SIFAT-SIFAT ALJABAR BCC LEMAH SOLID

SKRIPSI

OLEH
SETIA ALAM
NIM. 13610065

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2017

SIFAT-SIFAT ALJABAR BCC LEMAH SOLID

SKRIPSI

OLEH
SETIA ALAM
NIM. 13610065

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2017

SIFAT-SIFAT ALJABAR BCC LEMAH SOLID

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh
Setia Alam
NIM. 13610065

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2017

SIFAT-SIFAT ALJABAR BCC LEMAH SOLID

SKRIPSI

Oleh
Setia Alam
NIM. 13610065

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 29 Agustus 2017

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Dr. Abdussakir, M.Pd	Dr. Ahmad Barizi, MA
NIP. 19751006 200312 1 001	NIP. 19731212 199803 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

SIFAT-SIFAT ALJABAR BCC LEMAH SOLID

SKRIPSI

Oleh
Setia Alam
NIM. 13610065

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal 14 September 2017

Penguji Utama	: H. Wahyu H. Irawan, M.Pd	....
Ketua Penguji	: Evawati Alisah, M.Pd	....
Sekretaris Penguji	: Dr. Abdussakir, M.Pd	....
Anggota Penguji	: Dr. Ahmad Barizi, MA	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Setia Alam

NIM : 13610065

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Sifat-sifat Aljabar BCC Lemah Solid

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 28 Agustus 2017

Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL

97E26AEF70560804

6000 ENAM RIBU RUPIAH

Setia Alam

NIM. 13610065

MOTO

"maka berlomba-lombalah kamu dalam kebaikan"
(QS. al-Baqarah/2:148).

"dan apabila kamu dihormati dengan suatu (salam) penghormatan,
maka balaslah penghormatan itu dengan yang lebih baik atau
balaslah (penghormatan itu yang sepadan) dengannya.
Sungguh Allah memperhitungkan sesuatu"
(QS. an-Nisa/4:86).

PERSEMBAHAN

Penulis mempersembahkan karya ini kepada:

Ayahanda Moh. Jahid dan Ibunda Tutik Ruqoyah

serta

Zahrotul Ula

yang senantiasa memberikan dukungan dan doa terbaik bagi penulis

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Segala puji dan syukur ke hadirat Allah Swt. atas segala limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul "Sifat-sifat Aljabar BCC Lemah Solid". Shalawat beserta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Rasulullah, Muhammad Saw., sang revolusioner pembawa cahaya terang bagi peradaban, salah satunya adalah melalui pendidikan yang senantiasa berlandaskan keagungan moral dan spiritual.

Skripsi ini disusun sebagai salah satu dari rangkaian kegiatan perkuliahan sebagai persyaratan dalam menyelesaikan program pendidikan matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Selesainya skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak, karena itu penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Abdul Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku dosen pembimbing I yang senantiasa memberikan bimbingan, nasihat, dan motivasi dalam penyelesaian skripsi.
5. Dr. Ahmad Barizi, MA, selaku dosen pembimbing II yang senantiasa memberikan pengarahan, nasihat, dan motivasi dalam penyelesaian skripsi.

6. Kedua orang tua dan saudara yang tiada henti memberikan dukungan dan doa terbaiknya bagi penulis.
7. Seluruh sahabat dan teman-teman yang senantiasa memberikan motivasi mengejar target dalam penyelesaian skripsi.

Semoga segala yang telah diberikan kepada penulis mendapatkan balasan terbaik dari Allah Swt. Pada akhirnya, penulis berharap skripsi ini dapat bermanfaat bagi penulis maupun pembaca untuk dikembangkan pada penelitian lebih lanjut.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, Agustus 2017

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

ABSTRAK

Alam, Setia. 2017. **Sifat-sifat Aljabar BCC Lemah Solid**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Abdussakir, M.Pd. (II) Dr. Ahmad Barizi, M.A.

Kata Kunci: aljabar BCC lemah, aljabar BCC lemah solid, cabang aljabar BCC lemah.

Aljabar BCC lemah solid merupakan aljabar BCC lemah X yang memenuhi $(x * y) * z = (x * z) * y$, untuk x dan y elemen suatu cabang di X dan sebarang z di X. Penelitian ini bertujuan untuk menjelaskan secara terperinci sifat-sifat aljabar BCC lemah solid sebagaimana mengacu pada penelitian karya Dudek (2011). Pada suatu aljabar BCC lemah solid X berlaku $p * (p * q) \leq q$, $p * (p * q) \in B(a)$, $q * (q * p) \in B(a)$, $p * (p * a) = a$, dan $p * \big(p * (p * q)\big) = p * q$, untuk semua $p, q \in B(a)$ dan $a \in I(X)$. Pernyataan-pernyataan berikut adalah ekivalen pada suatu aljabar BCC lemah solid X: (1) X adalah komutatif cabang demi cabang, (2) $p * q = p * \big(q * (q * p)\big)$ untuk p, q elemen suatu cabang di X, (3) $p = q * (q * p)$ untuk $p \leq q$, (4) $p * (p * q) = q * \Big(q * \big(p * (p * q)\big)\Big)$ untuk p, q elemen suatu cabang di X. Suatu aljabar BCC lemah solid X adalah komutatif cabang demi cabang jika dan hanya jika setiap cabang dari X adalah semi latis dengan operasi $\wedge$ (didefinisikan $p \wedge q = q * (q * p)$) atau ekivalen dengan $A(p) \cap A(q) = A(p \wedge q)$ untuk setiap p, q elemen suatu cabang di X. Suatu aljabar BCC lemah implikatif cabang demi cabang solid X adalah komutatif cabang demi cabang dan juga X merupakan implikatif positif cabang demi cabang jika dan hanya jika X aljabar BCK komutatif. Suatu aljabar BCK X adalah implikatif jika dan hanya jika X komutatif dan implikatif positif. Adapun aljabar BCC lemah solid ini dapat dikaji lebih lanjut mengenai sifat-sifatnya secara lebih luas.

ABSTRACT

Alam, Setia. 2017. **Properties of Solid Weak BCC-Algebras**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisors: (I) Dr. Abdussakir, M.Pd. (II) Dr. Ahmad Barizi, M.A.

Keyword: weak BCC-algebra, solid weak BCC-algebra, branch of weak BCC-algebra

Solid weak BCC-algebra is a weak BCC-algebra X satisfies $(x * y) * z = (x * z) * y$, for x and y are elements of a branch in X and any z in X. This research aims to explain in detail the properties of solid weak BCC-algebras based on research by Dudek (2011). In a solid weak BCC-algebra X, it satisfies $p * (p * q) \leq q$, $p * (p * q) \in B(a)$, $q * (q * p) \in B(a)$, $p * (p * a) = a$, and $p * \big(p * (p * q)\big) = p * q$, for all $p, q \in B(a)$ and $a \in I(X)$. The following statements are equivalent in a solid weak BCC-algebra X: (1) X is branchwise commutative, (2) $p * q = p * \big(q * (q * p)\big)$ for p, q are elements of a branch in X, (3) $p = q * (q * p)$ for $p \leq q$, (4) $p * (p * q) = q * \Big(q * \big(p * (p * q)\big)\Big)$ for p, q are elements of a branch in X. A solid weak BCC-algebra X is branchwise commutative if and only if every branch of X is semilattice with respect to $\wedge$ operation (define $p \wedge q = q * (q * p)$) or equivalent with $A(p) \cap A(q) = A(p \wedge q)$ for all p, q are elements of a branch in X. A solid branchwise implicative weak BCC-algebra is branchwise commutative and X is branchwise positive implicative if and only if X is commutative BCK-algebra. A BCK-algebra X is implicative if and only if X commutative and positive implicative. This solid weak BCC-algebras can be further studied widely about its properties.

ملخص

علم، ستيا. ٢٠١٧. **خصائص من الجبر−*Solid Weak BCC***. بحث جامعي. شعبة الرياضيات. كلية العلوم و التكنولوجيا. الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف (١) الدكتور عبدالشاكر الماجستير (٢) الدكتور أحمد باريزي الماجستير.

الكلمات الرئيسية: الجبر−*weak BCC*، الجبر−*solid weak BCC*، فرع من الجبر−*weak BCC*

الجبر−*solid weak BCC* هو الجبر−*weak BCC* X الذى يرضي

$$(x * y) * z = (x * z) * y$$

لـ x و y عضو فرع فى X و أي z فى X. تهدف هذه البحث إلى شرح تفصيلي لخصائص الجبر− *solid weak BCC* كما يشير إلى البحث الذي أجراه *Dudek* (٢٠١١). فى الجبر−*solid weak BCC* X تطبق $p * (p * q) \leq q$, $p * (p * q) \in B(a)$, $q * (q * p) \in B(a)$, $p * (p * a) = a$, و $p * (p * (p * q)) = p * q$ للجمع $p, q \in B(a)$ و $a \in I(X)$. العبارات التالية تعادل الجبر− *solid weak BCC* X:

(١) X هو التبادلية فرع من قبل الفرع،

(٢) $p * q = p * (q * (q * p))$ لـ p, q عضو فرع فى X،

(٣) $p = q * (q * p)$ لـ $p \leq q$،

(٤) $p * (p * q) = q * (q * (p * (p * q)))$ لـ p, q عضو فرع فى X.

الجبر−*solid weak BCC* X هو التبادلي فرع من قبل فرع إذا وفقط إذا كان كل فرع من X شبه *lattice* بواسطة عملية $\wedge$ (تعريف $p \wedge q = q * (q * p)$) أو ما يعادل $A(p) \cap A(q) = A(p \wedge q)$ للجمع p, q عضو فرع فى X. هناك الجبر−*implicative weak BCC* فرع من قبل فرع *X solid* هو التبادلية فرع من قبل فرع و X هو *positive implicative* فرع من قبل فرع إذا و فقط إذا كان X هو الجبر−*BCK* التبادلية. الجبر−*X BCK* هو *implicative* إذا و فقط إذا كان X هو *commutative* و *positive implicative*. أما بالنسبة لهذا الجبر−*solid weak BCC* يمكن حزيد من دراستها عن طبيعتها على نطاق أوسع.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Islam menaruh perhatian yang besar dalam hal menuntut ilmu. Keutamaan menuntut ilmu banyak dijelaskan baik dalam ayat-ayat al-Quran, hadits-hadits nabi, maupun ucapan para sahabat. Salah satu hadits nabi Muhammad riwayat Bukhari dan Muslim yang menyatakan keutamaan menuntut ilmu hingga hukumnya wajib adalah sebagai berikut.

طَلَبُ الْعِلْمِ فَرِيْضَةٌ عَلَى كُلِّ مُسْلِمٍ

"Menuntut ilmu diwajibkan bagi setiap orang Islam" (HR. Bukhari dan Muslim).

Hadits tersebut tentunya mengandung makna yang tegas bahwa menuntut ilmu memang begitu penting bagi setiap orang Islam sehingga menjadi wajib untuk dilaksanakan. Dengan kata lain, hukumnya adalah *fardhu 'ain* bagi setiap orang Islam untuk haus akan ilmu. Ilmu yang dimaksud bukanlah ilmu agama saja melainkan ilmu pengetahuan yang luas. Seperti halnya ilmu fikih, ilmu sosial, ilmu alam, ilmu kesehatan, ilmu teknologi, termasuk juga ilmu matematika yang dapat dijadikan dasar oleh ilmu-ilmu yang lain.

Matematika dengan perkembangannya adalah hasil dari proses berpikir. Penalaran adalah suatu bentuk pemikiran, penalaran inilah yang mendasari teknik meneliti ketepatannya yaitu logika (Soekadijo, 2001:3). Dudek (2000) dalam jurnalnya berjudul *Algebras Inspired by Logics* telah menjadi bukti bahwa banyak aljabar, salah satu bidang dalam matematika, telah terinspirasi oleh beberapa sistem logis. Aljabar BCK terinspirasi dari logika BCK, akibat dari logika yang hanya memenuhi aksioma B, C, dan I disebut BCI positif logis (I adalah konsekuensi kecil dari B, C, dan K), dan aljabar lainnya.

Dewasa ini, banyak penelitian yang menyoroti masalah aljabar baru. Suatu pasangan terurut himpunan tak kosong X dengan operasi biner perkalian dan elemen konstanta 0 disebut aljabar yang dinotasikan dengan $(X, \cdot, 0)$ (Dudek, 2000:3). Salah satu aljabar, yaitu aljabar BCC telah banyak diangkat menjadi penelitian-penelitian ilmiah. Aljabar BCC adalah model aljabar dari logika BCC, akibat logika yang skema aksiomanya adalah skema tipe utama dari kombinator B, I, dan K, serta aturan inferensinya adalah modus ponen dan modus ponen 2 (Borzooei, dkk, 2013:268).

Aljabar BCC kembali dikembangkan oleh Wieslaw A. Dudek pada 2011. Dudek memperkenalkan suatu aljabar yang erat kaitannya dengan aljabar BCI dan BCK yang disebut dengan aljabar BCC lemah solid. Merujuk pada penelitian tersebut, penulis tertarik untuk mengkaji sifat-sifat dari aljabar BCC lemah solid secara lebih terperinci. Oleh karena itu, penelitian ini dirumuskan dengan judul "Sifat-sifat Aljabar BCC Lemah Solid".

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah dalam penelitian ini adalah apa sajakah sifat-sifat aljabar BCC lemah solid?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah tersebut, maka tujuan penelitian ini adalah untuk menjelaskan sifat-sifat aljabar BCC lemah solid.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian ini adalah:

1. Bagi Penulis

   Penelitian ini dapat memperkaya informasi tentang aljabar BCC lemah solid serta sebagai sarana eksplorasi kemampuan penulis yang telah didapat selama masa studi di Jurusan Matematika.

2. Bagi Lembaga

   Hasil penelitian ini dapat menjadi bahan kepustakaan baru di Jurusan Matematika khususnya pada bidang ilmu aljabar.

3. Bagi Pembaca

   Hasil penelitian ini dapat digunakan sebagai bahan rujukan penelitian berikutnya mengenai aljabar BCC lemah solid.

1.5 Metode Penelitian

Penelitian yang dilakukan adalah dengan pendekatan penelitian kualitatif. Jenis penelitian yang digunakan berupa studi kepustakaan (*library research*), yaitu teknik pengumpulan data dengan mengadakan studi penelaahan terhadap buku-buku referensi, literatur-literatur, catatan-catatan, dan hasil penelitian ilmiah lain yang berhubungan dengan objek permasalahan yang dihadapi.

Adapun langkah-langkah penelitian ini adalah sebagai berikut:

a. Mengumpulkan bahan kepustakaan terkait aljabar BCC dan kepustakaan pendukung lainnya.

b. Menjelaskan konstruksi aljabar BCC lemah solid dengan langkah-langkah sebagai berikut

Aljabar BCC

Aljabar BCC lemah

Atom

Cabang dari aljabar BCC lemah

Proper *Improper*

Elemen minimal pada aljabar BCC lemah

Elemen-elemen pada cabang yang sama

Aljabar BCC lemah adalah solid

Solid kiri Solid kanan

Supersolid

c. Mengkaji definisi dari aljabar BCC lemah solid.
d. Menjelaskan aljabar BCC lemah solid termasuk definisi, teorema, lemma, akibat, dan contohnya.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan dalam penelitian ini terdapat lima bagian, yaitu:

Bab I Pendahuluan

Bab ini memaparkan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan, manfaat, metode penelitian, serta sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bab ini berisi pustaka atau literatur pendukung objek permasalahan, di antaranya tentang himpunan, operasi biner, semilatis, dan aljabar termasuk aljabar BCK, BCI, BCC, BCC lemah, cabang aljabar BCC lemah, serta kajian ayat tentang pentingnya bernalar dalam Islam.

