ECCENTRIC-DISTANCE SUM PADA KOMPLEMEN GRAF INVERS GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

OLEH
MUSTIKA ANA KURFIA
NIM. 13610060

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2017

ECCENTRIC-DISTANCE SUM PADA KOMPLEMEN GRAF INVERS GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh
Mustika Ana Kurfia
NIM. 13610060

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2017

***ECCENTRIC-DISTANCE SUM* PADA KOMPLEMEN GRAF INVERS GRUP DIHEDRAL**

SKRIPSI

Oleh
Mustika Ana Kurfia
NIM. 13610060

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 28 Agustus 2017

Pembimbing I,	Pembimbing II,
H. Wahyu H. Irawan, M.Pd	Abdul Aziz, M.Si
NIP. 19710420 200003 1 003	NIP. 19760318 200604 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

***ECCENTRIC-DISTANCE SUM* PADA KOMPLEMEN GRAF INVERS GRUP DIHEDRAL**

SKRIPSI

Oleh
Mustika Ana Kurfia
NIM. 13610060

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal 13 September 2017

Penguji Utama	:	Dr. Abdussakir, M.Pd	....
Ketua Penguji	:	Dr. Usman Pagalay, M.Si	....
Sekretaris Penguji	:	H. Wahyu H. Irawan, M.Pd	....
Anggota Penguji	:	Abdul Aziz, M.Si	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Mustika Ana Kurfia
NIM	: 13610060
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: *Eccentric-Distance Sum* pada Komplemen Graf Invers Grup Dihedral

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan saya tersebut.

Malang, 28 Agustus 2017
Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL
FC186AEF213153078
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Mustika Ana Kurfia
NIM. 13610060

MOTO

انْفِرُوا خِفَافًا وَثِقَالًا وَجَاهِدُوا بِأَمْوَالِكُمْ وَأَنْفُسِكُمْ فِي سَبِيلِ اللَّهِ ذَلِكُمْ خَيْرٌ لَكُمْ
إِنْ كُنْتُمْ تَعْلَمُونَ

"Berangkatlah kamu baik dalam keadaan merasa ringan maupun berat dan berjihadlah kamu dengan harta dan dirimu di jalan Allah, yang demikian itu adalah lebih baik bagimu jika kamu mengetahui" (QS. At-Taubah/9:41).

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ibunda tercinta Mas'unah yang selalu memotivasi dan mendoakan penulis.

Ayahanda tersayang Yaseni Bachtiar yang selalu memberikan inspirasi dan ide-ide terbaik kepada penulis.

Nenek terbaik H. Makbulah yang selalu mendoakan penulis.

Adik terhebat Bimantara Adhitama yang selalu perhatian dan memberi semangat kepada penulis.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt. atas rahmat, taufik, dan hidayah-Nya sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada nabi Muhammad Saw. yang telah membimbing manusia dari jalan kegelapan menuju jalan yang terang benderang yaitu agama Islam.

Selama proses penulisan skripsi ini, penulis banyak mendapat saran, bimbingan, arahan, doa, dan bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis sampaikan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya serta penghargaan yang setinggi-tingginya kepada:

1. Prof. Dr. H. Abdul Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. H. Wahyu H. Irawan, M.Pd, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan berbagi pengalaman yang berharga kepada penulis.

5. Abdul Aziz, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan saran dan bantuan dalam penulisan skripsi ini.
6. Segenap civitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.
7. Ayah dan Ibu tercinta yang telah mencurahkan kasih sayang, doa, bimbingan, dan motivasi hingga terselesaikannya skripsi ini.
8. Saudara-saudara tersayang yang telah memberikan semangat kepada penulis.
9. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2013, terutama Nianatus Sholihah, Ismi Rizqa Lina, Setia Alam, Rika Saputri, Kusnia Nur Hadiyah, dan M. Hasan Asnawi yang berjuang bersama-sama untuk meraih mimpi dan terima kasih untuk kenang-kenangan indah yang dirajut bersama dalam menggapai impian.
10. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materiil.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan pembaca.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, Agustus 2017

Penulis

DAFTAR ISI

BAB III PEMBAHASAN

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Kurfia, Mustika Ana. 2017. ***Eccentric-Distance Sum* pada Komplemen Graf Invers Grup Dihedral.** Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) H. Wahyu H. Irawan, M.Pd. (II) Abdul Aziz, M.Si.

Kata kunci: *eccentric-distance sum*, graf invers, grup dihedral.

Misal $(\Gamma, *)$ adalah grup berhingga dan S himpunan bagian dari Γ yang memuat semua anggota Γ yang tidak invers ke dirinya sendiri. Graf invers dari Γ $G_S(\Gamma)$ adalah graf yang himpunan titiknya adalah semua anggota di Γ sedemikian sehingga setiap titik yang berbeda u dan v adalah terhubung langsung jika dan hanya jika $u * v$ atau $v * u$ ada di S. Misal G adalah graf terhubung, *eccentric-distance sum* dari graf G didefinisikan $\xi^{ds}(G) = \sum_{u \in V(G)} e(u)D(u)$, $e(u)$ merupakan eksentrisitas titik u di G dan $D(u)$ merupakan jumlah jarak titik u di G.

Tujuan dari penelitian ini adalah mencari pola *eccentric-distance sum* pada komplemen graf invers grup dihedral yang nantinya dijadikan teorema. Hasil penelitian ini adalah:

1. $|S| = n - 1$ untuk n ganjil dan $|S| = n - 2$ untuk n genap.
2. Eksentrisitas setiap titik pada $\overline{G_S(D_{2n})}$ adalah 2.
3. Jumlah jarak pada $\overline{G_S(D_{2n})}$, $\forall n \geq 5$ adalah
$$D(u) = \begin{cases} 3n - 3\,, & \forall u \in S \\ 3n - 2\,, & \forall u \notin S \end{cases}$$
untuk n ganjil,
$$D(u) = \begin{cases} 3n - 4\,, & \forall u \in S \\ 3n - 3\,, & \forall u \notin S \end{cases}$$
untuk n genap dan $n = 4k + 2, k \in \mathbb{N}$, dan
$$D(u) = \begin{cases} 3n - 4\,, & \forall u \in S, u \neq r^{\frac{n}{4}}, u \neq r^{n-\frac{n}{4}} \\ 3n - 3\,, & u \text{ lainnya} \end{cases}$$
untuk n genap dan $n = 4(k + 1), k \in \mathbb{N}$.
4. *Eccentric-distance sum* pada $\overline{G_S(D_{2n})}$, $\forall n \geq 5$ adalah
$$\xi^{ds}\left(\overline{G_S(D_{2n})}\right) = \begin{cases} 12n^2 - 10n + 2\,, & \text{jika } n \text{ ganjil} \\ 12n^2 - 14n + 4\,, & \text{jika } n \text{ genap}\,, n = 4k + 2, k \in \mathbb{N} \\ 12n^2 - 14n + 8\,, & \text{jika } n \text{ genap}\,, n = 4(k + 1), k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Bagi penelitian selanjutnya diharapkan dapat menemukan pola dari *eccentric-distance sum* dari graf invers grup berhingga lainnya.

ABSTRACT

Kurfia, Mustika Ana. 2017. **Eccentric-Distance Sum of Complement of Inverse Graph of Dihedral Group.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University Malang. Advisor: (I) H. Wahyu H. Irawan, M.Pd. (II) Abdul Aziz, M.Si.

Keyword: eccentric-distance sum, inverse graph, dihedral group.

Let $(\Gamma,\ *)$ be a finite group and S a possibly empty subset of Γ containing its non-invertible elements. The inverse graph $G_S(\Gamma)$ of Γ is the graph whose set of vertices coincides with Γ such that two distinct vertices u and v are adjacent if and only if either $u * v \in S$ or $v * u \in S$. Let G be a connected graph. The eccentric-distance sum of G is defined as $\xi^{ds}(G) = \sum_{u \in V(G)} e(u)D(u)$, where $e(u)$ is the eccentricity of the vertex u in G and $D(u)$ is the distance sum of the vertex u in G.

The purpose of this research is to find a formula of eccentric-distance sum of complement of inverse graph of dihedral group which will be stated as theorem. The results of this research are:

1. $|S| = n - 1$ for n is odd and $|S| = n - 2$ for n is even.
2. The eccentricity of every vertex of $\overline{G_S(D_{2n})}$ is 2.
3. The distance sum of $\overline{G_S(D_{2n})}$, $\forall n \geq 5$ are
$$D(u) = \begin{cases} 3n-3\,, & \forall u \in S \\ 3n-2\,, & \forall u \notin S \end{cases}$$
for n is odd,
$$D(u) = \begin{cases} 3n-4\,, & \forall u \in S \\ 3n-3\,, & \forall u \notin S \end{cases}$$
for n is even and $n = 4k + 2, k \in \mathbb{N}$, and
$$D(u) = \begin{cases} 3n-4\,, & \forall u \in S, u \neq r^{\frac{n}{4}}, u \neq \left(r^{\frac{n}{4}}\right)^{-1} \\ 3n-3\,, & u \text{ others} \end{cases}$$
for n is even and $n = 4(k + 1), k \in \mathbb{N}$.
4. The eccentric-distance sum of $\overline{G_S(D_{2n})}$, $\forall n \geq 5$ are
$$\xi^{ds}\left(\overline{G_S(D_{2n})}\right) = \begin{cases} 12n^2 - 10n + 2\,, & \text{if } n \text{ is odd} \\ 12n^2 - 14n + 4\,, & \text{if } n \text{ is even}\,, n = 4k+2, k \in \mathbb{N} \\ 12n^2 - 14n + 8\,, & \text{if } n \text{ is even}\,, n = 4(k+1), k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

For further research, it is suggested to find the formula of eccentric-distance sum of inverse graph of another finite groups.

ملخص

كورفيا، مستيكا آنا. ٢٠١٧. **Eccentric-Distance Sum في مكملة المخطط المعاكس لزمرة زوجة**. شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعة الإسلامية الحكوميه مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف: (١) الحج واهيو هينجكي إراوان الماجستير (٢) عبد العزيز الماجستير.

الكلمات الرئيسة: Eccentric-Distance Sum، المخطط المعاكس، زمرة زوجية.

على سبيل المثال $(\Gamma, *)$ هي مجموعة محدودة و S مجموعة فرعية من Γ التي تحتوي على جميع الأعضاء غير معكوس لأنفسهم. المخطط المعاكس Γ $G_S(\Gamma)$ هو المخطط يكون مجموع رؤوس فيه جميع الأعضاء في Γ بحيث تكون كل رؤوس مختلفة v و u متصلة مباشرة إذا وفقط إذا كانت $u * v$ أو $v * u$ في S. المثال G عبارة عن مخطط متصل، ويعرف eccentric-distance sum لمخطط G تعريف $\xi^{ds}(G) = \sum_{u \in V(G)} e(u)D(u)$ حيث $e(u)$ هو الانحراف من النقطة u في Gو $D(u)$ يمثل عدد النقاط المسافة u في G.

والغرض من هذه الدراسة هو البحث عن أنماط لمسافات eccentric-distance sum في مكملة المخطط المعاكس لزمرة زوجة والتي ستكون نظرية. نتائج هذه الدراسة هي:

١. $|S| = n - 2$ إلى n فردى و $|S| = n - 2$ إلى n زوجى.

٢. الانحراف في كل رؤوس على $\overline{G_S(D_{2n})}$ هو 2.

٣. مقدار المسافة في $\overline{G_S(D_{2n})}$، $\forall n \geq 5$ غير

$$D(u) = \begin{cases} 3n - 3\,, & \forall u \in S \\ 3n - 2\,, & \forall u \notin S \end{cases}$$

إذا n فردى،

$$D(u) = \begin{cases} 3n - 4\,, & \forall u \in S \\ 3n - 3\,, & \forall u \notin S \end{cases}$$

إذا n زوجى و $n = 4k + 2, k \in \mathbb{N}$ ، و

$$D(u) = \begin{cases} 3n - 4\,, & \forall u \in S, u \neq r^{\frac{n}{4}}, u \neq \left(r^{\frac{n}{4}}\right)^{-1} \\ 3n - 3\,, & \text{أكثر } u \end{cases}$$

إذا n زوجى و $n = 4(k+1), k \in \mathbb{N}$.

٤. Eccentric-distance sum في $\overline{G_S(D_{2n})}$، $\forall n \geq 5$ غير

$$\xi^{ds}\left(\overline{G_S(D_{2n})}\right) = \begin{cases} 12n^2 - 10n + 2\,, & \text{إذا } n \text{ فردى} \\ 12n^2 - 14n + 4\,, & \text{إذا } n \text{ زوجى}\,,\ n = 4k + 2, k \in \mathbb{N} \\ 12n^2 - 14n + 8\,, & \text{إذا } n \text{ زوجى}\,,\ n = 4(k+1), k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

لمزيد من البحث ومن المتوقع أن تجد نمطا من مسافات eccentric-distance sum فى مكملة المخطط المعاكس لمجموعات محدودة أخرى.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Allah Swt. berfirman di dalam al-Quran surat an-Nisa/4:1, yang berbunyi

يَٰٓأَيُّهَا ٱلنَّاسُ ٱتَّقُواْ رَبَّكُمُ ٱلَّذِى خَلَقَكُم مِّن نَّفۡسٖ وَٰحِدَةٖ وَخَلَقَ مِنۡهَا زَوۡجَهَا وَبَثَّ
مِنۡهُمَا رِجَالٗا كَثِيرٗا وَنِسَآءٗۚ وَٱتَّقُواْ ٱللَّهَ ٱلَّذِى تَسَآءَلُونَ بِهِۦ وَٱلۡأَرۡحَامَۚ إِنَّ ٱللَّهَ كَانَ
عَلَيۡكُمۡ رَقِيبٗا ١

Artinya: *"Hai sekalian manusia, bertakwalah kepada Tuhan kalian yang telah menciptakan kalian dari seorang diri, dan darinya Allah menciptakan istrinya; dan dari keduanya Allah memperkembangbiakkan laki-laki dan perempuan yang banyak. Dan bertakwalah kepada Allah yang dengan (mempergunakan) nama-Nya kalian saling meminta satu sama lain, dan peliharalah hubungan silaturrahim. Sesungguhnya Allah selalu menjaga dan mengawasi kalian."*

Pada QS. an-Nisa/4:1, Allah Swt. berfirman memerintahkan kepada makhluk-Nya agar bertakwa kepada-Nya semata dan tidak membuat sekutu bagi-Nya. Allah Swt. juga memerintahkan kepada manusia untuk senantiasa bertakwa kepada-Nya. Maksudnya, bertakwalah kalian kepada Allah Swt. dengan taat kepada-Nya. Menurut Ad-Dahhak, 'bertakwalah kalian kepada Allah Swt. yang kalian telah berjanji dan berikrar menyebut namanya'. Bertakwalah kalian kepada Allah Swt. dalam silaturrahim. Dengan kata lain, janganlah kalian memutuskannya melainkan hubungkanlah dan berbaktilah untuknya (Katsir, 2001:228).

Berdasarkan hikmah dari al-Quran surat an-Nisa/4:1, kita sebagai umat manusia diperintahkan untuk saling menjaga hubungan silaturrahim dan tidak memutuskannya. Silaturrahim bertujuan menyambungkan kasih sayang atau kekerabatan yang menghendaki kebaikan. Dengan bersilaturrahim, kita bisa menjalin hubungan yang baik dan mempererat hubungan satu sama lain. Kajian tentang keterhubungan dalam ilmu matematika juga dijelaskan yakni tentang teori graf.

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang mempelajari sifat-sifat graf. Graf G adalah pasangan $\big(V(G), E(G)\big)$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dari objek-objek yang disebut titik, dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut sisi. Jika uv merupakan sisi dari G, maka u dan v adalah titik yang terhubung langsung (Chartand, dkk, 2016:3).

Perkembangan terbaru dari teori graf yang banyak dikaji oleh matematikawan adalah membahas graf yang dibangun dari grup. Misal $(\Gamma, *)$ adalah grup berhingga dan S himpunan bagian dari Γ yang memuat semua anggota Γ yang tidak invers ke dirinya sendiri. Graf invers dari Γ $\big(G_S(\Gamma)\big)$ adalah graf yang himpunan titiknya adalah semua anggota di Γ sedemikian sehingga setiap titik yang berbeda u dan v adalah terhubung langsung di $G_S(\Gamma)$ jika dan hanya jika $u * v$ atau $v * u$ ada di S (Alfuraidan dan Zakariya, 2017:143).

Misalkan G adalah graf terhubung, u dan v adalah titik di G (tidak harus berbeda). Jalan $u - v$ pada G adalah barisan berhingga yang berselang-seling $W: u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n = v$ antara titik dan sisi yang dimulai dari titik dan diakhiri dengan titik, dengan $e_i = (v_{i-1}, v_i), \forall i = 1, 2, 3, \dots, n$ adalah sisi di G. n menyatakan panjang dari W. Jika $v_0 \neq v_n$, maka W disebut jalan terbuka. Jalan terbuka yang semua titiknya berbeda disebut lintasan (Abdussakir, dkk, 2009:51).

Misalkan u dan v adalah dua titik yang berbeda di graf terhubung G. Jarak $d(u, v)$ merupakan panjang lintasan terpendek dari titik u ke titik v dan jumlah jarak $D(u)$ merupakan jumlah jarak antara titik u dengan semua titik yang berbeda di G. Eksentrisitas titik u pada graf G adalah jarak maksimal atau jarak terjauh antara titik u dengan sebarang titik di G. *Eccentric-distance sum* dari suatu graf G adalah penjumlahan dari hasil perkalian antara eksentrisitas dan jumlah jarak dari masing-masing titik pada graf G (Padmapriya dan Mathad, 2017:52).

Alfuraidan dan Zakariya (2017) mendefinisikan graf invers dan menuliskan sifat-sifat dari graf invers tersebut. Sifat-sifat yang ditulis berupa sifat derajat titik dari graf invers, diameter dari graf invers, dan sifat Hamiltonian dari beberapa graf invers. Padmapriya dan Mathad (2017) menganalisis dan membuktikan bentuk umum atau pola dari *eccentric-distance sum* dari graf roda, graf bintang, graf sapu, graf planar, dan graf lolipop.

Mengacu pada kedua penelitian tersebut, peneliti tertarik untuk mengembangkan dan menggabungkan keduanya sehingga diperoleh kajian tentang *eccentric-distance sum* pada graf invers dari grup berhingga. Grup dihedral merupakan salah satu grup berhingga yang sering diminati dan diteliti oleh matematikawan sehingga dapat dibentuk suatu graf invers dari grup dihedral. Agar graf yang dibangun terhubung, maka graf yang digunakan adalah komplemen dari graf invers grup dihedral. Oleh karena itu, kajian tentang *eccentric-distance sum* pada komplemen graf invers yang dibangun dari grup dihedral menarik untuk dikaji.

Berdasarkan uraian di atas, maka judul dari penelitian ini adalah "*Eccentric-Distance Sum* pada Komplemen Graf Invers Grup Dihedral".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini yaitu bagaimana pola *eccentric-distance sum* pada komplemen graf invers grup dihedral?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini yaitu untuk mengetahui pola *eccentric-distance sum* pada komplemen graf invers grup dihedral.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah dapat memperkaya informasi dalam perkembangan teori graf tentang *eccentric-distance sum* pada komplemen graf invers grup dihedral yang nantinya juga dapat dijadikan sebagai bahan rujukan untuk penelitian selanjutnya.

1.5 Metode Penelitian

Penelitian yang dilakukan adalah dengan pendekatan penelitian kualitatif. Jenis penelitian yang digunakan berupa studi kepustakaan (*library research*), yaitu teknik pengumpulan data dengan mengadakan studi penelaahan terhadap buku-buku, catatan-catatan, dan hasil penelitian ilmiah lain yang berhubungan dengan objek permasalahan.

