SIFAT-SIFAT TURUNAN FRAKSIONAL KIRI DAN KANAN

SKRIPSI

OLEH
WAHYU NURIL FITRIA
NIM. 13610090

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2017

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

SIFAT-SIFAT TURUNAN FRAKSIONAL KIRI DAN KANAN

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh
Wahyu Nuril Fitria
NIM. 13610090

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2017

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

SIFAT-SIFAT TURUNAN FRAKSIONAL KIRI DAN KANAN

SKRIPSI

Oleh
Wahyu Nuril Fitria
NIM. 13610090

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 23 Agustus 2017

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Hairur Rahman, M.Si	Ach. Nashichuddin, M.A.
NIP. 19800429 200604 1 003	NIP. 19730705 200003 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

SIFAT-SIFAT TURUNAN FRAKSIONAL KIRI DAN KANAN

SKRIPSI

Oleh
Wahyu Nuril Fitria
NIM. 13610090

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal 12 September 2017

Penguji Utama	:	Dr. Usman Pagalay, M.Si	.....
Ketua Penguji	:	Mohammad Jamhuri, M.Si	.....
Sekretaris Penguji	:	Hairur Rahman, M.Si	.....
Anggota Penguji	:	Ach. Nashichuddin, M.A	.....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	Wahyu Nuril Fitria
NIM	:	13610090
Jurusan	:	Matematika
Fakultas	:	Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	:	Sifat-sifat Turunan Fraksional Kiri dan Kanan

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 23 Agustus 2017
Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL
4D64FAEF577982347
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Wahyu Nuril Fitria
NIM. 13610090

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

MOTO

إِنَّ مَعَ ٱلۡعُسۡرِ يُسۡرٗا ٦

"Sesungguhnya bersama kesulitan itu ada kemudahan"
(Qs. ash-Sharh/94:6)

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Bapak Nuzulul Kirom dan ibu Mahmudah tercinta, serta keluarga besar penulis dan semua sahabat khususnya para sahabat "Obat Hati" yang selalu memberikan do'a, teladan, dan semangat yang berarti bagi penulis.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt. atas limpahan rahmat, taufik, hidayah, dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi yang berjudul "Sifat-sifat Turunan Fraksional Kiri dan Kanan" sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat serta salam semoga tetap terlimpahkan kepada Nabi Muhammad Saw. yang telah menuntun umatnya dari zaman yang gelap menuju zaman yang terang-benderang.

Penyusunan skripsi ini tidak mungkin dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan, bimbingan, serta arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Abdul Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Hairur Rahman, M.Si, selaku dosen pembimbing I dan wali dosen yang telah memberikan arahan, motivasi, nasihat dan pengalamnya yang berharga kepada penulis.
5. Ach. Nashichuddin, M.A, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan bimbingan kepada penulis.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

6. Segenap civitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, terutama kepada seluruh dosen, terima kasih untuk segenap ilmu dan bimbingan selama ini.
7. Kedua orang tua penulis dan seluruh keluarga penulis yang selalu membimbing secara lahir maupun batin untuk keberhasilan penulis.
8. Teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2013, terima kasih atas dukungan, semangat, serta pengalaman yang tak terlupakan.
9. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan semua dalam keikutsertaan dalam menyelesaikan skripsi ini baik berupa moril maupun materiil.

Semoga Allah Swt. melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat kepada para pembaca khususnya bagi penulis secara pribadi.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Malang, Agustus 2017

Penulis

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL

HALAMAN PENGAJUAN

HALAMAN PERSETUJUAN

HALAMAN PENGESAHAN

HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

HALAMAN MOTO

HALAMAN PERSEMBAHAN

KATA PENGANTAR viii

DAFTAR ISI x

ABSTRAK xii

ABSTRACT xiii

ملخص xiv

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 4
1.3 Tujuan Penelitian 4
1.4 Manfaat Penelitian 4
1.5 Batasan Masalah 5
1.6 Metode penelitian 5
1.7 Sistematika Penulisan 6

BAB II KAJIAN PUSTAKA

2.1 Fungsi 7
2.2 Deret Taylor 9
2.3 Limit dan Kekontinuan 11
2.4 Turunan 12
2.5 Aturan Pencarian Turunan 16
2.6 Turunan Tingkat Tinggi 19
2.7 Anti Turunan 19

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.8 Integral Tak Tentu 20
2.9 Fungsi Gamma 21
2.10 Fungsi Beta 24
2.11 Hubungan Fungsi Gamma dan Fungsi Beta 28
2.12 Integral Fraksional 30
2.13 Sifat-sifat Integral Fraksional 31
2.14 Perintah Berfikir dalam Al-Quran 32

BAB III PEMBAHASAN

3.1 Turunan Fraksional 37
3.2 Sifat-Sifat Turunan Fraksional Kiri 41
3.3 Sifat-sifat Turunan Fraksional Kanan 61
3.4 Implementasi Sifat-Sifat Turunan Fraksional dari Bentuk Tafakur 74

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan 77
4.2 Saran 78

DAFTAR RUJUKAN 79

RIWAYAT HIDUP

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ABSTRAK

Fitria, Wahyu Nuril. 2017. **Sifat-sifat Turunan Fraksional Kiri dan Kanan.** Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Hairur Rahman, M.Si. (II) Ach. Nashichuddin, M.A.

Kata Kunci: Fungsi Gamma, Fungsi Beta, Integral Fraksional, Turunan Fraksional.

Istilah fraksional muncul atas pemikiran L' Hopital dan Leibniz mengenai suatu turunan menggunakan orde bukan bilangan bulat. Sehingga mulai lahir istilah kalkulus fraksional, kalkulus fraksional terdiri dari integral fraksional dan turunan fraksional. Untuk suatu fungsi yang terdefinisikan pada bilangan riil menggunakan turunan orde$-\alpha$, dengan α bilangan riil positif. Tujuan dari penelitian ini adalah menjelaskan dengan bukti secara rinci dari sifat-sifat turunan fraksional kiri dan kanan. Hasil skripsi ini adalah sifat-sifat turunan fraksioanal kiri, yaitu: kelipatan konstanta, penjumlahan, pengurangan, komposisi dengan orde bilangan bulat, turunan fraksional sebagai invers kiri dari integral fraksional, turunan fraksional sebagai invers kanan dari integral fraksional dengan syarat tertentu, komposisi pada turunan fraksional kiri. Sifat-sifat turunan fraksional kanan yaitu: kelipatan konstanta, penjumlahan, pengurangan, komposisi dengan orde bilangan bulat, turunan fraksional sebagai invers kiri dari integral fraksional, turunan fraksional sebagai invers kanan dari integral fraksional dengan syarat tertentu, komposisi pada turunan fraksional kanan. Bagi penelitian selanjutnya diharapkan dapat menggunakan orde yang lebih luas lagi atau dapat mengaplikasikan pada ruang Lebesgue atau pada ruang Morrey yang diperumum.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ABSTRACT

Fitria, Wahyu Nuril. 2017. **Properties of Left-Sided and Right-Sided Fractional Derivatives**. Thesis. Departement of Mathematics, Faculty of Sains and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University Malang. Advisors: (I) Hairur Rahman, M.Si. (II) Ach. Nashichuddin, M.A.

Keyword: Gamma Function, Beta Function, Fractional Integrals, Fractional Derivatives**.**

The fractional term arose after L 'Hopital and Leibniz concerning a derivative with a non-integer order. Thus the term fractional calculus begun, the fractional calculus consists of a fractional integral and a fractional derivative. For a given function defined on real number uses derivatives $\alpha -$order, where α is a positive real number. The purpose of this study is to explain the properties of the left and right fractional fractions with detailed proof. The results of this research are the properties of left-sided fractional derivatives are: multiple constants, addition, subtraction, composition with the order of an integer, the fractional derivative of inverse integral of left as a fractional, fractional derivative as the inverse of the fractional integrals of right with certain conditions, the composition on the the fractional derivative left. The properties of right-sided fractional derivatives are: multiple constants, addition, subtraction, composition with the order of an integer, the fractional derivative of inverse integral of left as a fractional, fractional derivative as the inverse of the fractional integrals of right with certain conditions, the composition on the the fractional derivative right. For further research, ity is expected to use a higher order again or can apply into the Lebesgue space or in Morrey space that generalized.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ملخص

الفطريّة، وحي نور. ٢٠١٧. **خصائص التفاضل الكسورة اليسار واليمين**. بحث جامعي. شعبة الرياضيّات، كلية العلوم والتكنولوجيّا، الجامعة الإسلاميّة الحكوميّة مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف: (١) هير الرحمن، الماجستير. (٢) أحمد نصحدين، الماجستير.

الكلمة الرئيسية: دالة غاما، دالة بيتا، متكاملة كسورة، تفاضل كسورة.

مصطلح التكامل كسور تظهر على اساس L' Hopital و Leibniz يصيب على حساب يستعمل بترتيب ليس صحيحا. حيث الوليدة حتى من حساب التفاضل والتكامل الكسري، حساب التفاضل والتكامل الكسري يتكون من التفاضل ومتكاملة كسور. لأداء دالة محددة على العدد الحقيقي ترتيب التفاضل α ، مع α عدد حقيقي موجب. والأهداف من هذا البحث هي لتشرح بالتفصيل الأدلة على خصائص التفاضل كسورة اليسار واليمين. نتائج هذا البحث هي خصائص التفاضل كسورة اليسار، هي ومضاعفات ثابتة، والجمع، والطرح، وتكوين صحيح، والمشتقات كسور كما عكس اليسار من كسور متكاملة، التفاضل كسور كعكس صحيح من التكامل كسور مع ظروف معينة، وتكوين كسور اليسار. خصائص التفاضل كسورة اليمين، هي ومضاعفات ثابتة، والجمع، والطرح، وتكوين الترتيب الصحيح، التفاضل كسورة كما عكس اليسار من متكاملة كسورة ، التفاضل كسورة كعكس صحيح من التكامل الجزئي مع ظروف معينة، وتكوين جزء كسور الصحيح. ويرجى على البحث الآتي ان يستخدم اوسع الرتبة وليطبيق فى فضاء Lebesgue او فى فضاء Morrey العام.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Allah telah menjadikan manusia sebagai makhluk yang sempurna daripada makhluk lain. Dengan diberikannya akal membuat manusia untuk senantiasa selalu bersyukur atas nikmat-Nya. Bersyukur bisa dengan hati, lisan, ataupun dengan perbuatan. Cara bersyukur dengan hati adalah mengakui sepenuh hati apa pun nikmat yang sudah diperoleh itu merupakan dari Allah. Bersyukur dengan lisan yaitu dengan mengucapkan *Alhamdulillah*. Sedangkan cara bersyukur dengan perbuatan yaitu senantiasa menjalankan segala perintah dan perbuatan yang diperintahkan oleh Allah. Salah satu perintah kecil dari Allah yang dijumpai dalam al-Quran adalah berpikir sesuai dalam surat al-Hasr/59:21

لَوْ أَنزَلْنَا هَٰذَا ٱلْقُرْءَانَ عَلَىٰ جَبَلٍ لَّرَأَيْتَهُۥ خَٰشِعًا مُّتَصَدِّعًا مِّنْ خَشْيَةِ ٱللَّهِ ۚ وَتِلْكَ ٱلْأَمْثَٰلُ نَضْرِبُهَا لِلنَّاسِ لَعَلَّهُمْ يَتَفَكَّرُونَ ﴿٢١﴾

"*Kalau sekiranya Kami menurunkan al-Quran ini kepada sebuah gunung, pasti kamu akan melihatnya tunduk terpecah belah disebabkan takut kepada Allah. Dan perumpamaan-perumpamaan itu Kami buat untuk manusia supaya mereka berpikir*"*(QS. al-Hasyr/59:21).*

Berpikir dalam Kamus Besar Bahasa Indonesia bermakna menggunakan akal budi untuk mempertimbangkan dan memutuskan sesuatu. Sejalan dengan adanya ilmu pengetahuan yang ada, maka sangat tepat untuk manusia terus berpikir atau mengembangkan ilmu pengetahuan yang ada secara lebih luas lagi. Sehingga dapat menemukan pengetahuan-pengetahuan yang lebih beragam dan menarik. Hal tersebut sama dengan apa yang dilakukan para matematikawan yang terus

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

mengembangkan berbagai bidang ilmu matematika. Diantaranya Al-Khawarizmi, Tsabit bin Qurrah, dan masih banyak lagi.

Al-Khawarizmi adalah seorang ilmuwan muslim terbaik pada masanya. Beliau merupakan orang yang pertama kali memperkenalkan ilmu aljabar dalam suatu bentuk dasar yang dapat diterapkan dalam kehidupan sehari-hari (Dwiyono, 2012:1). Tokoh Tsabit bin Qurrah adalah ilmuan muslim yang memiliki peranan penting dalam perhitungan integral, geometri analitik, konsep angka-angka riil dan kalkulus. Sedangkan tokoh lain yaitu Al-Biruni merupakan sosok ilmuan muslim yang juga mengembangkan berbagai ilmu dalam matematika pada abad ke-10 dan 11. Beliau menggunakan prinsip-prinsip geometri untuk membuktikan rumus kalkulus yang ditemukan oleh Tsabit bin Qurrah (Dwiyono, 2012:22).

Perkembangan kalkulus berada pada puncaknya pada tahun 1650 dan 1660. Hasil penemuannya berupa perhitungan dan konstruksi garis singgung yang berasal dari Cavalieri, Torricelli, Fermat, Pascal, Barrow, dan yang lain. Mereka juga berpendapat bahwa akhir dari penemuan kalkulus dijadikan sebagai disiplin ilmu yang hampir tidak dapat dihindarkan pada beberapa tahun selanjutnya. Langkah akhir penemuan kalkulus dilakukan oleh dua tokoh besar yang genius yaitu Issac Newton yang dikenal dengan sebutan "dua pengaruh tahun 1665 dan 1666", dan juga oleh Gottfried Wilhelm Leibniz selama dia tinggal di Paris dari tahun 1672 sampai 1676 (Simmons, 1992:141).

Leibniz menggunakan simbol dx dan dy untuk melambangkan pertambahan "kecil takhingga" dari x dan y, Δx dan Δy melambangkan pertambahan berhingga dari x dan y. Untuk y sebagai fungsi dari x dapat dituliskan "$y = f(x)$". Turunan y terhadap x, kemudian dipandang sebagai suatu limit dengan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

leibniz menyebut dy/dx suatu hasil bagi dari dua bilangan yang sangat kecil, arti perkataan sangat kecil tidaklah jelas. Tetapi, dy/dx merupakan lambang baku untuk turunan (Purcell, 1987:146).

Secara umum orde turunan dari suatu fungsi itu berupa bilangan bulat. Sehingga jika diberikan suatu fungsi, maka dapat ditentukan turunan orde ke satu, kedua, ketiga, dan seterusnya. Dengan perkembangan zaman para ilmuan senantiasa mengembangkan ilmu-ilmu tersebut untuk dikaji dan diteliti leebih luas lagi. Sehingga jika suatu turunan dapat dinyatakan turunan orde ke satu, kedua. Maka selanjutnya para ilmuan mengembangkan dengen orde turunan yang bukan bilangan bulat. Salah satu tokoh yang mengembangkan orde tersebut adalah Leibniz.

Notasi yang sudah dikenalkan Leibniz diatas mengenai turunan ke$-n$, $\frac{d^n y}{dx^n}$, dengan n suatu bilangan bulat. Kemudian timbul pertanyaan mengenai makna dari sebuah turunan bila orde turunan tersebut bukan bilangan bulat, $\frac{d^v y}{dx^v}$ dengan v suatu bilangan real. L'Hopital menganggap bahwa pertanyaan tentang makna orde fraksional dari sebuah turunan memiliki kaitan dengan apa yang diperkenalkan oleh Leibniz. Pada tahun 1695, L'Hopital menulis pertanyaan yang ditujukan kepada Leibniz, "Bagaiamana jika v bernilai $\frac{1}{2}$?". Leibniz menanggapi pertanyaan L'Hopital dengan menjawab bahwa " $d^{1/2}x$ akan sama dengan $x\sqrt{dx:x}$" (Alfiniyah, 2010:1).

Perkembangan orde turunan dapat dilihat sejak dilontarkannya pertanyaan L'Hopital kepada Leibniz. Sejak itu timbullah generalisasi dari turunan berode

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

bilangan bulat menjadi turunan berorde bukan bilangan bulat misalnya pada bilangan rasional atau bilangan riil. Generalisasi itu dapat dinamakan integral dan turunan fraksional. Selanjutnya banyak beberapa tokoh yang mengembangkan integral dan turunan fraksional dengan orde fraksional diantaranya Lioville, Grunwald, Letnikov dan Reimann. Kajian yang mengenai turunan fraksional bisa didapatkan diberbagai jurnal ataupun artikel. Sehingga penulis ingin mengkaji hal dasar dengan melengkapi bukti-bukti yang tidak banyak ditemukan diberbagai sumber buku, artikel maupun jurnal. Hal dasar tersebut yakni berupa "Sifat-Sifat Turunan Fraksional Kiri dan Kanan".

1.2 Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana sifat-sifat turunan fraksional kiri?
2. Bagaimana sifat-sifat turunan fraksional kanan?

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengetahui sifat-sifat turunan fraksional kiri.
2. Mengetahui sifat-sifat turunan fraksional kanan.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dalam penelitian ini dapat dijadikan sebagai landasan dalam sifat-sifat turunan fraksional kiri dan kanan. Selain itu juga sebagai referensi dalam perkembangan ilmu matematika saat ini, terkhusus dalam bidang analisis.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

1.5 Batasan Masalah

Pada penelitian ini, batasan masalah yang digunakan adalah turunan ke$-n$ dari suatu fungsi kontinu yang terdefinisikan pada daerah bilangan riil ($\mathbb{R}$) dengan interval $[a, b]$. Selanjutnya akan dicari turunan orde ke$-n$ dengan n suatu bilangan riil positif.

1.6 Metode penelitian

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode kepustakaan (*library research*). *Library research* adalah melakukan penelitian dengan mengumpulkan berbagai informasi dan data dengan bantuan buku, jurnal, artikel, dan berbagai sumber yang berkaitan dengan turunan, turunan fraksional kiri, dan turunan fraksional kanan. Penelitian ini merupakan penelitian pengembangan yaitu dengan melengkapi bukti dari sifat-sifat turunan fraksional kiri dan sifat-sifat turunan fraksional kanan. Adapun langkah-langkah penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menelaah definisi kalkulus turunan, fungsi-fungsi khusus diantaranya fungsi gamma dan fungsi beta.
2. Merumuskan definisi turunan fraksional kiri dan kanan beserta contoh-contohnya.
3. Membuktikan sifat-sifat turunan fraksional kiri dan kanan menggunakan proposisi dan teorema yang telah ada kemudian menjelaskan dan melengkapinya dengan bukti.
4. Membuat kesimpulan dari pembahasan penelitian.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

1.7 Sistematika Penulisan

Dalam penulisan skripsi ini, peneliti menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab, kemudian masing-masing bab dibagi menjadi subbab-subbab dengan sistematika penulisan sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan, berisi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian pustaka, berisi dasar teori-teori yang mendukung bagian pembahasan yaitu limit, turunan (kiri dan kanan), keterdiferensialan, aturan turunan, turunan tingkat tinggi, fungsi gamma, fungsi beta, integral fraksional, dan kutipan lain dari berbagai sumber.

