

**ANALISIS KONSISTENSI DAN KESTABILAN MODEL DINAMIK
DISKRET PADA MASALAH *PREDATOR-PREY* DENGAN FUNGSI
RESPON *RATIO DEPENDENT* DAN PEMANENAN PADA *PREDATOR***

SKRIPSI

**OLEH
ARIS MUNANDAR
NIM. 12610074**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2017**

**ANALISIS KONSISTENSI DAN KESTABILAN MODEL DINAMIK
DISKRET PADA MASALAH *PREDATOR-PREY* DENGAN FUNGSI
RESPON *RATIO DEPENDENT* DAN PEMANENAN PADA *PREDATOR***

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh
Aris Munandar
NIM. 12610074**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2017**

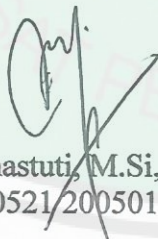
**ANALISIS KONSISTENSI DAN KESTABILAN MODEL DINAMIK
DISKRET PADA MASALAH PREDATOR-PREY DENGAN FUNGSI
RESPON RATIO DEPENDENT DAN PEMANENAN PADA PREDATOR**

SKRIPSI

Oleh
Aris Munandar
NIM. 12610074

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 29 Mei 2017

Pembimbing I,



Ari Kusumastuti, M.Si, M.Pd
NIP. 19770521/200501 2 004

Pembimbing II,



H. Wahyu H. Irawan, M.Pd
NIP. 19710420 200003 1 003

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751005/200312 1 001

**ANALISIS KONSISTENSI DAN KESTABILAN MODEL DINAMIK
DISKRET PADA MASALAH PREDATOR-PREY DENGAN FUNGSI
RESPON RATIO DEPENDENT DAN PEMANENAN PADA PREDATOR**

SKRIPSI

Oleh
Aris Munandar
NIM. 12610074





Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal 17 Juli 2017

Penguji Utama : Dr. Usman Pagalay, M.Si


Ketua Penguji : Mohammad Jamhuri, M.Si

Sekretaris Penguji : Ari Kusumastuti, M.Si, M.Pd

Anggota Penguji : H. Wahyu H. Irawan, M.Pd


.....

.....

.....

.....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika


Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751005 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Aris Munandar

NIM : 12610074

Jurusan : Matematika


Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Analisis Konsistensi dan Kestabilan Dinamik Diskret pada Masalah Model *Predator-Prey* dengan Fungsi Respon *Ratio Dependent* dan Pemanenan pada *Predator*

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 29 Mei 2017
Yang membuat pernyataan,




Aris Munandar
NIM. 12610074

MOTO

تَعَلَّمْنَا الْآدَبَ ثَلَاثِينَ عَامًا، وَتُعَلَّمْنَا الْعِلْمَ عِشْرِينَ

“Kami mempelajari masalah adab itu selama 30 tahun sedangkan kami mempelajari ilmu selama 20 tahun”

(Imam Abdullah bin Al-Mubarak).

أَكْرَمَ بِخَلْقِ نَبِيِّ زَانَهُ خَلْقٌ ◊ بِالْحُسْنِ مُشْتَمِلٍ بِالْبِشْرِ مُتَّسِمٍ

“Alangkah mulia budi pekerti Rasulullah yang menghiasi kesempurnaan keanggunannya, keindahan yang dimiliki paras wajahnya tampak berseri”

(Syarafuddin Abu Abdillah Muhammad bin Zaid al-Bushiri).

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

ayahanda H. Muhroni dan ibunda Hj. Siti Alfiah yang telah mendoakan, membesarkan, mendidik, dan memberikan segenap cinta kasihnya kepada penulis.

Kakak-kakak dan adik penulis (Ihsanul Huda, Nur Fitriyani, Lukman Hakim, dan Muhammad Faqih Maulana) yang selalu memberikan motivasi kepada penulis. Semoga Allah memberikan kebahagiaan di dunia dan akhirat.



KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt. atas limpahan rahmat, taufik, serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Ari Kusumastuti, M.Si, M.Pd, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan berbagai pengalaman yang berharga kepada penulis.
5. H. Wahyu H. Irawan, M.Pd, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagai ilmunya kepada penulis.
6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh

- dosen yang telah memberikan ilmu dan bimbingannya.
7. Bapak, ibu, kakak, adik, dan keluarga besar tercinta yang dengan sepenuh hati memberikan doa, semangat, serta motivasi kepada penulis sampai saat ini.
 8. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2012 yang berjuang bersama-sama untuk meraih mimpi.
 9. Semua pihak yang telah membantu namun tidak dapat disebutkan satu persatu.

Penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan pembaca.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, Mei 2017

Penulis



DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR	xiii
ABSTRAK	xiv
ABSTRACT	xv
ملخص	xvi
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	5
1.3 Tujuan Penelitian	5
1.4 Batasan Masalah	6
1.5 Manfaat Penelitian	6
1.6 Metode Penelitian	7
1.7 Sistematika Penulisan	7
BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Sistem Dinamik Diskret	9
2.1.1 Sistem Dinamik Diskret Linier	9
2.1.2 Kestabilan Sistem Dinamik Diskret Tak Linier	11
2.1.3 Sistem Dinamik Diskret Tak Linier	13
2.1.4 Kestabilan Lokal Sistem Dinamik Diskret Tak Linier	15
2.2 Metode Euler	15
2.3 Model Logistik	16
2.4 Model <i>Predator-Prey</i>	17
2.5 Fungsi Respon <i>Ratio Dependent</i>	18
2.6 Model <i>Predator-Prey</i> dengan Pemanenan pada <i>Prey</i> dan <i>Predator</i>	20

2.7 Model <i>Predator-Prey</i> dengan Fungsi Respon <i>Ratio Dependent</i> dan Pemanenan pada <i>Predator</i>	21
2.8 Kajian Islam Mengenai Konsistensi dan Kestabilan	22

BAB III PEMBAHASAN

3.1 Analisis Dinamik Model <i>Predator-Prey</i> dengan Fungsi Respon <i>Ratio Dependent</i> dan Pemanenan pada <i>Predator</i>	27
3.2 Diskretisasi Model	27
3.3 Titik Keseimbangan Model	29
3.4 Analisis Kestabilan pada Titik Keseimbangan	42
3.5 Hasil Analisis Kestabilan pada Titik Keseimbangan	55
3.6 Simulasi Numerik	56
3.6.1 Simulasi I	57
3.6.2 Simulasi II	59
3.6.3 Simulasi III	61

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan	68
4.2 Saran	69

DAFTAR RUJUKAN	70
-----------------------------	----

LAMPIRAN-LAMPIRAN

RIWAYAT HIDUP

DAFTAR TABEL

Tabel 3.1 Titik Keseimbangan dan Topologinya	55
--	----



DAFTAR GAMBAR

Gambar 3.1	Simulasi I Sistem Kontinu	57
Gambar 3.2	Simulasi I Sistem Diskret	58
Gambar 3.3	Simulasi II Sistem Kontinu	59
Gambar 3.4	Simulasi II Sistem Diskret	60
Gambar 3.5	Simulasi III Sistem Kontinu	61
Gambar 3.6	Simulasi III Sistem Diskret	62



ABSTRAK

Munandar, Aris. 2017. **Analisis Konsistensi dan Kestabilan Dinamik Diskret pada Masalah Model *Predator-Prey* dengan Fungsi Respon *Ratio Dependent* dan Pemanenan pada *Predator***. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si. (II) H. Wahyu H. Irawan, M.Pd.

Kata kunci: dinamik diskret, model *predator-prey*, fungsi respon *ratio dependent*, pemanenan.

Model *predator-prey* merupakan salah satu persamaan diferensial tak linier. Salah satunya diperlihatkan dalam bentuk model *predator-prey* dengan fungsi respon *ratio dependent* dan pemanenan pada *predator*. Selanjutnya, penelitian ini difokuskan pada analisis model *predator-prey* dengan fungsi respon *ratio dependent* dan pemanenan pada *predator* yang telah dikonstruksi menjadi bentuk sistem dinamik diskret. Dari analisis sistem dinamik diskret tersebut diperoleh perilaku solusi dinamik untuk titik kesetimbangan dan sifat kestabilan dari titik kesetimbangan.

Berdasarkan analisis diperoleh bahwa sistem dinamik diskret mempunyai tiga titik kesetimbangan yang eksis yaitu E_1 sebagai titik kepunahan bagi *prey*, E_2 sebagai titik kepunahan bagi *predator*, sedangkan E_3 sebagai titik kesetimbangan interior. Dimana titik kesetimbangan E_1 akan bersifat stabil jika $h < \min(h_1, h_2)$, bersifat tidak stabil jika $h > \min(h_1, h_2)$, dan titik kesetimbangan E_2 bersifat tidak stabil tanpa syarat apapun. Sedangkan untuk titik kesetimbangan interior E_3 akan bersifat stabil jika memenuhi syarat tertentu serta memenuhi kondisi tertentu.

