HOMOMORFISME PADA LATIS

SKRIPSI

OLEH
FAIZATUL WAHIDAH
NIM. 13610113

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2017

HOMOMORFISME PADA LATIS

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh
Faizatul Wahidah
NIM. 13610113

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2017

HOMOMORFISME PADA LATIS

SKRIPSI

Oleh
Faizatul Wahidah
NIM. 13610113

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 22 September 2017

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Evawati Alisah, M.Pd	Abdul Aziz, M.Si
NIP. 19720604 199903 2 001	NIP. 19760318 200604 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

HOMOMORFISME PADA LATIS

SKRIPSI

Oleh
Faizatul Wahidah
NIM. 13610113

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal 12 September 2017

Penguji Utama	: Dr. Abdussakir, M.Pd	....
Ketua Penguji	: Hairur Rahman, M.Si	....
Sekretaris Penguji	: Evawati Alisah, M.Pd	....
Anggota Penguji	: Abdul Aziz, M.Si	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
FAKULTAS SAINTEK JURUSAN MATEMATIKA

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	Faizatul Wahidah
NIM	:	13610113
Jurusan	:	Matematika
Fakultas	:	Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	:	Homomorfisme pada Latis

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 12 September 2017
Yang Membuat Pernyataan,

METERAI TEMPEL
2B464AEF210474860
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Faizatul Wahidah
NIM. 13610113

MOTO

مَنْ جَدَّ وَجَدَ

"Barangsiapa bersungguh-sungguh pasti akan mendapatkan hasil"

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:
Ayahanda Abdussalam, ibunda Umamah, adik Firdausi Nuzula, sahabat-sahabat yang selalu mendukung dan selalu hadir di kala sedih dan senang, serta segenap keluarga penulis yang selalu memberikan doa, semangat, dan motivasi bagi penulis.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Alhamdulillah, puji syukur kepada Allah Swt. yang telah melimpahkan rahmat-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan skripsi yang berjudul "Homomorfisme pada Latis". Shalawat serta salam selalu terlimpahkan kepada nabi Muhammad Saw. yang telah menuntun manusia ke jalan keselamatan.

Dalam kesempatan ini, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada semua pihak yang telah mendukung dan membantu secara langsung maupun tidak langsung dalam penyelesaian skripsi ini, yakni kepada:

1. Prof. Dr. Abdul Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Evawati Alisah, M.Pd, selaku dosen pembimbing 1 yang senantiasa mengarahkan penulis dalam melakukan penelitian.
5. Abdul Aziz, M.Si, selaku dosen pembimbing 2 yang senantiasa mengarahkan penulis dalam melakukan penelitian.
6. Ayahanda Abdussalam dan ibunda Umamah yang selalu memberikan doa dan semangat dalam menyelesaikan penelitian ini.
7. Adik tersayang Firdausi Nuzula yang selalu memberikan dukungan, doa, dan motivasi bagi penulis.

8. Seluruh teman-teman "*subset*" angkatan 2013 dan teman-teman "Wisma Seruni" yang selalu ada di kala senang dan sedih dalam rangka proses penyelesaian penelitian ini.
9. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik berupa moril maupun materiil.

Semoga Allah Swt. melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat kepada para pembaca, khususnya bagi penulis secara pribadi.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, September 2017

Penulis

DAFTAR ISI

BAB IV PENUTUP

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

ABSTRAK

Wahidah, Faizatul. 2017. **Homomorfisme pada Latis**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Evawati Alisah, M.Pd. (II) Abdul Aziz, M.Si.

Kata Kunci: Latis, Homomorfisme pada Latis, *Embedding*, Isomorfisme, Endomorfisme.

Latis L adalah suatu aljabar yang dikenai dua operasi biner (dilambangkan dengan $(\times)$ dan $(+)$), yang memenuhi beberapa aksioma, yaitu kedua operasi bersifat idempoten, kedua operasi bersifat asosiatif dan komutatif, serta berlaku absorpsi terhadap kedua operasi. Pada skripsi ini dibahas tentang homomorfisme pada latis, yaitu dengan memberikan definisi beserta contoh yang berkaitan dengan homomorfisme pada latis dan membuktikan sifat-sifat yang berkaitan dengan homomorfisme pada latis. Tujuan penelitian ini adalah untuk menjelaskan sifat-sifat yang terkait dengan homomorfisme pada latis. Adapun sifat-sifat dari homomorfisme pada latis yaitu:

a. Bayangan homomorfik H dari L terhadap φ adalah sublatis dari M.
b. Misalkan L_1 dan L_2 adalah suatu latis dengan $a, b \in L_1$, dan suatu fungsi $\varphi: L_1 \to L_2$ adalah homomorfisme pada latis. Jika φ *join-homomorphism* dan *meet-homomorphism*, dengan $a \leq b \in L_1$ maka berlaku $\varphi(a) \leq \varphi(b) \in L_2$.
c. Misalkan L_1 dan L_2 adalah suatu latis dan fungsi $\varphi: L_1 \to L_2$ adalah suatu isomorfisme, maka untuk setiap $a, b \in L_1$ berlaku $\varphi(a) + \varphi(b) \leq \varphi(a + b)$ dan $\varphi(a) \times \varphi(b) \leq \varphi(a \times b)$.
d. Misalkan L_1 dan L_2 adalah suatu latis dan fungsi $\varphi: L_1 \to L_2$ adalah suatu isomorfisme, maka untuk setiap $a, b \in L_1$ berlaku $\varphi(a + b) \leq \varphi(a) + \varphi(b)$ dan $\varphi(a \times b) \leq \varphi(a) \times \varphi(b)$.

Selain itu terdapat beberapa definisi khusus tentang homomorfisme pada latis yaitu *embedding*, endomorfisme, dan isomorfisme. Bagi penelitian selanjutnya dapat dikembangkan kajian homomorfisme pada latis dengan memberikan lebih banyak contoh-contoh, sehingga membentuk suatu teorema atau sifat-sifat baru yang berkaitan dengan homomorfisme pada latis.

ABSTRACT

Wahidah, Faizatul. 2017. **Homomorphism on Lattice**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang. Counselor: (I) Evawati Alisah, M.Pd. (II) Abdul Aziz, M.Si.

Keywords: Lattice, Homomorphism on Lattice, Embedding, Isomorphism, Endomorphism.

Lattice L is an algebra that is subjected to two binary operations (denoted by ($\times$) and ($+$)), which meet some axioms, namely both are idempotent operations, both are associative and commutative operations, and obtained the absorption of both operations. This thesis discussed about homomorphism on lattice. That is by providing definitions and examples which related to homomorphism on lattice and prove the characteristics which related to homomorphism on lattice. The purpose of this study is to describe the properties associated with homomorphism on lattice. As for the properties of the homomorphism on lattice, namely:

a. The homomorphic image H of L under φ is a sublattice of M.
b. Suppose L_1 and L_2 is a lattice with $a, b \in L_1$, and a function $\varphi: L_1 \to L_2$ is homomorphism on lattice. If φ join-homomorphism and meet-homomorphism, with $a \leq b \in L_1$ then applies $\varphi(a) \leq \varphi(b) \in L_2$.
c. Suppose L_1 and L_2 are lattice with $a, b \in L_1$, and a function $\varphi: L_1 \to L_2$ is isomorphism, then for any $a, b \in L_1$ applies $\varphi(a) + \varphi(b) \leq \varphi(a + b)$ and $\varphi(a) \times \varphi(b) \leq \varphi(a \times b)$.
d. Suppose L_1 and L_2 are lattice with $a, b \in L_1$, and a function $\varphi: L_1 \to L_2$ is isomorphism, then for any $a, b \in L_1$ applies $\varphi(a + b) \leq \varphi(a) + \varphi(b)$ and $\varphi(a \times b) \leq \varphi(a) \times \varphi(b)$.

In addition there are some specific definitions of homomorphism on lattice namely embedding, endomorphism and isomorphism. For further research, it can be developed study of homomorphism in lattice by giving more examples, and then it can form a new theorem or new characteristics related to homomorphism on lattice.

ملخص

الواحدة، فائزة. ٢٠١٧. **مفهوم التشاكل على شعرية**. بعث جامعي. شعبة الرياضيات كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المستشار: (١) ايفاواتي أليساالماجستير (٢) عبد العزيزالماجستير

كلمات البحث: شعرية ، مفهوم التشاكل على شعرية ، التضمين، تساوي الشكل ، إندومورفيسم

شعرية L هو الجبر الذي يتعرض لعمليات ثنائية اثنين (تدل على (×) و (+))، الذي يقبل بعض البديهيات، فمن العمليات على حد سواء إيمبوتنت، على حد سواء العمليات التعاونية والعمليات التبادلية، وامتصاص كل من العمليات .في هذه الأطروحة، يتم مناقشته، مفهوم التشاكل في شعرية .وذلك من خلال توفير تعاريف وأمثلة التي تتصل ، مفهوم التشاكل في شعرية. والغرض من هذه الدراسة هو وصف خصائص المرتبطة ، مفهوم التشاكل في شعرية. أما بالنسبة للخصائص، مفهوم التشاكل في شعرية، وهي:

ا. الصورة هومومورفيك H من L تحت φ هو سوبلاتيس من M

ب. لنفترض أن L_1 و L_2 عبارة عن شعرية مع $a, b \in L_1$ ، ودالة $\varphi: L_1 \rightarrow L_2$ هو مفهوم التشاكل على شعرية إذا φ الانضمام إلى مفهوم التشاكل وتلبية مفهوم التشاكل مع $a, b \in L_1$ ثم تطبيق $\varphi(a) \leq \varphi(b) \in L_2$.

ج. اسمحوا L_1 و L_2 تكون شعرية ودالة $\varphi: L_1 \rightarrow L_2$ هو تساوي الشكل ، ثم $\forall a, b \in L_1$ ينطبق $\varphi(a) + \varphi(b) \leq \varphi(a + b)$ و $\varphi(a) \times \varphi(b) \leq \varphi(a \times b)$.

د. اسمحوا L_1 و L_2 تكون شعرية ودالة $\varphi: L_1 \rightarrow L_2$ هو تساوي الشكل ، ثم $\forall a, b \in L_1$ ينطبق $\varphi(a + b) \leq \varphi(a) + \varphi(b)$ و $\varphi(a \times b) \leq \varphi(a) \times \varphi(b)$.

وبالإضافة إلى ذلك هناك بعض التعاريف محددة مفهوم التشاكل على شعرية: التضمين، إندومورفيسم و ، تساوي الشكل. لمزيد من البحث، ويمكن تطوير دراسة مفهوم التشاكل في شعرية من خلال إعطاء المزيد من الأمثلة، وبعد ذلك يمكن أن تشكل نظرية جديدة أو خصائص جديدة تتعلق مفهوم التشاكل في شعرية

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pada era globalisasi terdapat berbagai permasalahan yang muncul, sehingga manusia dituntut selalu berupaya untuk mencari pemecahan dari permasalahan tersebut. Di sisi lain, ilmu pengetahuan dan teknologi semakin berkembang, sehingga dapat membantu memberikan solusi dari permasalahan yang terjadi. Salah satu disiplin ilmu tersebut adalah matematika. Matematika merupakan salah satu cabang ilmu yang mendasari berbagai macam ilmu lain. Matematika merupakan alat untuk menyederhanakan penyajian dan pemahaman masalah. Dalam bahasa matematika, suatu masalah dapat menjadi lebih sederhana untuk disajikan, dipahami, dan dipecahkan. Untuk keperluan tersebut, pertama dicari pokok masalahnya, kemudian dibuat rumusan atau model matematikanya (Purwanto, 1998:1).

Allah Swt. berfirman dalam QS. al-Mujadilah ayat 11 sebagai berikut:

وَإِذَا قِيلَ ٱنشُزُوا۟ فَٱنشُزُوا۟ يَرْفَعِ ٱللَّهُ ٱلَّذِينَ ءَامَنُوا۟ مِنكُمْ وَٱلَّذِينَ أُوتُوا۟ ٱلْعِلْمَ دَرَجَٰتٍ ۚ وَٱللَّهُ بِمَا تَعْمَلُونَ خَبِيرٌ ﴿١١﴾

"... *niscaya Allah Swt. akan meninggikan orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat. Dan Allah Swt. Maha Mengetahui apa yang kamu kerjakan*" (QS. al-Mujadilah:11).

Dalam surat al-Mujadilah ayat 11 dijelaskan bahwa Allah Swt. akan mengangkat derajat orang-orang yang berilmu dan beriman, ilmu yang dimaksud antara lain semua ilmu yang memberi manfaat bagi kehidupan manusia, di antaranya adalah dapat memberikan solusi terhadap berbagai permasalahan yang terjadi. Ayat tersebut juga menunjukkan betapa pentingnya ilmu pengetahuan dalam kehidupan manusia, dan matematika adalah salah satunya.