Bab III Pembahasan, berisi pemaparan bukti dari sifat-sifat turunan fraksional kiri dan sifat-sifat turunan fraksional kanan.

Bab IV Kesimpulan dan saran, berisi kesimpulan dari pembahasan, serta saran untuk penelitian berikutnya.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Fungsi

Definisi 2.1

Misalkan A dan B himpunan-himpunan tidak kosong. Sutu fungsi $\boldsymbol{f}$ dari A ke B ditulis $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ adalah himpunan pasangan terurut $\boldsymbol{f} \subset \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ sehingga

i. Untuk setiap $x \in A$, ada $y \in B$ berlaku $(x, y) \in f$

ii. Jika $(x, y) \in f$ dan $(x, z) \in f$, maka $y = z$ (Dedi, 2005:26).

Apabila $(x, y) \in f$, ditulis $y = f(x)$ atau $f : x \to y$, dan y disebut nilai fungsi f di x. Himpunan A disebut daerah asal (daerah definisi/domaian/wilayah) fungsi f dan dinotasikan dengan D_f. Sedangkan himpunan $\{y \in B | (x, y) \in f\}$ disebut daerah nilai (daerah hasil/range/jelajah) fungsi f dan dinotasika dengan R_f.

Contoh: Diberikan persamaan $y = x^2 + 4x - 5$. Fungsi $f: D \to R$ dengan $y = f(x)$ adalah himpunan semua pasangan terurut (x, y) sehingga x dan y memenuhi persamaan $y = x^2 + 4x - 5$ yaitu

$$f = \{(x, y) | y = x^2 + 4x - 5, x \in D\}$$

Dari definisi fungsi f diatas, diperoleh

Untuk $x = 1 \to y = 0$

Untuk $x = 2 \to y = 7$

Jadi $(1,0)$, $(2,7) \in f$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Definisi 2.2 (Fungsi *Floor* dan *Ceiling*)

Misalkan $\boldsymbol{x}$ adalah bilangan riil, berarti $\boldsymbol{x}$ berada di antara dua bilangan bulat. Fungsi floor dari $\boldsymbol{x}$, dilambangkan dengan $\lfloor \boldsymbol{x} \rfloor$ dan fungsi ceiling dari $\boldsymbol{x}$ dilambangkan $\lceil \boldsymbol{x} \rceil$. Definisi kedua fungsi adalah:

$\lfloor x \rfloor$ menyatakan nilai bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x

$\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x (Munir, 2012:136).

Sesuai definisi diatas, dapat dikatakan bahwa fungsi $floor$ membulatkan ke bawah, sedangkan fungsi *ceiling* membulatkan x ke atas. Untuk selisih $x - \lfloor x \rfloor$ disebut bagian pecahan dari x dan dilambangkan dengan $\{x\}$. Jika x bilangan bulat, maka $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$ dan $\{x\} = 0$. Sedangkan, jika x bukan bilangan bulat, maka $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$.

Definisi 2.3 Sifat terurut rapi dari $\mathbb{N}$

Setiap himpunan subset tak kosong dari $\mathbb{N}$ memiliki satu elemen terkecil (Bartle, 2010:12).

Definisi 2.4 Sifat Archimedean

Jika $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$, maka ada $\boldsymbol{n_x} \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{n_x}$ (Bartle, 2010:42).

Bukti:

Saat pernyataan itu salah, maka $n < x$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$, karena x adalah batas atas dari $\mathbb{N}$. Oleh karena itu dengan menggunakan sifat kelengkapan, himpunan tak kosong $\mathbb{N}$ mempunyai supremum $u \in \mathbb{R}$. Mengurangkan 1 dari u memberi nilai $u - 1$, yang paling kecil dari supremum u dari $\mathbb{N}$. Oleh karena itu $u - 1$ bukan batas atas dari $\mathbb{N}$. jadi ada $m \in \mathbb{N}$ dengan $u - 1 < m$. Dengan menambah 1 memberikan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

nilai $u < m + 1$, dan saat $m + 1 \in \mathbb{N}$, pertidaksamaan ini kontradiksi dengan fakta bahwa u adalah sebuah batas atas dari $\mathbb{N}$.

Akibat 2.5

Jika $\boldsymbol{y > 0}$ ada $\boldsymbol{n_y} \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\boldsymbol{n_y - 1 \leq y < n_y}$ (Bartle, 2010:42).

Bukti:

Dengan menggunakan sifat Archimedian, bahwa subset $E_y := \{m \in \mathbb{N}\,; y < m\}$ dari $\mathbb{N}$ adalah tidak kosong. Dengan menggunakan sifat teurut rapi E_y memiliki saru elemen terkecil yang kita notasikan dengn n_y, maka $n_y - 1$ bukan milik E_y. Sehingga kita punya $n_y - 1 \leq y < n_y$.

2.2 Deret Taylor

Definisi 2.6

Jika fungsi $\boldsymbol{f}$ dapat diturunkan secara terus-menerus di $\boldsymbol{x = a}$, maka Deret Taylor dari fungsi $\boldsymbol{f}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$f_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \cdots$$

(Sugiman, 2005:36).

Teorema 2.7 (Bentuk Integral dari Suku Sisa Taylor)

Misalkan f sebuah fungsi pada interval J dengan $f^{(n)}$ kontinu pada J. Misalkan $a, b \in J$. Maka

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + R_n$$

dengan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$R_n = \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\, dt$$

(Kumar & Kumaresan. 2014:203).

Bukti:

Diawali dengan

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)(b-t)\, dt$$

$$f(b) = f(a) + \left(-f'(t)(b-t)|_a^b + \int_a^b f''(t)(b-t)\, dt \right)$$

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \int_a^b f''(t)(b-t)\, dt$$

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \left(f''(t)\frac{(b-t)}{2}\bigg|_a^b + \int_a^b f^{(3)}(t)\frac{(b-t)^2}{2}\, dt \right)$$

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + f''(a)\frac{(b-a)^2}{2} + \int_a^b f^{(3)}(t)\frac{(b-t)^2}{2}\, dt$$

asumsikan untuk R_k adalah benar

$$R_k = \int_a^b \frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t)\, dt$$

kemudian dengan memisalkan

$$u(t) = f^{(k)}(t).\ v(t) = -(b-t)^{k-1}$$

sehingga diperoleh

$$\int_a^b f^{(k)}(t)\frac{(b-t)^{k-1}}{(n-1)!}\, dt = f^{(k)}(t)\frac{(b-t)^k}{k!} + \int_a^b \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\, dt$$

dengan menggunakan induksi, maka diperoleh R_n terbukti.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.3 Limit dan Kekontinuan

Definisi 2.8 (Makna Limit secara Intuisi)

Untuk mengatakan bahwa $\lim_{x \to c} f(x) = L$, berarti bahwa ketika x dekat tetapi berlainan dari c, maka $f(x)$ dekat ke L (Purcell, 2007:57).

Definisi 2.9 (Limit Kiri dan Limit kanan)

Untuk mengatakan bahwa $\lim_{x \to c^+} f(x) = L$, Berarti bahwa ketika x dekat tetapi pada sebelah kanan c, maka $f(x)$ dekat ke$-L$. Demikian pula, untuk mengatakan bahwa $\lim_{x \to c^-} f(x) = L$. Berarti bahwa ketika x dekat tetapi pada sebelah kiri c, maka $f(x)$ adalah dekat ke$-L$ (Purcell, 2007:59).

Contoh: Buktikan bahwa $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$

Diberikan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ akan dicari bilangan $\delta > 0$ sehingga berlaku

$0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |f(x) - 4| < \varepsilon$

$0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |x^2 - 4| < \varepsilon$

$0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |x + 2||x - 2| < \varepsilon$

Misalkan $0 < \delta \leq 1$, dari hubungan $0 < |x - 2| < \delta \leq 1$ dan ketaksamaan segitiga diperoleh

$$|x + 2| = |x - 2 + 4| \leq |x - 2| + 4 < 1 + 4 = 5$$

Berdasarkan hasil ini, kemudian ditentukan untuk suatu $\delta > 0$ sehingga memenuhi

$$0 < |x - 2| < \delta \rightarrow \ |x + 2||x + 2| < 5|x + 2| < \varepsilon$$

Untuk sebarang $\varepsilon > 0$, pilih $\delta = \min\left\{1, \frac{1}{5}\varepsilon\right\}$, maka dengan menggunakan $\delta \leq 1$ dan $\delta \leq \frac{1}{5}\varepsilon$ diperoleh

$0 < |x - 2| < \delta \rightarrow \ |x^2 - 4| = |x + 2||x - 2| < 5|x + 2| < 5\delta \leq 5.\frac{1}{5}\varepsilon = \varepsilon$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dengan demikian terbukti bahwa $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$.

2.4 Turunan

Konsep turunan memiliki beberapa hal yang berkaitan tentang fungsi dan limit, karena pada dasarnya turunan selalu berkaitan dengan pengerjaan limit. Secara matematik $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ adalah konsep yang sangat penting yang kemudian dinamakan 'Turunan' (*derivative*).

Definisi 2.10

Misalkan fungsi $\boldsymbol{f}$ terdefinisi pada selang terbuka $\boldsymbol{I}$ yang memuat $\boldsymbol{a}$. Turunan pertama fungsi di $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ ditulis $\boldsymbol{f'(a)}$ didefinisikan dengan $\boldsymbol{f'(a)} = \boldsymbol{\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$ asalkan limit ini ada. $\boldsymbol{f'}$ disebut fungsi turunan pertama dari fungsi asal $\boldsymbol{f}$, nilai dari $\boldsymbol{f'}$ untuk sebarang $\boldsymbol{x}$ dalam $\boldsymbol{I}$ adalah $\boldsymbol{f'(x)}$ dengan $\boldsymbol{f'(x)} = \boldsymbol{\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$ asal limit ini ada. Domain dari fungsi $\boldsymbol{f'}$ adalah semua nilai $\boldsymbol{x}$ dimana limit diatas ada (Dedi, 2005:142).

Sebuah limit $\lim_{x \to t} f(x)$ dikatakan ada. Jika limit kiri $\lim_{x \to t^-} f(x)$ ada dan limit kanan, $\lim_{x \to t^+} f(x)$ ada dan keduanya bernilai sama. Sesuai definisi diatas sudah dijelaskan bahwa turunan dari suatu fungsi $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ jika limitnya ada. Sehingga nilai turunan pertama dari suatu fungsi f dititik $x = a$ turunan dari f didapatkan dari limitnya dengan limit kiri sama dengan limit kanan.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Definisi 2.11 (Turunan Kiri)

Misalkan fungsi $\boldsymbol{f}$ terdefinisi pada selang setengah terbuka $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{a}]$, Maka turunan kiri fungsi $\boldsymbol{f}$ di $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ ditulis $\boldsymbol{f'_-}(\boldsymbol{a})$ didefinisikan dengan $\boldsymbol{f'_-}(\boldsymbol{a}) = \lim\limits_{\boldsymbol{h}\to 0^-} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})}{\boldsymbol{h}}$ asalkan limit ini ada (Dedi, 2005:145).

Definisi 2.12 (Turunan Kanan)

Misalkan fungsi $\boldsymbol{f}$ terdefinisi pada selang setengah terbuka $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{t})$, nilai turunan kanan fungsi $\boldsymbol{f}$ di $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ ditulis $\boldsymbol{f'_+}(\boldsymbol{a})$ didefinisikan dengan $\boldsymbol{f'_+}(\boldsymbol{a}) = \lim\limits_{\boldsymbol{h}\to 0^+} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})}{\boldsymbol{h}}$ asalkan limit ini ada. Selanjutnya jika nilai turunan kiri di $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ sama dengan nilai turunan kanan di $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$, yaitu $\boldsymbol{f'_-}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{f'_+}(\boldsymbol{a})$ maka dikatakan $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$ ada, atau $\boldsymbol{f}$ terdiferensial (diferensiable) di $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ (Dedi, 2005:145).

Contoh: Diberikan fungsi $f(x) = |x|$ tunjukkan bahwa $f'(0)$ tidak ada

Karena $f(x) = |x| = \begin{cases} x, jika\ x \geq 0 \\ -x, jika\ x \leq 0 \end{cases}$

Sehingga

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{-(0+h)-(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h}$$

$$= -1$$

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{(0+h)-(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{h}{h}$$

$$= 1$$

Dari hasil diatas terlihat bahwa $f'_-(0)$ dan $f'_+(0)$ keduanya ada tapi tidak sama jadi $f'(0)$ tidak ada.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Suatu fungsi dapat terdiferensiasi apabila fungsi tersebut kontinu pada sebuah titik. Sesuai dengan teorema berikut:

Teorema 2.13 (Keterdiferensialan menunjukkan kekontinuan)

Jika $\boldsymbol{f'(c)}$ ada maka $\boldsymbol{f}$ kontinu di c (Purcell, 1987:118).

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$. Sekarang

$$f(x) = f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{x - c}(x - c), \qquad x \neq c$$

Karena

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to c} f(x) &= \lim_{x \to c}\left[f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{x - c}(x - c)\right] \\
&= \lim_{x \to c} f(c) + \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}(x - c) \\
&= f(c) + f'(c) \cdot 0 \\
&= f(c)
\end{aligned}$$

Diferensiasi dan integrasi dapat dijadikan sebagai proses yang berkebalikan sehingga jika digabungkan menjadi teorema dasar kalkulus berikut:

Teorema 2.14 (Teorema Dasar Kalkulus)

Andaikan $\boldsymbol{f}$ kontinu pada $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ maka

1. Jika $g(x) = \int_a^x f(t)dt$, maka $g'(x) = f(x)$ atau dapat dituliskan ulang menjadi

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x)$$

2. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, dimana F adalah sembarang antiturunan dari f atau dengan kata lain, $F' = f$ (Stewart, 2009:506).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Bukti:

1. Teorema ini dibuktikan dengan definisi turunan, sifat integral tentu dan TNR (Teorema Nilai Rata-rata) integral. Misalkan fungsi f kontinu pada $[a, b]$ dan terdiferensialkan pada (a, b). maka terdapat suatu $c \in (a, b)$ sehingga $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Kita misalkan $x \in [a, b]$ sehingga $x + \Delta x \in [a, b]$, maka

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left(\int_a^{x+\Delta x} f\,(t)dt - \int_a^x f\,(t)dt\right)$$

$$= \int_a^{x+\Delta x} f\,(t)dt + \int_x^a f\,(t)dt = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f\,(t)dt$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \,.\, f(c)\,.\,\Delta x, c = x + \theta\Delta x, \qquad 0 \le \theta \le 1$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} f(x + \theta\Delta x) = f\left(\lim_{\Delta x \to 0} (x + \theta\Delta x)\right) = f(x)$$

sehingga terbukti untuk $\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x)$.

2. Buatlah partisi P pada interval $[a, b]$ dengan titik-titik pembagian

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$$

karena $F'(x) = f(x)\ \forall\, x \in [a, b]$, maka pada selang bagian ke$-i$, $[x_{i-1}, x_i]$ yang panjangnya Δx_i fungsi F kontinu dan terdiferensialkan. Akibatnya, menurut Teorema Nilai Rata-rata untuk turunan

$$\exists\, c_i \in (x_{i-1}, x_i)\ \ni f(c_i) = F'(c_i) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_{i-1} - x_i}$$

sehingga diperoleh

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(c_i)(x_{i-1} - x_i) = f(c_i)\Delta x_i, i = 1,2, \dots, n$$

dengan menggunakan hasil ini,

$$F(b) - F(a) = \left(F(x_n) - F(x_{n-1})\right) + \left(F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})\right) + \cdots$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$+\big(F(x_1) - F(x_0)\big)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\big(F(x_i) - F(x_{i-1})\big) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$$

kemudian, karena fungsi f kontinu pada $[a, b]$, maka jumlah Riemann ini mempunyai limit untuk $\|P\| \to 0$. Akibatnya diperoleh

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\big(F(b) - F(a)\big)$$

yang memberikan

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

sehingga terbukti bahwa $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

2.5 Aturan Pencarian Turunan

Dengan menggunakan definisi turunan yang sudah didefinisikan diatas dapat diperoleh aturan-aturan yang berlaku pada sebuah fungsi dengan aturan masing-masing fungsi yang berbeda.

Teorema 2.15 (Aturan fungsi konstan)

Jika $\boldsymbol{f(x) = k}$ dengan $\boldsymbol{k}$ suatu konstanta maka untuk sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f'(x) = 0}$, yakni $\boldsymbol{D(k) = 0}$ (Purcell, 1987:122).

Bukti:

Karena $f(x + h) = f(x) = k$, maka didapatkan

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{k - k}{h} = 0$$

Teorema 2.16 (Aturan fungsi identitas)

Jika $\boldsymbol{f(x) = x}$, maka $\boldsymbol{f'(x) = 1}$, yakni $\boldsymbol{D(x) = 1}$ (Purcell, 1987:123).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Bukti:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1$$

Teorema 2.17 (Aturan kelipatan konstanta)

Jika $\boldsymbol{k}$ suatu konstanta dan $\boldsymbol{f}$ suatu fungsi yang terdirensialkan, maka $(\boldsymbol{kf})'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$, yakni $\boldsymbol{D}[\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})] = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{x})$ (Purcell, 1987:124).

Bukti:

Misalkan $F(x) = k\cdot f(x)$, maka

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{k\cdot f(x+h)-k\cdot f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} k\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = k\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= k\cdot f'(x) \end{aligned}$$

Teorema 2.18 (Aturan jumlah)

Jika $\boldsymbol{f}$ dan $\boldsymbol{g}$ fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, maka $(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$, yakni $\boldsymbol{D}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})] = \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{Dg}(\boldsymbol{x})$ (Purcell, 1987:124).

Bukti:

Misalkan $F(x) = f(x)/g(x)$, maka

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= f'(x)+g'(x) \end{aligned}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dari Teorema 2.17 dan Teorema 2.18 mengakibatkan sebuah sifat kelinieran sehingga menghasilkan

Teorema 2.19 (Kelinieran)

Jika $\boldsymbol{f}$ dan $\boldsymbol{g}$ adalah fungsi yang terdiferensialkan, $\boldsymbol{a}$ dan $\boldsymbol{b}$ adalah konstanta real, maka $\boldsymbol{D[af(x) + bg(x)] = aDf(x) + bDg(x)}$ (Dedi, 2005:158).

Bukti:

Dengan menggunakan sifat kelinieran limit

$$\lim_{x\to c}(af(x) + bg(x)) = a\left(\lim_{x\to c} f(x)\right) + b\left(\lim_{x\to c} g(x)\right)$$

sehingga dengan menggunakan definisi diatas dapat dipakai

$$\begin{aligned} D[af(x) + bg(x)] &= \lim_{h\to 0}\frac{\left[af(x+h) + bg(x+h) - [af(x) + bg(x)]\right]}{h} \\ &= a\left[\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] + b\left[\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right] \\ &= aDf(x) + bDg(x) \end{aligned}$$

Teorema 2.20 (Aturan selisih)

Jika $\boldsymbol{f}$ dan $\boldsymbol{g}$ fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, maka $\boldsymbol{(f - g)(x) = f'(x) - g'(x)}$, yakni $\boldsymbol{D[f(x) - g(x)] = Df(x) - Dg(x)}$ (Purcel, 1987:125).