Hasil simulasi numerik diperlihatkan bahwa model diskret *predator-prey* dengan fungsi respon *ratio dependent* dan pemanenan pada *predator* terlihat konsisten secara dinamik dengan ketentuan dan syarat tertentu.

ABSTRACT

Munandar, Aris. 2017. **Consistency and Stability Analysis of Dynamic Discrete on Problems Predator-Prey Model with Ratio Dependent Response Function and Harvesting on Predator.** Thesis. Mathematics Department. Faculty of Science and Technology. Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisors: (I) Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si. (II) H. Wahyu H. Irawan, M.Pd.

Keyword: discrete dynamic, predator-prey model, ratio dependent response function, harvesting

Predator-prey model is one of nonlinear-differential equation. One of them is shown in the form of predator-prey models with response function ratio-dependent and harvesting on predators. This research is focused on the analysis of predator-prey models with response function ratio-dependent and harvesting on the predator that has been constructed to form a discrete dynamical system. The analysis of the discrete dynamical system obtained dynamic behavior of solutions to a point of equilibrium and stability properties of the equilibrium point.

Based on the analysis showed that the discrete dynamical system has three equilibrium points exists namely E_1 as the point of extinction for prey, E_2 as the point of extinction for predators, and E_3 as a point of equilibrium interior. The point of E_1 will be stable when $h > \min(h_1, h_2)$, and will be not stable when $h < \min(h_1, h_2)$, and the equilibrium point E_2 will be not stable without any conditions. While, equilibrium interior point of E_3 will be stable when it meets certain conditions.

From the numerical simulation it is demonstrated that the discrete model of the predator-prey ratio dependent response function and harvesting on the predator tend to be consistent dynamically with certain terms and conditions.

ملخص

موناندار، أريس. ٢٠١٧. تحليل الاستقرار والاتساق الديناميكية المنفصلة فيما يتعلق بمسألة نموذج *Predator-Prey* مع دالة تعتمد على نسبة الاستجابة و حصاد فريدا تور. بحث جامعي. ثعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية بمالانج. المشرف: (١) أرى كوسوماستوتي الماجستير، (٢) الحاج وحي ه. إراوان الماجستير.

الكلمات الرئيسية: الديناميكية المنفصلة، نموذج *predator-prey*، و دالة تعتمد على نسبة الاستجابة، حصاد.

نموذج *predator-prey* هي احد من المعادلات التفاضلية غير الخطية. احد منهم سيظهر في شكل نموذج *predator-prey* مع دالة تعتمد على نسبة الاستجابة و حصاد *predator*. و بعده، ركز هذا البحث على تحليل نموذج *predator-prey* مع دالة تعتمد على نسبة الاستجابة و حصاد *predator* التي قد عمر في شكل النظام الديناميكية المنفصلة. من تحليل النظام الديناميكية المنفصلة حصل الحلول من السلوك الديناميكية إلى نقطة التوازن و صفة الإستقرار من نقطة التوازن.

استنادا إلى التحليل، حصل على أن النظام الديناميكية المنفصلة له ثلاث نقاط التوازن الموجودي E_1 كنقطة النقراض *prey*، و E_2 كنقطة النقراض *predator*، و E_3 كنقطة التوازن الداخلية. حيث نقطة التوازن E_1 سوف تكون مستقرة إذا كان $h < \min\{h_1, h_2\}$ وغير مستقرة إذا كان $h < \min\{h_1, h_2\}$ و نقطة التوازن E_2 غير مستقر بدون شرط. و أما لنقطة التوازن الداخلية E_3 سوف تكون مستقرة إذا كانت تفي بالشرط مؤكد و ظروف معينة. من المحاكاة العددية يظهر على أن نموذج *predator-prey* مع دالة تعتمد على نسبة الاستجابة و حصاد *predator* معروف بالإستقرار الدينامي مع شروط وظروف معينة.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Manusia sebagai hamba Allah Swt. yang dalam bermuamalah pada kehidupan sehari-hari dituntut atau dianjurkan untuk selalu berbuat konsisten (*istiqamah*) dalam melakukan ketaatan kepada Allah Swt. dan dilarang untuk berbuat kedhaliman. Allah Swt. berfirman dalam al-Quran surat Huud ayat 112-113,