Bab III Pembahasan

Bab ini berisi pembahasan konstruksi, definisi, beserta sifat-sifat aljabar BCC lemah solid dalam bentuk teorema, lemma, dan akibat. Bab ini juga berisi kajian ayat tentang kewajiban menuntut ilmu.

Bab IV Penutup

Bab ini berisi kesimpulan dari pembahasan objek permasalahan yang akan sekaligus menjawab rumusan masalah pada bab I serta saran untuk pengembangan penelitian lebih lanjut.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

Sebelum memahami aljabar BCC lemah solid beserta sifat-sifatnya, pada bab ini terlebih dahulu dipaparkan kajian-kajian yang mendukung pembahasan aljabar BCC lemah solid. Kajian yang dimaksud di antaranya adalah himpunan, operasi biner, aljabar, baik aljabar BCK, BCI, BCC, maupun aljabar BCC lemah beserta cabangnya, dan juga semilatis. Semuanya akan dijelaskan melalui definisi, proposisi, lemma, akibat, atau contoh dari literatur-literatur yang ada.

2.1 Himpunan

Definisi 2.1

Himpunan (set) didefinisikan sebagai kumpulan atau koleksi objek-objek yang terdefinisi dengan jelas (*well defined*). Himpunan dapat dinyatakan dengan mendaftar semua anggotanya di dalam kurung kurawal $\{\}$ (Abdussakir, 2009:4).

Contoh 2.1

H adalah himpunan bilangan prima. Maka $H = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$.

Contoh 2.2

Kumpulan benua yang luas bukan merupakan himpunan karena "luas" tidak terdefinisi dengan baik.

Definisi 2.2

Misalkan A dan B adalah himpunan. A disebut himpunan bagian dari B jika dan hanya jika setiap anggota himpunan A adalah anggota himpunan B. Salah satu notasi $A \subseteq B$ atau notasi $B \supseteq A$ mengindikasikan bahwa A adalah himpunan bagian dari B (Gilbert dan Gilbert, 2009:2).

Contoh 2.3

Diberikan himpunan $A = \{b, d\}$ dan $B = \{a, b, c, d, e\}$. Maka $A \subseteq B$ karena setiap anggota himpunan A adalah juga anggota himpunan B.

Definisi 2.3

Jika A dan B adalah himpunan, gabungan dari A dan B adalah himpunan $A \cup B$ (baca "A gabungan B") yang diberikan sebagai

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ atau } x \in B\}.$$

Irisan dari A dan B adalah himpunan $A \cap B$ (baca "A irisan B") yang diberikan sebagai

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ dan } x \in B\}$$

(Gilbert dan Gilbert, 2009:3).

Jadi, gabungan dari dua himpunan A dan B adalah himpunan yang elemen-elemennya adalah di kedua himpunan yaitu di A atau B. Sedangkan irisan dari dua himpunan A dan B adalah himpunan yang elemen-elemennya sama dari A dan B. Operasi gabungan memiliki sifat komutatif, $A \cup B = B \cup A$. Begitu juga pada operasi irisan memiliki sifat komutatif, $A \cap B = B \cap A$ (Gilbert dan Gilbert, 2009). Keduanya dapat ditunjukkan untuk sebarang himpunan A dan B, maka

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x | x \in A \text{ atau } x \in B\} \\ &= \{x | x \in B \text{ atau } x \in A\} \\ &= B \cup A \end{aligned}$$

dan juga

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ dan } x \in B\}$$

$$= \{x | x \in B \text{ dan } x \in A\}$$

$$= B \cap A.$$

2.2 Operasi Biner

Definisi 2.4

Misal G adalah himpunan tak kosong. Suatu pemetaan $*$ dari $G \times G$ ke G yang memetakan setiap pasangan terurut (a, b) di G dengan suatu elemen tunggal di G yang dinotasikan dengan $a * b$ disebut sebagai operasi biner atau komposisi biner di G (Raishinghania dan Aggarwal, 1980:27).

Contoh 2.4

Diberikan operasi biner pengurangan $(-)$ pada setiap himpunan bilangan imajiner $\mathcal{I}$, himpunan bilangan rasional $\mathcal{Q}$, himpunan bilangan riil $\mathcal{R}$, dan himpunan bilangan kompleks $\mathcal{C}$, karena,

$a \in \mathcal{I}, b \in \mathcal{I}$ maka $a - b \in \mathcal{I}\ \ \forall a, b \in \mathcal{I}$,

$a \in \mathcal{Q}, b \in \mathcal{Q}$ maka $a - b \in \mathcal{Q}\ \ \forall a, b \in \mathcal{Q}$,

$a \in \mathcal{R}, b \in \mathcal{C}$ maka $a - b \in \mathcal{R}\ \ \forall a, b \in \mathcal{R}$,

$a \in \mathcal{R}, b \in \mathcal{C}$ maka $a - b \in \mathcal{C}\ \ \forall a, b \in \mathcal{C}$.

Oleh karena itu, operasi pengurangan merupakan operasi biner pada $\mathcal{I}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}$, dan $\mathcal{C}$, akan tetapi bukan operasi biner pada himpunan bilangan asli $\mathcal{N}$. Misal $5, 7 \in \mathcal{N}$ tetapi $5 - 7 = -2 \notin \mathcal{N}$.

Jika sudah dipahami tentang himpunan dan operasi biner, maka akan lebih mudah memahami aljabar yang merupakan sistem atau pasangan terurut dari himpunan tak kosong, operasi biner, dan elemen identitas.

2.3 Aljabar

Aljabar adalah suatu grupoid atau suatu pasangan terurut himpunan tak kosong X dengan operasi biner perkalian dan elemen konstanta 0. Aljabar dinotasikan dengan $(X, \cdot, 0)$. Setiap aljabar akan memiliki aksioma tertentu termasuk $x = x$ dan aturan-aturan setara lainnya (Dudek, 2000:3).

Beberapa aljabar yang akan dibahas adalah aljabar BCK, aljabar BCI, aljabar BCC, aljabar BCC lemah, dan aljabar BCC lemah solid pada bab selanjutnya.

2.3.1 Aljabar BCK

Definisi 2.5

Aljabar BCK adalah suatu aljabar $(X, *, 0)$ yang memenuhi aksioma-aksioma berikut untuk semua $x, y, z \in X$:

BCK-1 $\big((x * y) * (x * z)\big) * (z * y) = 0,$

BCK-2 $\big(x * (x * y)\big) * y = 0,$

BCK-3 $x * x = 0,$

BCK-4 $0 * x = 0,$

BCK-5 $x * y = 0$ dan $y * x = 0$ maka $x = y$ (Hong, dkk, 2003:549).

Contoh 2.5

Tunjukkan aljabar berikut adalah aljabar BCK jika diberikan suatu aljabar $(X, *, 0)$ dengan $X = \{0, a, b, c\}$. Operasi biner "$*$" pada X didefinisikan pada tabel Cayley berikut.

Tabel 2.1 Tabel X Terhadap Operasi $*$

$*$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	a	a
b	b	b	0	b
c	c	c	c	0

1) Akan ditunjukkan untuk semua $x, y, z \in X$, berlaku $\big((x * y) * (x * z)\big) * (z * y) = 0$

Untuk $x = 0$, maka diperoleh

$\big((0 * 0) * (0 * a)\big) * (a * 0) = (0 * 0) * a = 0 * a = 0$

$\big((0 * 0) * (0 * b)\big) * (b * 0) = (0 * 0) * b = 0 * b = 0$

$\big((0 * 0) * (0 * c)\big) * (c * 0) = (0 * 0) * c = 0 * c = 0$

$\big((0 * 0) * (0 * 0)\big) * (0 * 0) = (0 * 0) * 0 = 0 * 0 = 0$

$\big((0 * a) * (0 * 0)\big) * (0 * a) = (0 * 0) * 0 = 0 * 0 = 0$

$\big((0 * a) * (0 * b)\big) * (b * a) = (0 * 0) * b = 0 * b = 0$

$\big((0 * a) * (0 * c)\big) * (c * a) = (0 * 0) * c = 0 * c = 0$

$\big((0 * a) * (0 * a)\big) * (a * a) = (0 * 0) * 0 = 0 * 0 = 0$

$\big((0 * b) * (0 * 0)\big) * (0 * b) = (0 * 0) * 0 = 0 * 0 = 0$

$\big((0 * b) * (0 * a)\big) * (a * b) = (0 * 0) * a = 0 * a = 0$

$\big((0 * b) * (0 * c)\big) * (c * b) = (0 * 0) * c = 0 * c = 0$

$\big((0 * b) * (0 * b)\big) * (b * b) = (0 * 0) * 0 = 0 * 0 = 0$

$\big((0 * c) * (0 * 0)\big) * (0 * b) = (0 * 0) * 0 = 0 * 0 = 0$

$\big((0 * c) * (0 * a)\big) * (a * c) = (0 * 0) * a = 0 * a = 0$

$\big((0 * c) * (0 * b)\big) * (b * c) = (0 * 0) * b = 0 * b = 0$

$\big((0 * c) * (0 * c)\big) * (c * c) = (0 * 0) * 0 = 0 * 0 = 0$

Untuk $x = a$, maka diperoleh

$\big((a * 0) * (a * 0)\big) * (0 * 0) = (0 * 0) * 0 = 0 * 0 = 0$

$\big((a * 0) * (a * a)\big) * (a * 0) = (0 * 0) * a = 0 * a = 0$

$\big((a * 0) * (a * b)\big) * (b * 0) = (a * a) * b = 0 * b = 0$

$\big((a * 0) * (a * c)\big) * (c * 0) = (a * a) * c = 0 * c = 0$

$\big((a * a) * (a * a)\big) * (a * a) = (0 * 0) * 0 = 0 * 0 = 0$

$\big((a * a) * (a * 0)\big) * (0 * a) = (0 * a) * 0 = 0 * 0 = 0$

$\big((a * a) * (a * b)\big) * (b * a) = (a * a) * b = 0 * b = 0$

$\big((a * a) * (a * c)\big) * (c * a) = (0 * a) * c = 0 * c = 0$

$\big((a * b) * (a * b)\big) * (b * b) = (a * a) * 0 = 0 * 0 = 0$

$\big((a * b) * (a * 0)\big) * (0 * b) = (a * a) * 0 = 0 * 0 = 0$

$\big((a * b) * (a * a)\big) * (a * b) = (a * 0) * a = a * a = 0$

$\big((a * b) * (a * c)\big) * (c * b) = (a * a) * c = 0 * c = 0$

$\big((a * c) * (a * c)\big) * (c * c) = (a * a) * 0 = 0 * 0 = 0$

$\big((a * c) * (a * 0)\big) * (0 * c) = (a * a) * 0 = 0 * 0 = 0$

$\big((a * c) * (a * a)\big) * (a * c) = (a * 0) * a = a * a = 0$

$\big((a * c) * (a * b)\big) * (b * c) = (a * a) * b = 0 * b = 0$

Untuk $x = b$, maka diperoleh

$\big((b * 0) * (b * 0)\big) * (0 * 0) = (b * b) * 0 = 0 * 0 = 0$

$\big((b * 0) * (b * a)\big) * (a * 0) = (b * b) * a = 0 * a = 0$

$$\big((b*0)*(b*b)\big)*(b*0)=(b*0)*b=0*b=0$$

$$\big((b*0)*(b*c)\big)*(c*0)=(b*b)*c=0*c=0$$

$$\big((b*a)*(b*a)\big)*(a*a)=(b*b)*0=0*0=0$$

$$\big((b*a)*(b*0)\big)*(0*a)=(b*b)*0=0*0=0$$

$$\big((b*a)*(b*b)\big)*(b*a)=(b*0)*b=0*b=0$$

$$\big((b*a)*(b*c)\big)*(c*a)=(b*b)*c=0*c=0$$

$$\big((b*b)*(b*b)\big)*(b*b)=(0*0)*0=0*0=0$$

$$\big((b*b)*(b*0)\big)*(0*b)=(0*b)*0=0*0=0$$

$$\big((b*b)*(b*a)\big)*(a*b)=(0*b)*a=0*a=0$$

$$\big((b*b)*(b*c)\big)*(c*b)=(0*b)*c=0*c=0$$

$$\big((b*c)*(b*c)\big)*(c*c)=(b*b)*0=0*0=0$$

$$\big((b*c)*(b*0)\big)*(0*c)=(b*b)*0=0*0=0$$

$$\big((b*c)*(b*a)\big)*(a*c)=(b*b)*a=0*a=0$$

$$\big((b*c)*(b*b)\big)*(b*c)=(b*0)*b=b*b=0$$

Untuk $x=c$, maka diperoleh

$$\big((c*0)*(c*0)\big)*(0*0)=(c*c)*0=0*0=0$$

$$\big((c*0)*(c*a)\big)*(a*0)=(c*c)*a=0*a=0$$

$$\big((c*0)*(c*b)\big)*(b*0)=(c*c)*b=0*b=0$$

$$\big((c*0)*(c*c)\big)*(c*0)=(c*0)*c=c*c=0$$

$$\big((c*a)*(c*a)\big)*(a*a)=(c*c)*0=0*0=0$$

$$\big((c*a)*(c*0)\big)*(0*a)=(c*c)*0=0*0=0$$

$$\big((c*a)*(c*b)\big)*(b*a)=(c*c)*b=0*b=0$$

$\big((c*a)*(c*c)\big)*(c*a)=(c*0)*c=c*c=0$

$\big((c*b)*(c*b)\big)*(b*b)=(c*c)*0=0*0=0$

$\big((c*b)*(c*0)\big)*(0*b)=(c*c)*0=0*0=0$

$\big((c*b)*(c*a)\big)*(a*b)=(c*c)*a=0*a=0$

$\big((c*b)*(c*c)\big)*(c*b)=(c*0)*c=c*0=0$

$\big((c*c)*(c*c)\big)*(c*c)=(0*0)*0=0*0=0$

$\big((c*c)*(c*0)\big)*(0*c)=(0*c)*0=0*0=0$

$\big((c*c)*(c*a)\big)*(a*c)=(0*c)*a=0*a=0$

$\big((c*c)*(c*b)\big)*(b*c)=(0*c)*b=0*b=0$

Jadi, terbukti bahwa untuk semua $x,y,z\in X$, berlaku $\big((x*y)*(x*z)\big)*(z*y)=0$.

2) Akan ditunjukkan untuk semua $x,y\in X$, berlaku $(x*(x*y))*y=0$

Untuk $x=0$, maka diperoleh

$(0*(0*0))*0=(0*0)*0=0*0=0$

$\big(0*(0*a)\big)*a=(0*0)*a=0*a=0$

$\big(0*(0*b)\big)*b=(0*0)*b=0*b=0$

$\big(0*(0*c)\big)*c=(0*0)*c=0*c=0$

Untuk $x=a$, maka diperoleh

$\big(a*(a*0)\big)*0=(a*a)*0=0*0=0$

$\big(a*(a*a)\big)*a=(a*0)*a=a*a=0$

$\big(a*(a*b)\big)*b=(a*a)*b=0*b=0$

$\big(a*(a*c)\big)*c=(a*a)*c=0*c=0$

$x = b, y = b$ maka diperoleh

$(b * (b * 0)) * 0 = (b * b) * 0 = 0 * 0 = 0$

$(b * (b * a)) * a = (b * b) * 0 = 0 * 0 = 0$

$(b * (b * b)) * b = (b * 0) * b = b * b = 0$

$(b * (b * c)) * c = (b * b) * c = 0 * c = 0$

Untuk $x = c$, maka diperoleh

$(c * (c * 0)) * 0 = (c * c) * 0 = 0 * 0 = 0$

$(c * (c * a)) * a = (c * c) * a = 0 * a = 0$

$(c * (c * b)) * b = (c * c) * b = 0 * b = 0$

$(c * (c * c)) * c = (c * 0) * c = c * c = 0$

Jadi, terbukti untuk semua $x, y \in X$, berlaku $(x * (x * y)) * y = 0$.

3) Dari Tabel 2.2, jelas bahwa untuk semua $x \in X$ berlaku $x * x = 0$.
4) Dari Tabel 2.2, jelas bahwa jika $x * y = 0$ dan $y * x = 0$ maka $x = y$, untuk semua $x, y \in X$.
5) Dari Tabel 2.2, jelas bahwa untuk suatu $x * 0 = 0$ hanya terpenuhi ketika $x = 0$.
6) Dari Tabel 2.2, jelas bahwa untuk semua $x \in X$ berlaku $0 * x = 0$.

Dengan demikian, aljabar $(X, *, 0)$ adalah aljabar BCK.

Aljabar BCK pada Definisi 2.5 merupakan aljabar $(X, *, 0)$ yang memenuhi lima aksioma BCK. Selanjutnya akan dibahas aljabar BCI yang merupakan aljabar BCK namun tidak memenuhi aksioma BCK-4 yakni $0 * x = 0$, untuk $x \in X$.

2.3.2 Aljabar BCI

Definisi 2.6

Suatu aljabar $(X,\ *,\ 0)$ disebut aljabar BCI jika memenuhi kondisi berikut untuk semua $x, y, z \in X$:

BCI-1 $\big((x * y) * (x * z)\big) * (z * y) = 0$,

BCI-2 $\big(x * (x * y)\big) * y = 0$,

BCI-3 $x * x = 0$,

BCI-4 $x * y = 0$ dan $y * x = 0$ maka $x = y$ (Zhan dan Jun, 2009:120).

Contoh 2.6

Diberikan aljabar $(X,\ *,\ 0)$ dengan $X = \{0, 1, 2\}$. Tunjukkan $(X,\ *,\ 0)$ adalah aljabar BCI. Operasi "$*$" pada X didefinisikan sebagai berikut.

Tabel 2.2 Tabel X Terhadap Operasi $*$

$*$	0	1	2
0	0	2	1
1	1	0	2
2	2	1	0

1) Akan ditunjukkan untuk semua $x, y, z \in X$, berlaku $\big((x * y) * (x * z)\big) * (z * y) = 0$

Untuk $x = 0$, maka diperoleh

$$\big((0 * 0) * (0 * 0)\big) * (0 * 0) = (0 * 0) * 0 = 0 * 0 = 0$$

$$\big((0 * 0) * (0 * 1)\big) * (1 * 0) = (0 * 2) * 1 = 1 * 1 = 0$$

$$\big((0 * 0) * (0 * 2)\big) * (2 * 0) = (0 * 1) * 2 = 2 * 2 = 0$$

$$\big((0 * 1) * (0 * 0)\big) * (0 * 1) = (2 * 0) * 2 = 2 * 2 = 0$$

$$\big((0*1)*(0*1)\big)*(1*1)=(2*2)*0=0*0=0$$

$$\big((0*1)*(0*2)\big)*(2*1)=(2*1)*1=1*1=0$$

$$\big((0*2)*(0*0)\big)*(0*2)=(1*0)*1=1*1=0$$

$$\big((0*2)*(0*1)\big)*(1*2)=(1*2)*2=2*2=0$$

$$\big((0*2)*(0*2)\big)*(2*2)=(1*1)*0=0*0=0$$

Untuk $x=1$, maka diperoleh

$$\big((1*0)*(1*0)\big)*(0*0)=(1*1)*0=0*0=0$$

$$\big((1*0)*(1*2)\big)*(2*0)=(1*0)*2=1*2=0$$

$$\big((1*0)*(1*1)\big)*(1*0)=(1*0)*1=1*1=0$$

$$\big((1*1)*(1*0)\big)*(0*1)=(0*1)*2=2*2=0$$

$$\big((1*1)*(1*2)\big)*(2*1)=(0*2)*1=1*1=0$$

$$\big((1*1)*(1*1)\big)*(1*1)=(0*0)*0=0*0=0$$

$$\big((1*2)*(1*2)\big)*(2*2)=(2*2)*0=0*0=0$$

$$\big((1*2)*(1*0)\big)*(0*2)=(2*1)*1=1*1=0$$

$$\big((1*2)*(1*1)\big)*(1*2)=(2*0)*2=2*2=0$$

Untuk $x=2$, maka diperoleh

$$\big((2*0)*(2*0)\big)*(0*0)=(2*2)*0=0*0=0$$

$$\big((2*0)*(2*1)\big)*(1*0)=(2*1)*1=1*1=0$$

$$\big((2*0)*(2*2)\big)*(2*0)=(2*0)*2=2*2=0$$

$$\big((2*1)*(2*0)\big)*(0*1)=(1*2)*2=2*2=0$$

$$\big((2*1)*(2*1)\big)*(1*1)=(1*1)*0=0*0=0$$

$$\big((2*1)*(2*2)\big)*(2*1)=(1*0)*1=1*1=0$$

$((2 * 2) * (2 * 0)) * (0 * 2) = (0 * 2) * 1 = 1 * 1 = 0$

$((2 * 2) * (2 * 1)) * (1 * 2) = (0 * 1) * 2 = 2 * 2 = 0$

$((2 * 2) * (2 * 2)) * (2 * 2) = (0 * 0) * 0 = 0 * 0 = 0$

Jadi, terbukti bahwa untuk semua $x, y, z \in X$, berlaku $((x * y) * (x * z)) * (z * y) = 0$.

2) Akan ditunjukkan untuk semua $x, y \in X$, berlaku $(x * (x * y)) * y = 0$

Untuk $x = 0, y = 0$ maka diperoleh $(0 * (0 * 0)) * 0 = 0$

Untuk $x = 0, y = 1$ maka diperoleh $(0 * (0 * 1)) * 1 = 0$

Untuk $x = 0, y = 2$ maka diperoleh $(0 * (0 * 2)) * 2 = 0$

Untuk $x = 1, y = 0$ maka diperoleh $(1 * (1 * 0)) * 0 = 0$

Untuk $x = 1, y = 1$ maka diperoleh $(1 * (1 * 1)) * 1 = 0$

Untuk $x = 1, y = 2$ maka diperoleh $(1 * (1 * 2)) * 2 = 0$

Untuk $x = 2, y = 0$ maka diperoleh $(2 * (2 * 0)) * 0 = 0$

Untuk $x = 2, y = 1$ maka diperoleh $(2 * (2 * 1)) * 1 = 0$

Untuk $x = 2, y = 2$ maka diperoleh $(2 * (2 * 2)) * 2 = 0$

3) Dari Tabel 2.1, jelas bahwa untuk semua $x \in X$ berlaku $x * x = 0$.

4) Dari Tabel 2.1, jelas bahwa jika $x * y = 0$ dan $y * x = 0$ maka $x = y$, untuk semua $x, y \in X$.

Dengan demikian, terbukti bahwa $(X, *, 0)$ adalah aljabar BCI.

2.3.3 Aljabar BCC

Definisi 2.7

Suatu aljabar $(X, *, 0)$ disebut aljabar BCC jika memenuhi kondisi berikut untuk semua $x, y, z \in X$:

BCC-1 $((x * y) * (z * y)) * (x * z) = 0$,

BCC-2 $x * 0 = x$,

BCC-3 $x * x = 0$,

BCC-4 $0 * x = 0$,

BCC-5 $x * y = 0$ dan $y * x = 0$ akibatnya $x = y$.

Didefinisikan relasi biner "$\leq$" pada X dengan $x \leq y$ jika dan hanya jika $x * y = 0$. Maka aljabar BCC $(X, *, 0)$ memenuhi kondisi:

(i) $0 \leq x$,

(ii) $x \leq x$,

(iii) $x * y \leq x$,

(iv) $(x * y) * (z * y) \leq x * z$,

(v) $x \leq y$ akibatnya $x * z \leq y * z$ dan $z * y \leq z * x$.

Aljabar BCC disebut komutatif jika untuk semua $x, y \in X$, $x * (x * y) = y * (y * x)$ (Borzooei, dkk, 2013:269).

Aljabar BCC dengan lima aksiomanya pada Definisi 2.7 apabila diberikan operasi biner $\leq$ pada X yang berarti $x \leq y$ jika dan hanya jika $x * y = 0$ berakibat BCC-1 jika dan hanya jika *(iv)*, BCC-3 jika dan hanya jika *(ii)*, BCC-4 jika dan hanya jika *(i)*, dan BCC-5 jika dan hanya jika *(v)*. Sedangkan untuk *(iii)*, $x * y \leq x$ jika dan hanya jika $(x * y) * x = 0$, berdasarkan BCC-3 dan BCC-4 maka $x * y = x$ dan $x * y = 0$ sehingga diperoleh $x = 0$. Namun, akibat dari BCC-4 yakni $x * y = 0$, berdasarkan BCC-3 akibatnya $y = x$. Dengan demikian, diperoleh $y = x = 0$. Sehingga, $x * 0 = x$ yang merupakan BCC-2.

2.3.4 Aljabar BCC Lemah

Definisi 2.8

Suatu aljabar $(X, *, 0)$ disebut aljabar BCC lemah jika memenuhi aksioma berikut untuk semua $x, y, z \in X$:

BCCL-1 $\big((x * y) * (z * y)\big) * (x * z) = 0$,

BCCL-2 $x * x = 0$,

BCCL-3 $x * 0 = x$,

BCCL-4 $x * y = y * x = 0$ maka $x = y$ (Dudek, 2011:2916).

Dudek (2011:2916-2917) dalam jurnalnya memberikan keterangan tambahan bahwa aljabar BCC lemah yang memenuhi identitas $0 * x = 0$ adalah aljabar BCC atau aljabar BIK$^+$. Aljabar BCC lemah yang memenuhi identitas $(x * y) * z = (x * z) * y$ adalah aljabar BCI. Sedangkan aljabar BCC lemah yang tidak memenuhi keduanya dikatakan sebagai aljabar BCC lemah sejati. Aljabar BCC lemah sejati paling tidak memiliki empat elemen.

Proposisi 2.2

Suatu aljabar $(X, *, 0)$ dengan relasi $\leq$ didefinisikan dengan

$$x \leq y \Leftrightarrow x * y = 0 \tag{2.1}$$

adalah aljabar BCC lemah jika dan hanya jika untuk semua $x, y, z \in X$, kondisi berikut dipenuhi,

(i) $(x * y) * (z * y) \leq x * z$,

(ii) $x \leq x$,

(iii) $x * 0 = x$,

(iv) $x \leq y$ dan $y \leq x$ akibatnya $x = y$.

Dari *(i)*, pada aljabar BCC lemah, implikasi berikut dipenuhi untuk semua $x, y, z \in X$.

$$x \leq y \Rightarrow x * z \leq y * z, \tag{2.2}$$

dan

$$x \leq y \Rightarrow z * y \leq z * x, \tag{2.3}$$

(Thomys dan Zhang, 2013:2).

Bukti

Misal X adalah aljabar BCC lemah dan misal diberikan operasi biner $\leq$ pada X yang didefinisikan $x \leq y$ jika dan hanya jika $x * y = 0$, maka

BCCL-1 $\big((x * y) * (z * y)\big) * (x * z) = 0 \Leftrightarrow (x * y) * (z * y) \leq (x * z)$,

BCCL-2 $x * x = 0 \Leftrightarrow x \leq x$,

BCCL-3 $x * 0 = x$,

BCCL-4 $x * y = y * x = 0$ maka $x = y \Leftrightarrow x \leq y$ dan $y \leq x$ maka $x = y$.

Selanjutnya, misal $x \leq y$ dan berdasarkan definisi operasi biner $\leq$ yang diberikan maka $x \leq y$ jika dan hanya jika $x * y = 0$. Maka dari *(i)* diperoleh

$\big((x * z) * (y * z)\big) * (x * y) = 0$ (BCCL-1),

$\big((x * z) * (y * z)\big) * 0 = 0$ (karena $x * y = 0$),

$(x * z) * (y * z) = 0$ (BCCL-3),

$x * z \leq y * z$ (definisi $\leq$),

dan juga

$\big((z * y) * (x * y)\big) * (z * x) = 0$ (BCCL-1),

$\big((z * y) * 0\big) * (z * x) = 0$ (karena $x * y = 0$),

$(z * y) * (z * x) = 0$ (BCCL-3),

$$z * y \leq z * x \qquad \text{(definisi } \leq\text{).}$$

Dengan demikian, diperoleh $x \leq y \Rightarrow x * z \leq y * z$ dan $x \leq y \Rightarrow z * y \leq z * x$.

Contoh 2.7

Tunjukkan aljabar berikut adalah aljabar BCC lemah jika diberikan suatu aljabar $(X, *, 0)$ dengan $X = \{0, 1, 2, 3\}$. Operasi biner "$*$" pada X didefinisikan pada tabel Cayley berikut.

Tabel 2.3 Tabel X Terhadap Operasi $*$

$*$	0	1	2	3
0	0	0	2	2
1	1	0	2	2
2	2	2	0	0
3	3	3	1	0

1) Akan ditunjukkan untuk semua $x, y, z \in X$, berlaku $\big((x * y) * (z * y)\big) * (x * z) = 0$

   Untuk $x = 0$, maka diperoleh

   $\big((0 * 0) * (0 * 0)\big) * (0 * 0) = (0 * 0) * 0 = 0 * 0 = 0$

   $\big((0 * 0) * (1 * 0)\big) * (0 * 1) = (0 * 1) * 0 = 0 * 0 = 0$

   $\big((0 * 0) * (2 * 0)\big) * (0 * 2) = (0 * 2) * 2 = 2 * 2 = 0$

   $\big((0 * 0) * (3 * 0)\big) * (0 * 3) = (0 * 3) * 2 = 2 * 2 = 0$

   $\big((0 * 1) * (0 * 1)\big) * (0 * 0) = (0 * 0) * 0 = 0 * 0 = 0$

   $\big((0 * 1) * (1 * 1)\big) * (0 * 1) = (0 * 0) * 0 = 0 * 0 = 0$

   $\big((0 * 1) * (2 * 1)\big) * (0 * 2) = (0 * 2) * 2 = 2 * 2 = 0$

$$\big((0 * 1) * (3 * 1)\big) * (0 * 3) = (0 * 3) * 2 = 2 * 2 = 0$$

$$\big((0 * 2) * (0 * 2)\big) * (0 * 0) = (2 * 2) * 0 = 0 * 0 = 0$$

$$\big((0 * 2) * (1 * 2)\big) * (0 * 1) = (2 * 2) * 0 = 0 * 0 = 0$$

$$\big((0 * 2) * (2 * 2)\big) * (0 * 2) = (2 * 0) * 2 = 2 * 2 = 0$$

$$\big((0 * 2) * (3 * 2)\big) * (0 * 3) = (2 * 1) * 2 = 2 * 2 = 0$$

$$\big((0 * 3) * (0 * 3)\big) * (0 * 0) = (2 * 2) * 0 = 0 * 0 = 0$$

$$\big((0 * 3) * (1 * 3)\big) * (0 * 1) = (2 * 2) * 0 = 0 * 0 = 0$$

$$\big((0 * 3) * (2 * 3)\big) * (0 * 2) = (2 * 0) * 2 = 2 * 2 = 0$$

$$\big((0 * 3) * (3 * 3)\big) * (0 * 3) = (2 * 0) * 2 = 2 * 2 = 0$$

Untuk $x = 1$, maka diperoleh

$$\big((1 * 0) * (0 * 0)\big) * (1 * 0) = (1 * 0) * 1 = 1 * 1 = 0$$

$$\big((1 * 0) * (1 * 0)\big) * (1 * 1) = (1 * 1) * 0 = 0 * 0 = 0$$

$$\big((1 * 0) * (2 * 0)\big) * (1 * 2) = (1 * 2) * 2 = 2 * 2 = 0$$

$$\big((1 * 0) * (3 * 0)\big) * (1 * 3) = (1 * 3) * 2 = 2 * 2 = 0$$

$$\big((1 * 1) * (0 * 1)\big) * (1 * 0) = (0 * 0) * 1 = 0 * 1 = 0$$

$$\big((1 * 1) * (1 * 1)\big) * (1 * 1) = (0 * 0) * 0 = 0 * 0 = 0$$

$$\big((1 * 1) * (2 * 1)\big) * (1 * 2) = (0 * 2) * 2 = 2 * 2 = 0$$

$$\big((1 * 1) * (3 * 1)\big) * (1 * 3) = (0 * 3) * 2 = 2 * 2 = 0$$

$$\big((1 * 2) * (0 * 2)\big) * (1 * 0) = (2 * 2) * 1 = 0 * 1 = 0$$

$$\big((1 * 2) * (1 * 2)\big) * (1 * 1) = (2 * 2) * 0 = 0 * 0 = 0$$

$$\big((1 * 2) * (2 * 2)\big) * (1 * 2) = (2 * 0) * 2 = 2 * 2 = 0$$

$$\big((1 * 2) * (3 * 2)\big) * (1 * 3) = (2 * 1) * 2 = 2 * 2 = 0$$

$\big((1 * 3) * (0 * 3)\big) * (1 * 0) = (2 * 2) * 1 = 0 * 1 = 0$

$\big((1 * 3) * (1 * 3)\big) * (1 * 1) = (2 * 2) * 0 = 0 * 0 = 0$

$\big((1 * 3) * (2 * 3)\big) * (1 * 2) = (2 * 0) * 2 = 2 * 2 = 0$

$\big((1 * 3) * (3 * 3)\big) * (1 * 3) = (2 * 0) * 2 = 2 * 2 = 0$

Untuk $x = 2$, maka diperoleh

$\big((2 * 0) * (0 * 0)\big) * (2 * 0) = (2 * 0) * 2 = 2 * 2 = 0$

$\big((2 * 0) * (1 * 0)\big) * (2 * 1) = (2 * 1) * 2 = 2 * 2 = 0$

$\big((2 * 0) * (2 * 0)\big) * (2 * 2) = (2 * 2) * 0 = 0 * 0 = 0$

$\big((2 * 0) * (3 * 0)\big) * (2 * 3) = (2 * 3) * 0 = 0 * 0 = 0$

$\big((2 * 1) * (0 * 1)\big) * (2 * 0) = (2 * 0) * 2 = 2 * 2 = 0$

$\big((2 * 1) * (1 * 1)\big) * (2 * 1) = (2 * 0) * 2 = 2 * 2 = 0$

$\big((2 * 1) * (2 * 1)\big) * (2 * 2) = (2 * 2) * 0 = 0 * 0 = 0$

$\big((2 * 1) * (3 * 1)\big) * (2 * 3) = (2 * 3) * 0 = 0 * 0 = 0$

$\big((2 * 2) * (0 * 2)\big) * (2 * 0) = (0 * 2) * 2 = 2 * 2 = 0$

$\big((2 * 2) * (1 * 2)\big) * (2 * 1) = (0 * 2) * 2 = 2 * 2 = 0$

$\big((2 * 2) * (2 * 2)\big) * (2 * 2) = (0 * 0) * 0 = 0 * 0 = 0$

$\big((2 * 2) * (3 * 2)\big) * (2 * 3) = (0 * 1) * 0 = 0 * 0 = 0$

$\big((2 * 3) * (0 * 3)\big) * (2 * 0) = (0 * 2) * 2 = 2 * 2 = 0$

$\big((2 * 3) * (1 * 3)\big) * (2 * 1) = (0 * 2) * 2 = 2 * 2 = 0$

$\big((2 * 3) * (2 * 3)\big) * (2 * 2) = (0 * 0) * 0 = 0 * 0 = 0$

$\big((2 * 3) * (3 * 3)\big) * (2 * 3) = (0 * 0) * 0 = 0 * 0 = 0$

Untuk $x = 3$, maka diperoleh

$$\left((3*0)*(0*0)\right)*(3*0)=(3*0)*3=3*3=0$$

$$\left((3*0)*(1*0)\right)*(3*1)=(3*1)*3=3*3=0$$

$$\left((3*0)*(2*0)\right)*(3*2)=(3*2)*1=1*1=0$$

$$\left((3*0)*(3*0)\right)*(3*3)=(3*3)*0=0*0=0$$

$$\left((3*1)*(0*1)\right)*(3*0)=(3*0)*3=3*3=0$$

$$\left((3*1)*(1*1)\right)*(3*1)=(3*0)*3=3*3=0$$

$$\left((3*1)*(2*1)\right)*(3*2)=(3*2)*1=1*1=0$$

$$\left((3*1)*(3*1)\right)*(3*3)=(3*3)*0=0*0=0$$

$$\left((3*2)*(0*2)\right)*(3*0)=(1*2)*3=2*3=0$$

$$\left((3*2)*(1*2)\right)*(3*1)=(1*2)*3=2*3=0$$

$$\left((3*2)*(2*2)\right)*(3*2)=(1*0)*1=1*1=0$$

$$\left((3*2)*(3*2)\right)*(3*3)=(1*1)*0=0*0=0$$

$$\left((3*3)*(0*3)\right)*(3*0)=(0*2)*3=2*3=0$$

$$\left((3*3)*(1*3)\right)*(3*1)=(0*2)*3=2*3=0$$

$$\left((3*3)*(2*3)\right)*(3*2)=(0*0)*1=0*1=0$$

$$\left((3*3)*(3*3)\right)*(3*3)=(0*0)*0=0*0=0$$

Jadi terbukti bahwa untuk semua $x, y, z \in X$, berlaku $\left((x*y)*(z*y)\right)*(x*z)=0$.

2) Dari Tabel 2.3 jelas bahwa untuk semua $x \in X$, berlaku $x*x=0$.

3) Dari Tabel 2.3 jelas bahwa untuk semua $x \in X$, berlaku $x*0=x$.

4) Dari Tabel 2.3, jelas bahwa jika $x*y=0$ dan $y*x=0$ maka $x=y$, untuk semua $x, y \in X$.

Dengan demikian, aljabar $(X, *, 0)$ adalah aljabar BCC lemah.

2.3.4.1 Cabang Aljabar BCC Lemah

Definisi 2.9

Suatu elemen a dari aljabar BCC lemah X disebut atom jika $x \leq a$ maka $x = 0$ atau $x = a$. Himpunan semua atom dinotasikan dengan $A(X)$ (Dudek, dkk, 2011:901).

Misalkan X adalah aljabar BCC lemah, $x \leq a$ dari Definisi 2.9 dapat dipahami sebagai $x * a = 0$ karena persamaan (2.1), untuk $a \in X$. Sehingga, jika $x * a = 0$ akibatnya $x = 0$ atau $x = a$. Dengan demikian, a disebut sebagai atom dari aljabar BCC lemah dan kumpulan dari atom-atom dinotasikan dengan $A(X)$. Misalkan X adalah aljabar BCC lemah, himpunan $B(a) = \{x \in X | a \leq x\}$ dengan a adalah atom dari X, disebut cabang dari X. Elemen a disebut *initial* untuk $B(a)$ (Dudek dkk, 2011:902).

Dudek dkk (2011:902) juga menjelaskan apabila terdapat $b \neq a$ sedemikian sehingga $B(a) \subset B(b)$, cabang $B(a)$ disebut *improper*. Jadi, $B(a)$ disebut *proper* atau sejati jika $b \in X$ sedemikian sehingga $b \neq a$ dan $b \leq a$ tidak terjadi. Himpunan semua elemen *initial* dari cabang *proper* atau sejati dari X dinotasikan sebagai $I(X)$. Sehingga jelas bahwa $I(X) \subset A(X)$. Dudek (2011:2917) memaparkan bahwa $I(X)$ adalah himpunan semua elemen minimal (dengan operasi $\leq$) dari X, dengan X adalah aljabar BCC lemah.

Untuk lebih jelas memahami cabang yang merupakan dua elemen *initial* berbeda yang disjoin (Dudek, dkk, 2011:906) dari aljabar BCC lemah, diberikan proposisi berikut:

Proposisi 2.3

$x * y \in B(0)$ jika dan hanya jika $y * x \in B(0)$ (Dudek, dkk, 2011:906).

Bukti

Misal $x * y \in B(0)$, maka

$$0 * (x * y) = 0 \qquad \text{(BCC-4)},$$

$$(y * y) * (x * y) = 0 \qquad \text{(BCCL-2)},$$

$$\big((y * y) * (x * y)\big) * (y * x) = 0 \qquad \text{(BCCL-1)},$$

$$(y * y) * (x * y) \leq (y * x) \qquad \text{(persamaan (2.1))}.$$

Dengan demikian diperoleh $0 \leq (y * x)$, sehingga $(y * x) \in B(0)$.

Sebaliknya, misal $(y * x) \in B(0)$, maka

$$0 * (y * x) = 0 \qquad \text{(BCC-4)},$$

$$(x * x) * (y * x) = 0 \qquad \text{(BCCL-2)},$$

$$\big((x * x) * (y * x)\big) * (x * y) = 0 \qquad \text{(BCCL-1)},$$

$$(x * x) * (y * x) \leq (x * y) \qquad \text{(persamaan (2.1))}.$$

Dengan demikian diperoleh $0 \leq (x * y)$, sehingga $(x * y) \in B(0)$.

Jadi, terbukti bahwa $x * y \in B(0)$ jika dan hanya jika $y * x \in B(0)$.

Proposisi 2.4

Dua elemen x, y adalah pada cabang yang sama jika dan hanya jika $x * y \in B(0)$ (Dudek, dkk, 2011:906).

Bukti

Misal $x, y \in B(a)$, maka $a \leq x$ dan $a \leq y$, artinya berdasarkan persamaan (2.1) maka $a * x = 0$ dan $a * y = 0$. Selanjutnya, berdasarkan persamaan (2.2) diperoleh $a * y \leq x * y$, untuk $a \leq x$. Dengan demikian diperoleh $0 \leq (x * y)$ maka $x * y \in B(0)$. Sebaliknya, misal $x * y \in B(0)$ dan $x \in B(x_0), y \in B(y_0)$, untuk suatu $x_0, y_0 \in I(X)$. Karena $I(X) \subset A(X)$ maka $x_0, y_0 \in A(X)$ yang artinya jika $x * x_0 = 0$ maka $x = 0$ atau $x = x_0$ dan juga jika $x * y_0$ maka $x = 0$ atau $x = y_0$. Sehingga diperoleh $x = x_0 = y_0$. Jadi, x dan y adalah elemen pada suatu cabang yang sama.

Contoh 2.8

Diberikan suatu aljabar BCC lemah sejati $(X, *, 0)$ dengan $X = \{0, 1, 2, 3\}$ dan operasi $*$ didefinisikan sebagai berikut.

Tabel 2.4 Tabel X Terhadap Operasi $*$

$*$	0	1	2	3
0	0	0	2	2
1	1	0	2	2
2	2	2	0	0
3	3	3	1	0

Tentukan atom-atom, cabang, dan elemen minimal dari X serta tentukan elemen X yang termasuk pada cabang yang sama.

1) Akan ditunjukkan atom-atom dari X.

Definisi 2.9 menyebutkan suatu elemen $a \in X$ disebut atom jika $x \leq a$ maka $x = 0$ atau $x = a$. Selanjutnya, berdasarkan persamaan (2.1), maka yang disebut atom yaitu jika $x * a = 0$ maka $x = 0$ atau $x = a$ terpenuhi. Maka,

untuk $x = 0$ dan $a = 0$

$0 * 0 = 0$ maka $0 = 0 \ \vee \ 0 = 0$

untuk $x = 0$ dan $a = 1$

$0 * 1 = 0$ maka $0 = 0 \ \vee \ 0 \neq 1$

untuk $x = 1$ dan $a = 1$

$1 * 1 = 0$ maka $1 \neq 0 \ \vee \ 1 = 1$

untuk $x = 2$ dan $a = 2$

$2 * 2 = 0$ maka $2 \neq 0 \ \vee \ 2 = 2$

untuk $x = 2$ dan $a = 3$

$2 * 3 = 0$ maka $2 \neq 0 \ \vee \ 2 \neq 3$

untuk $x = 3$ dan $a = 3$

$3 * 3 = 0$ maka $3 \neq 0 \ \vee \ 3 = 3$

Sehingga, $A(X) = \{0, 1, 2\}$.

2) Akan ditunjukkan cabang dari X.

Jika sudah diketahui atom-atom dari aljabar BCC lemah solid, maka yang disebut cabang dari aljabar tersebut dinotasikan dengan $B(a) = \{x \in X | a \leq x\}$ dengan a adalah atom. Sehingga berdasarkan persamaan (2.1), elemen dari $B(a)$ dapat diterjemahkan menjadi $x \in X$ sedemikian sehingga $a * x = 0$. Maka,

untuk $a = 0$

$B(0) = \{x \in X | 0 * x = 0\}$ sehingga $B(0) = \{0, 1\}$

untuk $a = 1$

$B(1) = \{x \in X | 1 * x = 0\}$ sehingga $B(1) = \{1\}$

untuk $a = 2$

$B(2) = \{x \in X | 2 * x = 0\}$ sehingga $B(2) = \{2, 3\}$.

Jadi, diperoleh cabang dari X yaitu $B(0) = \{0, 1\}$, $B(1) = \{1\}$, dan $B(2) = \{2, 3\}$.

Selanjutnya akan ditentukan cabang *improper* dan cabang *proper* atau sejati dari X. Adapun cabang *improper* $B(a)$ adalah $B(a) \subset B(b)$ untuk $b \neq a$. Sehingga, karena $B(1) \subset B(0)$ maka $B(1)$ adalah cabang *improper*. Sedangkan cabang *proper* $B(a)$ adalah untuk $b \in X$ sedemikian sehingga $b \neq a$ dan $b \leq a$ tidak terpenuhi. Maka,

untuk $B(0) = \{0, 1\}$

$b = 0$ sedemikian sehingga $0 = 0 \ \wedge \ \ 0 * 0 = 0$

$b = 1$ sedemikian sehingga $1 \neq 0 \ \wedge \ \ 1 * 0 \neq 0$

$b = 2$ sedemikian sehingga $2 \neq 0 \ \wedge \ \ 2 * 0 \neq 0$

$b = 3$ sedemikian sehingga $3 \neq 0 \ \wedge \ \ 3 * 0 \neq 0$

Dengan demikian $b \in X$ sedemikian sehingga tidak ada $b \neq a$ dan $b \leq a$.

Untuk $B(2) = \{2, 3\}$

$b = 0$ sedemikian sehingga $0 \neq 2 \ \wedge \ \ 0 * 2 \neq 0$

$b = 1$ sedemikian sehingga $1 \neq 2 \ \wedge \ \ 1 * 2 \neq 0$

$b = 2$ sedemikian sehingga $2 = 2 \ \wedge \ \ 2 * 2 = 0$

$b = 3$ sedemikian sehingga $3 \neq 2 \ \wedge \ \ 3 * 2 \neq 0$

Dengan demikian $b \in X$ sedemikian sehingga tidak ada $b \neq a$ dan $b \leq a$.

Sehingga, cabang $B(0)$ dan $B(2)$ adalah cabang *proper* atau sejati.

3) Akan ditunjukkan elemen minimal dari X

Karena cabang $B(0)$ dan $B(2)$ adalah cabang *proper* atau sejati maka $I(X) = \{0, 2\}$.

4) Akan ditunjukkan elemen X pada cabang yang sama

Berdasarkan Proposisi 2.4, dua elemen x, y adalah pada cabang yang sama jika dan hanya jika $x * y \in B(0)$, dan Proposisi 2.3, $x * y \in B(0)$ jika dan hanya jika $y * x \in B(0)$, dari Tabel 2.4 diperoleh:

$0 * 0 = 0 \in B(0) \quad \Leftrightarrow \quad 0 * 0 = 0 \in B(0)$

$0 * 1 = 0 \in B(0) \quad \Leftrightarrow \quad 1 * 0 = 1 \in B(0)$

$$2 * 2 = 0 \in B(0) \iff 2 * 2 = 0 \in B(0)$$

$$2 * 3 = 0 \in B(0) \iff 3 * 2 = 1 \in B(0)$$

$$3 * 3 = 0 \in B(0) \iff 3 * 3 = 0 \in B(0)$$

Sehingga, elemen X yang termasuk pada cabang yang sama adalah 0, 1 dan 2, 3.

Definisi 2.10

Suatu aljabar BCC lemah X, untuk semua $x, y \in X$ disebut

(i) komutatif cabang demi cabang jika $x * (x * y) = y * (y * x)$,

(ii) positif implikatif cabang demi cabang jika $x * y = (x * y) * y$,

(iii) implikatif cabang demi cabang jika $x * (y * x) = x$,

terpenuhi jika semua elemen pada cabang yang sama. Jika identitas terjadi untuk semua elemen X, maka X adalah komutatif, positif implikatif, dan implikatif (Dudek dkk, 2011:906).

2.3.4.2 Semilatis

Dudek (2011) memaparkan pada teori aljabar BCI terdapat aljabar BCI yang memenuhi suatu identitas penjumlahan, karena itu aljabar BCI memiliki sifat yang serupa dengan sifat-sifat latis. Contohnya, aljabar BCI yang memiliki sifat serupa dengan sifat semilatis bawah jika memenuhi

$$x * (x * y) = y * (y * x). \tag{2.4}$$

Aljabar BCI disebut aljabar BCK jika untuk semua elemennya memiliki satu cabang memenuhi

$$(x * y) * y = x * y. \tag{2.5}$$

Aljabar BCK terbatas disebut latis distributif jika memenuhi

$$x * (y * x) = x. \tag{2.6}$$

2.4 Pentingnya Bernalar dalam Islam

Pada hakikatnya manusia adalah makhluk yang berpikir, bernalar, beremosi, bersikap, dan beramal (Salam, 1997:139). Manusia sangatlah mampu berbuat demikian karena mempunyai akal. Al-Quran pun banyak menyinggung masalah akal manusia seperti dalam penjelasan Purwanto (2015), al-Quran menyebut *aql* sebanyak 49 kali dengan 48 kata dalam bentuk kata kerja sedang/akan atau imperfektum (*fi'il mudhari'*) dan satu kata kerja lampau (*fi'il madhiy*). Tepatnya, *ya'qilun* 22 kali, *ta'qilun* 24 kali, dan *na'qilu*, *ya'qilu*, *'aqalu* masing-masing satu kali.

Berpikir menurut Salam (1997) merupakan suatu aktivitas untuk menemukan suatu kebenaran. Proses berpikir sehingga menghasilkan suatu kesimpulan disebut sebagai penalaran. Produk penalaran adalah pengetahuan yang berkaitan dengan aktivitas berpikir dan bukan dengan aktivitas emosi. Namun, tidak semua aktivitas berpikir itu berlandaskan penalaran. Jadi, penalaran adalah aktivitas berpikir yang mempunyai karakteristik tertentu dalam menemukan kebenaran. Sehingga, menurut Soekadijo (2001) bahwa penalaran adalah suatu bentuk pemikiran. Penalaran inilah yang mendasari teknik meneliti ketepatannya yaitu logika.

Penalaran sebagai suatu aktivitas berpikir mempunyai dua ciri sebagai berikut:

a. Adanya pola berpikir yang disebut logika atau proses berpikir logis. Berpikir itu mempunyai konotasi jamak (*plural*) dan bukan tunggal (*singular*). Sering terjadi adanya kekacauan penalaran, artinya, suatu proses berpikir itu disebut logis dari sudut logika yang lain. Hal ini karena tidak konsisten dalam memakai pola berpikir tertentu.

b. Adanya sifat analitik dari proses berpikir manusia. Penalaran ilmiah merupakan suatu kegiatan analisis yang memakai logika ilmiah, dan penalaran lainnya memakai logikanya sendiri pula. Sifat analitik ini adalah konsekuensi dari adanya suatu pola berpikir tertentu. Tanpa pola berpikir tersebut takkan ada kegiatan analisis, karena pada hakikatnya analisis adalah suatu aktivitas berpikir berlandaskan langkah-langkah tertentu (Salam, 1997:140).

Logika menjadi sangat penting dan menjadi hal pokok yang harus dipelajari oleh seseorang dalam kehidupan, karena menurut Salam (1997) mempelajari logika mampu memberikan pemahaman tentang prinsip-prinsip berpikir yang tepat untuk mencapai suatu kebenaran. Sehingga mempelajari logika dapat menjadikan seseorang untuk berpikir sistematis dan logis, mampu menyelaraskan dan menggunakan prinsip-prinsip abstrak yang dapat diterapkan dalam bidang keilmuan lainnya, mampu mengembangkan daya pikir dan nalar agar tidak tersesat. Selain itu juga dapat mengembangkan daya imajinatif dan kreatif seseorang dalam menghadapi fenomena alamiah maupun ilmiah dalam kehidupan.

Demikian aktivitas bernalar, berpikir, dan berlogika begitu penting dalam kehidupan manusia yang tidak lain adalah untuk memikirkan segala sesuatu termasuk maha karya Tuhan berupa dunia dan seisinya. Aktivitas tersebut tentunya berguna untuk memperoleh suatu pengetahuan. Agama Islam pun mengajarkan manusia untuk memikirkan segala ciptaan Allah. Seperti halnya dalam al-Quran surat al-Baqarah ayat 164 tentang seruan Allah terhadap manusia untuk memikirkan tanda-tanda kebesaranNya dalam penciptaan alam semesta dengan menyebutkan kata dasar *aql* dalam kata *ya'qilun* sebagai berikut:

إِنَّ فِي خَلْقِ ٱلسَّمَـٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَٱخْتِلَـٰفِ ٱلَّيْلِ وَٱلنَّهَارِ وَٱلْفُلْكِ ٱلَّتِي تَجْرِي فِي ٱلْبَحْرِ بِمَا يَنفَعُ ٱلنَّاسَ وَمَآ أَنزَلَ ٱللَّهُ مِنَ ٱلسَّمَآءِ مِن مَّآءٍ فَأَحْيَا بِهِ ٱلْأَرْضَ بَعْدَ مَوْتِهَا وَبَثَّ فِيهَا مِن كُلِّ دَآبَّةٍ وَتَصْرِيفِ ٱلرِّيَـٰحِ وَٱلسَّحَابِ ٱلْمُسَخَّرِ بَيْنَ ٱلسَّمَآءِ وَٱلْأَرْضِ لَأَيَـٰتٍ لِّقَوْمٍ يَعْقِلُونَ ١٦٤

"Sesungguhnya pada penciptaan langit dan bumi, silih bergantinya malam dan siang, kapal yang berlayar di laut dengan (muatan) yang berguna bagi manusia, apa yang diturunkan Allah dari langit berupa air, lalu dengan itu dihidupkan-Nya bumi sesudah mati (kering), dan Dia tebarkan di dalamnya segala jenis hewan, dan perkisaran angin dan awan yang dikendalikan antara langit dan bumi, (semua itu) sungguh merupakan tanda-tanda (kebesaran Allah) bagi orang-orang yang berpikir" (QS. al-Baqarah/2:164).

BAB III

PEMBAHASAN

Pembahasan pada skripsi ini mengenai sifat-sifat aljabar BCC lemah solid akan dipaparkan dari konstruksi aljabar BCC ke aljabar BCC lemah solid dan definisi-definisi aljabar BCC lemah solid yang kemudian akan diselidiki sifat-sifatnya, yakni berupa lemma, akibat, dan teorema. Selanjutnya akan dibahas pula kajian tentang integrasi al-Quran dengan matematika.

3.1 Konstruksi Aljabar BCC Lemah Solid

Aljabar BCC seperti pada Definisi 2.7 yaitu suatu aljabar $(X, *, 0)$ disebut aljabar BCC jika memenuhi lima aksioma berikut:

BCC-1 $\big((x * y) * (z * y)\big) * (x * z) = 0,$

BCC-2 $x * 0 = x,$

BCC-3 $x * x = 0,$

BCC-4 $0 * x = 0,$

BCC-5 $x * y = 0$ dan $y * x = 0$ maka $x = y$, untuk semua $x, y, z \in X$.

Aljabar BCC dengan lima aksioma tersebut jika tidak dipenuhi untuk aksioma BCC-4 yaitu $0 * x = 0$ maka aljabar tersebut selanjutnya disebut sebagai aljabar BCC lemah. Sehingga, $(X, *, 0)$ merupakan aljabar BCC lemah jika memenuhi BCC-1, BCC-2, BCC-3, dan BCC-5.

Definisi 2.9, suatu elemen $a \in X$ disebut atom jika $x \leq a$ maka $x = 0$ atau $x = a$. Berdasarkan persamaan (2.1), maka a disebut atom yaitu jika $x * a = 0$ maka $x = 0$ atau $x = a$. Cabang dari aljabar BCC lemah dinotasikan dengan $B(a) = \{x \in X | a \leq x\}$ dengan a adalah atom. Berdasarkan persamaan (2.1), elemen dari $B(a)$ dapat diterjemahkan menjadi $x \in X$ sedemikian sehingga $a * x = 0$. Adapun cabang *improper* $B(a)$ adalah $B(a) \subset B(b)$ untuk $b \neq a$. Sedangkan cabang *proper* $B(a)$ adalah untuk $b \in X$ sedemikian sehingga tidak ada $b \neq a$ dan $b \leq a$. Atom-atom yang termasuk dalam cabang *proper* akan disebut sebagai elemen minimal atau *initial*.

Berdasarkan Proposisi 2.4, dua elemen x, y adalah elemen pada suatu cabang yang sama di X jika dan hanya jika $x * y \in B(0)$, dan Proposisi 2.3, $x * y \in B(0)$ jika dan hanya jika $y * x \in B(0)$. Selanjutnya, aljabar BCC lemah jika memenuhi persamaan $(x * y) * z = (x * z) * y$ akan disebut solid atau solid kiri jika untuk semua x, y elemen suatu cabang di X dan sebarang z di X serta akan disebut solid kanan jika untuk semua y, z elemen suatu cabang di X dan sebarang x di X. Aljabar BCC lemah yang memenuhi solid kiri dan solid kanan selanjutnya disebut supersolid.

3.2 Aljabar BCC Lemah Solid

Aljabar BCC lemah solid, seperti pada subbab 3.1 yang telah dipaparkan tentang konstruksinya akan diperjelas pada definisi-definisi berikut:

Definisi 3.1

Suatu aljabar BCC lemah X disebut solid kiri (solid) jika memenuhi

$$(x * y) * z = (x * z) * y \tag{3.1}$$

untuk semua x, y elemen suatu cabang di X dan sebarang $z \in X$.

Selanjutnya, dari definisi aljabar BCC lemah yang kemudian disebut solid kanan dijelaskan pada definisi berikut:

Definisi 3.2

Suatu aljabar BCC lemah X disebut solid kanan jika memenuhi

$$(x * y) * z = (x * z) * y \tag{3.2}$$

untuk semua y, z elemen suatu cabang di X dan sebarang $x \in X$.

Aljabar BCC lemah solid kiri (solid) dan solid kanan pada dasarnya hanya dibedakan oleh elemen-elemen aljabar BCC lemah X pada cabang yang sama dan sebarang elemen pada X. Selanjutnya, apabila X memenuhi solid kiri (solid) sekaligus solid kanan akan dijelaskan pada definisi berikut:

Definisi 3.3

Suatu aljabar BCC lemah X yang memenuhi solid kiri dan solid kanan disebut supersolid.

Berdasarkan definisi aljabar BCC lemah solid kiri (solid), solid kanan, dan supersolid, agar lebih mudah dipahami, definisi-definisi tersebut akan diilustrasikan dengan contoh berikut:

Contoh 3.1

Diberikan suatu aljabar BCC lemah $(X, *, 0)$ dengan $X = \{0, 1, 2, 3\}$ dan operasi $*$ didefinisikan sebagai berikut.

Tabel 3.1 Tabel X Terhadap Operasi $*$

$*$	0	1	2	3
0	0	0	3	2
1	1	0	3	2
2	2	2	0	3
3	3	3	2	0

Tunjukkan aljabar BCC lemah X solid kiri, solid kanan, atau supersolid.

1) Akan ditunjukkan atom-atom dari X

Definisi 2.9 menyebutkan suatu elemen $a \in X$ disebut atom jika $x \leq a$ maka $x = 0$ atau $x = a$. Selanjutnya, berdasarkan persamaan (2.1), maka yang disebut atom yaitu jika $x * a = 0$ maka $x = 0$ atau $x = a$ terpenuhi. Maka,

untuk $x = 0$ dan $a = 0$

$0 * 0 = 0$ maka $0 = 0 \ \vee \ 0 = 0$

untuk $x = 0$ dan $a = 1$

$0 * 1 = 0$ maka $0 = 0 \ \vee \ 0 \neq 1$

untuk $x = 1$ dan $a = 1$

$1 * 1 = 0$ maka $1 \neq 0 \ \vee \ 1 = 1$

untuk $x = 2$ dan $a = 2$

$2 * 2 = 0$ maka $2 \neq 0 \ \vee \ 2 = 2$

untuk $x = 3$ dan $a = 3$

$3 * 3 = 0$ maka $3 \neq 0 \ \vee \ 3 = 3$

Sehingga, $A(X) = \{0, 1, 2, 3\}$.

2) Akan ditunjukkan cabang dari X

Jika sudah diketahui atom-atom dari aljabar BCC lemah solid, maka yang disebut cabang dari aljabar tersebut dinotasikan dengan $B(a) = \{x \in X | a \leq x\}$ dengan a adalah atom. Sehingga berdasarkan persamaan (2.1), elemen dari $B(a)$ dapat diterjemahkan menjadi $x \in X$ sedemikian sehingga $a * x = 0$. Maka,

untuk $a = 0$

$B(0) = \{x \in X | 0 * x = 0\}$ sehingga $B(0) = \{0, 1\}$

untuk $a = 1$

$B(1) = \{x \in X | 1 * x = 0\}$ sehingga $B(1) = \{1\}$

untuk $a = 2$

$B(2) = \{x \in X | 2 * x = 0\}$ sehingga $B(2) = \{2\}$

untuk $a = 3$

$B(3) = \{x \in X | 3 * x = 0\}$ sehingga $B(3) = \{3\}$

Jadi, diperoleh cabang dari X yaitu $B(0) = \{0, 1\}$, $B(1) = \{1\}$, $B(2) = \{2\}$, dan $B(3) = \{3\}$.

Selanjutnya akan ditentukan cabang *improper* dan cabang *proper* atau sejati dari X. Adapun cabang *improper* $B(a)$ adalah $B(a) \subset B(b)$ untuk $b \neq a$. Sehingga, karena $B(1) \subset B(0)$ maka $B(1)$ adalah cabang *improper*. Sedangkan cabang *proper* $B(a)$ adalah untuk $b \in X$ sedemikian sehingga $b \neq a$ dan $b \leq a$ tidak terpenuhi. Maka,

untuk $B(0) = \{0, 1\}$

$b = 0$ sedemikian sehingga $0 = 0 \ \wedge \ 0 * 0 = 0$

$b = 1$ sedemikian sehingga $1 \neq 0 \ \wedge \ 1 * 0 \neq 0$

$b = 2$ sedemikian sehingga $2 \neq 0 \ \wedge \ 2 * 0 \neq 0$

$b = 3$ sedemikian sehingga $3 \neq 0 \ \wedge \ 3 * 0 \neq 0$

Dengan demikian $b \in X$ sedemikian sehingga tidak ada $b \neq a$ dan $b \leq a$

Untuk $B(1) = \{1\}$

$b = 0$ sedemikian sehingga $0 \neq 1 \ \wedge \ 0 * 1 = 0$

$b = 1$ sedemikian sehingga $1 = 1 \ \wedge \ 1 * 1 = 0$

$b = 2$ sedemikian sehingga $2 \neq 1 \ \wedge \ 2 * 1 \neq 0$

$b = 3$ sedemikian sehingga $3 \neq 1 \ \wedge \ 3 * 1 \neq 0$

Dengan demikian $b \in X$ sedemikian sehingga ada $b \neq a$ dan $b \leq a$.

Untuk $B(2) = \{2\}$

$b = 0$ sedemikian sehingga $0 \neq 2 \ \wedge \ 0 * 2 \neq 0$

$b = 1$ sedemikian sehingga $1 \neq 2 \ \wedge \ 1 * 2 \neq 0$

$b = 2$ sedemikian sehingga $2 = 2 \ \wedge \ 2 * 2 = 0$

$b = 3$ sedemikian sehingga $3 \neq 2 \ \wedge \ 3 * 2 \neq 0$

Dengan demikian $b \in X$ sedemikian sehingga tidak ada $b \neq a$ dan $b \leq a$.

Untuk $B(3) = \{3\}$

$b = 0$ sedemikian sehingga $0 \neq 3 \ \wedge \ 0 * 3 \neq 0$

$b = 1$ sedemikian sehingga $1 \neq 3 \ \wedge \ 1 * 3 \neq 0$

$b = 2$ sedemikian sehingga $2 \neq 3 \ \wedge \ 2 * 3 \neq 0$

$b = 3$ sedemikian sehingga $3 = 3 \ \wedge \ 3 * 3 = 0$

Dengan demikian $b \in X$ sedemikian sehingga tidak ada $b \neq a$ dan $b \leq a$.

Sehingga, cabang $B(0)$, $B(2)$, dan $B(3)$ adalah cabang *proper* atau sejati.

3) Akan ditunjukkan elemen minimal dari X

Karena cabang $B(0)$, $B(2)$, dan $B(3)$ adalah cabang *proper* atau sejati maka $I(X) = \{0, 2, 3\}$.

4) Akan ditunjukkan elemen X pada cabang yang sama

Berdasarkan Proposisi 2.4, dua elemen x, y adalah pada cabang yang sama jika dan hanya jika $x * y \in B(0)$, dan Proposisi 2.3, $x * y \in B(0)$ jika dan hanya jika $y * x \in B(0)$, dari Tabel 3.1 diperoleh:

$0 * 0 = 0 \in B(0) \ \Leftrightarrow \ 0 * 0 = 0 \in B(0)$

$0 * 1 = 0 \in B(0) \ \Leftrightarrow \ 1 * 0 = 1 \in B(0)$

$2 * 2 = 0 \in B(0) \ \Leftrightarrow \ 2 * 2 = 0 \in B(0)$

$3 * 3 = 0 \in B(0) \iff 3 * 3 = 0 \in B(0)$

Sehingga, elemen X dalam cabang yang sama adalah 0 dan 1.

5) Akan ditunjukkan aljabar BCC lemah X adalah solid kiri

Aljabar BCC lemah X disebut solid kiri (solid) jika memenuhi $(x * y) * z = (x * z) * y$ untuk semua x, y elemen suatu cabang di X dan sebarang $z \in X$. Maka, untuk 0 dan 1 elemen suatu cabang di X dan sebarang elemen di X:

$(0 * 1) * 2 = 0 * 2 = 3$ $\quad$ $(0 * 2) * 1 = 3 * 1 = 3$

$(0 * 1) * 3 = 0 * 3 = 2$ $\quad$ $(0 * 3) * 1 = 2 * 1 = 2$

$(1 * 0) * 2 = 1 * 2 = 3$ $\quad$ $(1 * 2) * 0 = 3 * 0 = 3$

$(1 * 0) * 3 = 1 * 3 = 2$ $\quad$ $(1 * 3) * 0 = 2 * 0 = 2$

Jadi terbukti bahwa untuk semua x, y elemen suatu cabang di X dan sebarang $z \in X$ berlaku $(x * y) * z = (x * z) * y$.

Sehingga, aljabar BCC lemah X adalah solid kiri.

6) Akan ditunjukkan aljabar BCC lemah X adalah solid kanan

Aljabar BCC lemah X disebut solid kanan jika memenuhi $(x * y) * z = (x * z) * y$ untuk semua y, z elemen suatu cabang di X dan sebarang $x \in X$. Maka, untuk 0 dan 1 elemen suatu cabang di X dan sebarang elemen di X:

$(2 * 0) * 1 = 2 * 1 = 2$ $\quad$ $(2 * 1) * 0 = 2 * 0 = 2$

$(3 * 0) * 1 = 3 * 1 = 3$ $\quad$ $(3 * 1) * 0 = 3 * 0 = 3$

$(2 * 1) * 0 = 2 * 0 = 2$ $\quad$ $(2 * 0) * 1 = 2 * 1 = 2$

$(3 * 1) * 0 = 3 * 0 = 3$ $\quad$ $(3 * 0) * 1 = 3 * 1 = 3$

Jadi, terbukti bahwa untuk semua x, y elemen suatu cabang di X dan sebarang $z \in X$ berlaku $(x * y) * z = (x * z) * y$. Sehingga, aljabar BCC lemah X adalah solid kanan. Dapat disimpulkan pula bahwa aljabar BCC lemah X adalah supersolid karena merupakan solid kiri dan solid kanan.

3.3 Sifat-sifat Aljabar BCC Lemah Solid

Sifat-sifat aljabar BCC lemah solid yang akan dibahas adalah berupa lemma, akibat, dan teorema dari hasil penelitian Dudek (2011) yang kemudian dibuktikan oleh penulis sebagai berikut:

Lemma 1

Pada suatu aljabar BCC lemah solid X, berlaku

$$p * (p * q) \leq q$$

untuk semua p, q elemen suatu cabang di X.

Bukti

Misalkan X adalah aljabar BCC lemah solid. Misal $p, q \in X$ dan p, q elemen suatu cabang di X, maka

$$(p * q) * (p * q) = 0 \quad \text{(BCCL-2 untuk } x = p * q\text{)},$$

$$\big(p * (p * q)\big) * q = 0 \quad (X \text{ solid}),$$

$$p * (p * q) \leq q \quad \text{(persamaan (2.1))}.$$

Dengan demikian, pada suatu aljabar BCC lemah solid X berlaku $p * (p * q) \leq q$, untuk semua p, q elemen suatu cabang di X.

Akibat 1

Pada suatu aljabar BCC lemah solid $p, q \in B(a)$ akibatnya $p * (p * q),\ q * (q * p) \in B(a)$.

Bukti

Misalkan X adalah aljabar BCC lemah solid. Misal $p, q \in X$ dan p, q elemen suatu cabang di X. Sehingga berdasarkan Proposisi 2.4 maka $p * q \in B(0)$ dan berdasarkan Proposisi 2.3 diperoleh $q * p \in B(0)$. Sehingga, $p * (p * q) \in B(a)$ dan $q * (q * p) \in B(a)$.

Akibat 2

Pada aljabar BCC lemah solid X, untuk semua $a \in I(X)$ dan $p \in B(a)$ diperoleh $p * (p * a) = a$.

Bukti

Misalkan X adalah aljabar BCC lemah solid. Misal $a \in I(X)$ dan $p \in B(a)$. Karena $a \in I(X)$, maka $a \in B(a)$. Sehingga, p dan a adalah elemen suatu cabang di X. Berdasarkan Lemma 1 maka berlaku $p * (p * a) \leq a, a \in B(a)$. Selanjutnya, berdasarkan Akibat 1 maka $p * (p * a) \in B(a)$. Sehingga, diperoleh a dan $p * (p * a)$ adalah elemen suatu cabang di X. Berdasarkan Proposisi 2.3 maka berlaku $a * \big(p * (p * a)\big) \in B(0)$ jika dan hanya jika $\big(p * (p * a)\big) * a \in B(0)$. Misal pilih $0 \in B(0)$, maka $a * \big(p * (p * a)\big) = 0$ jika dan hanya jika $\big(p * (p * a)\big) * a = 0$. Oleh karena $a * \big(p * (p * a)\big) = \big(p * (p * a)\big) * a = 0$, berdasarkan BCCL-4 maka $p * (p * a) = a$.

Lemma 2

Pada aljabar BCC lemah solid X, identitas berikut terpenuhi untuk anggota yang termasuk elemen suatu cabang di X

$$p * \big(p * (p * q)\big) = p * q.$$

Bukti

Misalkan X adalah aljabar BCC lemah solid. Misal $p, q \in X$ dan p, q elemen suatu cabang di X, maka

$p * (p * q) \leq q$ (Lemma 1),

$p * q \leq p * (p * (p * q))$ (persamaan (2.3) untuk $x = p * (p * q), y = q, z = p$),

$(p * q) * (p * (p * (p * q))) = 0$ (persamaan (2.1)).

Selanjutnya,

$(p * (p * q)) * (p * (p * q)) = 0$ (BCCL-2 untuk $x = p * (p * q)$),

$(p * (p * (p * q))) * (p * q) = 0$ (X solid),

sehingga diperoleh

$$(p * q) * (p * (p * (p * q))) = (p * (p * (p * q))) * (p * q) = 0.$$

Dengan demikian, berdasarkan BCCL-4 diperoleh

$$p * (p * (p * q)) = p * q.$$

Teorema 1

Untuk suatu aljabar BCC lemah solid X yang memenuhi kondisi-kondisi berikut adalah ekivalen:

(i) X adalah komutatif cabang demi cabang,

(ii) $p * q = p * (q * (q * p))$ untuk p, q elemen suatu cabang di X,

(iii) $p = q * (q * p)$ untuk $p \leq q$,

(iv) $p * (p * q) = q * (q * (p * (p * q)))$ untuk p, q elemen suatu cabang di X.

Bukti

(i) $\Longrightarrow$ *(ii)* Misalkan X adalah aljabar BCC lemah solid. Misal $p, q \in X$ dan p, q elemen suatu cabang di X, artinya $p, q \in B(a)$ untuk suatu $a \in I(X)$. Selanjutnya, berdasarkan Akibat 1, elemen $q * (q * p) \in B(a)$ dan $p * (p * q) \in B(a)$. Sehingga,

$\big(p * (p * q)\big) * \big(p * (p * q)\big) = 0$ (BCCL-2 untuk $x = p * (p * q)$),

$\big(p * (p * q)\big) * \big(q * (q * p)\big) = 0$ (definisi dari komutatif cabang demi cabang),

$\Big(p * \big(q * (q * p)\big)\Big) * (p * q) = 0$ (X solid).

Selanjutnya, berdasarkan definisi komutatif cabang demi cabang berlaku

$$p * \Big(p * \big(p * (p * q)\big)\Big) = \big(p * (p * q)\big) * \Big(\big(p * (p * q)\big) * p\Big) \quad (3.3)$$

dan juga

$(p * q) * \Big(p * \big(q * (q * p)\big)\Big)$

$= (p * q) * \Big(p * \big(p * (p * q)\big)\Big)$ (definisi komutatif cabang demi cabang),

$= \bigg(p * \Big(p * \big(p * (p * q)\big)\Big)\bigg) * q$ (X solid untuk $x = p, y = q$, $z = p * \big(p * (p * q)\big)$),

$= \Big\{\big(p * (p * q)\big) * \Big(\big(p * (p * q)\big) * p\Big)\Big\} * q$ (persamaan (3.3))

$= \big\{\big(p * (p * q)\big) * \big((p * p) * (p * q)\big)\big\} * q$ (X solid untuk $x = p, y = p * q, z = (p * p) * (p * q)$),

$= \big\{\big(p * (p * q)\big) * \big(0 * (p * q)\big)\big\} * q$ (BCCL-2),

$= \big\{\big(p * (p * q)\big) * 0\big\} * q$ (BCC-4),

$= (p * (p * q)) * q$ (BCCL-3),

$= (p * q) * (p * q)$ (X solid),

$= 0$ (BCCL-2).

Sehingga diperoleh

$$(p * (q * (q * p))) * (p * q) = (p * q) * (p * (q * (q * p))) = 0.$$

Dengan demikian, berdasarkan BCCL-4 diperoleh

$$p * q = p * (q * (q * p)).$$

(ii) $\Longrightarrow$ *(iii)* Misalkan X adalah aljabar BCC lemah solid. Misal $p, q \in X$, maka

$p * q = p * (q * (q * p))$ (persamaan *(ii)*),

$p * (q * (q * p)) = 0$ (diketahui $p \leq q$).

Selanjutnya, misal $p, q \in X$ dan p, q elemen suatu cabang di X, artinya $p, q \in B(a)$ untuk suatu $a \in I(X)$, maka

$(q * p) * (q * p) = 0$ (BCCL-2 untuk $x = q * p$),

$(q * (q * p)) * p = 0$ (X solid untuk $x = q$, $y = q * p$, $z = p$),

$p * (q * (q * p)) = (q * (q * p)) * p$ (karena $p * (q * (q * p)) = 0$),

$p = q * (q * p)$ (BCCL-4).

(iii) $\Longrightarrow$ *(iv)* Misalkan X adalah aljabar BCC lemah solid. Misal $p, q \in B(a)$ untuk suatu $a \in I(X)$, maka

$(p * q) * (p * q) = 0$ (BCCL-2 untuk $x = p * q$),

$(p * (p * q)) * q = 0$ (X solid untuk $x = p$, $y = q$, $z = p * q$),

$p * (p * q) \leq q$ (persamaan (2.1)),

$$p * (p * q) = q * \left(q * \left(p * (p * q)\right)\right) \quad \text{(persamaan } (iii)\text{).}$$

(iv) $\Longrightarrow$ *(i)* Misalkan X adalah aljabar BCC lemah solid. Misal $p, q \in B(a)$ dan suatu $a \in I(X)$ dan misal persamaan *(iv)* terpenuhi, maka

$$\left(p * (p * q)\right) * \left(p * (p * q)\right) = 0 \quad \text{(BCCL-2),}$$

$$\left(p * (p * q)\right) * \left(q * (q * p)\right) = 0 \quad \text{(definisi komutatif cabang demi cabang),}$$

$$\left(q * \left(q * \left(p * (p * q)\right)\right)\right) * \left(q * (q * p)\right) = 0 \quad \text{(persamaan } (iv)\text{),}$$

$$\left(q * \left(q * (q * p)\right)\right) * \left(q * \left(p * (p * q)\right)\right) = 0 \quad (X \text{ solid).}$$

Selanjutnya, misal $q * (q * p) \in B(a)$, maka

$$\left(q * (q * p)\right) * \left(q * (q * p)\right) = 0 \quad \text{(BCCL-2),}$$

$$\left(q * \left(q * (q * p)\right)\right) * (q * p) = 0 \quad (X \text{ solid),}$$

$$q * \left(q * (q * p)\right) \leq q * p \quad \text{(persamaan (2.1)).}$$

Berdasarkan persamaan (2.2), $x \leq y \Rightarrow x * z \leq y * z$, dengan menganggap $x = \left(q * \left(q * (q * p)\right)\right)$, $y = (q * p)$, dan dioperasikan dengan $z = \left(q * \left(p * (p * q)\right)\right)$, maka

$$\left(q * \left(q * (q * p)\right)\right) * \left(q * \left(p * (p * q)\right)\right) \leq (q * p) * \left(q * \left(p * (p * q)\right)\right).$$

Sehingga diperoleh

$$\left(p * (p * q)\right) * \left(q * (q * p)\right) \leq (q * p) * \left(q * \left(p * (p * q)\right)\right).$$

Karena p dan q elemen suatu cabang di X dan X solid, maka

$$(q * p) * \left(q * \left(p * (p * q)\right)\right) = \left(q * \left(q * \left(p * (p * q)\right)\right)\right) * p.$$

Berdasarkan persamaan *(iv)* diperoleh

$$\left(q * \left(q * \left(p * (p * q)\right)\right)\right) * p = \left(p * (p * q)\right) * p.$$

Karena X solid diperoleh

$$\left(p * (p * q)\right) * p = (p * p) * (p * q).$$

Berdasarkan BCCL-2 diperoleh

$$(p * p) * (p * q) = 0 * (p * q).$$

Berdasarkan BCC-3 diperoleh

$$0 * (p * q) = 0.$$

Sehingga diperoleh

$$\left(p * (p * q)\right) * \left(q * (q * p)\right) \leq 0.$$

Berdasarkan persamaan (2.1) diperoleh

$$\left(\left(p * (p * q)\right) * \left(q * (q * p)\right)\right) * 0 = 0.$$

Berdasarkan BCCL-3 diperoleh

$$\left(p * (p * q)\right) * \left(q * (q * p)\right) = 0.$$

Dengan demikian, terbukti bahwa aljabar BCC lemah solid yang memenuhi persamaan *(iv)* adalah komutatif cabang demi cabang.

Teorema 2

Suatu aljabar BCC lemah solid X adalah komutatif cabang demi cabang jika dan hanya jika,

(i) setiap cabang dari X adalah semilatis dengan operasi $\wedge$ didefinisikan dengan $p \wedge q = q * (q * p)$, atau ekivalen dengan,

(ii) $A(p) \cap A(q) = A(p \wedge q)$ untuk setiap p, q terdapat pada cabang yang sama.

Bukti

($\Longrightarrow$) *(i)* Misal X adalah komutatif cabang demi cabang suatu aljabar BCC lemah solid. Misal $p, q \in B(a), a \in I(X)$ artinya p, q adalah elemen suatu cabang di X, maka

$p \wedge q = q * (q * p)$ (definisi $p \wedge q$),

$p \wedge q = p * (p * q)$ (definisi komutatif cabang demi cabang),

$p \wedge q = q \wedge p$ (definisi $p \wedge q$),

$p \wedge q = q \wedge p = p * (p * q) \leq q$ (Lemma 1).

Karena $p \wedge q = q \wedge p$ berarti memenuhi persamaan (2.4), namun sebelum dikatakan $B(a)$ adalah semilatis dengan operasi $\wedge$, harus ditunjukkan batas bawah terlebih dahulu. Maka, untuk sebarang $k \leq l$,

$k = k * 0$ (BCCL-3),

$k = k * (k * l)$ (karena $k \leq l$),

$k = l \wedge k$ (definisi $p \wedge q$),

$k = k \wedge l$ (X adalah komutatif cabang demi cabang).

Sehingga diperoleh $k \leq l \Longrightarrow k = k \wedge l$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $k \wedge l$ adalah batas bawah terbesar untuk sebarang $k, l \in B(a)$.

Untuk sebarang $p \in B(a)$ dan

$r * (k \wedge l) = r * \big(l * (l * k)\big)$ (definisi $p \wedge q$),

$= (r \wedge l) * \big(l * (l * k)\big)$ (karena $k = k \wedge l$),

$= \left(l * (l * r)\right) * \left(l * (l * k)\right)$ (definisi $p \wedge q$),

$= \left(l * \left(l * (l * k)\right)\right) * (l * r)$ (X solid),

$= (l * k) * (l * r)$ (Lemma 2),

$= 0$ (karena $l * k \leq l * r$ untuk $r \leq k$),

$r \leq k \wedge l$ (persamaan (2.1)).

Karena $r \leq k \wedge l$ maka $k \wedge l$ adalah batas bawah terbesar dari k dan l. Sehingga, $k \wedge l \in B(a)$.

Dengan demikian, $B(a)$ adalah semilatis dengan operasi $\wedge$.

(ii) Jika *(i)* terpenuhi dan $r \in A(p) \cap A(q)$ untuk suatu $p, q \in B(a)$, $a \in I(X)$. Selanjutnya misal $r \leq p$ dan $r \leq q$. Sehingga $r \leq p \wedge q$ dan $r \in B(a)$, karena $p \wedge q \in B(a)$ adalah batas bawah terbesar dari p dan q. Maka $r \in A(p \wedge q)$ dan akibatnya $A(p) \cap A(q) \subseteq A(p \wedge q)$.

Di sisi lain, untuk sebarang $r \in A(p \wedge q)$ maka

$r \leq p \wedge q$ (karena $r \in A(p \wedge q)$ dan $(p \wedge q)$ adalah batas bawah terbesar p dan q),

$r \leq q * (q * p)$ (definisi $p \wedge q$),

$r \leq q * (q * p) \leq p$ (Lemma 1).

Sehingga diperoleh $r \leq p$ akibatnya $r \in A(p)$.

Selanjutnya,

$(p \wedge q) * q = \left(q * (q * p)\right) * q$ (definisi $p \wedge q$),

$(p \wedge q) * q = (q * q) * (q * p)$ (X solid),

$(p \wedge q) * q = 0 * (q * p)$ (BCCL-2),

$(p \wedge q) * q = 0$ (BCC-3),

$$(p \wedge q) \leq q \qquad \text{(persamaan (2.1)).}$$

Oleh karena $r \leq p \wedge q$ dan $p \wedge q \leq q$ maka $r \leq q$ akibatnya $r \in A(q)$.

Karena $r \in A(p)$ dan $r \in A(q)$ akibatnya $r \in A(p) \cap A(q)$. Jadi, $A(p \wedge q) \subseteq A(p) \cap A(q)$.

Dengan demikian, karena $A(p) \cap A(q) \subseteq A(p \wedge q)$ dan $A(p \wedge q) \subseteq A(p) \cap A(q)$ maka $A(p) \cap A(q) = A(p \wedge q)$ untuk semua p, q elemen suatu cabang di X.

($\Longleftarrow$) Jika *(ii)* terpenuhi, maka

$$A(p \wedge q) = A(p) \cap A(q) \qquad \text{(karena persamaan } (ii) \text{ terpenuhi),}$$

$$A(p \wedge q) = A(q) \cap A(p) \qquad \text{(karena pada himpunan berlaku } A \cap B = B \cap A\text{),}$$

$$A(p \wedge q) = A(q \wedge p) \qquad \text{(persamaan } (ii)\text{).}$$

Sehingga, $p \wedge q \in A(q \wedge p)$ dan $q \wedge p \in A(p \wedge q)$. Oleh karena itu,

$$q \wedge p \leq p \wedge q \text{ dan } p \wedge q \leq q \wedge p.$$

Berdasarkan persamaan (2.1) maka

$$(q \wedge p) * (p \wedge q) = 0 \text{ dan } (p \wedge q) * (q \wedge p) = 0.$$

Sehingga berdasarkan BCCL-4 diperoleh

$$(p \wedge q) = (q \wedge p).$$

Dengan demikian, X adalah komutatif cabang demi cabang.

Teorema 3

Suatu aljabar BCC lemah implikatif cabang demi cabang solid adalah komutatif cabang demi cabang.

Bukti

Misalkan X adalah aljabar BCC lemah implikatif cabang demi cabang. Misal $p, q \in B(a)$ untuk suatu $a \in I(X)$. Berdasarkan Akibat 1 berlaku $p * (p * q) \in B(a)$. Sehingga, berdasarkan definisi implikatif cabang demi cabang berlaku

$$p * (p * q) = \big(p * (p * q)\big) * \Big(q * \big(p * (p * q)\big)\Big). \tag{3.4}$$

Selanjutnya, misal $p, q \in B(a)$ untuk suatu $a \in I(X)$. Berdasarkan Lemma 1 berlaku $p * (p * q) \leq q$, maka berdasarkan persamaan (2.2) berlaku

$$\big(p * (p * q)\big) * \Big(q * \big(p * (p * q)\big)\Big) \leq q * \Big(q * \big(p * (p * q)\big)\Big). \tag{3.5}$$

Sehingga, dari persamaan (3.4) dan (3.5) diperoleh

$$p * (p * q) \leq q * \Big(q * \big(p * (p * q)\big)\Big)$$

dan karena persamaan (2.1) diperoleh

$$\big(p * (p * q)\big) * \Bigg(q * \Big(q * \big(p * (p * q)\big)\Big)\Bigg) = 0. \tag{3.6}$$

Di sisi lain, berdasarkan Lemma 1 berlaku

$$q * \Big(q * \big(p * (p * q)\big)\Big) \leq p * (p * q)$$

dan karena persamaan (2.1) diperoleh

$$\Bigg(q * \Big(q * \big(p * (p * q)\big)\Big)\Bigg) * \big(p * (p * q)\big) = 0. \tag{3.7}$$

Sehingga, berdasarkan BCCL-4, dari persamaan (3.6) dan (3.7) diperoleh

$$q * \Big(q * \big(p * (p * q)\big)\Big) = p * (p * q).$$

Dengan demikian, suatu aljabar BCC lemah implikatif cabang demi cabang solid adalah komutatif cabang demi cabang.

Teorema 4

Suatu aljabar BCC lemah implikatif cabang demi cabang solid adalah implikatif positif cabang demi cabang jika dan hanya jika aljabar tersebut adalah aljabar BCK komutatif.

Bukti

Misalkan X adalah aljabar BCC lemah implikatif positif cabang demi cabang solid. Berdasarkan Teorema 3, suatu aljabar BCC lemah implikatif cabang demi cabang solid adalah komutatif cabang demi cabang. Misal p, q elemen suatu cabang di X, maka

$$p * q = (p * q) * q \qquad \text{(definisi implikatif positif cabang demi cabang)},$$

$$q * q = (q * q) * q \qquad \text{(misal } p = q\text{)},$$

$$0 = 0 * q \qquad \text{(BCCL-2)}.$$

Karena X memenuhi $0 * q = 0$ maka X adalah aljabar BCK, dan karena X memenuhi komutatif cabang demi cabang maka X adalah aljabar BCK komutatif.

Sebaliknya, jika aljabar BCK komutatif adalah implikatif, maka

$$0 * q = 0 \qquad \text{(BCK-4)},$$

$$\big((p * q) * (p * q)\big) * q = 0 \qquad \text{(BCK-3)},$$

$$\big((p * q) * q\big) * (p * q) = 0 \qquad (X \text{ solid}),$$

dan

$$q * q = 0 \qquad \text{(BCK-3)},$$

$q * \big(q * (p * q)\big) = 0$ (definisi implikatif cabang demi cabang),

$(p * q) * \big((p * q) * q\big) = 0$ (definisi komutatif cabang demi cabang).

Sehingga diperoleh

$$\big((p * q) * q\big) * (p * q) = (p * q) * \big((p * q) * q\big) = 0.$$

Dengan demikian, berdasarkan BCK-5 atau BCCL-4 diperoleh

$$\big((p * q) * q\big) = (p * q).$$

Jadi, X adalah implikatif positif dan dapat disimpulkan bahwa suatu aljabar BCC lemah implikatif cabang demi cabang solid adalah implikatif positif cabang demi cabang jika dan hanya jika aljabar tersebut adalah aljabar BCK komutatif.

Teorema 5

Suatu aljabar BCK adalah implikatif jika dan hanya jika aljabar BCK tersebut komutatif dan implikatif positif.

Bukti

Misalkan X adalah aljabar BCK implikatif. Berdasarkan Teorema 3, suatu aljabar BCC lemah implikatif cabang demi cabang solid adalah komutatif cabang demi cabang. Selanjutnya, misal $p, q \in X$, maka

$(p * q) * \big(q * (p * q)\big) = p * q$ (X adalah aljabar BCK implikatif),

$(p * q) * q = p * q$ (definisi implikatif cabang demi cabang).

Sehingga, X adalah positif implikatif.

Sebaliknya, misal X adalah sebarang aljabar BCK komutatif dan implikatif positif, maka

$(q * p) * (q * p) = 0$ (BCK-3),

$(q * p) * ((q * p) * p) = 0$ (definisi positif implikatif cabang demi cabang),

$p * (p * (q * p)) = 0$ (definisi komutatif cabang demi cabang),

dan

$0 * (q * p) = 0$ (BCK-4),

$(p * p) * (q * p) = 0$ (BCK-3),

$(p * (q * p)) * p = 0$ (X solid).

Sehingga diperoleh

$$p * (p * (q * p)) = (p * (q * p)) * p = 0.$$

Dengan demikian, berdasarkan BCK-5 atau BCCL-2 diperoleh

$$(p * (q * p)) = p.$$

Jadi, X adalah implikatif dan dapat disimpulkan bahwa suatu aljabar BCK adalah implikatif jika dan hanya jika aljabar BCK tersebut komutatif dan implikatif positif.

3.4 Kewajiban Menuntut Ilmu

Kewajiban menuntut ilmu bukan merupakan suatu perintah tersirat dalam al-Quran maupun hadits. Allah dan nabi Muhammad sudah secara jelas mengingatkan bagi setiap orang Islam mengenai keutamaan menuntut ilmu. Keutamaan menuntut ilmu diselaraskan dengan janji Allah meninggikan derajat orang-orang yang berilmu seperti halnya firman Allah dalam al-Quran surat al-Mujadilah ayat 11 berikut:

يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوٓاْ إِذَا قِيلَ لَكُمۡ تَفَسَّحُواْ فِي ٱلۡمَجَٰلِسِ فَٱفۡسَحُواْ يَفۡسَحِ ٱللَّهُ لَكُمۡۖ وَإِذَا قِيلَ ٱنشُزُواْ فَٱنشُزُواْ يَرۡفَعِ ٱللَّهُ ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ مِنكُمۡ وَٱلَّذِينَ أُوتُواْ ٱلۡعِلۡمَ دَرَجَٰتٖۚ وَٱللَّهُ بِمَا تَعۡمَلُونَ خَبِيرٞ "

"Wahai orang-orang beriman! Apabila dikatakan kepadamu, "Berilah kelapangan di dalam majelis-majelis," maka lapangkanlah, niscaya Allah akan memberi kelapangan untukmu. Dan apabila dikatakan, "Berdirilah kamu," maka berdirilah, niscaya Allah akan mengangkat (derajat) orang-orang yang beriman diantaramu dan orang-orang yang diberi ilmu beberapa derajat. Dan Allah Mahateliti apa yang kamu kerjakan" (QS. al-Mujadilah/58:11).

Sumber hukum kedua, hadits nabi Muhammad Saw, juga menyatakan dari Abu Darda' ra., dia berkata telah mendengar Rasulullah Saw. bersabda:

مَنْ سَلَكَ طَرِيْقًا يَطْلُبُ فِيْهِ عِلْمًا سَهَّلَ اللهُ بِهِ طَرِيْقًا مِنْ طُرُقِ الْجَنَّةِ و إِنَّ الْمَلَائِكَةِ لَتَضَعُ أَجْنِحَتَهَا لِطَالِبِ الْعِلْمِ رِضَابِمَا صَنَعَ وَ إِنَّالْعَالِمَ لَيَسْتَغْفِرُ لَهُ مَنْ فِي السَّمَاوَاتِ وَ مَنْ فِي الْأَرْضِ حَتَّى الْحِيْتَانُ فِي جَوْفِ الْمَاءِ وَ إِنَّ فَضْلَ الْعَالِمِ عَلَى الْعَابِدِ كَفَضْلِ الْقَمَرِ لَيْلَةَ الْبَدْرِ عَلَى سَايِرِ الْكَوَاكِبِ وَ إِنَّ الْعُلَمَاءَ وَرَثَةُ الْأَنْبِيَاءِ وَ إِنَّ الْأَنْبِيَاءَ لَمْ يُوَرِّثُوْا دِيْنَارًا وَ لَا دِرْهَمًا إِنَّمَا وَرَّثُوْا الْعِلْمَ فَمَنْ أَخَذَهُ أَخَذَ بِحَظٍّ وَافِرٍ

"Barangsiapa yang menempuh jalan untuk menuntut ilmu maka Allah memudahkan baginya jalan ke surga. Dan sesungguhnya malaikat membentangkan sayapnya untuk orang yang menuntut ilmu karena puas dengan apa yang diperbuatnya, dan bahwasanya penghuni langit dan bumi sampai ikan yang ada di lautan itu senantiasa meminta ampun kepada orang yang pandai. Kelebihan si 'alim terhadap si 'abid adalah bagaikan kelebihan bulan purnama terhadap bintang-bintang yang lain. Sesungguhnya ulama itu itu adalah pewaris para nabi dan bahwasanya para nabi itu tidak mewariskan dinar dan dirham (kekayaan duniawi) tetapi para nabi mewariskan ilmu pengetahuan, maka barangsiapa mengambil (menuntut) ilmu maka ia telah mengambil bagian yang sempurna" (HR. Abu Daut).

Hadits tersebut menjelaskan betapa mulianya orang-orang yang menuntut ilmu hingga dimudahkan jalannya menuju surga. Bukan hanya itu, malaikat-malaikat Allah juga tak segan membentangkan sayapnya bagi para pencari ilmu. Penghuni langit dan bumi pun memintakan ampun baginya. Orang-orang yang berilmu sesungguhnya telah mewarisi para nabi terdahulu karena hanya ilmu yang diwariskan pada ummatnya bukan emas ataupun kekayaan harta. Oleh karena itu, seyogyanya tidak ada kata malas bagi umat nabi Muhammad dalam menuntut ilmu.

Keutamaan menuntut ilmu tentunya bukan terbatas pada ilmu yang berkaitan dengan agama saja. Pada hakikatnya semua ilmu pengetahuan yang ada adalah datangnya dari Allah Swt. Seperti pada bab sebelumnya telah dibahas seruan Allah untuk memikirkan proses terjadinya alam semesta yang pada bidang ilmu pengetahuan itu berkaitan dengan ilmu astronomi, biologi, dan lain sebagainya. Karena pada hakikatnya ilmu pengetahuan semacam itu adalah untuk orang-orang yang mau berpikir. Allah Swt. berfirman dalam surat az-Zumar ayat 9 sebagai berikut:

أَمَّنْ هُوَ قَٰنِتٌ ءَانَآءَ ٱلَّيْلِ سَاجِدًا وَقَآئِمًا يَحْذَرُ ٱلْءَاخِرَةَ وَيَرْجُوا۟ رَحْمَةَ رَبِّهِۦ ۗ قُلْ هَلْ يَسْتَوِى ٱلَّذِينَ يَعْلَمُونَ وَٱلَّذِينَ لَا يَعْلَمُونَ ۗ إِنَّمَا يَتَذَكَّرُ أُو۟لُوا۟ ٱلْأَلْبَٰبِ ٩

"(Apakah kamu orang musyrik yang lebih beruntung) ataukah orang yang beribadah pada waktu malam dengan sujud dan berdiri, karena takut kepada (azab) akhirat dan mengharapkan rahmat Tuhannya? Katakanlah, "apakah sama orang-orang yang mengetahui dengan orang-orang yang tidak mengetahui?" Sebenarnya hanya orang yang berakal sehat yang dapat menerima pelajaran" (QS. az-Zumar/39:9).

Ilmu-ilmu yang lain juga berhak untuk dipelajari, di antaranya yaitu ilmu sosial, ilmu kebudayaan, ilmu psikologi, ilmu kesehatan, termasuk ilmu matematika yang merupakan pokok dari ilmu-ilmu lainnya. Matematika memerlukan penalaran yang baik untuk dapat mempelajarinya karena menurut Davies (2002), matematika adalah bahasa alam. Sehingga, siapapun yang tertutup dari matematika tidak pernah dapat menangkap signifikansi sempurna tatanan alam menjadi struktur realitas fisik. Oleh karena itu, dengan kelebihan akal yang diberikan Allah kepada manusia, tidak lain adalah untuk bernalar dalam rangka memperoleh suatu pengetahuan atau ilmu baik matematika maupun yang lainnya.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan rumusan masalah dan pembahasan pada bab sebelumnya, maka diperoleh sifat-sifat dari aljabar BCC lemah solid sebagai berikut:

a. Pada suatu aljabar BCC lemah solid X, untuk semua $p, q \in B(a)$ dan $a \in I(X)$, berlaku $p * (p * q) \leq q$, $p * (p * q) \in B(a)$, $q * (q * p) \in B(a)$, $p * (p * a) = a$, dan $p * \left(p * (p * q)\right) = p * q$.

b. Pada suatu aljabar BCC lemah solid X, pernyataan-pernyataan berikut ekivalen:

   1) X adalah komutatif cabang demi cabang,

   2) $p * q = p * \left(q * (q * p)\right)$ untuk p, q elemen suatu cabang di X,

   3) $p = q * (q * p)$ untuk $p \leq q$,

   4) $p * (p * q) = q * \left(q * \left(p * (p * q)\right)\right)$ untuk p, q elemen suatu cabang di X.

c. Suatu aljabar BCC lemah solid X adalah komutatif cabang demi cabang jika dan hanya jika setiap cabang dari X adalah semi latis dengan operasi $\wedge$ (didefinisikan $p \wedge q = q * (q * p)$) atau ekivalen dengan $A(p) \cap A(q) = A(p \wedge q)$ untuk setiap p, q elemen suatu cabang di X.

d. Suatu aljabar BCC lemah implikatif cabang demi cabang solid adalah komutatif cabang demi cabang.

e. Suatu aljabar BCC lemah implikatif cabang demi cabang solid adalah implikatif positif cabang demi cabang jika dan hanya jika aljabar tersebut adalah aljabar BCK komutatif.

f. Suatu aljabar BCK adalah implikatif jika dan hanya jika aljabar BCK tersebut komutatif dan implikatif positif.

4.2 Saran

Penelitian ini dapat dijadikan referensi bagi penelitian selanjutnya tentang aljabar BCC, aljabar BCC lemah, aljabar BCC lemah solid, maupun cabang dari aljabar BCC lemah. Peneliti selanjutnya dapat mengkaji lebih luas akan sifat-sifatnya terutama kaitannya dengan semilatis.

DAFTAR RUJUKAN

Abdussakir. 2009. *Matematika I Kajian Integratif Matematika dan Al-Quran*. Malang: UIN-Malang Press.

Borzooei, R.A, Ameri, R., Hamidi, M. 2013. Fundamental BCC-Algebras. *Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series*, 4 (2): 268-281.

Davies, P. 2002. *The Main of God; The Scientific Basis for a Rational World*. Yogyakarta: Pustaka Pelajar.

Dudek, W.A. 2000. Algebras Inspired by Logics. *Matematychni Studii*, 14 (1): 3-18.

Dudek, W.A., Karamdin, B., dan Bhatti, S.A. 2011. Branches and Ideals of Weak BCC-Algebras. *Algebra Colloquium*, 1 (18): 899-914.

Dudek, W.A. 2011. Solid Weak BCC-Algebras. *International Journal of Computer Mathematics*, 88 (14): 2915-2925.

Gilbert, L dan Gilbert, J. 2009. *Elements of Modern Algebra Seventh Edition*. South California: Cengage Learning.

Hong, S.M., Jun, Y.B., dan Ozturk, M.A. 2003. Generalizations of BCK-Algebras. *Scientiae Mathematicae Japonicae Online*, 8 (-): 549–557.

Purwanto, A. 2015. *Nalar Ayat-Ayat Semesta; Menjadikan Al-Quran sebagai Basis Konstruksi Ilmu Pengetahuan*. Bandung: Penerbit Mizan.

Raisinghania, M.D dan Aggarwal, R.S. 1980. *Modern Algebra for N.A. & M.Sc. Students of All Indian Universities*. New Delhi: S. Chand & Company Ltd.

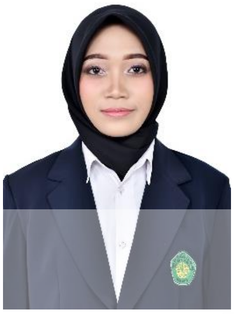
Salam, B. 1997. *Logika Materiil Filsafat Ilmu Pengetahuan*. Jakarta: Rineka Cipta.

Soekadijo, R.G. 2001. *Logika Dasar Tradisional, Simbolik, dan Induktif*. Jakarta: Penerbit PT Gramedia Pustaka Utama.

Thomys, J, dan Zhang, X. 2013. On Weak-BCC-Algebras. *The Scientific World Journal*, 2013 (-): 1-10.

Zhan, J dan Jun, Y.B. 2009. Generalized Fuzzy Ideals of BCI-Algebras. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 32 (2):119-130.

RIWAYAT HIDUP



Setia Alam, lahir pada 21 April 1995 di Lamongan. Ia tinggal di Jalan Sidomulyo Nomor 04 RT/RW II/VI Kebalandono Kecamatan Babat Kabupaten Lamongan. Anak ke-3 dari bapak M. Jahid dan ibu Tutik Ruqoyah, adik dari Sahirul Ilmi dan Zahrotul Ula, serta merupakan kakak dari Garibaldi Najikhul Akbar.

Riwayat pendidikannya meliputi MI Muhammadiyah 01 Kebalandono pada tahun 2001 hingga 2007, MTs Negeri Model Babat pada tahun 2007 hingga 2010, dan MA Negeri Lamongan pada tahun 2010 hingga 2013. Di samping menempuh pendidikan tingkat MA, ia juga menempuh Program Pendidikan Setara Diploma Satu Jurusan Teknik Informatika (Prodistik) yang merupakan kerjasama dari Institut Teknologi Sepuluh November dengan MA Negeri Lamongan dan lulus pada tahun 2013 sebagai wisudawan terbaik ke-3 dari angkatannya. Selanjutnya, pada tahun 2013, ia menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang Jurusan Matematika.

Selama menempuh pendidikannya, ia selalu aktif melibatkan diri dalam organisasi. Ia pernah menjadi komisi A pada Majelis Perwakilan Kelas di MA Negeri Lamongan periode 2011/2012. Organisasi ekstra sekolah pun ia ikuti yakni Ikatan Pelajar Muhammadiyah (IPM) mulai dari Pimpinan Ranting IPM Veteran sebagai bendahara umum periode 2010/2011, Pimpinan Cabang IPM Lamongan Kota sebagai sekretaris I periode 2011/2012, hingga pada tingkatan Pimpinan Daerah IPM Kabupaten Lamongan sebagai anggota bidang Kajian Dakwah Islam dan bidang Pengembangan Ilmu Pengetahuan periode 2012/2014 dan 2014/2016.

Selama menjadi mahasiswa, selain masih aktif di IPM juga ia mengikuti organisasi intra dan ekstra kampusnya. Ia adalah anggota muda di Unit Kegiatan Mahasiswa Seni Religius devisi MC dan Nasyid. Selain itu ia juga aktif di Ikatan Mahasiswa Muhammadiyah (IMM) pada tingkat Pimpinan Komisariat Revivalis UIN Maulana Malik Ibrahim Malang sebagai sekretaris bidang kader dan ketua bidang kader periode 2014/2015 dan 2015/2016, Instruktur Cabang IMM Malang Raya periode 2015/2016 dan 2016/2017, serta Pimpinan Cabang sebagai sekretaris bidang immawati periode 2017/2018.

KEMENTRIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Setia Alam
NIM : 13610065
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Sifat-sifat Aljabar BCC Lemah Solid
Pembimbing I : Dr. Abdussakir, M.Pd
Pembimbing II : Dr. Ahmad Barizi, MA

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1	06 Maret 2017	Konsultasi BAB I dan II	1.
2	17 April 2017	Konsultasi BAB III	2.
3	27 April 2017	Konsultasi Kajian Agama BAB I dan II	3.
4	03 Mei 2017	Revisi BAB III	4.
5	04 Mei 2017	Revisi Kajian Agama BAB I dan II	5.
6	17 Juli 2017	Revisi Kajian Agama BAB I dan II	6.
7	25 Juli 2017	Revisi BAB III	7.
8	01 Agustus 2017	Konsultasi Kajian Agama BAB I, II, dan III	8.
9	07 Agustus 2017	Konsultasi BAB IV dan abstrak	9.
10	11 Agustus 2017	Revisi Keseluruhan	10.
11	15 Agustus 2017	Revisi Kajian Agama Keseluruhan	11.
12	22 Agustus 2017	ACC Kajian Agama	12.
13	29 Agustus 2017	ACC keseluruhan	13.

Malang, 29 Agustus 2017
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001