Bukti:

$$\begin{aligned} D[f(x) - g(x)] &= D[f(x) + (-1)g(x)] \\ \text{dengan Teorema 2.16} \quad &= Df(x) + D[(-1)g(x)] \\ \text{dengan Teorema 2.15} \quad &= Df(x) + (-1)Dg(x) \\ &= Df(x) - Dg(x) \end{aligned}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.6 Turunan Tingkat Tinggi

Misalkan fungsi f terdefinisi pada selang terbuka I dan $I' = \{a \in I'$ atau $f'(a)$ ada$\}$. Karena $f'(a)$ didefinisikan melalui proses limit yang tunggal, maka untuk setiap $a \in I^*$ terdapat tepat satu nilai $f'(a)$. Ini mengakibatkan pengaitan antara $a \in I^*$ dengan $f'(a) \in \mathbb{R}$ merupakan suatu fungsi. Jika $f^{(k)}$ ada untuk $k = 1,2,\dots,n$ maka fungsi turunan kedua, ketiga, dan seterusnya didefinisikan dengan cara yang sama seperti fungsi turunan pertama melalui proses limit, yakni :

$f''(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$ bila limit ada

$f'''(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f''(x+h)-f''(x)}{h}$ bila limit ada

$f^{n}(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f^{n-1}(x+h)-f^{n-1}(x)}{h}$ bila limit ada (Dedi, 2005:181).

Dari definisi turunan kedua, ketiga hingga turunan ke-n dapat dituliskan notasinya sebgai berikut

$$f^{(n)} \text{ atau } D_x^n(y) \text{ atau } \frac{d^n y}{dx^n}$$

masing-masing notasi disebut notasi aksen, notasi d, dan notasi Leibniz.

2.7 Anti Turunan

Definisi 2.21

Suatu fungsi $\boldsymbol{f}$ disebut sebuah anti turunan dari suatu fungsi $\boldsymbol{f}$ pada selang $\boldsymbol{I}$ jika untuk setiap nilai $\boldsymbol{x}$ di dalam $\boldsymbol{I}$ berlaku $\boldsymbol{F'(x) = f(x)}$ (Leithold, 1986:386).

$\int f(x)\, dx$ melambangkan sebarang anti turunan $f(x)$. Dalam notasi ini, $f(x)$ disebut integran.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Contoh: Diketahui $f(x) = \sin 2x$ dan $F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x$. Apakah $F(x)$ suatu anti turunan dari $f(x)$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
\frac{d[F(x)]}{dx} &= \frac{d\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]}{dx} \\
&= -\frac{1}{2}\cdot\frac{d(\cos 2x)}{d(2x)}\cdot\frac{d(2x)}{dx} \\
&= -\frac{1}{2}\cdot(-\sin 2x)2 \\
&= \sin 2x \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

Jadi, jelas bahwa $F(x)$ merupakan suatu anti turunan dari $f(x)$.

2.8 Integral Tak Tentu

Suatu anti turunan dari suatu fungsi tidak tunggal, maka kita akan mempunyai bentuk anti turunan yang paling umum dari suatu fungsi pada selang I. Sehingga bentuk dari anti turunan dinamakan anti diferensial dari fungsi f pada selang I adalah fungsi $y = F(x) + C$, dengan $F'(x) = f(x)$ pada I.

Definisi 2.22

Proses menentukan anti diferensial dari fungsi $\boldsymbol{f}$ pada selang $\boldsymbol{I}$ dinamakan integral tak tentu dari fungsi $\boldsymbol{f}$ pada selang $\boldsymbol{I}$, dan ditulis dengan lambang

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

dengan F suatu anti turunan dari f pada I. Dan lambang $\int f(x)\,dx$ dibaca integral tak tentu dari f (Martono, 1999:170).

Contoh: Diberikan fungsi $F(x) = 2x^2$, maka $dF(x) = 4x\,dx$. Sehingga diperoleh

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\int dF(x) = \int 4x\, dx = 2x^2 + C = F(x) + C$$

Lambang

$$\int 4x\, dx = 2x^2 + C$$

Menyatakan bahwa integral tak tentu dari fungsi $f(x) = 4x, x \in \mathbb{R}$ terhadap peubah x hasilnya adalah fungsi $F(x) = 2x^2 + C, x \in \mathbb{R}$ dan C konstanta real.

2.9 Fungsi Gamma

Satu fungsi dasar dari kalkulus fraksional adalah fungsi gamma Euler $\Gamma(z)$ yang merupakan bentuk umum dari faktorial $n!$ dan n adalah sebarang bilangan bulat. Fungsi gamma $\Gamma(z)$ didefinisikan sebuah integral berikut

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt$$

yang konvergen untuk setiap bilangan real positif z (Podlubny, 1999:1).

Beberapa sifat dasar dari fungsi gamma dapat berupa beberapa bentuk berikut:

1. $\Gamma(1) = 1$

   Bukti:

   Dengan menggunakan definisi fungsi gamma

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \int_0^\infty t^{x-1}\, e^{-t}\, dt \\ \Gamma(1) &= \int_0^\infty t^{1-1}\, e^{-t}\, dt \\ &= \int_0^\infty e^{-t}\, dt \end{aligned}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \lim_{a\to\infty} \int_0^a e^{-t}\, dt$$

$$= \lim_{a\to\infty} [-e^{-t}]_0^a$$

$$= \lim_{a\to\infty} (-e^{-a} + e^{-0})$$

$$= \lim_{a\to\infty} (-e^{-a} + 1)$$

$$= 1$$

Jadi, terbukti bahwa $\Gamma(1) = 1$

2. $\Gamma(x+1) = x!, x \in \mathbb{N}$

Bukti:

(i). Untuk $x = 1$ maka $\Gamma(1+1) = \Gamma(2) = 1! = 1$

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\, e^{-t}\, dt$$

$$\Gamma(2) = \int_0^\infty t^{2-1}\, e^{-t}\, dt$$

$$= \int_0^\infty t \cdot e^{-t}\, dt$$

$$= \lim_{a\to\infty} \int_0^a t \cdot e^{-t}\, dt$$

$$= \lim_{a\to\infty} \left[-[t \cdot e^{-t}]_0^a + \int_0^a e^{-t}\, dt \right]$$

$$= \lim_{a\to\infty} (-a \cdot e^{-a} + (-e^{-t})_0^a)$$

$$= \lim_{a\to\infty} \left(-\frac{a}{e^a} + 1 \right)$$

$$= \lim_{a\to\infty} \left(-\frac{1}{e^a} + 1 \right)$$

$$= 1$$

Sehingga jelas $1! = 1$, Jadi pernyataan diatas (i) benar.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Jika $\Gamma(x) = (x-1)!$ benar

Ditunjukkan $\Gamma(x+1) = x!$. Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= \int_0^a t^{(x+1)-1} \cdot e^{-t} dt \\
&= \int_0^a t^x \cdot e^{-t}\, dt \\
&= \lim_{a\to\infty} \int_0^a (t^{-x})\, d(\, e^{-t}) \\
&= \lim_{a\to\infty} \left([-t^x \cdot e^{-t}]_0^a - \int_0^a e^{-t}\, d(-t^x) \right) \\
&= \lim_{a\to\infty} \left([-t^x \cdot e^{-t}]_0^a + \int_0^a e^{-t} \cdot x \cdot t^{x-1}\, d(t) \right) \\
&= \lim_{a\to\infty} \left([-a^x \cdot e^{-a} - 0] + x \int_0^a e^{-t} \cdot t^{x-1}\, d(t) \right) \\
&= 0 + x\Gamma(x) \text{ Diketahui } \Gamma(x) = (x-1)! \\
&= x(x-1)! \\
&= x!
\end{aligned}$$

Karena pernyataan $\Gamma(x+1) = x!$ Benar jika $\Gamma(x) = (x-1)!$

Maka $\Gamma(x+1) = x!\ \forall x \in \mathbb{N}$ benar.

3. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

Bukti:

Diketahui $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\, e^{-t}\, dt$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty t^{(x+1)-1}\, e^{-t}\, dt \\
&= \int_0^a t^x \cdot e^{-t}\, dt
\end{aligned}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \lim_{a\to\infty} \int_0^a t^x \cdot e^{-t}\, dt$$

$$= \lim_{a\to\infty} \int_0^a (t^{-x})\, d(\, e^{-t})$$

$$= \lim_{a\to\infty} \left([-t^x \cdot e^{-t}]_0^a - \int_0^a e^{-t}\ d(-t^x) \right)$$

$$= \lim_{a\to\infty} \left([-t^x \cdot e^{-t}]_0^a + \int_0^a e^{-t} \cdot x \cdot t^{x-1}\, d(t) \right)$$

$$= \lim_{a\to\infty} \left([-a^x \cdot e^{-a} - 0] + x \int_0^a e^{-t} \cdot t^{x-1}\, d(t) \right)$$

$$= \lim_{a\to\infty} - a^x \cdot e^{-x} + \lim_{a\to\infty} x \int_0^a e^{-t} \cdot t^{x-1}\, d(t)$$

$$= 0 + x \int_0^a e^{-t} \cdot t^{x-1}\, d(t)$$

$$= x\Gamma(x)$$

Jadi, terbukti bahwa $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

2.10 Fungsi Beta

Fungsi beta didefinisikan sebagai berikut

$$\mathrm{B}(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1} dt$$

dengan z dan w bilangan riil positif (Podlubny, 1999:6).

Sifat-sifat pada fungsi beta sebagai berikut :

1. $\mathrm{B}(x,y) = \mathrm{B}(y,x)$

Bukti:

Menggunakan definisi fungsi beta $\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Misalkan $t = 1 - s$, Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}(x,y) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \\
&= \int_0^1 (1-s)^{x-1}\big(1-(1-s)\big)^{y-1}ds \\
&= \int_0^1 (1-s)^{x-1} \cdot s^{y-1}\, ds \\
&= \int_0^1 s^{y-1}(1-s)^{x-1}\, ds \\
&= \mathrm{B}(x,y)
\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa $\mathrm{B}(x,y) = \mathrm{B}(y,x)$.

2. $\mathrm{B}(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\mathrm{m}-1}\theta \cdot \cos^{2\mathrm{n}-1}\theta\ d\theta$

Bukti:

Dengan menggunakan definisi fungsi beta

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

Misalkan $t = \sin^2\theta \Leftrightarrow dt = 2\sin\theta\cos\theta$

Untuk $x = 0$ maka $\theta = 0$,

Untuk $x = 1$ maka $\theta = \frac{\pi}{2}$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}(x,y) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\theta)^{x-1} \cdot (1-\sin^2\theta)^{y-1}\, 2\sin\theta\cos\theta\ d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\theta)^{x-1} \cdot (\cos^2\theta)^{y-1}\, 2\sin\theta\cos\theta\ d\theta
\end{aligned}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \quad 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-2}\theta \sin\theta \cos^{2y-2}\theta \cos\theta \ d\theta$$

$$= \quad 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}\theta \cos^{2y-1}\theta \ d\theta$$

Jadi, terbukti bahwa $\mathrm{B}(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1}\theta \cdot \cos^{2n-1}\theta \ d\theta$.

3. $\mathrm{B}(x,y) = \int_0^{\infty} \frac{s^{x-1}}{(1+s)^{(m+n)}} \, ds$

Bukti:

Dengan menggunakan definisi fungsi beta

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

Misalkan $t = \frac{s}{(1+s)} \Leftrightarrow dt = \frac{(1+s)-s}{(1+s)^2} ds$

$$dt = \frac{1}{(1+s)^2} ds$$

Untuk $x = 0, s = 0,$

Untuk $x = 1, s = \infty$

Sehingga diperoleh

$$\mathrm{B}(x,y) \quad = \quad \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

$$= \quad \int_0^{\infty} \left(\frac{s}{(1+s)}\right)^{x-1} \left(1 - \frac{s}{(1+s)}\right)^{y-1} \frac{1}{(1+s)^2} ds$$

$$= \quad \int_0^{\infty} \left(\frac{s}{(1+s)}\right)^{x-1} \left(\frac{(1+s)-s}{(1+s)}\right)^{y-1} \frac{1}{(1+s)^2} ds$$

$$= \quad \int_0^{\infty} \left(\frac{s}{(1+s)}\right)^{x-1} \left(\frac{1}{(1+s)}\right)^{y-1} \frac{1}{(1+s)^2} ds$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \int_0^\infty \frac{s^{x-1}\, 1^{y-1}}{(1+s)^{x-1}\cdot(1+s)^{y-1}} \cdot \frac{1}{(1+s)^2} ds$$

$$= \int_0^\infty \frac{s^{x-1}}{(1+s)^{x+y-2}} \cdot \frac{1}{(1+s)^2} ds$$

$$= \int_0^\infty \frac{s^{x-1}}{(1+s)^{(m+n)}}\, ds$$

Jadi, terbukti bahwa $\mathrm{B}(x,y) = \int_0^\infty \frac{s^{x-1}}{(1+s)^{(m+n)}}\, ds$.

4. $\mathrm{B}(x,y) = r^y \cdot (r+1)^x \int_0^1 \frac{s^{x-1}\cdot(1-s)^{y-1}}{(1+s)^{(m+n)}}\, ds$

Bukti:

Dengan menggunakan definisi fungsi beta

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

Misalkan $t = \frac{(r+1)s}{r+s} \Leftrightarrow dt = \frac{(r+1)(r+s)-(rs+s)}{(r+s)^2} ds$

$$dt = \frac{r(r+1)}{(r+s)^2} ds$$

Untuk $x = 0$ maka $t = 0$

Untuk $x = 1$ maka $t = 1$

Sehingga diperoleh

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{(r+1)s}{(r+s)}\right)^{x-1} \left(1 - \left(\frac{(r+1)s}{(r+s)}\right)\right)^{y-1} \frac{r(r+1)}{(r+s)^2} ds$$

$$= \int_0^1 \frac{(r+1)^{x-1} s^{x-1}}{(r+s)^{x-1}} \cdot \frac{r^{y-1}(1-s)^{y-1}}{(r+s)^{y-1}} \cdot \frac{r(r+1)}{(r+s)^2} ds$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \int_0^1 \frac{(r+1)^{x-1} \cdot (r+1) \cdot r^{y-1} \cdot r \cdot (1-s)^{y-1} \cdot s^{x-1}}{(r+s)^{x-1+y-1+2}} \, ds$$

$$= \int_0^1 \frac{(r+1)^{x} \cdot r^{y} \cdot s^{x-1} \cdot (1-s)^{y-1}}{(r+s)^{x+y}} \, ds$$

$$= r^y \cdot (r+1)^x \int_0^1 \frac{s^{x-1} \cdot (1-s)^{y-1}}{(r+s)^{x+y}} \, ds$$

Jadi, terbukti bahwa $\mathrm{B}(x,y) = r^y \cdot (r+1)^x \int_0^1 \frac{s^{x-1} \cdot (1-s)^{y-1}}{(1+s)^{(m+n)}} \, ds$.

2.11 Hubungan Fungsi Gamma dan Fungsi Beta

Fungsi beta dapat dinyatakan melalui fungsi gamma sebagai berikut

$$\mathrm{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

Selain itu masih ada integral lain yang dapat dinyatakan melalui fungsi beta dan fungsi gamma. Berikut ada 2 fungsi khusus yang penting:

- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}\theta \cos^{2y-1}\theta \; d\theta = \frac{1}{2}\mathrm{B}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$
- $\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \Gamma(p)\Gamma(p-1) = \frac{\pi}{\sin \pi p} \quad 0 < p < 1$ (Wrede & Spiegel, 2002:379).

Bukti:

Diketahui definisi fungsi gamma $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt$

Misalkan $t = s^2 \Leftrightarrow dt = 2s \, ds$

Sehingga diperoleh

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt$$

$$= \int_0^{\infty} (s^2)^{(x-1)} e^{-s^2} 2s \, ds$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \quad 2\int_0^\infty s^{2x-2} \cdot s \cdot e^{-s^2}\, ds$$

$$= \quad 2\int_0^\infty s^{2x-1} \cdot e^{-s^2}\, ds$$

Kemudian untuk $\Gamma(y) = 2\int_0^\infty u^{2y-1} \cdot e^{-u^2}\, du$. Selanjutnya akan diperoleh

$$\Gamma(x)\Gamma(y) \quad = \quad \left(2\int_0^\infty s^{2x-1} \cdot e^{-s^2}\, ds\right)\left(2\int_0^\infty u^{2y-1} \cdot e^{-u^2}\, du\right)$$

$$= \quad 4\left(\int_0^\infty s^{2x-1} \cdot e^{-s^2}\, ds\right)\left(\int_0^\infty u^{2y-1} \cdot e^{-u^2}\, du\right)$$

$$= \quad 4\int_0^\infty \int_0^\infty s^{2x-1} \cdot u^{2y-1} \cdot e^{-(x^2+y^2)} ds\, du \qquad (2.1)$$

Kemudian jika bentuk tersebut diubah ke bentuk koordinat kutub, maka $x = r\ \cos\theta,\ y = r\sin\theta$ sehingga diperoleh batas r dan θ sebagai berikut

Batas r

Untuk $y = 0$ dan $x = 0$ maka $r = 0$

Untuk $y = \infty$ dan $x = \infty$ maka $r = \infty$

Sehingga $0 \leq r \leq \infty$

Batas θ

Untuk $y = 0$, maka $\sin\theta = 0$, sehingga $\theta = 0$

Untuk $y = \infty$, maka $\sin\theta = 1$, sehingga $\theta = \frac{\pi}{2}$

Sehingga $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

Sehingga dalam sistem koordinat kutub, integral ganda dua pada persamaan (2.1) menjadi sebagai berikut

$$\Gamma(x)\Gamma(y) \quad = \quad 4\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{\infty} (r\ \cos\theta)^{2x-1}(r\ \sin\theta)^{2n-1} \cdot e^{-((r\ \cos\theta)^2+(r\ \sin\theta)^2)} r\, dr\, d\theta$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \quad 4\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{\infty} r^{2x-1}\cdot r^{2y-1}\cdot \cos^{2x-1}\theta\cdot \sin^{2y-1}\theta\cdot e^{-r^2}\ dr\, d\theta$$

$$= \quad 4\left(\int_{r=0}^{\infty}(r^2)^{(x+y)-1}\cdot e^{-r^2} r\, dr\ \right)\left(\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2x-1}\theta\sin^{2y-1}\theta\, d\theta\right)$$

$$= \quad 2\left(\int_{r=0}^{\infty}(r^2)^{(x+y)-1}\cdot e^{-r^2}\frac{1}{2}\, d(r^2)\right)\cdot 2\left(\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2x-1}\theta\sin^{2y-1}\theta\, d\theta\right)$$

$$= \quad \left(\int_{r=0}^{\infty}(r^2)^{(x+y)-1}\cdot e^{-r^2} d(r^2)\right)\cdot\ \mathrm{B}(x,y)$$

$$= \quad \Gamma(x+y)\cdot \mathrm{B}(x,y)$$

Diperoleh $\Gamma(x)\Gamma(y) = \Gamma(x+y)\cdot \mathrm{B}(x,y) \Leftrightarrow \mathrm{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

Jadi, terbukti bahwa $\mathrm{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

2.12 Integral Fraksional

Definisi 2.23

Misalkan $\boldsymbol{\varphi(x)} \in (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$, Integral

$$(\mathrm{I}_{a+}^{\alpha}\varphi)(x) \quad = \quad \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{x}\frac{\varphi(x)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt, \qquad x > a \qquad (2.2)$$

$$(\mathrm{I}_{b-}^{\alpha}\varphi)(x) \quad = \quad \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x}^{b}\frac{\varphi(x)}{(t-x)^{1-\alpha}}dt, \qquad b < x \qquad (2.3)$$

dimana $\alpha > 0$, keduanya disebut integral fraksional dari orde α. Biasanya juga disebut integral fraksional kiri dan kanan secara berturut-turut. Nama yang disebutkan untuk integral (2.2) dan (2.3) adalah integral fraksional Riemann-Liouville (Samko, 1987:33).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Teorema 2.22 (Teorema Fubini)

Misalkan $\Omega_1 = [a, b]$, $\Omega_2 = [c, d]$, $-\infty \leq a < b \leq \infty, -\infty \leq c < d \leq \infty$. dan misalkan $f(x, y)$ sebuah fungsi terukur yang didefinisikan pada $\Omega_1 \times \Omega_2$. Jika setidaknya ada satu dari integral-integral

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} f(x, y)\, dy, \qquad \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} f(x, y)\, dx, \qquad \iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x, y)\, dxdy$$

yang memang konvergen maka ketiga integral tersebut sama (Samko, 1987:97).

