

**ANALISIS KESTABILAN MODEL *PREDATOR-PREY* DENGAN
PREDATOR MIGRATION DAN WAKTU TUNDA**

SKRIPSI

**OLEH
NIANATUS SHOLIHAH
NIM. 13610068**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2017**

**ANALISIS KESTABILAN MODEL *PREDATOR-PREY* DENGAN
PREDATOR MIGRATION DAN WAKTU TUNDA**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh
Nianatus Sholihah
NIM. 13610068**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2017**

**ANALISIS KESTABILAN MODEL PREDATOR-PREY DENGAN
PREDATOR MIGRATION DAN WAKTU TUNDA**

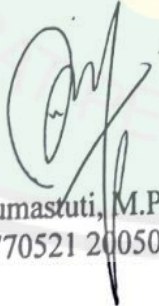
SKRIPSI

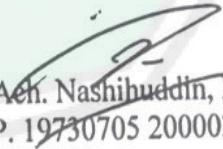
Oleh
Nianatus Sholihah
NIM. 13610068

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 28 Agustus 2017

Pembimbing I,

Pembimbing II,


Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si
NIP. 19770521 200501 2 004


Ach. Nashihuddin, M.A
NIP. 19730705 200003 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika




Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

**ANALISIS DINAMIK MODEL PREDATOR-PREY DENGAN PREDATOR
MIGRATION DAN WAKTU TUNDA**

SKRIPSI

Oleh
Nianatus Sholihah
NIM. 13610068

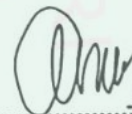
Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal 14 September 2017

Penguji Utama : Mohammad Jamhuri, M.Si

Ketua Penguji : Dr. Usman Pagalay, M.Si

Sekretaris Penguji : Ari Kusumastuti, M.Pd. M.Si

Anggota Penguji : Ach. Nashichuddin, M.A



.....



.....



.....



.....

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Nianatus Sholihah

NIM : 13610068

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Analisis Kestabilan Model *Predator-Prey* dengan *Predator Migration* dan Waktu Tunda.

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 20 Agustus 2017
Yang membuat pernyataan,



Nianatus Sholihah
NIM. 13610068

MOTTO

جَرِّبْ وَلَا حِظُّ تَكُنْ عَارِفًا

Cobalah dan perhatikanlah, niscaya kau jadi orang yang tahu. Pengetahuan datang ketika kita benar-benar berusaha keras memikirkannya. *“Cogito ergo sum by René Descartes – French”*



PERSEMBAHAN

الْحَمْدُ لِلَّهِ رَبِّ الْعَالَمِينَ

Dengan segenap rasa kasih sayang dan cinta skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda H. Munawar, ibunda Hj. Maisaroh, adik tersayang Ainul Yakin, serta seluruh keluarga yang senantiasa menyemangati dan mendoakan akan kesuksesan penulis. Terima kasih untuk segala do'a dan semangatnya.



KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt Atas rahmat, taufik serta izin-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk menempuh gelar sarjana dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam penyelesaian skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Abd Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang dengan gigih dan sabar telah meluangkan waktunya demi membimbing, mengarahkan, menasehati serta memberi motivasi dalam penyelesaian skripsi ini.
5. Ach. Nashichuddin, M.A, selaku dosen pembimbing II yang telah membimbing dengan baik dan berbagi ilmu keagamaan yang banyak kepada penulis.
6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen terima kasih atas ilmu dan bimbingan yang telah diberikan pada penulis.

7. Bapak, Ibu dan saudara-saudara penulis yang tidak pernah berhenti memberikan kasih sayang, do'a, serta motivasi kepada penulis sampai saat ini.
8. Semua teman-teman SABSET Matematika angkatan 2013, terutama teman-teman saya Azmi Auliya, Mustika Ana Kurvia, Nafi'atuz Zahro, S.Si, Setia Alam, Rika Saputri, Maulana Syahrul Ulum, A.Md. Terimakasih atas semua pengalaman, motivasi, serta doanya dalam penyelesaian skripsi ini.
9. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, atas keikhlasan bantuan moril dan spiritual, penulis ucapkan terima kasih.

Semoga skripsi ini bermanfaat bagi semua pihak dan semoga Allah Swt membalas kebaikan mereka semua.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarokatuh

Malang, Agustus 2017

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR TABEL	xi
DAFTAR GAMBAR	xii
ABSTRAK	xiii
ABSTRACT	xiv
ملخص	xv
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	5
1.3 Tujuan Penelitian	5
1.4 Manfaat Penelitian	5
1.5 Batasan Masalah	6
1.6 Metode Penelitian	6
1.7 Sistematika Penulisan	8
BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Analisis Model Predator-Prey dengan Predator Migration dan Waktu Tunda Chen (2013).....	9
2.2 Sistem dinamik	14
2.3 Sistem Persamaan Diferensial	16
2.3.1 Sistem Persamaan Diferensial Linear	17
2.3.2 Sistem Persamaan Diferensial Nonlinear	18
2.3.3 Sistem Persamaan Diferensial Tundaan	19
2.4 Nilai Eigen dan Vektor Eigen	20
2.5 Analisis Kestabilan Titik Tetap	21
2.6 Model Logistik dengan Perlambatan	23
2.7 Penelitian Terdahulu	25

2.8 Tugas Manusia Sebagai Khalifah di Bumi	27
BAB III PEMBAHASAN	
3.1 Syarat Kestabilan Model <i>Predator-Prey</i>	30
3.1.1 Model tanpa waktu tunda ($\tau = 0$)	31
3.1.2 Model dengan Waktu Tunda ($\tau > 0$)	37
3.2 Simulasi untuk variasi nilai awal	42
3.2.1 Simulasi Nilai <i>Prey</i> lebih dari <i>Predator</i>	44
3.2.2 Simulasi Nilai <i>Predator</i> lebih dari <i>Prey</i>	48
3.3 Model <i>Predator-Prey</i> dengan <i>Predator Migration</i> dalam Kajian Islam	50
BAB IV PENUTUP	
4.1 Kesimpulan	52
4.2 Saran	52
DAFTAR RUJUKAN	53
LAMPIRAN	
RIWAYAT HIDUP	

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Keterangan model	12
Tabel 2.2	Nilai parameter untuk model.....	13
Tabel 3.1	Syarat kestabilan titik kesetimbangan model <i>predator-prey</i> dengan <i>predator</i>	41
Tabel 3.2	Nilai parameter kasus populasi <i>prey</i> > <i>predator</i>	44
Tabel 3.3	Nilai parameter kasus populasi <i>predator</i> > <i>prey</i>	48



DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Mekanisme model <i>predator-prey</i> dengan <i>predator migration</i> dan waktu tunda (Chen dkk, 2013).....	10
Gambar 3.1 Kesetimbangan model dengan nilai $m = 14$, <i>delay</i> $\tau = 0.5$	43
Gambar 3.2 Simulasi numerik kasus populasi <i>prey</i> > <i>predator</i>	48
Gambar 3.3 Simulasi numerik kasus populasi <i>predator</i> > <i>prey</i>	50



ABSTRAK

Sholihah, Nianatus. 2017. **Analisis Kestabilan Model *Predator-prey* dengan *Predator Migration* dan Waktu Tunda**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si. (II) Ach. Nashichuddin, M.A.

Kata kunci: *predator*, *prey*, *predator migration*, waktu tunda, analisis kestabilan

Model *predator-prey* merupakan model interaksi antara minimal dua jenis spesies yaitu predator dan prey. Selanjutnya interaksi ini dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial biasa nonlinier yang bergantung waktu. Bentuk model matematika interaksi ini selanjutnya dapat menggambarkan perilaku kedua spesies. Dalam penelitian ini, dilakukan penambahan waktu tunda dan *predator migration* sebagai kontrol dalam kompetisinya dengan *prey*. Penelitian ini difokuskan untuk menganalisis eksistensi dan sifat kestabilan dari semua titik tetapnya. Simulasi dilakukan dengan perubahan nilai-nilai awal *prey* dan *predator*.

Hasil penelitian diperoleh tiga titik tetap yakni $O = (0,0)$, $E_0 = (0, -(m + d))$ dengan syarat stabil $1 + a(m + d) > 0$ dan $E^* = \left(\frac{1+a(m+d)}{a(b+ma)}, \frac{1}{a}\right)$. Disimpulkan bahwa untuk kasus populasi *prey* lebih banyak dari populasi *predator* maka kesetimbangan yang diperoleh adalah $E^* = \left(\frac{7}{24}, \frac{1}{4}\right)$ dengan kontrol manusia $m = 1$, dan $E^* = (1,1)$ dengan kontrol manusia $m = 0$. Untuk kasus populasi *predator* lebih banyak dari *prey* maka di dapatkan kesetimbangan $E_0 = (0,2)$ dengan kontrol manusia $m = -2$. Dengan kata lain jika populasi *prey* lebih banyak dari populasi *predator* maka semakin besar campur tangan manusia yang diberikan. Dalam hal ini peneliti belum sampai pada batasan pemanenan konstan, maka disarankan untuk penelitian selanjutnya menggunakan metode dengan pemanenan konstan.

ABSTRACT

Sholihah, Nianatus. 2017. **Stability Of a Delayed Predator-Prey Model With Predator Migration**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisor: (I) Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si. (II) Ach. Nasichuddin, M.A.

Keywords: predator, prey, predator migration, delay, stability.

The predator-prey model is a model of interaction between at least two species namely predator and prey species. Furthermore, this interaction can be expressed in the form of a time-dependent nonlinear differential equation. This form of mathematical model of interaction can further illustrate the behavior of both species. In this study, additional time delay and predator migration as controls in the competition with prey were performed. This study focused on analyzing the existence and stability properties of all its fixed points. The simulation is done by varying the initial values of prey and predator.

The results obtained three fixed point namely $O = (0,0)$, $E_0 = (0, -(m + d))$ on condition of stable $1 + a(m + d) > 0$ and $E^* = \left(\frac{1+a(m+d)}{a(b+ma)}, \frac{1}{a}\right)$. It was concluded that for more prey population cases than predator populations, the obtained equilibrium point is $E^* = \left(\frac{7}{24}, \frac{1}{4}\right)$ with human control $m = 1$, and $E^* = (1,1)$ with human control $m = 0$. For the case of predator population more than prey, the equilibrium point is $E_0 = (0,2)$ with human control $m = -2$. In other words, if the prey population is more than the predator population, the greater the human intervention will be given. In this reserch the researcher has not reached the limit of harvesting constant, it is recommended for further research using method with constant harvesting.

ملخص

الصالحه، نيانه. ٢٠١٧. تحليل استقرار نموذج المفترسة فريسة مع الهجرة المفترس وتأخير الوقت. مقال. مجلة الرياضيات كلية العلوم وتكنولوجيا. الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك ابراهيم مالانج. لمشرف: (١) اري كسومستوتى الماجستير (٢) احمدنسي حدين الماجستير

الكلمات الرئيسية: فريسة-المفترسي، هجرة المفترس، تأخير الوقت، استقرار

نموذج الفريسة المفترس هو نموذج للتفاعل بين نوعين على الأقل من المفترس والأنواع فريسة. وعلاوة على ذلك، يمكن التعبير عن هذا التفاعل في شكل المعادلة التفاضلية غير الخطية تعتمد على الوقت. ويمكن لهذا الشكل من النموذج الرياضي للتفاعل أن يوضح سلوك كلا النوعين. في هذه الدراسة، تم تأجيل الوقت الإضافي والهجرة المفترسة كضوابط في المنافسة مع الفريسة. وركزت هذه الدراسة على تحليل وجود وخواص استقرار جميع نقاطها الثابتة. تتم المحاكاة عن طريق تغيير القيم الأولية للفريسة والمفترس .

النتائج التي تم الحصول عليها ثلاث نقاط ثابتة وهي $O = (0,0)$ ، $E_0 = (0, - (m + d))$ ، بشرط استقرار $1 + a(m + d) > 0$ و $E^* = \left(\frac{1+a(m+d)}{a(b+ma)}, \frac{1}{a}\right)$. وخلصت الدراسة إلى أنه بالنسبة للحالات السكانية الأكثر فريسة من السكان المفترسة فإن نقطة التوازن الذي يتم الحصول عليها هو $E^* = \left(\frac{7}{24}, \frac{1}{4}\right)$ مع السيطرة البشرية $m = 1$ و $E^* = (1,1)$ مع السيطرة البشرية $m = 0$. لحالة المفترس السكان أكثر من فريسة ثم الحصول على نقطة التوازن $E_0 = (0,2)$ مع السيطرة البشرية $m = -2$. وبعبارة أخرى، إذا كان السكان فريسة أكثر من السكان المفترسة، كلما أعطيت التدخل البشري أكبر. في هذه الحالة لم يصل الباحثة إلى الحد الأقصى للحصاد الثابت، فمن المستحسن لمزيد من البحث باستخدام الطريقة مع الحصاد المستمر.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Penelitian ini merujuk pada firman Allah SWT dalam Qs. Al-Mulk/67 sebagai berikut:

الَّذِي خَلَقَ سَبْعَ سَمَاوَاتٍ طِبَاقًا ۚ مَا تَرَىٰ فِي خَلْقِ الرَّحْمَنِ مِن تَفَوتٍ ۚ فَارْجِعِ الْبَصَرَ هَلْ تَرَىٰ مِن فُطُورٍ (٢) ثُمَّ ارْجِعِ الْبَصَرَ كَرَّتَيْنِ يَنْقَلِبْ إِلَيْكَ الْبَصَرُ حَاسِنًا ۚ وَهُوَ حَسِيرٌ (٣)

“Yang telah menciptakan tujuh langit berlapis-lapis. Kamu sekali-kali tidak melihat pada ciptaan Tuhan Yang Maha Pemurah sesuatu yang tidak seimbang. Maka lihatlah berulang-ulang, adakah kamu lihat sesuatu yang tidak seimbang?. Kemudian pandanglah sekali lagi niscaya penglihatanmu akan kembali kepadamu dengan tidak menemukan sesuatu cacat dan penglihatanmu itu pun dalam keadaan payah.” (QS. Al-Mulk/67: 3 -4).