فَأَسْتَقِمَّ كَمَا أُمِرْتَ وَمَنْ تَابَ مَعَكَ وَلَا تَطْغَوْا إِنَّهُ بِمَا تَعْمَلُونَ بَصِيرٌ
وَلَا تَرْكَبُوا إِلَى الَّذِينَ ظَلَمُوا فَتَمَسَّكُمُ النَّارُ وَمَا لَكُمْ مِنْ دُونِ اللَّهِ
مِنْ أَوْلِيَاءَ ثُمَّ لَا تُنصَرُونَ

“Maka tetaplah kamu pada jalan yang benar, sebagaimana diperintahkan kepadamu dan (juga) orang yang telah taubat beserta kamu dan janganlah kamu melampaui batas. Sesungguhnya Allah Maha Melihat apa yang kamu kerjakan. Dan janganlah kamu cenderung kepada orang yang dhalim yang menyebabkan kamu disentuh api neraka, sedangkan kamu tidak mempunyai seorang penolong pun selain Allah, sehingga kamu tidak akan diberi pertolongan” (QS. Huud/11:112-113).

Pada ayat tersebut ditekankan “Maka tetaplah kamu pada jalan yang benar”. Ayat ini memberikan penekanan atau anjuran bahwa Allah Swt. menganjurkan kepada hamba-Nya untuk selalu konsisten (*istiqamah*) dalam berbuat ketaatan dan senantiasa berada pada jalan yang benar yang telah ditunjukkan oleh Allah Swt. melalui rasul-Nya. Dikarenakan apabila seorang hamba tidak berada pada ketaatan kepada Allah Swt. maka akan muncul

perbuatan-perbuatan yang melawan dengan syariat Allah Swt. Selain itu, pada ayat selanjutnya “*Dan janganlah kamu cenderung kepada orang yang dhalim yang menyebabkan kamu disentuh api neraka*”. Ayat ini memberikan penekanan bahwasanya apabila seorang hamba sudah berada pada jalan yang benar, maka hendaknya untuk tidak mendekati seseorang yang cenderung berbuat kedhaliman atau berbuat sendiri kepada kedhaliman yang menyebabkan kerugian kepada dirinya sendiri.

Sebagai mana yang telah dijelaskan oleh Ibnu Katsir dalam tafsirnya tentang surat Huud ayat 112-113: yaitu sebagai suatu perintah, bahwa Allah Swt. memerintahkan Rasul dan hamba-hamba-Nya yang beriman untuk teguh dan selalu tetap dalam *istiqamah*, itu merupakan sebab yang dapat memberikan pertolongan yang besar dalam meraih kemenangan atas musuh-musuh dan dapat menghindari perselisihan serta dapat terhindar dari perbuatan melampaui batas, melampaui batas itu merupakan kehancuran, meskipun terhadap orang musyrik dan Allah Swt. memberi tahu bahwa, Allah Swt. adalah maha melihat kepada perbuatan hamba-hamba-Nya, Allah Swt. tidak lalai dan tidak tersamar sedikit pun (dari-Nya) (Abdullah, 2003).

Merujuk pada al-Quran surat Huud ayat 112-113 tersebut, permasalahan tentang konsistensi juga dibahas dalam bidang matematika. Salah satunya tentang konsistensi pada pemodelan matematika untuk permasalahan *predator-prey* yang dikaji secara kontinu dan diskret. Menurut Dimitrov dkk. (2007) suatu model diskret dikatakan konsisten secara dinamik jika model diskret tersebut memiliki titik kesetimbangan dan sifat kestabilan yang sama dengan model kontinunya. Model kontinu biasanya dibahas dalam bentuk persamaan diferensial dan model

diskret dikaji dalam ranah persamaan beda. Secara dinamik model kontinu dan diskret memiliki sifat-sifat utama yang berkaitan dengan solusi yaitu titik kesetimbangan dan kestabilan titik kesetimbangannya.

Model matematika untuk masalah *predator-prey* ini diusulkan oleh Lotka (1925) dan Volterra (1927). Model tersebut dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial biasa yang menyatakan adanya interaksi *predator* dan *prey*. Selanjutnya, model ini disebut dengan model *predator-prey* Lotka-Volterra. Sejalan dengan perkembangan keilmuan, maka banyak model matematika yang dikonstruksi dengan asumsi-asumsi dari bidang keilmuan lain, misalnya bidang biologi. Bidang biologi ada beberapa aspek yang dapat dipertimbangkan membentuk suatu model yaitu daya dukung lingkungan dengan jumlah maksimum populasi *prey* dapat ditampung dalam suatu ekosistem tanpa adanya *predator*. Dengan adanya interaksi dalam suatu ekosistem akan mengakibatkan terjadinya kompetisi antara *prey* maupun *predator*, pemanenan pada *prey* dan *predator*, dan adanya pengaruh fungsi respon predasi (Edwin, 2010).