Jika satu bentuk integral dari teorema Fubini diatas terpenuhi yakni

$$\int_a^b dx \int_a^x f(x, y)\, dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y)\, dx \tag{2.4}$$

dengan asumsikan satu dari integral itu memang konvergen, maka hubungan persamaan (2.4) dinamakan bentuk Dirichlet.

2.13 Sifat-sifat Integral Fraksional

Adapun sifat-sifat integral fraksional kiri dan kanan sebagai berikut:

1. Misalkan $\alpha > 0$ dan k adalah konstanta, maka berlaku

$$I_{a^+}^{\alpha} k\varphi(x) = kI_{a^+}^{\alpha}\varphi(x)$$

$$I_{b^-}^{\alpha} k\varphi(x) = kI_{b^-}^{\alpha}\varphi(x)$$

2. Misalkan φ dan ψ merupakan fungsi yang kontinu dan $\alpha > 0$ maka berlaku

(i) $I_{a^+}^{\alpha}\big(\varphi(x) + \psi(x)\big) = I_{a^+}^{\alpha}\varphi(x) + I_{a^+}^{\alpha}\psi(x)$

$I_{b^-}^{\alpha}\big(\varphi(x) + \psi(x)\big) = I_{b^-}^{\alpha}\varphi(x) + I_{b^-}^{\alpha}\psi(x)$

(ii) $I_{a^+}^{\alpha}\big(\varphi(x) - \psi(x)\big) = I_{a^+}^{\alpha}\varphi(x) - I_{a^+}^{\alpha}\psi(x)$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$I_{b^-}^{\alpha}\big(\varphi(x)-\psi(x)\big)=I_{b^-}^{\alpha}\varphi(x)-I_{b^-}^{\alpha}\psi(x)$$

3. Misalkan $\alpha,\beta>0$ dan $x\in\ (a,b)$, maka berlaku

$$I_{a^+}^{\alpha}I_{a^+}^{\beta}\varphi(x)=I_{a^+}^{\alpha+\beta}\varphi(x)$$

$$I_{b^-}^{\alpha}I_{b^-}^{\beta}\varphi(x)=I_{b^-}^{\alpha+\beta}\varphi(x)$$

4. Misalkan $\alpha.\beta>0$ dengan $\beta=k\in\mathbb{N}$ dan $\alpha>k$, maka berlaku

$$D^kI_{a^+}^{\alpha}\varphi(x)=I_{a^+}^{\alpha-k}\varphi(x)$$

$$D^kI_{b^-}^{\alpha}\varphi(x)=(-1)^kI_{b^-}^{\alpha-k}\varphi(x)$$

(Kilbas, dkk, 2006:74).

2.14 Perintah Berfikir dalam Al-Quran

Sebagaimana yang telah dijelaskan pada Bab I bahwa salah satu bentuk atau cara bersyukur adalah dengan selalu memikirkan segala sesuatu tentang kekuasaan Allah Swt. dengan berfikir maka akan semakin bertambah banyak ilmu kita. Ilmu yang ada didunia ini merupakan suatu kekuasaan Allah Swt. yang sangat luas. Dengan kekuasaan yang luas tersebut bergantung pada manusia yang dapat mempelajari atau tidak sebagaimana yang telah dijelaskan dalam al-Quran surat al-Baqarah/2:269

يُؤْتِى ٱلْحِكْمَةَ مَن يَشَآءُ ۚ وَمَن يُؤْتَ ٱلْحِكْمَةَ فَقَدْ أُوتِىَ خَيْرًا كَثِيرًا ۗ وَمَا يَذَّكَّرُ إِلَّآ أُو۟لُوا۟ ٱلْأَلْبَٰبِ ﴿٢٦٩﴾

"Allah menganugerahkan al hikmah (kefahaman yang dalam tentang Al Quran dan As Sunnah) kepada siapa yang dikehendaki-Nya. Dan barangsiapa yang dianugerahi hikmah, ia benar-benar telah dianugerahi karunia yang banyak. Dan hanya orang-orang yang berakallah yang dapat mengambil pelajaran (dari firman Allah)" (QS. al-Baqarah/2:269).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Menurut tafsir Jalalain menjelaskan (Allah memberikan hikmah), artinya ilmu yang berguna yang dapat mendorong manusia untuk bekerja dan berkarya (kepada siapa yang dikehendaki-Nya dan barang siapa yang telah diberi hikmah itu, maka sungguh ia telah diberi kebaikan yang banyak) karena hikmah itu akan menuntunnya kepada kebahagiaan yang abadi. (Dan tiadalah yang dapat mengambil pelajaran). Asalnya ta diidghamkan pada dzal hingga menjadi yadzdzakkaruu, (kecuali orang-orang berakal) (Al-Mahalli dan As-Suyuti, 2008:150).

Pada tafsir Ibnu Katsir pada kata "الْحِكْمَةَ" bukanlah kenabian melainkan ilmu fiqih dan al-Quran. Abul aliyah mengatakan "الْحِكْمَةَ" ialah takut kepada Allah, karena takut kepada Allah merupakan puncak dari hikmah. Sedangkan Ibnu Wahb meriwayatkan dari Malik yang mengatakan sesungguhnya hikmah itu adalah pengetahuan megenai agama Allah dan merupakan perkara yang dimasukkan oleh Allah ke dalam hati manusia sebagai rahmat dan karunianya. Dan orang yang tidak dapat mengambil pelajaran yang dimaksudkan adalah tiada orang yang dapat memanfaatkan pelajaran dan peringatan kecuali hanya orang yang mempunyai pemahaman dan akal dengan begitu manusia dapat memahami *khitab* (perintah Allah) (Ad-Dimasyqi, 2000:109).

Allah memberikan pemahaman dalam segala permasalahan agama, dalam menentukan amal yang bermanfaat dan dalam kelurusan ucapan serta perbuatan kepada siapa saja diantara hamba-hamba-Nya yang Dia kehendaki untuk mendapat kebaikan, juga manusia yang dipilih-Nya untuk mendapat karunia. Barangsiapa diberikan karunia Ilahi seperti ini, berarti dia telah diberikan kebaikan yang banyak, anugerah yang melimpah dan bagian yang besar. Setiap orang yang mengambil

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

faidah dari tanda-tanda ini dan mengambil pelajaran dari berbagai perumpamaan pastilah mata hatinya bersinar, hatinya hidup, dan pemahamannya benar (Al-Qarni, 2008:215).

Tafsir Fi Dzilahil-Qur'an mengartikan kata "hikmah" sebagai kelapangan dan kelurusan tujuan sehingga ia tidak bisa berbuat jahat dan tidak melampaui batas. Diberikan pengetahuan agar mengerti sebab dan tujuan agar ia tidak tersesat dalam mengukur dan menentukan urusan. Ia juga diberikan panjangan batin yang cemerlang dan membimbing kepada kemaslahatan yang tepat baik berupa gerakan maupun perbuatan kebaikan yang banyak dan beraneka ragam. Ulul albab 'orang yang berakal sehat' adalah orang yang selalu ingat dan lengah, dan orang yang dapat mengambil pelajaran sehingga tidak masuk ke dalam kesesatan. Sehingga disinilah peran akal sebagai pengingat arahan-arahan hidayah dan petunjuk dan mengambil manfaat darinya (Quthb, 2005:367).

Menurut penulis, bahwa segala sesuatu yang telah Allah berikan merupakan suatu anugerah untuk siapa saja yang sudah Allah kehendaki. Anugerah itu dapat berupa akal yang sehat, pikiran yang jernih, ataupun hati yang bersih. Sehingga dengan diberikanya anugerah oleh Allah itu manusia harus bisa menggunakan atau memanfaatkan sebaik mungkin. Apabila kita hubungan pada ilmu-ilmu yang terus berkembang dapat disimpulkan bahwa jikalau seseorang itu dapat mengambil hikmah ataupun mengembangkan ilmunya terus menerus maka akan memberikan kemaslahatan dan kebaikan untuk orang lain khususnya untuk dirinya sendiri dan perkembangan ilmu pada zaman saat ini.

Adapun ayat lain yang membuat kita akan semakin mengetahui kekuasaan dan kebesaran Allah Swt. salah satunya terdapat dalam al-Quran surat ar-Ra'd/13:4

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

وَفِي ٱلْأَرْضِ قِطَعٌ مُّتَجَٰوِرَٰتٌ وَجَنَّٰتٌ مِّنْ أَعْنَٰبٍ وَزَرْعٌ وَنَخِيلٌ صِنْوَانٌ وَغَيْرُ صِنْوَانٍ يُسْقَىٰ بِمَآءٍ وَٰحِدٍ وَنُفَضِّلُ بَعْضَهَا عَلَىٰ بَعْضٍ فِي ٱلْأُكُلِ ۚ إِنَّ فِي ذَٰلِكَ لَءَايَٰتٍ لِّقَوْمٍ يَعْقِلُونَ ﴿٤﴾

"Dan di bumi ini terdapat bagian-bagian yang berdampingan, dan kebun-kebun anggur, tanaman-tanaman dan pohon korma yang bercabang dan yang tidak bercabang, disirami dengan air yang sama. Kami melebihkan sebahagian tanam-tanaman itu atas sebahagian yang lain tentang rasanya. Sesungguhnya pada yang demikian itu terdapat tanda-tanda (kebesaran Allah) bagi kaum yang berfikir" (QS. ar-Ra'd/13:4).

Tafsir Ibnu Katsir menjelaskan bahwa ibarat bagian bumi yang berdampingan adalah kawasan yang satu sama lainya berdampingan, tetapi yang satunya berpembawaan subur, dapat menumbuhkan segala sesuatu yang bermanfaat bagi manusia sedangkan yang lainnya tandus. Selain itu diibaratkan perbedaan warna pada masing-masing kawasan yang berbeda, ada yang berwarna merah, ada yang putih, dan lainnya lagi sedangkan pada tumbuhan pun terdapat cabang dan ada pula yang tidak bercabang. Karena semua itu menunjukkan keberadaan Allah yang menciptakannya menurut apa yang dikehendaki-Nya. Dan semua tanda-tanda kebesaran Allah itu diperuntukkan bagi kaum yang berfikir (Ad-Dimasyqi, 2000:113).

Pada tafsir Fi Dzilahil-Qur'an mengibaratkan bagian bumi yang saling berdampingan yaitu pada bagian yang memiliki kesamaan diantaranya ada tanah yang subur dan ada yang gersang, ada yang tandus ada yang gembur dan masing-masing mempunyai tingkatan sendiri-sendiri. Adanya berbagai macam tanaman membuat berbagai macam variasi yang ada di alam ini. Apabila dalam pohon terdapat ranting yang bercabang ataupun tidak maka saat disiram dengan air pada tanah yang sama juga akan menghasilkan hasil buah yang berbeda rasanya pula.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dengan beragam hamparan yang ada dimuka bumi ini semua menunjukkan kebesaran Allah Swt. dan tanda-tanda kebesaran tersebut diperuntukkan untuk orang supaya berfikir (Quthb, 2005:34).

Menurut penulis, dalam surat ar-Ra'd/13:4 tersebut menjelaskan bahwa ibarat bumi yang berdampingan adalah sesuatu yang saling berkesinambungan, sesuatu yang dimaksudkan misalnya pada tumbuhan. Selain itu ayat diatas membahas mengenai variasi tanaman yang ada di muka bumi ini. Dengan kesamaan air sebagai sumber kehidupan tumbuhan namun pada akhirnya tumbuhan itu menghasilkan variasi yang berbeda-beda. Semua hal yang terjadi karena kekuasaan Allah sehingga manusia apabila dapat mengambil hikmah dari peristiwa yang terjadi maka mereka termasuk golongan orang yang berfikir.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Turunan Fraksional

Diberikan sebuah fungsi sebagai berikut:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = f(x), x > 0 \tag{3.1}$$

dimana $0 < \alpha < 1$. Sehingga untuk solusi fungsi diatas didapatkan dengan langkah mengubah x ke t dan t ke s sehingga persamaan (3.1) menjadi

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \frac{\varphi(s)ds}{(t-s)^{1-\alpha}} = f(t)$$

selanjutnya kedua ruas dikalikan dengan $(x-t)^{-\alpha}$ dan $\Gamma(\alpha)$ sehingga diperoleh

$$\frac{\Gamma(\alpha)(x-t)^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \frac{\varphi(s)ds}{(t-s)^{1-\alpha}} = (x-t)^{-\alpha}\cdot f(t)\cdot\Gamma(\alpha)$$

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{(x-t)^{\alpha}}\int_a^t \frac{\varphi(s)ds}{(t-s)^{1-\alpha}} = \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}}\cdot\Gamma(\alpha)$$

dengan mengintegralkan kedua ruas terhadap t didapatkan

$$\int_a^x \frac{1}{(x-t)^{\alpha}}\int_a^t \frac{\varphi(s)ds}{(t-s)^{1-\alpha}}\,dt = \Gamma(\alpha)\int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}}$$

$$\int_a^x\int_a^t \frac{1}{(x-t)^{\alpha}}\frac{\varphi(s)}{(t-s)^{1-\alpha}}\,ds\,dt = \Gamma(\alpha)\int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}} \tag{3.2}$$

kemudian dengan menggunakan teorema Dirichlet pada ruas kanan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\int_a^b dx \int_a^x f(x,y)\,dy \quad = \quad \int_a^b dy \int_y^b f(x,y)\,dx$$

$$\int_a^x \int_a^t \frac{1}{(x-t)^\alpha} \frac{\varphi(s)}{(t-s)^{1-\alpha}}\,ds\,dt \quad = \quad \int_a^x \int_s^x \frac{\varphi(s)}{(x-t)^\alpha (t-s)^{1-\alpha}}\,dt\,ds$$

$$= \int_a^x \varphi(s) \int_s^x \frac{1}{(x-t)^\alpha (t-s)^{1-\alpha}}\,dt\,ds$$

Sehingga persamaan (3.2) dapat dituliskan sebagai berikut

$$\int_a^x \varphi(s) \int_s^x \frac{1}{(x-t)^\alpha (t-s)^{1-\alpha}}\,dt\,ds \quad = \quad \Gamma(\alpha) \int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^\alpha} \qquad (3.3)$$

kemudian menyelesaikan integral dalamnya terlebih dahulu pada ruas kiri dengan mensubstitusikan variabel τ pada variabel t

$$\tau = \frac{t-s}{x-s} \rightarrow t = s + \tau(x-s) \rightarrow dt = (x-s)d\tau$$

untuk $t = s$ maka $\tau = 0$ dan saat $t = x, \tau = 1$

$$\int_s^x \frac{1}{(x-t)^\alpha (t-s)^{1-\alpha}} dt \quad = \int_0^1 \frac{(x-s)}{(x-t)^\alpha (t-s)^{1-\alpha}} d\tau$$

$$= \int_0^1 \frac{(x-s)d\tau}{\left(x-\left(s+\tau(x-s)\right)\right)^\alpha \left(\left(s+\tau(x-s)\right)-s\right)^{1-\alpha}}$$

$$= \int_0^1 \frac{(x-s)d\tau}{(x-s-\tau x+\tau s)^\alpha (s+\tau x-\tau s-s)^{1-\alpha}}$$

$$= \int_0^1 \frac{(x-s)d\tau}{\left((x-s)(1-\tau)\right)^\alpha \left(\tau(x-s)\right)^{1-\alpha}}$$

$$= \int_0^1 (x-s)^{-\alpha}\,(x-s)^{\alpha-1}(x-s)(1-\tau)^{-\alpha}\tau^{\alpha-1}d\tau$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \int_0^1 (1-\tau)^{-\alpha}(\tau)^{\alpha-1}dt$$

Selanjutnya dengan menggunakan definisi fungsi beta dan hubungan fungsi gamma dan fungsi beta:

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt\,,$$

$$\mathrm{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

sehingga diperoleh

$$\int_0^1 (1-\tau)^{-\alpha}(\tau)^{\alpha-1}dt = \mathrm{B}(\alpha,1-\alpha)$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma\big(\alpha+(1-\alpha)\big)} = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)$$

selanjutnya persamaan (3.2) didapatkan

$$\int_a^x \frac{1}{(x-t)^{\alpha}(t-s)^{1-\alpha}}dt \int_a^x \varphi\,(s)ds = \Gamma(\alpha)\int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}}$$

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)\int_a^x \varphi\,(s)ds = \Gamma(\alpha)\int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}}$$

kemudian kedua ruas dikalikan dengan masing-masing $\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}$ dan diturunkan terhadap x sehingga menjadi

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)\int_a^x \varphi\,(s)ds = \Gamma(\alpha)\int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}}$$

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x \varphi\,(s)ds = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x \varphi(s)ds\right) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^\alpha}$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^\alpha} \tag{3.4}$$

Jika pada persamaan (3.1) memiliki solusi maka cukup diberikan persamaan (3.4). Sebaliknya utuk suatu fungsi

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \frac{\varphi(t)dt}{(t-x)^{1-\alpha}} = f(x), x \leq b \tag{3.5}$$

dimana $0 < \alpha < 1$ memiliki solusi

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_x^b \frac{f(t)\,dt}{(t-x)^\alpha} \tag{3.6}$$

Definisi 3.1

Untuk fungsi $f(x)$ pada interval $[a.b]$ masing-masing dapat dilambangkan

$$(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^\alpha}, \tag{3.7}$$

$$(\mathcal{D}_{b-}^{\alpha}f)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_x^b \frac{f(t)dt}{(t-x)^\alpha}, \tag{3.8}$$

disebut turunan fraksional dari orde $0 < \alpha < 1$, kiri dan kanan berturut-turut. Turunan fraksional biasanya bernama turunan Riemman-Liouville (Samko, 1993:35).