Almaraghi menafsirkan bahwa lingkungan adalah segala sesuatu yang diciptakan Allah yang melingkupi kehidupan manusia, yakni langit, bumi, bulan, bintang, sesama manusia, binatang dan lain-lain. Semua itu diciptakan Allah menurut *sunnatullah* (hukum-hukum dan ketentuan Allah), untuk mengatur segala yang telah diciptakan-Nya. Karena semuanya itu diciptakan Allah dengan tujuan serta kesempurnaan, tanpa ada kecacatan sedikitpun (Al-Maraghi, 1993). Selain itu juga dijelaskan bahwa penciptaan langit dan bumi ini berdasarkan *haq* dan batas waktu yang ditentukan. Menurut Ibn ‘Asyur yang dimaksud *al-haq* di sini adalah “Apa yang mestinya menjadi hikmah dan tujuan penciptaan langit dan bumi”. Tidak mungkin semua ini diciptakan dalam keadaan sia-sia (Quraish, 2002).

Berdasarkan hikmah pada Qs. Al-Mulk:3-4 di atas, maka tugas manusia sebagai kholifah adalah menjaga agar lingkungan yang diciptakan oleh Allah tidak

rusak. Selanjutnya lingkungan yang memuat keseimbangan sistem ekologi menjadi urgen untuk di kaji. Ekologi merupakan cabang ilmu yang mempelajari hubungan timbal balik antara organisme dengan lingkungannya serta menganut prinsip keseimbangan semua komponen alam. Salah satu bahasan penting dalam ekologi yakni rantai makanan. Rantai makanan merupakan salah satu penentu dari sebuah keseimbangan ekosistem yang bergerak secara linear dari produsen ke konsumen teratas. Dalam model *predator-prey* Lotka Voltera, pertumbuhan produsen mengalami kenaikan secara eksponensial jika diasumsikan tidak adanya konsumen. Selanjutnya produsen di alam dapat dianggap sebagai *prey* dan konsumen sebagai *predator*. Di sisi lain, Jorgensen (2009) mengatakan bahwa dalam suatu rantai makanan minimal terdapat dua macam spesies yaitu spesies pemangsa (*predator*) sebagai konsumen dan spesies mangsa (*prey*) sebagai produsen.

Model mangsa memangsa Lotka Volterra selanjutnya dimodifikasi dengan menambahkan faktor lain, misalnya (1) tingkat kompetisi antara *predator* dan *prey* dan (2) campur tangan manusia. Dengan adanya *predator* dalam populasi, maka pertumbuhan *prey* menjadi terganggu. Walaupun di alam, *predator* tidak secara terus menerus memangsa *prey*. Artinya tingkat kematian *prey* di alam mengalami perlambatan/penundaan. Kejadian tertundanya kematian *prey* secara matematika diekspresikan sebagai fungsi waktu tunda. Ekspresi waktu tunda pada kompetisi *predator* dan *prey* ini pernah di teliti oleh Baretta dkk (1996) dan Ruan (2009). Ketika populasi predator tak terkendali, maka populasi *prey* lambat laun akan punah dan mengakibatkan ketersediaan makanan untuk *predator* menjadi habis. Sehingga *predator* tidak dapat hidup karena putusya rantai makanan. Hal yang demikian ini mengakibatkan kematian *predator* menjadi meningkat.

Berdasarkan hal ini, maka perlulah adanya campur tangan manusia yang berperan sebagai *biological control*. Yang dimaksud sebagai *biological control* adalah sebuah upaya/intervensi dalam mengendalikan jumlah *predator* serta menjaga ketersediaan *prey* di alam tidak sampai punah (Chen 2013). Artinya peran *biological control* tersebut mengatur agar pertumbuhan *predator* dan *prey* tetap proporsional. Selanjutnya manusia yang bertindak sebagai *biological control* disebut *predator migration*.

Penelitian sebelumnya yang berkaitan dengan paparan di atas dilakukan oleh Cheng (2003) yang menganalisis kompetisi dua *predator* dan satu *prey*. Dijelaskan bahwa Cheng (2003) membuat model suatu kontrol biologis alam di daratan dengan padi sebagai *prey*, belalang sebagai *predator* tingkat I, serta bebek dan ayam yang bertindak sebagai *predator migration*. *Predator migration* dalam penelitian Cheng (2003) menggunakan *predator* alami dari predator tingkat I. Selanjutnya, penelitian Cheng (2003) dikembangkan kembali oleh Chen dkk (2013) yang membuat model untuk kontrol biologis alam yang berlaku di perairan. Chen dkk (2013) menganalisis kompetisi dua *predator* dan satu *prey*. Kedua *predator* masing-masing didefinisikan sebagai *predator* tingkat I dan *predator migration*. Model yang digunakan pada penelitian Chen dkk (2013) ini bersifat non linier. Didefinisikan bahwa $u(t)$ adalah perubahan populasi biomasa *prey* terhadap waktu dan $v(t)$ perubahan populasi biomasa *predator* terhadap waktu.

Penelitian ini difokuskan pada analisis kompetisi antara dua *predator* dan satu *prey* secara dinamik seperti Saoda (2014). Model yang digunakan dalam penelitian ini merujuk pada Chen dkk (2013). Diasumsikan predator adalah manusia dan biomasa *predator*, sementara *prey* adalah biomasa *prey*. Biomasa

predator bertindak sebagai *predator* I dan manusia bertindak sebagai *predator migration*. *Predator migration* dalam penelitian ini adalah kontrol manusia dengan cara memanen *predator* dan menambahkan jumlah populasi *prey*. Dengan adanya campur tangan manusia ini diharapkan dalam lingkungan ekosistem tersebut banyaknya biomasa *predator* dan banyaknya biomasa *prey* dapat dikontrol jumlahnya. Fungsi waktu tunda ini adalah ekspresi untuk laju kematian oleh *prey*.

Simulasi yang dilakukan dalam penelitian ini adalah perubahan nilai-nilai awal untuk populasi biomasa *predator*, *predator migration*, dan populasi biomasa *prey*. Akan tetapi, perubahan nilai awal pada peran *predator migration* di sini justru yang menjadi sangat penting sekali, karena yang memegang peran *biological control* di sini adalah *predator migration*. Sehingga kestabilan yang diperoleh dari perubahan pada populasi biomasa *predator* dan biomasa *prey* dikendalikan oleh besarnya perubahan pada nilai *predator migration*. Maka kedalaman dari penelitian ini yaitu melihat sejauh mana kestabilan yang diperoleh dari adanya perubahan nilai-nilai awal tersebut hingga menuju titik stabil. Sehingga nantinya dapat disimpulkan bagaimana kondisi dari suatu populasi tersebut agar tetap seimbang.

Penelitian tentang kompetisi dua *predator* yang meliputi *predator* tingkat I dan *predator migration* terhadap *prey* banyak terjadi di sekitar kita. Hal ini berarti penelitian ini sangat penting untuk dikaji. Terutama teknologi tentang bagaimana mengontrol upaya kondisi alam di perairan untuk pemanenan *predator* oleh *predator migration* agar keseimbangan ekosistem menjadi terjaga.

Oleh karena itu berdasarkan paparan di atas, maka penelitian ini mengambil judul “Analisis Kestabilan Model *Predator-Prey* dengan *Predator Migration* dan Waktu Tunda”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, pokok permasalahan yang dibahas dalam skripsi ini sebagai berikut:

1. Bagaimana syarat kestabilan model Chen dkk (2013)?
2. Bagaimana simulasi dan analisis kondisi kestabilan ekosistem dengan adanya perubahan nilai-nilai awal pada populasi biomasa *predator*, *predator migration*, dan biomasa *prey*?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Mengetahui syarat kestabilan model Chen dkk (2013).
2. Mengetahui hasil simulasi dan analisis kondisi kestabilan ekosistem dengan adanya perubahan nilai-nilai awal pada populasi biomasa *predator*, *predator migration*, dan biomasa *prey*.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah:

1. Dapat mengetahui bagaimana stabilitas model dari *predator-prey* dengan adanya *predator migration* yang disertai dengan adanya waktu tunda.
2. Dapat mengetahui hasil simulasi dari adanya perubahan nilai awal pada populasi biomasa *predator*, *predator migration*, dan biomasa *prey* serta dapat melihat sejauh mana campur tangan dari peran manusia sebagai *predator migration* sehingga menjadi rujukan di bidang kontrol biologis suatu perairan yang dapat

menentukan banyaknya *predator* maupun *prey* sesuai dengan porsi lingkungannya.

1.5 Batasan Masalah

Dalam kasus ini batasan masalahnya yaitu:

1. Pada simulasinya dilakukan perubahan nilai-nilai awal populasi biomasa *predator*, *predator migration*, dan biomasa *prey*.
2. Analisis dinamik merujuk pada langkah-langkah Saoda (2014).
3. Analisis model dikerjakan secara kontinu.
4. Model yang digunakan adalah merujuk pada Chen dkk (2013) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &= u(t)(1 - av(t)), \\ \frac{dv(t)}{dt} &= v(t)(-d + bu(t - \tau) - v(t)) + m(u(t) - v(t)). \end{aligned} \quad (1.5.1)$$

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur. Langkah-langkah yang dilakukan untuk mencapai tujuan dari skripsi ini adalah merujuk pada Saoda (2014) sebagai berikut:

1. Menganalisis kestabilan model *predator-prey* dengan *predator migration* dan tundaan waktu, yaitu:
 - a) Menentukan titik tetap atau *fixed point*.
 - b) Melakukan proses linearisasi untuk mendapatkan matriks Jacobian.
 - c) Mensubstitusi nilai titik tetap pada matriks Jacobian.

- d) Menentukan nilai Eigen.
 - e) Menentukan kriteria kestabilan pada titik kesetimbangan.
 - f) Mengklasifikasikan syarat-syarat kestabilan model ke dalam bentuk tabel.
2. Mensimulasi model *predator-prey* dengan *predator migration* dan tundaan waktu, yaitu:
- a) Melakukan simulasi terhadap model *predator-prey* dengan *predator migration* dan tundaan waktu dengan adanya perubahan nilai awal populasi biomasa *predator*, *predator migration*, dan biomasa *prey*.
 - b) Menginterpretasi hasil simulasi terhadap model *predator-prey* dengan *predator migration* dan tundaan waktu dengan adanya perubahan nilai awal populasi biomasa *predator* dan biomasa *prey* serta melihat sejauh mana campur tangan manusia sebagai *predator migration*.
3. Kesimpulan

Kesimpulan dilakukan untuk mengetahui bagaimana hasil dari penelitian ini. yaitu dapat mengetahui bagaimana syarat dari model dengan adanya *predator migration* dan waktu tunda ini. juga untuk mengetahui bagaimana hasil simulasi terhadap model *predator-prey* dengan *predator migration* dan tundaan waktu dengan adanya perubahan nilai awal populasi biomasa *predator* dan biomasa *prey* serta melihat sejauh mana campur tangan manusia sebagai *predator migration*.

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam penelitian ini terdiri dari empat bab, masing-masing dibagi ke dalam subbab yaitu sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Bagian ini berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II KAJIAN PUSTAKA

Bagian ini berisi materi-materi yang menjadi landasan teori yang terkait dengan pembahasan skripsi. Teori-teori tersebut meliputi analisis model *predator-prey* dengan *predator migration* dan waktu tunda, sistem dinamik, sistem persamaan diferensial, nilai Eigen dan vektor Eigen, analisis kestabilan titik tetap, model logistik dengan perlambatan, penelitian terdahulu, dan kajian agama Islam tentang tugas manusia sebagai khalifah di bumi.

BAB III PEMBAHASAN

Bagian ini berisi penjelasan hasil dari permasalahan yang akan diteliti dalam skripsi serta solusi pemecahan masalah. Berisikan syarat-syarat kestabilan pada model Chen dkk (2013) dan simulasi dari adanya perubahan nilai-nilai awal pada populasi biomasa *predator* dan biomasa *prey*.

BAB IV PENUTUP

Bagian ini berisi kesimpulan dari isi skripsi dan memberikan saran bagi pembaca untuk melanjutkan penelitian ini.

BAB II

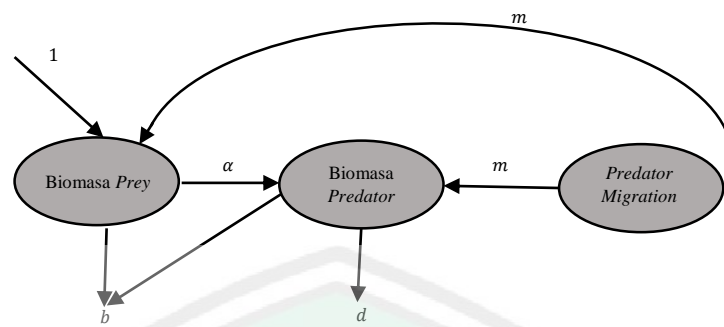
KAJIAN PUSTAKA

2.1 Analisis Model Predator-Prey dengan Predator Migration dan Waktu Tunda Chen (2013)

Model *Predator-Prey* merupakan salah satu model interaksi antar makhluk hidup dalam suatu ekosistem, dengan *prey* sebagai spesies yang dimangsa dan *predator* sebagai spesies yang memangsa. Model ini disebut sebagai model LotkaVolterra (Boyce & DiPrima, 1992). Asumsi dasar dari model *predator-prey* adalah setiap populasi mengalami pertumbuhan atau peluruhan secara eksponensial. Interaksi yang terjadi antara mangsa dan pemangsa akan mengakibatkan terjadinya proses makan dan dimakan yang berpengaruh terhadap kepadatan populasi masing-masing.

