IDEAL-IDEAL SEMU PADA ALJABAR-BCI SEMU

SKRIPSI

OLEH
RIFAL ANDIKA FAISAL
NIM. 13610018

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2017

IDEAL-IDEAL SEMU PADA ALJABAR-BCI SEMU

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh
Rifal Andika Faisal
NIM. 13610018

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2017

IDEAL-IDEAL SEMU PADA ALJABAR-BCI SEMU

SKRIPSI

Oleh
Rifal Andika Faisal
NIM. 13610018

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 15 Mei 2017

Pembimbing I,

Evawati Alisah, M.Pd
NIP. 19720604 199903 2 001

Pembimbing II,

Mohammad Jamhuri, M.Si
NIP. 19810502 200501 1 004

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

IDEAL-IDEAL SEMU PADA ALJABAR-BCI SEMU

SKRIPSI

Oleh
Rifal Andika Faisal
NIM. 13610018

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal 6 Juni 2017

Penguji Utama	: H. Wahyu H. Irawan, M.Pd	....
Ketua Penguji	: Hairur Rahman, M.Si	....
Sekretaris Penguji	: Evawati Alisah, M.Pd	....
Anggota Penguji	: Mohammad Jamhuri, M.Si	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Rifal Andika Faisal

NIM : 13610018

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Ideal-ideal Semu pada Aljabar-BCI Semu

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan pengambilan data, tulisan, atau, pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencamtumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan saya sendiri.

Malang, 12 Mei 2017
Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL
DCA59AEF579922531
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Rifal Andika Faisal
NIM. 13610018

MOTO

“Berangkatlah kamu baik dalam keadaan merasa ringan maupun berat, dan berjihadlah kamu dengan harta dan dirimu di jalan Allah. Yang demikian itu adalah lebih baik bagimu, jika kamu mengetahui” (Q.S. at-Taubah: 41).

"وَجَاهِدُوا فِي اللَّهِ حَقَّ جِهَادِهِ"

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda Padrizal, ibunda Fitrianis, kakak Sari Rahma Dewi, S.Pd.I, serta adik Intan Rahma Dewi yang selalu memberikan motivasi dan semangat bagi penulis.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Alhamdulillah, segala puji bagi Allah Swt. atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul "Ideal-ideal Semu pada Aljabar-BCI Semu". Shalawat serta salam selalu terlimpahkan kepada nabi Muhammad Saw. yang telah menuntun manusia ke jalan keselamatan.

Dalam kesempatan ini, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada semua pihak yang telah mendukung dan membantu penyelesaian skripsi ini, yakni kepada:

1. Prof. Dr. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Evawati Alisah, M.Pd, selaku dosen pembimbing I yang telah membimbing penulis menyelesaikan skripsi ini.
5. Mohammad Jamhuri, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah membimbing penulis menyelesaikan skripsi ini.
6. Kedua orang tua penulis dan seluruh keluarga penulis yang selalu mendoakan keberhasilan penulis.

7. Teman-teman mahasiswa di Jurusan Matematika angkatan 2013 yang telah banyak memberikan dukungan dan motivasi kepada penulis.

Semoga Allah Swt. melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, Mei 2017

Penulis

DAFTAR ISI

BAB III PEMBAHASAN

BAB IV PENUTUP

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Faisal, Rifal Andika. 2017. **Ideal-ideal Semu pada Aljabar-BCI Semu.** Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Evawati Alisah, M.Pd. (II) Mohammad Jamhuri, M.Si.

Kata kunci: aljabar-BCI, aljabar-BCI semu, ideal.

Struktur aljabar atau sistem matematika adalah himpunan tidak kosong dengan satu atau lebih operasi biner yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Ilmu aljabar abstrak berkembang dengan pesat karena penerapan karakteristik dari bentuk-bentuk struktur aljabar yang banyak bermanfaat dalam pengembangan metode penyelesaian masalah yang bersifat abstrak. Pada perkembangan aljabar abstrak banyak ditemukan aljabar-aljabar baru, salah satunya adalah aljabar-BCI semu. Pada tahun 2009 terdapat temuan baru dari perkembangan aljabar-BCI semu yaitu ideal dari aljabar-BCI semu dan sifat-sifat yang terkait.

Tujuan penelitian ini adalah untuk memperjelas sifat-sifat yang terdapat pada ideal dari aljabar-BCI semu berupa teorema, lemma, proposisi, dan bukti serta contoh. Hasil dari pembahasan ini adalah, ideal-ideal semu diperoleh: (a) ideal semu, (b) p-ideal semu dari $\mathfrak{X}$ yang pasti merupakan ideal semu dari $\mathfrak{X}$, (c) ideal semu asosiatif dari $\mathfrak{X}$ yang pasti merupakan ideal semu dari $\mathfrak{X}$, (d) q-ideal semu dari $\mathfrak{X}$ yang pasti merupakan ideal semu dari $\mathfrak{X}$, dan (e) a-ideal semu dari $\mathfrak{X}$ yang pasti merupakan ideal semu dari $\mathfrak{X}$. Bagi penelitian selanjutnya diharapkan dapat menjelaskan sifat-sifat ideal dari aljabar-BCK semu dan lainnya.

ABSTRACT

Faisal, Rifal Andika. 2017. **Pseudo Ideals of Pseudo BCI-Algebras**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Islamic State University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Evawati Alisah, M.Pd. (II) Mohammad Jamhuri, M.Si.

Keywords: BCI-algebra, pseudo BCI-algebras, ideal.

The structure of an algebra or mathematical system is a non-empty set with one or more binary operations that accomplishes certain axioms. The science of abstract algebra is growing rapidly because of the application of the characteristics of algebraic structures which are useful in the development of abstract problem-solving methods. In the development of abstract algebra, many new algebra are found, one of them is pseudo BCI-Algebras. In 2009 there were new findings from the development of pseudo BCI-Algebras that is Ideals of pseudo BCI-Algebras.

The purpose of this study is to explain the characteristics found in the ideal of pseudo BCI-Algebras in the form of theorem, lemma, proposition, and evidence and examples. The result of this discussion is the ideals pseudo are: (a) ideal pseudo, (b) pseudo p-ideal of $\mathfrak{X}$ surely is pseudo ideal of $\mathfrak{X}$, (c) pseudo ideal associative of $\mathfrak{X}$ surely is pseudo ideal of $\mathfrak{X}$, (d) pseudo q-ideal of $\mathfrak{X}$ surely is pseudo ideal of $\mathfrak{X}$, and (e) pseudo a-ideal of $\mathfrak{X}$ surely is pseudo ideal of $\mathfrak{X}$. For the next research is expected to explain the properties of ideal of pseudo BCK-algebra and other.

ملخص

فيصل، ريفال أندك. ٢٠١٧. المثاليات **Semu** من الجبر–***Semu BCI***. بحث جامعي. قسم رياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا بجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم بمالانج. المشرف: (١) إيباوتي أليسة الماجستيرة، (٢) محمد جمهوري الماجستير.

الكلمات المفتاحية: الجبر–BCI، الجبر–BCI *semu*، المثالي

نظام الجبر أو نظام الرياضية مجموعة التي لا يكون فيها فراغ بواحد من العملية الثنائية فاكثر تمتلاءها المسلمات المعينة. لقد ازدهر علم الجبر على نحو تجريدي ازدهارا لأجل إفاداته في تطوير الطريقة لحل المشاكل التجريدية بسبب تطبيق مزيات الوجوه الجبري. ففي تطويره، لقد تولد التنوعات من عدة الجبر الجديد، منها الجبر–BCI *semu*. كان في السنة ٢٠٠٩ لقد وجدت مكتشفات الجديدة من تطوير الجبر–BCI *semu* وهي المواصفات المثالية من الجبر–*semu BCI* وهي المثالية من الجبر–BCI *Semu*.

إن هدف البحث توضيح المواصفات المثالية الموجودة من الجبر–BCI *semu* ، وهي تتكون من نظرياته، وعنوانه، وعرضه، ودليله ومثاله. إن النتيجة من هذا البحث المثاليات semu من هو: (أ) المثاليه *semu* (ب) *p-ideal semu* من $\mathfrak{X}$ محالة فهو *ideal semu* من $\mathfrak{X}$ ، (ج) الترابط في *ideal semu* من $\mathfrak{X}$ محالة فهو *ideal semu* من $\mathfrak{X}$ ، (د) *q-ideal semu* من $\mathfrak{X}$ محالة فهو *ideal semu* من $\mathfrak{X}$، (هـ) *a-ideal semu* من $\mathfrak{X}$ محالة فهو *ideal semu* من $\mathfrak{X}$. فيرجى للبحث التالي أن يتوصف المواصفات المثالية من الجبر-BCK *semu* وغيرها.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan ilmu universal yang mendasari perkembangan teknologi modern, mempunyai peran penting dalam berbagai disiplin ilmu dan memajukan daya pikir manusia. Perkembangan pesat di bidang teknologi informasi dan komunikasi dewasa ini dilandasi oleh perkembangan matematika di bidang teori bilangan, aljabar, analisis, teori peluang, dan diskrit. Untuk menguasai dan menciptakan teknologi di masa depan diperlukan penguasaan matematika yang kuat sejak dini (Depdiknas, 2006).

Perkembangan bidang ilmu pengetahuan dan teknologi juga disebutkan dalam al-Quran surat ar-Rum ayat 22 sebagai berikut:

وَمِنۡ ءَايَٰتِهِۦ خَلۡقُ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلۡأَرۡضِ وَٱخۡتِلَٰفُ أَلۡسِنَتِكُمۡ وَأَلۡوَٰنِكُمۡۚ إِنَّ فِي ذَٰلِكَ لَأٓيَٰتٖ لِّلۡعَٰلِمِينَ ٢٢

Artinya: "*dan di antara tanda-tanda kekuasaan-Nya ialah menciptakan langit dan bumi dan berlain-lainan bahasamu dan warna kulitmu. Sesungguhnya pada yang demikan itu benar-benar terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang mengetahui"(QS. ar-Rum/30:22).*

Menurut Ibnu Katsir (2010), di antara tanda-tanda kekuasaan Allah Swt. adalah menciptakan langit dan bumi. Dalam arti penciptaan langit dengan ketinggian, keluasan hamparan atapnya, kecemerlangan bintang-bintang yang tetap dan beredar, serta penciptaan bumi dengan kerendahan dan ketebalan serta kandungan seperti bentuk gunung dan lain-lain.

Tanda-tanda kekuasaan Allah Swt. selanjutnya yaitu menciptakan perbedaan bahasa-bahasa di permukaan bumi dan keragaman warna kulit seluruh manusia. Sejak penciptaan Adam sampai hari akhir semuanya memiliki dua mata, dua alis, satu hidung, satu mulut, dan sebagainya. Meskipun demikian, antara satu dengan lainnya tidak memiliki kesamaan, bahkan dibedakan satu dengan lainnya. Dengan memperhatikan tanda-tanda kekuasaan Allah dalam ciptaan-Nya, dapat menambah ilmu pengetahuan dan perkembangan teknologi yang bermanfaat bagi kehidupan manusia di pemukaan bumi ini, seperti halnya ilmu matematika.

Matematika sangat mungkin dikembangkan di semua bidangnya terutama di bidang aljabar. Aljabar merupakan bagian dari ilmu matematika yang berhubungan dengan himpunan dan sifat struktur-struktur di dalamnya. Struktur aljabar merupakan topik yang fundamental dalam matematika sehingga menarik untuk dipelajari. Suatu struktur aljabar merupakan himpunan tak kosong dengan satu atau lebih operasi biner dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu (Anggrayni, 2010).