Clark (1976) mengkaji model Lotka-Volterra dengan adanya pemanenan pada dua populasi yang tumbuh secara logistik dengan fungsi respon linier berupa fungsi respon Holling tipe I. Selanjutnya, Kar dan Chaudhuri (2001) mengembangkan masalah pemanenan *prey* dan *predator* yang *prey* maupun *predator* tumbuh secara logistik dengan pemanenan fungsi respon Holling tipe II, pada dua model pemanenan *predator* dan *prey* yang telah disebutkan sebelumnya, fungsi respon yang digunakan adalah *prey dependent* yaitu hanya bergantung pada kepadatan populasi *prey* saja.

Arditi dan Ginzburg (1989) menyatakan bahwa fungsi respon dalam ekologi seharusnya tidak bergantung pada kepadatan *prey* saja, melainkan harus bergantung pada *prey* dan *predator*. Dikarenakan pada interaksi antar *predator* akan terjadi persaingan mencari makanan dalam rangka melangsungkan kehidupan. Adapun salah satu fungsi respon yang bergantung pada kepadatan *prey* maupun *predator* adalah fungsi respon *ratio dependent*. Oleh karena itu, Rayungsari, dkk. (2014) mengusulkan modifikasi pada model *predator-prey* yang dikaji oleh Kar dan Chaudhuri (2001) yaitu dengan mengganti fungsi respon pemangsaan Holling tipe II menjadi *ratio dependent*. Selain mengganti fungsi responnya, Rayungsari, dkk. (2014) mengasumsikan pemanenan hanya dilakukan pada populasi *predator*, dalam rangka untuk mengendalikan pertumbuhan populasi *predator* yang berlebih.

Selain yang dilakukan Rayungsari, dkk. (2014) dalam memodifikasi model kontinu *predator-prey* dan menganalisis sistem kestabilannya, ada beberapa penelitian lainnya yang telah mengkaji model *predator-prey* secara diskret. Model-model diskret yang sudah diteliti antara lain model *predator-prey* (Huang, dkk. 2008), model *predator-prey* dengan fungsi respon Hassel-Varley (Wu dan Li, 2009), model *predator-prey* dengan fungsi respon Holling tipe II (Agiza, dkk. 2009), model *predator-prey* dengan pemanenan pada *prey* (Selvam, dkk. 2014), model *predator-prey* dengan fungsi respon *ratio dependent* (Naji dan Lafta, 2013), dan konsistensi model dinamik diskret pada *predator prey* leslie gower dengan fungsi respon holling tipe II (Alfiyah, dkk. 2015).

Berdasarkan penelitian sebelumnya, penelitian tentang sistem diskret masih terus berkembang dan menjadi acuan dalam melakukan penelitian.

Selanjutnya fokus penelitian ini adalah menganalisis kembali model yang dibahas oleh Rayungsari, dkk. (2014) dalam kondisi diskret. Kedalaman penelitian ini akan diarahkan ke analisis konsistensi dari kestabilan model *predator-prey* dengan fungsi respon *ratio dependent* dan pemanenan pada *predator*. Oleh karena itu, skripsi ini berjudul “*Analisis Konsistensi dan Kestabilan Model Dinamik Diskret pada Masalah Predator-Prey dengan Fungsi Respon Ratio Dependent dan Pemanenan pada Predator*”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan pada paparan latar belakang maka rumusan masalah yang dibahas dalam skripsi ini adalah:

1. Bagaimana analisis model dinamik diskret pada model *predator-prey* dengan fungsi respon *ratio dependent* dan pemanenan pada *predator*?
2. Bagaimana analisis kekonsistenan untuk kestabilan model dinamik diskret pada model *predator-prey* dengan fungsi respon *ratio dependent* dan pemanenan pada *predator*?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah maka tujuan penulisan skripsi ini adalah:

1. Menganalisis model dinamik diskret pada model *predator-prey* dengan fungsi respon *ratio dependent* dan pemanenan pada *predator*.
2. Menganalisis kekonsistenan untuk kestabilan model dinamik diskret pada model *predator prey* dengan fungsi respon *ratio dependent* dan pemanenan pada *predator*.