Adapun langkah-langkah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

a. Merumuskan masalah.

b. Mencari dan mengumpulkan berbagai literatur yang dijadikan acuan dalam pembahasan. Penulis menggunakan jurnal utama karya Afuraidan dan Zakariya (2017) serta karya Padmapriya dan Mathad (2017).

c. Analisis data dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Menjabarkan anggota dan membentuk tabel Cayley dari grup dihedral $D_6, D_8, D_{10}, D_{12}, D_{14}, D_{16}, D_{18}$, dan D_{20}.
2. Mencari invers dari masing-masing anggota pada $D_6, D_8, D_{10}, D_{12}, D_{14}, D_{16}$, D_{18}, dan D_{20}.
3. Membentuk himpunan bagian S dari $D_6, D_8, D_{10}, D_{12}, D_{14}, D_{16}, D_{18}$, dan D_{20} yang anggotanya merupakan semua anggota dari masing-masing grup dihedral yang inversnya bukan dirinya sendiri.
4. Membangun dan menggambar graf invers dari grup dihedral $D_6, D_8, D_{10}, D_{12}, D_{14}, D_{16}, D_{18}$, dan D_{20}.
5. Menggambar komplemen graf invers grup dihedral $D_6, D_8, D_{10}, D_{12}, D_{14}$, D_{16}, D_{18}, dan D_{20}.
6. Mencari jumlah jarak dari masing-masing titik pada komplemen graf invers grup dihedral $D_6, D_8, D_{10}, D_{12}, D_{14}, D_{16}, D_{18}$, dan D_{20}.
7. Mencari nilai eksentrisitas titik pada komplemen graf invers grup dihedral $D_6, D_8, D_{10}, D_{12}, D_{14}, D_{16}, D_{18}$, dan D_{20}.
8. Mencari nilai *eccentric-distance sum* pada komplemen graf invers grup dihedral $D_6, D_8, D_{10}, D_{12}, D_{14}, D_{16}, D_{18}$, dan D_{20}.
9. Merumuskan pola dari *eccentric-distance sum* pada komplemen graf invers grup dihedral.

10. Membuktikan pola dari *eccentric-distance sum* pada komplemen graf invers grup dihedral.

d. Membuat kesimpulan dari analisis data.

e. Menulis laporan hasil penelitian.

1.6 Sistematika Penulisan

Dalam penelitian ini, penulis menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab, masing–masing bab dibagi dalam subbab dengan sistematika penulisan sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Berisi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Berisi literatur pendukung objek permasalahan antara lain tentang himpunan, operasi biner, grup, grup berhingga, grup dihedral, graf, komplemen dari graf, graf terhubung, jumlah jarak pada graf, eksentrisitas titik, graf invers dari grup berhingga, *eccentric-distance sum*, dan kajian silaturrahim dalam Islam.

Bab III Pembahasan

Berisi pembahasan mengenai pola dari *eccentric-distance sum* pada komplemen graf invers grup dihedral.

Bab IV Penutup

Berisi kesimpulan dan saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Himpunan

Himpunan didefinisikan sebagai suatu koleksi objek-objek yang terdefinisi dengan jelas. Himpunan biasanya dinotasikan dengan huruf kapital dan terkadang dinyatakan dengan mendaftar semua anggotanya (Gilbert dan Gilbert, 2015:1).

Contoh 2.1

S adalah himpunan bilangan prima yang lebih dari 5 dan kurang dari 20. Sehingga $S = \{7, 11, 13, 17, 19\}$.

Definisi 2.1

Misalkan A dan B adalah himpunan. A disebut himpunan bagian dari B jika dan hanya jika setiap anggota himpunan A adalah anggota dari himpunan B. Salah satu notasi $A \subseteq B$ atau notasi $B \supseteq A$ mengindikasikan bahwa A adalah himpunan bagian dari B (Gilbert dan Gilbert, 2015:2).

Contoh 2.2

Diketahui himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dan $B = \{1, 3, 5\}$. Maka dapat dikatakan bahwa B merupakan himpunan bagian dari A atau dinotasikan $B \subseteq A$ karena semua anggota B ada di A. Namun A bukan himpunan bagian dari B atau $A \nsubseteq B$ karena ada sebagian anggota A yang tidak ada di B.

Diketahui A dan B adalah dua himpunan. Jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$ maka dapat dikatakan A dan B sama, dinotasikan dengan $A = B$. Jika $A \subseteq B$ dan $A \neq B$ maka dapat dikatakan A himpunan bagian sejati dari B, dinotasikan $A \subset B$ (Raisinghania dan Anggarwal, 1980:3).

Contoh 2.3

1. Jika $A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{b, a, c\}$, $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$ maka $A = B$.
2. Jika $A = \{a, b\}$ dan $B = \{a, b, c, d\}$, $A \subseteq B$ dan $A \neq B$ maka $A \subset B$.

2.2 Operasi Biner

Definisi 2.2

Suatu operasi biner pada himpunan tak kosong A merupakan pemetaan f dari $A \times A$ ke A (Gilbert dan Gilbert, 2015:30).

Contoh 2.4

Diberikan $\mathbb{N}$ yaitu himpunan semua bilangan asli dan $*$ adalah operasi pada $\mathbb{N}$ dengan syarat $\forall a, b \in \mathbb{N}, a * b = a + b$. Karena $a \in \mathbb{N}$ dan $b \in \mathbb{N}$, maka penjumlahan dari kedua bilangan asli akan menghasilkan bilangan asli, dinotasikan $a + b \in \mathbb{N}$. Jadi operasi $*$ merupakan operasi biner pada $\mathbb{N}$.

2.3 Grup

2.3.1 Definisi Grup

Definisi 2.3

Misalkan operasi biner $*$ terdefinisi pada unsur di himpunan G. Maka G merupakan suatu grup dengan operasi $*$ jika memenuhi aksioma sebagai berikut (Gilbert dan Gilbert, 2015:141):

1. Operasi $*$ bersifat asosiatif di G. Untuk setiap $x, y, z \in G$, maka $x * (y * z) = (x * y) * z$.
2. G memiliki identitas e terhadap operasi $*$. Terdapat suatu e di G sedemikian sehingga $x * e = e * x = x$ untuk setiap $x \in G$.

3. G memuat invers terhadap operasi $*$. Untuk setiap $a \in G$, terdapat $b \in G$ sedemikian sehingga $a * b = b * a = e$.

Contoh 2.5

Misalkan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat, maka $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup karena berlaku:

i. Operasi penjumlahan $(+)$ pada $\mathbb{Z}$ merupakan operasi biner yang terdefinisi di $\mathbb{Z}$ karena untuk setiap $(k, l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ berlaku $k + l \in \mathbb{Z}$. Sehingga $\mathbb{Z}$ tertutup terhadap operasi $+$.

ii. Untuk setiap $k, l, m \in \mathbb{Z}$ maka $k + (l + m) = (k + l) + m$. Jadi operasi $+$ bersifat asosiatif di $\mathbb{Z}$.

iii. Terdapat anggota identitas terhadap operasi $+$ di $\mathbb{Z}$ yaitu $0 \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $k + 0 = 0 + k = k$, untuk setiap $k \in \mathbb{Z}$.

iv. Untuk $k \in \mathbb{Z}$ terdapat k^{-1} yaitu $(-k) \in \mathbb{Z}$ sedimikian sehingga $k + (-k) = (-k) + k = 0$.

Berdasarkan i, ii, iii, dan iv maka terbukti bahwa $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup.

Definisi 2.4

Misalkan G adalah grup dengan operasi $*$. Maka G disebut grup komutatif atau grup abelian jika operasi $*$ bersifat komutatif di G, yaitu $x * y = y * x$ untuk setiap $x, y \in G$ (Gilbert dan Gilbert, 2015:142).

Contoh 2.6

Grup $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup abelian karena $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ berlaku $x + y = y + x$.

2.3.2 Grup Berhingga

Definisi 2.5

Jika suatu grup G mempunyai anggota yang berhingga, maka G disebut grup berhingga. Banyaknya anggota di G disebut order dari G dan dinotasikan $o(G)$ atau $|G|$. Jika G tidak memiliki anggota yang berhingga, maka G disebut grup tak berhingga (Gilbert dan Gilbert, 2015:145).

Contoh 2.6

Grup $(\mathbb{Z}_4, +)$ dengan $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ adalah grup berhingga dan memiliki order $o(\mathbb{Z}_4) = 4$.

2.3.3 Grup Dihedral

Grup dihedral adalah grup dari himpunan simetri-simetri dari segi-n beraturan, dinotasikan D_{2n}, untuk setiap n bilangan bulat positif dan $n \geq 3$. Dalam buku lain ada yang menuliskan grup dihedral dengan D_n (Dummit dan Foote, 1991:23).

Misalkan D_{2n} suatu grup yang didefinisikan oleh st untuk $s, t \in D_{2n}$ yang diperoleh dari simetri (simetri sebagai fungsi pada segi-n, sehingga st adalah fungsi komposisi). Jika s, t akibat permutasi titik berturut-turut σ, τ, maka st akibat dari $\sigma \circ \tau$. Operasi biner pada D_{2n} adalah assosiatif karena fungsi komposisi adalah assosiatif. Identitas dari D_{2n} adalah identitas dari simetri (yang meninggalkan semua titik tetap), dinotasikan dengan 1, dan invers dari $s \in D_{2n}$ adalah kebalikan semua putaran dari simetri s (jadi jika s akibat permutasi pada titik σ, s^{-1} akibat dari σ^{-1}) (Dummit dan Foote, 1991:24).

Karena grup dihedral akan digunakan secara luas, maka perlu beberapa notasi dan beberapa hitungan yang dapat menyederhanakan perhitungan selanjutnya dan membantu mengamati D_{2n} sebagai grup abstrak, yaitu (Dummit dan Foote, 2004:25):

1. $1, r, r^2, \dots, r^{n-1}$ adalah seluruh anggota yang berbeda dan $r^n = 1$, jadi $|r| = n$.
2. $|s| = 2$.
3. $s \neq r^i$,$\forall i$.
4. $sr^i \neq sr^j$,$\forall$ $0 \leq i, j \leq n-1$ dengan $i \neq j$.

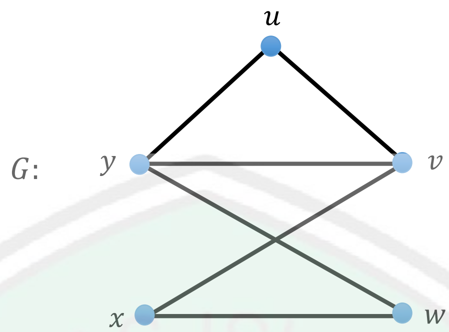
   Jadi $D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$, yaitu setiap anggota dapat dituliskan secara tunggal dalam bentuk $s^k r^i$ untuk $k = 0$ atau 1 dan $0 \leq i \leq n-1$.
5. $sr = r^{-1}s$.
6. $sr^i = r^{-i}s$ untuk semua $0 \leq i \leq n$.

Sebagai contoh D_6 adalah grup dihedral yang memuat semua simetri (rotasi dan refleksi) pada bangun segitiga sehingga $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$.

2.4 Graf

2.4.1 Definisi Graf

Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik yang berbeda di V yang disebut sebagai sisi. Untuk menegaskan bahwa V dan E adalah himpunan titik dan himpunan sisi dari graf G, biasanya V dinotasikan sebagai $V(G)$ dan E dinotasikan sebagai $E(G)$ (Chartand, dkk, 2016:3). Sebagai contoh, graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{u, v, w, x, y\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{(u, v), (u, y), (v, x), (v, y),$ $(w, y), (w, x)\}$ ditunjukkan pada Gambar 2.1 sebagai berikut:



Gambar 2.1 Graf G

2.4.2 Terhubung Langsung, Terkait Langsung, Order, dan Ukuran

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*), v dan e serta u dan e disebut terkait langsung (*incident*), dan titik u disebut ujung dari e. Dua sisi berbeda (u, v) dan (v, w) disebut terhubung langsung jika terkait langsung pada satu titik yang sama (Abdussakir, dkk, 2009:6).

Banyaknya titik pada graf G disebut order dari G dan banyaknya sisi pada graf G disebut ukuran dari G. Biasanya order dari graf G dinotasikan sebagai n dan ukuran dari graf G dinotasikan sebagai m. Suatu graf dengan order 1 disebut graf trivial. Suatu graf dengan ukuran 0 disebut graf kosong (Chartand, dkk, 2016:4).

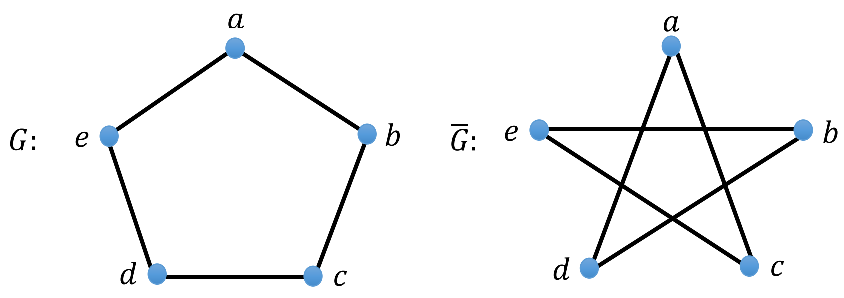
Berdasarkan graf G pada Gambar 2.1, maka titik u dan v terhubung langsung, demikian juga dengan u dan y, v dan x, v dan y, w dan y, serta w dan x. Titik u dan w tidak terhubung langsung, demikian juga dengan titik u dan x, v dan w, serta x dan y. Sisi (u, v) terkait langsung dengan titik u dan v, namun tidak terkait langsung dengan titik u dan y. Sisi (u, v) dan (u, y) terhubung langsung karena terkait langsung pada satu titik yang sama, yaitu titik u. Sisi (u, v) dan (w, x) tidak terhubung langsung karena tidak terkait langsung pada titik yang sama. Order dari graf G adalah 5 dan ukurannya adalah 6.

2.4.3 Derajat Titik

Derajat titik v dari graf G merupakan banyaknya titik di G yang terhubung langsung dengan v. Derajat dari titik v pada graf G dinotasikan dengan $\deg_G v$ atau $\deg v$. Suatu titik yang berderajat 0 disebut titik terasing dan titik yang berderajat 1 disebut titik ujung atau daun. Derajat terbesar dari semua titik di G disebut derajat maksimum dari G dan dinotasikan dengan $\Delta(G)$. Derajat minimum dari G dinotasikan dengan $\delta(G)$. Oleh karena itu, jika v merupakan titik dari graf G dengan order n, maka $0 \leq \delta(G) \leq \deg v \leq \Delta(G) \leq n - 1$ (Chartand, dkk, 2016:5). Berdasarkan Gambar 2.1, maka diperoleh bahwa $\deg u = \deg w = \deg x = 2$ dan $\deg v = \deg y = 3$. Jadi, $\delta(G) = 2$ dan $\Delta(G) = 3$.

2.4.4 Komplemen dari Graf

Misalkan G graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Komplemen dari graf G, ditulis $\bar{G}$ adalah graf dengan himpunan titik $V(G)$ sedemikian sehingga dua titik akan terhubung langsung di $\bar{G}$ jika dan hanya jika dua titik tersebut tidak terhubung langsung di G. Jadi, diperoleh bahwa $V(\bar{G}) = V(G)$ dan $(u, v) \in E(\bar{G})$ jika dan hanya jika $(u, v) \notin E(G)$. Jika G adalah graf dengan order n dan ukuran m, maka graf $\bar{G}$ mempunyai order n dan ukuran $\bar{m}$ dengan $\bar{m} = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$ (Abdussakir, dkk, 2009:29). Suatu graf G dan komplemennya ditunjukkan pada Gambar 2.2 sebagai berikut:

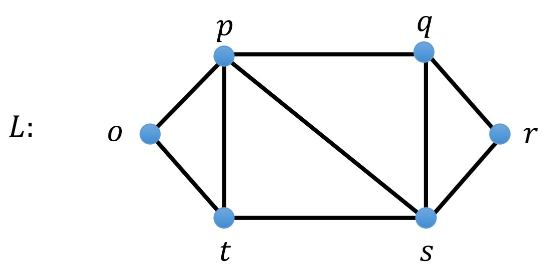


Gambar 2.2 Graf G dan Komplemennya

2.4.5 Jalan dan Lintasan

Misalkan G adalah graf. Misalkan u dan v adalah titik di G (tidak harus berbeda). Jalan $u - v$ pada G adalah barisan berhingga yang berselang-seling $W: u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n = v$ antara titik dan sisi yang dimulai dari titik dan diakhiri dengan titik, dengan $e_i = (v_{i-1}, v_i), \forall i = 1, 2, 3, \dots, n$ adalah sisi di G. v_0 disebut titik awal, v_n disebut titik akhir, titik $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ disebut titik internal, dan n menyatakan panjang dari W. Jika $v_0 \neq v_n$, maka W disebut jalan terbuka. Jika $v_0 = v_n$, maka W disebut jalan tertutup. Jalan yang tidak mempunyai sisi disebut jalan trivial (Abdussakir, dkk, 2009:49). Karena dalam graf dua titik hanya akan dihubungkan oleh tepat satu sisi, maka jalan $u - v$ dapat ditulis menjadi $W: u = v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n = v$ (Abdussakir, dkk, 2009:50). Jalan terbuka yang semua titiknya berbeda disebut lintasan (Abdussakir, dkk, 2009:51).

Perhatikan graf L pada Gambar 2.3 sebagai berikut.

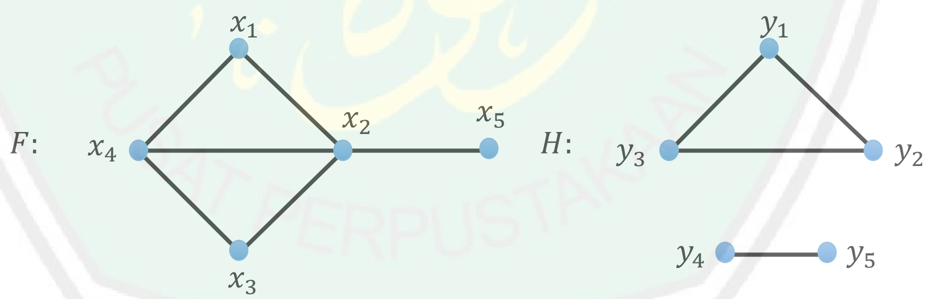


Gambar 2.3 Jalan dan Lintasan pada Graf L

Berdasarkan Gambar 2.3, maka $W_1 = o, p, q, r, s, p, t, o$ dan $W_2 = o, p, q,\ r, s, p, t$ adalah jalan di L. W_1 adalah jalan tertutup dan W_2 adalah jalan terbuka. W_1 mempunyai panjang 7 dan W_2 mempunyai panjang 6. $W_3 = o, p, q, r, s, t$ adalah lintasan di L karena semua titiknya berbeda.

2.4.6 Graf Terhubung

Misalkan u dan v titik berbeda pada graf G. Titik u dan v dikatakan terhubung, jika terdapat lintasan $u - v$ di G. Suatu graf G dikatakan terhubung, jika untuk setiap titik u dan v yang berbeda di G terhubung (Abdussakir, dkk, 2009:55). Dengan kata lain, suatu graf G dikatakan terhubung, jika untuk setiap u dan v di G terdapat lintasan $u - v$ di G. Sebaliknya, jika ada dua titik u dan v di G tetapi tidak ada lintasan $u - v$ di G, maka G dikatakan tak terhubung (Abdussakir, dkk, 2009:56). Graf F dari Gambar 2.4 adalah graf terhubung sedangkan graf H adalah graf tak terhubung.



Gambar 2.4 Graf Terhubung dan Graf Tak Terhubung

2.4.7 Jarak pada Graf

Jika u dan v adalah titik yang berbeda pada graf terhubung G, maka terdapat suatu lintasan $u - v$ di G. Sehingga, bisa jadi terdapat beberapa lintasan $u - v$ di G dengan kemungkinan panjang yang berbeda. Jarak $d_G(u, v)$ dari titik u ke titik v

pada graf terhubung G merupakan panjang terkecil dari suatu lintasan $u - v$ di G. Jarak dari titik u ke titik v pada suatu graf G biasanya dinotasikan dengan $d(u, v)$ (Chartand, dkk, 2016:44). Jumlah jarak dari titik u pada suatu graf G yang dinotasikan $D(u)$ merupakan jumlah jarak antara titik u dan semua titik dari graf G (Padmapriya dan Mathad, 2017:51). Jumlah jarak dari titik u pada suatu graf G didefinisikan sebagai

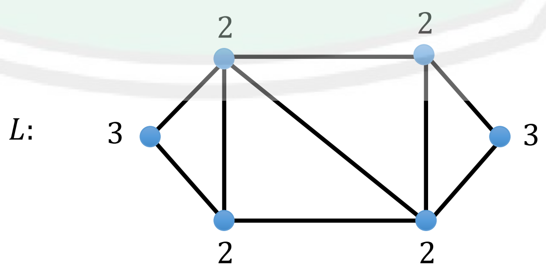
$$D(u) = \sum_{v \in V(G)} d(u, v)$$

(Ilic, dkk, 2011:590).