Ilmu aljabar abstrak berkembang dengan pesat karena penerapan karakteristik dari bentuk-bentuk struktur aljabar yang banyak bermanfaat dalam pengembangan metode penyelesaian masalah yang bersifat abstrak. Secara umum struktur aljabar yang dipelajari adalah grup dan *ring*. Seiring dengan perkembangan ilmu aljabar abstrak banyak ditemukan aljabar-aljabar baru, salah satunya adalah aljabar-BCI. Aljabar-BCI dikembangkan lagi dengan menggunakan beberapa sifat tambahan yang disebut dengan aljabar-BCI semu. Jun, dkk (2006) memperkenalkan perkembangan ilmu aljabar-BCI semu, yaitu ideal BCI semu dari aljabar-BCI semu. Pada tahun 2009, Kyoung Ja Lee dan Chul

Hwan Park juga memperkenalkan gagasan ilmu aljabar-BCI semu yaitu beberapa ideal dari aljabar-BCI semu.

Ideal aljabar-BCI semu telah dikembangkan menjadi berbagai macam bentuk ideal. Namun dalam pengembangan pembahasannya masih terlalu global, maka dalam penelitian ini mengkaji sifat-sifat ideal yang terdapat pada aljabar-BCI semu secara lebih detail. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk mengambil judul penelitian "Ideal-ideal Semu pada Aljabar-BCI Semu".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana ideal-ideal semu pada aljabar-BCI semu?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah menjelaskan ideal-ideal semu pada aljabar-BCI semu.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat bermanfaat bagi:

1. Penulis
    a. Menambah wawasan dan ilmu pengetahuan tentang ideal-ideal semu pada aljabar-BCI semu.
    b. Mengembangkan wawasan keilmuan tentang pendeskripsian ideal-ideal semu pada aljabar-BCI semu.

2. Pembaca

    a. Sebagai sarana informasi tentang ideal semu dari aljabar-BCI semu.

    b. Sebagai bahan informasi dalam melakukan kajian lebih lanjut tentang teori aljabar-BCI semu.

3. Lembaga

    Sebagai tambahan bahan kepustakaan di lembaga khususnya di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sehingga dapat dijadikan sebagai sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya pada bidang aljabar.

1.5 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur yang berupa buku-buku, jurnal-jurnal ilmiah, dan makalah-makalah yang memuat topik pembahasan tentang aljabar-BCI semu. Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah:

1. Mengumpulkan kajian dari buku-buku, jurnal-jurnal ilmiah, dan makalah-makalah yang berhubungan dengan sifat-sifat ideal dari aljabar-BCI semu. Adapun jurnal utama yang digunakan dalam penelitian ini adalah jurnal yang ditulis oleh Lee dan Park (2009) berjudul *Some Ideals of Pseudo BCI-Algebras*.
2. Menelaah definisi pengembangan dari aljabar-BCI semu dan ideal semu pada aljabar-BCI semu.
3. Mendeskripsikan ideal-ideal semu pada aljabar-BCI semu.
4. Menjelaskan ideal-ideal semu pada aljabar-BCI semu dengan teorema, lemma, proposisi, dan bukti beserta contohnya.

5. Menyimpulkan penjelasan ideal-ideal semu pada aljabar-BCI semu.
6. Menulis laporan hasil penelitian.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam penelitian ini terdiri dari empat bab. Masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa subbab sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pendahuluan meliputi: latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan yang digunakan dalam penyusunan laporan hasil penelitian ini.

Bab II Kajian Pustaka

Bagian ini terdiri atas konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan antara lain membahas tentang himpunan, pemetaan, teori grup, sifat-sifat grup, aljabar-BCI, aljabar-BCI semu, dan konsep aljabar-BCI dalam al-Quran.

Bab III Pembahasan

Pada pembahasan ini membahas tentang sifat-sifat yang terkait dengan ideal dari aljabar-BCI semu serta keterkaitan konsep ideal aljabar-BCI semu dalam al-Quran.

Bab 1V Penutup

Merupakan bagian terakhir di skripsi ini yang berisi kesimpulan dari penelitian dan saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Himpunan

Kumpulan objek yang mempunyai ciri dan karakteristik yang sama dalam hal ini disebut himpunan. Misalkan suatu x anggota dari himpunan A, maka dinotasikan dengan $x \in A$. Misalkan y bukan anggota himpunan A, maka dinotasikan $y \notin A$. Sedangkan himpunan yang tidak mempunyai anggota disebut himpunan kosong, yang dinotasikan dengan $\emptyset$ atau { } (Mas`oed, 2013).

Definisi 1

Diketahui A dan B adalah dua himpunan yang semua anggota A juga terdapat di B, maka A disebut himpunan bagian dari B yang dinotasikan dengan $A \subseteq B$ (Raisinghania dan Aggarwal, 1980).

Berdasarkan definisi tersebut, jika A sebarang himpunan tak kosong, maka diperoleh bahwa $A \subseteq A$ dan $\emptyset \subseteq A$. Misalkan A dan B dua himpunan. Himpunan B dikatakan bukan himpunan bagian dari A ditulis

$$B \nsubseteq A,$$

jika ada anggota himpunan B yang bukan anggota himpunan A.

Contoh 1

Diketahui himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dan $B = \{1, 3, 5\}$. Maka dapat ditulis $B \subseteq A$ karena semua anggota B juga ada di A dan $A \nsubseteq B$ karena ada anggota A yang tidak ada di B.

Definisi 2

Diketahui A dan B adalah dua himpunan. Jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$ maka dapat dikatakan A dan B sama, dinotasikan dengan $A = B$. Jika $A \subseteq B$ dan $A \neq B$ maka dapat dikatakan A himpunan bagian sejati dari B, dinotasikan $A \subset B$ (Raisinghania dan Aggarwal, 1980).

Contoh 2

1. Jika diketahui himpunan $A = \{a,\ b,\ c\}$ dan $B = \{b,\ a,\ c\}$, maka $A = B$.
2. Jika diketahui himpunan $A = \{a,\ b\}$ dan $B = \{a,\ b,\ c,\ d\}$, maka $A \subset B$.

2.2 Relasi Biner

Definisi 3

Relasi dari himpunan tak kosong A merupakan suatu himpunan tak kosong R dari pasangan berurut (x, y) dengan x dan y anggota himpunan A (Gilbert dan Gilbert, 2009).

Sehingga, relasi R merupakan himpunan bagian dari perkalian Cartesius $A \times A$. Jika pasangan (a, b) anggota R ditulis aRb, maka dapat dikatakan a mempunyai relasi R terhadap b. Jika pasangan (a, b) bukan anggota R ditulis $a\not{R}b$, maka dapat dikatakan a tidak mempunyai relasi terhadap b.

Contoh 3

Misalkan $A = \{-2, -5, 2, 5\}$ dan $R = \{(5,\ -2), (5, 2), (-5, -2), (5, -2)\}$. Maka $5R(-2), 5R2, (-5)R(-2)$, dan $5R(-2)$, tetapi $2\not{R}5$ dan $2\not{R}(-5)$.

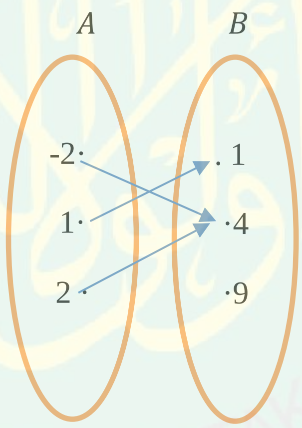
2.3 Pemetaan

Definisi 4

Misalkan A dan B merupakan himpunan tak kosong. Suatu himpunan bagian f dari $A \times B$ merupakan pemetaan A ke B jika dan hanya jika untuk setiap $a \in A$ terdapat satu dan hanya satu $b \in B$ sehingga $(a, b) \in f$. Jika f merupakan pemetaan A ke B dengan pasangan (a, b) termuat di f, maka ditulis $b = f(a)$ dan b merupakan bayangan dari a oleh fungsi f (Gilbert dan Gilbert, 2009).

Contoh 4

Misalkan $A = \{-2, 1, 2\}$ dan $B = \{1, 4, 9\}$. Relasi dari himpunan A ke himpunan B seperti diagram berikut:



Gambar 2.1 Contoh Pemetaan

maka, himpunan f diperoleh $f = \{(-2,\ 4), (1,\ 1), (2,\ 4)\}$, dan f merupakan suatu pemetaan dari A ke B.

Definisi 5 Surjektif

Misalkan pemetaan $f: A \to B$. Maka f dikatakan surjektif jika dan hanya jika $B = f(A)$ dengan $f(A)$ merupakan daerah hasil dari f (Gilbert dan Gilbert, 2009).

Contoh 5

Misalkan pemetaan $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, dengan $\mathbb{Z}$ merupakan himpunan bilangan bulat. Jika f didefinisikan dengan:

$$f = \{(a, 2-a) | a \in \mathbb{Z}\},$$

maka dapat ditulis $f(a) = 2 - a, a \in \mathbb{Z}$. Untuk menunjukkan f surjektif, pilih sebarang $b \in \mathbb{Z}$, maka terdapat $2 - b \in \mathbb{Z}$, sehingga:

$$(2 - b, b) \in f$$

sebab $f(2 - b) = 2 - (2 - b) = b$, maka f merupakan pemetaan surjektif.

Definisi 6 Injektif

Misalkan pemetaan $f: A \to B$, f dikatakan injektif jika dan hanya jika elemen yang berbeda pada A selalu mempunyai bayangan yang berbeda di bawah f (Gilbert dan Gilbert, 2009).

Contoh 6

Misalkan pemetaan $f: A \to B$ dengan himpunan $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{-4, 4\}$, dan $f = \{(-1, 4), (0, 4), (1, 4)\}$. f bukan merupakan pemetaan satu-satu karena $f(-1) = f(0) = 4$, tapi $-1 \neq 0$.

Pemetaan $f: A \to B$ adalah pemetaan satu-satu jika dan hanya jika mempunyai sifat $a_1 \neq a_2$ di A berakibat $f(a_1) \neq f(a_2)$ di B. Secara kontrapositif jika dua unsur yang sama di B yaitu $f(a_1) = f(a_2)$, berakibat $a_1 = a_2$ di A.

Contoh 7

Misalkan pemetaan $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $\mathbb{Z}$ merupakan himpunan bilangan bulat yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f = \{(a, 2-a) | a \in \mathbb{Z}\}$$

Asumsikan bahwa untuk $a_1 \in \mathbb{Z}$ dan $a_2 \in \mathbb{Z}$, dengan

$$f(a_1) = f(a_2)$$

maka,

$$2 - a_1 = 2 - a_2$$

menunjukkan bahwa $a_1 = a_2$. Sehingga f merupakan pemetaan injektif.

Definisi 7 Bijektif

Pemetaan bijektif merupakan pemetaan yang sekaligus injektif dan surjektif atau korespondensi satu-satu (Arifin, 2000).

Contoh 8

Misalkan pemetaan $f: R \rightarrow R$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f(x) = 2x + 1, \forall x \in R$$

Jika $a, b \in R$ sedemikian sehingga $f(a) = f(b)$, yaitu $2a + 1 = 2b + 1$, maka $a = b$ sehingga f termasuk pemetaan injektif. Selanjutnya jika $d \in R$, ada $c \in R$ dengan $c = \frac{d-1}{2}$ sedemikian sehingga $f(c) = f\left(\frac{d-1}{2}\right) = 2\left(\frac{d-1}{2}\right) + 1 = d$, maka f termasuk pemetaan surjektif. Karena f termasuk pemetaan injektif dan surjektif, maka f termasuk pemetaan bijektif.