1.4 Batasan Masalah

Batasan masalah untuk permasalahan dalam penulisan skripsi ini adalah:

1. Model merujuk pada Rayungsari, dkk. (2014) yaitu:

$$\frac{dN}{dt} = r_1 N \left(1 - \frac{N}{K_1}\right) - \frac{aNP}{P + bN},$$

$$\frac{dP}{dt} = r_2 P \left(1 - \frac{P}{K_2}\right) + \frac{c_1 NP}{P + bN} - c_2 P,$$

dengan parameter,

simulasi I

$$r_1 = r_2 = c_1 = 0,8, K_1 = 20, K_2 = 5, c_2 = 0,4, a = b = 1,2$$

simulasi II

$$r_1 = 1,2, r_2 = a = 0,8, K_1 = K_2 = 20, c_1 = 0,6, c_2 = 0,1, \text{ dan } b = 0,4$$

simulasi III

$$r_1 = r_2 = a = b = 0,8, K_1 = K_2 = 20, c_1 = 0,6, \text{ dan } c_2 = 0,4$$

2. Kestabilan bersifat kestabilan lokal.
3. Analisisnya hanya di sekitar titik tetap saja.
4. Diskretisasi dengan metode *Forward Euler*.
5. Membandingkan model kontinu Rayungsari, dkk. (2014) dengan hasil diskretisasi model untuk analisis konsistensinya.

1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan mampu menjadi rujukan bagi penelitian berikutnya, khususnya dalam model dinamik *predator-prey* yang melibatkan faktor pemanenan yang bergantung pada populasi *prey* maupun *predator* (*ratio dependent*).

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam menganalisis konsistensi kestabilan dinamik diskret pada model *predator-prey* dengan fungsi respon *ratio dependent* dan pemanenan pada predator, yaitu pendekatan studi literatur atau *library research*. Adapun langkah-langkah dalam metode penelitian ini merujuk pada jurnal Zhuang dan Wen (2011), yaitu:

1. Diskretisasi model kontinu dengan metode *forward euler*.
2. Menentukan titik kesetimbangan dan eksistensi dari titik kesetimbangan sistem diskret.
3. Analisis kestabilan titik kesetimbangan sistem diskret
4. Simulasi dan perbandingan sistem dinamik diskret terhadap model kontinu (Rayungsari, dkk. 2014) untuk justifikasi kekonsistenan analisis model.
5. Kesimpulan dan saran.

1.7 Sistematika Penulisan

Agar pembahasan dalam penelitian ini tersaji secara sistematis dan mempermudah pembaca untuk memahaminya, penulis menggunakan sistematika sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pendahuluan yang terdiri dari latar belakang, rumusan masalah, tujuan penulisan, batasan masalah, manfaat penulisan, metode penelitian, dan sistematika pembahasan.