Matematika memiliki beberapa bidang ilmu, salah satunya adalah aljabar. Terdapat beberapa materi yang dibahas dalam aljabar, di antaranya adalah himpunan, grup, ring, ideal, teori latis, dan sebagainya. Struktur aljabar dengan satu operasi biner yang memenuhi sifat-sifat tertentu disebut dengan grup. Sedangkan struktur aljabar dengan dua operasi biner yang memenuhi sifat tertentu disebut ring. Dalam perkembangannya, dua operasi biner yang memenuhi sifat tertentu disebut juga latis. Suatu latis L adalah suatu aljabar yang dikenai dua operasi biner (dilambangkan dengan $(\times)$ dan $(+)$), yang memenuhi beberapa postulat yaitu kedua operasi bersifat idempoten, kedua operasi bersifat asosiatif dan komutatif, serta berlaku sifat absorpsi terhadap kedua operasi (Gratzer, 2011:12).

Homomorfisme pada latis merupakan pemetaan dari suatu latis ke latis yang lain dengan dua sifat yang harus terpenuhi. Yaitu untuk setiap $a, b \in L$, maka berlaku $\varphi(a \times b) = \varphi(a) \times \varphi(b)$ dan $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$. Kedua sifat tersebut dinamakan mengawetkan operasi, artinya peta atau bayangan hasil operasi $a \times b \in L$ dan $a + b \in L$ sama dengan hasil operasi peta-petanya di M yaitu $\varphi(a) \times \varphi(b)$ dan $\varphi(a) + \varphi(b)$.

Pada penelitian Lailatul Fitriyah (2015) telah dibahas mengenai ideal dari latis. Pada penelitian tersebut telah dijelaskan mengenai definisi dan teorema-teorema pada latis dan ideal dari latis beserta bukti dan contohnya, oleh karena itu pada penelitian selanjutnya penulis tertarik untuk mengkaji bagian dari latis yang lain yaitu homomorfisme pada latis.

Berdasarkan latar belakang permasalahan di atas, penulis ingin mengetahui lebih jauh dan menganalisis tentang homomorfisme pada latis. Merujuk pada jurnal-jurnal ilmiah dan penelitian yang belum banyak menjelaskan tentang kajian homomorfisme pada latis secara lebih detail. Oleh karena itu, penulis merumuskan judul "Homomorfisme pada Latis".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan di atas, maka penulis akan membahas tentang homomorfisme pada latis. Oleh karena itu, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana sifat-sifat yang terkait dengan homomorfisme pada latis?

1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan latar belakang dan rumusan masalah yang tertulis di atas, maka tujuan dari pembahasan penelitian ini adalah untuk menjelaskan sifat-sifat yang terkait dengan homomorfisme pada latis.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dalam penelitian ini adalah:

1. Bagi Lembaga:
   a. Sebagai bahan informasi tentang pembelajaran mata kuliah teori latis yang masih terbatas referensinya.

b. Sebagai tambahan bahan kepustakaan.

2. Bagi Penulis:

   a. Untuk menambah pemahaman tentang konsep yang ada dalam matematika, khususnya teori latis.

   b. Sebagai sarana dan latihan untuk menambah penguasaan penulis dalam mengkaji konsep homomorfisme pada latis.

3. Bagi Pembaca:

   a. Hasil penelitian ini dapat digunakan sebagai rujukan dalam perkuliahan.

   b. Menambah pengetahuan pembaca tentang latis.

1.5 Metode Penelitian

Dalam penelitian ini, metode yang digunakan adalah metode penelitian kepustakaan (*library research*) atau kajian pustaka, yakni melakukan penelitian untuk memperoleh data-data dan informasi-informasi serta objek-objek yang digunakan dalam pembahasan masalah tersebut.

Adapun langkah-langkah yang akan digunakan oleh peneliti, sebagai berikut:

1. Mencari literatur utama yang dijadikan acuan dalam pembahasan ini. Literatur yang dimaksud adalah karya ilmiah yang berupa buku yang ditulis oleh Gratzer (2011).
2. Mengumpulkan berbagai literatur pendukung, baik yang bersumber dari buku-buku, jurnal, artikel, diktat kuliah, internet, dan lainnya yang berhubungan dengan permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian.
3. Memahami dan mempelajari konsep homomorfisme pada latis.

4. Membuktikan sifat-sifat yang terdapat dalam homomorfisme pada latis.
5. Memberi contoh-contoh yang sesuai dalam definisi yang berkaitan dengan homomorfisme pada latis.

1.6 Sistematika Penulisan

Dalam penulisan penelitian ini, penulis menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab, dan masing-masing bab dibagi dalam subbab dengan sistematika penulisan sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Bagian pendahuluan meliputi: latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Pada bagian ini terdiri atas teori-teori yang mendukung bagian pembahasan. Teori-teori tersebut antara lain membahas tentang himpunan, fungsi, relasi dan operasi, latis, homomorfisme pada latis, dan kajian latis dalam Islam.

Bab III Pembahasan

Pada bagian pembahasan berisi tentang sifat-sifat yang terkait dengan homomorfisme pada latis serta kajian homomorfisme pada latis dalam Islam.

Bab IV Penutup

Pada bagian ini berisi tentang kesimpulan dan saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Himpunan

Istilah himpunan seringkali dijumpai ketika mempelajari aljabar abstrak. Hal ini dikarenakan himpunan merupakan dasar dari berbagai pembahasan mengenai struktur aljabar. Definisi himpunan dapat dilihat sebagai berikut:

Definisi 2.1

Himpunan (*set*) didefinisikan sebagai kumpulan atau koleksi objek-objek yang terdefinisi dengan jelas (*well defined*). Objek dapat berupa objek nyata dan dapat juga berupa objek abstrak. Objek dapat berbentuk orang, nama orang, hewan, benda, bilangan, planet, nama hari atau lainnya. Sebagai contoh kumpulan nama-nama hari dalam satu minggu. Himpunan dapat dinyatakan dengan mendaftar semua anggotanya didalam tanda kurung kurawal yaitu { } (Abdussakir, 2007:103).

Untuk lebih mempertajam, terdapat tiga pengertian dasar, yaitu himpunan, anggota, dan relasi keanggotaan ($\in$). Misalkan X himpunan dan a anggota. Penulisan $a \in X$ berarti a anggota X atau X memuat a. Sebaliknya, penulisan $a \notin X$ berarti a bukan anggota X atau X tidak memuat a. Anggota himpunan X dapat dikatakan juga sebagai unsur himpunan X. Jika ada anggota a yang memenuhi $a \in X$, maka X dikatakan mempunyai anggota, atau himpunan tak kosong. Sebaliknya, jika himpunan X tidak mempunyai anggota, maka himpunan X dikatakan himpunan kosong dan ditandai dengan $\emptyset$ (Arifin, 2000:1).

Suatu himpunan dikatakan hingga atau tak hingga sesuai banyaknya anggota yang dimuat. Himpunan bilangan asli antara 1 dan 100 merupakan contoh untuk himpunan hingga. Himpunan yang tidak mempunyai anggota atau himpunan kosong juga merupakan suatu himpunan hingga. Sedangkan himpunan semua bilangan asli merupakan contoh himpunan tak hingga. Himpunan semua bilangan asli, bulat, rasional, nyata, dan kompleks berturut-turut diberi tanda $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, dan $\mathbb{C}$. Masing-masing adalah himpunan tak hingga (Arifin, 2000:1).

Contoh:

Didefinisikan A himpunan bilangan bulat positif, maka dapat ditulis:

$$A = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

atau

$$A = \{x | x \in \mathbb{Z}\}$$

Masing-masing objek dalam himpunan A disebut anggota atau elemen himpunan dan dapat ditulis,

$$x \in A \text{ artinya } x \text{ anggota himpunan } A$$

Definisi 2.2

Misalkan A dan B himpunan. Himpunan B dinyatakan himpunan bagian (*subset*) dari A jika setiap anggota himpunan B juga merupakan anggota himpunan A, maka ditulis:

$$B \subseteq A$$

Dapat dibaca bahwa B himpunan bagian dari A, B *subset* A, B termuat di A, A memuat B, secara simbolik:

$$B \subseteq A \Leftrightarrow (x \in B \Rightarrow x \in A)$$

Misalkan A dan B himpunan. Himpunan B dikatakan bukan himpunan bagian dari A jika ada anggota himpunan B yang bukan anggota himpunan A dan ditulis dengan $B \nsubseteq A$ (Abdussakir, 2009:10).

Contoh:

Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ dan $B = \{2, 4, 7\}$

Maka B bukan himpunan bagian A, karena ada anggota B yang bukan merupakan anggota A, yaitu 7. Jadi dapat ditulis $B \nsubseteq A$.

2.2 Relasi dan Operasi

Relasi merupakan salah satu bagian penting dalam aljabar. Secara umum relasi didefinisikan sebagai suatu aturan yang memasangkan anggota himpunan ke himpunan yang lain.

Definisi 2.3

Misalkan A dan B adalah dua himpunan tak kosong, maka suatu relasi R dari A ke B adalah suatu himpunan bagian dari $A \times B$ (Mas'od, 2013:9).

Contoh:

Misalkan terdapat himpunan $A = \{a, b, c\}$, maka suatu relasi yang mungkin adalah $R = \{(a, c), (a, a), (b, c), (c, a)\}$.

Bila R suatu relasi pada A maka $(a, b) \in R$, ditulis dengan aRb.

Definisi 2.4

Misalkan R adalah suatu relasi pada A, maka R disebut:

1. Refleksif, jika aRa untuk semua $a \in A$.

   Contoh: Misalkan diberikan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, suatu relasi R dinamakan refleksif jika dan hanya jika $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$.

2. Simetris, jika aRb maka bRa untuk semua $a, b \in A$

   Contoh: Misalkan diberikan $A = \{1, 2, 3\}$, suatu relasi R dinamakan simetris jika dan hanya jika $R = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1)\}$.

3. Transitif, jika aRb dan bRc, maka aRc untuk semua $a, b, c \in A$

   Contoh: Misalkan diberikan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, suatu relasi R dinamakan transitif jika dan hanya jika $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 4), (2, 4)\}$.

4. Antisimetris, jika aRb dan $a \neq b$, maka $bRa \notin R$ untuk semua $a, b \in A$

   Contoh: Misalkan diberikan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, suatu relasi R dinamakan antisimetris jika dan hanya jika $R = \{(1, 3), (4, 2), (3, 3), (4, 4)\}$.

Berdasarkan definisi di atas didapatkan:

a. R disebut relasi ekuivalen pada A, jika R refleksif, simetris, dan transitif.

b. R disebut relasi terurut parsial (*partial order*) pada R, jika R refleksif, antisimetris, dan transitif.

(Mas'od, 2013:9).

Definisi 2.5 (Operasi biner)

Misalkan G suatu himpunan yang tidak kosong. Operasi $*$ pada elemen-elemen G disebut operasi biner, apabila setiap dua elemen $a, b \in G$, maka $(a * b) \in G$. Operasi $*$ pada G merupakan operasi biner, dapat pula dikatakan bahwa operasi $*$ pada G bersifat tertutup (Sukirman, 2005:35).

Contoh:

Misalkan A merupakan himpunan semua bilangan bulat. Operasi $+$ pada A merupakan operasi biner, karena operasi $+$ merupakan pemetaan dari $(A \times A) \rightarrow A$, yaitu untuk setiap $(a, b) \in (A \times A)$, maka $(a + b) \in A$. Jumlah dua bilangan bulat adalah bilangan bulat pula. Operasi $:$ atau pembagian pada A bukan merupakan operasi biner pada A, karena ada $(a,b) \in A \times A$ sedemikian sehingga $(a:b) \notin A$. Misalkan $(5,4) \in A \times A$ dan $5 : 4 \notin A$.

Misalkan operasi $*$ pada G adalah suatu operasi biner,

a) Apabila untuk setiap $a,b \in G$ berlaku $a * b = b * a$, maka dikatakan bahwa operasi $*$ pada G bersifat komutatif.

b) Apabila untuk setiap $a,b,c \in G$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$, maka dikatakan bahwa operasi $*$ pada G bersifat asosiatif.

c) Jika ada $e \in G$ sedemikian sehingga untuk setiap $a \in G$ berlaku $a * e = e * a = a$, maka e disebut elemen identitas terhadap $*$.

d) Jika untuk setiap $a \in G$, ada $b \in G$ sedemikian sehingga $a * b = b * a = e$, maka b disebut invers dari a terhadap operasi $*$. Invers dari a ditulis a^{-1}.

(Sukirman, 2005:35).

2.3 Fungsi

Fungsi merupakan hal terpenting dalam matematika. Dalam kalkulus, dipelajari fungsi dengan mengaitkan bilangan real pada bilangan real. Banyak pendekatan yang ditempuh untuk mendefinisikan suatu fungsi. Dalam aljabar fungsi akan didefinisikan langsung berdasarkan dua himpunan A dan himpunan B.

Definisi 2.6

Suatu fungsi dari himpunan S ke T adalah aturan yang mengaitkan setiap unsur S dengan tepat satu unsur T. Unsur S disebut domain dari fungsi dan himpunan T disebut kodomain (Durbin, 1992:12).

Suatu fungsi f dari himpunan S ke himpunan T didefinisikan sebagai aturan yang memasangkan masing-masing anggota S dengan tepat satu anggota T.