Suatu orde $0 < \alpha < 1$ dapat diperbesar hingga $\alpha \geq 1$. Dengan menggunakan Definisi 2.2 penulis menggunakan notasi berikut:

$[\alpha]$ = bagian bilangan bulat dari bilangan α

$\{\alpha\}$ = bagian pecahan dari α, $0 \leq \{\alpha\} < 1$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$

sehingga saat α adalah bilangan bulat, maka turunan dari orde α dituliskan :

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} = \left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha}, \quad \mathcal{D}_{b-}^{\alpha} = \left(-\frac{d}{dx}\right)^{\alpha}, \quad \alpha = 1,2,3,\ldots$$

Sedangkan saat α adalah bukan bilangan bulat, maka turunan dari orde α dituliskan:

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} := \left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]} \mathcal{D}_{a+}^{\{\alpha\}} f = \left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1} I_{a+}^{1-\{\alpha\}}$$

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^{n} \int_{a}^{x} \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \quad n = [\alpha] + 1$$

$$\mathcal{D}_{b-}^{\alpha} := \left(-\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]} \mathcal{D}_{b-}^{\{\alpha\}} f = \left(-\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1} I_{b-}^{1-\{\alpha\}}$$

$$\mathcal{D}_{b-}^{\alpha} = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^{n} \int_{x}^{b} \frac{f(t)\,dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}, \quad n = [\alpha] + 1$$

3.2 Sifat-Sifat Turunan Fraksional Kiri

Definisi 3.2

Untuk fungsi $f(x)$ pada interval $[a.b]$ dilambangkan

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^{n} \int_{a}^{x} \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \quad n = [\alpha] + 1 \tag{3.9}$$

$$= D^n I_{a+}^{n-\alpha} f(x) \qquad n-1 \le \alpha < n$$

adalah turunan fraksioanal kiri berorde α, dengan $\alpha > 0$ dan n adalah bilangan bulat terkecil yang lebih besar dari α sedemikian sehingga $n - 1 \le \alpha < n$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Contoh: Misalkan diberikan $f(x) = x^3$, akan dicari turunan fraksioanal kiri dengan orde $\alpha = 0{,}5$ maka didapatkan $[\alpha] = 0$ dan $\{\alpha\} = 0{,}5$ sehingga berlaku $n = 1$

$$(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha}}$$

$$\left(\mathcal{D}_{a+}^{0,5} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-0{,}5)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{t^3\, dt}{(x-t)^{0,5}}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(0{,}5)} \frac{d}{dx} \int_0^x t^3\, (x-t)^{-0,5}\, dt$$

Dengan memisalkan $u = (x-t)^{-\frac{1}{2}}$ maka $du = \frac{1}{2}(x-t)^{-\frac{3}{2}} dt$

$$(\mathcal{D}_{a+}^{0.5} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(0{,}5)} \frac{d}{dx} \int_0^x t^3\, (x-t)^{-0,5}\, dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(0{,}5)} \frac{d}{dx} \int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{0} (x-u^{-2})^3 \cdot u \cdot 2(x-t)^{\frac{3}{2}}\, du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(0{,}5)} \frac{d}{dx} \int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{0} (x^3 - 3x^2u^{-2} - 3xu^{-4} - u^{-6}) \cdot 2u^{-2}\, du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(0{,}5)} \frac{d}{dx} \int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{0} 2x^3u^{-2} - 3x^2u^{-4} - 3xu^{-6} - 2u^{-8}\, du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(0{,}5)} \frac{d}{dx} \left[-2x^3u^{-1} + x^2u^{-3} + \frac{3}{5}xu^{-5} + \frac{2}{7}u^{-7}\right]_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{0}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(0{,}5)} \frac{d}{dx} \left[0 - \left(2x^3\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{-1} + x^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{-3} + \frac{3}{5}x\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{-5}\right.\right.$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$-\frac{2}{7}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{-7}\Bigg)\Bigg]$$

$$= \frac{1}{\Gamma(0{,}5)}\left(\frac{d}{dx}\left[\frac{16}{35}x^{\frac{7}{2}}\right]\right)$$

$$\left(\mathcal{D}_{a+}^{1,5}f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(0{,}5)}\left(\frac{112}{70}x^{\frac{5}{2}}\right)$$

Contoh: Misalkan diberikan $f(x) = x$, akan dicari turunan fraksioanal kiri dengan orde $\alpha = 1{,}5$ maka didapatkan $[\alpha] = 1$ dan $\{\alpha\} = 0{,}5$ sehingga berlaku $n = 2$

$$(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\int_{a}^{x}\frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}$$

$$\left(\mathcal{D}_{a+}^{1,5}f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(2-1{,}5)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{2}\int_{0}^{x}\frac{t\,dt}{(x-t)^{1,5-2+1}}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(0{,}5)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{2}\int_{0}^{x} t\,(x-t)^{-0,5}\,dt$$

Dengan memisalkan $u = (x-t)^{-\frac{1}{2}}$ maka $du = \frac{1}{2}(x-t)^{-\frac{3}{2}}\,dt$

$$\left(\mathcal{D}_{a+}^{1,5}f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(0{,}5)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{2}\int_{0}^{x} t\,(x-t)^{-0,5}\,dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(0{,}5)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{0}(x-u^{-2})\cdot u\cdot 2(x-t)^{\frac{3}{2}}\,du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(0{,}5)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{0}(x-u^{-2})\cdot u\cdot 2u^{-3}\,du$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \frac{1}{\Gamma(0{,}5)}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{0} (x - u^{-2}) \cdot 2u^{-2}\, du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(0{,}5)}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{0} 2xu^{-2} - 2u^{-4}\, du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(0{,}5)}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \left[-2xu^{-1} + \frac{2}{3}u^{-3}\right]_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{0}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(0{,}5)}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \left[0 - \left(2\,x\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{-1} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{-3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\Gamma(0{,}5)}\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]\right)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(0{,}5)}\left(\frac{d}{dx}\left[2x^{\frac{1}{2}}\right]\right)$$

$$\left(\mathcal{D}_{a+}^{1,5} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(0{,}5)}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

1. **Kelipatan Konstanta**

Dengan menggunakan Teorema 2.17 Jika λ adalah konstanta dan terdapat suatu fungsi yang terdefinisi pada $\mathbb{R}$, dengan orde $\alpha, \alpha > 0$ dan n adalah bilangan bulat terkecil yang lebih besar α sedemikian sehingga $n - 1 \leq \alpha < n$ maka berlaku

$$(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}\, \lambda f)(x) = \lambda(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f)(x)$$

Bukti:

Dengan menggunakan Definisi 3.2 sehingga diperoleh

$$(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}\, \lambda f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{\lambda f(t)\, dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \frac{\lambda}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}$$

$$= \lambda(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f)(x)$$

Contoh: Misalkan diberikan fungsi $f(x) = x^2$ dengan konstanta $\lambda = 2$ akan dicari turunan fraksional kiri dengan orde $\alpha = 1{,}5$ sehingga untuk $\alpha = 1{,}5$ didapatkan $[\alpha] = 1, n = 2$

$$\left(\mathcal{D}_{+}^{1,5} 2\,x^2\right) = \frac{1}{\Gamma(2-1{,}5)}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \int_0^x \frac{2t^2\,dt}{(x-t)^{1,5-2+1}}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(0{,}5)}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \int_0^x \frac{2t^2\,dt}{(x-t)^{0,5}}$$

Dengan memisalkan $u = (x-t)^{-\frac{1}{2}}$ maka $du = \frac{1}{2}(x-t)^{-\frac{3}{2}}\,dt$

$$\left(\mathcal{D}_{+}^{1,5} 2\,x^2\right) = \frac{1}{\Gamma(0{,}5)}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \int_0^x \frac{2t^2\,dt}{(x-t)^{0,5}}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(0{,}5)}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{0} 2(x-u^{-2})^2 \cdot u \cdot 2\,(x-t)^{\frac{3}{2}}\,du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(0{,}5)}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{0} 2(x^2 - 2xu^{-2} + u^{-4})2u^{-2}\,du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(0{,}5)}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{0} 4x^2u^{-2} - 8xu^{-4} + 4u^{-6}\,du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(0{,}5)}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \left[-4x^2u^{-1} + \frac{8}{3}xu^{-3} - \frac{4}{5}u^{-5}\right]_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{0}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \frac{1}{\Gamma(0,5)}\left(\frac{d}{dx}\right)^2\left[0-\left(4x^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{-1}-\frac{8}{3}x\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{-3}+\frac{4}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{-5}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\Gamma(0,5)}\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left[-\frac{88}{15}x^{\frac{5}{2}}\right]\right)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(0,5)}\left(\frac{d}{dx}\left[-\frac{440}{30}x^{\frac{3}{2}}\right]\right)$$

$$\left(\mathcal{D}_{+}^{1,5}2\,x^2\right) = \frac{1}{\Gamma(0,5)}\left(-\frac{1320}{60}x^{\frac{1}{2}}\right)$$

2. Penjumlahan

Dengan menggunakan Teorema 2.18, kemudian didefinisikan penjumlahan turunan fraksional kiri. Jika terdapat dua fungsi f dan g yang terdefinisikan pada $\mathbb{R}$ dengan orde $\alpha, \alpha > 0$ dan n adalah bilangan bulat terkecil yang lebih besar dari α sedemikian sehingga $n-1 \leq \alpha \leq n$ maka berlaku

$$(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}f+g)(x) = \mathcal{D}_{a+}^{\alpha}f(x)+\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}g(x)$$

Bukti:

Dengan menerapkan Teorema 2.18 pada Definisi 3.2 sehingga diperoleh

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}(f(x)+g(x)) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\int_a^x\frac{\big(f(t)+g(t)\big)\,dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\int_a^x\frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}+$$

$$\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\int_a^x\frac{g(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}$$

$$= \mathcal{D}_{a+}^{\alpha}f(x)+\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}g(x)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Contoh: Misalkan diberikan fungsi $f(x) = x^2$ dan fungsi $g(x) = x$ akan dicari turunan fraksional kiri dengan orde $\alpha = 1{,}5$ sehingga untuk $\alpha = 1{,}5 \rightarrow [\alpha] = 1. n = 2$

$$\mathcal{D}_{+}^{1,5}\big((x^2) + (x)\big) = \frac{1}{\Gamma(2-1{,}5)}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \int_0^x \frac{\big((t^2) + (t)\big)\, dt}{(x-t)^{1,5-2+1}}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(0{,}5)}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \int_0^x \frac{t^2 + t\, dt}{(x-t)^{0,5}}$$

Dengan memisalkan $u = (x-t)^{-\frac{1}{2}}$ maka $du = \frac{1}{2}(x-t)^{-\frac{3}{2}}\, dt$

$$\mathcal{D}_{+}^{1,5}\big((x^2) + (x)\big) = \frac{1}{\Gamma(0{,}5)}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \int_0^x (t^2 + t)\,(x-t)^{-\frac{1}{2}}\, dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(0{,}5)}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{0} ((x - u^{-2})^2 + x - u^{-2}) \cdot u \cdot 2(x-t)^{\frac{3}{2}}\, du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(0{,}5)}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{0} (x^2 - 2xu^{-2} + u^{-4} + x - u^{-2}) \cdot 2u^{-2}\, du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(0{,}5)}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{0} 2x^2u^{-2} - 4xu^{-4} + 2u^{-6} + 2xu^{-2}$$

$$-2u^{-4}\, du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(0{,}5)}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \left[-2x^2u^{-1} + \frac{4}{3}xu^{-3} - \frac{2}{5}u^{-5} - 2xu^{-1}\right.$$

$$\left. + \frac{2}{3}u^{-3}\right]_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{0}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(0{,}5)}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \left[0 - \left(-2x^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{-1} + \frac{4}{3}x\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{-3} -\right.\right.$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\frac{2}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{-5} - 2x\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{-1} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{-5}\Bigg)\Bigg]$$

$$= \frac{1}{\Gamma(0{,}5)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{2}\left[-\left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3}x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\Gamma(0{,}5)}\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left[\frac{16}{15}x^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]\right)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(0{,}5)}\left(\frac{d}{dx}\left[\frac{80}{30}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}}\right]\right)$$

$$\mathcal{D}_{+}^{1,5}\left((x^2) + (x)\right) = \frac{1}{\Gamma(0{,}5)}\left(4x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

3. Pengurangan

Dengan menggunakan Teorema 2.20 jika f dan g suatu fungsi yang terdefinisi pada $\mathbb{R}$ dengan orde $\alpha, \alpha > 0$ dan n adalah bilangan bulat terkecil yang lebih besar dari α sedemikian sehingga $n - 1 \leq \alpha \leq n$ maka berlaku

$$(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f - g)(x) = \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f(x) - \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} g(x)$$

Bukti:

Dengan menerapkan Teorema 2.20 pada Definisi 3.2

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}(f(x) - g(x)) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\int_{a}^{x}\frac{\left(f(t) - g(t)\right)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\int_{a}^{x}\frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} -$$

$$\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\int_{a}^{x}\frac{g(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}$$

$$= \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f(x) - \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} g(x)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Contoh: Misalkan diberikan fungsi $f(x) = x^2$ dan fungsi $g(x) = x$ akan dicari turunan fraksional kiri dengan orde $\alpha = 1{,}5$ sehingga untuk $\alpha = 1{,}5 \rightarrow [\alpha] = 1, n = 2$

$$\mathcal{D}_{+}^{1,5}\big((x^2) - (x)\big) = \frac{1}{\Gamma(2-1{,}5)}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \int_0^x \frac{\big((t^2) - (t)\big)\,dt}{(x-t)^{1,5-2+1}}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(0{,}5)}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \int_0^x \frac{t^2 - t\,dt}{(x-t)^{0,5}}$$

Dengan memisalkan $u = (x-t)^{-\frac{1}{2}}$ maka $du = \frac{1}{2}(x-t)^{-\frac{3}{2}}\,dt$

$$\mathcal{D}_{+}^{1,5}\big((x^2) - (x)\big) = \frac{1}{\Gamma(0{,}5)}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \int_0^x (t^2 + t)\,(x-t)^{-\frac{1}{2}}\,dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(0{,}5)}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{0} ((x - u^{-2})^2 - x - u^{-2}) \cdot u \cdot 2(x-t)^{-\frac{3}{2}}\,du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(0{,}5)}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{0} (x^2 - 2xu^{-2} + u^{-4} - x - u^{-2}) \cdot 2u^{-2}\,du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(0{,}5)}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{0} 2x^2u^{-2} - 4xu^{-4} + 2u^{-6} - 2xu^{-2}$$

$$-2u^{-4}\,du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(0{,}5)}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \left[-2x^2u^{-1} + \frac{4}{3}xu^{-3} - \frac{2}{5}u^{-5} + 2xu^{-1}\right.$$

$$\left. + \frac{2}{3}u^{-3}\right]_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{0}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(0{,}5)}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \left[0 - \left(-2x^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{-1} + \frac{4}{3}x\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{-3} - \right.\right.$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\frac{2}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{-5} + 2x\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{-1} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{-5}\Bigg)\Bigg]$$

$$= \frac{1}{\Gamma(0{,}5)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{2}\left[-\left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3}x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\Gamma(0{,}5)}\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left[-\frac{16}{15}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{8}{15}x^{-\frac{3}{2}}\right]\right)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(0{,}5)}\left(\frac{d}{dx}\left[\frac{16}{30}x^{-\frac{3}{2}} + \frac{24}{30}x^{-\frac{5}{2}}\right]\right)$$

$$\mathcal{D}_{+}^{1,5}\left((x^2) - (x)\right) = \frac{1}{\Gamma(0{,}5)}\left(-\frac{48}{30}x^{-\frac{5}{2}} - \frac{120}{60}x^{-\frac{7}{2}}\right)$$

4. Komposisi dengan orde bilangan bulat

Misalkan $\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}$ adalah turunan fraksional kiri dengan orde α adalah sebarang bilangan riil dan m sebarang bilangan bulat, maka berlaku

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha+m}f(x) = \mathcal{D}_{a+}^{\alpha}\left(\frac{d^m f(x)}{dx^m}\right) - \sum_{j=0}^{m-1}\frac{f^{(j)}(a)(x-a)^{j-\alpha-m}}{\Gamma(1+j-\alpha-m)}$$

Bukti:

Sesuai dengan definisi turunan fraksional didapatkan

$$\frac{d^m}{dx^m}\left(\mathcal{D}_{a+}^{n+\mu}f(x)\right) = \frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{d^n}{dx^n}\left(I_{a+}^{(n-(n+\mu))}f(x)\right)\right)$$

$$= \frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{d^n}{dx^n}\left(I_{a+}^{(\mu)}f(x)\right)\right)$$

$$= \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}$$

$$= \mathcal{D}_{a+}^{m+n+\mu}f(x) \qquad (3.11)$$

Dengan menotasikan $\alpha = n + \mu$ sehingga persamaan (3.11) dapat dituliskan

$$\frac{d^m}{dx^m}\left(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}f(x)\right) = \mathcal{D}_{a+}^{m+\alpha}f(x) \qquad (3.12)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Sedangkan berdasarkan turunan fraksional untuk $\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f(x)$ adalah

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f(x) &= D^m \, I_{a+}^{(m-\alpha)} f(x) \\ &= D^m \, \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} \, I_{a+}^{m} \, f(x) \\ &= \mathcal{D}_{a+}^{m+\alpha} \, (I_{a+}^{m} \, f(x)\,) \end{aligned}$$

Dengan demikian turunan fraksional dari turunan ke$-m$ sebuah fungsi adalah

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} \left(\frac{d^m f(x)}{dx^m} \right) = \mathcal{D}_{a+}^{m+\alpha} \left(I_{a+}^{m} \, f^{(m)}(x)\,\right) \tag{3.13}$$

Integral ke$-m$ dari turunan ke$-m$ suatu fungsi dengan m bilangan bulat, didapatkan

$$I_{a+}^{m} \, f^{(m)}(x) = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_a^x \frac{f^{(m)}(t)dt}{(x-t)^{1-m}} \tag{3.14}$$

Suatu fungsi f yang diturunkan $(n-1)$ kali di setiap interval yang memuat titik a dapat dituliskan hampiran deret taylornya sesuai Definisi 2.6 sebagai berikut

$$\begin{aligned} f_n(x) = \; & f(a) + \frac{f'(a)(x-a)}{1!} + \frac{f''(a)\,(x-a)^2}{2!} \\ & + \frac{f'''(a)\,(x-a)^3}{3!} \\ & + \cdots + \frac{f^n(a)(x-a)^n}{n!} \end{aligned}$$

Selanjutnya dengan menggunakan Teorema 2.7 diperoleh

$$f(x) = f_n(x) + R_n(x)$$

$$R_n = \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\, dt$$

Oleh karena itu, persamaan (3.14) dapat dituliskan

$$I_{a+}^{m} \, f^{(m)}(x) = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_a^x \frac{f^{(m)}(t)dt}{(x-t)^{1-m}}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \quad f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{j}(a)(x-a)^{j}}{\Gamma(j+1)}$$

Sehingga persamaan (3.13) dapat dituliskan kembali sebagai berikut

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}\left(\frac{d^m f(x)}{dx^m}\right) \quad = \quad \mathcal{D}_{a+}^{m+\alpha}\left(f(x) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(a)(x-a)^{j}}{\Gamma(j+1)}\right)$$

$$= \quad \mathcal{D}_{a+}^{m+\alpha} f(x) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(a)(x-a)^{j-\alpha-m}}{\Gamma(1+j-\alpha-m)}$$

Atau dapat dituliskan dalam bentuk lain

$$\mathcal{D}_{a+}^{m+\alpha} f(x) \quad = \quad \mathcal{D}_{a+}^{\alpha}\left(\frac{d^m f(x)}{dx^m}\right) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(a)(x-a)^{j-\alpha-m}}{\Gamma(1+j-\alpha-m)}$$

5. Turunan Fraksional Sebagai Invers Kiri dari Integral Fraksional

Turunan fraksional kiri merupakan invers dari integral fraksional kiri dengan orde α.