Berdasarkan Gambar 2.3, diperoleh bahwa $d(p, q) = 1$ karena panjang terkecil dari lintasan $p - q$ adalah satu. Begitu juga dengan $d(p, s) = d(p, t) = d(p, o) = 1$. $d(p, r) = 2$ karena panjang terkecil lintasan $p - r$ adalah dua.

2.4.8 Eksentrisitas Titik

Eksentrisitas titik v pada suatu graf terhubung G disimbolkan $e(v)$ adalah jarak terbesar antara titik v dengan sebarang titik pada graf G. Eksentrisitas titik v didefinisikan sebagai $e(v) = \max\{d(u, v) | \, u \in V(G)\}$ (Padmapriya dan Mathad, 2017:51). Eksentrisitas titik graf L pada Gambar 2.3 ditunjukkan pada Gambar 2.5.



Gambar 2.5 Eksentrisitas Titik Graf L

2.5 Graf Invers dari Grup Berhingga

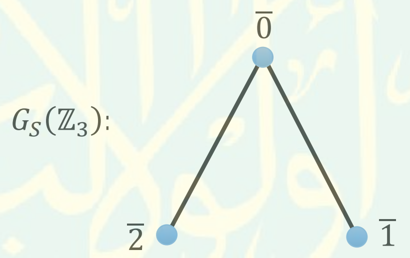
Definisi 2.6

Misalkan $(\Gamma, *)$ adalah grup berhingga dan $S = \{u \in \Gamma | u \neq u^{-1}\}$. Didefinisikan graf invers dari Γ $\left(G_S(\Gamma)\right)$ adalah graf yang himpunan titiknya adalah semua anggota Γ sedemikian sehingga dua titik yang berbeda u dan v adalah terhubung langsung jika dan hanya jika $u * v \in S$ atau $v * u \in S$ (Alfuraidan dan Zakariya, 2017:143).

Contoh 2.7

Diketahui grup $(\mathbb{Z}_3, +)$ dengan $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$.

$\bar{0}^{-1} = \bar{0}, \bar{1}^{-1} = \bar{2}$, dan $\bar{2}^{-1} = \bar{1}$. Maka $S = \{\bar{1}, \bar{2}\}$. Sehingga dapat dibentuk suatu graf invers dari $\mathbb{Z}_3$ $\left(G_S(\mathbb{Z}_3)\right)$ pada Gambar 2.6 sebagai berikut.



Gambar 2.6 Graf Invers Grup Modulo Bilangan Bulat 3

Identitas adalah anggota trivial yang invers terhadap dirinya sendiri dalam sebarang grup berhingga Γ. Maka identitas pasti bukan anggota dari S. Sehingga menyebabkan banyaknya anggota S kurang dari banyaknya anggota Γ. Jika Γ adalah grup berhingga yang tidak memuat anggota yang invers terhadap dirinya sendiri selain identitas, maka $|S| = |\Gamma| - 1$. Oleh karena itu, jika banyaknya anggota Γ ganjil maka $|S| = |\Gamma| - 1$, dikarenakan setiap anggota Γ memiliki pasangan invers yang berbeda selain identitas itu sendiri. Jika banyaknya anggota Γ genap, maka terdapat anggota Γ sebanyak ganjil dan identitas yang invers terhadap dirinya sendiri. Sehingga banyaknya anggota S selalu genap.

Setiap anggota x pada grup berhingga Γ jika dioperasikan dengan identitas e maka hasilnya adalah dirinya sendiri. Sehingga, jika x adalah anggota di S, maka titik e dan titik x terhubung langsung di $G_S(\Gamma)$. Jika x bukan anggota di S, maka titik e dan titik x tidak terhubung langsung di $G_S(\Gamma)$. Oleh karena itu, titik e pasti terhubung langsung dengan semua titik di S. Sehingga diperoleh $\deg e = |S|$ untuk sebarang graf invers.

2.6 *Eccentric-Distance Sum*

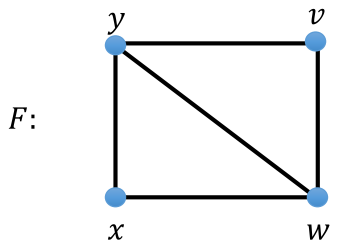
Suatu invarian graf baru dalam memprediksi sifat biologis dan fisik jumlah jarak eksentrik atau *eccentric-distance sum* diperkenalkan oleh S. Gupta, M. Singh, dan A.K. Madan pada tahun 2002. *Eccentric-distance sum* merupakan penjumlahan dari hasil perkalian antara eksentrisitas dan jumlah jarak masing-masing titik dalam suatu graf G. *Eccentric-distance sum* didefinisikan sebagai:

$$\xi^{ds}(G) = \sum_{u \in V(G)} e(u)D(u)$$

dengan $e(u)$ merupakan eksentrisitas titik u dan $D(u)$ merupakan jumlah jarak titik u (Padmapriya dan Mathad, 2017:52).

Contoh 2.7

Misalkan graf F ditunjukkan pada Gambar 2.7 sebagai berikut.



Gambar 2.7 Graf F

Berdasarkan Gambar 2.7, dapat diketahui bahwa $e(y) = e(w) = 1$ dan $e(v) = e(x) = 2$. Selain itu, dapat diketahui bahwa $D(y) = D(w) = 3$ dan $D(v) = D(x) = 4$. Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\xi^{ds}(G) &= \sum_{u \in V(G)} e(u)D(u)\\ &= e(v)D(v) + e(w)D(w) + e(x)D(x) + e(y)D(y)\\ &= (2 \cdot 4) + (1 \cdot 3) + (2 \cdot 4) + (1 \cdot 3) = 22.\end{aligned}$$

2.7 Kajian Graf dalam Perspektif Islam

Graf adalah pasangan himpunan tidak kosong dari objek-objek yang disebut titik, dan himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda yang disebut sisi. Jika tedapat sisi antara dua titik yang berbeda maka dapat dikatakan kedua titik tersebut terhubung langsung. Sehingga terdapat keterhubungan antara kedua titik tersebut. Sebagaimana dalam al-Quran yang menjelaskan tentang keterhubungan yaitu silaturrahim.

Silaturrahim berasal dari kata *silah* yang berarti hubungan dan *ar-rahim* yang berarti rahim atau kerabat. Sehingga secara bahasa, silaturrahim merupakan hubungan kekerabatan. Perintah silaturrahim terdapat pada al-Quran surat an-Nisa/4:1, yang berbunyi

يَٰٓأَيُّهَا ٱلنَّاسُ ٱتَّقُواْ رَبَّكُمُ ٱلَّذِي خَلَقَكُم مِّن نَّفۡسٖ وَٰحِدَةٖ وَخَلَقَ مِنۡهَا زَوۡجَهَا وَبَثَّ مِنۡهُمَا رِجَالٗا كَثِيرٗا وَنِسَآءٗۚ وَٱتَّقُواْ ٱللَّهَ ٱلَّذِي تَسَآءَلُونَ بِهِۦ وَٱلۡأَرۡحَامَۚ إِنَّ ٱللَّهَ كَانَ عَلَيۡكُمۡ رَقِيبٗا ١

Artinya: *"Hai sekalian manusia, bertakwalah kepada Tuhan kalian yang telah menciptakan kalian dari seorang diri, dan darinya Allah menciptakan istrinya; dan dari keduanya Allah memperkembangbiakkan laki-laki dan perempuan yang banyak. Dan bertakwalah kepada Allah yang dengan (mempergunakan) nama-Nya kalian saling meminta satu sama lain, dan peliharalah hubungan silaturrahim. Sesungguhnya Allah selalu menjaga dan mengawasi kalian."*

Ayat tersebut menjelaskan tentang perintah Allah Swt. kepada umatnya agar senantiasa saling menyambung silaturrahim dan tidak memutuskannya. Seperti ditekankan pada penggalan al-Quran surat an-Nisa/4:1, yaitu

وَٱتَّقُواْ ٱللَّهَ ٱلَّذِي تَسَآءَلُونَ بِهِۦ وَٱلۡأَرۡحَامَ

Artinya: *"Dan bertakwalah kepada Allah yang dengan (mempergunakan) nama-Nya kalian saling meminta satu sama lain, dan peliharalah hubungan silaturrahim".*

Terdapat beberapa cara atau bentuk yang bisa dilakukan untuk mewujudkan silaturrahim. Salah satunya yakni dengan memberi bantuan kepada kerabat seperti yang dituliskan dalam al-Quran surat an-Nahl/16:90, yang berbunyi

۞ إِنَّ ٱللَّهَ يَأۡمُرُ بِٱلۡعَدۡلِ وَٱلۡإِحۡسَٰنِ وَإِيتَآيِٕ ذِي ٱلۡقُرۡبَىٰ وَيَنۡهَىٰ عَنِ ٱلۡفَحۡشَآءِ وَٱلۡمُنكَرِ وَٱلۡبَغۡيِۚ يَعِظُكُمۡ لَعَلَّكُمۡ تَذَكَّرُونَ ٩٠

Artinya: *"Sesungguhnya Allah menyuruh (kamu) berlaku adil dan berbuat kebajikan, memberi kepada kaum kerabat, dan Allah melarang dari perbuatan keji, kemungkaran, dan permusuhan. Dia memberi pengajaran kepada kalian agar kalian dapat mengambil pelajaran".*

Allah Swt. menyebutkan bahwa Dia memerintahkan kepada hamba-hamba-Nya untuk berlaku adil, yakni pertengahan dan seimbang. Allah Swt. memerintahkan untuk berbuat kebajikan. Yang dimaksud dengan firman-Nya

وَإِيتَآيِٕ ذِى ٱلْقُرْبَىٰ

Artinya: *“dan memberi kepada kaum kerabat”.* (An-Nahl:90)

yaitu hendaknya dia menganjurkan untuk bersilaturrahim (Katsir, 2003:97).

Selain itu, dalam surat ar-Rum/30:38 juga tertulis ayat tentang memberi bantuan kepada kerabat, orang miskin, dan orang yang sedang dalam perjalanan.

فَـَٔاتِ ذَا ٱلْقُرْبَىٰ حَقَّهُۥ وَٱلْمِسْكِينَ وَٱبْنَ ٱلسَّبِيلِ ۚ ذَٰلِكَ خَيْرٌ لِّلَّذِينَ يُرِيدُونَ وَجْهَ ٱللَّهِ ۖ وَأُو۟لَـٰٓئِكَ هُمُ ٱلْمُفْلِحُونَ ﴿٣٨﴾

“Maka berikanlah kepada kerabat yang terdekat akan haknya, demikian (pula) kepada fakir miskin dan orang-orang yang dalam perjalanan. Itulah yang lebih baik bagi orang-orang yang mencari keridhaan Allah; dan mereka itulah orang-orang yang beruntung”.

Allah Swt. berfirman, memerintahkan (kepada kaum muslim) agar memberikan kepada kerabat terdekat mereka akan haknya, yakni berbuat dan menghubungkan silaturrahim, juga orang miskin. Yang dimaksud orang miskin ialah orang yang tidak mempunyai sesuatu pun untuk ia belanjakan buat dirinya atau memiliki sesuatu tetapi masih belum mencukupinya. Juga kepada *ibnu sabil*, yaitu seorang musafir yang memerlukan biaya dan keperluan hidupnya dalam perjalanan, karena biayanya kehabisan di tengah jalan (Katsir, 2004:377).

BAB III

PEMBAHASAN

Bab ini membahas tentang pola *eccentric-distance sum* pada komplemen graf invers grup dihedral. Dalam pencarian pola, terlebih dahulu dicari dan ditunjukkan nilai *eccentric-distance sum* pada komplemen graf invers $D_6, D_8, D_{10}, D_{12}, D_{14}, D_{16}, D_{18}$, dan D_{20}.

3.1 *Eccentric-Distance Sum* pada Komplemen Graf Invers D_6

Himpunan anggota dari grup dihedral-6 adalah $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Jika setiap anggota pada grup dihedral-6 dioperasikan dengan operasi "∘", maka diperoleh tabel Cayley pada Tabel 3.1.

Tabel 3.1 Tabel Cayley Grup Dihedral-6

$\circ$	1	r	r^2	s	sr	sr^2
1	1	r	r^2	s	sr	sr^2
r	r	r^2	1	sr^2	s	sr
r^2	r^2	1	r	sr	sr^2	s
s	s	sr	sr^2	1	r	r^2
sr	sr	sr^2	s	r^2	1	r
sr^2	sr^2	s	sr	r	r^2	1

3.1.1 Invers dari Masing-masing Anggota D_6

Berdasarkan Tabel 3.1, dapat dicari invers dari masing-masing anggota D_6 yaitu sebagai berikut.

$1 \circ 1 = 1$ maka $1^{-1} = 1$

$r \circ r^2 = r^2 \circ r = 1$ maka $r^{-1} = r^2$

$r^2 \circ r = r \circ r^2 = 1$ maka $(r^2)^{-1} = r$

$s \circ s = 1$ maka $s^{-1} = s$

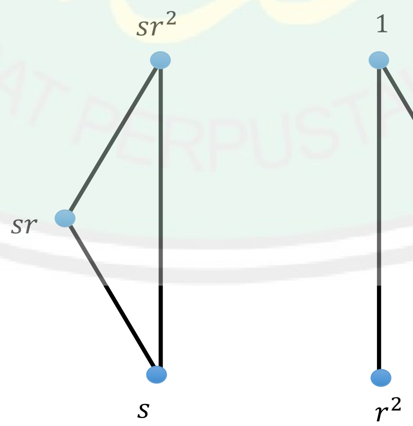
$sr \circ sr = 1$ maka $sr^{-1} = sr$

$sr^2 \circ sr^2 = 1$ maka $(sr^2)^{-1} = sr^2$

Berdasarkan uraian invers dari masing-masing anggota D_6, didapatkan bahwa $1, s, sr$, dan sr^2 invers terhadap dirinya sendiri. Oleh karena itu, dapat dibangun suatu himpunan bagian S dari D_6 yang memuat anggota-anggota dari D_6 yang tidak invers terhadap dirinya sendiri. Sehingga diperoleh $S = \{r, r^2\}$.

3.1.2 Graf Invers Grup Dihedral-6

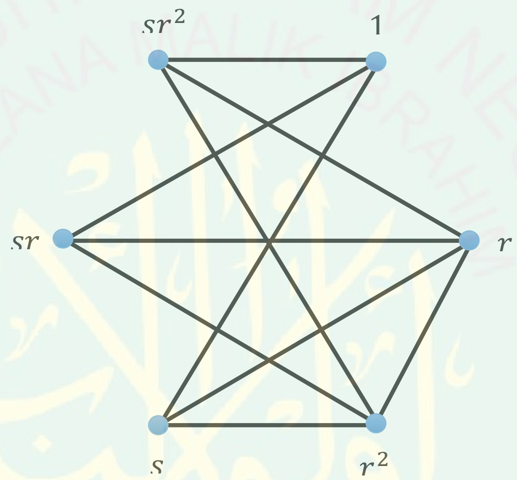
Berdasarkan Definisi 2.6, graf invers yang dibentuk dari grup dihedral-6 disimbolkan $G_S(D_6)$. Himpunan titik pada graf invers $G_S(D_6)$ adalah $V\big(G_S(D_6)\big) = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Dua titik berbeda $u, v \in V\big(G_S(D_6)\big)$ akan terhubung langsung jika dan hanya jika $u \circ v \in S$ atau $v \circ u \in S$. Sehingga berdasarkan Tabel 3.1 diperoleh $E\big(G_S(D_6)\big) = \{(1, r), (1, r^2), (s, sr),\ (s, sr^2), (sr, sr^2)\}$. Oleh karena itu, graf invers grup dihedral-6 $G_S(D_6)$ ditunjukkan pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Graf Invers Grup Dihedral-6 $\big(G_S(D_6)\big)$

3.1.3 Komplemen dari $\boldsymbol{G_S(D_6)}$

Komplemen dari $G_S(D_6)$ disimbolkan dengan $\overline{G_S(D_6)}$ merupakan graf yang memuat himpunan titik $V\big(G_S(D_6)\big)$ yang dua titik adalah terhubung langsung di $\overline{G_S(D_6)}$ jika dan hanya jika kedua titik tersebut tidak terhubung langsung di $G_S(D_6)$. Sehingga $V\big(\overline{G_S(D_6)}\big) = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$ dan $E\big(\overline{G_S(D_6)}\big) = \{(1, s), (1, sr), (1, sr^2), (r, r^2), (r, s), (r, sr), (r, sr^2), (r^2, s), (r^2, sr), (r^2, sr^2)\}$. Oleh karena itu, komplemen graf invers grup dihedral-6 $\big(\overline{G_S(D_6)}\big)$ ditunjukkan pada Gambar 3.2.



Gambar 3.2 Komplemen Graf Invers Grup Dihedral-6 $\big(\overline{G_S(D_6)}\big)$

3.1.4 Jumlah Jarak Masing-masing Titik pada $\boldsymbol{\overline{G_S(D_6)}}$

Berdasarkan Gambar 3.2, dapat dicari jumlah jarak masing-masing titik pada $\overline{G_S(D_6)}$. Jumlah jarak titik u $D(u)$ pada $\overline{G_S(D_6)}$ merupakan jumlah jarak antara titik u dengan semua titik di $\overline{G_S(D_6)}$. Berikut adalah nilai jumlah jarak masing-masing titik pada $\overline{G_S(D_6)}$.

$$D(1) = d(1, r) + d(1, r^2) + d(1, s) + d(1, sr) + d(1, sr^2)$$

$$= 2 + 2 + 1 + 1 + 1 = 7$$

$$D(r) = d(r, 1) + d(r, r^2) + d(r, s) + d(r, sr) + d(r, sr^2)$$

$= 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$

$D(r^2) \ = d(r^2, 1) + d(r^2, r) + d(r^2, s) + d(r^2, sr) + d(r^2, sr^2)$

$= 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$

$D(s) \ = d(s, 1) + d(s, r) + d(s, r^2) + d(s, sr) + d(s, sr^2)$

$= 1 + 1 + 1 + 2 + 2 = 7$

$D(sr) \ = d(sr, 1) + d(sr, r) + d(sr, r^2) + d(sr, s) + d(sr, sr^2)$

$= 1 + 1 + 1 + 2 + 2 = 7$

$D(sr^2) = d(sr^2, 1) + d(sr^2, r) + d(sr^2, r^2) + d(sr^2, s) + d(sr^2, sr)$

$= 1 + 1 + 1 + 2 + 2 = 7$

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa $D(u) = 6 , \forall u \in S$ dan $D(u) = 7 , \forall u \notin S$.

3.1.5 Eksentrisitas Titik pada $\overline{G_S(D_6)}$

Berdasarkan Gambar 3.2, dapat dicari eksentrisitas titik u $e(u)$ pada $\overline{G_S(D_6)}$ yang merupakan jarak terjauh dari titik u ke sebarang titik di $\overline{G_S(D_6)}$. Eksentrisitas titik pada $\overline{G_S(D_6)}$ dijabarkan sebagai berikut.

$e(1) = \max\{d(1, r), d(1, r^2), d(1, s), d(1, sr), d(1, sr^2)\}$

$= \max\{2, 2, 1, 1, 1\} = 2$

$e(r) = \max\{d(r, 1), d(r, r^2), d(r, s), d(r, sr), d(r, sr^2)\}$

$= \max\{2, 1, 1, 1, 1\} = 2$

$e(r^2) = \max\{d(r^2, 1), d(r^2, r), d(r^2, s), d(r^2, sr), d(r^2, sr^2)\}$

$= \max\{2, 1, 1, 1, 1\} = 2$

$e(s) = \max\{d(s, 1), d(s, r), d(s, r^2), d(s, sr), d(s, sr^2)\}$

$= \max\{1, 1, 1, 2, 2\} = 2$

$e(sr) = \max\{d(sr,1), d(sr,r), d(sr,r^2), d(sr,s), d(sr,sr^2)\}$

$= \max\{1,1,1,2,2\} = 2$

$e(sr^2) = \max\{d(sr^2,1), d(sr^2,r), d(sr^2,r^2), d(sr^2,s), d(sr^2,sr)\}$

$= \max\{1,1,1,2,2\} = 2$

Dapat disimpulkan bahwa eksentrisitas setiap titik pada komplemen graf invers grup dihedral-6 $\left(\overline{G_S(D_6)}\right)$ adalah sama yaitu 2.