2.4 Operasi Biner

Definisi 8

Diberikan G adalah himpunan tak kosong dan $a, b \in G$. Suatu pemetaan $* : G \times G \rightarrow G$, sehingga $*(a, b) = a * b$ dengan (a, b) anggota himpunan dari $G \times G$ dan $a * b \in G$, maka $*$ dikatakan operasi biner pada G (Raisinghania dan Aggarwal, 1980).

Contoh 9

Diberikan $\mathbb{N}$ yaitu himpunan semua bilangan asli dan $*$ adalah operasi pada $\mathbb{N}$ dengan syarat untuk setiap $a, b \in \mathbb{N}, a * b = a + b$. Karena $a \in \mathbb{N}$ dan $b \in \mathbb{N}$, maka penjumlahan dari dua bilangan asli akan menghasilkan bilangan asli, dinotasikan $a + b \in \mathbb{N}$. Jadi operasi $*$ merupakan operasi biner pada $\mathbb{N}$.

Contoh 10

Didefinisikan operasi $*$ pada $\mathbb{Z}$ dengan syarat untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$, $a * b = \sqrt{a \cdot b}$. Akan ditunjukkan bahwa operasi $*$ bukan merupakan operasi biner pada $\mathbb{Z}$. Perhatikan bahwa jika $a = 1$ dan $b = 2$ maka $1 * 2 = \sqrt{1 \cdot 2} = \sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$. Jadi operasi $*$ bukan merupakan operasi biner pada $\mathbb{Z}$.

Definisi 9

Jika $*$ merupakan operasi biner pada himpunan tak kosong A, maka $*$ dikatakan komutatif jika $x * y = y * x$ untuk semua $x, y \in A$. Jika $x * (y * z) = (x * y) * z$ untuk semua $x, y, z \in A$, maka dapat dikatakan operasi biner $*$ bersifat asosiatif (Gilbert dan Gilbert, 2009).

Contoh 11

Misalkan operasi biner $*$ pada himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ yang didefinisikan dengan

$$x * y = x + y - 1$$

Operasi biner $*$ bersifat komutatif karena

$$x * y = x + y - 1 = y + x - 1 = y * x$$

Demikian juga operasi biner $*$ bersifat asosiatif karena

$$x * (y * z) = x * (y + z - 1)$$

$$= x + (y + z - 1) - 1$$

$$= x + y + z - 1 - 1$$

$$= (x + y - 1) + z - 1$$

$$= (x + y - 1) * z$$

$$= (x * y) * z$$

Definisi 10

Misalkan $*$ merupakan operasi biner pada himpunan tak kosong A. Suatu elemen $e \in A$ dikatakan identitas terhadap operasi biner jika e mempunyai sifat

$$e * x = x * e = x$$

untuk semua $x \in A$ (Gilbert dan Gilbert, 2009).

Contoh 12

Pada himpunan bilangan bulat, 1 merupakan identitas terhadap operasi perkalian karena $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$, tapi 1 bukan merupakan identitas terhadap operasi penjumlahan karena $1 + x \neq x$.

Definisi 11

Misalkan e merupakan identitas terhadap operasi biner $*$ pada himpunan A dan misalkan $a \in A$. Jika terdapat $b \in A$ sehingga $a * b = e$, maka b merupakan invers kanan dari a terhadap operasi biner $*$. Jika $b * a = e$, maka b merupakan invers kiri dari a. Sehingga b merupakan invers dari a terhadap operasi biner $*$ (Gilbert dan Gilbert, 2009).

2.5 Grup

Definisi 12

Misalkan G adalah himpunan tak kosong dan $*$ adalah operasi biner yang didefinisikan pada G. Suatu struktur aljabar yang dinyatakan dengan $(G,*)$ dinamakan grup jika dan hanya jika:

1. Operasi $*$ bersifat asosiatif di G.
2. G memiliki elemen identitas terhadap operasi $*$.
3. G memuat invers terhadap operasi $*$ (Gilbert dan Gilbert, 2009).

Contoh 13

Misal didefinisikan $G = M_2(\mathbb{Z}) = \left\{\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \mid p,q,r,s \in \mathbb{Z}\right\}$ dan $+$ merupakan operasi biner pada G. Buktikan bahwa $(G,+)$ adalah grup.

Bukti:

1. Operasi $+$ bersifat Asosiatif

Ambil $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$, dan $C = \begin{pmatrix} t & u \\ v & w \end{pmatrix}$ untuk sebarang $a,b,c,d,p,q,r,s,t,u,v,w \in \mathbb{Z}$, maka

$$\begin{aligned}
(A+B)+C &= \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} t & u \\ v & w \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a+p & b+q \\ c+r & d+s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t & u \\ v & w \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (a+p)+t & (b+q)+u \\ (c+r)+v & (d+s)+w \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a+p+t & b+q+u \\ c+r+v & d+s+w \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a+(p+t) & b+(q+u) \\ c+(r+v) & d+(s+w) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t & u \\ v & w \end{pmatrix}\right]
\end{aligned}$$

$$= A + (B + C)$$

Jadi $(G, +)$ asosiatif.

2. Memiliki elemen identitas terhadap operasi $+$

   Elemen identitas untuk penjumlahan matriks adalah $I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, maka

   $I + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (identitas kanan)

   Kemudian

   $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + I = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (identitas kiri)

   Jadi G memiliki elemen identitas $I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. Memiliki invers

   Setiap elemen di G memiliki invers, ambil $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dan misal:

$$P = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$$

   Maka

$$P + A = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = I$$

   dan

$$A + P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = I$$

   Jadi G memiliki invers terhadap penjumlahan yaitu:

$$P = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$$

Jadi, $(G, +)$ adalah grup.

2.6 Aljabar BCI

Definisi 13

Misalkan X suatu himpunan tak kosong dengan operasi biner $*$ dan konstanta 0. Maka struktur aljabar $(X,\ *,\ 0)$ dikatakan aljabar-BCI jika memenuhi kondisi berikut:

$(B1)$ $\big((x * y) * (x * z)\big) * (z * y) = 0$

$(B2)$ $\big(x * (x * y)\big) * y = 0$

$(B3)$ $x * x = 0$

$(B4)$ $x * y = 0$ dan $y * x = 0$ maka $x = y$

untuk semua $x, y, z \in X$ (Saeid, 2010).

Contoh 14

Diberikan suatu struktur aljabar $(X,\ *,\ 0)$ dan himpunan $X = \{0, 1, 2, 3\}$ dengan operasi $*$ yang didefinisikan sebagai berikut:

Tabel 2.1 Tabel Cayley $\boldsymbol{X}$ dengan Operasi $*$

$*$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	0	0
2	2	2	0	0
3	3	2	1	0

Berdasarkan Tabel 2.1, berlaku

1. $\big((x * y) * (x * z)\big) * (z * y) = 0$, untuk setiap $x, y, z \in X$.
2. Untuk setiap $x \in X$, maka $x * x = 0$.
3. $\big(x * (x * y)\big) * y = 0$, untuk setiap $x, y \in X$.
4. Untuk setiap $x \in X$, jika $x * y = 0$ dan $y * x = 0$, maka $x = y$.

Sehingga $(X,*,0)$ merupakan aljabar-BCI.

2.7 Ideal Aljabar-BCI

Definisi 14

Misalkan $(X, *, 0)$ suatu aljabar-BCI dengan $I \subseteq X$ dan $I \neq \emptyset$, maka I disebut ideal dari X jika memenuhi kondisi berikut:

1. $0 \in I$;
2. $x * y \in I$ dan $y \in I$ mengakibatkan $x \in I$

untuk setiap $x, y \in X$. Dinotasikan dengan $I \trianglelefteq X$ (Hao dan Li, 2004).

Contoh 15

Diberikan aljabar-BCI $(X, *, 0)$ seperti pada Contoh 14. Tunjukkan $I = \{0, 1\}$ merupakan ideal dari $(X, *, 0)$ yang didefinisikan sebagai berikut:

Tabel 2.2 Tabel Cayley Ideal Aljabar-BCI

*	0	1
0	0	0
1	1	0

Berdasarkan Tabel 2.2, berlaku

1. $0 \in I$.
2. $x * y \in I$ dan $y \in I$ maka $x \in I$, untuk setiap $x \in X$.

2.8 Aljabar-BCI Semu

Definisi 15

Aljabar-BCI semu adalah struktur $\mathfrak{X} = (X, \preccurlyeq, *, \diamond, 0)$, dengan $\preccurlyeq$ merupakan relasi biner dari himpunan X, $*$ dan $\diamond$ merupakan operasi biner pada himpunan X, dan 0 elemen identitas pada X. $(X, \preccurlyeq, *, \diamond, 0)$

dikatakan aljabar-BCI semu jika untuk setiap $x, y, z \in X$ memenuhi kondisi sebagai berikut:

(a1) $(x * y) \diamond (x * z) \preccurlyeq z * y, (x \diamond y) * (x \diamond z) \preccurlyeq z \diamond y,$

(a2) $x * (x \diamond y) \preccurlyeq y,\ x \diamond (x * y) \preccurlyeq y,$

(a3) $x \preccurlyeq x,$

(a4) $x \preccurlyeq y, y \preccurlyeq x \Rightarrow x = y,$

(a5) $x \preccurlyeq y \ \Leftrightarrow x * y = 0 \Leftrightarrow x \diamond y = 0$ (Jun, dkk, 2006).

Contoh 16

Diberikan aljabar-BCI semu dan $X = \{0,\ a,\ b,\ c\}$ yang didefinisikan sebagai berikut:

Tabel 2.3 Tabel Cayley $\boldsymbol{X}$ Terhadap Operasi $*$ dan $\diamond$

$*$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	a	0
b	b	b	0	0
c	c	b	c	0

$\diamond$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	a	0
b	b	b	0	0
c	c	c	a	0

Berdasarkan Tabel 2.3, maka

i. Untuk setiap $x, y, z \in X$, berlaku $(x * y) \diamond (x * z) \preccurlyeq z * y,\ (x \diamond y) * (x \diamond z) \preccurlyeq z \diamond y$.

ii. Untuk setiap $x, y, z \in X$, berlaku $x * (x \diamond y) \preccurlyeq y,\ x \diamond (x * y) \preccurlyeq y$.

iii. Untuk setiap $x \in X$, berlaku $x \preccurlyeq x$.

iv. Untuk setiap $x, y \in X$, berlaku jika $x \preccurlyeq y$ dan $y \preccurlyeq x$, maka $x = y$.

v. Untuk setiap $x, y \in X$ berlaku $x \preccurlyeq y$ jika dan hanya jika $x * y = 0$ dan $x \diamond y = 0$.

Sehingga $\mathfrak{X} = (X, \preccurlyeq, *, \diamond, 0)$ merupakan aljabar-BCI semu.