Bab II Kajian Pustaka

Bab ini terdiri atas teori-teori yang mendukung pembahasan. Teori

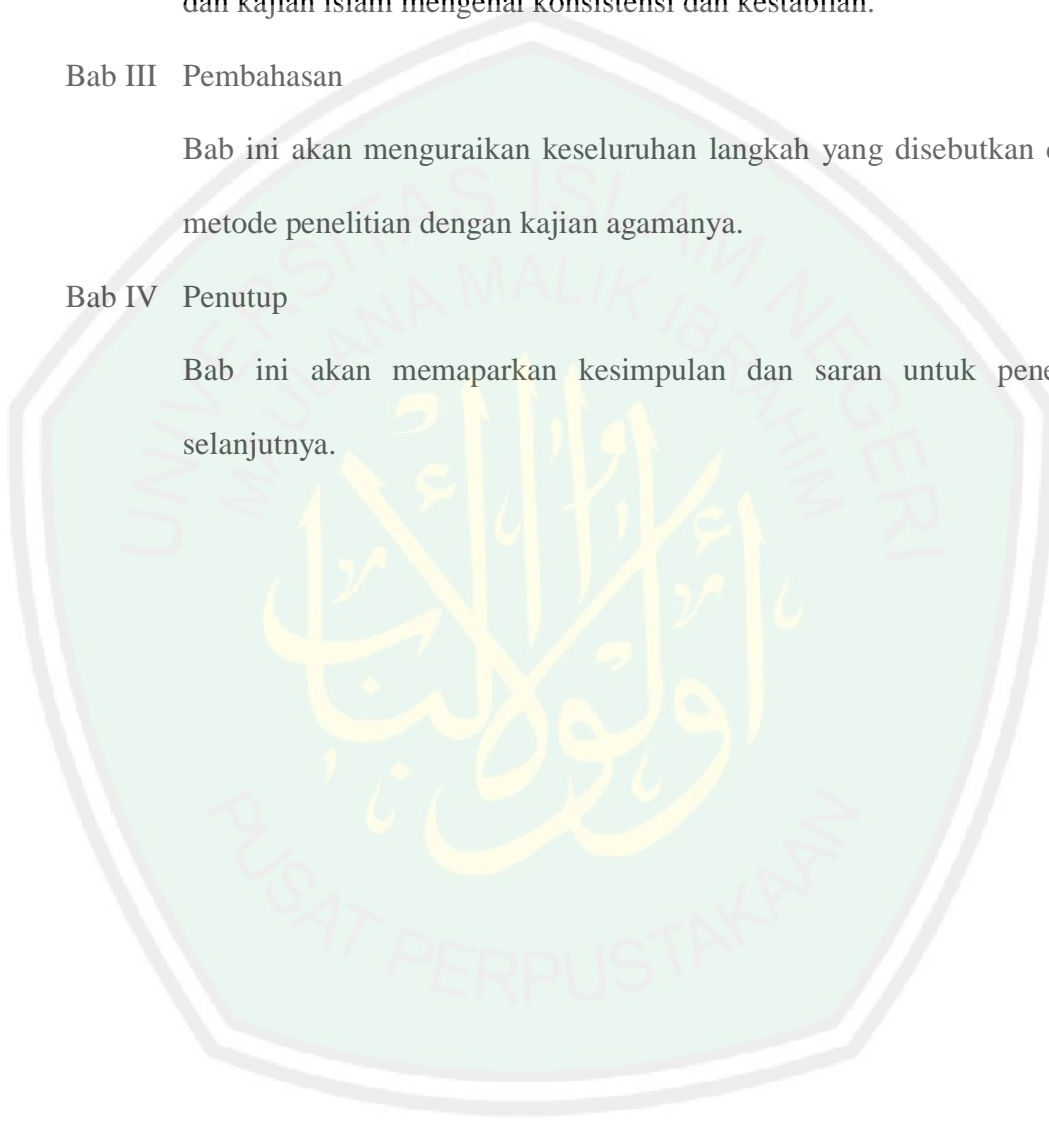
tersebut meliputi sistem dinamik diskret, metode euler, model logistik, model *predator-prey*, fungsi respon *ratio dependent*, model *predator-prey* dengan pemanenan pada *prey* dan *predator*, model *predator-prey* dengan fungsi respon *ratio dependent* dan pemanenan pada *predator*, dan kajian islam mengenai konsistensi dan kestabilan.

Bab III Pembahasan

Bab ini akan menguraikan keseluruhan langkah yang disebutkan dalam metode penelitian dengan kajian agamanya.

Bab IV Penutup

Bab ini akan memaparkan kesimpulan dan saran untuk penelitian selanjutnya.



BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Sistem Dinamik Diskret

Definisi 2.1 (Sistem Dinamik)

Sistem dinamik adalah suatu sistem yang dapat diketahui nilainya pada masa yang akan datang apabila diberikan suatu kondisi pada masa sekarang atau pada masa yang telah lalu (Nagle dan Saff, 1993).

Definisi 2.2 (Sistem Dinamik Diskret)

Bentuk umum suatu sistem dinamik diskret adalah

$$\vec{x}(n+1) = \vec{G}(\vec{x}(n)), \quad (2.1)$$

dengan $\vec{x}(n) = [x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)]^T$ dan $\vec{G} = [G_1, G_2, \dots, G_k]^T$ disebut fungsi pembangkit sistem (Elaydi, 2005).

Definisi 2.3 (Titik Kesetimbangan Sistem Dinamik Diskret)

Suatu titik \vec{x}^* yang memenuhi persamaan $\vec{G}(\vec{x}^*) = \vec{x}^*$ disebut dengan titik kesetimbangan dari sistem (2.1), dan titik kesetimbangan \vec{x}^* merupakan solusi bagi sistem (2.1) yang bernilai konstan (Elaydi, 2005).