3.1.6 *Eccentric-Distance Sum* pada $\overline{G_S(D_6)}$

Setelah diketahui jumlah jarak dan eksentrisitas masing masing titik pada $\overline{G_S(D_6)}$, dapat dihitung *eccentric-distance sum* dari $\overline{G_S(D_6)}$ sebagai berikut.

$$\xi^{ds}\left(\overline{G_S(D_6)}\right) = \sum_{u \in V\left(\overline{G_S(D_6)}\right)} e(u)D(u)$$

$$= \big(e(1)D(1)\big) + \big(e(r)D(r)\big) + \big(e(r^2)D(r^2)\big) + \big(e(s)D(s)\big) + \big(e(sr)D(sr)\big) + \big(e(sr^2)D(sr^2)\big)$$

$$= (2 \cdot 7) + (2 \cdot 6) + (2 \cdot 6) + (2 \cdot 7) + (2 \cdot 7) + (2 \cdot 7) = 80$$

Jadi, dapat diketahui bahwa *eccentric-distance sum* pada komplemen graf invers grup dihedral-6 $\left(\overline{G_S(D_6)}\right)$ adalah 80.

3.2 *Eccentric-Distance Sum* pada Komplemen Graf Invers D_8

Himpunan anggota dari grup dihedral-8 adalah $D_8 = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$. Jika setiap anggota pada grup dihedral-8 dioperasikan dengan operasi "∘", maka diperoleh tabel Cayley pada Tabel 3.2.

Tabel 3.2 Tabel Cayley Grup Dihedral-8

$\circ$	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
1	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
r	r	r^2	r^3	1	sr^3	s	sr	sr^2
r^2	r^2	r^3	1	r	sr^2	sr^3	s	sr
r^3	r^3	1	r	r^2	sr	sr^2	sr^2	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	1	r	r^2	r^3
sr	sr	sr^2	sr^3	s	r^3	1	r	r^2
sr^2	sr^2	sr^3	s	sr	r^2	r^3	1	r
sr^3	sr^3	s	sr	sr^2	r	r^2	r^3	1

3.2.1 Invers dari Masing-masing Anggota D_8

Berdasarkan Tabel 3.2 dapat dicari invers dari masing-masing anggota D_8 yaitu sebagai berikut:

$1 \circ 1 = 1$ maka $1^{-1} = 1$

$r \circ r^3 = r^3 \circ r = 1$ maka $r^{-1} = r^3$

$r^2 \circ r^2 = 1$ maka $(r^2)^{-1} = r^2$

$r^3 \circ r = r \circ r^3 = 1$ maka $(r^3)^{-1} = r$

$s \circ s = 1$ maka $s^{-1} = s$

$sr \circ sr = 1$ maka $sr^{-1} = sr$

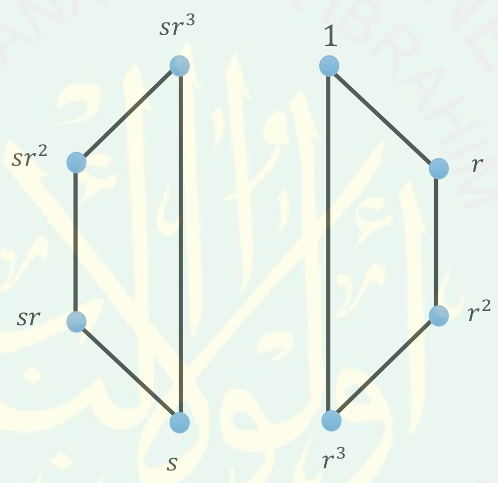
$sr^2 \circ sr^2 = 1$ maka $(sr^2)^{-1} = sr^2$

$sr^3 \circ sr^3 = 1$ maka $(sr^3)^{-1} = sr^3$

Berdasarkan uraian invers dari masing-masing anggota D_8, didapatkan bahwa $1, r^2, s, sr, sr^2$, dan sr^3 invers terhadap dirinya sendiri. Oleh karena itu, dapat dibangun suatu himpunan bagian S dari D_8 yang memuat anggota-anggota dari D_8 yang tidak invers terhadap dirinya sendiri. Sehingga didapatkan $S = \{r, r^3\}$.

3.2.2 Graf Invers Grup Dihedral-8

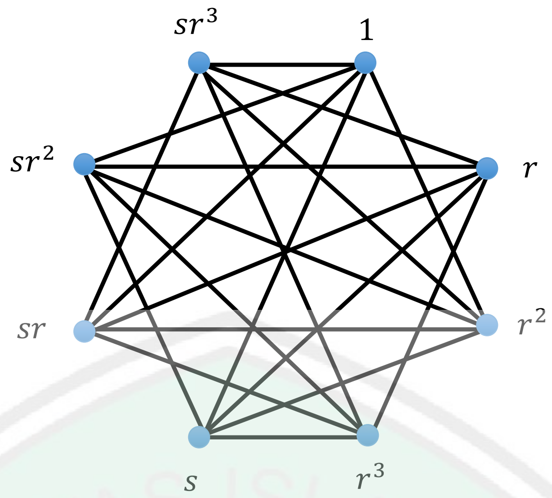
Berdasarkan Definisi 2.6, graf invers yang dibentuk dari grup dihedral-8 disimbolkan $G_S(D_8)$. Himpunan titik pada $G_S(D_8)$ adalah himpunan semua anggota pada D_8, sehingga $V\big(G_S(D_8)\big) = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$. Dua titik yang berbeda u dan v pada $V\big(G_S(D_8)\big)$ akan terhubung langsung jika dan hanya jika $u \circ v \in S$ atau $v \circ u \in S$. Berdasarkan Tabel 3.2 diperoleh $E\big(G_S(D_8)\big) = \{(1,r), (1,r^3), (r,r^2), (r^2,r^3), (s,sr), (s,sr^3), (sr,sr^2), (sr^2,sr^3)\}$. Sehingga, graf invers grup dihedral-8 $\big(G_S(D_8)\big)$ ditunjukkan pada Gambar 3.3.



Gambar 3.3 Graf Invers Grup Dihedral-8 $\big(G_S(D_8)\big)$

3.2.3 Komplemen dari $G_S(D_8)$

Komplemen dari $G_S(D_8)$ disimbolkan dengan $\overline{G_S(D_8)}$. Dengan cara yang sama dengan komplemen graf invers grup dihedral-6 maka diperoleh $V\big(\overline{G_S(D_8)}\big) = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$ dan $E\big(\overline{G_S(D_8)}\big) = \{(1,r^2), (1,s), (1,sr), (1,sr^2), (1,sr^3), (r,r^3), (r,s), (r,sr), (r,sr^2), (r,sr^3), (r^2,s), (r^2,sr), (r^2,sr^2), (r^2,sr^3), (r^3,s), (r^3,sr), (r^3,sr^2), (r^3,sr^3), (s,sr^2), (sr,sr^3)\}$. Oleh karena itu, komplemen graf invers grup dihedral-8 $\big(\overline{G_S(D_8)}\big)$ ditunjukkan pada Gambar 3.4.



Gambar 3.4 Komplemen Graf Invers Grup Dihedral-8 $\left(\overline{G_S(D_8)}\right)$

3.2.4 Jumlah Jarak Masing-masing Titik pada $\overline{G_S(D_8)}$

Berdasarkan Gambar 3.4, dapat dicari jumlah jarak masing-masing titik pada $\overline{G_S(D_8)}$. Jumlah jarak titik u $D(u)$ pada $\overline{G_S(D_8)}$ merupakan jumlah jarak antara titik u dengan semua titik di $\left(\overline{G_S(D_8)}\right)$. Berikut adalah jumlah jarak masing-masing titik pada $\overline{G_S(D_8)}$.

$$D(1) = d(1,r) + d(1,r^2) + d(1,r^3) + d(1,s) + d(1,sr) + d(1,sr^2) + d(r,sr^3)$$

$$= 2 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 9$$

$$D(r) = d(r,1) + d(r,r^2) + d(r,r^3) + d(r,s) + d(r,sr) + d(r,sr^2) + d(r,sr^3)$$

$$= 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 9$$

$$D(r^2) = d(r^2,1) + d(r^2,r) + d(r^2,r^3) + d(r^2,s) + d(r^2,sr) + d(r^2,sr^2) + d(r^2,sr^3)$$

$$= 1 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 9$$

$$D(r^3) = d(r^3,1) + d(r^3,r) + d(r^3,r^2) + d(r^3,s) + d(r^3,sr) + d(r^3,sr^2) +$$

$d(r^3, sr^3)$

$= 2 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 9$

$D(s) = d(s,1) + d(s,r) + d(s,r^2) + d(s,r^3) + d(s,sr) + d(s,sr^2) + d(s,sr^3)$

$= 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 2 = 9$

$D(sr) = d(sr,1) + d(sr,r) + d(sr,r^2) + d(sr,r^3) + d(sr,s) + d(sr,sr^2) + d(sr,sr^3)$

$= 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 1 = 9$

$D(sr^2) = d(sr^2,1) + d(sr^2,r) + d(sr^2,r^2) + d(sr^2,r^3) + d(sr^2,s) + d(sr^2,sr) + d(sr^2,sr^3)$

$= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 = 9$

$D(sr^3) = d(sr^3,1) + d(sr^3,r) + d(sr^3,r^2) + d(sr^3,r^3) + d(sr^3,s) + d(sr^3,sr) + d(sr^3,sr^2)$

$= 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 2 = 9$

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa $D(u) = 9, \forall u \in V\left(\overline{G_S(D_8)}\right)$.

3.2.5 Eksentrisitas Titik pada $\overline{G_S(D_8)}$

Berdasarkan Gambar 3.4, dapat dicari eksentrisitas titik u $e(u)$ pada $\overline{G_S(D_8)}$ yang merupakan jarak maksimal atau jarak terjauh dari titik u ke sebarang titik di $\overline{G_S(D_8)}$. Eksentrisitas titik pada $\overline{G_S(D_8)}$ dijabarkan sebagai berikut:

$e(1) = \max\{d(1,r), d(1,r^2), d(1,r^3), d(1,s), d(1,sr), d(1,sr^2), d(1,sr^3)\}$

$= \max\{2, 1, 2, 1, 1, 1, 1\} = 2$

$e(r) = \max\{d(r,1), d(r,r^2), d(r,r^3), d(r,s), d(r,sr), d(r,sr^2), d(r,sr^3)\}$

$= \max\{2, 1, 2, 1, 1, 1, 1\} = 2$

$e(r^2) = \max\{d(r^2,1), d(r^2,r), d(r^2,r^3), d(r^2,s), d(r^2,sr), d(r^2,sr^2),$

$d(r^2,sr^3)\}$

$= \max\{1, 2, 2, 1, 1, 1, 1\} = 2$

$e(r^3) = \max\{d(r^3,1), d(r^3,r), d(r^3,r^2), d(r^3,s), d(r^3,sr), d(r^3,sr^2),$

$d(r^3,sr^3)\}$

$= \max\{2, 1, 2, 1, 1, 1, 1\} = 2$

$e(s) = \max\{d(s,1), d(s,r), d(s,r^2), d(s,r^3), d(s,sr), d(s,sr^2), d(s,sr^3)\}$

$= \max\{1, 1, 1, 1, 2, 1, 2\} = 2$

$e(sr) = \max\{d(sr,1), d(sr,r), d(sr,r^2), d(sr,r^3), d(sr,s), d(sr,sr^2),$

$d(sr,sr^3)\}$

$= \max\{1, 1, 1, 1, 2, 2, 1\} = 2$

$e(sr^2) = \max\{d(sr^2,1), d(sr^2,r), d(sr^2,r^2), d(sr^2,r^3), d(sr^2,s), d(sr^2,sr),$

$d(sr^2,sr^3)\}$

$= \max\{1, 1, 1, 1, 1, 2, 2\} = 2$

$e(sr^3) = \max\{d(sr^3,1), d(sr^3,r), d(sr^3,r^2), d(sr^3,r^3), d(sr^3,s), d(sr^3,sr),$

$d(sr^3,sr^2)\}$

$= \max\{1, 1, 1, 1, 2, 1, 2\} = 2$

Dapat disimpulkan bahwa eksentrisitas setiap titik pada komplemen graf invers grup dihedral-8 $\left(\overline{G_S(D_8)}\right)$ adalah sama yaitu 2.

3.2.6 *Eccentric-Distance Sum* pada $\overline{G_S(D_8)}$

Setelah diketahui jumlah jarak dan eksentrisitas masing masing titik pada $\overline{G_S(D_8)}$, dapat dihitung *eccentric-distance sum* dari $\overline{G_S(D_8)}$ sebagai berikut:

$$\xi^{ds}\left(\overline{G_S(D_8)}\right) = \sum_{u \in V\left(\overline{G_S(D_8)}\right)} e(u)D(u)$$

$$= \big(e(1)D(1)\big) + \big(e(r)D(r)\big) + \big(e(r^2)D(r^2)\big) + \big(e(r^3)D(r^3)\big) + \big(e(s)D(s)\big) + \big(e(sr)D(sr)\big) + \big(e(sr^2)D(sr^2)\big) + \big(e(sr^3)D(sr^3)\big)$$

$$= (2 \cdot 9) + (2 \cdot 9) + (2 \cdot 9) + (2 \cdot 9) + (2 \cdot 9) + (2 \cdot 9) + (2 \cdot 9) + (2 \cdot 9)$$

$$= 144$$

Jadi, dapat diketahui bahwa *eccentric-distance sum* dari komplemen graf invers grup dihedral-8 $\left(\overline{G_S(D_8)}\right)$ adalah 144.

3.3 *Eccentric-Distance Sum* pada Komplemen Graf Invers D_{10}

Himpunan anggota dari grup dihedral-10 adalah $D_{10} = \{1, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$. Jika setiap anggota pada grup dihedral-10 dioperasikan dengan operasi "∘", maka diperoleh tabel Cayley pada Tabel 3.3.

Tabel 3.3 Tabel Cayley Grup Dihedral-10

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
1	1	r	r^2	r^3	r^4	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r	r	r^2	r^3	r^4	1	sr^4	s	sr	sr^2	sr^3
r^2	r^2	r^3	r^4	1	r	sr^3	sr^4	s	sr	sr^2
r^3	r^3	r^4	1	r	r^2	sr^2	sr^3	sr^4	s	sr
r^4	r^4	1	r	r^2	r^3	sr	sr^2	sr^3	sr^4	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	1	r	r^2	r^3	r^4
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	s	r^4	1	r	r^2	r^3
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	s	sr	r^3	r^4	1	r	r^2
sr^3	sr^3	sr^4	s	sr	sr^2	r^2	r^3	r^4	1	r
sr^4	sr^4	s	sr	sr^2	sr^3	r	r^2	r^3	r^4	1

3.3.1 Invers dari masing-masing anggota D_{10}

Berdasarkan Tabel 3.3 dapat dicari invers dari masing-masing anggota D_{10} yaitu sebagai berikut:

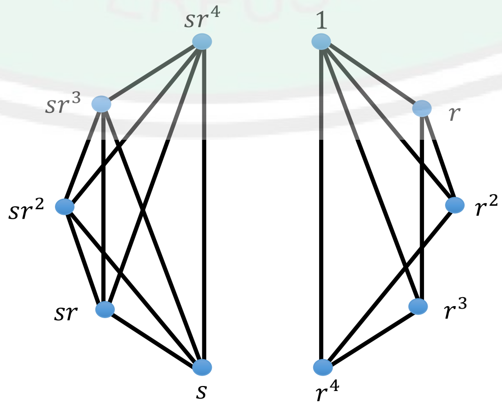
$$1^{-1} = 1, \quad r^{-1} = r^4, \quad (r^2)^{-1} = r^3, \quad (r^3)^{-1} = r^2, \quad (r^4)^{-1} = r,$$

$$s^{-1} = s, \quad sr^{-1} = sr, \quad (sr^2)^{-1} = sr^2, \quad (sr^3)^{-1} = sr^3, \quad (sr^4)^{-1} = sr^4.$$

Berdasarkan uraian invers dari masing-masing anggota D_{10}, didapatkan bahwa $1, s, sr, sr^2, sr^3$, dan sr^4 invers terhadap dirinya sendiri. Oleh karena itu, dapat dibangun suatu himpunan bagian S dari D_{10} yang memuat anggota-anggota dari D_{10} yang tidak invers terhadap dirinya sendiri. Sehingga didapatkan $S = \{r, r^2, r^3, r^4\}$.

3.3.2 Graf Invers Grup Dihedral-10

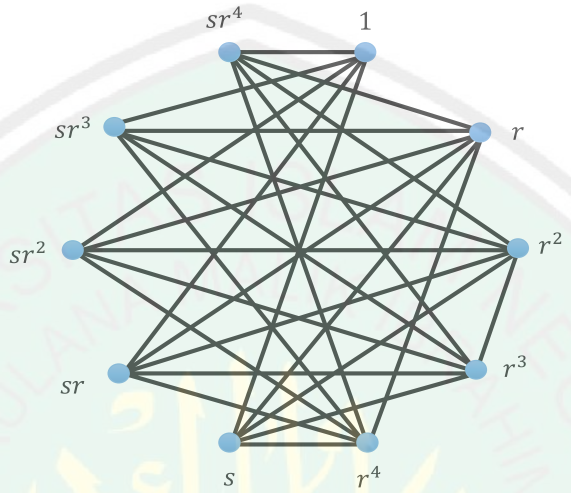
Berdasarkan Definisi 2.6, graf invers yang dibentuk dari grup dihedral-10 disimbolkan $G_S(D_{10})$. Himpunan titik pada graf invers dihedral-10 adalah $V\big(G_S(D_{10})\big) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$. Dengan menggunakan cara yang sama dengan 3.1.2 maka graf invers grup dihedral-10 $\big(G_S(D_{10})\big)$ ditunjukkan pada Gambar 3.5.



Gambar 3.5 Graf Invers Grup Dihedral-10 $\big(G_S(D_{10})\big)$

3.3.3 Komplemen dari $G_S(D_{10})$

Komplemen dari $G_S(D_{10})$ disimbolkan dengan $\overline{G_S(D_{10})}$. Dengan cara yang sama dengan komplemen graf invers grup dihedral-6 pada 3.1.3 maka diperoleh komplemen graf invers grup dihedral-10 $\left(\overline{G_S(D_{10})}\right)$ ditunjukkan pada Gambar 3.6.



Gambar 3.6 Komplemen Graf Invers Grup Dihedral-10 $\left(\overline{G_S(D_{10})}\right)$

3.3.4 Jumlah Jarak Masing-masing Titik pada $\overline{G_S(D_{10})}$

Berdasarkan gambar 3.6, dapat dicari jumlah jarak masing-masing titik pada $\overline{G_S(D_{10})}$. Jumlah jarak titik u $D(u)$ pada $\overline{G_S(D_{10})}$ merupakan jumlah jarak antara titik u dengan semua titik di $\left(\overline{G_S(D_{10})}\right)$. Dengan menggunakan cara yang sama pada 3.1.4 maka dapat disimpulkan bahwa pada $\overline{G_S(D_{10})}$ berlaku $D(u) = 12, \forall u \in S$ dan $D(u) = 13, \forall u \notin S$.

3.3.5 Eksentrisitas Titik pada $\overline{G_S(D_{10})}$

Berdasarkan Gambar 3.6, dapat dicari eksentrisitas titik u $e(u)$ pada $\overline{G_S(D_{10})}$ yang merupakan jarak terjauh dari titik u ke sebarang titik di $\overline{G_S(D_{10})}$. Dengan menggunakan cara yang sama pada 3.1.5 maka dapat disimpulkan bahwa eksentrisitas setiap titik pada komplemen graf invers grup dihedral-10 $\left(\overline{G_S(D_{10})}\right)$ adalah sama yaitu 2.

3.3.6 *Eccentric-Distance Sum* pada $\overline{G_S(D_{10})}$

Setelah diketahui jumlah jarak dan eksentrisitas masing masing titik pada $\overline{G_S(D_{10})}$, dapat dihitung *eccentric-distance sum* dari $\overline{G_S(D_{10})}$ sebagai berikut:

$$\xi^{ds}\left(\overline{G_S(D_{10})}\right) = \sum_{u \in V\left(\overline{G_S(D_{10})}\right)} e(u)D(u)$$

$$= \left(e(1)D(1)\right) + \left(e(r)D(r)\right) + \left(e(r^2)D(r^2)\right) + \left(e(r^3)D(r^3)\right) +$$
$$\left(e(r^4)D(r^4)\right) + \left(e(s)D(s)\right) + \left(e(sr)D(sr)\right) +$$
$$\left(e(sr^2)D(sr^2)\right) + \left(e(sr^3)D(sr^3)\right) + \left(e(sr^4)D(sr^4)\right)$$
$$= (2 \cdot 13) + (2 \cdot 12) + (2 \cdot 12) + (2 \cdot 12) + (2 \cdot 12) + (2 \cdot 13)$$
$$+(2 \cdot 13) + (2 \cdot 13) + (2 \cdot 13) + (2 \cdot 13) = 252$$

Jadi, dapat diketahui bahwa *eccentric-distance sum* dari komplemen graf invers grup dihedral-10 $\left(\overline{G_S(D_{10})}\right)$ adalah 252.