Pada skripsi ini penulis akan membahas tentang model *predator-prey* dengan *predator migration* dan waktu tunda yang melanjutkan penelitian dari Chen (2013). Dalam model tersebut terdapat interaksi antara populasi biomasa *predator* dengan populasi biomasa *prey*, karena adanya interaksi tersebut menyebabkan adanya predasi. Predasi merupakan salah satu bentuk interaksi yang berkaitan dengan pengontrolan populasi biomasa *predator* dan biomasa *prey*. Selain itu dalam model tersebut terdapat perlakuan *biological control*, yang mana dilakukan oleh *predator migration* dengan menambahkan jumlah populasi biomasa *prey* dan mengurangi jumlah biomasa *predator* dengan memanennya.

Berikut diberikan diagram model *predator-prey* dengan *predator migration* dan waktu tunda yaitu sebagai berikut:



Gambar. 2. 1 Mekanisme model *predator-prey* dengan *predator migration* dan waktu tunda (Chendkk, 2013).

Interaksi pada penelitian ini melibatkan spesies dari biomasa yang terdiri dari populasi biomasa *prey* dan populasi biomasa *predator*. Biomasa merupakan makhluk hidup yang berada dalam lingkungan perairan. Lingkungan perairan tersebut menimbulkan adanya proses memangsa dan dimangsa antara populasi biomasa *prey* dan populasi biomasa *predator*. Peningkatan jumlah populasi biomasa *prey* dipengaruhi oleh ada atau tidaknya interaksi dengan populasi biomasa *predator*. Ketika tidak terjadi interaksi dengan populasi biomasa *predator*, maka pertumbuhan populasi biomasa *prey* mengikuti model logistik. Pada Gambar 3.1 tersebut menunjukkan bahwa laju pertumbuhan biomasa *prey* sebesar 1, merupakan pertumbuhan biomasa *prey* secara alami. Adanya predasi antara biomasa *prey* dengan biomasa *predator* maka populasi biomasa *prey* berkurang sebesar a . Oleh karena itu, dapat diketahui bahwa populasi biomasa *prey* akan bertambah dengan laju sebagai berikut,

$$\frac{du(t)}{dt} = u(t)(1 - av(t)).$$

Populasi biomasa *prey* pada suatu lingkungan perairan dapat mempengaruhi jumlah pertumbuhan dari populasi biomasa *predator*. Ketika tidak terjadi interaksi

dengan populasi *prey*, maka populasi *predator* berkurang karena kelaparan sehingga menimbulkan kematian dengan tingkat kematian populasi biomasa *predator* tersebut sebesar d . Proses kematian tersebut dapat mengurangi jumlah populasi biomasa *predator* yang dideskripsikan sebagai berikut,

$$\frac{dv(t)}{dt} = -dv(t).$$

Oleh karena kematian yang dialami populasi biomasa *predator* utama di atas, maka hal tersebut menimbulkan adanya populasi biomasa *predator* yang baru. Populasi biomasa *predator* yang baru tersebut berasal dari populasi biomasa *prey* dengan waktu tunda sebesar τ . Proses munculnya populasi biomasa *predator* tersebut dapat meningkatkan jumlah populasi biomasa *predator* utama dengan laju sebesar b yang berarti populasi biomasa *prey* menjadi berkurang. Berdasarkan pernyataan tersebut maka dapat diketahui laju penambahan populasi biomasa *predator* yang diikuti dengan penurunan populasi biomasa *prey* utama sebagai berikut,

$$\frac{dv(t)}{dt} = v(t)(-d + bu(t - \tau)).$$

Oleh karena adanya faktor penurunan populasi biomasa *prey* di atas, maka populasi biomasa *predator* utama mengalami penurunan dua kali lipatnya setiap waktu yang dideskripsikan sebagai $-v(t)^2$. Setelah mengalami penurunan, maka untuk mengurangi kerugian tersebut dilakukan kontrol biologis oleh manusia atau *predator migration* yang diekspresikan dengan pemanenan terhadap *predator* utama dimana dengan laju $m(u(t) - v(t))$. Berdasarkan pernyataan di atas, maka dapat diketahui laju perubahan populasi biomasa *predator* utama sebagai berikut,

$$\frac{dv(t)}{dt} = v(t)(-d + bu(t - \tau) - v(t)) + m(u(t) - v(t)).$$

Dari penjabaran di atas, maka dapat dituliskan menjadi model matematika oleh Chen dkk (2013) sebagai berikut:

$$\frac{du(t)}{dt} = u(t)(1 - av(t)), \quad (2.1)$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = v(t)(-d + bu(t - \tau) - v(t)) + m(u(t) - v(t)).$$

dengan keterangan dalam satuan sebagai berikut:

Tabel 2. 1 Keterangan Model

Parameter	Keterangan	Satuan
$u(t)$	Banyaknya populasi biomasa <i>prey</i> terhadap waktu	Biomasa/bulan
$v(t)$	Banyaknya populasi biomasa <i>predator</i> terhadap waktu	Biomasa/bulan
a	Besar kematian populasi biomasa <i>prey</i> akibat interaksi dengan biomasa <i>predator</i>	Biomasa/bulan
d	Besar kematian alami populasi biomasa <i>predator</i>	Biomasa/bulan
b	Besar tundaan waktu	-
$u(t - \tau)$	Tundaan waktu kematian populasi biomasa <i>prey</i>	-
m	Besar campur tangan <i>predator migration</i>	Jiwa/bulan

Parameter yang dipakai dalam model *predator-prey* dengan *predator migration* ini menggunakan parameter dari penelitian Chen dkk (2013), yaitu:

Tabel 2. 2 Nilai Parameter untuk Model

Parameter	Nilai
<i>a</i>	4
<i>d</i>	0.5
<i>b</i>	2

Menurut Finizio dan Lada (1998:304), model *predator-prey* merupakan sistem persamaan nonlinier dan tidak ada cara yang diketahui untuk menyelesaikan secara eksplisit, meskipun demikian dimungkinkan dengan menggunakan teori kualitatif mengenai sistem semacam itu. Menurut Waluya (2006:174), terdapat dua kunci konsep dalam sistem nonlinier yang menentukan semua hasil dinamik. Dua konsep tersebut adalah titik keseimbangan (titik *equilibrium*) dan kestabilan.

Menurut Dwaradi (2011:4), model *Lotka-Volterra* layak digunakan jika interaksi yang terjadi hanya intraspecies. Intraspecies dapat diartikan interaksi yang terjadi antara spesies satu dengan spesies yang lain. Model ini tidak layak dapat digunakan dalam kehidupan nyata dengan tidak terbatasnya kapasitas mangsa. Jika model ini terdapat keterbatasan kapasitasnya, maka model ini tidak layak dapat digunakan. Pada penelitian ini akan digunakan model *Lotka-Volterra* yaitu model *predator-prey* dengan adanya perlakuan pemanenan pada populasi *prey*.

2.2 Sistem dinamik

Secara umum sistem dinamik didefinisikan sebagai sebuah masalah nyata yang dimodelkan secara matematis dengan menggunakan persamaan-persamaan diferensial di mana dalam persamaannya mengandung parameter-parameter yang saling berhubungan, serta perubahan parameter pada persamaan tersebut akan menyebabkan perubahan kestabilan dari titik ekuilibrium.

Titik ekuilibrium merupakan salah satu kunci konsep dalam sistem dinamik. Sistem yang lebih umum dapat dinyatakan dalam bentuk berikut.

$$\begin{aligned}x_1' &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \\x_2' &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \\&\vdots \\x_n' &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t)\end{aligned}\quad (2.2.1)$$

dengan $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t), i = 1, 2, \dots, n$ adalah suatu fungsi umum dari $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ dan waktu t . Sistem tersebut dapat disederhanakan lagi menjadi sistem fungsi yang tak bergantung dengan waktu (sistem *autonomous*) seperti bentuk berikut.

$$\begin{aligned}x_1' &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\x_2' &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\&\vdots \\x_n' &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}\quad (2.2.2)$$

dengan $f_i, i = 1, 2, \dots, n$ adalah fungsi yang tak tergantung secara *explicit* dari waktu t . Kemudian sistem tersebut dianalisis dengan memikirkan konsep

tentang ekuilibrium. Ekuilibrium akan terjadi apabila tidak ada gerakan dalam sistem tersebut, artinya $x'_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Titik ekuilibrium akan memenuhi

$$\begin{aligned} f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) &= 0, \\ f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) &= 0, \\ &\vdots \\ f_n(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) &= 0, \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Karena $x'_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Berikut definisi titik ekuilibrium dari sistem (2.2.2).

Definisi 2.1 (Titik Ekuilibrium):

Titik $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \in R^n$ disebut titik ekuilibrium dari sistem (2.2.2) jika $f_i(\bar{x}) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ (Perko, 1991).

Definisi 2.2 (Kestabilan Lokal):

Titik ekuilibrium $\bar{x} \in R^n$ pada sistem (2.1.2) dikatakan

1. Stabil lokal jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap solusi $x(t)$ yang memenuhi $\|x(t_0) - \bar{x}\| < \delta$ berlaku $\|x(t) - \bar{x}\| < \varepsilon$ untuk setiap $t \geq t_0$
2. Stabil asimtotik lokal jika titik ekuilibrium $\bar{x} \in R^n$ stabil dan terdapat $a_0 > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap solusi $x(t)$ yang memenuhi $\|x(t_0) - \bar{x}\| < a_0$ berlaku $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x}$.
3. Tidak stabil jika titik ekuilibrium $\bar{x} \in R^n$ tidak memenuhi 1.

(Wiggins, 1990).

2.3 Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial merupakan sistem persamaan yang melibatkan turunan satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas. Berikut ini akan diberikan vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ dengan $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ dan $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$. Apabila notasi $\dot{\mathbf{x}} = \frac{dx}{dt}$ digunakan untuk menyatakan turunan \mathbf{x} terhadap t maka dapat diperoleh,

$$\dot{\mathbf{x}} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt} \right)^T.$$

Selanjutnya diberikan sistem *autonomous* sebagai berikut ini:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (2.1)$$

Sistem *autonomous* merupakan sistem persamaan diferensial dengan variabel bebas yang implisit dengan $\mathbf{x} \in L \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f}: L \rightarrow \mathbb{R}^n$, L adalah himpunan terbuka dan $\mathbf{f} \in C^1(L)$ dengan C^1 adalah notasi untuk himpunan semua fungsi yang mempunyai turunan pertama yang kontinu di L . Berdasarkan paparan tersebut, maka sistem persamaan (2.1) dapat ditulis menjadi berikut ini:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \end{bmatrix}$$

atau

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\frac{dx_n}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

2.3.1 Sistem Persamaan Diferensial Linear

Sistem persamaan diferensial linear orde satu dengan variabel tak bebas x_1, x_2, \dots, x_n dan variabel bebas t dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + g_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + g_2(t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + g_n(t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Jika g_i , $i = 1, 2, \dots, n$ bernilai nol, maka sistem persamaan (2.2) disebut sebagai sistem persamaan diferensial linear homogen, sedangkan jika bernilai tak nol maka sistem persamaan (2.2) disebut sistem persamaan diferensial linear nonhomogen. Sistem persamaan diferensial pada (2.2) selanjutnya dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{G}(t) \quad (2.3)$$

dengan \mathbf{A} adalah matriks $n \times n$ yang merupakan matriks koefisien dari variabel tak bebas $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dengan $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$ serta $j = 1, 2, \dots, n$ dan $\mathbf{G}(t)$ adalah matriks berukuran $n \times 1$ yang merupakan fungsi t . Oleh karena itu, persamaan (2.3) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{bmatrix}$$

Contoh 2.2

Berikut ini diberikan sistem persamaan diferensial linear:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x_1 - 2x_2 \\ \frac{dy}{dt} &= x_1 + x_2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Sistem persamaan diferensial (2.4) di atas merupakan persamaan diferensial linear homogen.

2.3.2 Sistem Persamaan Diferensial Nonlinear

Sistem persamaan diferensial nonlinear merupakan sistem persamaan diferensial biasa yang tak linear. Persamaan diferensial disebut nonlinear jika persamaan tersebut memenuhi salah satu kriteria berikut ini (Ross, 1984):

- (1) Memuat variabel tak bebas dari turunannya yang berpangkat selain satu.
- (2) Terdapat perkalian dari variabel tak bebas dan/atau turunannya.
- (3) Terdapat fungsi transendental dari variabel tak bebas dan turunannya.

Contoh 2.3

Berikut ini diberikan sistem persamaan diferensial nonlinear:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x_1 x_2 - x_2 \\ \frac{dy}{dt} &= x_1^2 + x_2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Sistem persamaan (2.5) merupakan sistem persamaan diferensial nonlinear dengan variabel bebas t dan variabel tak bebas x_1 serta x_2 . Hal tersebut dikarenakan sistem

persamaan diferensial pada persamaan (2.5) di atas terdapat perkalian antara variabel tak bebas x_1 dan x_2 untuk persamaan pertama, dan untuk persamaan kedua terdapat kuadrat dari variabel tak bebas x_1 .

2.3.3 Sistem Persamaan Diferensial Tundaan

Menurut Kuang (1993), persamaan diferensial dengan tundaan dinyatakan dalam bentuk

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k}{dt^k} x(t) + \sum_{k=0}^m b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t - \tau) = 0. \quad (2.3a)$$

parameter τ adalah waktu tunda. Misalkan $x(t) = e^{\lambda t}$, maka persamaan (2.3a) dapat juga ditulis sebagai berikut

$$\sum_{k=0}^n a_k \lambda^k e^{\lambda t} + \sum_{k=0}^m b_k \lambda^k e^{\lambda(t-\tau)} = 0,$$

$$e^{\lambda t} \left(\sum_{k=0}^n a_k \lambda^k + \sum_{k=0}^m b_k \lambda^k e^{-\lambda \tau} \right) = 0.$$

karena $e^{\lambda t} \neq 0$, sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut

$$\left(\sum_{k=0}^n a_k \lambda^k + \sum_{k=0}^m b_k \lambda^k e^{-\lambda \tau} \right) = 0. \quad (2.3b)$$

Persamaan (2.3b) disebut persamaan karakteristik dari persamaan (2.3a).

misalkan

$$p_1(\lambda) = \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k \quad \text{dan} \quad p_2(\lambda) = \sum_{k=0}^m b_k \lambda^k,$$

maka persamaan (2.3b) dapat ditulis kembali sebagai

$$p_1(\lambda) + p_2(\lambda)e^{-\lambda\tau} = 0. \quad (2.7)$$

sistem persamaan diferensial dengan waktu tunda dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x(t), x(t - \tau)), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x(t), x(t - \tau)), \quad (2.8) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x(t), x(t - \tau)). \end{aligned}$$

(Kuang, 1993).