Misalkan $\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}$adalah turunan fraksional kiri orde α dengan $n-1 \leq \alpha \leq n$ dan I_{a+}^{α} adalah integral fraksional kiri berorde $\alpha, \alpha > 0$ sehingga berlaku

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} f(x) \quad = \quad f(x)$$

Bukti:

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} f(x) \quad = \quad \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n} \int_{a}^{x} \frac{I_{a+}^{\alpha} f(t)\, dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}$$

$$= \quad \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n} \int_{a}^{x} \frac{dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{t} \frac{f(s)\, ds}{(t-s)^{1-\alpha}}$$

$$= \quad \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n} \int_{a}^{x} \frac{dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \int_{a}^{t} \frac{f(s)\, ds}{(t-s)^{1-\alpha}}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \int_a^t \frac{f(s)}{(x-t)^{\alpha-n+1}(t-s)^{1-\alpha}}\, ds\, dt \quad (3.15)$$

Dengan menggunakan teorema dirichlet dan kemudian menyelesaikan integral dalam terlebih dahulu

$$\int_a^x \int_a^t \frac{f(s)}{(x-t)^{\alpha-n+1}(t-s)^{1-\alpha}}\, ds\, d_t = \int_a^x \int_s^x \frac{f(s)}{(x-t)^{\alpha-n+1}(t-s)^{1-\alpha}}\, dt\, ds$$

$$= \int_a^x f(s)\, ds \int_s^x \frac{1}{(x-t)^{\alpha-n+1}(t-s)^{1-\alpha}}\, d$$

Didapatkan

$$\int_s^x \frac{1}{(x-t)^{\alpha-n+1}(t-s)^{1-\alpha}}\, dt = \int_s^x (x-t)^{n-\alpha-1}\,(t-s)^{\alpha-1}\, dt$$

Kemudian mensubstitusikan τ ke dalam variabel t

$$\tau = \frac{t-s}{x-s}, \qquad t = s + \tau(x-s)$$

$$dt = (x-s)\, d\tau$$

$$\int_s^x (x-t)^{n-\alpha-1}\,(t-s)^{\alpha-1}\, dt$$

$$= \int_0^1 \big(x - (s+\tau(x-s))\big)^{n-\alpha-1} \big((s+\tau(x-s)) - s\big)^{\alpha-1} (x-s)\, d\tau$$

$$= \int_0^1 \big(x - s - \tau(x-s)\big)^{n-\alpha-1} \big(\tau(x-s)\big)^{\alpha-1} (x-s)\, d\tau$$

$$= \int_0^1 \big((x-s)(1-\tau)\big)^{n-\alpha-1} \big(\tau(x-s)\big)^{\alpha-1} (x-s)\, d\tau$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \int_0^1 (x-s)^{n-\alpha-1}(1-\tau)^{n-\alpha-1}\,\tau^{\alpha-1}(x-s)^{\alpha-1}\,(x-s)\,d\tau$$

$$= (x-s)^{n-1}\int_0^1 (1-\tau)^{n-\alpha-1}\,\tau^{\alpha-1}\,d\tau$$

Dengan menggunakan aturan fungsi beta dan fungsi gamma diperoleh

$$\int_0^1 (1-\tau)^{n-\alpha-1}\,\tau^{\alpha-1}\,d\tau = \int_0^1 (1-\tau)^{(n-\alpha)-1}\,\tau^{\alpha-1}\,d\tau$$

$$= \mathrm{B}(n-\alpha,\alpha)$$

$$= \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(n-\alpha+\alpha)}$$

Sehingga persamaan (3.15) didapatkan

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \int_a^t \frac{f(s)}{(x-t)^{\alpha-n+1}(t-s)^{1-\alpha}}\,ds\,dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x f\,(s)\,ds\,(x-s)^{n-1}\frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(n)}$$

$$= \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(n)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x f\,(s)\,(x-s)^{n-1}ds$$

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x f\,(s)\,(x-s)^{n-1}ds$$

Dengan menggunakan formula Cauchy

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x f\,(s)\,(x-s)^{n-1}ds$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-s)^{n-1} f(s)\, ds\right)$$

$$= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(\int_a^x dx_1 \int_a^x dx_2 \dots \int_a^x f(x)\, dx_n\right)$$

$$= f(x)$$

6. Turunan Fraksional Sebagai Invers Kanan dari Integral Fraksional dengan Syarat Tertentu

Misalkan $\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}$ turunan fraksional kiri berorde α, $n-1 \leq \alpha < n$ dan I_{a+}^{α} integral fraksional kiri berorde $\alpha, \alpha > 0$. Jika $\left[\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-j} f(x)\right]_{x=a} = 0, j = (1,2,\dots,n)$ maka berlaku

$$I_{a+}^{\alpha}\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f(x) = f(x)$$

Bukti:

$$I_{a+}^{\alpha}\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f(t)\, dt}{(x-t)^{1-\alpha}}$$

$$= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^x (x-t)^{\alpha}\, \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f(t)\, dt\right] \qquad (3.16)$$

untuk menyelesaikan persamaan (3.16) harus terlebih dahulu menyelesaikan integral dalam sebagai berikut

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^x (x-t)^{\alpha}\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f(t)\ dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^x (x-t)^{\alpha}\ \frac{d^n}{dx^n}\{I_{a+}^{n-\alpha} f(t)\}\, dt$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \quad I_{a+}^{\alpha+1} \frac{d^n}{dx^n}\{I_{a+}^{n-\alpha} f(x)\}$$

Dengan menggunakan sifat nomor 5 (komposisi dengan orde bilangan bulat) untuk suatu turunan ke$-n$ dari integral lipat dapat ditulis

$$I_{a+}^{\alpha+1} \frac{d^n}{dx^n}\{I_{a+}^{n-\alpha} f(x)\}$$

$$= \quad I_{a+}^{\alpha+1-n}\{I_{a+}^{n-\alpha} f(t)\} - \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{d^k}{dx^k} I_{a+}^{n-\alpha} f(x)\right]_{x=a} \frac{(x-a)^{k-n+\alpha+1}}{\Gamma(k+\alpha+2-n)}$$

$$= \quad \frac{1}{\Gamma(\alpha+1-n)} \int_a^x \frac{I_{a+}^{n-\alpha} f(t)\, dt}{(x-t)^{1-(\alpha+1-n)}} -$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{d^k}{dx^k} I_{a+}^{n-\alpha} f(x)\right]_{x=a} \frac{(x-a)^{k-n+\alpha+1}}{\Gamma(k+\alpha+2-n)}$$

$$= \quad \frac{1}{\Gamma(\alpha+1-n)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-n}\, I_{a+}^{n-\alpha} f(t)\, dt -$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{d^k}{dx^k} I_{a+}^{n-\alpha} f(x)\right]_{x=a} \frac{(x-a)^{k-n+\alpha+1}}{\Gamma(k+\alpha+2-n)}$$

$$= \quad \frac{1}{\Gamma(\alpha+1-n)\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-n}\, dt \int_t^x \frac{f(s)\, ds}{(t-s)^{1-n+\alpha}} -$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}[\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-n+k} f(x)]_{x=a} \frac{(x-a)^{k-n+\alpha+1}}{\Gamma(k+\alpha+2-n)}$$

$$= \quad \frac{1}{\Gamma(\alpha+1-n)\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \int_s^x \frac{f(s)}{(x-t)^{n-\alpha}(t-s)^{1-n+\alpha}} ds\, dt -$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}[\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-n+k} f(x)]_{x=a} \frac{(x-a)^{k-n+\alpha+1}}{\Gamma(k+\alpha+2-n)}$$

Dengan menggunakan teorema dirichlet seperti yang sebelumnya diperoleh

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1-n)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(\alpha+1-n)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(1)}\int_a^x f(s)\,ds \; -$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}[\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-n+k}f(x)]_{x=a}\,\frac{(x-a)^{k-n+\alpha+1}}{\Gamma(k+\alpha+2-n)}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1)}\int_a^x f(s)\,ds - \sum_{k=0}^{n-1}[\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-n+k}f(x)]_{x=a}\,\frac{(x-a)^{k-n+\alpha+1}}{\Gamma(k+\alpha+2-n)}$$

$$= I_{a+}^{1}f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}[\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-n+k}f(x)]_{x=a}\,\frac{(x-a)^{k-n+\alpha+1}}{\Gamma(k+\alpha+2-n)} \qquad (3.17)$$

Setelah diperoleh persamaan (3.17) kemudian (3.17) disubstitusikan pada persamaan (3.16) sehingga

$$I_{a+}^{\alpha}\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}f(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^x (x-t)^{\alpha}\,\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}f(t)\,dt\right]$$

$$= \frac{d}{dx}\left[I_{a+}^{1}f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}[\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-n+k}f(x)]_{x=a}\,\frac{(x-a)^{k-n+\alpha+1}}{\Gamma(k+\alpha+2-n)}\right]$$

$$= f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}[\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-n+k}f(x)]_{x=a}\,\frac{(x-a)^{k-n+\alpha}}{\Gamma(k+\alpha+1-n)}$$

Karena diketahui untuk

$$\left[\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-j}f(x)\right]_{x=a} = 0, \qquad j = (1,2,\dots,n)$$

Sehingga

$$[\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-n+k}f(x)]_{x=a} = 0, \quad n = (1,2,\dots,k)$$

Akibatnya

$$\sum_{k=0}^{n-1}[\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-n+k}f(x)]_{x=a}\,\frac{(x-a)^{k-n+\alpha}}{\Gamma(k+\alpha+1-n)} = 0$$

Jadi diperoleh

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$I_{a+}^{\alpha}\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}f(x) \quad = \quad f(x)$$

7. Komposisi Pada Turunan Fraksional Kiri

Misalkan $\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}$ turunan fraksional kiri dengan $m-1 \leq \alpha < m$ dan $\mathcal{D}_{a+}^{\mu}$ dengan $n-1 \leq \mu < n$. Jika $\left[\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-j}f(x)\right]_{x=a} = 0,\ (j = 1,2,\dots,m)$ dan $\left[\mathcal{D}_{a+}^{\mu-j}f(x)\right]_{x=a} = 0, (j = 1,2,\dots,n)$, maka berlaku

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}\left(\mathcal{D}_{a+}^{\mu}f(x)\right) \quad = \quad \mathcal{D}_{a+}^{\mu}(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}f(x)) \quad = \quad \mathcal{D}_{a+}^{\alpha+\mu}f(x)$$

Bukti:

Dengan menggunakan definisi turunan fraksional kiri diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}\left(\mathcal{D}_{a+}^{\mu}f(x)\right) &= \frac{d^m}{dx^m}\left[I_{a+}^{m-\alpha}\left(\mathcal{D}_{a+}^{\mu}f(x)\right)\right] \\
&= \frac{d^m}{dx^m}\left[\mathcal{D}_{a+}^{\alpha+\mu-m}f(x) - \right. \\
&\qquad \left. \sum_{j=1}^{n}\left[\mathcal{D}_{a+}^{\mu-j}f(x)\right]_{x=a}\frac{(x-a)^{m-\alpha-j}}{\Gamma(1+m-\alpha-j)}\right] \\
&= \mathcal{D}_{a+}^{\alpha+\mu}f(x) - \sum_{j=1}^{n}\left[\mathcal{D}_{a+}^{\mu-j}f(x)\right]_{x=a}\frac{(x-a)^{-\alpha-j}}{\Gamma(1-\alpha-j)}
\end{aligned}$$

Saat posisi α bertukar dengan μ, maka diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{a+}^{\mu}(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}f(x)) &= \frac{d^n}{dx^n}\left[I_{a+}^{n-\mu}\left(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}f(x)\right)\right] \\
&= \frac{d^n}{dx^n}\left[\mathcal{D}_{a+}^{\alpha+\mu-n}f(x) - \right. \\
&\qquad \left. \sum_{j=1}^{m}\left[\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-j}f(x)\right]_{x=a}\frac{(x-a)^{m-\mu-j}}{\Gamma(1+m-\mu-j)}\right]
\end{aligned}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \mathcal{D}_{a+}^{\alpha+\mu} f(x) - \sum_{j=1}^{m} \left[\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-j} f(x)\right]_{x=a} \frac{(x-a)^{-\mu-j}}{\Gamma(1-\mu-j)}$$

Karena

$$\left[\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-j} f(x)\right]_{x=a} = 0, \quad j = (1,2,\dots,m)$$

Dan

$$\left[\mathcal{D}_{a+}^{\mu-j} f(x)\right]_{x=a} = 0, \quad j = (1,2,\dots,n)$$

Sehingga

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}\left(\mathcal{D}_{a+}^{\mu} f(x)\right) = \mathcal{D}_{a+}^{\mu}\left(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f(x)\right) = \mathcal{D}_{a+}^{\alpha+\mu} f(x)$$

Dari hasil diatas dapat disimpulkan bawa komposisi turunan fraksional kiri tidak berlaku sifat komutatif kecuali saat kasus trivial yaitu $\alpha = \mu$, atau $\alpha \neq \mu$ tetapi dipenuhi syarat sebagaimana seperti yang telah dijelaskan diatas.

Contoh: Misalkan diberikan fungsi $f(x) = x^2$ dengan $\alpha = 1{,}2$ dan $\mu = 1{,}3$ akan dicari turunan fraksional kiri dengan menggunakan sifat komposisi $\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}\left(\mathcal{D}_{a+}^{\mu} f(x)\right)$ sebagai berikut:

$$\mathcal{D}_{+}^{1,2}\left(\mathcal{D}_{+}^{1,3} x^2\right) = \frac{1}{\Gamma(1-1{,}2)} \left(\frac{d}{dx}\right)^2 \int_0^x \frac{\mathcal{D}_{+}^{1,3} f(t)\, dt}{(x-t)^{1,2-2+1}}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-1{,}2)} \left(\frac{d}{dx}\right)^2 \int_0^x \frac{1}{(x-t)^{1,2-2+1}}$$

$$\left[\frac{1}{\Gamma(1-1{,}3)} \left(\frac{d}{dx}\right)^2 \int_0^t \frac{s^2\, ds}{(t-s)^{1,3-2+1}}\right] dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(0{,}8)\Gamma(0{,}7)} \left(\frac{d}{dx}\right)^4 \int_0^x \int_0^t \frac{s^2}{(x-t)^{0,2}(t-s)^{0,3}}\, ds\, dt$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \frac{1}{\Gamma(0{,}8)\Gamma(0{,}7)} \left(\frac{d}{dx}\right)^4 \int_0^x s^2 ds \int_s^t \frac{1}{(x-t)^{0{,}2}(t-s)^{0{,}3}}\, dt$$

Dengan mensubstitusikan τ padaa variabel t

$$\tau = \frac{t-s}{x-s}, \qquad t = s + \tau(x-s),$$

Sedemikian sehingga

$$dt = (x-s)d\tau$$

Saat $t = s, \tau = 0$ dan $t = x, \tau = 1$

$$\int_s^x (x-t)^{-0{,}2}\,(t-s)^{-0{,}3}\; dt$$

$$= \int_0^1 \Big(x - \big(s + \tau(x-s)\big)\Big)^{-0{,}2} \Big(\big(s + \tau(x-s)\big) - s\Big)^{-0{,}3}\; (x-s)\, d\tau$$

$$= \int_0^1 \big((x-s)(1-\tau)\big)^{-0{,}2} \big(\tau(x-s)\big)^{-0{,}3} (x-s)\, d\tau$$

$$= \int_0^1 (x-s)^{0{,}5}(1-\tau)^{-0.2}\, \tau^{-0{,}3} (x-s)^{-0{,}3}\, (x-s)\, d\tau$$

$$= (x-s)^{0{,}5} \int_0^1 (1-\tau)^{-0{,}2}\, \tau^{-0{,}3}\; d\tau$$

$$= (x-s)^{0{,}5} \mathrm{B}(0{,}7\,, 0{,}8)$$

$$= (x-s)^{0{,}5} \frac{\Gamma(0{,}7)\Gamma(0{,}8)}{\Gamma(1{,}5)}$$

Sehingga didapatkan

$$\mathcal{D}_+^{1,2}(\mathcal{D}_+^{1.3} x^2)) \;=\; \frac{1}{\Gamma(0{,}8)\Gamma(0{,}7)} \frac{\Gamma(0{,}7)\Gamma(0{,}8)}{\Gamma(1{,}5)} \left(\frac{d}{dx}\right)^4 \int_0^x s^2\, (x-s)^{0{,}5} ds$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \frac{1}{\Gamma(1{,}5)}\left(\frac{d}{dx}\right)^4 \int_0^x s^2\,(x-s)^{0{,}5} ds$$

Dengan memisalkan $u = (x-s)^{\frac{1}{2}}, du = -\frac{1}{2}(x-s)^{-\frac{1}{2}} ds$ diperoleh

$$\mathcal{D}_+^{1,2}(\mathcal{D}_+^{1.3} x^2)) = \frac{1}{\Gamma(1{,}5)}\left(\frac{d}{dx}\right)^4 \int_0^x s^2\,(x-s)^{\frac{1}{2}} ds$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1{,}5)}\left(\frac{d}{dx}\right)^4 \int_{\sqrt{x}}^0 (x-u^2)^2 \cdot u \cdot 2\,(x-s)^{\frac{1}{2}}\, du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1{,}5)}\left(\frac{d}{dx}\right)^4 \int_{\sqrt{x}}^0 2x^2u^2 - 4xu^4 + 2u^6\, du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1{,}5)}\left(\frac{d}{dx}\right)^4 \left[\frac{2}{3}x^2u^3 - \frac{4}{5}xu^5 + \frac{2}{7}u^7\right]_{\sqrt{x}}^0$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1{,}5)}\left(\frac{d}{dx}\right)^4 \left[0 - \left(\frac{2}{3}x^2(\sqrt{x})^3 - \frac{4}{5}x(\sqrt{x})^5 + \frac{2}{7}(\sqrt{x})^7\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1{,}5)}\left(\frac{d}{dx}\right)^4 - \frac{16}{105}x^{\frac{7}{2}}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1{,}5)} - x^{-\frac{1}{2}}$$

3.3 Sifat-Sifat Turunan Fraksional Kanan

Definisi 3.3

Untuk fungsi $f(x)$ pada interval $[a, b]$ dilambangkan

$$\mathcal{D}_{b-}^{\alpha} = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{f(t)\,dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}\ , \quad n = [\alpha] + 1 \qquad (3.18)$$

$$= D^n\, I_{b-}^{n-\alpha}\, f(x) \qquad n-1 \le \alpha < n$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

adalah turunan fraksioanal kanan berorde α, dengan $\alpha > 0$ dan n adalah bilangan bulat terkecil yang lebih besar dari α sedemikian sehingga $n - 1 \leq \alpha < n$.