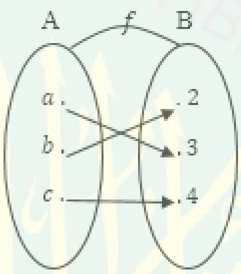
Jika $a \in S$ oleh f dipasangkan dengan $b \in T$, maka ditulis $f(a) = b$. Secara umum dapat dinotasikan sebagai:

$$f: S \to T$$

notasi tersebut menunjukkan bahwa ada suatu fungsi f yang memetakan himpunan A ke himpunan B (Durbin, 1992:12).

Contoh:

Misalkan himpunan $A = \{a, b, c\}$ dan himpunan $B = \{2, 3, 4\}$. Misal $f: A \to B$ seperti pada diagram berikut:



Gambar 2.1 Fungsi

Sehingga, himpunan f diperoleh $f = \{(a, 3), (b, 2), (c, 4)\}$, maka f suatu fungsi dari A ke B.

Definisi 2.7 (Injektif)

Suatu fungsi $f: S \to T$ dikatakan satu-satu atau injektif, jika untuk setiap unsur x_1 dan x_2 di S yang dipetakan sama oleh f, yaitu $f(x_1) = f(x_2)$ berlaku $x_1 = x_2$ (Arifin, 2000:8).

Contoh:

Misalkan didefinisikan suatu fungsi $f: R \to R$ dengan $f(x) = 2x - 5$, maka tunjukkan bahwa f fungsi injektif atau satu-satu.

Jawab:

Ambil sebarang $x, y \in R$, dengan $f(x) = 2x - 5$.

Misalkan $f: R \to R$. Karena $f(x) = f(y)$, maka

$$2x - 5 = 2y - 5$$

$2x - 5 + 5 = 2y - 5 + 5$ (kedua ruas dioperasikan dengan 5)

$2x = 2y$ (dikalikan $\frac{1}{2}$)

$x = y$ (terbukti)

Maka terbukti bahwa f adalah fungsi injektif.

Definisi 2.8 (Surjektif)

Suatu fungsi $f: S \to T$ dikatakan pada atau surjektif, jika untuk setiap unsur $y \in T$ terdapat unsur $x \in S$ yang memenuhi $f(x) = y$ (Arifin, 2000:8).

Contoh:

Misalkan A himpunan bilangan riil dan B himpunan bilangan riil non negatif. Dibentuk fungsi f dari A ke B yang didefinisikan sebagai $f(x) = x^2$, maka tunjukkan bahwa fungsi f merupakan fungsi surjektif.

Jawab:

Misalkan $f: A \to B$ dan didefinisikan $f(x) = x^2$.

Ambil $y \in B$, maka $y \in R$ dan $y \geq 0$.

Akan dibuktikan $x \in R$, sehingga $x^2 = y \geq 0$.

Jadi ada $x \in A$ sehingga $f(x) = x^2 = y \in B$.

Maka f merupakan fungsi surjektif.

Definisi 2.9 (Bijektif)

Suatu fungsi yang sekaligus injektif dan surjektif disebut fungsi bijektif atau korespondensi satu-satu (Arifin, 2000:8).

Contoh:

Misalkan R adalah himpunan semua bilangan real. Fungsi $f: R \to R$ didefinisikan oleh $f(x) = 4x + 3$, untuk setiap $x \in R$, maka tunjukkan bahwa f merupakan fungsi bijektif.

Jawab:

Jika $a, b \in R$ sedemikian sehingga $f(a) = f(b)$ yaitu $4a + 3 = 4b + 3$, maka $a = b$. Sehingga f termasuk fungsi injektif atau satu-satu.

Selanjutnya jika $d \in R$, ada $c \in R$ dengan diberikan $c = \frac{d-3}{4}$ sedemikian sehingga $f(c) = f\left(\frac{d-3}{4}\right) = 4\left(\frac{d-3}{4}\right) + 3 = d$, maka f termasuk fungsi surjektif. Karena f termasuk fungsi injektif dan surjektif, maka f termasuk fungsi bijektif.

2.5 Latis

Suatu latis dapat dipandang dari sudut pandang aljabar dan dari sudut pandang teori himpunan. Dalam hal ini penulis akan membahas suatu latis dari sudut pandang aljabar.

Definisi 2.10

Suatu latis L adalah suatu aljabar dengan dua operasi biner (dilambangkan dengan perkalian $(\times)$ dan penjumlahan $(+)$) yang memenuhi postulat-postulat berikut:

IA	$a \times a = a$	operasi $\times$ bersifat idempoten
IB	$a + a = a$	operasi $+$ bersifat idempoten
IIA	$a \times b = b \times a$	operasi $\times$ bersifat komutatif
IIB	$a + b = b + a$	operasi $+$ bersifat komutatif
IIIA	$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$	operasi $\times$ bersifat asosiatif

IIIB $a + (b + c) = (a + b) + c$ operasi $+$ bersifat asosiatif

IVA $a \times (a + b) = a$ absorpsi terhadap operasi $+$

IVB $a + (a \times b) = a$ absorpsi terhadap operasi $\times$

dengan $a, b,$ dan c adalah elemen yang ada di L (Gratzer, 2011:12).

Contoh:

Tunjukkan bahwa $(L, \times, +)$ merupakan latis, dengan L adalah himpunan yang unsur-unsurnya merupakan faktor dari 4 yaitu $L = \{1, 2, 4\}$. Didefinisikan bahwa $a \times b = FPB(a, b)$ dan $a + b = KPK(a, b)$.

Jawab:

1. Untuk postulat IA, IB, IIA dan IIB

   Perhatikan tabel cayley untuk $a \times b$ dan $a + b$ berikut:

Tabel 2.1 Tabel Cayley untuk $a \times b$

$\times$	1	2	4
1	1	1	1
2	1	2	2
4	1	2	4

Tabel 2.2 Tabel Cayley untuk $a + b$

$+$	1	2	4
1	1	2	4
2	2	2	4
4	4	4	4

   Berdasarkan Tabel 2.1 dan Tabel 2.2 terbukti bahwa $(L, \times, +)$ memenuhi postulat IA, IB, IIA, dan IIB yaitu operasi pertama dan kedua bersifat idempoten dan komutatif.

2. Untuk postulat IIIA dan IIIB

   Perhatikan tabel cayley untuk sifat asosiatif berikut:

Tabel 2.3 Tabel Cayley Sifat Asosiatif untuk Operasi Pertama

$\times$	1	2	4	(1×1)	(1×2)	(1×4)	(2×2)	(2×4)	(4×4)
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	4	1	1	1	2	2	2
4	1	2	4	1	1	1	2	2	4
(1×1)	1	1	1						
(1×2)	1	1	1						
(1×4)	1	1	1						
(2×2)	1	2	2						
(2×4)	1	2	2						
(4×4)	1	2	4						

Tabel 2.4 Tabel Cayley Sifat Asosiatif untuk Operasi Kedua

$+$	1	2	4	$(1 + 1)$	(1×2)	$(1 + 4)$	$(2 + 2)$	$(2 + 4)$	$(4 + 4)$
1	1	2	4	1	2	4	2	4	4
2	2	2	4	2	2	4	2	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
$(1 + 1)$	1	2	4						
$(1 + 2)$	2	2	4						
$(1 + 4)$	4	4	4						
$(2 + 2)$	2	2	4						
$(2 + 4)$	4	4	4						
(4×4)	4	4	4						

Berdasarkan Tabel 2.3 dan Tabel 2.4 terbukti bahwa $(L, \times, +)$ memenuhi postulat IIIA dan IIIB yaitu operasi pertama dan kedua bersifat asosiatif.

3. Untuk postulat IVA dan IVB

   Perhatikan tabel cayley untuk sifat absorbsi berikut:

Tabel 2.5 Tabel Cayley Sifat Absorbsi untuk Operasi Pertama

$\times$	$(1 + 1)$	$(1 + 2)$	$(1 + 4)$	$(2 + 1)$	$(2 + 2)$	$(2 + 4)$	$(4 + 1)$	$(4 + 2)$	$(4 + 4)$
1	1	1	1						
2				2	2	2			
4							4	4	4

Tabel 2.6 Tabel Cayley Sifat Absorbsi untuk Operasi Kedua

$+$	(1×1)	(1×2)	(1×4)	(2×1)	(2×2)	(2×4)	(4×1)	(4×2)	(4×4)
1	1	1	1						
2				2	2	2			
4							4	4	4

Berdasarkan Tabel 2.5 dan Tabel 2.6 terbukti bahwa $(L, \times, +)$ memenuhi postulat IVA dan IVB yaitu absorbsi terhadap operasi pertama dan kedua.

Dari 1,2, dan 3, maka terbukti bahwa $(L, \times, +)$ adalah suatu latis.

Teorema 2.1

Misal L adalah suatu latis dan $a, b \in L$. Jika $a \times b = a$, maka $a + b = b$ (Sukardjono, 2002:40).

Bukti:

$a + b = (a \times b) + b$ menurut ketentuan a

$= b + (a \times b)$ menurut IIB

$= b + (b \times a)$ menurut IIA

$= b$ menurut IVB

Teorema 2.2

Misal L adalah suatu latis dan $a, b \in L$. Jika $a + b = b$, maka $a \times b = a$ (Sukardjono, 2002:40).

Bukti:

$a \times b = a \times (a + b)$ menurut ketentuan b

$= a$ menurut IVA

Definisi 2.11

Didefinisikan suatu relasi R di antara dua unsur dalam suatu latis dengan aRb jika dan hanya jika $a \times b = a$ dan $a + b = b$ (Sukardjono, 2002:40).

Contoh:

Misalkan $(L, \times, +)$ adalah suatu latis, dengan L adalah himpunan yang unsur-unsurnya merupakan kelipatan dari 2 yaitu $L = \{2, 4\}$.

Didefinisikan bahwa $a \times b = FPB(a, b)$ dan $a + b = KPK(a, b)$, maka tunjukkan bahwa untuk semua $a, b \in L$ berlaku aRb.

Jawab:

Pertama akan ditunjukkan untuk semua $a, b \in L$ berlaku aRb jika dan hanya jika $a \times b = a$, yaitu:

a. Saat $a = 2$ dan $b = 2$

$a \times b = a$

$2 \times 2 = 2$

$2 = 2$

b. Saat $a = 2$ dan $b = 4$

$a \times b = a$

$2 \times 4 = 2$

$2 = 2$

c. Saat $a = 4$ dan $b = 2$

$a \times b = a$

$4 \times 2 = 4$

$2 \neq 4$

Karena saat $a = 4$ dan $b = 4$ tidak memenuhi kondisi aRb jika dan hanya jika $a \times b = a$ maka untuk semua $2, 4 \in L$ tidak berlaku aRb.

Teorema 2.3

Misal L adalah suatu latis, maka untuk semua $a, b \in L$ berlaku aRa (Sukardjono, 2002:40).

Bukti:

$a \times a = a$ (menurut postulat IA)

Berdasarkan Definisi 2.11, maka terbukti bahwa aRa untuk semua $a \in L$.

Teorema 2.4

Misal L adalah suatu latis, maka untuk semua $a, b \in L$ berlaku jika aRb dan bRa, maka $a = b$ (Sukardjono, 2002:40).

Bukti:

$a = a \times b$ (menurut ketentuan pertama dan Definisi 2.11)

$= b \times a$ (menurut postulat IIA)

$= b$ (menurut ketentuan kedua dan Definisi 2.11)

Teorema 2.5

Misal L suatu latis, maka untuk semua $a, b \in L$ berlaku jika aRb dan bRc, maka aRc (Sukardjono, 2002:40).

Bukti:

$a \times c = (a \times b) \times c$ (menurut ketentuan pertama dan Definisi 2.11)

$= a \times (b \times c)$ (menurut IIIA)

$= a \times b$ (menurut ketentuan kedua dan Definisi 2.11)

$= a$ (menurut keteentuan pertama dan Definisi 2.11)

Jadi terbukti bahwa aRc menurut Definisi 2.11.

Relasi R pada Teorema 2.5-2.7 merupakan relasi terurut parsial karena bersifat refleksif (Teorema 2.5), antisimetris (Teorema 2.6), dan transitif (Teorema 2.7). Relasi terurut parsial dituliskan dengan $a \leq b$ untuk aRb (Sukardjono, 2002:41).

Teorema 2.6

Suatu latis adalah poset (*partially ordered set*) dengan sifat $a \leq b$ yang berarti $a \times b = a$ dan $a + b = b$ (Sukardjono, 2002:41).

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa jika $a \leq b$, maka berlaku $a \times b = a$ dan $a + b = b$. Karena $a \leq b$, maka untuk semua $a, b \in L$ berlaku sifat refleksif, antisimetris, dan transitif.

Pertama akan dibuktikan bahwa jika $a \leq b$, maka $a \times b = a$ yaitu:

$a \times b = a \times a$ (karena berlaku sifat antisimetris)

$= a$ (karena berlaku sifat refleksif)

Selanjutnya berdasarkan Teorema 2.1 jika $a \times b = a \in L$, maka $a + b = b \in L$, sehingga terbukti jika $a \leq b$, maka berlaku $a \times b = a$ dan $a + b = b$.

Teorema 2.7

Misal L suatu latis, maka untuk semua $a, b \in L$ berlaku $(a \times b) \leq a$ (Sukardjono, 2002:42).