Contoh 17

Misalkan himpunan $X = [0, \infty]$ dengan $\leq$ merupakan relasi biner dan operasi biner $*$ dan $\diamond$ pada X didefinisikan sebagai berikut

$$x * y = \begin{cases} 0 & \text{jika } x \leq y \\ \frac{2x}{\pi} \arctan\left(ln\left(\frac{x}{y}\right)\right) & \text{jika } y < x \end{cases}$$

$$x \diamond y = \begin{cases} 0 & \text{jika } x \leq y \\ xe^{-\tan\left(\frac{xy}{2x}\right)} & \text{jika } y < x \end{cases}$$

untuk semua $x, y \in X$. Maka $\mathfrak{X} = (X, \leq, *, \diamond, 0)$ merupakan aljabar-BCI semu (Lee dan Park, 2009).

Setiap aljabar-BCI semu dengan kondisi $x * y = x \diamond y$ untuk semua $x, y \in X$ merupakan aljabar-BCI. Dalam aljabar-BCI semu $\mathfrak{X}$ memenuhi pernyataan berikut:

$(b1)$ $x \preccurlyeq 0 \Rightarrow x = 0$

$(b2)$ $x \preccurlyeq y \Rightarrow z * y \preccurlyeq z * x, z \diamond y \preccurlyeq z \diamond x$

$(b3)$ $x \preccurlyeq y, y \preccurlyeq z \Rightarrow x \preccurlyeq z$

$(b4)$ $(x * y) \diamond z = (x \diamond z) * y$

$(b5)$ $x * y \preccurlyeq z \Leftrightarrow x \diamond z \preccurlyeq y$

$(b6)$ $(x * y) * (z * y) \preccurlyeq x * z, (x \diamond y) \diamond (z \diamond y) \preccurlyeq x \diamond z$

$(b7)$ $x \preccurlyeq y \Rightarrow x * z \preccurlyeq z * y, x \diamond z \preccurlyeq y \diamond z$

$(b8)$ $x * 0 = x = x \diamond 0$

$(b9)$ $x * \left(x \diamond (x * y)\right) = x * y, x \diamond \left(x * (x \diamond y)\right) = x \diamond y$

$(b10)\ \ 0 * (x \diamond y) \preccurlyeq y \diamond x$

$(b11)\ \ 0 \diamond (x * y) \preccurlyeq y * x$

$(b12)\ \ 0 * (x * y) = (0 \diamond x) \diamond (0 * y)$

$(b13)$ $0 \diamond (x \diamond y) = (0 * x) * (0 \diamond y)$ (Lee dan Park, 2009).

Bukti:

$(b1)$ $x \preccurlyeq 0 \Rightarrow x = 0$

$x \preccurlyeq 0$ berarti $x * 0 = x \diamond 0 = 0$. Untuk menunjukkan $x = 0$, maka terlebih dahulu ditunjukkan $0 \preccurlyeq x$ sehingga

$$
\begin{aligned}
0 &= (x * (x \diamond x) \diamond x && \text{sifat } (B2) \\
&= (x * 0) \diamond x && \text{sifat } (B3) \\
&= 0 \diamond x && \text{karena } x * 0 = 0 \\
0 &\preccurlyeq x && \text{definisi } \preccurlyeq
\end{aligned}
$$

Karena $x \preccurlyeq 0$ dan $0 \preccurlyeq x$ menggunakan sifat (a4), maka $x = 0$.

$(b2)$ $\quad x \preccurlyeq y \Rightarrow z * y \preccurlyeq z * x, z \diamond y \preccurlyeq z \diamond x$

$x \preccurlyeq y$ berarti $x * y = x \diamond y = 0$, dan $(x * y) \diamond (x * z) \preccurlyeq z * y$ yang berarti $\big((z * y) \diamond (z * x)\big) \diamond (x * y) = 0$, sehingga

$$
\begin{aligned}
0 &= \big((z * y) \diamond (z * x)\big) \diamond (x * y) \\
&= \big((z * y) \diamond (z * x)\big) \diamond 0 && \text{karena } x * y = 0 \\
(z * y) \diamond (z * x) &\preccurlyeq 0 && \text{definisi } \preccurlyeq
\end{aligned}
$$

Menggunakan sifat $(b1)$, maka diperoleh $(z * y) \diamond (z * x) = 0$ sehingga $(z * y) \preccurlyeq (z * x)$.

Di sisi lain $(x \diamond y) * (x \diamond z) \preccurlyeq z \diamond y$ berarti $\big((z \diamond y) * (z \diamond x)\big) * (x \diamond y) = 0$, maka

$$0 = \big((z \diamond y) * (z \diamond x)\big) * (x \diamond y)$$

$= \big((z \diamond y) * (z \diamond x)\big) * 0$ karena $x \diamond y = 0$

$(z \diamond y) * (z \diamond x) \preccurlyeq 0$ definisi $\preccurlyeq$

Menggunakan sifat $(b1)$, maka diperoleh $(z \diamond y) * (z \diamond x) = 0$ sehingga $(z \diamond y) \preccurlyeq (z \diamond x)$.

Terbukti bahwa $x \preccurlyeq y \Rightarrow z * y \preccurlyeq z * x, z \diamond y \preccurlyeq z \diamond x$.

$(b3)$ $x \preccurlyeq y, y \preccurlyeq z \Rightarrow x \preccurlyeq z$

$x \preccurlyeq y$ berarti $x * y = x \diamond y = 0$, maka

$y \preccurlyeq z$

$x * z \preccurlyeq x * y$ sifat $(b2)$

$x * z \preccurlyeq 0$ karena $x * y = 0$

$x * z = 0$ sifat $(b1)$

$x \preccurlyeq z$ definisi $\preccurlyeq$

dan

$y \preccurlyeq z$

$x \diamond z \preccurlyeq x \diamond y$ sifat $(b2)$

$x \diamond z \preccurlyeq 0$ karena $x \diamond y = 0$

$x \diamond z = 0$ sifat $(b1)$

$x \preccurlyeq z$ definisi $\preccurlyeq$

Sehingga terbukti $x \preccurlyeq y, y \preccurlyeq z \Rightarrow x \preccurlyeq z$.

$(b4)$ $(x * y) \diamond z = (x \diamond z) * y$

Misalkan $x * (x \diamond z) \preccurlyeq z$ dari sifat (a2), maka

$x * (x \diamond z) \preccurlyeq z$

$(x * y) \diamond z \preccurlyeq (x * y) \diamond \big(x * (x \diamond z)\big)$ sifat $(b2)$

Mengikuti dari sifat (a1) diperoleh $(x * y) \diamond \big(x * (x \diamond z)\big) \preccurlyeq (x \diamond z) * y$. Karena $(x * y) \diamond z \preccurlyeq (x * y) \diamond \big(x * (x \diamond z)\big)$ dan $(x * y) \diamond \big(x * (x \diamond z)\big) \preccurlyeq (x \diamond z) * y$ menggunakan sifat $(b3)$, maka $(x * y) \diamond z \preccurlyeq (x \diamond z) * y$.

Di sisi lain misalkan $x \diamond (x * y) \preccurlyeq y$, maka

$x \diamond (x * z) \preccurlyeq z$

$(x \diamond y) * z \preccurlyeq (x \diamond y) * \big(x \diamond (x * z)\big)$ sifat $(b2)$

Mengikuti dari sifat (a1) diperoleh $(x \diamond y) * \big(x \diamond (x * z)\big) \preccurlyeq (x * z) \diamond y$. Karena $(x \diamond y) * z \preccurlyeq (x \diamond y) * \big(x \diamond (x * z)\big)$ dan $(x \diamond y) * \big(x \diamond (x * z)\big) \preccurlyeq (x * z) \diamond y$ menggunakan sifat $(b3)$, maka $(x * y) \diamond z \preccurlyeq (x \diamond z) * y$.

Karena $(x * y) \diamond z \preccurlyeq (x \diamond z) * y$ dan $(x \diamond z) * y \preccurlyeq (x * y) \diamond z$ menggunakan sifat (a4), maka $(x * y) \diamond z = (x \diamond z) * y$.

$(b5)$ $x * y \preccurlyeq z \Leftrightarrow x \diamond z \preccurlyeq y$

$x * y \preccurlyeq z$ berati $(x * y) \diamond z = 0$, maka

$0 = (x * y) \diamond z$

$= (x \diamond z) * y$ sifat $(b4)$

$x \diamond z \preccurlyeq y$ definisi $\preccurlyeq$

Sebaliknya

$x \diamond z \preccurlyeq y$ berarti $(x \diamond z) * y = 0$, maka

$0 = (x \diamond z) * y$

$= (x * y) \diamond z$ sifat $(b4)$

$x * y \preccurlyeq z$ definisi $\preccurlyeq$

Sehingga terbukti bahwa $x * y \preccurlyeq z \Leftrightarrow x \diamond z \preccurlyeq y$.

$(b6)$ $(x * y) * (z * y) \preccurlyeq x * z$, $(x \diamond y) \diamond (z \diamond y) \preccurlyeq x \diamond z$

Menggunakan sifat (a1) yaitu $(x * y) \diamond (x * z) \preccurlyeq z * y$, maka

$\big((x * y) \diamond (x * z)\big) * (z * y) = 0$ definisi $\preccurlyeq$

$\big((x * y) * (z * y)\big) \diamond (x * z) = 0$ sifat $(b4)$

$(x * y) * (z * y) \preccurlyeq x * z$ definisi $\preccurlyeq$

dan $(x \diamond y) * (x \diamond z) \preccurlyeq z \diamond y$, maka

$\big((x \diamond y) * (x \diamond z)\big) \diamond (z \diamond y) = 0$ definisi $\preccurlyeq$

$\big((x \diamond y) \diamond (z \diamond y)\big) * (x \diamond z) = 0$ sifat $(b4)$

$(x \diamond y) \diamond (z \diamond y) \preccurlyeq x \diamond z$ definisi $\preccurlyeq$

Sehingga terbukti $(x * y) * (z * y) \preccurlyeq x * z$ dan $(x \diamond y) \diamond (z \diamond y) \preccurlyeq x \diamond z$.

$(b7)$ $x \preccurlyeq y \Rightarrow x * z \preccurlyeq z * y, x \diamond z \preccurlyeq y \diamond z$

$x \preccurlyeq y$ berarti $x * y = x \diamond y = 0$ dengan menggunakan sifat $(b6)$, maka

$(x * z) * (y * z) \preccurlyeq x * y$

$(x * z) * (y * z) \preccurlyeq 0$ karena $x * y = 0$

$(x * z) * (y * z) = 0$ sifat $(b1)$

$(x * z) \preccurlyeq (y * z)$ definisi $\preccurlyeq$

dan

$(x \diamond z) * (y \diamond z) \preccurlyeq x \diamond y$

$(x \diamond z) \diamond (y \diamond z) \preccurlyeq 0$ karena $x \diamond y = 0$

$(x \diamond z) \diamond (y \diamond z) = 0$ sifat $(b1)$

$(x \diamond z) \preccurlyeq (y \diamond z)$ definisi $\preccurlyeq$

Sehingga terbukti $x \preccurlyeq y \Rightarrow x * z \preccurlyeq z * y, x \diamond z \preccurlyeq y \diamond z$.