Hubungan antara turunan fraksional kiri dan kanan dapat dituliskan dalam lema berikut:

Lema 3.4

Misalkan $\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f(x)$ dan $\mathcal{D}_{b-}^{\alpha} f(x)$ merupakan turunan fraksional sepihak dengan orde α, dengan n adalah bilangan bulat terkecil yang lebih besar dari α sedemikian sehingga $n - 1 \leq \alpha \leq n$ dan $b = a$ maka diperoleh hubungan

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f(x) = (-1)^{\alpha} \mathcal{D}_{b-}^{\alpha} f(x)$$

Bukti:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f(x) &= D^n \left(I_{a+}^{(n-\alpha)} f(x) \right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x f(t)\,(x-t)^{n-\alpha-1}\, dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n - \int_x^b f(t)\,\left(-(t-x)\right)^{n-\alpha-1}\, dt, \quad b = a \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n (-1)^1 \int_x^b f(t)\,(-1)^{n-\alpha-1} (t-x)^{n-\alpha-1}\, dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n (-1)^{1+n-\alpha-1} \int_x^b f(t)\,(t-x)^{n-\alpha-1}\, dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n (-1)^{n-\alpha} \int_x^b f(t)\,(t-x)^{n-\alpha-1}\, dt
\end{aligned}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \quad (-1)^{-\alpha}\frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b f(t)\,(t-x)^{n-\alpha-1}\,dt$$

$$= \quad (-1)^{-\alpha}\mathcal{D}_{b-}^{\alpha}f(x) = (-1)^{\alpha}\mathcal{D}_{b-}^{\alpha}f(x)$$

1. Kelipatan Konstanta

Dengan menggunakan Teorema 2.17 Jika λ adalah konstanta dan suatu fungsi yang terdefinisi pada $\mathbb{R}$, dengan orde $\alpha, \alpha > 0$ dan n adalah bilangan bulat terkecil yang lebih besar α sedemikian sehingga $n-1 \leq \alpha < n$ maka berlaku

$$(\mathcal{D}_{b-}^{\alpha}\,\lambda f)(x) \quad = \quad \lambda(\mathcal{D}_{b-}^{\alpha}f)(x)$$

Bukti:

Dengan menggunakan Definisi 3.3 sehingga diperoleh

$$(\mathcal{D}_{b-}^{\alpha}\,\lambda f)(x) \quad = \quad \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{\lambda f(t)\,dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}$$

$$= \quad \frac{\lambda}{\Gamma(n-\alpha)}\left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{f(t)\,dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}$$

$$= \quad \lambda(\mathcal{D}_{b-}^{\alpha}f)(x)$$

2. Penjumlahan

Dengan menggunakan Teorema 2.18, kemudian didefinisikan penjumlahan turunan fraksional kanan. Jika terdapat dua fungsi f dan g yang terdefinisikan pada $\mathbb{R}$ dengan orde $\alpha, \alpha > 0$ dan n adalah bilangan bulat terkecil yang lebih besar dari α sedemikian sehingga $n-1 \leq \alpha \leq n$ maka berlaku

$$(\mathcal{D}_{b-}^{\alpha}f + g)(x) \quad = \quad \mathcal{D}_{b-}^{\alpha}f(x) + \mathcal{D}_{b-}^{\alpha}g(x)$$

Bukti:

Dengan menerapkan Teorema 2.18 pada Definisi 3.3 sehingga diperoleh

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\mathcal{D}_{b-}^{\alpha}(f(x)+g(x)) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{\big(f(t)+g(t)\big)\,dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}$$

$$= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{f(t)dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}} +$$

$$\frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{g(t)dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}$$

$$= \mathcal{D}_{b-}^{\alpha} f(x) + \mathcal{D}_{b-}^{\alpha} g(x)$$

3. **Pengurangan**

Dengan menggunakan Teorema 2.20 jika f dan g suatu fungsi yang terdefinisi pada $\mathbb{R}$ dengan orde $\alpha, \alpha > 0$ dan n adalah bilangan bulat terkecil yang lebih besar dari α sedemikian sehingga $n-1 \leq \alpha \leq n$ maka berlaku

$$(\mathcal{D}_{b-}^{\alpha} f - g)(x) = \mathcal{D}_{b-}^{\alpha} f(x) - \mathcal{D}_{b-}^{\alpha} g(x)$$

Bukti:

Dengan menerapkan Teorema 2.20 pada Definisi 3.3

$$\mathcal{D}_{b-}^{\alpha}(f(x)-g(x)) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{\big(f(t)-g(t)\big)\,dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}$$

$$= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{f(t)dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}} -$$

$$\frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{g(t)dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}$$

$$= \mathcal{D}_{b-}^{\alpha} f(x) - \mathcal{D}_{b-}^{\alpha} g(x)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

4. Komposisi dengan orde bilangan bulat

Misalkan $\mathcal{D}_{b-}^{\alpha}$ adalah turunan fraksional kanan dengan orde α adalah sebarang bilangan ril dan m sebarang bilangan bulat, maka berlaku

$$\mathcal{D}_{b-}^{\alpha+m} f(x) = \mathcal{D}_{b-}^{\alpha}\left(\frac{d^m f(x)}{dx^m}\right) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(b)(b-x)^{j-\alpha-m}}{\Gamma(1+j-\alpha-m)}$$

Bukti:

Sesuai dengan definisi turunan fraksional didapatkan

$$\begin{aligned}
\frac{d^m}{dx^m}\left(\mathcal{D}_{b-}^{n+\mu} f(x)\right) &= \frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{d^n}{dx^n}\left(I_{b-}^{(n-(n+\mu))} f(x)\right)\right) \\
&= \frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{d^n}{dx^n}\left(I_{b-}^{(\mu)} f(x)\right)\right) \\
&= \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_x^b \frac{f(t)dt}{(t-x)^{1-\alpha}} \\
&= \mathcal{D}_{b-}^{m+n+\mu} f(x) \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

Dengan menotasikan $\alpha = n + \mu$ sehingga persamaan (3.19) dapat dituliskan

$$\frac{d^m}{dx^m}\left(\mathcal{D}_{b-}^{\alpha} f(x)\right) = \mathcal{D}_{b-}^{m+\alpha} f(x) \qquad (3.20)$$

Sedangkan berdasarkan turunan fraksional untuk $\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f(x)$ adalah

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{b-}^{\alpha} f(x) &= D^m\, I_{b-}^{(m-\alpha)} f(x) \\
&= D^m\, \mathcal{D}_{b-}^{\alpha}\, I_{b-}^{m}\, f(x) \\
&= \mathcal{D}_{b-}^{m+\alpha}\left(I_{b-}^{m}\, f(x)\right)
\end{aligned}$$

Dengan demikian turunan fraksional dari turunan ke$-m$ sebuah fungsi adalah

$$\mathcal{D}_{b-}^{\alpha}\left(\frac{d^m f(x)}{dx^m}\right) = \mathcal{D}_{b-}^{m+\alpha}\left(I_{b-}^{m}\, f^{(m)}(x)\right) \qquad (3.21)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Integral ke$-m$ dari turunan ke$-m$ suatu fungsi dengan m bilangan bulat, didapatkan

$$I_{b-}^{m} f^{(m)}(x) = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_{x}^{b} \frac{f^{(m)}(t)dt}{(t-x)^{1-m}} \tag{3.22}$$

Suatu fungsi f yang diturunkan $(n-1)$ kali di setiap interval yang memuat titik b dapat dituliskan hampiran deret taylornya sesuai Definisi 2.6 sebagai berikut

$$p_n(x) = f(b) + \frac{f'(b)(b-x)}{1!} + \frac{f''(b)\,(b-x)^2}{2!} + \frac{f'''(a)\,(b-x)^3}{3!} + \cdots + \frac{f^n(b)(b-a)^n}{n!}$$

Selanjutnya dengan menggunakan Teorema 2.7 diperoleh

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^j(b)(b-a)^j}{\Gamma(j+1)}$$

Oleh karena itu, persamaan (3.22) dapat dituliskan

$$I_{a+}^{m} f^{(m)}(x) = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_{x}^{b} \frac{f^{(m)}(t)dt}{(t-x)^{1-m}}$$

$$= f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^j(b)(b-a)^j}{\Gamma(j+1)}$$

Sehingga persamaan (3.21) dapat dituliskan kembali sebagai berikut

$$\mathcal{D}_{b-}^{\alpha}\left(\frac{d^m f(x)}{dx^m}\right) = \mathcal{D}_{b-}^{m+\alpha}\left(f(x) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(b)(b-x)^j}{\Gamma(j+1)}\right)$$

$$= \mathcal{D}_{b-}^{m+\alpha} f(x) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(b)(b-x)^{j-\alpha-m}}{\Gamma(1+j-\alpha-m)}$$

Atau dapat dituliskan dalam bentuk lain

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\mathcal{D}_{b-}^{m+\alpha} f(x) \quad = \quad \mathcal{D}_{b-}^{\alpha}\left(\frac{d^m f(x)}{dx^m}\right) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(b)(b-x)^{j-\alpha-m}}{\Gamma(1+j-\alpha-m)}$$

5. Turunan Fraksional Sebagai Invers Kiri dari Integral Fraksional

Turunan fraksional kanan merupakan invers dari integral fraksional kanan dengan orde α.

Misalkan $\mathcal{D}_{b-}^{\alpha}$ adalah turunan fraksional kanan orde α dengan $n-1 \leq \alpha \leq n$ dan I_{b-}^{α} adalah integral fraksional kanan berorde $\alpha, \alpha > 0$ sehingga berlaku

$$\mathcal{D}_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\alpha} f(x) \quad = \quad f(x)$$

Bukti:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\alpha} f(x) &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{I_{b-}^{\alpha} f(t)\, dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}} \\
&= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b \frac{f(s)\, ds}{(s-t)^{1-\alpha}} \\
&= \frac{(-1)^n}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}} \int_t^b \frac{f(s)\, ds}{(s-t)^{1-\alpha}} \\
&= \frac{(-1)^n}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \int_t^b \frac{f(s)}{(t-x)^{\alpha-n+1}(s-t)^{1-\alpha}}\, ds\, dt \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan teorema dirichlet dan kemudian menyelesaikan integral dalam terlebih dahulu

$$\begin{aligned}
\int_x^b \int_t^b \frac{f(s)}{(t-x)^{\alpha-n+1}(s-t)^{1-\alpha}}\, ds\, dt &= \int_x^b \int_x^s \frac{f(s)}{(t-x)^{\alpha-n+1}(s-t)^{1-\alpha}}\, dt\, ds \\
&= \int_x^b f(s)\, ds \int_x^s \frac{1}{(t-x)^{\alpha-n+1}(s-t)^{1-\alpha}}\, dt
\end{aligned}$$

Didapatkan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\int_x^s \frac{1}{(t-x)^{\alpha-n+1}(s-t)^{1-\alpha}}\, dt \quad = \quad \int_x^s (t-x)^{n-\alpha-1}(s-t)^{\alpha-1}\, dt$$

Kemudian mensubstitusikan λ ke dalam variabel t dimana

$$\lambda = \frac{t-x}{s-x}\,, \qquad t = x + \lambda(s-x)$$

$$dt = (s-x)\, d\lambda$$

Sehingga, saat $t = x, \lambda = 0$ dan saat $t = s, \lambda = 1$

$$\int_x^s (t-x)^{n-\alpha-1}(s-t)^{\alpha-1}\, dt$$

$$= \int_0^1 \Big(\big(x+\lambda(s-x)\big) - x\Big)^{n-\alpha-1} \Big(s - \big(x+\lambda(s-x)\big)\Big)^{\alpha-1} (s-x)\, d\lambda$$

$$= \int_0^1 \big(\lambda(s-x)\big)^{n-\alpha-1} \big(s - x - \lambda(x-s)\big)^{\alpha-1} (s-x)\, d\lambda$$

$$= \int_0^1 \big(\lambda(s-x)\big)^{n-\alpha-1} \big((s-x)(1-\lambda)\big)^{\alpha-1} (s-x)\, d\lambda$$

$$= \int_0^1 \lambda^{n-\alpha-1}(s-x)^{n-\alpha-1}(s-x)^{\alpha-1}(1-\lambda)^{\alpha-1}\, (s-x)\, d\lambda$$

$$= (s-x)^{n-1} \int_0^1 \lambda^{n-\alpha-1}(1-\lambda)^{\alpha-1}\, d\lambda$$

Dengan menggunakan aturan fungsi beta dan fungsi gamma diperoleh

$$\int_0^1 \lambda^{n-\alpha-1}(1-\lambda)^{\alpha-1}\, d\lambda \quad = \quad \int_0^1 \lambda^{(n-\alpha)-1}\, (1-\lambda)^{\alpha-1}\, d\lambda$$

$$= \quad \mathrm{B}(n-\alpha, \alpha)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(n-\alpha+\alpha)}$$

Sehingga persamaan (3.23) didapatkan

$$\mathcal{D}_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\alpha} f(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \int_t^b \frac{f(s)}{(t-x)^{\alpha-n+1}(s-t)^{1-\alpha}}\, ds\, dt$$

$$= \frac{(-1)^n}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b f\,(s)\, ds\, (s-x)^{n-1} \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(n)}$$

$$= \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha)(-1)^n}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(n)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b f\,(s)\,(s-x)^{n-1} ds$$

$$\mathcal{D}_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\alpha} f(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b f\,(s)\,(s-x)^{n-1} ds$$

Dengan menggunakan formula Cauchy

$$\mathcal{D}_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\alpha} f(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b f\,(s)\,(s-x)^{n-1} ds$$

$$= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{1}{(n-1)!} \int_x^b (s-x)^{n-1} f(s)\, ds\right)$$

$$= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(\int_x^b dx_1 \int_x^b dx_2 \ldots \int_x^b f(x)\, dx_n\right)$$

$$= f(x)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

6. Turunan Fraksional Sebagai Invers Kanan dari Integral Fraksional dengan Syarat Tertentu

Misalkan $\mathcal{D}_{b-}^{\alpha}$ turunan fraksional kanan berorde $\alpha, n-1 \leq \alpha < n$ dan I_{b-}^{α} integral fraksional kanan berorde $\alpha, \alpha > 0$. Jika $\left[\mathcal{D}_{b-}^{\alpha-j} f(x)\right]_{x=b} = 0, j = (1,2,\dots,n)$ maka berlaku

$$I_{b-}^{\alpha} \mathcal{D}_{b-}^{\alpha} f(x) \quad = \quad f(x)$$

Bukti:

$$I_{b-}^{\alpha} \mathcal{D}_{b-}^{\alpha} f(x) \quad = \quad \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x}^{b} \frac{\mathcal{D}_{b-}^{\alpha} f(t)\, dt}{(t-x)^{1-\alpha}}$$

$$= \quad \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_{x}^{b} (t-x)^{\alpha} \mathcal{D}_{b-}^{\alpha} f(t)\, dt\right] \tag{3.24}$$

untuk menyelesaikan persamaan (3.24) harus terlebih dahulu menyelesaikan integral dalam sebagai berikut

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_{x}^{b} (t-x)^{\alpha} \mathcal{D}_{b-}^{\alpha} f(t)\ dt$$

$$= \quad \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_{x}^{b} (t-x)^{\alpha}\ \frac{d^n}{dx^n}\{I_{b-}^{n-\alpha} f(t)\}\, dt$$

$$= \quad I_{b-}^{\alpha+1}\ \frac{d^n}{dx^n}\{I_{b-}^{n-\alpha} f(x)\}$$

Dengan menggunakan sifat nomor 5 (komposisi dengan orde bilangan bulat, untuk suatu turunan ke$-n$ dari integral lipat dapat ditulis

$$I_{b-}^{\alpha+1}\ \frac{d^n}{dx^n}\{I_{b-}^{n-\alpha} f(x)\}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= I_{b-}^{\alpha+1-n}\{I_{b-}^{n-\alpha}f(t)\} - \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{d^k}{dx^k}I_{b-}^{n-\alpha}f(x)\right]_{x=b}\frac{(b-x)^{k-n+\alpha+1}}{\Gamma(k+\alpha+2-n)}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1-n)}\int_x^b \frac{I_{b-}^{n-\alpha}f(t)\,dt}{(t-x)^{1-(\alpha+1-n)}} -$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{d^k}{dx^k}I_{b-}^{n-\alpha}f(x)\right]_{x=b}\frac{(b-x)^{k-n+\alpha+1}}{\Gamma(k+\alpha+2-n)}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1-n)}\int_x^b (t-x)^{\alpha-n}\, I_{b-}^{n-\alpha}f(t)\,dt -$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{d^k}{dx^k}I_{b-}^{n-\alpha}f(x)\right]_{x=b}\frac{(b-x)^{k-n+\alpha+1}}{\Gamma(k+\alpha+2-n)}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1-n)\Gamma(n-\alpha)}\int_x^b (t-x)^{\alpha-n}\,dt\int_t^b \frac{f(s)\,ds}{(s-t)^{1-n+\alpha}} -$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left[\mathcal{D}_{b-}^{\alpha-n+k}f(x)\right]_{x=b}\frac{(b-x)^{k-n+\alpha+1}}{\Gamma(k+\alpha+2-n)}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1-n)\Gamma(n-\alpha)}\int_x^b\int_t^x \frac{f(s)}{(t-x)^{n-\alpha}(s-t)^{1-n+\alpha}}\,ds\,dt -$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left[\mathcal{D}_{b-}^{\alpha-n+k}f(x)\right]_{x=b}\frac{(b-x)^{k-n+\alpha+1}}{\Gamma(k+\alpha+2-n)}$$

Dengan menggunakan teorema dirichlet seperti yang sebelumnya diperoleh

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1-n)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(\alpha+1-n)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(1)}\int_x^b f(s)\,ds\; -$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left[\mathcal{D}_{b-}^{\alpha-n+k}f(x)\right]_{x=b}\frac{(b-x)^{k-n+\alpha+1}}{\Gamma(k+\alpha+2-n)}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \frac{1}{\Gamma(1)}\int_{x}^{b} f(s)\,ds - \sum_{k=0}^{n-1}\left[\mathcal{D}_{b-}^{\alpha-n+k}f(x)\right]_{x=b}\frac{(b-x)^{k-n+\alpha+1}}{\Gamma(k+\alpha+2-n)}$$

$$= I_{b-}^{1}f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\left[\mathcal{D}_{b-}^{\alpha-n+k}f(x)\right]_{x=b}\frac{(b-x)^{k-n+\alpha+1}}{\Gamma(k+\alpha+2-n)} \tag{3.25}$$

Setelah diperoleh persamaan (3.25) kemudian (3.25) disubstitusikan pada persamaan (3.24) sehingga

$$I_{b-}^{\alpha}\mathcal{D}_{b-}^{\alpha}f(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_{x}^{b}(t-x)^{\alpha}\mathcal{D}_{b-}^{\alpha}f(t)\,dt\right]$$

$$= \frac{d}{dx}\left[I_{b-}^{1}f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\left[\mathcal{D}_{b-}^{\alpha-n+k}f(x)\right]_{x=b}\frac{(b-x)^{k-n+\alpha+1}}{\Gamma(k+\alpha+2-n)}\right]$$

$$= f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\left[\mathcal{D}_{b-}^{\alpha-n+k}f(x)\right]_{x=b}\frac{(b-x)^{k-n+\alpha+1}}{\Gamma(k+\alpha+2-n)}$$