Bukti:

Berdasarkan Definisi 2.11 jika $(a \times b) \leq a$, maka berlaku $(a \times b) + a = a$, sehingga akan dibuktikan bahwa $(a \times b) + a = a$ yaitu:

$(a \times b) + a = a + (a \times b)$ (menurut postulat IIB)

$= a$ (menurut postulat IVB)

maka

$(a \times b) \leq a$ (menurut Definisi 2.11).

Teorema 2.8

Misal L suatu latis, maka untuk semua $a, b \in L$ berlaku $a \leq (a + b)$ (Sukardjono, 2002:42).

Bukti:

Berdasarkan Definisi 2.11 jika $a \leq (a+b)$, maka berlaku $a \times (a+b) = a$, sehingga akan dibuktikan bahwa $a \times (a+b) = a$ yaitu:

$a \times (a+b) = a$ (menurut postulat IVA)

Sehingga,

$a \leq (a+b)$ (menurut Definisi 2.11)

Teorema 2.9

Misal L adalah suatu latis, maka untuk semua $a, b \in L$ berlaku $(a \times b) \leq b$ (Sukardjono, 2002:42).

Bukti:

$(b \times a) \leq b$ (menurut Teorema 2.7)

Tetapi,

$b \times a = a \times b$ (menurut postulat IIA)

Jadi,

$(a \times b) \leq b$

Teorema 2.10

Misal L adalah suatu latis, maka untuk semua $a, b \in L$ berlaku $b \leq a + b$ (Sukardjono, 2002:42).

Bukti:

$b \leq b + a$ (menurut Teorema 2.8)

Tetapi,

$b + a = a + b$ (menurut postulat IIB)

Jadi,

$b \leq a + b$

Teorema 2.11

Misal L adalah suatu latis, maka untuk semua $a, b, c \in L$ berlaku jika $c \leq a$ dan $c \leq b$, maka $c \leq a \times b$ (Sukardjono, 2002:42).

Bukti:

$c = c \times a$ (menurut ketentuan pertama dan Definisi 2.11)

$= (c \times b) \times a$ (menurut ketentuan kedua dan Definisi 2.11)

$= c \times (b \times a)$ (menurut postulat IIIA)

$= c \times (a \times b)$ (menurut postulat IIA)

Dengan demikian $c \leq a \times b$ menurut Definisi 2.11.

Teorema 2.12

Misal L adalah suatu latis, maka untuk semua $a, b, c \in L$ berlaku jika $a \leq c$ dan $b \leq c$, maka $a + b \leq c$ (Sukardjono, 2002:42).

Bukti:

$(a + b) + c = a + (b + c)$ (menurut postulat IIIB)

$= a + c$ (menurut ketentuan kedua dan Definisi 2.11)

$= c$ (menurut ketentuan pertama dan Definisi 2.11)

Dengan demikian $a + b \leq c$ berdasarkan Definisi 2.11.

Definisi 2.12 (Sublatis)

Misalkan $(H, \times, +)$ dan $(M, \times, +)$ adalah suatu latis. H dikatakan sublatis dari M jika H adalah himpunan bagian dari M dengan $a, b \in H$, maka $a \times b$ dan $a + b \in H$ (operasi $(\times)$ dan $(+)$ adalah operasi yang ada di M) (Gratzer, 2011:31).

Contoh:

Misalkan diberikan dua latis $(H, \times, +)$ dan $(M, \times, +)$ dengan $H = \{1, 2\}$ dan $M = \{1, 2, 4\}$. Didefinisikan bahwa H adalah himpunan bagian dari M, maka tunjukkan bahwa H adalah sublatis dari M.

Jawab:

Berdasarkan contoh pada Definisi 2.10 telah dibuktikan bahwa H dan M adalah suatu latis, untuk membuktikan bahwa H adalah sublatis dari M maka akan ditunjukkan bahwa untuk semua $a, b \in H$, maka $a \times b \in H$ dan $a + b \in H$. Misalkan didefinisikan untuk $a \times b = FPB(a, b)$ dan $a + b = KPK(a, b)$, maka:

1. Untuk $a \times b \in H$
   a. Saat $a = 1$ dan $b = 1$
      $1 \times 1 = 1 \in H$
   b. Saat $a = 1$ dan $b = 2$
      $1 \times 2 = 1 \in H$
   c. Saat $a = 2$ dan $b = 1$
      $2 \times 1 = 1 \in H$
   d. Saat $a = 2$ dan $b = 2$
      $2 \times 2 = 2 \in H$
2. Untuk $a + b \in H$
   a. Saat $a = 1$ dan $b = 1$
      $1 + 1 = 1 \in H$
   b. Saat $a = 1$ dan $b = 2$
      $1 + 2 = 2 \in H$

c. Saat $a = 2$ dan $b = 1$

$2 + 1 = 2 \in H$

d. Saat $a = 2$ dan $b = 2$

$2 + 2 = 2 \in H$

Dari 1 dan 2 terbukti bahwa untuk semua $a, b \in H$, maka $a \times b \in H$ dan $a + b \in H$, sehingga H merupakan sublatis dari M.

2.6 Homomorfisme pada Latis

Pada bagian ini akan dibahas mengenai pemetaan dari suatu latis ke latis yang lain (mungkin ke dirinya sendiri), pemetaan ini dinamakan homomorfisme pada latis. Selain itu akan dibahas juga mengenai definisi-definisi khusus dari homomorfisme pada latis.

Definisi 2.13 Homomorfisme pada Latis

Misalkan $(L, \times, +)$ dan $(M, \times, +)$ adalah suatu latis. Suatu fungsi $\varphi: L \to M$ disebut homomorfisme pada latis jika dan hanya jika didefinisikan untuk semua $a, b \in L$ berlaku:

1. $\varphi(a \times b) = \varphi(a) \times \varphi(b)$

   φ dikatakan *meet-homomorphism*.

2. $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$

   φ dikatakan *join-homomorphism*.

(Gratzer, 2011:30).

Kedua sifat tersebut dinamakan mengawetkan operasi, artinya peta (bayangan) hasil operasi $a \times b \in L$ sama dengan hasil operasi peta-petannya di M yaitu $\varphi(a) \times \varphi(b)$ dan peta hasil operasi $a + b \in L$ sama dengan hasil operasi peta-

petannya di M yaitu $\varphi(a) + \varphi(b)$. Himpunan bagian H dari M yang muncul sebagai peta dalam pemetaan φ disebut bayangan homomorfik dari L.

Contoh:

Misalkan diberikan $(L, \times, +)$ dan $(M, \times, +)$ yang merupakan himpunan tak kosong dengan dua operasi biner, dengan L adalah himpunan yang unsur-unsurnya merupakan faktor dari 2 yaitu $L = \{1, 2\}$ dan M adalah himpunan yang unsur-unsurnya merupakan faktor dari 4 yaitu $M = \{1, 2, 4\}$. Misalkan $\varphi: L \to M$ dan didefinisikan $\varphi(1) = 1, \varphi(2) = 2$. Kemudian didefinisikan bahwa $a \times b = FPB(a, b)$ dan $a + b = KPK(a, b)$, maka tunjukkan bahwa $\varphi: L \to M$ adalah homomorfisme pada latis.

Jawab:

Pertama harus dibuktikan bahwa $(L, \times, +)$ dan $(M, \times, +)$ adalah latis, yang sudah dibuktikan dalam contoh pada Definisi 2.10. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\varphi: L \to M$ adalah homomorfisme pada latis yaitu memenuhi dua sifat dari homomorfisme pada latis, di antarannya:

1. Untuk $\varphi(a \times b) = \varphi(a) \times \varphi(b)$
   a. Saat $a = 1$ dan $b = 1$

   $$\begin{aligned}\varphi(a \times b) &= \varphi(1 \times 1)\\ &= \varphi(1)\\ &= 1\end{aligned}$$

   $$\begin{aligned}\varphi(a) \times \varphi(b) &= \varphi(1) \times \varphi(1)\\ &= 1 \times 1\\ &= 1\end{aligned}$$

   Jadi $\varphi(a \times b) = \varphi(a) \times \varphi(b)$.

b. Saat $a = 1$ dan $= 2$

$\varphi(a \times b) = \varphi(1 \times 2)$

$= \varphi(1)$

$= 1$

$\varphi(a) \times \varphi(b) = \varphi(1) \times \varphi(2)$

$= 1 \times 2$

$= 1$

Jadi $\varphi(a \times b) = \varphi(a) \times \varphi(b)$.

c. Saat $a = 2$ dan $= 1$

$\varphi(a \times b) = \varphi(2 \times 1)$

$= \varphi(1)$

$= 1$

$\varphi(a) \times \varphi(b) = \varphi(2) \times \varphi(1)$

$= 2 \times 1$

$= 1$

Jadi $\varphi(a \times b) = \varphi(a) \times \varphi(b)$.

d. Saat $a = 2$ dan $= 2$

$\varphi(a \times b) = \varphi(2 \times 2)$

$= \varphi(2)$

$= 2$

$\varphi(a) \times \varphi(b) = \varphi(2) \times \varphi(2)$

$= 2 \times 2$

$= 2$

Jadi $\varphi(a \times b) = \varphi(a) \times \varphi(b)$.

2. Untuk $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$

   a. Saat $a = 1$ dan $= 1$

   $\varphi(a+b) = \varphi(1+1)$

   $= \varphi(1)$

   $= 1$

   $\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi(1) + \varphi(1)$

   $= 1 + 1$

   $= 1$

   Jadi $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$.

   b. Saat $a = 1$ dan $= 2$

   $\varphi(a+b) = \varphi(1+2)$

   $= \varphi(2)$

   $= 2$

   $\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi(1) + \varphi(2)$

   $= 1 + 2$

   $= 2$

   Jadi $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$.

   c. Saat $a = 2$ dan $= 1$

   $\varphi(a+b) = \varphi(2+1)$

   $= \varphi(2)$

   $= 2$

   $\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi(2) + \varphi(1)$

   $= 2 + 1$

   $= 2$

Jadi $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$.

d. Saat $a = 2$ dan $= 2$

$\varphi(a+b) = \varphi(2+2)$

$= \varphi(2)$

$= 2$

$\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi(2) + \varphi(2)$

$= 2 + 2$

$= 2$

Jadi $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$.

Karena $(L, \times, +)$ dan $(M, \times, +)$ adalah suatu latis, maka berdasarkan 1 dan 2 terbukti bahwa $\varphi: L \to M$ adalah homomorfisme pada latis.

Definisi 2.17 (*Embedding*)

Misalkan $(L, \times, +)$ dan $(M, \times, +)$ adalah suatu latis. Didefinisikan suatu fungsi $\varphi: L \to M$ adalah homomorfisme pada latis. Jika fungsi φ injektif, maka homomorfisme dari L ke M dinamakan *embedding* (Gratzer, 2011:30).

Dalam contoh pada Definisi 2.13 merupakan salah satu contoh dari *embedding*, karena fungsinya merupakan fungsi injektif dengan $L = \{1, 2\}$ dan $M = \{1, 2, 4\}$ dan untuk $1, 2 \in L$ maka $\varphi(1) \neq \varphi(2)$.

Definisi 2.18 (Isomorfisme)

Misalkan $(L, \times, +)$ dan $(M, \times, +)$ adalah suatu latis. Didefinisikan suatu fungsi $\varphi: L \to M$ adalah homomorfisme pada latis. Jika fungsi φ bijektif, maka homomorfisme dari L ke M dinamakan isomorfisme (Gratzer, 2011:30).

Contoh:

Misalkan diberikan dua latis yaitu $(L, \times, +)$ dan $(M, \times, +)$ dengan $L = \{1, 2\}$ dan $M = \{2, 4\}$. Misalkan $\varphi: L \to M$ adalah homomorfisme pada latis, serta didefinisikan bahwa $\varphi(1) = 2$, $\varphi(2) = 4$, $a \times b = FPB(a, b)$, dan $a + b = KPK(a, b)$, maka tunjukkan bahwa $\varphi: L \to M$ adalah suatu isomorfisme.

Jawab:

Pertama akan dibuktikan bahwa $\varphi: L \to M$ adalah homomorfisme pada latis yaitu memenuhi dua sifat dari homomorfisme pada latis, di antaranya:

1. Untuk $\varphi(a \times b) = \varphi(a) \times \varphi(b)$
   a. Saat $a = 1$ dan $b = 1$

   $$\begin{aligned}\varphi(a \times b) &= \varphi(1 \times 1)\\ &= \varphi(1)\\ &= 2\end{aligned}$$

   $$\begin{aligned}\varphi(a) \times \varphi(b) &= \varphi(1) \times \varphi(1)\\ &= 2 \times 2\\ &= 2\end{aligned}$$

   Jadi $\varphi(a \times b) = \varphi(a) \times \varphi(b)$.

   b. Saat $a = 1$ dan $b = 2$

   $$\begin{aligned}\varphi(a \times b) &= \varphi(1 \times 2)\\ &= \varphi(1)\\ &= 2\end{aligned}$$

   $$\begin{aligned}\varphi(a) \times \varphi(b) &= \varphi(1) \times \varphi(2)\\ &= 2 \times 4\\ &= 2\end{aligned}$$

Jadi $\varphi(a \times b) = \varphi(a) \times \varphi(b)$.

c. Saat $a = 2$ dan $b = 1$

$\varphi(a \times b) = \varphi(2 \times 1)$

$= \varphi(1)$

$= 2$

$\varphi(a) \times \varphi(b) = \varphi(2) \times \varphi(1)$

$= 4 \times 2$

$= 2$

Jadi $\varphi(a \times b) = \varphi(a) \times \varphi(b)$.

d. Saat $a = 2$ dan $b = 2$

$\varphi(a \times b) = \varphi(2 \times 2)$

$= \varphi(2)$

$= 4$

$\varphi(a) \times \varphi(b) = \varphi(2) \times \varphi(2)$

$= 4 \times 4$

$= 4$

Jadi $\varphi(a \times b) = \varphi(a) \times \varphi(b)$.