$(b8)$ $x * 0 = x = x \diamond 0$

Menggunakan sifat (a2) yaitu $x * (x \diamond y) \preccurlyeq y$ dan $x \diamond (x * y) \preccurlyeq y$, misalkan $y = 0$ maka diperoleh $x * (x \diamond 0) \preccurlyeq 0$ dan $x \diamond (x * 0) \preccurlyeq 0$. Mengikuti dari sifat $(b1)$, maka $x * (x \diamond 0) = 0$ dan $x \diamond (x * 0) = 0$, sehingga $x \preccurlyeq x \diamond 0$ dan $x \preccurlyeq x * 0$. Di sisi lain,

0	$= 0 \diamond 0$	sifat $(B3)$
	$= (x * x) \diamond 0$	sifat $(B3)$
	$= (x \diamond 0) * x$	sifat $(b4)$
	$x \diamond 0 \preccurlyeq x$	definisi $\preccurlyeq$

dan

0	$= 0 * 0$	sifat $(B3)$
	$= (x \diamond x) * 0$	sifat $(B3)$
	$= (x * 0) \diamond x$	sifat $(b4)$
	$x * 0 \preccurlyeq x$	definisi $\preccurlyeq$

Karena $x \preccurlyeq x \diamond 0$ dan $x \diamond 0 \preccurlyeq x$, maka $x \diamond 0 = x$ dan karena $x \preccurlyeq x * 0$ dan $x * 0 \preccurlyeq x$ maka $x * 0 = 0$.

$(b9)$ $x * \big(x \diamond (x * y)\big) = x * y, x \diamond \big(x * (x \diamond y)\big) = x \diamond y$

Mengikuti sifat (a2), maka diperoleh $x * \big(x \diamond (x * y)\big) \preccurlyeq x * y$ dan $x \diamond \big(x * (x \diamond y)\big) \preccurlyeq x \diamond y$. Di sisi lain,

$0 = (x * y) \diamond (x * y)$	sifat $(B3)$
$= \big(x \diamond (x * y)\big) * y$	sifat $(b4)$
$\big(x \diamond (x * y)\big) \preccurlyeq y$	definisi $\preccurlyeq$
$x * y \preccurlyeq x * (x \diamond (x * y)$	sifat $(b2)$

dan

$0 = (x \diamond y) * (x \diamond y)$	sifat $(B3)$

$= \big(x * (x \diamond y)\big) \diamond y$ sifat $(b4)$

$\big(x * (x \diamond y)\big) \preccurlyeq y$ definisi $\preccurlyeq$

$x \diamond y \preccurlyeq x \diamond (x * (x \diamond y)$ sifat $(b2)$

Karena $x * \big(x \diamond (x * y)\big) \preccurlyeq x * y$ dan $x * y \preccurlyeq x * (x \diamond (x * y)$ dengan menggunakan sifat (a4), maka $x * \big(x \diamond (x * y)\big) = x * y$. Demikian juga $x \diamond \big(x * (x \diamond y)\big) \preccurlyeq x \diamond y$ dan $x \diamond y \preccurlyeq x \diamond (x * (x \diamond y)$, maka $x \diamond \big(x * (x \diamond y)\big) = x \diamond y$.

$(b10)$ $0 * (x \diamond y) \preccurlyeq y \diamond x$

Mengikuti dari sifat (a1), maka diperoleh

$\big((x \diamond x) * (x \diamond y)\big) * (y \diamond x) = 0$ definisi $\preccurlyeq$

$\big(0 * (x \diamond y)\big) * (y \diamond x) = 0$ sifat $(B3)$

$0 * (x \diamond y) \preccurlyeq y \diamond x$ definisi $\preccurlyeq$

Sehinga terbukti $0 * (x \diamond y) \preccurlyeq y \diamond x$.

$(b11)$ $0 \diamond (x * y) \preccurlyeq y * x$

Mengikuti dari sifat (a1), maka diperoleh

$\big((x * x) \diamond (x * y)\big) \diamond (y * x) = 0$ definisi $\preccurlyeq$

$\big(0 \diamond (x * y)\big) \diamond (y * x) = 0$ sifat $(B3)$

$0 \diamond (x * y) \preccurlyeq y * x$ definisi $\preccurlyeq$

Sehinga terbukti $0 \diamond (x * y) \preccurlyeq y * x$.

$(b12)$ $0 * (x * y) = (0 \diamond x) \diamond (0 * y)$

$0 * (x * y) = \big((0 * y) \diamond (0 * y)\big) * (x * y)$ sifat $(B3)$

$= \big((0 * y) * (x * y)\big) \diamond (0 * y)$ sifat $(b4)$

$$= \left(\left((x \diamond x) * y\right) * (x * y)\right) \diamond (0 * y) \qquad \text{sifat } (B3)$$

$$= \left(\left((x * y) \diamond x\right) * (x * y)\right) \diamond (0 * y) \qquad \text{sifat } (b4)$$

$$= \left(\left((x * y) * (x * y)\right) \diamond x\right) \diamond (0 * y) \qquad \text{sifat } (b4)$$

$$= (0 \diamond x) \diamond (0 * x) \qquad \text{sifat } (B3)$$

Sehingga terbukti $0 * (x * y) = (0 \diamond x) \diamond (0 * y)$.

$(b13)$ $0 \diamond (x \diamond y) = (0 * x) * (0 \diamond y)$

$$0 \diamond (x \diamond y) = \left((0 \diamond y) * (0 \diamond y)\right) \diamond (x \diamond y) \qquad \text{sifat } (B3)$$

$$= \left((0 \diamond y) \diamond (x \diamond y)\right) * (0 \diamond y) \qquad \text{sifat } (b4)$$

$$= \left(\left((x * x) \diamond y\right) \diamond (x \diamond y)\right) * (0 \diamond y) \qquad \text{sifat } (B3)$$

$$= \left(\left((x \diamond y) * x\right) \diamond (x \diamond y)\right) * (0 \diamond y) \qquad \text{sifat } (b4)$$

$$= \left(\left((x \diamond y) \diamond (x \diamond y)\right) * x\right) * (0 \diamond y) \qquad \text{sifat } (b4)$$

$$= (0 * x) * (0 \diamond y) \qquad \text{sifat } (B3)$$

Sehingga terbukti $0 \diamond (x \diamond y) = (0 * x) * (0 \diamond y)$.

2.9 Konsep Aljabar-BCI Semu dalam Al-Quran

Salah satu bagian dari ilmu matematika adalah aljabar. Ilmu aljabar berhubungan dengan himpunan, operasi biner, dan sifat struktur-struktur di dalamnya, seperti halnya aljabar-BCI semu. Aljabar-BCI semu merupakan bagian dari ilmu aljabar yang di dalamnya juga mengkaji tentang himpunan, operasi biner, dan sifat struktur-strukturnya.

Konsep aljabar-BCI semu juga dibahas dalam al-Quran surat al-Fathir ayat 32 yang berbunyi:

ثُمَّ أَوْرَثْنَا ٱلْكِتَٰبَ ٱلَّذِينَ ٱصْطَفَيْنَا مِنْ عِبَادِنَا ۖ فَمِنْهُمْ ظَالِمٌ لِّنَفْسِهِۦ وَمِنْهُم مُّقْتَصِدٌ وَمِنْهُمْ سَابِقٌۢ بِٱلْخَيْرَٰتِ بِإِذْنِ ٱللَّهِ ۚ ذَٰلِكَ هُوَ ٱلْفَضْلُ ٱلْكَبِيرُ ﴿٣٢﴾

Artinya: "*kemudian kitab itu Kami wariskan kepada orang-orang yang Kami pilih di antara hamba-hamba Kami, lalu di antara mereka ada yang menganiaya diri mereka sendiri dan di antara mereka ada yang pertengahan dan diantara mereka ada (pula) yang lebih dahulu berbuat kebaikan dengan izin Allah. yang demikian itu adalah karunia yang amat besar"(QS. al-Fathir/35:1).*

Ayat tersebut menjelaskan tiga golongan kaum muslimin setelah menerima al-Quran yaitu golongan pertama disebut *zhalim linafsihi,* golongan kedua disebut *muqtashid,* dan golongan terakhir disebut *sabiqun bil-khairat* (Musthofa, 2012).

Ibnu Katsir (2010) menjelaskan bahwa di antara kaum muslimin adalah mereka yang menganiaya diri mereka sendiri yaitu orang yang melalaikan sebagian dari pekerjaan yang diwajibkan atasnya dan mengerjakan sebagian dari hal-hal yang diharamkan. Golongan kaum muslimin yang berikutnya adalah mereka yang yang berada di pertengahan, yaitu kaum muslimin yang mereka menunaikan hal-hal yang diwajibkan atasnya dirinya dan meninggalkan hal-hal yang diharamkan. Akan tetapi adakalanya dia meninggalkan sebagian dari hal-hal yang disunahkan dan mengerjakan hal-hal yang dimakruhkan.

Adapun golongan yang terakhir adalah mereka yang lebih cepat berbuat kebaikan, yaitu kaum muslimin yang mengerjakan semua kewajiban dan hal-hal yang disunahkan, juga meninggalkan semua yang diharamkan, yang dimakruhkan, dan sebagian yang diperbolehkan.

Hikmah dari ayat dan penjelasan tafsir tersebut dapat juga dinyatakan dalam konsep aljabar-BCI semu yaitu kumpulan golongan kaum muslimin setelah menerima al-Quran yang mempunyai sifat-sifat yang jelas. Seperti halnya konsep pada aljabar-BCI semu yang merupakan himpuman yang memiliki sifat-sifat yang jelas.

BAB III
PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai sifat-sifat ideal dari aljabar-BCI semu dengan teorema, lemma, proposisi, dan bukti beserta contohnya.

3.1 Ideal Semu

Misalkan $\mathfrak{X} = (X, \preccurlyeq, *, \diamond, 0)$ merupakan aljabar-BCI semu. Untuk himpunan bagian tak kosong J dari X dan setiap elemen y dari X didefinisikan

$*(y, J) = \{x \in X | x * y \in J\}$ dan $\diamond(y, J) = \{x \in X | x \diamond y \in J\}$.

Definisi 3.1.1

Suatu himpunan bagian tak kosong J dari $\mathfrak{X}$ dikatakan ideal semu dari $\mathfrak{X}$ jika memenuhi kondisi berikut:

$(c1)$ $0 \in J$.

$(c2)$ $(\forall y \in J)$ $*(y, J) \subseteq J$ dan $\diamond(y, J) \subseteq J$ (Lee dan Park, 2009:221).

Contoh:

Diberikan himpunan aljabar-BCI semu pada Contoh 17, misalkan himpunan $J = \{0\}$. Tunjukkan bahwa J merupakan ideal semu dari $\mathfrak{X}$.

1. Karena $J = \{0\}$, maka jelas $0 \in J$.
2. Akan dibuktikan $*(y, J) \subseteq J$ dan $\diamond(y, J) \subseteq J$.

   i. Ambil sebarang $x \in *(y, J)$, maka sesuai definisi diperoleh $x * y \in J$. Karena $J = \{0\}$, maka

   $x * 0 \in J$

   $x * 0 = 0$

Sesuai sifat (a5), maka $x \preccurlyeq 0$. Mengikuti sifat $(b1)$, maka $x = 0$.

Sehingga $* (y, J) = \{0\} \subseteq J$.

ii. Ambil sebarang $z \in \diamond (y, J)$, maka sesuai definisi diperoleh $z \diamond y \in J$. Karena $J = \{0\}$, maka

$z \diamond 0 \in J$

$z \diamond 0 = 0$

Sesuai sifat (a5), maka $z \preccurlyeq 0$. Mengikuti sifat $(b1)$, maka $z = 0$. Sehingga $\diamond (y, J) = \{0\} \subseteq J$.

Jadi himpunan $J = \{0\}$ merupakan ideal semu dari $\mathfrak{X}$.

Proposisi 3.1.2

Misalkan J suatu ideal semu dari $\mathfrak{X}$, maka:

$$(\forall x \in X)(x \in J \Rightarrow 0 * (0 \diamond x) \in J \;\&\; 0 \diamond (0 * x) \in J) \tag{3.1}$$

(Lee dan Park, 2009:221)

Bukti:

Karena $0 \in J$ dan $x \in J$, maka

1. $0 = (0 \diamond x) * (0 \diamond x)$ sifat $(B3)$

$\quad = \big(0 * (0 \diamond x)\big) \diamond x$ sifat $(b4)$

2. $0 = (0 * x) \diamond (0 * x)$ sifat $(B3)$

$\quad = \big(0 \diamond (0 * x)\big) * x$ sifat $(b4)$

Dari 1 dan 2 diperoleh $0 * (0 \diamond x) \in \diamond (x, J) \subseteq J$ dan $0 \diamond (0 * x) \in * (x, J) \subseteq J$. Sehingga $0 * (0 \diamond x) \in J$ dan $0 \diamond (0 * x) \in J$.

Lemma 3.1.3

Misalkan J merupakan ideal semu dari $\mathfrak{X}$. Jika $x \in J$ dan $y \preccurlyeq x$, maka $y \in J$ (Lee dan Park, 2009:221).

Bukti:

$y \preccurlyeq x$ berarti $y * x = 0 \in J$ dan $y \diamond x = 0 \in J$. Maka $y \in *(x, J) \subseteq J$ dan $y \in \diamond(x, J) \subseteq J$, sehingga $y \in J$.

Teorema 3.1.4

Misalkan J suatu ideal semu dari $\mathfrak{X}$ dan misalkan

$$J^{\#} = \{y \in X | 0 * (0 \diamond y) \in J, 0 \diamond (0 * y) \in J\}.$$

Maka $J^{\#}$ merupakan ideal semu dari $\mathfrak{X}$ dan $J \subseteq J^{\#}$ (Lee dan Park, 2009:221).

Bukti:

1. Karena $0 * (0 \diamond 0) \in J$ dan $0 \diamond (0 * 0) \in J$, maka $0 \in J^{\#}$.
2. Untuk setiap $y \in J^{\#}$, ambil sebarang $a \in *(y, J^{\#})$ artinya $a * y \in J^{\#}$ dan $b \in \diamond(y, J^{\#})$ artinya $b \diamond y \in J^{\#}$. Maka $0 * \big(0 \diamond (a * y)\big) \in J$ dan $0 \diamond \big(0 * (b \diamond y)\big) \in J$, sehingga:

$$0 \diamond \big(0 * (a * y)\big) = 0 \diamond \big((0 \diamond a) \diamond (0 * y)\big) \quad \text{sifat } (b12)$$

$$= \big(0 * (0 \diamond a)\big) * \big(0 \diamond (0 * y)\big) \in J \quad \text{sifat } (b13)$$

dan

$$0 * \big(0 \diamond (b \diamond y)\big) = 0 * \big((0 * b) \diamond (0 \diamond y)\big) \quad \text{sifat } (b13)$$

$$= \big(0 \diamond (0 * b)\big) \diamond \big(0 * (0 \diamond y)\big) \in J \quad \text{sifat } (b12)$$

Karena $0 * (0 \diamond y) \in J$ dan $0 \diamond (0 * y) \in J$, maka

$$0 * (0 \diamond a) \in *(0 \diamond (0 * y), J) \subseteq J$$

dan

$$0 \diamond (0 * b) \in \diamond(0 * (0 \diamond y), J) \subseteq J \qquad (3.2)$$

Sekarang, misalkan $0 \diamond (a * y) \preccurlyeq y * a$ dan $0 * (b \diamond y) \preccurlyeq y \diamond b$, maka

$0 \diamond (a * y) \preccurlyeq y * a$

$0 * (y * a) \preccurlyeq 0 * \big(0 \diamond (a * y)\big)$ sifat $(b2)$

$(0 \diamond y) \diamond (0 * a) \preccurlyeq 0 * \big(0 \diamond (a * y)\big) \in J$ sifat $(b12)$

dan

$0 * (b \diamond y) \preccurlyeq y \diamond b$

$0 \diamond (y \diamond b) \preccurlyeq 0 \diamond \big(0 * (b \diamond y)\big)$ sifat $(b2)$

$(0 * y) * (0 \diamond b) \preccurlyeq 0 \diamond \big(0 * (b \diamond y)\big) \in J$ sifat $(b13)$

Menggunakan lemma 3.1.3, maka diperoleh

$$(0 \diamond y) \diamond (0 * a) \in J \ \ \& \ \ (0 * y) * (0 \diamond b) \in J \tag{3.3}$$

Ambil $y = 0$ pada persamaan (3.3), maka diperoleh:

$(0 \diamond 0) \diamond (0 * a) = 0 \diamond (0 * a) \in J$ sifat $(B3)$

dan

$(0 * 0) * (0 \diamond b) = 0 * (0 \diamond b) \in J$ sifat $(B3)$

Karena $0 * (0 \diamond a) \in J$ dan $0 \diamond (0 * a) \in J$, maka jelas bahwa $a \in J^{\#}$ dan karena $0 \diamond (0 * b) \in J$ dan $0 * (0 \diamond b) \in J$, maka jelas bahwa $b \in J^{\#}$. Sehingga $* (y, J^{\#}) \subseteq J^{\#}$ dan $\diamond (y, J^{\#}) \subseteq J^{\#}$, maka $J^{\#}$ merupakan ideal semu dari $\mathfrak{X}$. Selanjutnya untuk $y \in J$, mengikuti Proposisi 3.1.2, maka $0 * (0 \diamond y) \in J$ dan $0 \diamond (0 * y) \in J$, sehingga $y \in J^{\#}$. Oleh karena itu jelas $J \subseteq J^{\#}$.

3.2 p-Ideal Semu

Definisi 3.2.1

Suatu himpunan bagian tak kosong J dari $\mathfrak{X}$ merupakan p-ideal semu dari $\mathfrak{X}$ jika untuk setiap $x, y, z \in X$ memenuhi aksioma berikut:

1. $0 \in J$

2. $(x * z) \diamond (y * z) \in J \;\&\; y \in J \;\Rightarrow x \in J$

$$(x \diamond z) * (y \diamond z) \in J \;\&\; y \in J \;\Rightarrow x \in J \tag{3.4}$$

(Lee dan Park, 2009:222).

Teorema 3.2.2

Setiap p-ideal semu dari $\mathfrak{X}$ merupakan ideal semu dari $\mathfrak{X}$ (Lee dan Park, 2009:222).

Bukti:

Misalkan J merupakan p-ideal semu dari $\mathfrak{X}$.

1. $0 \in J$ sesuai definisi p-ideal semu.
2. Untuk setiap $y \in J$, misalkan $a \in *(y, J)$ artinya $a * y \in J$ dan $b \in \diamond(y, J)$ artinya $b \diamond y \in J$, sehingga:

   $a * y = (a \diamond 0) * (y \diamond 0) \in J$ sifat $(b8)$

   dan

   $b \diamond y = (b * 0) \diamond (y * 0) \in J$ sifat $(b8)$

Mengikuti persamaan (3.4), maka $a \in J$ dan $b \in J$. Jadi $*(y, J) \subseteq J$ dan $\diamond(y, J) \subseteq J$.

Dari 1 dan 2, maka J merupakan ideal semu dari $\mathfrak{X}$.

Contoh :

Diberikan himpunan aljabar-BCI semu pada Contoh 17 dan himpunan $J = \{0\}$ merupakan ideal semu dari $\mathfrak{X}$. Himpunan $J = \{0\}$ bukan merupakan p-ideal semu dari $\mathfrak{X}$ karena $(1 * 2) \diamond (0 * 2) = 0 \diamond (0 * 2) = 0 \in J$ dan $(1 \diamond 2) * (0 \diamond 2) = 0 * (0 \diamond 2) = 0 \in J$, akan tetapi $1 \notin J$.

Proposisi 3.2.3

Misalkan J merupakan p-ideal semu dari $\mathfrak{X}$, maka berlaku

$$0 * (0 \diamond x) \in J \Rightarrow x \in J,$$

$$0 \diamond (0 * x) \in J \Rightarrow x \in J$$

untuk semua $x \in X$ (Lee dan Park, 2009:223).

Bukti:

Jelas $0 \in J$.

Asumsikan bahwa $0 * (0 \diamond x) \in J$ dan $0 \diamond (0 * x) \in J$, untuk $x \in X$, maka

$0 * (0 \diamond x) = (x \diamond x) * (0 \diamond x) \in J$ sifat (a3)

dan

$0 \diamond (0 * x) = (x * x) \diamond (0 * x) \in J$ sifat (a3)

Menggunakan persamaan (3.4), maka jelas bahwa $x \in J$.

Corollary 3.2.4

Misalkan J merupakan p-ideal semu dari $\mathfrak{X}$, maka

$$0 * (0 \diamond x) \in J \Leftrightarrow x \in J,$$

$$0 \diamond (0 * x) \in J \Leftrightarrow x \in J$$

untuk semua $x \in X$ (Lee dan Park, 2009:223).

Bukti:

($\Rightarrow$) Mengikuti Proposisi 3.2.3 untuk $0 * (0 \diamond x) \in J$, maka $x \in J$ dan $0 \diamond (0 * x) \in J$, maka $x \in J$.

($\Leftarrow$) Mengikuti Proposisi 3.1.2 setiap $x \in J$, maka jelas $0 * (0 \diamond x) \in J$ dan $0 \diamond (0 * x) \in J$.

Sehingga terbukti bahwa $0 * (0 \diamond x) \in J \Leftrightarrow x \in J$ dan $0 \diamond (0 * x) \in J \Leftrightarrow x \in J$.

3.3 Ideal Semu Asosiatif

Definisi 3.3.1

Suatu himpunan bagian tak kosong J dari $\mathfrak{X}$ dikatakan ideal semu asosiatif dari $\mathfrak{X}$ jika memenuhi

1. $0 \in J$
2. $(x * y) \diamond z \in J \,\&\, y \diamond z \in J \Rightarrow x \in J$

$$(x \diamond y) * z \in J \,\&\, y * z \in J \;\Rightarrow x \in J \tag{3.5}$$

untuk semua $x, y, z \in X$ (Lee dan Park, 2009:224).

Teorema 3.3.2

Himpunan bagian tak kosong J dari $\mathfrak{X}$ merupakan ideal semu asosiatif dari $\mathfrak{X}$ jika dan hanya jika memenuhi $0 \in J$ dan

$$(x * y) \diamond y \in J \Rightarrow x \in J$$

$$(x \diamond y) * y \in J \;\Rightarrow x \in J \tag{3.6}$$

untuk semua $x, y \in X$ (Lee dan Park, 2009:224).

Bukti:

$(\Rightarrow)$ Misalkan J merupakan ideal semu asosiatif dari $\mathfrak{X}$.

1. Jelas $0 \in J$ sesuai definisi ideal semu asosiatif.
2. Misalkan untuk setiap $x, y \in X$, $(x * y) \diamond y \in J$ dan $(x \diamond y) * y \in J$. Karena $y * y = y \diamond y = 0 \in J$ mengikuti persamaan (3.5), maka $x \in J$.

$(\Leftarrow)$ Misalkan $x, y, z \in X$ dengan $(x * y) \diamond z \in J \,\&\, y \diamond z \in J$ dan $(x \diamond y) * z \in J \,\&\, y * z \in J$. Ambil $z = y$, maka diperoleh $(x * y) \diamond y \in J$ dan $(x \diamond y) * y \in J$. Mengikuti persamaan (3.6), maka $x \in J$.