Karena diketahui untuk

$$\left[\mathcal{D}_{b-}^{\alpha-j}f(x)\right]_{x=b} = 0, \qquad j = (1,2,\dots,n)$$

Sehingga

$$\left[\mathcal{D}_{b-}^{\alpha-n+k}f(x)\right]_{x=b} = 0, \qquad n = (1,2,\dots,k)$$

Akibatnya

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left[\mathcal{D}_{b-}^{\alpha-n+k}f(x)\right]_{x=b}\frac{(b-x)^{k-n+\alpha+1}}{\Gamma(k+\alpha+2-n)} = 0$$

Jadi diperoleh

$$I_{b-}^{\alpha}\mathcal{D}_{b-}^{\alpha}f(x) = f(x)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

7. Komposisi Pada Turunan Fraksional Kanan

Misalkan $\mathcal{D}_{b-}^{\alpha}$ turunan fraksional kanan dengan $m-1 \leq \alpha < m$ dan $\mathcal{D}_{b-}^{\mu}$ dengan $n-1 \leq \mu < n$. Jika $\left[\mathcal{D}_{b-}^{\alpha-j} f(x)\right]_{x=b} = 0, (j = 1,2, \dots, m)$ dan $\left[\mathcal{D}_{b-}^{\mu-j} f(x)\right]_{x=b} = 0, (j = 1,2, \dots, n)$, maka berlaku

$$\mathcal{D}_{b-}^{\alpha}\left(\mathcal{D}_{b-}^{\mu} f(x)\right) = \mathcal{D}_{b-}^{\mu}\left(\mathcal{D}_{b-}^{\alpha} f(x)\right) = \mathcal{D}_{b-}^{\alpha+\mu} f(x)$$

Bukti:

Dengan menggunakan definisi turunan fraksional kanan diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{b-}^{\alpha}\left(\mathcal{D}_{b-}^{\mu} f(x)\right) &= \frac{d^m}{dx^m}\left[I_{b-}^{m-\alpha}\left(\mathcal{D}_{b-}^{\mu} f(x)\right)\right] \\
&= \frac{d^m}{dx^m}\left[\mathcal{D}_{b-}^{\alpha+\mu-m} f(x) - \sum_{j=1}^{n}\left[\mathcal{D}_{b-}^{\mu-j} f(x)\right]_{x=b} \frac{(b-x)^{m-\alpha-j}}{\Gamma(1+m-\alpha-j)}\right] \\
&= \mathcal{D}_{b-}^{\alpha+\mu} f(x) - \sum_{j=1}^{n}\left[\mathcal{D}_{b-}^{\mu-j} f(x)\right]_{x=b} \frac{(b-x)^{-\alpha-j}}{\Gamma(1-\alpha-j)}
\end{aligned}$$

Saat posisi α bertukar dengan μ, maka diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{b-}^{\mu}\left(\mathcal{D}_{b-}^{\alpha} f(x)\right) &= \frac{d^n}{dx^n}\left[I_{b-}^{n-\mu}\left(\mathcal{D}_{b-}^{\alpha} f(x)\right)\right] \\
&= \frac{d^n}{dx^n}\left[\mathcal{D}_{b-}^{\alpha+\mu-n} f(x) - \sum_{j=1}^{m}\left[\mathcal{D}_{b-}^{\alpha-j} f(x)\right]_{x=b} \frac{(b-x)^{m-\mu-j}}{\Gamma(1+m-\mu-j)}\right] \\
&= \mathcal{D}_{b-}^{\alpha+\mu} f(x) - \sum_{j=1}^{m}\left[\mathcal{D}_{b-}^{\alpha-j} f(x)\right]_{x=b} \frac{(b-x)^{-\mu-j}}{\Gamma(1-\mu-j)}
\end{aligned}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Karena

$$\left[\mathcal{D}_{b-}^{\alpha-j} f(x)\right]_{x=b} = 0, \quad j = (1,2,\dots,m)$$

Dan

$$\left[\mathcal{D}_{b-}^{\mu-j} f(x)\right]_{x=b} = 0, \quad j = (1,2,\dots,n)$$

Sehingga

$$\mathcal{D}_{b-}^{\alpha}\left(\mathcal{D}_{b-}^{\mu} f(x)\right) = \mathcal{D}_{b-}^{\mu}\left(\mathcal{D}_{b-}^{\alpha} f(x)\right) = \mathcal{D}_{b-}^{\alpha+\mu} f(x)$$

Dari hasil diatas dapat disimpulkan bawa komposisi turunan fraksional kanan tidak berlaku sifat komutatif kecuali saat kasus trivial yaitu $\alpha = \mu$, atau $\alpha \neq \mu$ tetapi dipenuhi syarat sebagaimana seperti yang telah dijelaskan diatas.

3.4 Implementasi Sifat-Sifat Turunan Fraksional sebagai Bentuk dari Tafakur

Pada pembahasan sebelumnya telah dijelaskan tentang perintah berfikir didalam al-Quran . Selanjutnya akan dibahas mengenai berfikir dalam prespektif islam. Dalam Islam terdapat dua hal untuk memahami suatu al-Qur'an yaitu dengan *Tadabbur* dan *Tafakur*. Istilah tadabur berasal dari bahasa Arab yakni *dabara* artinya belakang. Sedangkan tadabur itu artinya memikirkan, merenungkan, dan memperhatikan sesuatu di balik, di belakang, atau memperhatikan kesudahan perkara serta memikirkannya. Dengan kata lain, memperhatikan dan memikirkan pangkal dan ujungnya, kemudian mengulanginya beberapa kali (Asyafah, 2014:6).

Tafakur adalah istilah Arab untuk berfikkir. Menurut Al-Fairuzabadi, salah seorang linguis Muslim awal termuka, *al-fikr* (pikiran) adalah refleksi atas sesuatu, *afkar* adalah bentuk jamaknya. Menurut pandangannya, *fikr* dan *tafakkur* adalah sinonim dan keduanya memiliki makna sama. *Tafkir*, pikiran, merupakan gagasan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

abstrak, sementara *tafakkur*, berpikir adalah proses wacana reflektif yang hati-hati dan sistematik. Itu sebabnya al-Quran mengacunya dengan beragam kata dan tidak dengan satu istilah. Tafakur dapat diarahkan dalam beberapa tujuan, diantaranya pada penciptaan alam semesta, tanda yang disebarkan Allah di alam semesta, dan dapat diarahkan untuk memahami dan menangkap pesan al-Quran (Badi dan Tajdin, 2007:15).

Salah satu dari tuujuan tafakur adalah berupaya merenungkan fenomena alam yaitu dengan menyadari akan luasnya ilmu yang ada di bumi dan melihat perkembangan ilmu yang ada dari setiap zamannya. Sehingga dengan begitu seseorang dapat terus mengembangkan ilmu pengetahuan dan dapat menemukan ilmu pengetahuan yang baru. Dengan demikian, luasnya ilmu yang ada dengan perintah Allah berfikir didalam al-Quran dan kemauan seseorang untuk terus belajar menjadikan manusia dapat terus menerus mensyukuri atas nikmatNya.

Keluasan ilmu yang Allah Swt. miliki dapat dilihat dalam al-Quran surat al-Baqarah/2:247, yaitu:

وَقَالَ لَهُمْ نَبِيُّهُمْ إِنَّ ٱللَّهَ قَدْ بَعَثَ لَكُمْ طَالُوتَ مَلِكًا ۚ قَالُوٓا۟ أَنَّىٰ يَكُونُ لَهُ
ٱلْمُلْكُ عَلَيْنَا وَنَحْنُ أَحَقُّ بِٱلْمُلْكِ مِنْهُ وَلَمْ يُؤْتَ سَعَةً مِّنَ ٱلْمَالِ ۚ قَالَ إِنَّ ٱللَّهَ
ٱصْطَفَىٰهُ عَلَيْكُمْ وَزَادَهُۥ بَسْطَةً فِى ٱلْعِلْمِ وَٱلْجِسْمِ ۖ وَٱللَّهُ يُؤْتِى مُلْكَهُۥ مَن
يَشَآءُ ۚ وَٱللَّهُ وَٰسِعٌ عَلِيمٌ ﴿٢٤٧﴾

"Nabi mereka mengatakan kepada mereka: "Sesungguhnya Allah telah mengangkat Thalut menjadi rajamu". Mereka menjawab: "Bagaimana Thalut memerintah kami, padahal kami lebih berhak mengendalikan pemerintahan daripadanya, sedang diapun tidak diberi kekayaan yang cukup banyak?" Nabi (mereka) berkata: "Sesungguhnya Allah telah memilih rajamu dan menganugerahinya ilmu yang luas dan tubuh yang perkasa". Allah memberikan pemerintahan kepada siapa yang dikehendaki-Nya. Dan Allah Maha Luas pemberian-Nya lagi Maha Mengetahui" (QS. al-Baqarah/2:247).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Ayat diatas menjelaskan bahwa ilmu yang dimiliki oleh Allah sangatlah luas, sehingga dengan mengaitkan perintah berfikir dalam al-Quran dan metode tafakur yang digunakan dapat menjadikan manusia untuk lebih mensyukuri nikmat Allah dengan cara mengikuti perkembangan ilmu dari zaman ke zaman. Dengan begitu manusia akan secara terus menerus berkembang dan berkemampuan untuk mempelajari ilmu yang ada dialam semesta ini salah satunya dengan bertafakur.

Perkembangan ilmu dari zaman ke zaman yang dapat diketahui serupa dengan perkembangan orde turunan yang mana orde turunan pada umumnya berupa bilangan bulat saja. Kemudian orde tersebut berkembang dan digeneralisasikan bukan hanya bilangan bulat saja namun, orde bilangan yang bukan bilangan bulat, bisa berupa bilangan riil, rasional ataupun kompleks. Istilah tersebut dikenal dengan fraksional. Sehingga kajian sifat-sifat turunan fraksional kiri dan kanan merupakan salah satu bentuk implementasi dari hasil bertafakur.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya, maka dapat diambil kesimpulan untuk suatu fungsi $f(x)$ yang terdefinisikan pada interval $[a, b]$ turunan fraksional dengan orde$-\alpha$ mempunyai sifat-sifat kiri dan kanan sebagai berikut:

1. Suatu fungsi $f(x)$ yang terdefinisikan pada interval $[a, x)$ dapat diketahui sifat-sifat turunan fraksional kiri berorde$-\alpha$ dengan $n-1 \leq \alpha < n$

   a. $(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}\, \lambda f)(x) \quad = \quad \lambda(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f)(x)$

   b. $(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f + g)(x) \quad = \quad \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f(x) + \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} g(x)$

   c. $(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f - g)(x) \quad = \quad \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f(x) \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} g(x)$

   d. $\mathcal{D}_{a+}^{\alpha+m} f(x) \quad = \quad \mathcal{D}_{a+}^{\alpha}\left(\frac{d^m f(x)}{dx^m}\right) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(a)(x-a)^{j-\alpha-m}}{\Gamma(1+j-\alpha-m)}$

   e. $\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} f(x) \quad = \quad f(x)$

   f. $I_{a+}^{\alpha} \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f(x) \quad = \quad f(x)$

   g. $\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}\left(\mathcal{D}_{a+}^{\mu} f(x)\right) \quad = \quad \mathcal{D}_{a+}^{\mu}(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f(x)) = \mathcal{D}_{a+}^{\alpha+\mu} f(x)$

2. Suatu fungsi $f(x)$ yang terdefinisikan pada interval $(x. b]$ dapat diketahui sifat-sifat turunan fraksional kiri berorde$-\alpha$ dengan $n-1 \leq \alpha < n$

   a. $(\mathcal{D}_{b-}^{\alpha}\, \lambda f)(x) \quad = \quad \lambda(\mathcal{D}_{b-}^{\alpha} f)(x)$

   b. $(\mathcal{D}_{b-}^{\alpha} f + g)(x) \quad = \quad \mathcal{D}_{b-}^{\alpha} f(x) + \mathcal{D}_{b-}^{\alpha} g(x)$

   c. $(\mathcal{D}_{b-}^{\alpha} f - g)(x) \quad = \quad \mathcal{D}_{b-}^{\alpha} f(x) - \mathcal{D}_{b-}^{\alpha} g(x)$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

d. $\mathcal{D}_{b-}^{\alpha+m} f(x) = \mathcal{D}_{b-}^{\alpha}\left(\frac{d^m f(x)}{dx^m}\right) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(b)(b-x)^{j-\alpha-m}}{\Gamma(1+j-\alpha-m)}$

e. $\mathcal{D}_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\alpha} f(x) = f(x)$

f. $I_{b-}^{\alpha} \mathcal{D}_{b-}^{\alpha} f(x) = f(x)$

g. $\mathcal{D}_{b-}^{\alpha}\left(\mathcal{D}_{b-}^{\mu} f(x)\right) = \mathcal{D}_{b-}^{\mu}\left(\mathcal{D}_{b-}^{\alpha} f(x)\right) = \mathcal{D}_{b-}^{\alpha+\mu} f(x)$

4.2 Saran

Penelitian ini membahas sifat-sifat turunan fraksional kiri dan kanan dengan orde bilangan rill. Untuk penelitian selanjutnya dapat diteliti mengenai orde yang lebih luas lagi atau dapat mengaplikasikan pada ruang Lebesgue atau pada ruang Morrey yang diperumum.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR RUJUKAN

Ad-Dimasyqi, A.A.F. 2000. Tafsir Ibnu Kasir Juz 3. Terjemahan Bahrun Abu Bakar. Bandung: Sinar Baru Algensindo.

Ad-Dimasyqi, A.A.F. 2000. Tafsir Ibnu Kasir Juz 13. Terjemahan Bahrun Abu Bakar. Bandung: Sinar Baru Algensindo.

Alfiniyah, C. 2010. *Operator Laplace Fraksional dan Transformasi Fouriernya*. Tesis: Institut Teknologi Bandung, Bandung.

Al-Qarni, A. 2008. *Tafsir Muyassar*. Jakarta: Qisthi Aress.

Al-Mahalli, I.J dan Al-Suyuti, I.J, 2008. *Tafsir Jalalain*. Terjemahan Bahrun Abu Bakar. Bandung: Sinar Baru Algensindo.

Asyafah, A. 2014. *Konsep Tadabur Al-Quran*. Bandung: CV. Maulana Media Grafika.

Badi, J dan Tajdin, M. 2004. *Islamic Creative Thinking-Berpikir Kreatif Berdasarkan Metode Qurani*. Bandung: Mizania.

Bartle, R.G dan Sherbert, D.R. 2010. *Introduction to Real Analysis Fourth Edition.* New York: John Wiley & Sons, Inc.

Dedi, E. 2005. *Kalkulus I*. Malang : UM PRESS.

Dwiyono, A. 2012. *Tokoh Matematikawan Duni*. Jakarta Timur: PT. Balai Pustaka.

Kilbas, A.A. Srivastava, H.M, dan Trujillo, J.J. 2006. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Amsterdam: ELSEIVER.

Kumar, A dan Kumaresan, S. 2014. *A Basic Course in Real Analysis*. New York: CRS Press.

Leithold, l. 1986. *Kalulus dan Ilmu Ukur Analitik Jilid 1 (Alih bahasa oleh E. Hutahaean).* Jakarta: Erlangga.

Martono, K. 1999. *Kalulus*. Bandung: Erlangga.

Munir, R. 2012. *Matematika Diskrit Revisi Kelima*. Bandung: Informatika.

Podlubny, I. 1999. *Fractional Differential Equation.* California: Elsevier Academic Press.

Purcell, E.J dan Varberg, D. 1987. *Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 1 Edisi Lima*. Terjemahan Departemen Matematika ITB. Bandung: Erlangga.

Purcell, E.J dan Varberg, D. 2010. *Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 1 Edisi Sembilan*. Terjemahan I Nyoman S,Ph.D. Bandung: Erlangga.

Qutbh, S . 2005. *Tafsir Fi Zhilalil-Qur'an Jilid I*. Jakarta: Gema Insani.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Qutbh, S . 2005. *Tafsir Fi Zhilalil-Qur'an Jilid VII*. Jakarta: Gema Insani.

Samko, S.G, Kilbas. A.A, dan Marichev, O.I. 1983. *Fractional Integrals and Derivatives* – Theory and Applications. Amsterdam: Gordon and Breachh Science Publisher.

Simmons, G.F. 1992. *Calculus Gems: Brief Lives and Memorable Mathematics*. New York: McGraw-Hill, Inc.

Sugiman. 2005. *Kalkulus Lanjut*. Malang: UM Press

Stewart, J. 2009. *Calculus 5th* . Terjemahan Chriswhan. Yogyakarta: Salemba Teknika.

Wrede, R. C dan M. Spiegel. 2002. *Theory and Problems of Advanced Calculus*. New York: McGraw-Hill International Book Company.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

RIWAYAT HIDUP

Wahyu Nuril Fitria, lahir di Kabupaten Lamongan pada tanggal 16 Maret 1995, biasa dipanggil Ayu, tinggal di Jalan Madrasah No.24A Kota Babat Lamongan. Anak tunggal dari pasangan bapak Nuzulul Kirom dan ibu Mahmudah.

Pendidikan dasarnya di tempuh di MI YPPI 1945 Babat, lulus pada tahun 2006. Setelah itu melanjutkan ke MTsN Babat dan lulus pada tahun 2009. Kemudian melajutkan pendidikan ke MAN Lamongan dan lulus pada tahun 2012. Selanjutnya, pada tahun 2013 dia menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil Jurusan Matematika.

Selama menjadi mahasiswa, dia ikut serta berpartisipasi dalam organisasi intra kampus yaitu Himpunan Mahasiswa Jrusuan (HMJ) Matematika selama satu periode pada tahun 2014/2015 dan berperan aktif dalam organisasi extra kampus dengan menjadi Penggurus di Pondok Pesantren Asrama Putri Nurul Ummah Dinoyo Malang pada tahun 2015-2016.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Wahyu Nuril Fitria
NIM : 13610090
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Sifat-sifat Turunan Fraksional Kiri dan Kanan
Pembimbing I : Hairur Rahman, M.Si
Pembimbing II : Ach. Nashichuddin, M.A

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1	17 Februari 2017	Konsultasi Bab I dan Bab II	1.
2	20 Maret 2017	Konsultasi Agama Bab I dan Bab II	2.
3	24 Maret 2017	Revisi Bab I dan Bab II	3.
4	18 April 2017	Revisi Agama Bab II	4.
5	7 April 2017	Konsultasi Bab III	5.
6	10 April 2017	ACC Agama Bab I dan Bab II	6.
7	19 Mei 2017	Konsultasi Bab III dan Bab IV	7.
8	22 Mei 2017	Konsultasi Agama Bab III dan Bab IV	8.
9	2 Juni 2017	Revisi Bab III	9.
10	14 Juli 2015	Revisi Agama Bab III dan Bab IV	10.
11	21 Juli 2017	ACC Bab I, Bab II, Bab III	11.
12	28 Juli 2017	ACC Agama Bab III dan Bab IV	12.
13	4 Agustus 2017	ACC Keseluruhan	13.
14	4 Agustus 2017	ACC Agama Keseluruhan	14.

Malang, 23 Agustus 2017
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG