusi Numerik Persamaan Gelombang Dua Dimensi Menggunakan Jaringan Fungsi Radial Basis. *Skripsi Tidak Diterbitkan*. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

LAMPIRAN-LAMPIRAN

LAMPIRAN 1 *M-file* MATLAB untuk Solusi Numerik, Eksak dan Galatnya.

```

clc, clear, figure(1);

f=@(x) 1+sin(x);
z=@(x,t) sin(x)+cosh(t);

dt=0.01;

x=linspace(0,pi/2,11);
t=0:dt:3;

dx = x(2)-x(1);

N=length(x);
T=length(t);

U=zeros(N,T);
WW=zeros(N,T);

U(:,1)=f(x);

c=x;
p=mq(x,c);
px=mqx(x,c);
pxx=mqxx(x,c);

%pada saat n=1
A = (-dt^2)*pxx+(2-dt^2)*p;

A(1,:)=p(1,:);
A(N,:)=p(N,:);

B=zeros(N,1);
B(1,1)=cosh(t(2));
B(N,1)=1+cosh(t(2));

for i=2:N-1
    B(i,1)=2+2*sin(x(i));
end

WW(:,2)=A\B;
U(:,2)=p*WW(:,2);
%UU2=U(:,2);

```

```

for l=2:T-1
    A=(-dt^2)*pxx+(1-dt^2)*p;
    A(1,:)=p(1,:);
    A(N,:)=p(N,:);

    B=2*U(:,l)-U(:,l-1);
    B(1)=cosh(t(l+1));
    B(N)=1+cosh(t(l+1));

    WW(:,l+1)=A\B;
    U(:,l+1)=p*WW(:,l+1);

end

surf(x,t,U'); zlim([0 10]); xlabel('ruang (x)');
ylabel('waktu (t)'); zlabel('jarak (u)');
title('Solusi Numerik')
shading flat

figure(2)
[xx,tt]=meshgrid(x,t);
zt=z(xx,tt);
surf(xx,tt,zt); ylabel('waktu (t)'); zlabel('jarak
(u)');
xlabel('ruang (x)'); zlim([0 10]);
title('Solusi Analitik')
shading flat

figure(3)
Err = (U'-zt);
surf(xx,tt,Err); ylabel('waktu (t)'); zlabel('jarak
(u)');
xlabel('ruang (x)'); zlim([0 10]);
title('Galat'), shading flat
xlim([0 pi/2])
ylim([0 2])
zlim([0 10])

e=sum(Err);
sse=abs(sum(e));

%sse rata2 pertitik
sse2=sum(sse)/3311

```

LAMPIRAN 2 M-file MATLAB untuk Menghitung Fungsi Basis.

1. Fungsi Asal

```
function f=mq(x,c)

m=length(x);
n=length(c);

a=var(c);

f=zeros(m,n);
for i=1:m
    for j=1:n
        f(i,j)=sqrt(((x(i)-c(j))^2)+a^2);
    end
end
```

2. Fungsi Turunan Pertama

```
function f=mqx(x,c)

m=length(x);
n=length(c);

a=var(c);

f=zeros(m,n);
for i=1:m
    for j=1:n
        f(i,j)=(x(i)-c(j))/sqrt(((x(i)-c(j))^2)+a^2);
    end
end
```

3. Fungsi Turunan Kedua

```
function f=mqxx(x,c)

m=length(x);
n=length(c);

a=var(c);

f=zeros(m,n);
for i=1:m
    for j=1:n
```

```
f(i,j) = 1/(a^2 + (c(j) - x(i))^2)^(1/2) -  
(2*c(j) - 2*x(i))^2/(4*(a^2 + (c(j) -  
x(i))^2)^(3/2));  
    end  
end
```



Lampiran 3 Perbandingan Solusi Numerik *RBFN* dan *OHAM* terhadap Solusi Eksak

t	x	$u_{\text{numerik RBFN}}$	$u_{\text{numerik OHAM}}$	u_{eksak}	Galat <i>RBFN</i>	Galat <i>OHAM</i>
1	0	1,543080634815244	1,543080634815244	1,543080634815244	0,0000000000000000	0,000000000000000444089
	0,1571	1,680740127380497	1,699515028921475	1,699515099855475	0,018774972474978	0,0000000709340
	0,3142	1,836764422672266	1,852097549564391	1,852097629190191	0,015333206517925	0,0000000796258
	0,4712	1,979740969332969	1,997071008394791	1,997071134554791	0,017330165221822	0,0000001261600
	0,6283	2,109097856634457	2,130865838860917	2,130865887107717	0,021768030473260	0,0000000482468
	0,7854	2,225762909352303	2,250187249271792	2,250187416001792	0,024424506649489	0,0000001667300
	0,9425	2,332023256246241	2,352097580943391	2,352097629190191	0,020074372943951	0,0000000482468
	1,0996	2,421011412793322	2,434087032843612	2,434087159003612	0,013075746210290	0,0000001261600
	1,2566	2,483601643490293	2,494137071484597	2,494137151110397	0,010535507620104	0,0000000796258
	1,4137	2,517210158328084	2,530768904476382	2,530768975410382	0,013558817082298	0,0000000709340
3	1,5708	2,543080634815244	2,543080634815244	2,543080634815244	0,0000000000000000	0,0000000000000000
	0	10,067661995777767	10,067661995777764	10,067661995777765	0,0000000000000002	0,000000000000000177636
	0,1571	10,163971351867271	10,224095998016997	10,224096460817997	0,060125108950725	0,000000462801
	0,3142	10,338337342736807	10,376678470642712	10,376678990152712	0,038341647415905	0,000000519510
	0,4712	10,487122173368824	10,521651672403312	10,521652495517312	0,034530322148488	0,000000823114
	0,6283	10,625764669806749	10,655446933289239	10,655447248070239	0,029682578263490	0,000000314781
	0,7854	10,745618660580611	10,774767689154313	10,774768776964313	0,029150116383702	0,000001087810
	0,9425	10,847237395236252	10,876678675371712	10,876678990152712	0,029441594916459	0,000000314781
	1,0996	10,924775497444426	10,958667696852133	10,958668519966134	0,033893022521708	0,000000823114
	1,2566	10,981513316924108	11,018717992562920	11,018718512072919	0,037205195148811	0,000000519510
	1,4137	10,998448093832371	11,055349873570904	11,055350336372904	0,056902242540533	0,000000462802
	1,5708	11,067661995777765	11,067661995777764	11,067661995777765	0,0000000000000000	0,000000000000000177636

RIWAYAT HIDUP



Faraziza Nur'aini, lahir di Malang, tanggal 19 Nopember 1994, biasa dipanggil Fara. Anak bungsu dari tiga bersaudara dari pasangan bapak Nachrudji dan ibu Susiati. Tempat tinggalnya beralamat di jalan Baran 04 RT/RW 06/12 Desa Gedog Wetan, Kecamatan Turen, Kabupaten Malang.

Pendidikannya ditempuh di TK Dharma Wanita Tawang Rejeni lulus pada tahun 2000 dan sekolah dasar di SDN Tawang Rejeni 01 lulus pada tahun 2006. Kemudian melanjutkan sekolah menengah pertama di SMP Islam Druju lulus pada tahun 2009 dan sekolah menengah atas di MA Nurul Ulum Malang lulus pada tahun 2012.

Selama menjadi mahasiswa, penulis aktif di organisasi intra maupun ekstra kampus, di antaranya menjadi pengurus Himpunan Mahasiswa Jurusan (HMJ) divisi kewirausahaan tahun 2013 dan juga menjadi staf pengajar di Lembaga Pendidikan Al-Qur'an (LPQ) Wardatul Ishlah Merjosari tahun 2013 sampai sekarang.



**KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933**

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Faraziza Nur'aini
NIM : 12610021
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Solusi Numerik Persamaan Linier *Klein-Gordon* Menggunakan Jaringan Fungsi Radial Basis
Pembimbing I : Mohammad Jamhuri, M. Si
Pembimbing II : Ach. Nasichuddin, MA

No.	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	10 Juni 2016	Konsultasi Bab I	1.
2.	22 Juli 2016	Konsultasi Bab II & Bab III	2.
3.	14 Oktober 2016	Konsultasi Agama Bab I & Bab II	3.
4.	13 November 2016	Revisi Agama Bab II	4.
5.	30 November 2016	Revisi Bab I, Bab II & Bab III	5.
6.	26 Desember 2016	Revisi Bab III	6.
7.	27 Maret 2017	Revisi Bab III	7.
8.	17 April 2017	Konsultasi Bab IV	8.
9.	25 Mei 2017	Revisi Bab IV	9.
10.	30 Mei 2017	Konsultasi Agama Bab III & Bab IV	10.
11.	31 Mei 2017	ACC Agama Keseluruhan	11.
12.	02 Juni 2017	ACC Keseluruhan	12.

Malang, 02 Juni 2017

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001