Sehingga terbukti J merupakan ideal semu asosiatif dari $\mathfrak{X}$.

Teorema 3.3.3

Setiap ideal semu asosiatif dari $\mathfrak{X}$ merupakan ideal semu dari $\mathfrak{X}$ (Lee dan Park, 2009:224).

Bukti:

Misalkan J merupakan ideal semu asosiatif dari $\mathfrak{X}$.

1. $0 \in J$ sesuai definisi ideal semu asosiatif.
2. Untuk setiap $y \in J$, misalkan $x \in *(y,J)$ artinya $x * y \in J$ dan $a \in \diamond(y,J)$ artinya $a \diamond y \in J$, maka

   $x * y = (x * y) \diamond 0 \in J$ sifat $(b8)$

   dan

   $a \diamond y = (a \diamond y) * 0 \in J$ sifat $(b8)$

   Karena $y \diamond 0 = y \in J$ dan $y * 0 = y \in J$, mengikuti persamaan (3.5) diperoleh $x \in J$ dan $a \in J$, sehingga $*(y,J) \subseteq J$ dan $\diamond(y,J) \subseteq J$.

Oleh karena itu J merupakan ideal semu dari $\mathfrak{X}$.

Contoh:

Diberikan himpunan aljabar-BCI semu pada Contoh 17 dan himpunan $J = \{0\}$ merupakan ideal semu dari $\mathfrak{X}$. Himpunan $J = \{0\}$ bukan merupakan ideal semu asosiatif dari $\mathfrak{X}$ karena $(1 * 2) \diamond 2 = 0 \diamond 2 = 0 \in J$ dan $(1 \diamond 2) * 2 = 0 * 2 = 0 \in J$, dan $2 * 2 = 2 \diamond 2 = 0 \in J$ akan tetapi $1 \notin J$.

Proposisi 3.3.4

Setiap ideal semu asosiatif J dari $\mathfrak{X}$ memenuhi pernyataan berikut:

$$x * y \in J \;\&\; x \in J \Rightarrow y \in J,$$

$$x \diamond y \in J \;\&\; x \in J \Rightarrow y \in J$$

untuk semua $x, y \in X$ (Lee dan Park, 2009:224).

Bukti:

Jelas $0 \in J$.

Misalkan $x, y \in X$ dengan $x \in J$, $x * y \in J$ dan $x \diamond y \in J$. Mengikuti proposisi 3.1.2, untuk setiap $x \in J$ maka $0 * (0 \diamond x) \in J$ dan $0 \diamond (0 * x) \in J$, sehingga

$0 * (0 \diamond x) = \big((0 \diamond x) \diamond (0 \diamond x)\big) * (0 \diamond x) \in J$ sifat (a3)

dan

$0 \diamond (0 * x) = \big((0 * x) * (0 * x)\big) \diamond (0 * x) \in J$ sifat (a3)

Menggunakan persamaan (3.6), diperoleh $0 \diamond x \in J$ dan $0 * x \in J$, sehingga

$$\begin{aligned} 0 \diamond x &= (y * y) \diamond x \in J && \text{sifat (a4)} \\ &= (y \diamond x) * y \in J && \text{sifat } (b4) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} 0 * x &= (y \diamond y) * x \in J && \text{sifat (a3)} \\ &= (y * x) \diamond y \in J && \text{sifat } (b4) \end{aligned}$$

Karena $x * y \in J$ dan $x \diamond y \in J$, menggunakan persamaan (3.5) maka jelas $y \in J$.

3.4 q-Ideal Semu

Definisi 3.4.1

Suatu himpunan bagian tak kosong J dari $\mathfrak{X}$ merupakan q-ideal semu dari $\mathfrak{X}$ jika memenuhi

1. $0 \in J$
2. $x * (y \diamond z) \in J \ \& \ y \in J \Rightarrow x * z \in J$

   $x \diamond (y * z) \in J \ \& \ y \in J \Rightarrow x \diamond z \in J$ (3.7)

untuk semua $x, y, z \in X$ (Lee dan Park, 2009:225).

Teorema 3.4.2

Setiap q-ideal semu dari $\mathfrak{X}$ merupakan ideal semu dari $\mathfrak{X}$ (Lee dan Park, 2009:225).

Bukti:

Misalkan J merupakan q-ideal semu dari $\mathfrak{X}$.

1. $0 \in J$ sesuai definisi q-ideal semu dari $\mathfrak{X}$.
2. Untuk setiap $y \in J$, misalkan $x \in *(y, J)$ artinya $x * y \in J$ dan $a \in \diamond(y, J)$ artinya $a \diamond y \in J$, sehingga

   $x * y = x * (y \diamond 0) \in J$ sifat $(b8)$

   dan

   $a \diamond y = a \diamond (y * 0) \in J$ sifat $(b8)$

   Karena $y \in J$ sesuai persamaan (3.7), maka $x * 0 \in J$ dan $a \diamond 0 \in J$. Mengikuti sifat $(b8)$, maka $x \in J$ dan $a \in J$, sehingga $*(y, J) \subseteq J$ dan $\diamond(y, J) \subseteq J$.

Oleh karena itu J merupakan ideal semu dari $\mathfrak{X}$.

Contoh:

Diberikan himpunan aljabar-BCI semu pada Contoh 17 dan himpunan $J = \{0\}$ merupakan ideal semu dari $\mathfrak{X}$. Tunjukkan bahwa Himpunan $J = \{0\}$ merupakan q-ideal semu dari $\mathfrak{X}$.

1. Karena $J = \{0\}$, maka $0 \in J$
2. Memenuhi $x * (y \diamond z) \in J \;\&\; y \in J \Rightarrow x * z \in J$ dan $x \diamond (y * z) \in J \;\&\; y \in J \Rightarrow x \diamond z \in J$
   i. Karena $J = \{0\}$, maka sesuai definisi untuk setiap $z \in X$, $0 \diamond z = 0 \in J$. Selanjutnya, ambil x sebarang di X dengan $x * (y \diamond z) \in J$, maka

$x * (0 \diamond z) \in J$ karena $y \in J$

$x * 0 \in J$ karena $0 \diamond z = 0$

$x * 0 = 0$

Sesuai sifat (a5), maka $x \preccurlyeq 0$. Mengikuti sifat $(b1)$, maka $x = 0$. Sehingga $0 * z = 0 \in J$.

ii. Karena $J = \{0\}$, maka sesuai definisi untuk setiap $z \in X$, $0 * z = 0 \in J$. Selanjutnya, ambil x sebarang di X dengan $x \diamond (y * z) \in J$, maka

$x \diamond (0 * z) \in J$ karena $y \in J$

$x \diamond 0 \in J$ karena $0 * z = 0$

$x \diamond 0 = 0$

Sesuai sifat (a5), maka $x \preccurlyeq 0$. Mengikuti sifat $(b1)$, maka $x = 0$. Sehingga $0 \diamond z = 0 \in J$.

Jadi himpunan $J = \{0\}$ merupakan q-ideal semu dari $\mathfrak{X}$.

Proposisi 3.4.3

Setiap q-ideal semu J dari $\mathfrak{X}$ memenuhi pernyataan berikut:

$$x * (0 \diamond y) \in J \Rightarrow x * y \in J,$$

$$x \diamond (0 * y) \in J \Rightarrow x \diamond y \in J$$

untuk semua $x, y \in X$ (Lee dan Park, 2009:225).

Bukti:

Jelas $0 \in J$.

Misalkan $x, y \in X$ dengan $x * (0 \diamond y) \in J$ dan $x \diamond (0 * y) \in J$. Karena $0 \in J$, mengikuti persamaan (3.7), maka diperoleh $x * y \in J$ dan $x \diamond y \in J$.

Proposisi 3.4.4

Setiap q-ideal semu J dari $\mathfrak{X}$ memenuhi pernyataan berikut:

$$x * (y \diamond z) \in J \Rightarrow (x * y) * z \in J,$$

$$x \diamond (y * z) \in J \Rightarrow (x \diamond y) \diamond z \in J$$

(Lee dan Park, 2009:226)

Bukti:

Akan ditunjukkan $(x * y) * z \in J$ dan $(x \diamond y) \diamond z \in J$.

Untuk semua $x, y, z \in X$, misalkan $x * (y \diamond z) \in J$ dan $x \diamond (y * z) \in J$, maka untuk $0 \in J$, diperoleh

$0 = (0 \diamond z) * (0 \diamond z)$ sifat $(B3)$

$= \big((y * y) \diamond z\big) * (0 \diamond z)$ sifat $(B3)$

$= \big((y \diamond z) * y\big) * (0 \diamond z)$ sifat $(b4)$

$= \Big((x * y) \diamond \big(x * (y \diamond z)\big)\Big) * (0 \diamond z)$ sifat $(b2)$

$= \big((x * y) * (0 \diamond z)\big) \diamond \big(x * (y \diamond z)\big) \in J$ sifat $(b4)$

dan

$0 = (0 * z) \diamond (0 * z)$ sifat $(B3)$

$= \big((y \diamond y) * z\big) \diamond (0 * y)$ sifat $(B3)$

$= \big((y * z) \diamond y\big) \diamond (0 * y)$ sifat $(b4)$

$= \Big((x \diamond y) * \big(x \diamond (y * z)\big)\Big) \diamond (0 * y)$ sifat $(b2)$

$= \big((x \diamond y) \diamond (0 * y)\big) * \big(x \diamond (y * z)\big) \in J$ sifat $(b4)$

Jadi

$\big((x * y) * (0 \diamond z)\big) \diamond \big(x * (y \diamond z)\big) \in J$, sehingga

$(x * y) * (0 \diamond z) \in \diamond\Big(\big(x * (y \diamond z)\big), J\Big) \subseteq J$

dan

$\big((x \diamond y) \diamond (0 * y)\big) * \big(x \diamond (y * z)\big) \in J$, sehingga

$(x \diamond y) \diamond (0 * y) \in *\left(\left(x \diamond (y * z)\right), J\right) \subseteq J.$

Menggunakan proposisi 3.4.3, maka diperoleh $(x * y) * z \in J$ dan $(x \diamond y) \diamond z \in J$.

3.5 a-Ideal Semu

Definisi 3.5.1

Himpunan bagian tak kosong J dari $\mathfrak{X}$ merupakan a-ideal semu dari $\mathfrak{X}$ jika memenuhi kondisi

1. $0 \in J$
2. $(x * y) \diamond (0 * z) \in J \;\&\; y \in J \;\Rightarrow z \diamond x \in J$

   $(x \diamond y) * (0 \diamond z) \in J \;\&\; y \in J \;\Rightarrow z * x \in J$ (3.8)

untuk semua $x, y, z \in X$ (Lee dan Park, 2009:227).

Teorema 3.5.2

Setiap a-ideal semu dari $\mathfrak{X}$ merupakan ideal semu dari $\mathfrak{X}$ (Lee dan Park, 2009:227).

Bukti:

Misalkan J merupakan a-ideal semu dari $\mathfrak{X}$.