2. Untuk $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$

a. Saat $a = 1$ dan $b = 1$

$\varphi(a + b) = \varphi(1 + 1)$

$= \varphi(1)$

$= 2$

$\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi(1) + \varphi(1)$

$= 2 + 2$

$= 2$

Jadi $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$.

b. Saat $a = 1$ dan $b = 2$

$\varphi(a+b) = \varphi(1+2)$

$= \varphi(2)$

$= 4$

$\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi(1) + \varphi(2)$

$= 2 + 4$

$= 4$

Jadi $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$.

c. Saat $a = 2$ dan $b = 1$

$\varphi(a+b) = \varphi(2+1)$

$= \varphi(2)$

$= 4$

$\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi(2) + \varphi(1)$

$= 4 + 2$

$= 4$

Jadi $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$.

d. Saat $a = 2$ dan $b = 2$

$\varphi(a+b) = \varphi(2+2)$

$= \varphi(2)$

$= 4$

$\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi(2) + \varphi(2)$

$= 4 + 4$

$= 4$

Jadi $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$.

Dari 1 dan 2, maka terbukti bahwa $\varphi: L \to M$ adalah homomorfisme pada latis.

Fungsi $\varphi: L \to M$ merupakan fungsi bijektif atau korespondensi satu-satu, karena merupakan fungsi injektif yaitu untuk $1, 2 \in L$, maka $\varphi(1) \neq \varphi(2)$ dan fungsi surjektif yaitu setiap unsur yang ada di M memiliki prapeta yang ada di L. Karena fungsi $\varphi: L \to M$ merupakan homomorfisme pada latis dan merupakan fungsi bijektif, maka $\varphi: L \to M$ adalah suatu isomorfisme.

Definisi 2.19 (Endomorfisme)

Misalkan $(L, \times, +)$ dan $(M, \times, +)$ adalah suatu latis. Didefinisikan suatu fungsi $\varphi: L \to M$ adalah homomorfisme pada latis. Jika L sama dengan M, maka homomorfisme dari L ke M dinamakan endomorfisme (Gratzer, 2011:30).

Contoh:

Misalkan $(L, \times, +)$ dan $(M, \times, +)$ adalah suatu latis dengan L sama dengan M yaitu $L = \{6, 12\}$. Misalkan $\varphi: L \to M$ adalah hmomorfisme pada latis, kemudian didefinisikan $\varphi(6) = 6, \varphi(12) = 12$, $a \times b = FPB(a, b)$, dan $a + b = KPK(a, b)$, maka tunjukkan bahwa $\varphi: L \to M$ adalah endomorfisme.

Jawab:

Pertama akan dibuktikan bahwa $\varphi: L \to M$ adalah homomorfisme pada latis yaitu memenuhi dua sifat dari homomorfisme pada latis, di antaranya:

1. Untuk $\varphi(a \times b) = \varphi(a) \times \varphi(b)$
   a. Saat $a = 6$ dan $b = 6$

      $\varphi(a \times b) = \varphi(6 \times 6)$

$= \varphi(6)$

$= 6$

$\varphi(a) \times \varphi(b) = \varphi(6) \times \varphi(6)$

$= 6 \times 6$

$= 6$

Jadi $\varphi(a \times b) = \varphi(a) \times \varphi(b)$.

b. Saat $a = 6$ dan $b = 12$

$\varphi(a \times b) = \varphi(6 \times 12)$

$= \varphi(6)$

$= 6$

$\varphi(a) \times \varphi(b) = \varphi(6) \times \varphi(12)$

$= 6 \times 12$

$= 6$

Jadi $\varphi(a \times b) = \varphi(a) \times \varphi(b)$.

c. Saat $a = 12$ dan $b = 6$

$\varphi(a \times b) = \varphi(12 \times 6)$

$= \varphi(6)$

$= 6$

$\varphi(a) \times \varphi(b) = \varphi(12) \times \varphi(6)$

$= 12 \times 6$

$= 6$

Jadi $\varphi(a \times b) = \varphi(a) \times \varphi(b)$.

d. Saat $a = 12$ dan $b = 12$

$\varphi(a \times b) = \varphi(12 \times 12)$

$= \varphi(12)$

$= 12$

$\varphi(a) \times \varphi(b) = \varphi(12) \times \varphi(12)$

$= 12 \times 12$

$= 12$

Jadi $\varphi(a \times b) = \varphi(a) \times \varphi(b)$.

2. Untuk $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$

   a. Saat $a = 6$ dan $b = 6$

   $\varphi(a + b) = \varphi(6 + 6)$

   $= \varphi(6)$

   $= 6$

   $\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi(6) + \varphi(6)$

   $= 6 + 6$

   $= 6$

   Jadi $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$.

   b. Saat $a = 6$ dan $b = 12$

   $\varphi(a + b) = \varphi(6 + 12)$

   $= \varphi(12)$

   $= 12$

   $\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi(6) + \varphi(12)$

   $= 6 + 12$

   $= 12$

   Jadi $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$.

c. Saat $a = 12$ dan $b = 6$

$\varphi(a + b) = \varphi(12 + 6)$

$= \varphi(12)$

$= 12$

$\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi(12) + \varphi(6)$

$= 12 + 6$

$= 12$

Jadi $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$.

d. Saat $a = 12$ dan $b = 12$

$\varphi(a + b) = \varphi(12 + 12)$

$= \varphi(12)$

$= 12$

$\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi(12) + \varphi(12)$

$= 12 + 12$

$= 12$

Jadi $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$.

Dari 1 dan 2, maka terbukti bahwa $\varphi: L \to M$ adalah homomorfisme pada latis.

Karena L sama dengan M, kemudian fungsi $\varphi: L \to M$ merupakan fungsi yang memetakan setiap unsur ke dirinya sendiri dan suatu homomorfisme pada latis, maka $\varphi: L \to M$ adalah suatu endomorfisme.

2.7 Kajian Latis dalam Islam

Aljabar merupakan cabang dari matematika. Aljabar terbagi menjadi dua, yaitu aljabar abstrak dan aljabar linier. Ilmu aljabar merupakan salah satu cabang matematika yang penting dan memiliki banyak manfaat, karena teori-teorinya dapat diterapkan untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari. Saat ini ilmu aljabar semakin berkembang pesat, karena berhubungan dengan himpunan, operasi, dan sifat-sifat struktur di dalamnya.

Himpunan adalah kumpulan atau gabungan dari objek-objek yang mempunyai arti dan dapat didefinisikan dengan jelas mana yang merupakan anggota himpunan dan mana yang bukan merupakan anggota himpunan. Di dalam al-Quran kajian tentang himpunan sudah dijelaskan secara implisit. Misalnya makhluk Allah Swt. yang terbagi menjadi beberapa golongan. Golongan-golongan tersebut merupakan himpunan yang terdiri dari beberapa manusia yang disebut objek-objek yang terdefinisi. Salah satu ayat al-Quran yang membahas himpunan terdapat dalam ayat berikut ini:

وَإِذْ قُلْنَا لِلْمَلَٰٓئِكَةِ ٱسْجُدُوا۟ لِءَادَمَ فَسَجَدُوٓا۟ إِلَّآ إِبْلِيسَ أَبَىٰ وَٱسْتَكْبَرَ وَكَانَ مِنَ ٱلْكَٰفِرِينَ ﴿٣٤﴾

“Dan (Ingatlah) ketika kami berfirman kepada para malaikat: "Sujudlah kamu kepada Adam," Maka sujudlah mereka kecuali Iblis; ia enggan dan takabur dan adalah ia termasuk golongan orang-orang yang kafir” (QS. al-Baqarah/2:34).

Dalam surat al-Baqarah ayat 34 tersebut dijelaskan tentang kelompok atau golongan orang-orang yang kafir. Golongan-golongan orang kafir yang dimaksud dalam ayat ini adalah iblis. Muhammad Ibnu Ka’ab Al-Qurazi mengatakan bahwa iblis semula diciptakan oleh Allah Swt. ditakdirkan berbuat kekufuran dan kesesatan, tetapi beramal seperti amalnya malaikat, kemudian Allah Swt. menjadikannya sesuai dengan apa yang telah ditetapkannya sejak mula yaitu kafir (Abubakar, 2000:407).

Selain dalam surat al-Baqarah ayat 34, kajian tentang himpunan juga disebutkan dalam ayat berikut ini:

أَفَتَطۡمَعُونَ أَن يُؤۡمِنُواْ لَكُمۡ وَقَدۡ كَانَ فَرِيقٞ مِّنۡهُمۡ يَسۡمَعُونَ كَلَٰمَ ٱللَّهِ ثُمَّ يُحَرِّفُونَهُۥ مِنۢ بَعۡدِ مَا عَقَلُوهُ وَهُمۡ يَعۡلَمُونَ ٧٥

"*Apakah kamu masih mengharapkan mereka akan percaya kepadamu, padahal segolongan dari mereka mendengar firman Allah Swt., lalu mereka mengubahnya setelah mereka memahaminya, sedang mereka mengetahui*" (QS. al-Baqarah/2:75).

Dalam surat al-Baqarah ayat 75 dijelaskan segolongan orang-orang yang sesat. Golongan yang dimaksud dalam ayat ini adalah golongan dari orang-orang yahudi, mereka telah mendengar firman Allah Swt. yaitu kitab Taurat, tetapi mereka mengubahnya, yakni menakwilkannya bukan dengan takwil yang sebenarnya. Hal itu mereka lakukan setelah mereka memahaminya dengan pemahaman yang jelas (Abubakar, 2000:612).

Selain grup, ring, dan himpunan, aljabar abstrak juga membahas struktur aljabar yang lain seperti latis, yang menjadi topik penting untuk pembahasan dalam penelitian ini. Latis merupakan himpunan yang tidak kosong dengan dua operasi biner dan aksioma-aksioma yang berlaku.

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas mengenai sifat-sifat homomorfisme pada latis, di antaranya dengan memberikan pembuktian dari beberapa teorema dan lemma serta contoh yang terkait dengan homomorfisme pada latis.

3.1 Sifat-sifat Homomorfisme pada Latis

Teorema 3.1

Bayangan homomorfik H dari L terhadap φ adalah sublatis dari M (Sukardjono, 2002:104).

Bukti:

Misalkan $(L, \times, +)$ dan $(M, \times, +)$ adalah suatu latis dan $\varphi: L \to M$ adalah homomorfisme pada latis. Kemudian terdapat $H \subseteq M$ dengan $a, b \in L$ dan $a', b' \in H$. Didefinisikan bahwa a' merupakan bayangan homomorfik dari a dan b' merupakan bayangan homomorfik dari b. Sehingga $\varphi(a) = a'$ dan $\varphi(b) = b'$, maka:

$$\varphi(a \times b) = \varphi(a) \times \varphi(b) = a' \times b'$$

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b) = a' + b'$$

Bayangan dari $a \times b$ dan $a + b$ ada di M dan juga berada di H, sehingga $a' \times b'$ dan $a' + b'$ ada di H, jadi bayangan homomorfik H dari L terhadap φ merupakan sublatis dari M.

Contoh:

Misalkan diberikan dua latis yaitu $(L, \times, +)$ dan $(M, \times, +)$ dengan $L = \{1,2\}$ dan $M = \{1, 2, 4\}$. Kemudian didefinisikan bahwa $\varphi: L \to M$ merupakan homomorfisme pada latis dengan $\varphi(1) = 2$ dan $\varphi(2) = 4$, serta terdapat $H = \{2, 4\}$ yang merupakan bayangan homomorfik dari L. Didefinisikan juga bahwa $a \times b = FPB(a, b)$ dan $a + b = KPK(a, b)$, maka tunjukkan bahwa H adalah sublatis dari M.

Jawab:

Diketahui bahwa $\varphi: L \to M$ adalah homomorfisme pada latis dan H merupakan bayangan homomorfik dari L.

Akan dibuktikan bahwa H adalah sublatis dari M. Sehingga harus ditunjukkan untuk semua $a, b \in H$, maka $a \times b \in H$ dan $a + b \in H$, yaitu:

1. Untuk $a \times b \in H$
   a. Saat $a = 2$ dan $b = 2$

      $a \times b = 2 \times 2$

      $= 2 \in H$

   b. Saat $a = 2$ dan $b = 4$

      $a \times b = 2 \times 4$

      $= 2 \in H$

   c. Saat $a = 4$ dan $b = 2$

      $a \times b = 4 \times 2$

      $= 2 \in H$

   d. Saat $a = 4$ dan $b = 4$

      $a \times b = 4 \times 4$

$= 4 \in H$

2. Untuk $a + b \in H$

   a. Saat $a = 2$ dan $b = 2$

   $a + b = 2 + 2$

   $= 2 \in H$

   b. Saat $a = 2$ dan $b = 4$

   $a + b = 2 + 4$

   $= 4 \in H$

   c. Saat $a = 4$ dan $b = 2$

   $a + b = 4 + 2$

   $= 4 \in H$

   e. Saat $a = 4$ dan $b = 4$

   $a + b = 4 + 4$

   $= 4 \in H$

Dari 1 dan 2 terbukti bahwa untuk semua $a, b \in H$ dengan H yang merupakan bayangan homomorfik dari L, maka $a \times b \in H$ dan $a + b \in H$. Sehingga H merupakan sublatis dari M.

Lemma 3.2

Misalkan L_1 dan L_2 adalah suatu latis dengan $a, b \in L_1$ dan suatu fungsi $\varphi: L_1 \to L_2$ adalah homomorfisme pada latis. Jika φ *join-homomorphism*, dengan $a \leq b \in L_1$, maka berlaku $\varphi(a) \leq \varphi(b) \in L_2$ (Garg, 2007:61).

Bukti:

Diketahui bahwa fungsi $\varphi: L_1 \to L_2$ adalah homomorfisme pada latis.

Akan dibuktikan jika φ *join-homomorphism* dengan $a \leq b \in L_1$, maka berlaku $\varphi(a) \leq \varphi(b) \in L_2$.

Akan ditunjukkan $\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi(b)$.

Karena $a \leq b$, maka berdasarkan Teorema 2.6 berlaku:

$$a + b = b$$

Kemudian dengan mengaplikasikan fungsi φ pada kedua ruas menjadi:

$$\varphi(a + b) = \varphi(b)$$

Karena fungsi φ *join-homomorphism*, maka $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$. Sehingga:

$$\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi(b)$$

Karena $\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi(b)$, maka berdasarkan Teorema 2.6 berlaku:

$$\varphi(a) \leq \varphi(b)$$

Jadi terbukti jika φ *join-homomorphism* dengan $a \leq b \in L_1$, maka berlaku:

$$\varphi(a) \leq \varphi(b) \in L_2$$

Contoh:

Misalkan diberikan dua latis yaitu $(L_1, \times, +)$ dan $(L_2, \times, +)$ dengan $L_1 = \{1, 2\}$ dan $L_2 = \{2, 4\}$. Didefinisikan fungsi $\varphi: L_1 \to L_2$ adalah *join-homomorphism* dengan $\varphi(1) = 2$ dan $\varphi(2) = 4$. Kemudian didefinisikan untuk $a + b = KPK(a, b)$, maka tunjukkan bahwa untuk semua $a, b \in L_1$ dengan $a \leq b$ berlaku $\varphi(a) \leq \varphi(b)$.

Jawab:

Akan dibuktikan untuk semua $a, b \in L_1$ dengan $a \leq b$, maka $\varphi(a) \leq \varphi(b)$.

Karena $2 \nleq 1$, maka tidak perlu ditunjukkan saat $a = 2$ dan $b = 1$, sehingga:

a. Saat $a = 1$ dan $b = 1$

   $KPK(1, 1) = 1$

$1 + 1 = 1$

$\varphi(1 + 1) = \varphi(1)$

$\varphi(1) + \varphi(1) = \varphi(1)$

$\varphi(1) \leq \varphi(1)$

b. Saat $a = 1$ dan $b = 2$

$KPK(1, 2) = 2$

$1 + 2 = 2$

$\varphi(1 + 2) = \varphi(2)$

$\varphi(1) + \varphi(2) = \varphi(2)$

$\varphi(1) \leq \varphi(2)$

c. Saat $a = 2$ dan $b = 2$

$KPK(2, 2) = 2$

$2 + 2 = 2$

$\varphi(2 + 2) = \varphi(2)$

$\varphi(2) + \varphi(2) = \varphi(2)$

$\varphi(2) \leq \varphi(2)$

Berdasarkan a, b, dan c terbukti bahwa untuk semua $a, b \in L_1$ dengan $a \leq b$, maka berlaku $\varphi(a) \leq \varphi(b)$.

Lemma 3.3

Misalkan L_1 dan L_2 adalah suatu latis dengan $a, b \in L_1$, dan suatu fungsi $\varphi: L_1 \to L_2$ adalah homomorfisme pada latis. Jika φ *meet-homomorphism*, dengan $a \leq b$, maka berlaku $\varphi(a) \leq \varphi(b) \in L_2$ (Garg, 2007:62).

Bukti:

Diketahui bahwa fungsi $\varphi: L_1 \to L_2$ adalah homomorfisme pada latis.

Akan dibuktikan jika φ *meet-homomorphism* dengan $a \leq b \in L_1$, maka berlaku $\varphi(a) \leq \varphi(b) \in L_2$.

Akan ditunjukkan $\varphi(a) \times \varphi(b) = \varphi(a)$.

Karena $a \leq b$ maka berdasarkan Teorema 2.6 berlaku:

$$a \times b = a$$

Kemudian dengan mengaplikasikan fungsi φ pada kedua ruas menjadi:

$$\varphi(a \times b) = \varphi(a)$$

Karena fungsi φ *meet-homomorphism*, maka $\varphi(a \times b) = \varphi(a) \times \varphi(b)$. Sehingga:

$$\varphi(a) \times \varphi(b) = \varphi(a)$$

Karena $\varphi(a) \times \varphi(b) = \varphi(a)$ maka berdasarkan Teorema 2.6 berlaku:

$$\varphi(a) \leq \varphi(b)$$

Jadi terbukti jika φ *meet-homomorphism*, dengan $a \leq b \in L_1$ maka berlaku

$$\varphi(a) \leq \varphi(b) \in L_2$$

Contoh:

Misalkan diberikan dua latis yaitu $(L_1, \times, +)$ dan $(L_2, \times, +)$ dengan $L_1 = \{1, 2\}$ dan $L_2 = \{2, 4\}$. Didefinisikan fungsi $\varphi: L_1 \to L_2$ adalah *meet-homomorphism* dengan $\varphi(1) = 2$ dan $\varphi(2) = 4$. Kemudian didefinisikan untuk $a \times b = FPB(a, b)$, maka tunjukkan bahwa untuk semua $a, b \in L_1$ dengan $a \leq b$ berlaku $\varphi(a) \leq \varphi(b)$.

Jawab:

Akan dibuktikan untuk semua $a, b \in L_1$ dengan $a \leq b$, maka $\varphi(a) \leq \varphi(b)$.

Karena $2 \nleq 1$, maka tidak perlu ditunjukkan saat $a = 2$ dan $b = 1$, sehingga:

a. Saat $a = 1$ dan $b = 1$

$FPB(1,1) = 1$

$1 \times 1 = 1$

$\varphi(1 \times 1) = \varphi(1)$

$\varphi(1) \times \varphi(1) = \varphi(1)$

$\varphi(1) \leq \varphi(1)$

b. Saat $a = 1$ dan $b = 2$

$FPB(1,2) = 1$

$1 \times 2 = 1$

$\varphi(1 \times 2) = \varphi(1)$

$\varphi(1) \times \varphi(2) = \varphi(1)$

$\varphi(1) \leq \varphi(2)$

c. Saat $a = 2$ dan $b = 2$

$FPB(2,2) = 2$

$2 \times 2 = 2$

$\varphi(2 \times 2) = \varphi(2)$

$\varphi(2) \times \varphi(2) = \varphi(2)$

$\varphi(2) \leq \varphi(2)$

Berdasarkan a, b, dan c terbukti bahwa untuk semua $a, b \in L_1$ dengan $a \leq b$, maka berlaku $\varphi(a) \leq \varphi(b)$.

Teorema 3.4

Misalkan L_1 dan L_2 adalah suatu latis dan fungsi $\varphi: L_1 \rightarrow L_2$ adalah suatu isomorfisme, maka untuk semua $a, b \in L_1$ berlaku $\varphi(a) + \varphi(b) \leq \varphi(a + b)$ (Garg, 2007:62).

Bukti:

Diketahui fungsi $\varphi: L_1 \to L_2$ adalah suatu isomorfisme.

Akan dibuktikan bahwa untuk semua $a, b \in L_1$ berlaku $\varphi(a) + \varphi(b) \leq \varphi(a + b)$.

Karena L_1 dan L_2 adalah suatu latis, maka berdasarkan Teorema 2.8 dan Teorema 2.10 untuk semua $a, b \in L_1$, berlaku:

$$a \leq (a + b) \text{ dan } b \leq (a + b)$$

Kemudian karena $a \leq (a + b)$ dan $b \leq (a + b)$, maka berdasarkan Lemma 3.1 berlaku:

$$\varphi(a) \leq \varphi(a + b) \text{ dan } \varphi(b) \leq \varphi(a + b)$$

Sehingga berdasarkan Teorema 2.12, jika $\varphi(a) \leq \varphi(a + b)$ dan $\varphi(b) \leq \varphi(a + b)$, maka:

$$\varphi(a) + \varphi(b) \leq \varphi(a + b)$$

Jadi terbukti jika L_1 dan L_2 adalah suatu latis dan fungsi $\varphi: L_1 \to L_2$ adalah suatu isomorfisme, maka untuk semua $a, b \in L_1$ berlaku $\varphi(a) + \varphi(b) \leq \varphi(a + b)$.

Contoh:

Misalkan diberikan dua latis yaitu $(L_1, \times, +)$ dan $(L_2, \times, +)$ dengan $L_1 = \{2, 4\}$ dan $L_2 = \{4, 8\}$. Didefinisikan fungsi $\varphi: L_1 \to L_2$ adalah isomorfisme dengan $\varphi(2) = 4$ dan $\varphi(4) = 8$. Kemudian didefinisikan untuk $a + b = KPK(a, b)$, maka tunjukkan bahwa untuk semua $a, b \in L_1$ berlaku $\varphi(a) + \varphi(b) \leq \varphi(a + b)$.

Jawab:

Diketahui bahwa fungsi $\varphi: L_1 \to L_2$ adalah isomorfisme.

Akan dibuktikan untuk semua $a, b \in L_1$, maka berlaku $\varphi(a) + \varphi(b) \leq \varphi(a + b)$.

Akan ditunjukkan untuk semua $a, b \in L_1$ berlaku $\big(\varphi(a) + \varphi(b)\big) + \varphi(a+b) = \varphi(a+b)$, yaitu:

a. Saat $a = 2$ dan $b = 2$

$$\begin{aligned}\big(\varphi(2) + \varphi(2)\big) + \varphi(2+2) &= (4+4) + \varphi(2)\\ &= 4+4\\ &= 4\\ &= \varphi(2)\\ &= \varphi(2+2)\end{aligned}$$

Jadi $\varphi(2) + \varphi(2) \leq \varphi(2+2)$.

b. Saat $a = 2$ dan $b = 4$

$$\begin{aligned}\big(\varphi(2) + \varphi(4)\big) + \varphi(2+4) &= (4+8) + \varphi(4)\\ &= 8+8\\ &= 8\\ &= \varphi(4)\\ &= \varphi(2+4)\end{aligned}$$

Jadi $\varphi(2) + \varphi(4) \leq \varphi(2+4)$.

c. Saat $a = 4$ dan $b = 2$

$$\begin{aligned}\big(\varphi(4) + \varphi(2)\big) + \varphi(4+2) &= (8+4) + \varphi(4)\\ &= 8+8\\ &= 8\\ &= \varphi(4)\\ &= \varphi(4+2)\end{aligned}$$

Jadi $\varphi(4) + \varphi(2) \leq \varphi(4+2)$.

d. Saat $a = 4$ dan $b = 4$

$$\big(\varphi(4) + \varphi(4)\big) + \varphi(4 + 4) = (8 + 8) + \varphi(4)$$
$$= 8 + 8$$
$$= 8$$
$$= \varphi(4)$$
$$= \varphi(4 + 4)$$

Jadi $\varphi(4) + \varphi(4) \leq \varphi(4 + 4)$.

Berdasarkan a, b, c, dan d terbukti bahwa untuk semua $a, b \in L_1$ berlaku $\big(\varphi(a) + \varphi(b)\big) + \varphi(a + b) = \varphi(a + b)$, sehingga berdasarkan Teorema 2.6 berlaku $\varphi(a) + \varphi(b) \leq \varphi(a + b)$.

Teorema 3.5

Misalkan L_1 dan L_2 adalah suatu latis dan fungsi $\varphi: L_1 \to L_2$ adalah suatu isomorfisme, maka untuk semua $a, b \in L_1$ berlaku $\varphi(a) \times \varphi(b) \leq \varphi(a \times b)$ (Garg, 2007:62).

Bukti:

Diketahui fungsi $\varphi: L_1 \to L_2$ adalah suatu isomorfisme.

Akan dibuktikan bahwa untuk semua $a, b \in L_1$ berlaku $\varphi(a) \times \varphi(b) \leq \varphi(a \times b)$.

Karena L_1 dan L_2 adalah suatu latis maka berdasarkan Teorema 2.7 dan Teorema 2.9 untuk semua $a, b \in L_1$, berlaku:

$$a \times b \leq a \text{ dan } a \times b \leq b$$

Kemudian karena $a \times b \leq a$ dan $a \times b \leq b$, maka berdasarkan Lemma 3.2 berlaku:

$$\varphi(a \times b) \leq \varphi(a) \text{ dan } \varphi(a \times b) \leq \varphi(b)$$

Sehingga berdasarkan Teorema 2.11, jika $\varphi(a \times b) \leq \varphi(a)$ dan $\varphi(a \times b) \leq \varphi(b)$, maka:

$$\varphi(a \times b) \leq \varphi(a) \times \varphi(b)$$

Karena fungsi φ adalah *meet-homomorphism*, maka $\varphi(a \times b) = \varphi(a) \times \varphi(b)$, sehingga:

$$\varphi(a) \times \varphi(b) \leq \varphi(a \times b)$$

Jadi terbukti jika L_1 dan L_2 adalah suatu latis dan fungsi $\varphi: L_1 \rightarrow L_2$ adalah suatu isomorfisme, maka untuk semua $a, b \in L_1$ berlaku $\varphi(a) \times \varphi(b) \leq \varphi(a \times b)$.

Contoh:

Misalkan diberikan dua latis yaitu $(L_1, \times, +)$ dan $(L_2, \times, +)$ dengan $L_1 = \{2, 4\}$ dan $L_2 = \{4, 8\}$. Didefinisikan fungsi $\varphi: L_1 \rightarrow L_2$ adalah isomorfisme dengan $\varphi(2) = 4$ dan $\varphi(4) = 8$. Kemudian didefinisikan untuk $a \times b = FPB(a, b)$, maka tunjukkan bahwa untuk semua $a, b \in L_1$ berlaku $\varphi(a) \times \varphi(b) \leq \varphi(a \times b)$.

Jawab:

Diketahui bahwa fungsi $\varphi: L_1 \rightarrow L_2$ adalah isomorfisme.

Akan dibuktikan untuk semua $a, b \in L_1$, maka berlaku $\varphi(a) \times \varphi(b) \leq \varphi(a \times b)$.

Akan ditunjukkan untuk semua $a, b \in L_1$ berlaku $\big(\varphi(a) \times \varphi(b)\big) \times \varphi(a \times b) = \big(\varphi(a) \times \varphi(b)\big)$, yaitu:

a. Saat $a = 2$ dan $b = 2$

$$\begin{aligned}\big(\varphi(2) \times \varphi(2)\big) \times \varphi(2 \times 2) &= (4 \times 4) \times \varphi(2)\\ &= 4 \times 4\\ &= 4\end{aligned}$$

$$= (4 \times 4)$$

$$= \varphi(2) \times \varphi(2)$$

Jadi $\left(\varphi(2) \times \varphi(2)\right) \leq \varphi(2 \times 2)$.

b. Saat $a = 2$ dan $b = 4$

$$\left(\varphi(2) \times \varphi(4)\right) \times \varphi(2 \times 4) = (4 \times 8) \times \varphi(2)$$

$$= 4 \times 4$$

$$= 4$$

$$= (4 \times 8)$$

$$= \varphi(2) \times \varphi(4)$$

Jadi $\varphi(2) \times \varphi(4) \leq \varphi(2 \times 4)$.

c. Saat $a = 4$ dan $b = 2$

$$\left(\varphi(4) \times \varphi(2)\right) \times \varphi(4 \times 2) = (8 \times 4) \times \varphi(2)$$

$$= 4 \times 4$$

$$= 4$$

$$= (8 \times 4)$$

$$= \varphi(4) \times \varphi(2)$$

Jadi $\varphi(4) \times \varphi(2) \leq \varphi(4 \times 2)$.

d. Saat $a = 4$ dan $b = 4$

$$\left(\varphi(4) \times \varphi(4)\right) \times \varphi(4 \times 4) = (8 \times 8) \times \varphi(4)$$

$$= 8 \times 8$$

$$= 8$$

$$= (8 \times 8)$$

$$= \varphi(4) \times \varphi(4)$$

Jadi $\varphi(4) \times \varphi(4) \leq \varphi(4 \times 4)$.

Berdasarkan a, b, c, dan d terbukti bahwa untuk semua $a, b \in L_1$ berlaku $\left(\varphi(a) \times \varphi(b)\right) \times \varphi(a \times b) = \left(\varphi(a) \times \varphi(b)\right)$, sehingga berdasarkan Teorema 2.6 berlaku $\varphi(a) \times \varphi(b) \leq \varphi(a \times b)$.

Teorema 3.6

Misalkan L_1 dan L_2 adalah suatu latis dan fungsi $\varphi: L_1 \to L_2$ adalah suatu isomorfisme, maka untuk semua $a, b \in L_1$ berlaku $\varphi(a + b) \leq \varphi(a) + \varphi(b)$ (Garg, 2007:62).

Bukti:

Diketahui fungsi $\varphi: L_1 \to L_2$ adalah suatu isomorfisme.

Akan dibuktikan bahwa untuk semua $a, b \in L_1$ berlaku $\varphi(a + b) \leq \varphi(a) + \varphi(b)$.

Karena L_1 dan L_2 adalah suatu latis maka berdasarkan Teorema 2.8 dan Teorema 2.10 untuk semua $a, b \in L_1$, berlaku:

$$a \leq (a + b) \text{ dan } b \leq (a + b)$$

Kemudian karena $a \leq (a + b)$ dan $b \leq (a + b)$, maka berdasarkan Lemma 3.1 berlaku:

$$\varphi(a) \leq \varphi(a + b) \text{ dan } \varphi(b) \leq \varphi(a + b)$$

Sehingga, berdasarkan Teorema 2.12, jika $\varphi(a) \leq \varphi(a + b)$ dan $\varphi(b) \leq \varphi(a + b)$, maka:

$$\varphi(a) + \varphi(b) \leq \varphi(a + b)$$

Karena fungsi φ adalah *join-homomorphism* maka $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$, sehingga:

$$\varphi(a + b) \leq \varphi(a) + \varphi(b)$$

Jadi terbukti jika L_1 dan L_2 adalah suatu latis dan fungsi $\varphi: L_1 \rightarrow L_2$ adalah suatu isomorfisme, maka untuk semua $a, b \in L_1$ berlaku $\varphi(a+b) \leq \varphi(a) + \varphi(b)$.

Contoh:

Misalkan diberikan dua latis yaitu $(L_1, \times, +)$ dan $(L_2, \times, +)$ dengan $L_1 = \{1, 3\}$ dan $L_2 = \{3, 6\}$. Didefinisikan fungsi $\varphi: L_1 \rightarrow L_2$ adalah isomorfisme dengan $\varphi(1) = 3$ dan $\varphi(3) = 6$. Kemudian didefinisikan untuk $a + b = KPK(a, b)$, maka tunjukkan bahwa untuk semua $a, b \in L_1$ berlaku $\varphi(a+b) \leq \varphi(a) + \varphi(b)$.

Jawab:

Diketahui bahwa fungsi $\varphi: L_1 \rightarrow L_2$ adalah isomorfisme.

Akan dibuktikan untuk semua $a, b \in L_1$, maka berlaku $\varphi(a+b) \leq \varphi(a) + \varphi(b)$.

Akan ditunjukkan untuk semua $a, b \in L_1$ berlaku $\varphi(a+b) + \big(\varphi(a) + \varphi(b)\big) = \big(\varphi(a) + \varphi(b)\big)$, yaitu:

a. Saat $a = 1$ dan $b = 1$

$$\begin{aligned} \varphi(1+1) + \big(\varphi(1) + \varphi(1)\big) &= \varphi(1) + (3+3) \\ &= 3 + 3 \\ &= 3 \\ &= (3+3) \\ &= \varphi(1) + \varphi(1) \end{aligned}$$

Jadi $\varphi(1+1) \leq \varphi(1) + \varphi(1)$.

b. Saat $a = 1$ dan $b = 3$

$$\begin{aligned} \varphi(1+3) + \big(\varphi(1) + \varphi(3)\big) &= \varphi(3) + (3+6) \\ &= 6 + 6 \end{aligned}$$

$$= 6$$

$$= (3 + 6)$$

$$= \varphi(1) + \varphi(3)$$

Jadi $\varphi(1 + 3) \leq \varphi(1) + \varphi(3)$.

c. Saat $a = 3$ dan $b = 1$

$$\varphi(3 + 1) + \big(\varphi(3) + \varphi(1)\big) = \varphi(3) + (6 + 3)$$

$$= 6 + 6$$

$$= 6$$

$$= (6 + 3)$$

$$= \varphi(3) + \varphi(1)$$

Jadi $\varphi(3 + 1) \leq \varphi(3) + \varphi(1)$.

d. Saat $a = 3$ dan $b = 3$

$$\varphi(3 + 3) + \big(\varphi(3) + \varphi(3)\big) = \varphi(3) + (6 + 6)$$

$$= 6 + 6$$

$$= 6$$

$$= (6 + 6)$$

$$= \varphi(3) + \varphi(3)$$

Jadi $\varphi(3 + 3) \leq \varphi(3) + \varphi(3)$.

Berdasarkan a, b, c, dan d terbukti bahwa untuk semua $a, b \in L_1$ berlaku $\varphi(a + b) + \big(\varphi(a) + \varphi(b)\big) = \big(\varphi(a) + \varphi(b)\big)$, sehingga berdasarkan Teorema 2.6 berlaku $\varphi(a + b) \leq \varphi(a) + \varphi(b)$.

Teorema 3.7

Misalkan L_1 dan L_2 adalah suatu latis dan fungsi $\varphi: L_1 \to L_2$ adalah suatu isomorfisme, maka untuk semua $a, b \in L_1$ berlaku $\varphi(a \times b) \leq \varphi(a) \times \varphi(b)$ (Garg, 2007:62).

Bukti:

Diketahui fungsi $\varphi: L_1 \to L_2$ adalah suatu isomorfisme.

Akan dibuktikan bahwa untuk semua $a, b \in L_1$ berlaku $\varphi(a \times b) \leq \varphi(a) \times \varphi(b)$.

Karena L_1 dan L_2 adalah suatu latis maka berdasarkan Teorema 2.7 dan Teorema 2.9 untuk semua $a, b \in L_1$, berlaku:

$$a \times b \leq a \text{ dan } a \times b \leq b$$

Kemudian karena $a \times b \leq a$ dan $a \times b \leq b$, maka berdasarkan Lemma 3.2 berlaku:

$$\varphi(a \times b) \leq \varphi(a) \text{ dan } \varphi(a \times b) \leq \varphi(b)$$

Sehingga berdasarkan Teorema 2.11, jika $\varphi(a \times b) \leq \varphi(a)$ dan $\varphi(a \times b) \leq \varphi(b)$, maka:

$$\varphi(a \times b) \leq \varphi(a) \times \varphi(b)$$

Jadi terbukti jika L_1 dan L_2 adalah suatu latis dan fungsi $\varphi: L_1 \to L_2$ adalah suatu isomorfisme, maka untuk semua $a, b \in L_1$ berlaku $\varphi(a \times b) \leq \varphi(a) \times \varphi(b)$.

Contoh:

Misalkan diberikan dua latis yaitu $(L_1, \times, +)$ dan $(L_2, \times, +)$ dengan $L_1 = \{1, 3\}$ dan $L_2 = \{3, 6\}$. Didefinisikan fungsi $\varphi: L_1 \to L_2$ adalah isomorfisme dengan $\varphi(1) = 3$ dan $\varphi(3) = 6$. Kemudian didefinisikan untuk $a \times b =$

$FPB(a, b)$, maka tunjukkan bahwa untuk semua $a, b \in L_1$ berlaku $\varphi(a \times b) \leq \varphi(a) \times \varphi(b)$.

Jawab:

Diketahui bahwa fungsi $\varphi: L_1 \rightarrow L_2$ adalah isomorfisme.

Akan dibuktikan untuk semua $a, b \in L_1$, maka berlaku $\varphi(a \times b) \leq \varphi(a) \times \varphi(b)$.

Akan ditunjukkan untuk semua $a, b \in L_1$ berlaku $\varphi(a \times b) \times \big(\varphi(a) \times \varphi(b)\big) = \varphi(a \times b)$, yaitu:

a. Saat $a = 1$ dan $b = 1$

$$\begin{aligned} \varphi(1 \times 1) \times \big(\varphi(1) \times \varphi(1)\big) &= \varphi(1) \times (3 \times 3) \\ &= 3 \times 3 \\ &= 3 \\ &= \varphi(1) \\ &= \varphi(1 \times 1) \end{aligned}$$

Jadi $\varphi(1 \times 1) \leq \varphi(1) \times \varphi(1)$.

b. Saat $a = 1$ dan $b = 3$

$$\begin{aligned} \varphi(1 \times 3) \times \big(\varphi(1) \times \varphi(3)\big) &= \varphi(1) \times (3 \times 6) \\ &= 3 \times 3 \\ &= 3 \\ &= \varphi(1) \\ &= \varphi(1 \times 3) \end{aligned}$$

Jadi $\varphi(1 \times 3) \leq \varphi(1) \times \varphi(3)$.

c. Saat $a = 3$ dan $b = 1$

$$\varphi(3 \times 1) \times \big(\varphi(3) \times \varphi(1)\big) = \varphi(1) \times (6 \times 3)$$

$$= 3 \times 3$$

$$= 3$$

$$= \varphi(1)$$

$$= \varphi(3 \times 1)$$

Jadi $\varphi(3 \times 1) \leq \varphi(3) \times \varphi(1)$.

d. Saat $a = 3$ dan $b = 3$

$$\varphi(3 \times 3) \times (\varphi(3) \times \varphi(3)) = \varphi(3) \times (6 \times 6)$$

$$= 6 \times 6$$

$$= 6$$

$$= \varphi(3)$$

$$= \varphi(3 \times 3)$$

Jadi $\varphi(3 \times 3) \leq \varphi(3) \times \varphi(3)$.