3.4 *Eccentric-Distance Sum* pada Komplemen Graf Invers D_{12}

Himpunan anggota dari grup dihedral-12 adalah $D_{12} = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$. Jika setiap anggota pada grup dihedral-12 dioperasikan dengan operasi "∘", maka diperoleh tabel Cayley pada Tabel 3.4.

Tabel 3.4 Tabel Cayley Grup Dihedral-12

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3

r^3	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2
r^4	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr
r^5	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2
sr^4	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r
sr^5	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1

3.4.1 Invers dari Masing-masing Anggota D_{12}

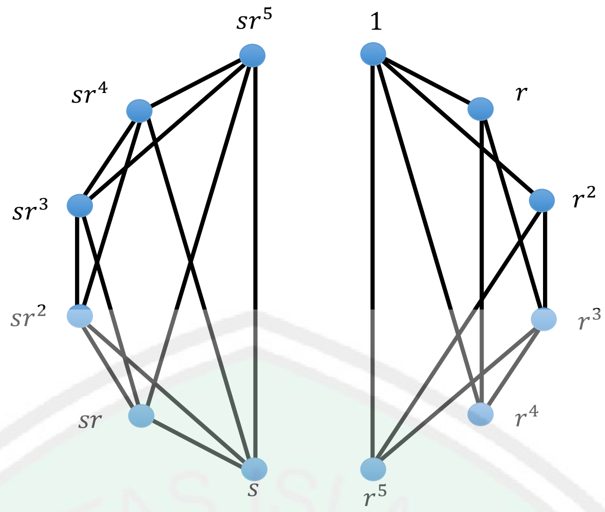
Berdasarkan Tabel 3.4 dapat dicari invers dari masing-masing anggota D_{12} yaitu sebagai berikut:

$1^{-1} = 1$, $r^{-1} = r^5$, $(r^2)^{-1} = r^4$, $(r^3)^{-1} = r^3$, $(r^4)^{-1} = r^2$, $(r^5)^{-1} = r$, $s^{-1} = s$, $sr^{-1} = sr$, $(sr^2)^{-1} = sr^2$, $(sr^3)^{-1} = sr^3$, $(sr^4)^{-1} = sr^4$, $(sr^5)^{-1} = sr^5$.

Berdasarkan uraian invers dari masing-masing anggota D_{12}, didapatkan bahwa $1, r^3, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4$, dan sr^5 invers terhadap dirinya sendiri. Oleh karena itu, dapat dibangun suatu himpunan bagian S dari D_{12} yang memuat anggota-anggota dari D_{12} yang tidak invers terhadap dirinya sendiri. Sehingga didapatkan $S = \{r, r^2, r^4, r^5\}$.

3.4.2 Graf Invers Grup Dihedral-12

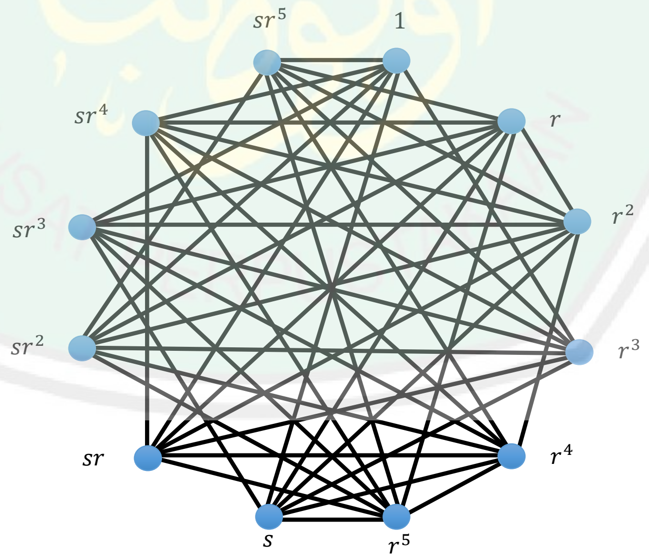
Graf invers yang dibangun dari grup dihedral-12 disimbolkan $G_S(D_{12})$. Berdasarkan Tabel 3.4 dan dengan cara yang sama dengan 3.1.2 maka graf invers grup dihedral-12 $\left(G_S(D_{12})\right)$ ditunjukkan pada Gambar 3.7.



Gambar 3.7 Graf Invers Grup Dihedral-12 $\left(G_S(D_{12})\right)$

3.4.3 Komplemen dari $G_S(D_{12})$

Komplemen dari $G_S(D_{12})$ disimbolkan dengan $\overline{G_S(D_{12})}$. Dengan cara yang sama pada 3.1.3 maka diperoleh komplemen graf invers grup dihedral-12 $\left(\overline{G_S(D_{12})}\right)$ ditunjukkan pada Gambar 3.8.



Gambar 3.8 Komplemen Graf Invers Grup Dihedral-12 $\left(\overline{G_S(D_{12})}\right)$

3.4.4 Jumlah Jarak Masing-masing Titik pada $\overline{G_S(D_{12})}$

Berdasarkan Gambar 3.8, dapat dicari jumlah jarak masing-masing titik pada $\overline{G_S(D_{12})}$. Jumlah jarak titik u $D(u)$ pada $\overline{G_S(D_{12})}$ merupakan jumlah jarak antara titik u dengan semua titik di $\left(\overline{G_S(D_{12})}\right)$. Dengan menggunakan cara yang sama pada 3.1.4 maka dapat disimpulkan bahwa pada $\overline{G_S(D_{12})}$ berlaku $D(u) = 14, \forall u \in S$ dan $D(u) = 15\ , \forall u \notin S$.

3.4.5 Eksentrisitas Titik pada $\overline{G_S(D_{12})}$

Berdasarkan Gambar 3.8, dapat dicari eksentrisitas titik u pada $\overline{G_S(D_{12})}$ $e(u)$ yang merupakan jarak terjauh dari titik u ke sebarang titik di $\overline{G_S(D_{12})}$. Dengan menggunakan cara yang sama pada 3.1.5 maka dapat disimpulkan bahwa eksentrisitas setiap titik pada komplemen graf invers grup dihedral-12 $\left(\overline{G_S(D_{12})}\right)$ adalah sama yaitu 2.

3.4.6 *Eccentric-Distance Sum* pada $\overline{G_S(D_{12})}$

Setelah diketahui jumlah jarak dan eksentrisitas masing masing titik pada $\overline{G_S(D_{12})}$, dapat dihitung *eccentric-distance sum* dari $\overline{G_S(D_{12})}$ sebagai berikut:

$$\xi^{ds}\left(\overline{G_S(D_{12})}\right) = \sum_{u \in V\left(\overline{G_S(D_{10})}\right)} e(u)D(u)$$

$$= \big(e(1)D(1)\big) + \big(e(r)D(r)\big) + \big(e(r^2)D(r^2)\big) + \big(e(r^3)D(r^3)\big) + \big(e(r^4)D(r^4)\big) + \big(e(r^5)D(r^5)\big) + \big(e(s)D(s)\big) + \big(e(sr)D(sr)\big) + \big(e(sr^2)D(sr^2)\big) + \big(e(sr^3)D(sr^3)\big) + \big(e(sr^4)D(sr^4)\big) + \big(e(sr^5)D(sr^5)\big)$$

$$= (2 \cdot 15) + (2 \cdot 14) + (2 \cdot 14) + (2 \cdot 15) + (2 \cdot 14) + (2 \cdot 14)$$

$$+(2 \cdot 15) + (2 \cdot 15) + (2 \cdot 15) + (2 \cdot 15) + (2 \cdot 15) + (2 \cdot 15)$$

$$= 352$$

Jadi, dapat diketahui bahwa *eccentric-distance sum* dari komplemen graf invers grup dihedral-12 $\left(\overline{G_S(D_{12})}\right)$ adalah 352.

3.5 *Eccentric-Distance Sum* pada Komplemen Graf Invers D_{14}

Himpunan anggota dari grup dihedral-14 adalah $D_{14} = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}$. Jika setiap anggota pada grup dihedral-14 dioperasikan dengan operasi "∘", maka diperoleh tabel Cayley pada Tabel 3.5.

Tabel 3.5 Tabel Cayley Grup Dihedral-14

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^3	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3
r^4	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2
r^5	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr
r^6	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3
sr^4	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2
sr^5	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r
sr^6	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1

3.5.1 Invers dari Masing-masing Anggota D_{14}

Berdasarkan Tabel 3.5 dapat dicari invers dari masing-masing anggota D_{14} yaitu sebagai berikut:

$1^{-1} = 1$, $r^{-1} = r^6$, $(r^2)^{-1} = r^5$, $(r^3)^{-1} = r^4$,

$(r^4)^{-1} = r^3$, $(r^5)^{-1} = r^2$, $(r^6)^{-1} = r$, $s^{-1} = s$,

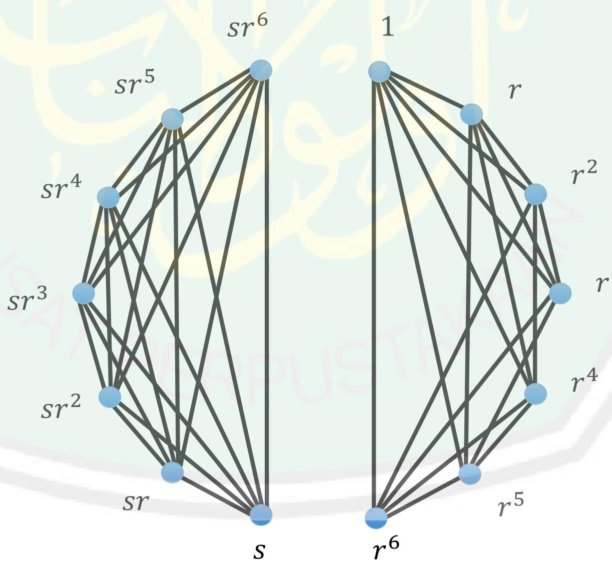
$sr^{-1} = sr$, $(sr^2)^{-1} = sr^2$, $(sr^3)^{-1} = sr^3$, $(sr^4)^{-1} = sr^4$,

$(sr^5)^{-1} = sr^5$, $(sr^6)^{-1} = sr^6$.

Berdasarkan uraian invers dari masing-masing anggota D_{14}, didapatkan bahwa $1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5$, dan sr^6 invers terhadap dirinya sendiri. Oleh karena itu, $S = \{r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\}$.

3.5.2 Graf Invers Grup Dihedral-14

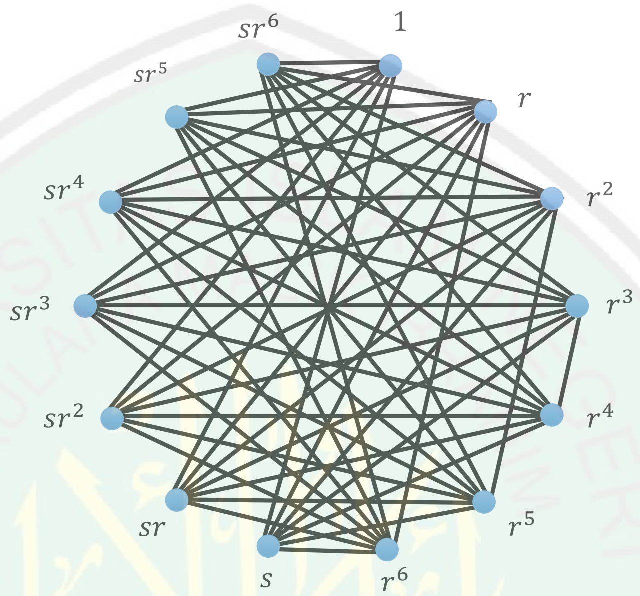
Graf invers yang dibentuk dari grup dihedral-14 disimbolkan $G_S(D_{14})$. Berdasarkan Tabel 3.5 dan dengan cara yang sama dengan 3.1.2 maka graf invers grup dihedral-14 $\left(G_S(D_{14})\right)$ ditunjukkan pada Gambar 3.9.



Gambar 3.9 Graf Invers Grup Dihedral-14 $\left(G_S(D_{14})\right)$

3.5.3 Komplemen dari $G_S(D_{14})$

Komplemen dari $G_S(D_{14})$ disimbolkan dengan $\overline{G_S(D_{14})}$. Dengan cara yang sama dengan komplemen graf invers grup dihedral-6 pada 3.1.3 maka $\left(\overline{G_S(D_{14})}\right)$ ditunjukkan pada Gambar 3.10.



Gambar 3.10 Komplemen Graf Invers Grup Dihedral-14 $\left(\overline{G_S(D_{14})}\right)$

3.5.4 Jumlah Jarak Masing-masing Titik pada $\overline{G_S(D_{14})}$

Berdasarkan Gambar 3.10, dapat dicari jumlah jarak masing-masing titik pada $\overline{G_S(D_{14})}$. Jumlah jarak titik u $D(u)$ pada $\overline{G_S(D_{14})}$ merupakan jumlah jarak antara titik u dengan semua titik di $\left(\overline{G_S(D_{14})}\right)$. Dengan menggunakan cara yang sama pada 3.1.4 maka dapat disimpulkan bahwa pada $\overline{G_S(D_{14})}$ berlaku $D(u) = 18, \forall u \in S$ dan $D(u) = 19, \forall u \notin S$.

3.5.5 Eksentrisitas Titik pada $\overline{G_S(D_{14})}$

Berdasarkan Gambar 3.10, dapat dicari eksentrisitas titik u $e(u)$ pada $\overline{G_S(D_{14})}$ yang merupakan jarak terjauh dari titik u ke sebarang titik di $\overline{G_S(D_{14})}$. Dengan menggunakan cara yang sama pada 3.1.5 maka dapat disimpulkan bahwa nilai eksentrisitas setiap titik pada komplemen graf invers grup dihedral-14 $\left(\overline{G_S(D_{14})}\right)$ adalah sama yaitu 2.

3.5.6 *Eccentric-Distance Sum* pada $\overline{G_S(D_{14})}$

Setelah diketahui jumlah jarak dan eksentrisitas masing masing titik pada $\overline{G_S(D_{14})}$, dapat dihitung *eccentric-distance sum* dari $\overline{G_S(D_{14})}$ sebagai berikut:

$$\xi^{ds}\left(\overline{G_S(D_{14})}\right) = \sum_{u \in V\left(\overline{G_S(D_{14})}\right)} e(u)D(u)$$

$$= \left(e(1)D(1)\right) + \left(e(r)D(r)\right) + \left(e(r^2)D(r^2)\right) + \left(e(r^3)D(r^3)\right) + \left(e(r^4)D(r^4)\right) + \left(e(r^5)D(r^5)\right) + \left(e(r^6)D(r^6)\right) + \left(e(s)D(s)\right) + \left(e(sr)D(sr)\right) + \left(e(sr^2)D(sr^2)\right) + \left(e(sr^3)D(sr^3)\right) + \left(e(sr^4)D(sr^4)\right) + \left(e(sr^5)D(sr^5)\right) + \left(e(sr^6)D(sr^6)\right)$$

$$= (2 \cdot 19) + (2 \cdot 18) + (2 \cdot 18) + (2 \cdot 18) + (2 \cdot 18) + (2 \cdot 18) + (2 \cdot 18) + (2 \cdot 19) + (2 \cdot 19) + (2 \cdot 19) + (2 \cdot 19) + (2 \cdot 19) + (2 \cdot 19) + (2 \cdot 19)$$

$$= 520$$

Jadi, dapat diketahui bahwa *eccentric-distance sum* dari komplemen graf invers grup dihedral-14 $\left(\overline{G_S(D_{14})}\right)$ adalah 520.

3.6 *Eccentric-Distance Sum* pada Komplemen Graf Invers D_{16}

Himpunan anggota dari grup dihedral-16 adalah $D_{16} = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}$. Jika setiap anggota pada grup dihedral-16 dioperasikan dengan operasi "$\circ$", maka diperoleh tabel Cayley pada Tabel 3.6.

Tabel 3.6 Tabel Cayley Grup Dihedral-16

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r^3	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^4	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3
r^5	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2
r^6	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr
r^7	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^4	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3
sr^5	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2
sr^6	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r
sr^7	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1

3.6.1 Invers dari Masing-masing Anggota D_{16}

Berdasarkan Tabel 3.6, invers dari masing-masing anggota D_{16} yaitu sebagai berikut:

$1^{-1} = 1,$ $\quad r^{-1} = r^7,$ $\quad (r^2)^{-1} = r^6,$ $\quad (r^3)^{-1} = r^5,$

$(r^4)^{-1} = r^4,$ $\quad (r^5)^{-1} = r^3,$ $\quad (r^6)^{-1} = r^2,$ $\quad (r^7)^{-1} = r,$

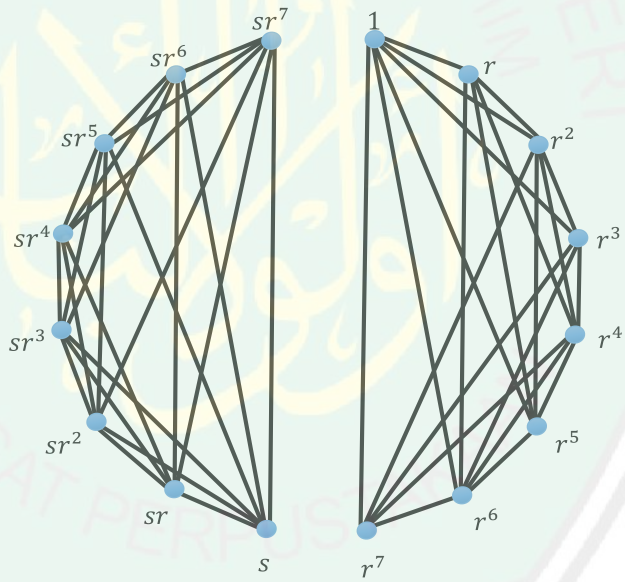
$s^{-1} = s,$ $\quad sr^{-1} = sr,$ $\quad (sr^2)^{-1} = sr^2,$ $\quad (sr^3)^{-1} = sr^3,$

$(sr^4)^{-1} = sr^4$, $(sr^5)^{-1} = sr^5$, $(sr^6)^{-1} = sr^6$. $(sr^7)^{-1} = sr^7$.

Sehingga didapatkan bahwa $1, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6$, dan sr^7 invers terhadap dirinya sendiri. Oleh karena itu, dapat dibangun suatu himpunan bagian S dari D_{16} yang memuat anggota-anggota dari D_{16} yang tidak invers terhadap dirinya sendiri. Sehingga didapatkan $S = \{r, r^2, r^3, r^5, r^6, r^7\}$.

3.6.2 Graf Invers Grup Dihedral-16

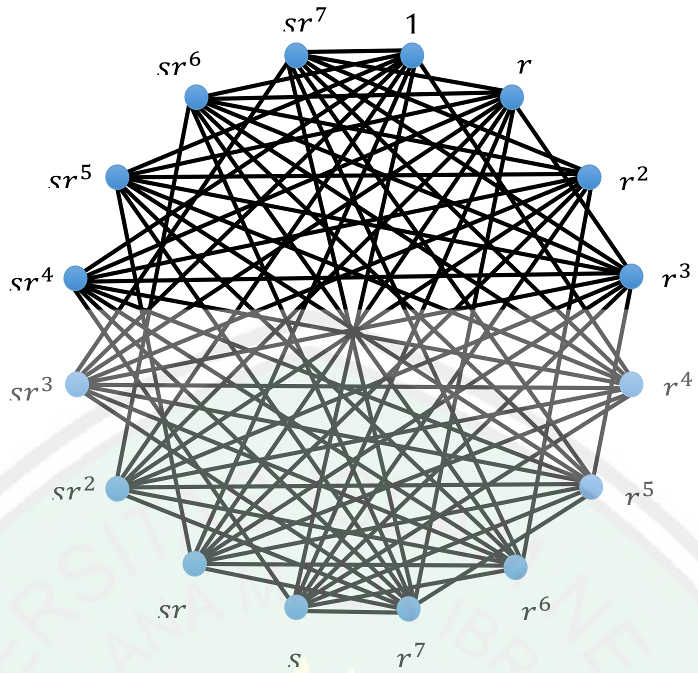
Graf invers yang dibentuk dari grup dihedral-16 disimbolkan $G_S(D_{16})$. Berdasarkan Tabel 3.6 dan dengan cara yang sama dengan 3.1.2 maka graf invers grup dihedral-16 $G_S(D_{16})$ ditunjukkan pada Gambar 3.11.