1. $0 \in J$ sesuai definisi a-ideal semu dari $\mathfrak{X}$.
2. Untuk setiap $y \in J$, misalkan $x \in *\,(y, J)$ artinya $x * y \in J$ dan $w \in \diamond\,(y, J)$ artinya $w \diamond y \in J$, sehingga

   $x * y = (x * y) \diamond 0$ sifat $(b8)$

   $\quad = (x * y) \diamond (0 * 0) \in J$ sifat (a3)

   dan

   $w \diamond y = (w \diamond y) * 0$ sifat $(b8)$

   $\quad = (w \diamond y) * (0 \diamond 0) \in J$ sifat (a3)

Menggunakan persamaan (3.8), untuk setiap $y \in J$ maka diperoleh

$$0 \diamond x \in J \ \& \ 0 * w \in J \tag{3.9}$$

Pada persamaan (3.8), ambil $z = y = 0$, sehingga diperoleh,

$$x \in J, \text{maka } 0 * x \in J \ \& \ 0 \diamond x \in J. \tag{3.10}$$

Dengan mengkombinasikan persamaan (3.9) dan (3.10), diperoleh

$0 * (0 \diamond x) = (0 \diamond 0) * (0 \diamond x) \in J$ sifat $(B3)$

dan

$0 \diamond (0 * w) = (0 * 0) \diamond (0 * w) \in J$ sifat $(B3)$

Mengikuti persamaan (3.8), maka diperoleh $x * 0 = x \in J$ sehingga $x \in *(y, J) \subseteq J$ dan $w \diamond 0 = w \in J$ sehingga $w \in \diamond(y, J) \subseteq J$.

Oleh karena itu terbukti bahwa J merupakan ideal semu dari $\mathfrak{X}$.

Proposisi 3.5.3

Misalkan J merupakan a-ideal semu dari $\mathfrak{X}$, maka berlaku:

$$(x * z) \diamond (0 * y) \in J \Rightarrow y \diamond (x * z) \in J,$$

$$(x \diamond z) * (0 \diamond y) \in J \Rightarrow y * (x \diamond z) \in J$$

untuk semua $x, y, z \in X$ (Lee dan Park, 2009:228).

Bukti:

Jelas $0 \in J$.

Misalkan $x, y, z \in X$ dengan $(x * z) \diamond (0 * y) \in J$ dan $(x \diamond z) * (0 \diamond y) \in J$. Untuk $0 \in J$, maka

$0 = \big((x * z) \diamond (0 * y)\big) * \big((x * z) \diamond (0 * y)\big)$ sifat (a3)

$\quad = \Big((x * z) * \big((x * z) \diamond (0 * y)\big)\Big) \diamond (0 * y) \in J$ sifat $(b4)$

dan

$0 = \big((x \diamond z) * (0 \diamond y)\big) \diamond \big((x \diamond z) * (0 \diamond y)\big)$ sifat (a3)

$$= \Big((x \diamond z) \diamond \big((x \diamond z) * (0 \diamond y)\big)\Big) * (0 \diamond y) \in J \qquad \text{sifat } (b4)$$

Menggunakan persamaan (3.8), maka diperoleh $y \diamond (x * z) \in J$ dan $y * (x \diamond z) \in J$.

3.6 Konsep Ideal Semu dalam Al-Quran

Konsep ideal semu juga dijelaskan dalam al-Quran surat al-Baqarah ayat 208 yang berbunyi:

يَـٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ ٱدۡخُلُواْ فِي ٱلسِّلۡمِ كَآفَّةٗ وَلَا تَتَّبِعُواْ خُطُوَٰتِ ٱلشَّيۡطَٰنِۚ
إِنَّهُۥ لَكُمۡ عَدُوّٞ مُّبِينٞ ٢٠٨

Artinya: "*Hai orang-orang yang beriman, masuklah kamu ke dalam Islam keseluruhan, dan janganlah kamu turut langkah-langkah setan. Sesungguhnya setan itu musuh yang nyata bagimu"(QS. al-Baqarah/2:208).*

Ibnu Katsir (2000) menjelaskan bahwa dalam ayat tersebut Allah Swt. memerintahkan kepada hamba-Nya (umat Islam) yang beriman kepada-Nya dan membenarkan rasul-Nya, hendaklah mereka berpegang kepada tali Islam dan semua syariat serta mengamalkan semua perintah Allah Swt. dan meninggalkan semua larangan-Nya dengan segala kemampuan.

Ikrimah menduga bahwa ayat ini diturunkan berkenaan dengan segolongan orang dari kalangan orang-orang Yahudi yang masuk Islam meminta izin kepada rasulullah Saw. untuk melakukan kebaktian pada hari Sabtu dan membaca kitab Taurat di malam hari, maka Allah Swt. memerintahkan kepada mereka agar mendirikan syiar-syiar Islam dan menyibukkan diri dengan-Nya serta melupakan hal lain.

Ayat tersebut merupakan suatu perintah bagi orang-orang yang beriman untuk masuk ke agama Islam secara keseluruhan *(kaffah). Lafaz kaffah* yang di maksud adalah suatu perintah bagi umat yang beriman untuk mengikuti dengan sepenuh hati syariat nabi Muhammad Saw., tidak meninggalkan sesuatu pun yang ada padanya, dan meninggalkan apa yang ada di dalam kitab Taurat. Dalam hadits *Arba`in Nawawi* Rasulullah Saw. bersabda yang artinya:

"Dari Abu Abdurrahman, Abdullah bin Umar bin Khattab RA, dia berkata, "Saya mendengar Rasulullah Saw. bersabda, Islam dibangun di atas lima perkara: bersaksi bahwa tiada tuhan selain Allah Swt. dan bahwa Muhammad Saw. adalah utusan Allah Swt., menegakkan shalat, menunaikan zakat, melaksanakan haji, dan puasa Ramadhan." (HR. Tarmizi dan Muslim).

Hikmah dari ayat, penjelasan tafsir, dan hadits tersebut dapat dinyatakan dalam sifat-sifat ideal semu. Ideal semu bersifat p-ideal semu, ideal semu asosiatif, q-ideal semu, dan a-ideal semu.

Dari hasil pembahasan, ideal-ideal semu pada aljabar-BCI semu dapat dinyatakan sebagai berikut:

1. Jika J merupakan p-ideal semu dari $\mathfrak{X}$, maka J merupakan ideal semu dari $\mathfrak{X}$.
2. Jika J merupakan ideal semu asosiatif dari $\mathfrak{X}$, maka J merupakan ideal semu dari $\mathfrak{X}$.
3. Jika J merupakan q-ideal semu dari $\mathfrak{X}$, maka J merupakan ideal semu dari $\mathfrak{X}$.
4. Jika J merupakan a-ideal semu dari $\mathfrak{X}$, maka J merupakan ideal semu dari $\mathfrak{X}$.

Sama halnya dengan orang-orang yang beriman, jika seseorang berpegang teguh kepada tali Islam dan menjalankan semua perintah Allah Swt., maka seseorang tersebut dapat dikatakan Islam secara keseluruhan. Sehingga konsep sifat-sifat ideal semu juga terdapat dalam al-Quran.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari hasil pembahasan, didapatkan ideal-ideal semu sebagai berikut:

a. Ideal semu.

b. p-ideal semu dari $\mathfrak{X}$ yang pasti merupakan ideal semu dari $\mathfrak{X}$.

c. Ideal semu asosiatif dari $\mathfrak{X}$ yang pasti merupakan ideal semu dari $\mathfrak{X}$.

d. q-ideal semu dari $\mathfrak{X}$ yang pasti merupakan ideal semu dari $\mathfrak{X}$.

e. a-ideal semu dari $\mathfrak{X}$ yang pasti merupakan ideal semu dari $\mathfrak{X}$.

4.2 Saran

Penelitian ini membahas mengenai sifat-sifat ideal dari aljabar-BCI semu, untuk penelitian selanjutnya diharapkan dapat menjelaskan sifat-sifat ideal dari aljabar-BCK semu dan lainnya.

DAFTAR RUJUKAN

Anggrayni, D.D. 2010. *Q-Aljabar*. Skripsi tidak diterbitkan. Semarang: Universitas Diponegoro.

Arifin, A. 2000. *Aljabar*. Bandung: ITB Bandung.

Depdiknas, 2006. *Kurikulum Tingkat Satuan Pendidikan (KTSP)*. Jakarta: Departemen Pendidikan Nasional.

Gilbert, L. dan Gilbert, J. 2009. *Elements of Modern Algebra*. Boston: Weber & Schmidt.

Hao, J. dan Li, C.X. 2004. On Ideals of an Ideals in a BCI-Algebra. *Scientiae Mathematicae Japonicae*. 10: 493-500.

Jun, Y.B., Kim, H.S., dan Neggers, J. 2006. On Pseudo BCI Ideals of Pseudo BCI-Algebras. *Matematiqki Vesnik*. 58: 39-46.

Katsir, I. 2000. *Tafsir Ibnu Katsir (terjemahan)*. Bandung: Sinar Baru Algensindo.

Katsir, I. 2010. *Tafsir Ibnu Katsir (Jilid 7)*. Jakarta: Pustaka Imam As-Syafi`i.

Lee, K.J. dan Park, C.H. 2009. Some Ideals of Pseudo BCI-Algebras. *J. Appl. Math. & Informatics*, 27(1-2): 217-231.

Mas'oed, F. 2013. *Struktur Aljabar*. Jakarta: Akademia Permata.

Musthofa, M.A. 2012. *Media Islam Salafiyyah, Ahlussunnah wal Jama`ah*. https://almanhaj.or.id/3376-tiga-tingkatan-kaum-muslimin-golongan-manakah-kita.html. Diakses pada tanggal 8 mei 2017.

Raisinghania, M.D. dan Aggarwal, R.S. 1980. *Modern Algebra*. New Delhi: S. CHAN and COMPANY LTD.

Saeid, A.B. 2010. Fantastic Ideals in BCI-Algebras. *World Applied Science Journal*. 8: 550-554.

RIWAYAT HIDUP

Rifal Andika Faisal dilahirkan di Sungai Tarab pada tanggal 19 September 1994, anak kedua dari tiga bersaudara, pasangan bapak Padrizal dan ibu Fitrianis. Pendidikan dasar ditempuh di kampung halamannya di MIN Sungai Tarab yang ditamatkan pada tahun 2007.

Pada tahun yang sama dia melanjutkan pendidikan menengah pertama di MTsN Batusangkar. Pada tahun 2010 dia menamatkan pendidikannya, kemudian melanjutkan pendidikan menengah atas di MAN 2 Batusangkar dan menamatkan pendidikan tersebut pada tahun 2013. Pendidikan berikutnya dia tempuh di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang melalui jalur SPMB-PTAIN dengan mengambil Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345 Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Rifal Andika Faisal
NIM : 13610018
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Ideal-ideal Semu pada Aljabar-BCI Semu
Pembimbing I : Evawati Alisah, M.Pd
Pembimbing II : Mohammad Jamhuri, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan	
1	16 Maret 2017	Konsultasi Bab I dan Bab II	1.	
2	22 Maret 2017	Konsultasi Bab II		2.
3	30 Maret 2017	Konsultasi Agama Bab I dan Bab II	3.	
4	6 April 2017	ACC Bab I dan Bab II		4.
5	6 April 2017	ACC Agama Bab I dan Bab II	5.	
6	25 April 2017	Konsultasi Bab III dan Bab IV		6.
7	2 Mei 2017	Revisi Pembahasan Bab III	7.	
8	3 Mei 2017	Revisi Agama Bab II dan Konsultasi Agama Bab III		8.
9	9 Mei 2017	Revisi Agama Bab III	9.	
10	9 Mei 2017	ACC Bab III dan Bab IV		10.
11	10 Mei 2017	ACC Agama Bab III	11.	
12	12 Mei 2017	ACC Keseluruhan		12
13	12 Mei 2017	ACC Agama Keseluruhan	13.	

Malang, 12 Mei 2017
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001