2.4 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Secara formal definisi nilai Eigen dan vektor Eigen adalah sebagai berikut.

Definisi 2.6

Misalkan A matrik $n \times n$ dan $x \in R^n, x \neq 0$. Vektor x disebut vektor Eigen/ vektor karakteristik dari A jika

$$Ax = \lambda x$$

untuk suatu $\lambda \in R$. Bilangan λ yang memenuhi persamaan di atas disebut nilai Eigen / nilai karakteristik. Vektor x disebut vektor Eigen yang bersesuaian dengan λ .

Untuk mencari nilai dan vektor Eigen dari suatu matrik A berordo $n \times n$ adalah sebagai berikut:

Misalkan A matrik $n \times n$ dan $v \in R^n, v \neq 0$ merupakan vektor Eigen dari matrik A , maka ada $\lambda \in R \ni$

$$Av = \lambda v$$

$$Av = \lambda Iv$$

$$(\lambda I - A)v = 0$$

Tampak bahwa merupakan penyelesaian dari sistem persamaan linear (SPL) homogen $(\lambda I - A)x = 0$. Karena $v \neq 0$, maka sistem persamaan homogen $(\lambda I - A)v = 0$ mempunyai penyelesaian non trivial. Ini hanya mungkin jika $\det(\lambda I - A) = 0$, artinya λ adalah penyelesaian persamaan dari $\det(\lambda I - A) = 0$. $\det(\lambda I - A) = 0$ ini disebut persamaan karakteristik dari matrik A .

Lemma: λ

Misalkan A matriks $n \times n$. $\lambda \in R$ adalah nilai Eigen dari matriks A jika dan hanya jika λ adalah akar persamaan karakteristik $\det(\lambda I - A) = 0$. Sedangkan vektor Eigen dari matriks A yang bersesuaian dengan λ adalah penyelesaian dari SPL homogen $(\lambda I - A)v = 0$.

(Anton & Rorres, 2014)

2.5 Analisis Kestabilan Titik Tetap

Perhatikan sistem linier ini, $\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dengan a, b, c dan d

konstan.

Catatan:

Sistem linier biasa disebut “model data spesies” dalam *population dynamics*.

Jika matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dan λ nilai eigen A , maka

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Persamaan karakteristik,

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ & \Leftrightarrow \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0 \\ & \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{a + d \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}}{2} \\ & = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \text{ dimana } \begin{cases} p = a + d \\ q = ad - bc \end{cases} \end{aligned}$$

Stabilitas sistem linier dapat diterangkan sebagai berikut.

1. $\lambda_{1,2}$ real dan berbeda jika $\Delta = p^2 - 4q > 0$:
 - a. $\lambda_{1,2}$ sama tanda jika $q > 0$:
 - i. $\lambda_{1,2}$ semua positif jika $p > 0 \rightarrow$ tidak stabil.
 - ii. $\lambda_{1,2}$ semua negatif jika $p < 0 \rightarrow$ stabil.
 - b. $\lambda_{1,2}$ beda tanda jika $q < 0 \rightarrow$ tidak stabil.
 - c. Salah satu dari $\lambda_{1,2}$ nol, jika $q = 0$:
 - i. Akar lainnya positif jika $p > 0 \rightarrow$ tidak stabil.
 - ii. Akar lainnya negatif jika $p < 0 \rightarrow$ stabil.
2. $\lambda_{1,2}$ real dan sama bila $\Delta = 0$:
 - a. $\lambda_{1,2}$ sama randa:
 - i. Keduanya positif bila $p > 0 \rightarrow$ tidak stabil.

- ii. Keduanya negatif bila $p < 0 \rightarrow$ stabil.
 - b. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, bila $p = 0 \rightarrow$ tidak stabil.
3. $\lambda_{1,2}$ kompleks bila $\Delta < 0$:
- a. $R_e(\lambda_{1,2})$ sama tanda:
 - i. $R_e(\lambda_{1,2})$ semua positif bila $p > 0 \rightarrow$ tidak stabil.
 - ii. $R_e(\lambda_{1,2})$ semua positif bila $p < 0 \rightarrow$ stabil.
 - b. $R_e(\lambda_{1,2})$ bila $p = 0 \rightarrow$ stabil netral.

(Boyce & DiPrima, 2001).

2.6 Model Logistik dengan Perlambatan

model logistik tunggal dengan perlambatan adalah

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t) \left(1 - \frac{x(t-\tau)}{K} \right), \quad (2.6.1)$$

Dimana τ adalah sebuah waktu perlambatan dan dianggap positif. Suatu titik ekuilibrium positif dari model ini adalah K . Hal ini diusulkan oleh Hutchinson di Gopalsamy, model (2.6.1) tersebut bisa digunakan pada model pertumbuhan populasi jenis dinamik tunggal terhadap ketahanan level K , dengan sebuah konstanta laju pertumbuhan intrinsik r . Bentuk $\left(1 - \frac{x(t-\tau)}{K} \right)$ pada model (2.6.1) merupakan sebuah kepadatan tergantung pada mekanisme pengaruh arus balik yang mengambil τ satuan waktu untuk menanggapi perubahan pada kepadatan populasi diwakili pada model (2.6.1) dikenal sebagai persamaan perlambatan Verhulst atau persamaan Hutchinson. Persamaan Hutchinson telah dipelajari di beberapa jurnal dan buku.

Selanjutnya akan dianalisis stabilitas lokal dari titik ekuilibrium. Untuk menganalisis, digunakan sebuah metode standar yaitu metode linearisasi, digunakan sebuah metode standar yaitu metode linierisasi di sekitar titik ekuilibrium. Misalkan $u(t) = x(t) - K$, maka $\frac{du(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}$. Mensubstitusi $x(t) = u(t) + K$ ke dalam persamaan (2.6.1) untuk memperoleh

$$\frac{du(t)}{dt} = r(u(t) + K) \left(1 - \frac{u(t - \tau) + K}{K} \right)$$

$$\frac{du(t)}{dt} = -\frac{r}{K} u(t)u(t - \tau) - ru(t - \tau).$$

Karena $x(t)$ tertutup untuk K , $u(t)u(t - \tau)$ dapat dihilangkan. Selanjutnya didapatkan suatu model linier

$$\frac{du(t)}{dt} = -ru(t - \tau) \quad (2.6.3)$$

Untuk memahami stabilitas titik ekuilibrium nol dari model (2.6.3) dipertimbangkan persamaan karakteristik pada model (2.6.3). pensubstitusian pada fungsi tes $x(t) = e^{\lambda t}$ ke dalam model (2.6.3) menghasilkan persamaan karakteristik

$$\lambda e^{\lambda \tau} = -r e^{\lambda(t-\tau)}$$

karena $e^{\lambda \tau} \neq 0$, maka

$$\lambda + r e^{-\lambda \tau} = 0 \quad (2.6.4)$$

Lemma 1 Misalkan $r > 0$ dan $\tau > 0$ jika $r \leq \frac{1}{re}$ maka persamaan (2.6.4) memiliki akar-akar persamaan karakteristik negatif

Bukti Misalkan $F(\lambda) = \lambda + r e^{-\lambda \tau}$. Dengan catatan bahwa λ bukan bilangan riil nonnegatif. Akan dibuktikan bahwa akar-akar dari $F(\lambda)$ adalah bukan bilangan kompleks. Karena $F(\lambda) = \lambda + r e^{-\lambda \tau}$ maka $F(\lambda) = I - r t e^{-\lambda \tau}$ dan $\lambda_* =$

$\frac{1}{\tau} \ln(r\tau)$ adalah titik kritik dari $F(\lambda)$. Oleh karena itu, $F''(\lambda) = r\tau^2 e^{-\lambda\tau}$ yang positif. Ini berarti bahwa nilai dari titik kritis memberikan nilai minimum untuk $F(\lambda)$. Selanjutnya karena $F(\lambda_*) = \frac{1}{\tau} (\ln(r\tau) + 1)$ yang sama dengan nol jika $r\tau = \frac{1}{e}$ atau $(\tau = \frac{1}{re})$, dan kurang dari nol jika $\tau < \frac{1}{re}$ maka persamaan (2.6.4) hanya memiliki satu akar, yaitu $\tau = \frac{1}{re}$, dan jika $\lambda = \frac{1}{\tau} \ln(r\tau)$ persamaan (2.6.4) memiliki dua akar riil negatif.

Jika $F(\lambda) > 0$, yaitu $r\tau > \frac{1}{e}$, ini mengakibatkan bahwa tidak ada akar riil dari persamaan karakteristik (2.6.4). Kondisi persamaan karakteristik ini mempunyai akar kompleks konjugat. Jika dimisalkan $\lambda = \rho + i\omega, \rho \in \mathbb{R}, \omega \in [0, \infty)$, sebagai sebuah akar dari (2.6.4), maka

$$\rho + i\omega = -re^{-(\rho+i\omega)\tau} = -re^{-\rho\tau}(\cos(\omega\tau) - i\sin(\omega\tau)),$$

maka didapatkan dua persamaandengan bagian riil dan bagian imajineranya:

$$\rho = -re^{-\rho\tau} \cos(\omega\tau), \quad (2.6.5a)$$

$$\omega = re^{-\rho\tau} \sin(\omega\tau), \quad (2.6.5b)$$

(Syamsuddin, 2006:3.7).

2.7 Penelitian Terdahulu

Chen dkk (2013) menganalisis kompetisi dua *predator* dan satu *prey*. Kedua *predator* masing-masing didefinisikan sebagai *predator* tingkat I dan *predator migration*. Model yang digunakan pada penelitian Chen dkk (2013) ini bersifat non linier. Metode penyelesaiannya yaitu analisis dinamik dengan membahas eksistensi ekulibrium dari kestabilan linier, stabilitas bifurkasi *Hopf*, dan simulasi numerik model. Dari penelitian tersebut kemudian menghasilkan model yang sesuai untuk

kontrol biologis suatu populasi yang difokuskan adanya efek dari *predator migration* dan waktu tunda.

Hasil model yang telah dibuat Chen dkk (2013) ini merujuk pada model yang sebelumnya dibuat oleh Cheng, yang mana Cheng tersebut membuat model suatu kontrol biologis alam di daratan yang melibatkan *predator* tingkat I belalang dan *prey* padi dimana *predator migration* yang diberikan adalah musuh alami dari *predator* itu sendiri yaitu ayam dan bebek.

Saoda (2014) menganalisis kestabilan model *predator-prey* Hutchinson dengan waktu tunda dan pemanenan konstan. model *predator-prey* Hutchinson adalah model dalam *prey* yang logistiknya terdapat waktu tunda. Fungsi pemanenan konstan dilakukan oleh *predator migration* dan waktu tunda, kematian *prey* dilakukan oleh *predator* tingkat I. Metode Saoda (2014) yaitu analisis dinamik yang mengkaji analisis kestabilan model mangsa-pemangsa dengan dan tanpa waktu tunda serta pemanenan konstan. Pemanenan dengan upaya konstan ditunjukkan bahwa tangkapan dengan kuota konstan dapat mengakibatkan osilasi serta menaikkan resiko eksploitasi berlebihan. Sehingga untuk mengoptimalkannya menggunakan metode eksploitasi untuk menangani titik kesetimbangan yang tidak stabil. Didapat kesimpulan bahwa untuk waktu tunda ini mempengaruhi masa sebelum kelahiran populasi mangsa sehingga akan mengalami perubahan kestabilan dari stabil ke tidak stabil. Maka semakin besar nilai waktu tunda mengakibatkan munculnya *limit cycle* sehingga model akan terjadi bifurkasi *Hopf*.

Saoda (2014) menggunakan metode analisis dinamik, dimana untuk menganalisis modelnya dilakukan dua hal. Pertama analisis tanpa waktu tunda dan

kedua analisis dengan waktu tunda. Analisis model dengan waktu tunda ini dilakukan penentuan nilai Eigen dengan cara menggunakan analisis kestabilan. Berdasarkan nilai Eigen yang diperoleh Saoda (2014) dapat mengklasifikasikan kondisi-kondisi kestabilan titik tetap yang diperoleh dalam bentuk tabel. Sehingga metode ini cocok digunakan untuk analisis pada masalah penelitian ini. Simulasi yang diberikan juga dijelaskan bagaimana adanya diberikan nilai awal dari suatu model dengan waktu tunda yang dilakukan pemanenan secara konstan. Ke dalam dari penelitian ini yaitu dilakukan analisis terhadap kestabilan permasalahan persaingan dua *predator* dan satu *prey* serta simulasi dari adanya perubahan nilai awal. Maka tepat jika penelitian ini merujuk pada Saoda (2014).

2.8 Tugas Manusia Sebagai Khalifah di Bumi

Tugas manusia sebagai khalifah Allah di muka bumi antara lain menyangkut tugas mewujudkan kemakmuran di muka bumi serta mewujudkan keselamatan dan kebahagiaan hidup di muka bumi. Allah Swt Berfirman pada Q.S Hud/11:61 sebagai berikut:

وَإِلَىٰ تَمُودَ أَخَاهُمْ صَالِحًا قَالَ يَا قَوْمِ اعْبُدُوا اللَّهَ مَا لَكُمْ مِن إِلَهٍ غَيْرُهُ هُوَ أَنشَأَكُم مِّنَ الْأَرْضِ وَاسْتَعْمَرَكُمْ فِيهَا فَاسْتَغْفِرُوهُ ثُمَّ تَوَبُوا إِلَيْهِ إِنَّ رَبِّي قَرِيبٌ مُّجِيبٌ (٦١)

“Dan kepada Tsamud (Kami utus) saudara mereka Shaleh. Shaleh berkata: `Hai kaumku, sembahlah Allah, sekali-kali tidak ada bagimu Tuhan selain Dia. Dia telah menciptakan kamu dari bumi (tanah) dan menjadikan kamu pemakmurnya, karena itu mohonlah ampunan-Nya, kemudian bertaubatlah kepada-Nya. Sesungguhnya Tuhanku amat dekat (rahmat-Nya) lagi memperkenankan (doa hamba-Nya)” (QS. Hud/11:61).

Maksud dari ayat ini, manusia yang dipercaya oleh Allah sebagai khalifah itu bertugas memakmurkan atau membangun bumi ini sesuai dengan konsep yang

ditetapkan oleh yang menugaskan (Allah). Atas dasar ini dapat dikatakan bahwa tujuan pendidikan dalam Al-Qur'an adalah membina manusia secara pribadi dan kelompok sehingga mampu menjalankan fungsinya sebagai hamba Allah dan khalifah-Nya guna membangun dunia ini sesuai dengan konsep yang ditetapkan oleh Allah.

Maksud dari manusia sebagai pemakmur bumi adalah karena manusia itu diciptakan dari tanah yang diambil dari bumi, maka sepatutnya manusia yang bahan utamanya adalah tanah untuk menjaga dan memakmurkannya, sebagai tanda penghargaan atas asal-usul penciptaan mereka. Dengan kekuasaan yang diberikan kepadanya, manusia harus mampu menjaga amanah yang diberikan Allah kepada mereka dalam hal-hal yang menyebabkan bumi itu tetap terjaga dan makmur.

Sebaliknya, jika manusia itu dengan kekuasaannya merusak dan menyalahgunakan kekuasaan yang diamanahkan kepadanya, maka secara tidak langsung manusia itu telah menghina asal-usul dari mana mereka diciptakan (tanah). Allah Swt memperhatikan eksistensi manusia di muka bumi, setelah memperoleh cukup pengetahuan maka Allah SWT menempatkan manusia sebagai eksistensi yang kreatif, sebagaimana termaktub dalam surat Hud ayat 61 *“Dan Dia yang menciptakan kamu dari bumi (tanah) dan menugaskan kamu untuk memakmurkan.”*

Atas dasar surat Hud 61 ini, Quraish Shihab (2007) menyatakan bahwa tujuan pendidikan adalah membina manusia secara pribadi dan kelompok sehingga mampu menjalankan fungsinya sebagai hamba Allah dan khalifah-Nya, guna membangun dunia ini sesuai dengan konsep yang ditetapkan Allah. Manusia yang dibina adalah makhluk yang memiliki unsur-unsur material (jasmani) dan

immaterial (akal dan jiwa). Pembinaan akalnya menghasilkan ilmu. Pembinaan jiwanya menghasilkan kesucian dan etika, sedangkan pembinaan jasmaninya menghasilkan keterampilan. Dengan penggabungan unsur-unsur tersebut, terciptalah mahluk dwidimensi dalam satu keseimbangan, dunia dan akhirat, ilmu dan iman. Dasar pemikiran di atas tentu saja menuntut umat manusia untuk menempatkan aspek penguasaan ilmu pengetahuan menjadi penting.

Menurut Musa Asy'arie, tugas kekhalifahan yang diemban karena manusia dipandang mempunyai kemampuan konseptual dengan watak keharusan eksperimen berkesinambungan sampai menunjukkan kemakmuran dan kesejahteraan hidup di muka bumi Asy'arie (1992). Dalam hal ini, Syahminan Zaini (1984), menyatakan bahwa sebagai khalifah dan hamba Allah, manusia berkewajiban mensyukuri segala nikmat itu dengan kehendak Sang Pemberi Nikmat, yakni dengan berupaya kreatif, memakmurkan bumi, dan membudidayakan alam.

Tugas manusia ini pada dasarnya secara implisit menggambarkan pandangan Islam yang memandang manusia dengan pandangan yang positif dan konstruktif Tobroni (1994). Dalam Islam, manusia tidak hanya ditempatkan sebagai bagian sistematis dari realitas alam, lebih jauh Islam menuntut peran kreatif manusia untuk mengelola alam sebagai sumber daya material (*material resource*) sebagai pengejawantahan tugas kemanusiaannya di muka bumi.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Syarat Kestabilan Model *Predator-Prey*

Pada subbab ini model *predator-prey* yang akan di bahas adalah model Chen (2013) yaitu model *predator-prey* dengan *predator migration* dan waktu tunda yang dapat di tuliskan kembali seperti berikut:

$$\begin{aligned}\frac{du(t)}{dt} &= u(t)(1 - av(t)), \\ \frac{dv(t)}{dt} &= v(t)(-d + bu(t - \tau) - v(t)) + m(u(t) - v(t)).\end{aligned}\tag{3.1}$$

Fokus pada pembahasan ini yaitu menentukan syarat kestabilan dari model *predator-prey* dengan *predator migration* dan waktu tunda ke dalam bentuk tabel sehingga dapat melakukan simulasi sesuai dengan syarat yang telah di dapatkan. Selanjutnya, simulasi yang di lakukan adalah simulasi untuk perubahan nilai awal suatu populasi yang mana dapat mengarah pada seberapa banyak peran *predator migration* sehingga kesetimbangan pada populasi tersebut tetap proporsional.

Model Chen (2013) ini terbagi menjadi satu *prey* dan dua *predator*, yaitu predator tingkat I dan *predator migration*. Populasi *predator* tingkat I dalam kasus ini adalah biomasa *predator* dan *predator migration* merupakan manusia yang berperan sebagai *biological control*, sedangkan populasi *prey* adalah biomasa *prey*. Tahapan yang di lakukan dalam penelitian ini adalah penentuan kestabilan model dan simulasi. Dalam menentukan kestabilan akan di cari nilai dari titik tetapnya, kemudia melakukan linearisasi model untuk mendapatkan matrik Jacobian dan analisis kestabilan untuk mendapatkan titik kesetimbangan. Untuk simulasi

dilakukan dua hal, simulasi untuk nilai awal ketika di asumsikan banyaknya populasi *prey* lebih dari banyaknya populasi *predator* dan untuk simulasi kedua nilai awal ketika banyaknya populasi *predator* lebih dari banyaknya populasi *prey*. Pada pembahasan ini akan di bagi menjadi dua kajian, yaitu model tanpa waktu tunda dan model dengan waktu tunda.

3.1.1 Model tanpa waktu tunda ($\tau = 0$)

1) Penentuan titik tetap model *predator-prey*

Menurut definisi 2.1, titik kesetimbangan sistem (3.1) diperoleh ketika

$$\frac{du(t)}{dt} = u(t)(1 - av(t)) = 0, \quad (3.2a)$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = v(t)(-d + bu(t - \tau) - v(t)) + m(u(t) - v(t)) = 0. \quad (3.2b)$$

Dari persamaan (3.2a) tersebut didefinisikan $\frac{du(t)}{dt} = 0$ maka persamaan tersebut menjadi:

$$u(t)(1 - av(t)) = 0$$

$$u(t) = 0 \quad \text{atau} \quad 1 - av(t) = 0. \quad (3.2c)$$

Selanjutnya dari persamaan (3.2b) didefinisikan $\frac{dv(t)}{dt} = 0$ dengan $u(t) = 0$ yang sesuai persamaan (3.2c), maka persamaan tersebut menjadi:

$$v(t)(-d - bu(t) - v(t)) + m(u(t) - v(t)) = 0$$

$$-v(t)d - v(t)^2 - v(t)m = 0$$

$$v(t)(-d - v(t) - m) = 0$$

$$v(t) = 0 \quad \text{atau} \quad -d - v(t) - m = 0$$

$$v(t) = -d - m$$

$$v(t) = -(m + d)$$

Maka didapatkan titik kesetimbangan pertama $O = (0,0)$ yang selalu eksis dan titik kesetimbangan kedua $E_0 = (0, -(m + d))$.

Untuk yang selanjutnya $u(t) \neq 0$, maka:
 $1 - av(t) = 0$

maka persamaannya menjadi:

$$\begin{aligned} 1 - av(t) &= 0 \\ av(t) &= 1 \\ v(t) &= \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

Kemudian untuk $v(t) = \frac{1}{a}$, maka persamaan (3.2b) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \left(-d + bu(t) - \frac{1}{a} \right) + m \left(u(t) - \frac{1}{a} \right) &= 0 \\ -\frac{1}{a}d + \frac{1}{a}bu(t) - \left(\frac{1}{a} \right)^2 + mu(t) - \frac{m}{a} &= 0 \\ u(t) \left(\frac{1}{a}b + m \right) &= \frac{m}{a} + \left(\frac{1}{a} \right)^2 + \frac{1}{a}d \\ u(t) &= \frac{\frac{m}{a} + \left(\frac{1}{a} \right)^2 + \frac{1}{a}d}{\frac{1}{a}b + m} \\ &= \frac{\frac{am + 1 + ad}{a^2}}{\frac{b + am}{a}} \\ &= \frac{am + 1 + ad}{a^2} \times \frac{a}{b + am} \\ &= \frac{1 + a(m + d)}{a(am + b)} \end{aligned}$$

maka didapatkan titik tetap berikutnya $E^* = \left(\frac{1+a(m+d)}{a(am+b)}, \frac{1}{a} \right)$.

Maka pada titik kesetimbangan ini, didapatkan hasil titik tetap pertama $O = (0,0)$, titik tetap kedua $E_0 = (0, -(m+d))$, dan titik tetap ketiga $E^* = \left(\frac{1+a(m+d)}{a(am+b)}, \frac{1}{a} \right)$. Setelah didapatkan titik kesetimbangan kemudian akan dianalisis kestabilannya.

2) Linearisasi Model

Linearisasi merupakan salah satu metode yang digunakan untuk mentransformasi persamaan diferensial nonlinier menjadi persamaan diferensial

linier dengan melakukan ekspansi deret Taylor dan menghilangkan suku nonlinier di persekitaran titik kesetimbangan. Dari persamaan (3.1) dimisalkan sebagai berikut:

$$f(u, v) = u(t)(1 - av(t))$$

$$g(u, v) = v(t)(-d + bu(t - \tau) - v(t)) + m(u(t) - v(t))$$

sehingga persamaan (3.1) menjadi:

$$\dot{u}(t) = f(u, v)$$

$$\dot{v}(t) = g(u, v).$$

Maka akan dilakukan linierisasi dengan menggunakan ekspansi deret Taylor sebagai berikut:

1. Proses linierisasi di sekitar (u^*, v^*) untuk titik tetap pertama $O = (0,0)$

sebagai berikut:

$$f(u, v) \approx f(u^*, v^*) + f_u(u^*, v^*)(u - u^*) + f_v(u^*, v^*)(v - v^*)$$

$$g(u, v) \approx g(u^*, v^*) + g_u(u^*, v^*)(u - u^*) + g_v(u^*, v^*)(v - v^*) \quad (3.3a)$$

dimana:

$$f(u, v) = u(1 - av) \quad g(u, v) = v(-d + bu - v) + m(u - v)$$

$$f_u(u, v) = 1 - av \quad g_u(u, v) = bv + m$$

$$f_v(u, v) = -au \quad g_v(u, v) = -d + bu - 2v - m$$

Maka persamaan (3.3a) dengan mensubstitusikan titik tetapnya menjadi:

$$f(u, v) \approx f(u^*, v^*) + f_u(u^*, v^*)(u - u^*) + f_v(u^*, v^*)(v - v^*)$$

$$f(u, v) = (0) + (1)(u - 0) + (0)(v - 0)$$

$$= u$$

$$g(u, v) \approx g(u^*, v^*) + g_u(u^*, v^*)(u - u^*) + g_v(u^*, v^*)(v - v^*)$$

$$g(u, v) = (0) + (m)(u - 0) + (-d - m)(v - 0)$$

$$= mu - (m + d)v$$

Sehingga di dapatkan sistem linier dari persamaan (3.1) dengan titik tetap pertama $O = (0,0)$ adalah

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= u(t) \\ \dot{v}(t) &= mu(t) - (m + d)v(t) \end{aligned} \quad (3.4a)$$

2. Proses linierisasi di sekitar (u^*, v^*) untuk titik tetap ke dua $E_0 = (0, -(m + d))$ sebagai berikut:

Dengan menggunakan cara yang sama, maka digunakan persamaan (3.3a) untuk melakukan linierisasi, dimana:

$$\begin{aligned} f(u, v) &= u(1 - av) & g(u, v) &= v(-d + bu - v) + m(u - v) \\ f_u(u, v) &= 1 - av & g_u(u, v) &= bv + m \\ f_v(u, v) &= -au & g_v(u, v) &= -d + bu - 2v - m \end{aligned}$$

Maka persamaan (3.3a) dengan mensubstitusikan titik tetapnya menjadi:

$$\begin{aligned} f(u, v) &\approx f(u^*, v^*) + f_u(u^*, v^*)(u - u^*) + f_v(u^*, v^*)(v - v^*) \\ f(u, v) &= (0) + (1 + a(m + d))(u - 0) + (0)(v + (m + d)) \\ &= u(1 + a(m + d)) \\ g(u, v) &\approx g(u^*, v^*) + g_u(u^*, v^*)(u - u^*) + g_v(u^*, v^*)(v - v^*) \\ g(u, v) &= -(m + d)(-d + (m + d)) + (m + d)m \\ &\quad + (-b(m + d) + m)(u - 0) \\ &\quad + (-d + 2(m + d) - m)(v + (m + d)) \\ &= d(m + d) - (m + d)^2 - b(m + d)u + mu - (m + d)(v + (m + d)) \\ &\quad + 2(m + d)(v + (m + d)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= d(m+d) - (m+d)^2 - bu(m+d) + mu - v(m+d) - (m+d)^2 \\
&\quad + 2v(m+d) + 2(m+d)^2 \\
&= -bu(m+d) + mu + v(m+d)
\end{aligned}$$

Sehingga di dapatkan sistem linier dari persamaan (3.1) dengan titik tetap ke dua $E_0 = (0, -(m+d))$ adalah

$$\begin{aligned}
\dot{u}(t) &= (1 + a(m+d))u(t) \\
\dot{v}(t) &= mu(t) - b(m+d)u(t) + (m+d)v(t).
\end{aligned} \tag{3.4b}$$

3) Analisis Kestabilan pada Titik Keseimbangan

Untuk menentukan kestabilan pada titik keseimbangan, maka akan dihitung nilai eigen dari titik keseimbangan melalui matriks Jacobian. Matriks Jacobian didapatkan dari persamaan bentuk linier yang telah didapatkan yaitu:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - av^* & au^* \\ bv^* + m & -d + bu^* - 2v^* - m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

dari matriks Jacobi yang didapatkan, kemudian akan dianalisis kestabilannya sebagai berikut:

1. Untuk titik keseimbangan pertama (u_1^*, v_1^*)

Pada titik keseimbangan pertama yaitu $O = (0,0)$ kemudian disubstitusikan ke persamaan (3.5), secara umum didapatkan:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -(d+m) \end{pmatrix}$$

dari matriks Jacobi tersebut maka mencari nilai Eigen dicari dengan:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ m & -(d+m) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right] = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ m & -(d + m) - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(1 - \lambda) \cdot (-(d + m) - \lambda) = 0$$

maka didapatkan nilai Eigen sebagai berikut:

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{Atau} \quad \lambda_2 = -(m + d)$$

berdasarkan dari hasil nilai Eigen tersebut maka didapatkan nilai Eigen 1

dan $-(m + d)$. Maka dapat dikatakan bahwa O selalu *unstable*.

2. Untuk titik kesetimbangan kedua (u_2^*, v_2^*)

Pada titik kesetimbangan kedua yaitu $E_0 = (0, -(m + d))$

kemudian disubstitusikan ke persamaan (3.5), secara umum didapatkan:

$$J_2 = \begin{pmatrix} 1 + a(m + d) & 0 \\ b(m + d) + m & m + d \end{pmatrix}$$

dari matriks Jacobi tersebut maka mencari nilai Eigen dicari dengan:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \left[\begin{bmatrix} 1 + a(m + d) & 0 \\ b(m + d) + m & m + d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right] = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 + a(m + d) - \lambda & 0 \\ b(m + d) + m & m + d - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(1 + a(m + d) - \lambda)(m + d - \lambda) = 0$$

maka didapatkan nilai Eigen sebagai berikut:

$$1 + a(m + d) - \lambda = 0 \quad \text{atau} \quad m + d - \lambda = 0$$

$$\lambda_3 = 1 + a(m + d) \quad \lambda_4 = m + d$$

berdasarkan dari hasil nilai Eigen tersebut maka didapatkan nilai Eigen $1 + a(m + d)$

dan $m + d$. Jika $m + d < 0$ maka didapatkan nilai Eigen riil

negatif, dengan demikian E_0 selalu *exists*. Jika $1 + a(m + d) < 0$ berarti E_0

dikatakan *stable*. Jika $1 + a(m + d) > 0$ berarti E_0 dikatakan *unstable*.

3.1.2 Model dengan Waktu Tunda ($\tau > 0$)

Model *predator-prey* dengan waktu tunda yang diberikan pada persamaan (3.1) dianalisis dengan menggunakan pendekatan model linear di titik tetap $E^* = (u^*, v^*)$ dimana $E^* = \left(\frac{1+a(m+d)}{a(b+ma)}, \frac{1}{a}\right)$. Ini mungkin berbeda dari titik tetap 0 dan E_0 yang mana adalah *delay-independent*. Untuk itu dimisalkan

$$\begin{aligned}x(t) &= u(t) - u^*, & y(t) &= v(t) - v^* \\x_\tau(t) &= u(t - \tau) - u^*, & y_\tau(t) &= v(t - \tau) - v^*\end{aligned}$$

Jika pemisalan tersebut disubstitusikan ke dalam persamaan (3.1) kemudian menyederhanakan dan mengabaikan hubungan hasil kalinya, maka diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= (x(t) + u^*) - a(x(t) + u^*)(y(t) + v^*) \\&= \left(x(t) + \frac{1 + a(m + d)}{a(b + ma)}\right) - ax(t)y(t) - ax(t)\frac{1}{a} \\&\quad - ay(t)\left(\frac{1 + a(m + d)}{a(b + ma)}\right) - a\frac{1}{a}\left(\frac{1 + a(m + d)}{a(b + ma)}\right) \\&= -\frac{1 + a(m + d)}{a(b + ma)}y(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dy(t)}{dt} &= -d(y(t) + v^*) + b(y(t) + v^*)(x(t - \tau) + u^*) - y^2(t) - 2y(t)v^* \\&\quad - v^{*2} + m(x(t) + u^*) - m(y(t) + v^*)\end{aligned}$$

$$= \left(-d + b\left(\frac{1 + a(m + d)}{a(b + ma)}\right) - m - \frac{2}{a}\right)y(t) + mx(t) + \frac{b}{a}x(t - \tau)$$

$$\begin{aligned}
&= mx(t) + \frac{b}{a}x(t - \tau) - \left(d - \frac{b + abm + abd}{a(am + b)} + m - \frac{2}{a} \right) y(t) \\
&= mx(t) + \frac{b}{a}x(t - \tau) \\
&\quad - \left(\frac{ad(am + b) - b - abm - abd + am(am + b) + 2(ma + b)}{a(am + b)} \right) y(t) \\
&= mx(t) + \frac{b}{a}x(t - \tau) \\
&\quad - \left(\frac{a^2md + abd - b - abm - abd + a^2m^2 + amb + 2am + 2b}{a(am + b)} \right) y(t) \\
&= mx(t) + \frac{b}{a}x(t - \tau) - \frac{a^2m^2 + 2ma + b + dma^2}{a(am + b)} y(t)
\end{aligned}$$

Sehingga di dapatkan sistem linier dari persamaan (3.1) dengan titik tetap

ke tiga $E^* = \left(\frac{1+a(m+d)}{a(b+ma)}, \frac{1}{a} \right)$ adalah

$$\begin{aligned}
\dot{u}(t) &= - \frac{1 + a(m + d)}{a(b + ma)} v(t) \\
\dot{v}(t) &= mu(t) + \frac{b}{a}u(t - \tau) - \frac{a^2m^2 + 2ma + b + dma^2}{a(am + b)} v(t)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Selanjutnya, untuk menentukan kestabilan pada titik kesetimbangan, maka akan dihitung nilai Eigen dari titik kesetimbangan ketiga (u_3^*, v_3^*) , jika penyelesaian $u = e^{\lambda t}$ digunakan, maka diperoleh :

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1 + a(m + d)}{(am + b)} \\ \frac{b}{a}e^{-\lambda\tau} + m & -\frac{a^2m^2 + 2ma + b + dma^2}{a(am + b)} \end{pmatrix}$$

(bukti lampiran 1)

dari matriks Jacobi tersebut maka mencari nilai Eigen dicari dengan:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \left[\begin{array}{cc} 0 & -\frac{1+a(m+d)}{(am+b)} \\ \frac{b}{a}e^{-\lambda\tau} + m & -\frac{a^2m^2 + 2ma + b + dma^2}{a(am+b)} \end{array} \right] - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{1+a(m+d)}{(am+b)} \\ \frac{b}{a}e^{-\lambda\tau} + m & -\frac{a^2m^2 + 2ma + b + dma^2}{a(am+b)} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & \frac{1+a(m+d)}{(am+b)} \\ -\frac{b}{a}e^{-\lambda\tau} - m & \frac{a^2m^2 + 2ma + b + dma^2}{a(am+b)} + \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda \cdot \frac{a^2m^2 + 2ma + b + dma^2}{a(am+b)} + \frac{1+a(m+d)}{(am+b)} \cdot m + \frac{b}{a}e^{-\lambda\tau} = 0$$

jika dimisalkan :

$$P = \frac{a^2m^2 + 2ma + b + dma^2}{a(am+b)}$$

$$Q = \frac{1+a(m+d)}{(am+b)} \cdot m$$

$$R = \frac{1+a(m+d)}{(am+b)} \cdot \frac{b}{a} \Rightarrow Re^{-\lambda\tau} = \frac{1+a(m+d)}{(am+b)} \cdot \frac{b}{a} e^{-\lambda\tau}$$

Maka persamaan tersebut dapat di tulis menjadi:

$$\lambda^2 + P\lambda + Q + Re^{-\lambda\tau} = 0. \quad (3.7)$$

Ketika nilai $\tau = 0$ maka persamaan karakteristik (3.7) menjadi:

$$\lambda^2 + P\lambda + Q + R = 0$$

yang memiliki akar-akar

$$\lambda_{5,6} = \frac{-P \pm \sqrt{P^2 - 4(Q+R)}}{2}$$

karena P dan Q keduanya adalah bilangan positif, nilai Eigen dari persamaan karakteristik (3.7) memiliki bagian real negatif. Jika nilai dari

$(\lambda_5 + \lambda_6) < 0$ dan $(\lambda_5 \lambda_6) < 0$ maka titik tetap E^* merupakan *asymptotically stable*.

Sedangkan untuk $\tau \neq 0$, persamaan karakteristik (3.7) dapat di tuliskan :

$$(z^2 + \tau Pz + \tau^2 Q)e^z + \tau^2 R = 0,$$

(bukti lampiran 2)

dimana $z = \lambda\tau$.



Dari nilai Eigen yang didapatkan tersebut maka diberikan syarat kestabilan pada tabel berikut:

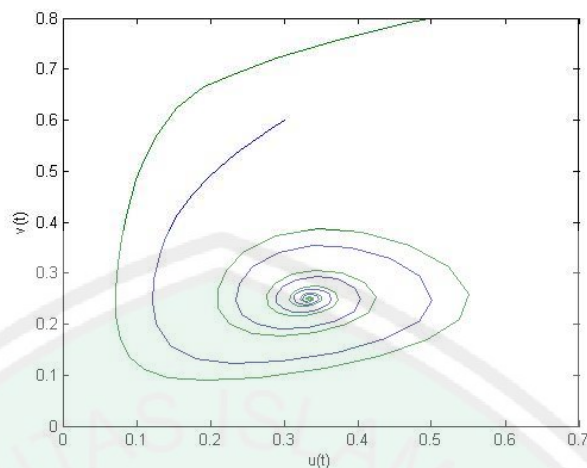
Tabel 3.1 Syarat kestabilan titik kesetimbangan model *predator-prey* dengan *predator migration* dan waktu tunda

Titik kesetimbangan	Keterangan	Syarat kestabilan
$O = (0, 0)$	<i>unstable</i>	-
$E_0 = (0, -(m + d))$	<i>stable</i>	$1 + a(m + d) < 0$
	<i>unstable</i>	$1 + a(m + d) > 0$
$E^* = \left(\frac{1 + a(m + d)}{a(b + ma)}, \frac{1}{a} \right)$	<i>asymptotically stable</i>	$(\lambda_5 + \lambda_6) < 0$ dan $(\lambda_5 \lambda_6) < 0$

3.2 Simulasi untuk variasi nilai awal

Pada subbab ini akan diberikan dua simulasi dari persamaan (3.1) dengan nilai parameter yang diberikan pada tabel (2.2) oleh Chen (2013). Pada simulasi pertama akan diberikan nilai awal yang berkondisikan populasi *predator* > *prey*, dengan nilai waktu tunda yang telah diberikan. Sehingga dari kondisi tersebut akan di lihat sejauh mana kontribusi dari campur tangan manusia terhadap keadaan pada populasi tersebut. Kemudian, untuk simulasi yang ke dua merupakan kondisi yang nilai awalnya adalah populasi *prey* > *predator*. Nilai waktu tunda yang di berikan merupakan sama dengan simulasi yang pertama. Dari sini juga akan di lihat sejauh mana kontrol manusia yang harus di berikan.

Sebelumnya, akan di berikan simulasi bagaimana suatu populasi dalam model ini di katakan stabil. Merujuk pada Chen (2013) nilai parameter akan di substitusikan pada persamaan, begitu pula nilai awal yang diberikan. Yaitu, suatu kondisi untuk nilai awal pada populasi *predator* $v(t) = 0.5$ dan 0.8 dan populasi *prey* $u(t) = 0.3$, dan 0.6 serta nilai kontribusi predator migration $m = \frac{1}{4}$ dengan nilai delay $\tau = 0.5$ dengan bantuan software MATLAB R2010a yaitu sebagai berikut:



Gambar 3.1. Kestimbangan model dengan nilai $m = \frac{1}{4}$, delay $\tau = 0.5$

(bukti lampiran 3)

Pada gambar (3.1) di atas dapat di jelaskan sebagai berikut. Dapat dikatakan bahwa dengan nilai awal populasi *predator* $v(t) = 0.5$ dan 0.8 dan nilai populasi *prey* $u(t) = 0.3$ dan 0.6 . dimana nilai $m = \frac{1}{4}$, delay $\tau = 0.5$ kondisi ini *stable* pada titik kesetimbangan $E^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$.

Peran dari *predator migration* ini merupakan kendali penting dari sebuah populasi dalam model ini, maka besar dari nilai suatu *predator migration* ini di klasifikasikan dalam sebuah *proposition*.

Proposition (3.1)

- i. Jika $m > d$ maka persamaan (3.2) memiliki titik kesetimbangan O dan E^*
- ii. Jika $-d - \frac{1}{a} < m < -d$ maka persamaan (3.2) memiliki titik kesetimbangan O, E_0 dan E^*

- iii. Jika $m \leq -d - \frac{1}{a}$ maka persamaan (3.2) memiliki titik kesetimbangan O dan E_0

Chen (2013). Nilai waktu tunda merupakan nilai dari tertundanya masa waktu kematian populasi suatu *prey*, dalam hal ini rentang nilai τ Chen (2013) menjabarkan dengan rentan $\tau = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{21}{40}, 1, 2 \right]$.

3.2.1 Simulasi Nilai *Prey* lebih dari *Predator*

Pada subbab ini, disimulasikan model *predator-prey* dengan *predator migration* dan waktu tunda untuk kasus populasi nilai awal ketika di asumsikan banyaknya populasi *prey* lebih dari banyaknya populasi *predator* dengan menggunakan nilai parameter pada tabel 3.2

Tabel 3. 2 Nilai parameter kasus populasi *prey* > *predator*

Simulasi	a	d	b	τ	$u(t)$	$v(t)$
i	4	0.5	2	0.5	0.8	0.5
					0.6	0.3
ii	1	1	2	0.5	0.8	0.5
					0.6	0.3

Melalui nilai parameter Simulasi (i), untuk menentukan nilai seberapa besar *predator migration* dapat di tentukan dari ketentuan **Proposition (3.1)** i. yang dapat di jabarkan sebagai berikut:

$$m \geq -d$$

$$m \geq -0.5$$

dengan demikian dapat diambil nilai dari *predator migration* adalah sebesar $m = 1$ satuan. Ketika nilai $m = 1$ maka kesetimbangan yang diperoleh adalah E^* . Untuk kesetimbangan E^* dapat dijabarkan seperti berikut:

$$\begin{aligned} E^* &= \left(\frac{1 + a(m + d)}{a(b + ma)}, \frac{1}{a} \right) \\ &= \left(\frac{1 + 4(1 + 0.5)}{4(2 + 4)}, \frac{1}{4} \right) \\ &= \left(\frac{1 + 4(1.5)}{4(6)}, \frac{1}{4} \right) \\ &= \left(\frac{7}{24}, \frac{1}{4} \right). \end{aligned}$$

dengan demikian diperoleh titik kesetimbangan $E^* = (0.291, 0.25)$. Potret fase pada Gambar 3.1 (i) menunjukkan bahwa titik kesetimbangan E^* stabil asimtotik lokal, hal ini dikarenakan seluruh solusi dengan berbagai nilai awal yang berbeda dimana populasi *prey* > *predator* menuju titik kesetimbangan E^* . Pada kehidupan nyata jika parameter ini terpenuhi, maka populasi *predator* dan populasi *prey* dapat hidup secara berdampingan, dimana nilai $m = 1$ bermakna besar kendali untuk *biological control* dari manusia yang bertindak sebagai *predator migration* adalah memanen populasi *predator* sebanyak 1 satuan dan menambah jumlah populasi *prey* sebesar 1 satuan.

Berdasarkan nilai parameter Simulasi (ii), maka penentuan nilai dari *predator migration* di dapatkan dari ketentuan pada **Proposition (3.1)** ii. dimana dapat dijabarkan seperti berikut:

$$-d - \frac{1}{a} < m < -d$$

$$-1 - \frac{1}{1} < m < -1$$

$$-1 - 1 < m < -1$$

$$-2 < m < -1$$

dengan demikian untuk yang pertama $-2 < m$ maka diambil nilai $m = 0$, ketika nilai $m = 0$ maka kesetimbangan yang diperoleh adalah E^* . Untuk kesetimbangan E^* dapat dijabarkan seperti berikut:

$$\begin{aligned} E^* &= \left(\frac{1 + a(m + d)}{a(b + ma)}, \frac{1}{a} \right) \\ &= \left(\frac{1 + 1(0 + 1)}{1(2 + 0)}, \frac{1}{1} \right) \\ &= \left(\frac{2}{2} + \frac{1}{2} \right) \\ &= (1, 1). \end{aligned}$$

Kemudian untuk yang ke dua $m < -1$ maka diambil nilai $m = -2$, ketika nilai $m = -2$ maka kesetimbangan yang diperoleh adalah E_0 . Untuk kesetimbangan E_0 dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} E_0 &= (0, -(m + d)) \\ &= (0, -(-2 + 1)) \\ &= (0, 1) \end{aligned}$$

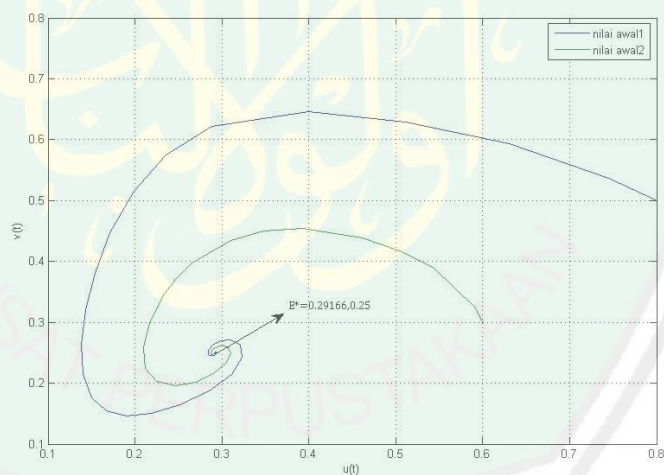
pada Tabel 3.3 di jelaskan bahwa syarat kesetimbangan E_0 *unstable* ketika nilai $1 + a(m + d) > 0$. Dalam kasus ini untuk mengetahui maka dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$1 + a(m + d) > 0$$

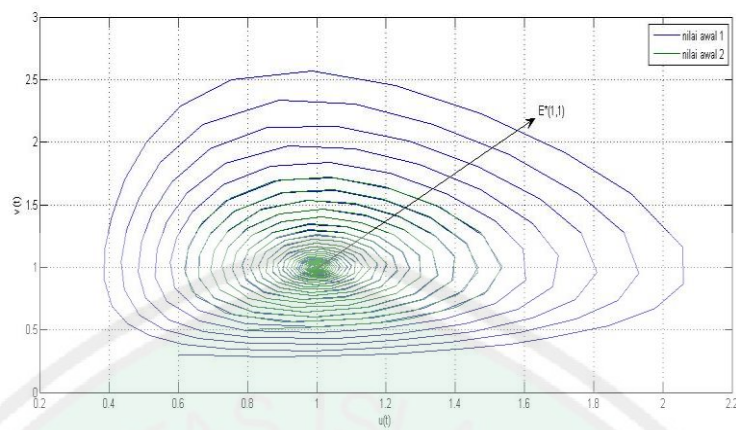
$$1 + 1(-2 + 2) > 0$$

$$1 > 0.$$

Karena kondisi tersebut terpenuhi maka titik kesetimbangan E_0 adalah *unstable*. Akibatnya, terdapat dua titik kesetimbangan interior yang eksis, yaitu $E^* = (1,1)$ dan $E_0 = (0,1)$. Namun hanya titik kesetimbangan E^* yang stabil asimtotik lokal sedangkan E_0 *unstable*. Potret fase pada Gambar 3.2 (ii) menunjukkan bahwa titik kesetimbangan E^* stabil asimtotik lokal, hal ini dikarenakan seluruh solusi dengan berbagai nilai awal yang berbeda dimana populasi *prey* > *predator* menuju titik kesetimbangan E^* . Dapat disimpulkan bahwa hasil simulasi pada Gambar 3.1 (i) dan (ii) sesuai dengan analisis.



(i)



(ii)

Gambar 3.2. Simulasi numerik kasus populasi *prey* > *predator*

(bukti lampiran 4)

3.2.2 Simulasi Nilai *Predator* lebih dari *Prey*

Pada subbab ini, disimulasikan model *predator-prey* dengan *predator migration* dan waktu tunda untuk kasus populasi ketika banyaknya populasi *predator* lebih dari banyaknya populasi *prey* dengan menggunakan nilai parameter pada tabel 3.3

Tabel 3. 3 Nilai parameter kasus populasi *predator* > *prey*

a	d	b	τ	$u(t)$	$v(t)$
2	0	2	0.5	0.6	0.8
				0.4	0.9

Melalui nilai parameter tersebut, untuk menentukan nilai seberapa besar *predator migration* dapat di tentukan dari ketentuan **Proposition (3.1)** iii. yang dapat di jabarkan sebagai berikut:

$$m \leq -d - \frac{1}{a}$$

$$m \leq 0 - \frac{1}{1}$$

$$m \leq -1$$

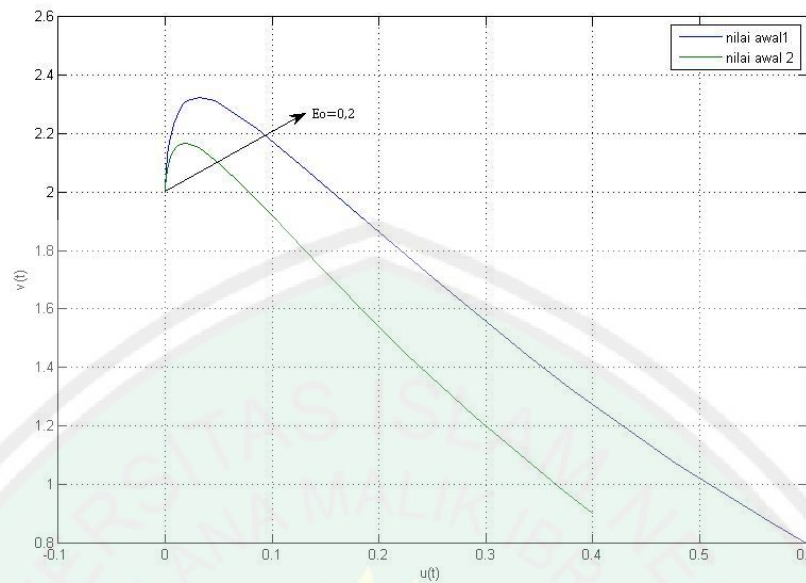
dengan demikian dapat diambil besar nilai $m = -2$. Ketika nilai $m = -2$ maka kesetimbangan yang di peroleh adalan titik kesetimbangan E_0 . Untuk kesetimbangan E_0 dapat di jabarkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} E_0 &= (0, -(m + d)) \\ &= (0, -(-2 + 0)) \\ &= (0, 2). \end{aligned}$$

Pada Tabel 3.3 di jelaskan bahwa syarat kesetimbangan E_0 *stable* ketika nilai $1 + a(m + d) < 0$. Dalam hal ini untuk mengetahui maka dapat di jabarkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 1 + a(m + d) &< 0 \\ 1 + 2(-2 + 0) &< 0 \\ -3 &< 0. \end{aligned}$$

Karena kondisi tersebut terpenuhi maka titik kesetimbangan E_0 adalah *stable*. Ketika nilai $m = -2$ artinya nilai kontribusi dari *predator migration* adalah sebesar -2 , maka dikatakan peran manusia sebagai *biological control* adalah mengurangi besar populasi *prey* sebesar 2 satuan dan menambah jumlah dari populasi *predator* sebesar 2 satuan. Dengan demikian, hasil simulasi pada Gambar 3.3 sesuai dengan analisis.



Gambar 3.3. Simulasi numerik kasus populasi predator > prey

(bukti lampiran 5)

3.3 Model Predator-Prey dengan Predator Migration dalam Kajian Islam

Dalam Al Quran Surat Al Baqarah/2, Allah Swt. berfirman :

وَإِذْ قَالَ رَبُّكَ لِلْمَلَائِكَةِ إِنِّي جَاعِلٌ فِي الْأَرْضِ خَلِيفَةً قَالُوا أَتَجْعَلُ فِيهَا مَنْ يُفْسِدُ فِيهَا وَيَسْفِكُ الدِّمَاءَ وَنَحْنُ نُسَبِّحُ بِحَمْدِكَ وَنُقَدِّسُ لَكَ قَالَ إِنِّي أَعْلَمُ مَا لَا تَعْلَمُونَ (٣٠)

“Ingatlah ketika Tuhanmu berfirman kepada Para Malaikat: “*Sesungguhnya aku hendak menjadikan seorang khalifah di muka bumi.*” mereka berkata: “*Mengapa Engkau hendak menjadikan (khalifah) di bumi itu orang yang akan membuat kerusakan padanya dan menumpahkan darah, Padahal Kami Senantiasa bertasbih dengan memuji Engkau dan mensucikan Engkau?*” Tuhan berfirman: “*Sesungguhnya aku mengetahui apa yang tidak kamu ketahui.*” (Qs. Al-Baqarah/2:30)

Bumi sebagai tempat tinggal dan tempat hidup manusia dan makhluk Allah lainnya sudah dijadikan Allah dengan penuh rahmat-Nya. Sebagaimana yang telah dipaparkan di atas, maka manusia sebagai khalifah di bumi maka hendaknya menjaga agar kelestarian lingkungan tetap terjaga. Menjaga agar lingkungan tetap

baik maka peran manusia disini sangat penting sebagai kendali dari ekosistem makhluk hidup lain di alam.

Mahluk hidup di alam juga dapat melakukan kendali yang tak terkontrol sehingga bisa jadi manusia melakukan pemanenan yang berlebihan. Sesuatu yang berlebih-berlebihan merupakan salah satu yang menyebabkan sesuatu yang tidak seimbang, sesuatu yang tidak seimbang disebabkan oleh perbuatan manusia sendiri. Sesungguhnya Allah Swt telah menciptakan sesuatu yang seimbang, adanya sesuatu yang tidak seimbang disebabkan adanya campur tangan manusia yang berlebihan dalam memanfaatkan ciptaan-Nya. Dalam firman-Nya pada surat al-Mulk/67:3-4.

Dalam tafsir Jalalain Jalaluddin Asy-syuyuti oleh Hidayah (2010:30) bahwa (yang telah menciptakan tujuh langit yang berlapis-lapis) yakni sebagian diantaranya berada di atas sebagian yang lain tanpa bersentuhan. Kamu tidak sekali-kali melihat pada ciptaan Yang Maha Pemurah pada tujuh langit yang berlapis-lapis atau pada makhluk yang lain (sesuatu yang tidak seimbang) yang berbeda dan tidak seimbang (adakah yang kamu lihat) padanya (keretakan?) maksudnya retak dan berbelah-belah. (Kemudian pandanglah sekali lagi) ulangilah pengelihatannya berkali-kali (niscaya akan berbalik) akan kembali (pengelihatannya itu padamu dalam keadaan hina) karena tidak menemukan sesuatu yang cacat (dan penglihatannya itupun dalam keadaan payah) yakni tidak melihat sama sekali adanya cacat.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan penelitian yang dilakukan pada model *predator-prey* dengan *predator migration* dan waktu tunda ini, kestabilan yang didapatkan untuk suatu model dalam lingkungan perairan ini adalah $E_0 = (0, -(m + d))$ *stable* ketika $1 + a(m + d) < 0$ dan $E^* = \left(\frac{1+a(m+d)}{a(b+ma)}, \frac{1}{a}\right)$ *asymptotically stable* ketika $(\lambda_5 + \lambda_6) < 0$ dan $(\lambda_5 \lambda_6) < 0$ dengan *predator migration* adalah kendali manusia dalam hal pemanenan yang menjadi kendalinya.

Dari simulasi dan analisis yang dilakukan dari beberapa perubahan pada nilai-nilai awal kondisi populasi *predator* dan populasi *prey* di dapatkan untuk simulasi kasus populasi *prey* lebih banyak dari populasi *predator* yaitu kesetimbangan yang diperoleh adalah $E^* = \left(\frac{7}{24}, \frac{1}{4}\right)$ dengan kontrol manusia $m = 1$, dan $E^* = (1,1)$ dengan kontrol manusia $m = 0$. Untuk kasus kedua dimana nilai populasi *predator* lebih banyak dari populasi *prey* di dapatkan kesetimbangan $E_0 = (0,2)$. Dengan kata lain jika populasi *prey* lebih banyak dari populasi *predator* maka semakin besar campur tangan manusia yang diberikan.

4.2 Saran

Pada penelitian selanjutnya dapat dilakukan pada model *predator-prey* dengan *predator migration* dengan memberikan pemanenan berupa konstan pada kedua populasi biomasa *predator* dan biomasa *prey* atau salah satunya sehingga kestabilan yang diperoleh akan semakin jelas.

DAFTAR RUJUKAN

- Al-Maraghi, A. 1993. *Tafsir Al-Maraghi, (Terjemah)*. Semarang: Toha Putra.
- Asy'arie, M. 1992. *Manusia Pembentuk Kebudayaan dalam Al-Qur'an*. Yogyakarta: LSIF.
- Baretta E, K. 1996. *Convergence Results in a Well-Known Delayed Predator-Prey System*. Journal Mathematics Analysis 204:840-853.
- Boyce, W. E. dan DiPrima, R. C. 1992. *Elementary Differential Equation and Boundary Value Problem*. Fifth Edition. John Wiley & Sons, Inc: New York.
- Boyce, W. E. dan DiPrima, R. C. 2001. *Elementary Differential Equation and Boundary Value Problem*. Tenth Edition. John Wiley & Sons, Inc: New York.
- Boyce, W E. dan DiPrima, R. C. 2012. *Elementary Differential Equation and Boundary Value Problem*. Tenth Edition. John Wiley & Sons, Inc: New York.
- Chen, Y. 2013. *Dynamics of a Delayed Predator-Prey Model With Predator Migration*. Elsevier Inc, 1400-1412.
- Dwardi, H. 2011. *Analisis Model Mangsa-pemangsa Michaelis-Menten dengan Pemanenan pada Populasi Mangsa*. Skripsi tidak dipublikasikan. Bogor: Institut Pertanian Bogor.
- Finizio dan Ladas. 1998. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*. Jakarta: Erlangga.
- Hidayah. D. 2010. *Tafsir Jalalain Jalaludin Asy-syuyuthi Jalaludin Muhamad bin Ahmad Al-Mahalliy*. Tasikmalaya: Pesantren Persatuan Islam 91.
- Jorgensen, S.E. 2009. *Ecosystem Ecology*. First edition. Elsevier: Italy.
- Kuang, Y. 1993. *Delay Differential Equations with Applications in population Dynamics*. London: Academic Press.
- Ruan S. 2009. *On Nonlinear Dynamics of Predator-Prey Models with Discrete Delay*. Math. Model. Nat. Phenom. 4:140-188.
- Saoda, L. 2014. *Analisis Kestabilan Model Mangsa-Pemangsa Hutchinson dengan Waktu Tunda dan Pemanenan Konstan*. Skripsi tidak dipublikasikan. Bogor: Institut Pertanian Bogor.

Shihab, M. Q. 2002. *Tafsir Al-Misbah*. Jakarta: Lentera Hati.

Shihab, M. Q. 2007. *Membumikan Alquran: Fungsi dan Peran Wahyu dalam Kehidupan Masyarakat*. Bandung: Mizan Pustaka.

Tobroni dan Arifin, S. 1994. *Islam Pluralisme Budaya dan Politik*. Yogyakarta: SI Press.

Waluya, S.B. 2006. *Persamaan Diferensial*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Wiggins, S., 1990. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer. Verlag: New York.

Zaini, S. 1984. *Mengenal Manusia Lewat Al-Qur'an*. Surabaya: Bina Ilmu.



LAMPIRAN

Lampiran 1. Perubahan Persamaan Diferensial Tundaan

Di uraikan turunannya sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{u}(t)}{\partial u} &= 0 \\ \frac{\partial \dot{u}(t)}{\partial v} &= -\frac{1 + a(m + d)}{a(b + ma)}\end{aligned}$$

untuk penurunan $\frac{\partial \dot{v}(t)}{\partial u}$, di misalkan $u(t) = e^{\lambda t}$ maka persamaan (3.6) menjadi:

$$\begin{aligned}\dot{v}(t) &= me^{\lambda t} + \frac{b}{a}e^{\lambda(t-\tau)} - \frac{a^2m^2 + 2ma + b + dma^2}{a(am + b)}v(t) \\ &= me^{\lambda t} + \frac{b}{a}e^{\lambda t}e^{-\lambda\tau} - \frac{a^2m^2 + 2ma + b + dma^2}{a(am + b)}v(t) \\ &= e^{\lambda t} \left(m + \frac{b}{a}e^{-\lambda\tau} \right) - \frac{a^2m^2 + 2ma + b + dma^2}{a(am + b)}v(t)\end{aligned}$$

Kemudian sebelum kita turunkan dikembalikan kebentuk sebelumnya, maka:

$$\dot{v}(t) = u(t) \left(m + \frac{b}{a}e^{-\lambda\tau} \right) - \frac{a^2m^2 + 2ma + b + dma^2}{a(am + b)}v(t)$$

Kemudian kita turunkan, maka:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{v}(t)}{\partial u} &= m + \frac{b}{a}e^{-\lambda\tau} \\ \frac{\partial \dot{v}(t)}{\partial v} &= -\frac{a^2m^2 + 2ma + b + dma^2}{a(am + b)}\end{aligned}$$

Lampiran 2. Perubahan Bentuk Persamaan Ketika $\tau \neq 0$

$$\lambda^2 + P\lambda + Q + Re^{-\lambda\tau} = 0.$$

akan dirubah ke dalam bentuk lain dimana dimisalkan $z = \lambda\tau$, maka persamaan tersebut menjadi:

$$\left(\frac{z}{\tau}\right)^2 + P\frac{z}{\tau} + Q + Re^{-z} = 0$$

$$\frac{z^2}{\tau^2} + P\frac{z}{\tau} + Q + Re^{-z} = 0$$

$$z^2 + \tau Pz + Q + \tau^2 R \frac{1}{e^z} = 0$$

$$(z^2 + \tau Pz + Q)e^z + \tau^2 R = 0$$



Lampiran 3. Program Matlab untuk Gambar (3.1)

```
function v=exam1f(t,y,Z)
ylag1=Z(:,1);
v=zeros(2,1);
m=1/4;

v(1)=y(1)*(1-4*y(2));
v(2)=y(2)*(-0.5+2*ylag1(1)-y(2))+m*(y(1)-y(2));

sol=dde23('exam1f',[0.5],[0.3;0.5],[0,2000])
sol1=dde23('exam1f',[0.5],[0.6;0.8],[0,2000])
plot(sol.y(1,:),sol.y(2,:),sol1.y(1,:),sol1.y(2,:))
xlabel('u(t)');ylabel('v(t)');
grid on
%xlim([-1 0.7])
%ylim([-1 0.9])
```



Lampiran 4. Program Matlab untuk Gambar (3.2)

Gambar (i)

```
function v=exam1f(t,y,Z)
ylag1=Z(:,1);
v=zeros(2,1);
m=1;

v(1)=y(1)*(1-4*y(2));
v(2)=y(2)*(-0.5+2*ylag1(1)-y(2))+m*(y(1)-y(2));

sol=dde23('exam1f',[0.5],[0.8;0.5],[0,2000])
sol1=dde23('exam1f',[0.5],[0.6;0.3],[0,2000])
plot(sol.y(1,:),sol.y(2,:),sol1.y(1,:),sol1.y(2,:))
xlabel('u(t)');ylabel('v(t)');
grid on
%xlim([-1 0.7])
%ylim([-1 0.9])
```

Gambar (ii)

```
function v=exam1f(t,y,Z)
ylag1=Z(:,1);
v=zeros(2,1);
m=0;

v(1)=y(1)*(1-1*y(2));
v(2)=y(2)*(-1+2*ylag1(1)-y(2))+m*(y(1)-y(2));

sol=dde23('exam1f',[0.5],[0.8;0.5],[0,2000])
sol1=dde23('exam1f',[0.5],[0.6;0.3],[0,2000])
plot(sol.y(1,:),sol.y(2,:),sol1.y(1,:),sol1.y(2,:))
xlabel('u(t)');ylabel('v(t)');
grid on
%xlim([-1 0.7])
%ylim([-1 0.9])
```

Lampiran 5. Program Matlab untuk Gambar (3.3)

```
function v=exam1f(t,y,Z)
ylag1=Z(:,1);
v=zeros(2,1);
m=-2;

v(1)=y(1)*(1-2*y(2));
v(2)=y(2)*(0+2*ylag1(1)-y(2))+m*(y(1)-y(2));

sol=dde23('exam1f',[0.5],[0.6;0.8],[0,2000])
sol1=dde23('exam1f',[0.5],[0.4;0.9],[0,2000])
plot(sol.y(1,:),sol.y(2,:),sol1.y(1,:),sol1.y(2,:))
xlabel('u(t)');ylabel('v(t)');
grid on
%xlim([-1 0.7])
%ylim([-1 0.9])
```



RIWAYAT HIDUP



Nianatus Sholihah, lahir di Banyuwangi pada tanggal 02 Desember 1995, biasa dipanggil Nia, tinggal di Dsn. Popongan Ds. Benelanlor Kec. Kabat Kab. Banyuwangi. Anak kedua dari Bapak H. Munawar dan Ibu Hj. Maisaroh.

Pendidikan Taman Kanak-kanak ditempuh di TK Khadijah 124 Benelanlor yang lulus pada tahun 2001, kemudian melanjutkan pendidikan dasar di MI Darul Falah Gombolirang yang ditempuh selama 6 tahun dan lulus pada tahun 2007. Selanjutnya lulus di tahun 2010 dari sekolah menengah pertama di MTs Negeri Rogojampi. Kemudian melanjutkan sekolah di MAN 1 Jember dan lulus pada tahun 2013. Kemudian di tahun 2103 melanjutkan pendidikan ke perguruan tinggi Negeri yaitu Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dan mengambil Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.

Semasa menjadi mahasiswa, mengikuti organisasi intra kampus dalam himpunan mahasiswa Jurusan Matematika sebagai sie keagamaan dalam rangka mengembangkan potensi akademik. Organisasi ekstra kampus juga diikuti yaitu dalam organisa perkumpulan daerah Forum Komunikasi Mahasiswa Banyuwangi (FKMB) yang menjabat sebagai Sekretaris umum di tahun 2014-2015, serta menjadi anggota organisasi daerah sampai sekarang. Aktif menjadi *asistant* praktikum di beberapa mata kuliah selama menempuh di jurusan matematika.



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)55893

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Nianatus Sholihah
NIM : 13610068
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Analisis Kestabilan Model *Predator-prey* dengan *Predator Migration* dan Waktu Tunda.
Pembimbing I : Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si
Pembimbing II : Ach. Nasichuddin, M.A

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1	21 Maret 2017	Konsultasi Bab I, II Matematika	1. [Signature]
2	29 Maret 2017	Revisi Bab I Matematika	2. [Signature]
3	3 April 2017	Revisi Bab I, II Matematika	3. [Signature]
4	4 April 2017	Konsultasi Bab I, II Agama	4. [Signature]
5	10 April 2017	Revisi Bab I, II Agama	5. [Signature]
6	19 April 2017	Revisi Bab II Matematika	6. [Signature]
7	2 April 2017	Konsultasi Bab II, III Matematika	7. [Signature]
8	10 Mei 2017	Revisi Bab II, III Matematika	8. [Signature]
9	12 Mei 2017	Konsultasi Bab III, IV Matematika	9. [Signature]
10	16 Mei 2017	Revisi Bab III, IV Matematika	10. [Signature]
11	9 Juni 2017	Revisi Bab III, IV Matematika	11. [Signature]
12	3 Agustus 2017	Konsultasi Bab I, II, III Agama	12. [Signature]
13	11 Agustus 2017	ACC Keseluruhan Matematika	13. [Signature]
14	16 Agustus 2017	Revisi Bab I, II, III Agama	14. [Signature]
15	18 Agustus 2017	ACC Keseluruhan Agama	15. [Signature]
16	25 Agustus 2017	ACC Keseluruhan	16. [Signature]

Malang, 28 Agustus 2017

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si

NIP. 19650414 200312 1 001