Gambar 3.11 Graf Invers Grup Dihedral-16 $(G_S(D_{16}))$

3.6.3 Komplemen dari $G_S(D_{16})$

Komplemen dari $G_S(D_{16})$ disimbolkan dengan $\overline{G_S(D_{16})}$. Dengan cara yang sama dengan komplemen graf invers grup dihedral-6 pada 3.1.3 maka $\left(\overline{G_S(D_{16})}\right)$ ditunjukkan pada Gambar 3.12.



Gambar 3.12 Komplemen Graf Invers Grup Dihedral-16 $\left(\overline{G_S(D_{16})}\right)$

3.6.4 Jumlah Jarak Masing-masing Titik pada $\overline{G_S(D_{16})}$

Berdasarkan Gambar 3.12, dapat dicari jumlah jarak masing-masing titik pada $\overline{G_S(D_{16})}$. Jumlah jarak titik u $D(u)$ pada $\overline{G_S(D_{16})}$ merupakan jumlah jarak antara titik u dengan semua titik di $\left(\overline{G_S(D_{16})}\right)$. Dengan menggunakan cara yang sama pada 3.1.4 maka dapat disimpulkan bahwa pada $\overline{G_S(D_{16})}$ berlaku $D(u) = 20$, $\forall u \in S, u \neq r^{\frac{n}{4}}, u \neq r^{n-\frac{n}{4}}$ dan $D(u) = 21$, $\forall u$ lainnya.

3.6.5 Eksentrisitas Titik pada $\overline{G_S(D_{16})}$

Berdasarkan Gambar 3.12, dapat dicari eksentrisitas titik u $e(u)$ pada $\overline{G_S(D_{16})}$ yang merupakan jarak terjauh dari titik u ke sebarang titik di $\overline{G_S(D_{16})}$. Dengan menggunakan cara yang sama pada 3.1.5 maka dapat disimpulkan bahwa eksentrisitas masing-masing titik pada komplemen graf invers grup dihedral-16 $\left(\overline{G_S(D_{16})}\right)$ adalah sama yaitu 2.

3.6.6 *Eccentric-Distance Sum* pada $\overline{G_S(D_{16})}$

Setelah diketahui jumlah jarak dan eksentrisitas masing masing titik pada $\overline{G_S(D_{16})}$, dapat dihitung *eccentric-distance sum* dari $\overline{G_S(D_{16})}$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\xi^{ds}\left(\overline{G_S(D_{16})}\right) &= \sum_{u \in V\left(\overline{G_S(D_{16})}\right)} e(u)D(u) \\
&= \big(e(1)D(1)\big) + \big(e(r)D(r)\big) + \big(e(r^2)D(r^2)\big) + \big(e(r^3)D(r^3)\big) + \\
&\quad \big(e(r^4)D(r^4)\big) + \big(e(r^5)D(r^5)\big) + \big(e(r^6)D(r^6)\big) + \\
&\quad \big(e(r^7)D(r^7)\big) + \big(e(s)D(s)\big) + \big(e(sr)D(sr)\big) + \\
&\quad \big(e(sr^2)D(sr^2)\big) + \big(e(sr^3)D(sr^3)\big) + \big(e(sr^4)D(sr^4)\big) + \\
&\quad \big(e(sr^5)D(sr^5)\big) + \big(e(sr^6)D(sr^6)\big) + \big(e(sr^7)D(sr^7)\big) \\
&= (2 \cdot 21) + (2 \cdot 20) + (2 \cdot 21) + (2 \cdot 20) + (2 \cdot 21) + (2 \cdot 20) \\
&\quad +(2 \cdot 21) + (2 \cdot 20) + (2 \cdot 21) + (2 \cdot 21) + (2 \cdot 21) + (2 \cdot 21) \\
&\quad +(2 \cdot 21) + (2 \cdot 21) + (2 \cdot 21) + (2 \cdot 21) \\
&= 664
\end{aligned}$$

Jadi, dapat diketahui bahwa *eccentric-distance sum* dari komplemen graf invers grup dihedral-16 $\left(\overline{G_S(D_{16})}\right)$ adalah 664.

3.7 *Eccentric-Distance Sum* pada Komplemen Graf Invers D_{18}

Himpunan anggota dari grup dihedral-18 adalah $D_{18} = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7, sr^8\}$. Jika setiap anggota pada grup dihedral-18 dioperasikan dengan operasi "$\circ$", maka diperoleh Tabel 3.7.

Tabel 3.7. Tabel Cayley Grup Dihedral-18

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	1	sr^8	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	1	r	sr^7	sr^8	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
r^3	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	1	r	r^2	sr^6	sr^7	sr^8	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r^4	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	1	r	r^2	r^3	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^5	r^5	r^6	r^7	r^8	1	r	r^2	r^3	r^4	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	s	sr	sr^2	sr^3
r^6	r^6	r^7	r^8	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	s	sr	sr^2
r^7	r^7	r^8	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	s	sr
r^8	r^8	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	s	r^8	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	s	sr	r^7	r^8	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	s	sr	sr^2	r^6	r^7	r^8	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr^4	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	s	sr	sr^2	sr^3	r^5	r^6	r^7	r^8	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^5	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	1	r	r^2	r^3
sr^6	sr^6	sr^7	sr^8	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	1	r	r^2
sr^7	sr^7	sr^8	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	1	r
sr^8	sr^8	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	1

3.7.1 Invers dari Masing-masing Anggota D_{18}

Berdasarkan Tabel 3.7 dapat dicari invers dari masing-masing anggota D_{18} yaitu sebagai berikut:

$1^{-1} = 1,$ $\quad r^{-1} = r^8,$ $\quad (r^2)^{-1} = r^7,$ $\quad (r^3)^{-1} = r^6,$

$(r^4)^{-1} = r^5,$ $\quad (r^5)^{-1} = r^4,$ $\quad (r^6)^{-1} = r^3,$ $\quad (r^7)^{-1} = r^2,$

$(r^8)^{-1} = r,$ $\quad s^{-1} = s,$ $\quad sr^{-1} = sr,$ $\quad (sr^2)^{-1} = sr^2,$

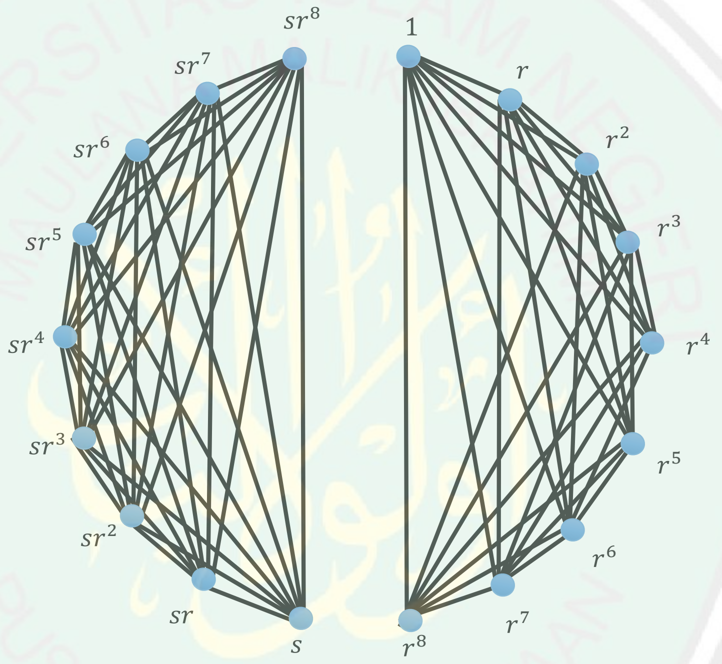
$(sr^3)^{-1} = sr^3,$ $\quad (sr^4)^{-1} = sr^4,$ $\quad (sr^5)^{-1} = sr^5,$ $\quad (sr^6)^{-1} = sr^6.$

$(sr^7)^{-1} = sr^7,$ $\quad (sr^8)^{-1} = sr^8.$

Berdasarkan uraian invers dari masing-masing anggota D_{18}, didapatkan bahwa $S = \{r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8\}$.

3.7.2 Graf Invers Grup Dihedral-18

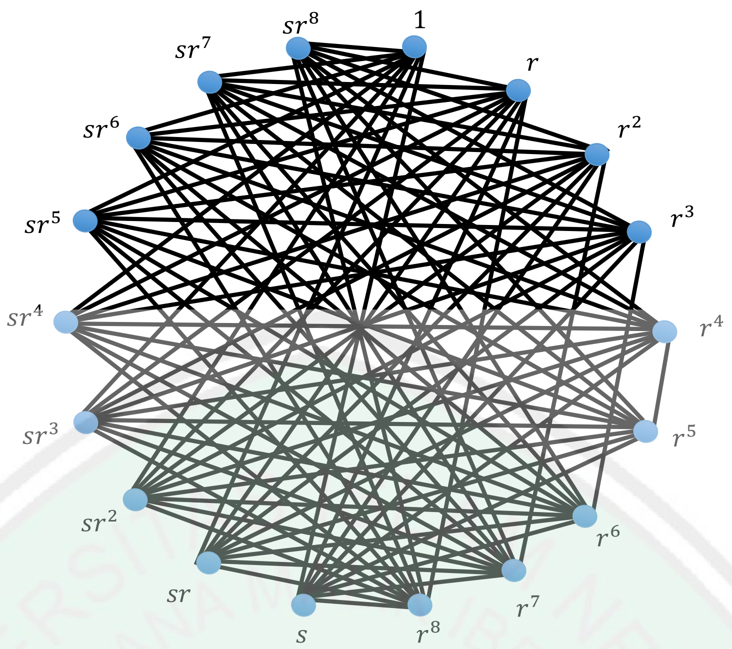
Graf invers yang dibentuk dari grup dihedral-18 disimbolkan $G_S(D_{18})$. Berdasarkan Tabel 3.7 dan dengan cara yang sama dengan 3.1.2 maka graf invers grup dihedral-18 $G_S(D_{18})$ ditunjukkan pada Gambar 3.13.



Gambar 3.13 Graf Invers Grup Dihedral-18 $\left(G_S(D_{18})\right)$

3.7.3 Komplemen dari $G_S(D_{18})$

Komplemen dari $G_S(D_{18})$ disimbolkan dengan $\overline{G_S(D_{18})}$. Dengan cara yang sama dengan komplemen graf invers grup dihedral-6 pada 3.1.3 maka $\left(\overline{G_S(D_{18})}\right)$ ditunjukkan pada Gambar 3.14.



Gambar 3.14 Komplemen Graf Invers Grup Dihedral-18 $\left(\overline{G_S(D_{18})}\right)$

3.7.4 Jumlah Jarak Masing-masing Titik pada $\overline{G_S(D_{18})}$

Berdasarkan Gambar 3.14, dapat dicari jumlah jarak masing-masing titik pada $\overline{G_S(D_{18})}$. Jumlah jarak titik u $D(u)$ pada $\left(\overline{G_S(D_{18})}\right)$ merupakan jumlah jarak antara titik u dengan semua titik di $\left(\overline{G_S(D_{18})}\right)$. Dengan menggunakan cara yang sama pada 3.1.4 maka dapat disimpulkan bahwa pada $\overline{G_S(D_{18})}$ berlaku $D(u) = 24$, $\forall u \in S$ dan $D(u) = 25$, $\forall u \notin S$.

3.7.5 Eksentrisitas Titik pada $\overline{G_S(D_{18})}$

Berdasarkan Gambar 3.14, dapat dicari eksentrisitas titik u $e(u)$ pada $\overline{G_S(D_{18})}$ yang merupakan jarak terjauh dari titik u ke sebarang titik di $\overline{G_S(D_{18})}$. Dengan menggunakan cara yang sama pada 3.1.5 maka dapat disimpulkan bahwa nilai eksentrisitas masing-masing titik pada komplemen graf invers grup dihedral-18 $\left(\overline{G_S(D_{18})}\right)$ adalah sama yaitu 2.

3.7.6 *Eccentric-Distance Sum* pada $\overline{G_S(D_{18})}$

Setelah diketahui jumlah jarak dan eksentrisitas masing masing titik pada $\overline{G_S(D_{18})}$, dapat dihitung *eccentric-distance sum* dari $\overline{G_S(D_{18})}$ sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
\xi^{ds}\left(\overline{G_S(D_{18})}\right) &= \sum_{u\in V\left(\overline{G_S(D_{18})}\right)} e(u)D(u) \\
&= \big(e(1)D(1)\big) + \big(e(r)D(r)\big) + \big(e(r^2)D(r^2)\big) + \big(e(r^3)D(r^3)\big) + \\
&\quad \big(e(r^4)D(r^4)\big) + \big(e(r^5)D(r^5)\big) + \big(e(r^6)D(r^6)\big) + \\
&\quad \big(e(r^7)D(r^7)\big) + \big(e(r^8)D(r^8)\big) + \big(e(s)D(s)\big) + \big(e(sr)D(sr)\big) \\
&\quad + \big(e(sr^2)D(sr^2)\big) + \big(e(sr^3)D(sr^3)\big) + \big(e(sr^4)D(sr^4)\big) + \\
&\quad \big(e(sr^5)D(sr^5)\big) + \big(e(sr^6)D(sr^6)\big) + \big(e(sr^7)D(sr^7)\big) + \\
&\quad \big(e(sr^8)D(sr^8)\big) \\
&= (2\cdot 25) + (2\cdot 24) + (2\cdot 24) + (2\cdot 24) + (2\cdot 24) + (2\cdot 24) \\
&\quad +(2\cdot 24) + (2\cdot 24) + (2\cdot 24) + (2\cdot 25) + (2\cdot 25) + (2\cdot 25) \\
&\quad +(2\cdot 25) + (2\cdot 25) + (2\cdot 25) + (2\cdot 25) + (2\cdot 25) + (2\cdot 25) \\
&= 884
\end{aligned}
$$

Jadi, dapat diketahui bahwa *eccentric-distance sum* dari komplemen graf invers grup dihedral-18 $\left(\overline{G_S(D_{18})}\right)$ adalah 884.

3.8 *Eccentric-Distance Sum* pada Komplemen Graf Inverse D_{20}

Himpunan anggota dari grup dihedral-20 adalah $D_{20} = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8, r^9, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7, sr^8, sr^9\}$. Jika setiap anggota pada grup dihedral-20 dioperasikan dengan operasi "∘", maka diperoleh tabel Cayley pada Tabel 3.8.

Tabel 3.8 Tabel Cayley Grup Dihedral-20

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	1	sr^9	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	1	r	sr^8	sr^9	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7
r^3	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	1	r	r^2	sr^7	sr^8	sr^9	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
r^4	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	1	r	r^2	r^3	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r^5	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	1	r	r^2	r^3	r^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^6	r^6	r^7	r^8	r^9	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	s	sr	sr^2	sr^3
r^7	r^7	r^8	r^9	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	s	sr	sr^2
r^8	r^8	r^9	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	s	sr
r^9	r^9	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^9	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	s	r^9	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	s	sr	r^8	r^9	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	s	sr	sr^2	r^7	r^8	r^9	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
sr^4	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	s	sr	sr^2	sr^3	r^6	r^7	r^8	r^9	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr^5	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^6	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	1	r	r^2	r^3
sr^7	sr^7	sr^8	sr^9	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	1	r	r^2
sr^8	sr^8	sr^9	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	1	r
sr^9	sr^9	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	1

3.8.1 Invers dari Masing-masing Anggota D_{20}

Berdasarkan Tabel 3.8, invers dari masing-masing anggota D_{20} yaitu sebagai berikut:

$1^{-1} = 1$, $r^{-1} = r^9$, $(r^2)^{-1} = r^8$, $(r^3)^{-1} = r^7$,

$(r^4)^{-1} = r^6$, $(r^5)^{-1} = r^5$, $(r^6)^{-1} = r^4$, $(r^7)^{-1} = r^3$,

$(r^8)^{-1} = r^2$, $(r^9)^{-1} = r$, $s^{-1} = s$, $sr^{-1} = sr$,

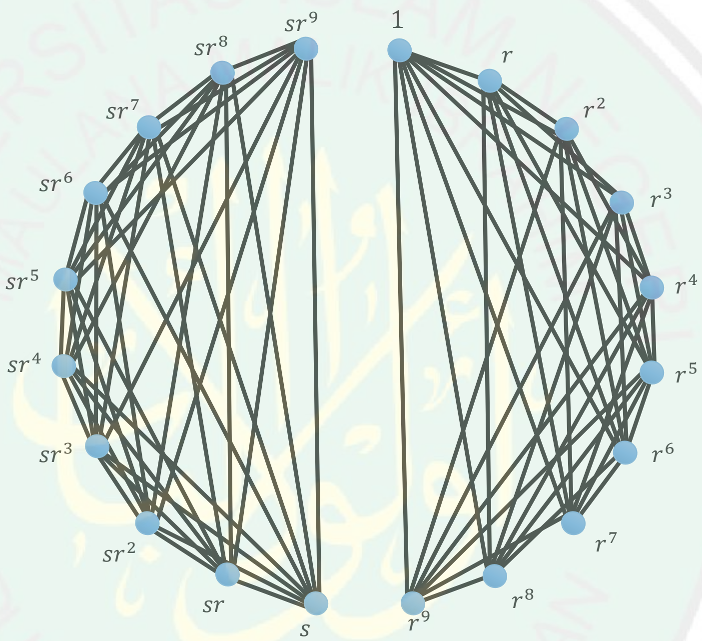
$(sr^2)^{-1} = sr^2$, $(sr^3)^{-1} = sr^3$, $(sr^4)^{-1} = sr^4$, $(sr^5)^{-1} = sr^5$,

$(sr^6)^{-1} = sr^6$. $(sr^7)^{-1} = sr^7$. $(sr^8)^{-1} = sr^8$. $(sr^9)^{-1} = sr^9$.

Berdasarkan uraian invers dari masing-masing anggota D_{20}, didapatkan bahwa $S = \{r, r^2, r^3, r^4, r^6, r^7, \ r^8, r^9\}$.

3.8.2 Graf Invers Grup Dihedral-20

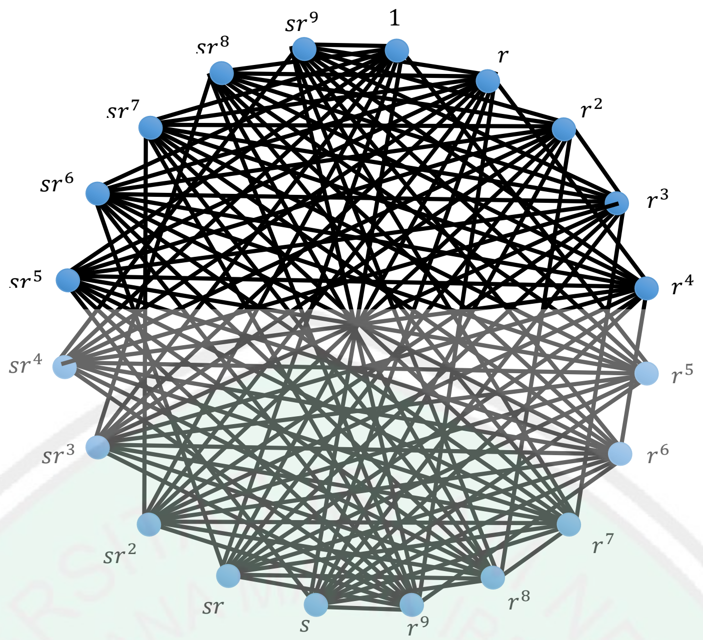
Graf invers yang dibentuk dari grup dihedral-20 disimbolkan $G_S(D_{20})$. Berdasarkan Tabel 3.8 dan dengan cara yang sama dengan 3.1.2 maka graf invers grup dihedral-20 $G_S(D_{20})$ ditunjukkan pada Gambar 3.15.