Berdasarkan a, b, c, dan d terbukti bahwa untuk semua $a, b \in L_1$ berlaku $\varphi(a \times b) \times (\varphi(a) \times \varphi(b)) = \varphi(a \times b)$, sehingga berdasarkan Teorema 2.6 berlaku $\varphi(a \times b) \leq \varphi(a) \times \varphi(b)$.

Salah satu definisi khusus dari homomorfisme pada latis adalah endomorfisme. Endomorfisme adalah suatu homomorfisme pada latis yang fungsinya memetakan setiap unsur ke dirinya sendiri. Fungsi ini dapat dikaitkan dalam kehidupan nyata karena merupakan suatu pemetaan unsur oleh φ ke dirinya sendiri yang diilustrasikan dengan $\varphi(x) = x$. Hal ini dapat diartikan bahwa apa yang dilakukan dan dikerjakan oleh manusia akan kembali kepada dirinya sendiri. Sebagaimana Allah Swt. berfirman dalam surat al-Israa ayat 7 yaitu:

إِنۡ أَحۡسَنتُمۡ أَحۡسَنتُمۡ لِأَنفُسِكُمۡۖ وَإِنۡ أَسَأۡتُمۡ فَلَهَاۚ فَإِذَا جَآءَ وَعۡدُ ٱلۡأٓخِرَةِ لِيَسُـُٔواْ وُجُوهَكُمۡ وَلِيَدۡخُلُواْ ٱلۡمَسۡجِدَ كَمَا دَخَلُوهُ أَوَّلَ مَرَّةٖ وَلِيُتَبِّرُواْ مَا عَلَوۡاْ تَتۡبِيرًا ٧

"Jika kamu berbuat baik (berarti) kamu berbuat baik bagi dirimu sendiri dan jika kamu berbuat jahat, Maka (kejahatan) itu bagi dirimu sendiri, dan apabila datang saat hukuman bagi (kejahatan) yang kedua, (kami datangkan orang-orang lain) untuk menyuramkan muka-muka kamu dan mereka masuk ke dalam mesjid, sebagaimana musuh-musuhmu memasukinya pada kali pertama dan untuk membinasakan sehabis-habisnya apa saja yang mereka kuasai" (QS. al-Israa:7).

Dalam surat al-Israa ayat 7 dijelaskan bahwa jika manusia berbuat baik, taat kepada Allah Swt. dan senantiasa melakukan perintah serta meninggalkan larangan-Nya, berarti ia berbuat baik kepada dirinya sendiri. Karena dengan demikian, manusia tersebut memberikan manfaat kepada dirinya di dunia dan di akhirat. Di dunia, Allah Swt. mencegahnya dari penganiayaan orang yang hendak menyusahkan, dan mengembalikan tipu dayanya kepada pundak mereka sendiri dan Allah Swt. mengembangkan hartanya, bahkan menambahi kekuatan pada kekuatan yang ada pada dirinnya. Adapun di akhirat, Allah memberi pahala kepadanya berupa surga yang mengalir di bawahnya sungai-sungai, serta meridhoinya dengan keridhaan dari Allah Swt. yang lebih besar (Abubakar, dkk, 1988:21).

Sebaliknya jika manusia bermaksiat kepada Allah Swt. dan melakukan apa yang Allah Swt. larang, berarti manusia tersebut menyusahkan dirinya sendiri. Karena, manusia tersebut membuat murka Allah Swt. sehingga Allah Swt. memberi kekuasaan kepada musuh-musuhnya untuk mengalahkannya di dunia, dan memberi kesempatan untuk mencelakakannya kepada orang yang ingin menyusahkannya, sedang di akhirat Allah Swt. akan menimpakan kepadanya azab yang menghinakan (Abubakar, dkk, 1988:21).

Selain dalam surat al-Israa ayat 7 Allah Swt. juga berfirman dalam surat an-Nahl ayat 30 yaitu:

وَقِيلَ لِلَّذِينَ ٱتَّقَوۡاْ مَاذَآ أَنزَلَ رَبُّكُمۡۚ قَالُواْ خَيۡرٗاۗ لِّلَّذِينَ أَحۡسَنُواْ فِي هَٰذِهِ ٱلدُّنۡيَا حَسَنَةٞۚ وَلَدَارُ ٱلۡأٓخِرَةِ خَيۡرٞۚ وَلَنِعۡمَ دَارُ ٱلۡمُتَّقِينَ ٣٠

"Dan dikatakan kepada orang-orang yang bertakwa: "Apakah yang telah diturunkan oleh Tuhanmu?" mereka menjawab: "(Allah Swt. telah menurunkan) kebaikan". orang-orang yang berbuat baik di dunia ini mendapat (pembalasan) yang baik. dan Sesungguhnya kampung akhirat adalah lebih baik dan Itulah Sebaik-baik tempat bagi orang yang bertakwa" (QS. an-Nahl:30).

Dalam ayat terdahulu, Allah Swt. telah menjelaskan ikhwal orang-orang yang mendustakan Allah Swt. dan rasul-Nya. Yaitu, mereka yang mengingkari wahyu. Kemudian Allah Swt. menerangkan hukuman dari siksaan yang akan mereka terima, karena mereka akan memasuki jahanam dan menetap di dalamnya untuk selama-lamanya, sebagai balasan setimpal atas dosa-dosa dan kemaksiatan yang mereka lakukan. Dalam surat an-Nahl ayat 30 Allah Swt. menggambarkan orang-orang yang beriman. Kemudian Allah Swt. menerangkan kebaikan dan kebahagiaan yang disediakan bagi mereka di surga yang di bawahnya mengalir sungai-sungai, sebagai balasan yang setimpal atas amal baik mereka (Abubakar, dkk, 1987:21).

Dalam surat an-Nahl ayat 30 diterangkan bahwa segala sesuatu yang manusia lakukan akan kembali kepada dirinya sendiri. Jika mereka berbuat baik, artinya mereka memberikan manfaat bagi dirinya sendiri. Karena Allah Swt. telah menjanjikan surga jika manusia berbuat baik. Namun, sebaliknya jika manusia berbuat hal tercela artinya mereka memberikan kerugian kepada dirinya sendiri. Karena Allah Swt. menjanjikan neraka bagi manusia yang melakukan hal tercela.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada bab sebelumnya, diperoleh beberapa sifat-sifat dari homomorfisme pada latis yaitu:

a. Bayangan homomorphik H dari L terhadap φ adalah sublatis dari M.

b. Misalkan L_1 dan L_2 adalah suatu latis dengan $a, b \in L_1$, dan suatu fungsi $\varphi: L_1 \to L_2$ adalah homomorfisme pada latis. Jika φ *join-homomorphism* dengan $a \leq b$, maka berlaku $\varphi(a) \leq \varphi(b) \in L_2$.

c. Misalkan L_1 dan L_2 adalah suatu latis dengan $a, b \in L_1$, dan suatu fungsi $\varphi: L_1 \to L_2$ adalah homomorfisme pada latis. Jika φ *meet-homomorphism* dengan $a \leq b$, maka berlaku $\varphi(a) \leq \varphi(b) \in L_2$.

d. Misalkan L_1 dan L_2 adalah suatu latis dan fungsi $\varphi: L_1 \to L_2$ adalah suatu isomorfisme, maka untuk semua $a, b \in L_1$ berlaku $\varphi(a) + \varphi(b) \leq \varphi(a + b)$.

e. Misalkan L_1 dan L_2 adalah suatu latis dan fungsi $\varphi: L_1 \to L_2$ adalah suatu isomorfisme, maka untuk semua $a, b \in L_1$ berlaku $\varphi(a) \times \varphi(b) \leq \varphi(a \times b)$.

f. Misalkan L_1 dan L_2 adalah suatu latis dan fungsi $\varphi: L_1 \to L_2$ adalah suatu isomorfisme, maka untuk semua $a, b \in L_1$ berlaku $\varphi(a + b) \leq \varphi(a) + \varphi(b)$

g. Misalkan L_1 dan L_2 adalah suatu latis dan fungsi $\varphi: L_1 \to L_2$ adalah suatu isomorfisme, maka untuk semua $a, b \in L_1$ berlaku $\varphi(a \times b) \leq \varphi(a) \times \varphi(b)$.

4.2 Saran

Dalam penelitian ini, penulis hanya membahas homomorfisme pada latis dengan cara memberikan definisi beserta contoh-contoh yang berkaitan dengan homomorfisme pada latis, serta membuktikan sifat-sifat yang berkaitan dengan homomorfisme pada latis. Bagi penelitian selanjutnya dapat dikembangkan kajian homomorfisme pada latis dengan memberikan lebih banyak contoh-contoh, sehingga membentuk suatu teorema atau sifat-sifat baru yang berkaitan dengan homomorfisme pada latis.

DAFTAR RUJUKAN

Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN-Malang Press.

Abdussakir. 2009. *Matematika 1: Kajian Integratif Matematika dan Al-Qur'an.* Malang: UIN Malang Press.

Arifin, A. 2000. *Aljabar*. Bandung: ITB Bandung.

Abubakar, B. 2000. *Tafsir Ibnu Kasir, Juz 1*. Terjemahan Ibnu Kasir Ad-Dimasyqi. Bandung: Penerbit Sinar Baru Algensindo Bandung.

Abubakar, B., Aly, H.N., & Sitanggal, A.U. 1987. *Tafsir Al-Maragi, Juz 14*. Terjemahan Ahmad Mustafa Al-Maragi. Semarang: Penerbit Toha Putra.

Abubakar, B., Aly, H.N., & Sitanggal, A.U. 1988. *Tafsir Al-Maragi, juz 15*. Terjemahan Ahmad Mustafa Al-Maragi. Semarang: Penerbit Toha Putra.

Durbin, J.R.. 1992. *Modern Algebra: An Introduction Third Edition*. Canada: John Wiley and Sons, Inc.

Donnellan, T. 1969. *Lattice Theory*. London: Pergamon Press

Garg, V.K. 2007. *Lattice Theory with Applications*. Austin: University of Texas.

Gratzer, G. 2011. *Lattice Theory*. Canada: Springer Basel.

Mas'od, F. 2013. *Struktur Aljabar*. Jakarta: Akademia Permata.

Purwanto. 1998. *Matematika Diskrit.* Malang: IKIP Malang.

Sukardjono. 2002. *Teori Latis*. Yogyakarta: ANDI.

Sukirman. 2005. *Pengantar Struktur Aljabar*. Malang: Universitas Negeri Malang.

RIWAYAT HIDUP

Faizatul Wahidah dilahirkan di Malang pada tanggal 16 Mei 1996, anak pertama dari pasangan Abdussalam dan Umamah. Pendidikan pertama diselesaikan di kampung halaman di SDN Ringinsari 03 yang ditamatkan pada tahun 2007. Pada tahun yang sama, ia melanjutkan pendidikan menengah pertama di MTs Mambaul Ulum Gedangan dan diselesaikan pada tahun 2010. Kemudian ia melanjutkan pendidikan menengah atas di MA An-Nur Bululawang dan menamatkan pendidikan tersebut pada tahun 2013. Jenjang pendidikan berikutnya dia menempuh di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang melalui jalur Mandiri Tulis dengan mengambil Jurusan Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang
Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Faizatul Wahidah
Nim : 13610113
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Homomorfisme pada Latis
Pembimbing I : Evawati Alisah, M.Pd
Pembimbing II : Abdul Aziz, M.Si

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan
1.	14 Maret 2017	Konsultasi Bab I	1.
2.	31 Maret 2017	Konsultasi Kajian Keagamaan Bab I	2.
3.	10 April 2017	Konsultasi Bab I, Bab II	3.
4.	11 April 2017	Konsultasi Kajian Keagamaan Bab II	4.
5.	13 Juli 2017	Konsultasi Bab III	5.
6.	20 Juli 2017	Konsultasi Bab III	6.
7.	27 Juli 2017	Konsultasi Bab III	7.
8.	01 Agustus 2017	Konsultasi Bab I, Bab II, Bab III	8.
9.	03 Agustus 2017	Konsultasi Bab I, Bab II, Bab III, Bab III, dan Bab IV	9.
10.	07 Agustus 2017	Konsultasi Kajian Keagamaan Bab III	10.
11.	08 Agustus 2017	Konsultasi Bab I, Bab II, Bab III, Bab IV, dan abstrak	11.
12.	10 Agustus 2017	Konsultasi Keagamaan Bab I, Bab II, Bab III	12.
13.	14 Agustus 2017	ACC Bab I, Bab II, Bab III, Bab IV dan abstrak.	13.

Malang, 22 Agustus 2017
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001