Gambar 3.15 Graf Invers Grup Dihedral-20 $\left(G_S(D_{20})\right)$

3.6.3 Komplemen dari $G_S(D_{20})$

Komplemen dari $G_S(D_{20})$ disimbolkan dengan $\overline{G_S(D_{20})}$. Dengan cara yang sama pada 3.1.3 maka $\left(\overline{G_S(D_{20})}\right)$ ditunjukkan pada Gambar 3.16.



Gambar 3.16 Komplemen Graf Invers Grup Dihedral-20 $\left(\overline{G_S(D_{20})}\right)$

3.6.4 Jumlah Jarak Masing-masing Titik pada $\overline{G_S(D_{20})}$

Berdasarkan Gambar 3.16, dapat dicari jumlah jarak masing-masing titik pada $\overline{G_S(D_{20})}$. Jumlah jarak titik u $D(u)$ pada $\left(\overline{G_S(D_{20})}\right)$ merupakan jumlah jarak antara titik u dengan semua titik di $\left(\overline{G_S(D_{20})}\right)$. Dengan menggunakan cara yang sama pada 3.1.4 maka dapat disimpulkan bahwa $D(u) = 26\ , \forall u \in S$ dan $D(u) = 27\ , \forall u \notin S$.

3.6.5 Eksentrisitas Titik pada $\overline{G_S(D_{20})}$

Berdasarkan Gambar 3.16, dapat dicari eksentrisitas titik u $e(u)$ pada $\overline{G_S(D_{20})}$ yang merupakan jarak terjauh dari titik u ke sebarang titik di $\overline{G_S(D_{20})}$. Dengan menggunakan cara yang sama pada 3.1.5 maka dapat disimpulkan bahwa nilai eksentrisitas masing-masing titik pada komplemen graf invers grup dihedral-20 $\left(\overline{G_S(D_{20})}\right)$ adalah sama yaitu 2.

3.6.6 *Eccentric-Distance Sum* pada $\overline{G_S(D_{20})}$

Setelah diketahui jumlah jarak dan eksentrisitas masing masing titik pada $\overline{G_S(D_{20})}$, dapat dihitung *eccentric-distance sum* dari $\overline{G_S(D_{20})}$ sebagai berikut:

$$\xi^{ds}\left(\overline{G_S(D_{20})}\right) = \sum_{u \in V\left(\overline{G_S(D_{20})}\right)} e(u)D(u)$$

$$= \big(e(1)D(1)\big) + \big(e(r)D(r)\big) + \big(e(r^2)D(r^2)\big) + \big(e(r^3)D(r^3)\big) + \big(e(r^4)D(r^4)\big) + \big(e(r^5)D(r^5)\big) + \big(e(r^6)D(r^6)\big) + \big(e(r^7)D(r^7)\big) + \big(e(r^8)D(r^8)\big) + \big(e(r^9)D(r^9)\big) + \big(e(s)D(s)\big) + \big(e(sr)D(sr)\big) + \big(e(sr^2)D(sr^2)\big) + \big(e(sr^3)D(sr^3)\big) + \big(e(sr^4)D(sr^4)\big) + \big(e(sr^5)D(sr^5)\big) + \big(e(sr^6)D(sr^6)\big) + \big(e(sr^7)D(sr^7)\big) + \big(e(sr^8)D(sr^8)\big) + \big(e(sr^9)D(sr^9)\big)$$

$$= (2 \cdot 27) + (2 \cdot 26) + (2 \cdot 26) + (2 \cdot 26) + (2 \cdot 26) + (2 \cdot 27) + (2 \cdot 26) + (2 \cdot 26) + (2 \cdot 26) + (2 \cdot 26) + (2 \cdot 27) + (2 \cdot 27) + (2 \cdot 27) + (2 \cdot 27) + (2 \cdot 27) + (2 \cdot 27) + (2 \cdot 27) + (2 \cdot 27) + (2 \cdot 27) + (2 \cdot 27)$$

$$= 1064$$

Jadi, dapat diketahui bahwa *eccentric-distance sum* dari komplemen graf invers grup dihedral-20 $\left(\overline{G_S(D_{20})}\right)$ adalah 1064.

3.9 Pola *Eccentric-Distance Sum* pada $\overline{G_S(D_{2n})}$

Berdasarkan pengamatan pada beberapa komplemen graf invers grup $D_6, D_8, D_{10}, D_{12}, D_{14} D_{16}, D_{18}$, dan D_{20}, maka diperoleh pola unsur-unsur di S dan banyaknya anggota S yang ditunjukkan pada Tabel 3.9 sebagai berikut.

Tabel 3.9 Unsur di S dan Banyaknya Anggota S dari Grup Dihedral

	n	Unsur-unsur dari S	Banyaknya anggota S ($\|S\|$)
D_6	3	$\{r, r^2\}$	2
D_8	4	$\{r, r^3\}$	2
D_{10}	5	$\{r, r^2, r^3, r^4\}$	4
D_{12}	6	$\{r, r^2, r^4, r^5\}$	4
D_{14}	7	$\{r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\}$	6
D_{16}	8	$\{r, r^2, r^3, r^5, r^6, r^7\}$	6
D_{18}	9	$\{r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8\}$	8
D_{20}	10	$\{r, r^2, r^3, r^4, r^6, r^7, r^8 r,^9\}$	8
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
D_{2n}	n	$\{r^i \| i = 1, 2, \dots, n-1\}$, untuk n ganjil $\left\{r^i \| i \neq \frac{n}{2}, i = 1, 2, \dots, n-1\right\}$, untuk n genap	$n-1$, untuk n ganjil $n-2$, untuk n genap

Teorema 3.1

Untuk setiap grup dihedral D_{2n} dengan $n \geq 3$ dan S adalah himpunan anggota D_{2n} yang tidak invers ke dirinya sendiri, maka

i) $|S| = n - 1$ untuk n ganjil

ii) $|S| = n - 2$ untuk n genap.

Bukti

i) Untuk grup dihedral $D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$ dengan n bernilai ganjil, diperoleh bahwa 1 dan $sr^i, \forall i = 1, 2, \dots, n$ memiliki invers terhadap dirinya sendiri. Sehingga diperoleh unsur-unsur dari S adalah $\{r^i | i = 1, 2, 3, \dots, n-1\}$. Oleh karena itu, $|S| = n - 1$.

ii) Untuk grup dihedral $D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$ dengan n bernilai genap, diperoleh bahwa $1, r^{\frac{n}{2}}$ dan $sr^i, \forall i = 1, 2, \dots, n$ memiliki invers terhadap dirinya sendiri. Sehingga diperoleh unsur-unsur dari S adalah $\left\{r^i | i \neq \frac{n}{2}, i = 1, 2, 3, \ldots, n-1\right\}$. Oleh karena itu, $|S| = n - 2$. ■

Selain itu, diperoleh pola eksentrisitas titik dan jumlah jarak titik pada komplemen graf invers grup dihedral $\overline{G_S(D_{2n})}$ yang ditunjukkan pada Tabel 3.10 sebagai berikut.

Tabel 3.10 Eksentrisitas Titik dan Jumlah Jarak Titik dari $\overline{G_S(D_{2n})}$

	n	Eksentrisitas titik	Jumlah jarak titik
$\overline{G_S(D_6)}$	3	$e(u) = 2$, $\forall u \in V\left(\overline{G_S(D_6)}\right)$	$D(u) = 6, \forall u \in S$ $D(u) = 7, \forall u \notin S$
$\overline{G_S(D_8)}$	4	$e(u) = 2$, $\forall u \in V\left(\overline{G_S(D_8)}\right)$	$D(u) = 9, \forall u \in D_8$
$\overline{G_S(D_{10})}$	5	$e(u) = 2$, $\forall u \in V\left(\overline{G_S(D_{10})}\right)$	$D(u) = 12, \forall u \in S$ $D(u) = 13, \forall u \notin S$
$\overline{G_S(D_{12})}$	6	$e(u) = 2$, $\forall u \in V\left(\overline{G_S(D_{12})}\right)$	$D(u) = 14, \forall u \in S$ $D(u) = 15, \forall u \notin S$
$\overline{G_S(D_{14})}$	7	$e(u) = 2$, $\forall u \in V\left(\overline{G_S(D_{14})}\right)$	$D(u) = 18, \forall u \in S$ $D(u) = 19, \forall u \notin S$
$\overline{G_S(D_{16})}$	8	$e(u) = 2$, $\forall u \in V\left(\overline{G_S(D_{16})}\right)$	$D(u) = 20, \forall u \in S, u \neq r^{\frac{n}{4}}, u \neq r^{n-\frac{n}{4}}$ $D(u) = 21$, u lainnya
$\overline{G_S(D_{18})}$	9	$e(u) = 2$, $\forall u \in V\left(\overline{G_S(D_{18})}\right)$	$D(u) = 24, \forall u \in S$ $D(u) = 25, \forall u \notin S$
$\overline{G_S(D_{20})}$	10	$e(u) = 2$, $\forall u \in V\left(\overline{G_S(D_{20})}\right)$	$D(u) = 26, \forall u \in S$ $D(u) = 27, \forall u \notin S$
⋮	⋮	⋮	⋮
$\overline{G_S(D_{2n})}$	n	$e(u) = 2$, $\forall u \in V\left(\overline{G_S(D_{2n})}\right)$	$\forall n \geq 5$ Untuk n ganjil $D(u) = 3n - 3, \forall u \in S$ $D(u) = 3n - 2, \forall u \notin S$ Untuk n genap

			Jika $n = 4k + 2, k \in \mathbb{N}$ maka $D(u) = 3n - 4, \forall u \in S$ $D(u) = 3n - 3, \forall u \notin S$ Jika $n = 4(k+1), k \in \mathbb{N}$ maka $D(u) = 3n - 4, \forall u \in S, u \neq r^{\frac{n}{4}}, u \neq r^{n-\frac{n}{4}}$ $D(u) = 3n - 3$, u lainnya

Teorema 3.2

Eksentrisitas setiap titik pada graf komplemen dari graf invers dari grup dihedral $\overline{G_S(D_{2n})}$ adalah 2.

Bukti

Pada $G_S(D_{2n})$, untuk setiap $1 \leq i, j \leq n$ titik r^i tidak akan terhubung langsung dengan titik sr^j karena $r^i \circ sr^j \notin S$. Sehingga pada $\overline{G_S(D_{2n})}$ titik r^i terhubung langsung dengan titik sr^j. Karena setiap titik sr^j juga terhubung langsung dengan titik $r^k, \forall, k = 1, 2, \ldots, n$, maka terdapat lintasan $r^i - r^k$ dengan panjang 2. Begitu juga, karena setiap titik r^i juga terhubung langsung dengan titik $sr^l, \forall l = 1, 2, .., n$, maka terdapat lintasan $sr^j - sr^l$ dengan panjang 2. Sehingga terdapat $d(r^i, r^k) = 2$ dan $d(sr^j, sr^l) = 2$.

Misalkan terdapat $d(r^m, r^i) > 2, \forall m = 1, 2, \ldots, n$, maka terdapat lintasan $r^m - r^i$ dengan panjang lebih dari 2. Titik r^m terhubung langsung dengan titik $sr^j, \forall j = 1, 2, \ldots, n$. Karena panjang lintasan $r^m - r^i$ lebih dari 2, maka titik sr^j belum tentu terhubung langsung dengan titik r^i. Hal tersebut kontradiksi dengan pernyataan bahwa pada $\overline{G_S(D_{2n})}$ titik r^i terhubung langsung dengan titik sr^j. Sehingga haruslah jarak maksimal setiap titik pada $\overline{G_S(D_{2n})}$ adalah 2. Oleh karena itu, eksentrisitas setiap titik pada $\overline{G_S(D_{2n})}$ adalah 2. ■

Teorema 3.3

Misalkan $\overline{G_S(D_{2n})}$ adalah komplemen graf invers grup dihedral dengan $n \geq 5$. Jika n ganjil, maka berlaku:

$$D(u) = \begin{cases} 3n-3\,, & \forall u \in S \\ 3n-2\,, & \forall u \notin S \end{cases}$$

Jika n genap dan $n = 4k+2, k \in \mathbb{N}$ maka berlaku:

$$D(u) = \begin{cases} 3n-4\,, & \forall u \in S \\ 3n-3\,, & \forall u \notin S \end{cases}$$

Jika n genap dan $n = 4(k+1), k \in \mathbb{N}$ maka berlaku:

$$D(u) = \begin{cases} 3n-4\,, & \forall u \in S, u \neq r^{\frac{n}{4}}, u \neq r^{n-\frac{n}{4}} \\ 3n-3\,, & u \text{ lainnya} \end{cases}$$

Bukti

Untuk setiap grup dihedral D_{2n}, berdasarkan Teorema 3.1 bahwa jika n ganjil maka $S = \{r^i | i = 1, 2, \dots, n-1\}$. Sehingga unsur-unsur yang bukan merupakan anggota dari S adalah $\{1, sr^i | i = 1, 2, \dots, n\}$. Jika n genap maka $S = \left\{r^i | i \neq \frac{n}{2}\,, i = 1, 2, \dots, n-1\right\}$. Sehingga unsur-unsur yang bukan merupakan anggota dari S adalah $\left\{1, r^{\frac{n}{2}}, sr^i | i = 1, 2, \dots, n\right\}$.

Kasus 1. Jika n ganjil.

i) Misalkan $u \in S$, maka $u \in \{r^i | i = 1, 2, \dots, n-1\}$. Pada $\overline{G_S(D_{2n})}$, titik u terhubung langsung dengan titik $sr^k, \forall k = 1, 2, \dots, n$ dan terhubung langsung dengan titik r^{n-i}. Namun titik u tidak terhubung langsung dengan titik $r^j, \forall j \neq i, j \neq n-i, j = 1, 2, \dots, n$. Sehingga,

$$D(u) = d(u, r^{n-i}) + \sum_{k=1}^{n} d(u, sr^k) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i \\ j \neq n-i}}^{n} d(u, r^j)$$

$$= 1 + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n} + \underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{n-2}$$

$$= 1 + n + 2(n-2)$$

$$= 3n - 3$$

ii) Misalkan $u \notin S, u = 1$, maka pada $\overline{G_S(D_{2n})}$, titik u terhubung langsung dengan titik $sr^k, \forall k = 1, 2, \dots, n$. Namun titik u tidak terhubung langsung dengan titik $r^i, \forall i = 1, 2, \dots, n-1$. Sehingga,

$$D(u) = \sum_{k=1}^{n} d(u, sr^k) + \sum_{i=1}^{n-1} d(u, r^i)$$

$$= \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n} + \underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{n-1}$$

$$= n + 2(n-1)$$

$$= 3n - 2$$

Misalkan $u \notin S, u \neq 1$ maka $u \in \{sr^i | i = 1, 2, \dots, n\}$. Pada $\overline{G_S(D_{2n})}$, titik u terhubung langsung dengan titik $r^j, \forall j = 1, 2, \dots, n$. Namun titik u tidak terhubung langsung dengan titik $sr^k, \forall k \neq i, k = 1, 2, \dots, n$. Sehingga,

$$D(u) = \sum_{j=1}^{n} d(u, r^j) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} d(u, sr^k)$$

$$= \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n} + \underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{n-1}$$

$$= n + 2(n-1)$$

$$= 3n - 2$$

Berdasarkan (i) dan (ii) maka pada $\overline{G_S(D_{2n})}$ dengan n ganjil berlaku $D(u) = 3n - 3, \forall u \in S$ dan $D(u) = 3n - 2, \forall u \notin S$.

Kasus 2. Jika n genap dan $n = 4k + 2, k \in \mathbb{N}$.

i) Misalkan $u \in S$ maka $u \in \left\{r^i \middle| i \neq \frac{n}{2}, i = 1, 2, \dots, n-1\right\}$. Pada $\overline{G_S(D_{2n})}$, titik u terhubung langsung dengan titik $sr^k, \forall k = 1, 2, \dots, n$, titik u juga terhubung langsung dengan titik r^{n-i} dan titik $r^{(n-i)+\frac{n}{2}}$. Namun titik u tidak terhubung langsung dengan titik $r^j, \forall j \neq i, j \neq n-i, j \neq (n-i) + \frac{n}{2}, j = 1, 2, \dots, n$. Sehingga,

$$D(u) = d(u, r^{n-i}) + d\left(u, r^{(n-i)+\frac{n}{2}}\right) + \sum_{k=1}^{n} d(u, sr^k) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i \\ j \neq n-i \\ j \neq (n-i)+\frac{n}{2}}}^{n} d(u, r^j)$$

$$= 1 + 1 + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n} + \underbrace{2 + 2 + \dots + 2}_{n-3}$$

$$= 2 + n + 2(n-3)$$

$$= 3n - 4$$

ii) Misalkan $u \notin S, u \in \left\{r^i \middle| i = n \text{ atau } i = \frac{n}{2}\right\}$, maka pada $\overline{G_S(D_{2n})}$, titik u terhubung langsung dengan titik $sr^k, \forall k = 1, 2, \dots, n$, titik u juga terhubung langsung dengan titik $r^m, \forall m \neq i, m = n$ atau $m = \frac{n}{2}$. Namun titik u tidak terhubung langsung dengan titik $r^j, \forall j \neq \frac{n}{2}, j = 1, 2, \dots, n-1$. Sehingga,

$$D(u) = d(u, r^m) + \sum_{k=1}^{n} d(u, sr^k) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \frac{n}{2}}}^{n-1} d(u, r^j)$$

$$= 1 + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n} + \underbrace{2 + 2 + \dots + 2}_{n-2}$$

$$= 1 + n + 2(n-2)$$

$$= 3n - 3$$

Misalkan $u \notin S, u \in \{sr^i | i = 1, 2, \dots, n\}$, maka pada $\overline{G_S(D_{2n})}$, titik u terhubung langsung dengan titik $r^k, \forall k = 1, 2, \dots, n$ dan juga terhubung langsung dengan titik $sr^{i+\frac{n}{2}}$. Namun titik u tidak terhubung langsung dengan titik $sr^j, \forall j \neq i, j \neq i + \frac{n}{2}, j = 1, 2, \dots, n$. Sehingga,

$$D(u) = d\left(u, sr^{i+\frac{n}{2}}\right) + \sum_{k=1}^{n} d(u, r^k) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i \\ j \neq i+\frac{n}{2}}}^{n} d(u, sr^j)$$

$$= 1 + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n} + \underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{n-2}$$

$$= 1 + n + 2(n-2)$$

$$= 3n - 3$$

Berdasarkan (i) dan (ii) maka pada $\overline{G_S(D_{2n})}$ dengan n genap dan $n = 4k + 2, k \in \mathbb{N}$ berlaku $D(u) = 3n - 4, \forall u \in S$ dan $D(u) = 3n - 3, \forall u \notin S$.

Kasus 3. Jika n genap dan $n = 4(k + 1), k \in \mathbb{N}$.

i) Misalkan $u \in S, u \neq r^{\frac{n}{4}}, u \neq r^{n-\frac{n}{4}}$ maka $u \in \{r^i | i \neq \frac{n}{2}, i \neq \frac{n}{4}, i \neq n - \frac{n}{4}, i = 1, 2, \dots, n-1\}$. Pada $\overline{G_S(D_{2n})}$, titik u terhubung langsung dengan titik $sr^k, \forall k = 1, 2, \dots, n$, titik u juga terhubung langsung dengan titik r^{n-i} dan titik $r^{(n-i)+\frac{n}{2}}$. Namun titik u tidak terhubung langsung dengan titik $r^j, \forall j \neq i, j \neq n - i, j \neq (n-i) + \frac{n}{2}, j = 1, 2, \dots, n$. Sehingga,

$$D(u) = d(u, r^{n-i}) + d\left(u, r^{(n-i)+\frac{n}{2}}\right) + \sum_{k=1}^{n} d(u, sr^k) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i \\ j \neq n-i \\ j \neq (n-i)+\frac{n}{2}}}^{n} d(u, r^j)$$

$$= 1 + 1 + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n} + \underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{n-3}$$

$= 2 + n + 2(n-3)$

$= 3n - 4$

ii) Misalkan $u \in S$, $u \in \left\{r^i \middle| i = \frac{n}{4} \text{ atau } i = n - \frac{n}{4}\right\}$ maka pada $\overline{G_S(D_{2n})}$, titik u terhubung langsung dengan titik $sr^k, \forall k = 1, 2, \dots, n$ dan titik u juga terhubung langsung dengan titik $r^m, \forall m \neq i, m = \frac{n}{4}$ atau $m = n - \frac{n}{4}$. Namun titik u tidak terhubung langsung dengan titik $r^j, \forall j \neq \frac{n}{4}, j \neq n - \left(\frac{n}{4}\right), j = 1, 2, \dots, n$. Sehingga,

$$D(u) = d(u, r^m) + \sum_{k=1}^{n} d(u, sr^k) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \frac{n}{4} \\ j \neq n - \frac{n}{4}}}^{n} d(u, r^j)$$

$$= 1 + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n} + \underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{n-2}$$

$$= 1 + n + 2(n-2)$$

$$= 3n - 3$$

Misalkan $u \notin S, u \in \left\{r^i \middle| i = n \text{ atau } i = \frac{n}{2}\right\}$, maka pada $\overline{G_S(D_{2n})}$, titik u terhubung langsung dengan titik $sr^k, \forall k = 1, 2, \dots, n$, titik u juga terhubung langsung dengan titik $r^m, \forall m \neq i, m = n$ atau $m = \frac{n}{2}$. Namun titik u tidak terhubung langsung dengan titik $r^j, \forall j \neq \frac{n}{2}, j = 1, 2, \dots, n-1$. Sehingga,

$$D(u) = d(u, r^m) + \sum_{k=1}^{n} d(u, sr^k) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \frac{n}{2}}}^{n-1} d(u, r^j)$$

$$= 1 + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n} + \underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{n-2}$$

$$= 1 + n + 2(n-2)$$

$= 3n - 3$

Misalkan $u \notin S, u \in \{sr^i | i = 1, 2, \dots, n\}$, maka pada $\overline{G_S(D_{2n})}$, titik u terhubung langsung dengan titik $r^k, \forall k = 1, 2, \dots, n$ dan juga terhubung langsung dengan titik $sr^{i+\frac{n}{2}}$. Namun titik u tidak terhubung langsung dengan titik $sr^j, \forall j \neq i, j \neq i + \frac{n}{2}, j = 1, 2, \dots, n$. Sehingga,

$$D(u) = d\left(u, sr^{i+\frac{n}{2}}\right) + \sum_{k=1}^{n} d(u, r^k) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i \\ j\neq i+\frac{n}{2}}}^{n} d(u, sr^j)$$

$$= 1 + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n} + \underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{n-2}$$

$$= 1 + n + 2(n - 2)$$

$$= 3n - 3$$

Berdasarkan (i) dan (ii) maka pada $\overline{G_S(D_{2n})}$ dengan n genap dan $n = 4(k + 1), k \in \mathbb{N}$ berlaku $D(u) = 3n - 4, \forall u \in S, u \neq r^{\frac{n}{4}}, u \neq r^{n-\frac{n}{4}}$ dan $D(u) = 3n - 3, \forall u$ lainnya. ∎

Setelah diperoleh pola eksentrisitas titik dan pola jumlah jarak pada $\overline{G_S(D_{2n})}$, diperoleh pula pola *eccentric-distance sum* pada komplemen graf invers grup dihedral $\xi^{ds}\left(\overline{G_S(D_{2n})}\right)$ ditunjukkan pada Tabel 3.11 sebagai berikut.

Tabel 3.11 *Eccentric-Distance Sum* dari $\overline{G_S(D_{2n})}$

	n	*Eccentric-distance sum* (ξ^{ds})
$\overline{G_S(D_6)}$	3	80
$\overline{G_S(D_8)}$	4	144
$\overline{G_S(D_{10})}$	5	252
$\overline{G_S(D_{12})}$	6	352
$\overline{G_S(D_{14})}$	7	520

$\overline{G_S(D_{16})}$	8	664
$\overline{G_S(D_{18})}$	9	884
$\overline{G_S(D_{20})}$	10	1064
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\overline{G_S(D_{2n})}$	n	$\forall n \geq 5$ Untuk n ganjil $\xi^{ds}(G_S(D_{2n})) = 12n^2 - 10n + 2$ Untuk n genap Jika $n = 4k + 2, k \in \mathbb{N}$ maka $\xi^{ds}(G_S(D_{2n})) = 12n^2 - 14n + 4$ Jika $n = 4(k + 1), k \in \mathbb{N}$ maka $\xi^{ds}(G_S(D_{2n})) = 12n^2 - 14n + 8$

Teorema 3.4

Untuk setiap $n \geq 5$, *eccentric-distance sum* pada komplemen graf invers grup dihedral $\xi^{ds}\left(\overline{G_S(D_{2n})}\right)$ adalah

$$\xi^{ds}\left(\overline{G_S(D_{2n})}\right) = \begin{cases} 12n^2 - 10n + 2\,, & \text{jika } n \text{ ganjil} \\ 12n^2 - 14n + 4\,, & \text{jika } n \text{ genap}\,, n = 4k + 2, k \in \mathbb{N} \\ 12n^2 - 14n + 8\,, & \text{jika } n \text{ genap}\,, n = 4(k + 1), k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Bukti

Kasus 1. Jika n bernilai ganjil.

Berdasarkan Teorema 3.1, 3.2, dan 3.3 maka diperoleh

$$\xi^{ds}\left(\overline{G_S(D_{2n})}\right) = \sum_{u \in S} e(u)D(u) + \sum_{v \notin S} e(v)D(v)$$

$$= 2(3n - 3)(n - 1) + 2(3n - 2)(n + 1)$$

$$= 12n^2 - 10n + 2$$

$\therefore\ \xi^{ds}\left(\overline{G_S(D_{2n})}\right) = 12n^2 - 10n + 2$ jika n ganjil.

Kasus 2. Jika n bernilai genap dan $n = 4k + 2, k \in \mathbb{N}$.

Berdasarkan Teorema 3.1, 3.2, dan 3.3 diperoleh

$$\xi^{ds}\left(\overline{G_S(D_{2n})}\right) = \sum_{u \in S} e(u)D(u) + \sum_{v \notin S} e(v)D(v)$$

$$= 2(3n - 4)(n - 2) + 2(3n - 3)(n + 2)$$

$$= 12n^2 - 14n + 4$$

$\therefore\ \xi^{ds}\left(\overline{G_S(D_{2n})}\right) = 12n^2 - 14n + 4$ jika n genap dan $n = 4k + 2, k \in \mathbb{N}$.

Kasus 3. Jika n bernilai genap dan $n = 4(k + 1), k \in \mathbb{N}$.

Berdasarkan Teorema 3.1, 3.2, dan 3.3 diperoleh

$$\xi^{ds}\left(\overline{G_S(D_{2n})}\right) = \sum_{\substack{u \in S \\ u \neq r^{\frac{n}{4}}, u \neq r^{n-\frac{n}{4}}}} e(u)D(u) + \sum_{v \notin S} e(v)D(v) + e\left(r^{\frac{n}{4}}\right) D\left(r^{\frac{n}{4}}\right)$$

$$+ e\left(r^{n-\frac{n}{4}}\right) D\left(r^{n-\frac{n}{4}}\right)$$

$$= 2(3n - 4)(n - 4) + 2(3n - 3)(n + 2) + 4(3n - 3)$$

$$= 12n^2 - 14n + 8$$

$\therefore\ \xi^{ds}\left(\overline{G_S(D_{2n})}\right) = 12n^2 - 14n + 8$ jika n genap dan $n = 4(k + 1), k \in \mathbb{N}$. ■

Berdasarkan uraian di atas, dapat diketahui bahwa pola-pola yang didapatkan dalam pembahasan ini yang disajikan dalam beberapa teorema antara lain pola unsur-unsur di S dan banyaknya anggota S yakni anggota yang tidak invers ke dirinya sendiri, pola eksentrisitas titik, pola jumlah jarak, dan pola *eccentric-distance sum* pada graf komplemen dari graf invers grup dihedral.

Allah Swt. berfirman dalam al-Quran surat an-Nur/24:45 yang berbunyi:

وَٱللَّهُ خَلَقَ كُلَّ دَآبَّةٍ مِّن مَّآءٍ ۖ فَمِنْهُم مَّن يَمْشِى عَلَىٰ بَطْنِهِۦ وَمِنْهُم مَّن يَمْشِى عَلَىٰ رِجْلَيْنِ وَمِنْهُم مَّن يَمْشِى عَلَىٰٓ أَرْبَعٍ ۚ يَخْلُقُ ٱللَّهُ مَا يَشَآءُ ۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلَىٰ كُلِّ شَىْءٍ قَدِيرٌ ﴿٤٥﴾

Artinya: *"Dan Allah telah menciptakan semua jenis hewan dari air, maka sebagian dari hewan itu ada yang berjalan di atas perutnya dan sebagian berjalan dengan dua kaki sedang sebagian (yang lain) berjalan dengan empat kaki. Allah menciptakan apa yang dikehendaki-Nya. Sesungguhnya Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu".*

Allah Swt. menyebutkan tentang Kekuasaan-Nya Yang Maha Sempurna dan Pengaruh-Nya Yang Maha Agung dalam menciptakan makhluk-Nya yang beraneka ragam bentuk, warna, dan sepak terjangnya yang semuanya itu Dia ciptakan dari satu air (Katsir, 2004:72). Ayat tersebut menjelaskan tentang sekumpulan binatang. Dalam kelompok binatang tersebut ada sekelompok yang berjalan tanpa kaki (melata), ada yang berjalan dengan dua kaki, empat, atau bahkan lebih.

Sebagaimana dalam konsep matematika, kelompok atau kumpulan objek-objek yang terdefinisi secara jelas disebut sebagai himpunan. Seperti himpunan binatang yang berkaki empat yakni {sapi, kucing, singa, harimau, kambing}. Begitu pula himpunan S yakni $\{r^i | i = 1, 2, \dots, n-1\}$ untuk n ganjil dan $\left\{r^i | i \neq \frac{n}{2}, i = 1, 2, \dots, n-1\right\}$ untuk n genap.

Jarak $d(u,v)$ pada suatu graf merupakan panjang lintasan antara titik u ke titik v pada graf tersebut. Eksentrisitas titik u merupakan jarak maksimal dari titik u ke sebarang titik pada suatu graf. Sedangkan jumlah jarak titik u merupakan jumlah dari jarak antara titik u ke semua titik pada suatu graf. Menyinggung tentang jarak, Allah Swt. berfirman dalam al-Quran surat Saba/34:18 yang berbunyi:

وَجَعَلْنَا بَيْنَهُمْ وَبَيْنَ ٱلْقُرَى ٱلَّتِى بَٰرَكْنَا فِيهَا قُرًى ظَٰهِرَةً وَقَدَّرْنَا فِيهَا ٱلسَّيْرَ ۖ سِيرُوا۟ فِيهَا لَيَالِىَ وَأَيَّامًا ءَامِنِينَ ﴿١٨﴾

Artinya: *"Dan Kami jadikan antara mereka dan antara negeri-negeri yang Kami limpahkan berkat kepadanya, beberapa negeri yang berdekatan dan Kami tetapkan antara negeri-negeri itu (jarak-jarak) perjalanan. Berjalanlah kamu di kota-kota itu pada malam dan siang hari dengan aman.*

Allah Swt. menceritakan apa yang diperoleh mereka berupa kenikmatan, kemewahan hidup, kesenangan, negeri yang makmur, tempat-tempat yang aman, dan kota-kota yang saling berdekatan satu sama lain yang dipenuhi pepohonan, tanaman, dan hasil buah-buahan yang melimpah. Sehingga, orang yang melakukan perjalanan dapat beristirahat siang hari di suatu kota, lalu menginap di kota lainnya menurut kondisi dan keadaan yang diperlukan dalam perjalanan (Katsir, 2004:563).

Rasulullah Saw. bersabda:

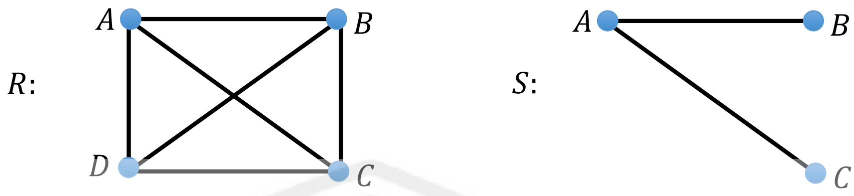
مَنْ أَحَبَّ أَنْ يُبْسَطَ لَهُ فِي رِزْقِهِ وَيُنْسَأَ لَهُ فِي أَثَرِهِ فَلْيَصِلْ رَحِمَهُ (رواه البخاري ومسلم)

Artinya: *"Barang siapa yang ingin dilapangkan rizkinya dan dipanjangkan umurnya, maka hendaklah ia menyambung silaturrahim."* (HR Bukhari dan Muslim).

Begitulah hadits yang diriwayatkan oleh Bukhari dan Muslim tersebut menjelaskan bahwa seseorang yang menyambung hubungan kekerabatan atau silaturrahim akan dilapangkan rizkinya dan dipanjangkan umurnya.

Mencari nilai *eccentric-distance sum* haruslah pada suatu graf terhubung. Jika suatu graf tidak terhubung, maka tidak dapat dicari nilai *eccentric-distance sum* dari graf tersebut. Sehingga keterhubungan antar titik pada suatu graf diperlukan agar graf tersebut menjadi graf terhubung. Semakin banyak anggota pada himpunan titik dari suatu graf, maka semakin banyak pula sisi yang menghubungkan antar titik tersebut dan semakin besar nilai *eccentric-distance sum* dari graf tersebut.

Sama halnya dengan silaturrahim, semakin banyak seseorang bersilaturrahim maka akan dilapangkan rizkinya dan dipanjangkan umurnya.



Gambar 3.17. Representasi Silaturrahim dalam Graf

Misalkan Gambar 3.17 merupakan representasi silaturrahim dalam bentuk graf. Dimisalkan titik A, B, C, D adalah kerabat, titik A dan titik B terhubung langsung jika dan hanya jika si A dan si B saling bersilaturrahim. Graf S memiliki nilai *eccentric-distance sum* lebih besar daripada graf R karena graf S memiliki anggota dan keterhubungan lebih banyak daripada graf R.

BAB IV

PENUTUP

3.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan yang sudah diperoleh pada Bab III, maka dapat diambil kesimpulan pola *eccentric-distance sum* pada komplemen graf invers grup dihedral adalah sebagai berikut:

1. Himpunan anggota S dari D_{2n} adalah $\{r^i | i = 1, 2, \dots, n-1\}$ untuk n ganjil dan $\{r^i | i \neq \frac{n}{2}, i = 1, 2, \dots, n-1\}$ untuk n genap. Sehingga $|S| = n-1$ untuk n ganjil dan $|S| = n-2$ untuk n genap.
2. Eksentrisitas setiap titik pada $\overline{G_S(D_{2n})}$ adalah 2.
3. Jumlah jarak pada $\overline{G_S(D_{2n})}$, $\forall n \geq 5$ adalah

$$D(u) = \begin{cases} 3n-3, & \forall u \in S \\ 3n-2, & \forall u \notin S \end{cases}$$

untuk n ganjil,

$$D(u) = \begin{cases} 3n-4, & \forall u \in S \\ 3n-3, & \forall u \notin S \end{cases}$$

untuk n genap dan $n = 4k+2, k \in \mathbb{N}$, dan

$$D(u) = \begin{cases} 3n-4, & \forall u \in S, u \neq r^{\frac{n}{4}}, u \neq r^{n-\frac{n}{4}} \\ 3n-3, & u \text{ lainnya} \end{cases}$$

untuk n genap dan $n = 4(k+1), k \in \mathbb{N}$.

4. *Eccentric-distance sum* pada $\overline{G_S(D_{2n})}$, $\forall n \geq 5$ adalah

$$\xi^{ds}\left(\overline{G_S(D_{2n})}\right) = \begin{cases} 12n^2 - 10n + 2, & \text{jika } n \text{ ganjil} \\ 12n^2 - 14n + 4, & \text{jika } n \text{ genap}, n = 4k+2, k \in \mathbb{N} \\ 12n^2 - 14n + 8, & \text{jika } n \text{ genap}, n = 4(k+1), k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

3.2 Saran

Penelitian ini hanya difokuskan pada pokok masalah mengenai *eccentric-distance sum* pada komplemen graf invers grup dihedral. Dengan demikian untuk penelitian selanjutnya, penulis menyarankan kepada pembaca untuk meneliti *eccentric-distance sum* dari graf invers grup berhingga lainnya.

DAFTAR RUJUKAN

Abdussakir, Azizah, N.N., dan Nofandika, F.F. 2009. *Teori Graf Topik Dasar untuk Tugas Akhir/Skripsi*. Malang: UIN-Malang Press.

Alfuraidan, M.R dan Zakariya, Y.F. 2017. Inverse Graphs Associated with Finite Groups. *Electronic Journal of Graph Theory and Aplications*, 5(1): 142-154.

Chartand, G., Lesniak, L., dan Zhang, P. 2016. *Graphs and Digraphs Sixth Edition*. Boca Raton: CRC Press.

Dummit, D.S dan Foote, R.M. 2004. *Abstract Algebra Third Edition*. Hoboken: John Wiley and Sons, Inc.

Gilbert, L dan Gilbert, J. 2015. *Elements of Modern Algebra Eighth Edition*. Stamford: Nelson Education, Ltd.

Ilic, A., Yu, G., dan Feng, L. 2011. On the Eccentric Distance Sum of Graphs. *J. Math. Anal. Appl*, 381: 590-600.

Katsir, I. 2001. *Tafsir Ibnu Katsir, Jilid 2*. Terjemahan M. Ghoffar. Bogor: Pustaka Imam asy-Syafi'i.

Katsir, I. 2003. *Tafsir Ibnu Katsir, Jilid 5*. Terjemahan M. Ghoffar. Bogor: Pustaka Imam asy-Syafi'i.

Katsir, I. 2004. *Tafsir Ibnu Katsir, Jilid 6*. Terjemahan M. Ghoffar. Bogor: Pustaka Imam asy-Syafi'i.

Padmapriya, P dan Mathad, V. 2017. The Eccentric-Distance Sum of Some Graphs. *Electronic Journal of Graph Theory and Aplications*, 5(1): 51-62.

Raisinghania, M.D dan Anggarwal, R.S. 1980. *Modern Algebra*. New Delhi: S. Chand & Company Ltd.

RIWAYAT HIDUP

Mustika Ana Kurfia, biasa dipangil Tika atau Ana, lahir di Banyuwangi pada 27 Februari 1995. Ia tinggal di Perumahan Permata Harmony Blok A Nomor 7-8 RT 01 RW 03 Pengatigan Kecamatan Rogojampi Kabupaten Banyuwangi. Anak pertama dari bapak Yaseni Bachtiar dan ibu Mas'unah serta kakak dari Bimantara Adhitama.

Pendidikan dasarnya ditempuh di MI Islamiyah Rogojampi pada tahun 2001 hingga 2007, pendidikan menengah pertamanya ditempuh di SMP Bustanul Makmur Genteng pada tahun 2007 hingga 2010, dan pendidikan menengah ke atasnya ditempuh di MAN 1 Jember pada tahun 2010 hingga 2013. Selanjutnya pada tahun 2013, ia menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil Jurusan Matematika.

Selama menempuh pendidikannya, ia berprestasi dalam bidang menari baik tari tradisional maupun tari modern dan sering mengikuti kompetisi serta mengisi acara. Selain itu, ia berperan aktif dalam kegiatan Palang Merah Remaja (PMR) pada tahun 2010 hingga 2013. Ia pernah menjabat sebagai sekertaris bidang bakat dan minat di Himpunan Mahasiswa Jurusan (HMJ) Matematika UIN Maulana Malik Ibrahim Malang periode 2013/2014.

KEMENTRIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Mustika Ana Kurfia
NIM : 13610060
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : *Eccentric-Distance Sum* pada Komplemen Graf Invers Grup Dihedral
Pembimbing I : H. Wahyu H. Irawan, M.Pd
Pembimbing II : Abdul Aziz, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	10 Mei 2017	Konsultasi BAB I dan II	1.
2.	29 Mei 2017	Konsultasi BAB III	2.
3.	13 Juni 2017	ACC BAB I, II, dan III	3.
4.	14 Juni 2017	Konsultasi Keagamaan BAB I dan II	4.
5.	15 Juni 2017	ACC Keagamaan BAB I dan II	5.
6.	27 Juli 2017	Revisi BAB III	6.
7.	02 Agustus 2017	Konsultasi Keagamaan BAB III	7.
8.	07 Agustus 2017	Revisi Keagamaan BAB III	8.
9.	23 Agustus 2017	Revisi BAB IV	9.
10.	28 Agustus 2017	ACC Keseluruhan	10.
11.	28 Agustus 2017	ACC Agama Keseluruhan	11.

Malang, 28 Agustus 2017
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001