2.1.1 Sistem Dinamik Diskret Linier

Suatu sistem dinamik diskret disebut linier jika dalam persamaan sistem tidak terdapat perkalian dari variabel tak bebasnya. Bentuk sistem dinamik diskret biasanya dikaitkan dengan bentuk umum sistem persamaan beda linier. Misal, diberikan sistem persamaan beda linier yang terdiri atas k persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
x_1(n+1) &= a_{11}x_1(n) + a_{12}x_2(n) + \cdots + a_{1k}x_k(n) \\
x_2(n+1) &= a_{21}x_1(n) + a_{22}x_2(n) + \cdots + a_{2k}x_k(n) \\
&\vdots \\
x_k(n+1) &= a_{k1}x_1(n) + a_{k2}x_2(n) + \cdots + a_{kk}x_k(n).
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Sistem persamaan (2.2) dapat ditulis kembali dalam bentuk matriks berikut:

$$\begin{aligned}
\vec{x}(n+1) &= \begin{pmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \\ \vdots \\ x_k(n+1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}x_1(n) + a_{12}x_2(n) + \cdots + a_{1k}x_k(n) \\ a_{21}x_1(n) + a_{22}x_2(n) + \cdots + a_{2k}x_k(n) \\ \vdots \\ a_{k1}x_1(n) + a_{k2}x_2(n) + \cdots + a_{kk}x_k(n) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ \vdots \\ x_k(n) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ \vdots \\ x_k(n) \end{pmatrix} \\
&= \vec{A}(\vec{x}(n)).
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Dengan demikian diperoleh bahwa persamaan (2.3) sebagai persamaan sistem dinamik diskret dengan $\vec{x}(n) = [x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)]^T$ dan fungsi pembangkit

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}.$$

Berdasarkan persamaan (2.1) maka nilai eigen yang memenuhi persamaan karakteristik (2.1) dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan berikut:

$$|\vec{A} - \lambda I| = 0. \tag{2.4}$$

Selanjutnya, misal $\vec{x}^*(n)$ sebagai titik kesetimbangan untuk persamaan (2.1) maka berdasarkan definisi (2.2) berlaku berikut:

$$\vec{A}(\vec{x}^*(n)) = \vec{x}^*(n)$$

$$\vec{A}(\vec{x}^*(n)) - \vec{x}^*(n) = 0$$

$$(\vec{A} - I)\vec{x}^*(n) = 0.$$

Diasumsikan $(\vec{A} - I)$ tidak singular, maka diperoleh $\vec{x}^*(n) = 0$ sebagai titik kesetimbangan sistem. Jika λ sebagai nilai-nilai eigen (karakteristik) dari persamaan (2.3), maka diperoleh bentuk solusi umum berikut:

$$\vec{x}(n) = c_1 \lambda_1^n \vec{v}_1 + c_2 \lambda_2^n \vec{v}_2 + \dots + c_k \lambda_k^n \vec{v}_k, \quad (2.5)$$

dengan c_i adalah konstanta dan \vec{v}_i adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ_i , $i = 1, 2, \dots, k$ (Elaydi, 2005).

2.1.2 Kestabilan Sistem Dinamik Diskret Linier

Misalkan A adalah matriks berukuran 2×2 yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Nilai-nilai eigen yang bersesuaian dengan matriks A dapat ditentukan dari persamaan karakteristik $\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0$, dengan determinan Δ dan *trace* τ , yaitu:

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \text{ dan } \tau = a_{11} + a_{22}.$$

Kasus 1: $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$, dengan $\lambda_1 \neq \lambda_2$

- a. Jika $|\lambda_1| < 1$ dan $|\lambda_2| < 1$ maka titik kesetimbangan sistem (2.1) bersifat stabil (*sink*).

- b. Jika $|\lambda_1| > 1$ dan $|\lambda_2| > 1$ maka titik kesetimbangan sistem (2.1) bersifat tak stabil (*source*).
- c. Jika $|\lambda_1| < 1$ dan $|\lambda_2| > 1$ (atau $|\lambda_1| > 1$ dan $|\lambda_2| < 1$) maka titik kesetimbangan sistem (2.1) bersifat tak stabil pelana (*saddle*).
- d. Jika $|\lambda_{1,2}| = 1$ maka titik kesetimbangan sistem (2.1) bersifat tak stabil.

Kasus 2: $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$, dengan $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

- a. Jika $|\lambda| < 1$ maka titik kesetimbangan sistem (2.1) bersifat stabil (*sink*).
- b. Jika $|\lambda| > 1$ maka titik kesetimbangan sistem (2.1) bersifat tak stabil (*source*).

Kasus 3: $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$, maka $\lambda_1 = a + ib$ atau $\lambda_2 = a - ib$ dan $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

- a. Jika $|r| < 1$ maka titik kesetimbangan sistem (2.1) bersifat stabil (*sink*).
- b. Jika $|r| > 1$ maka titik kesetimbangan sistem (2.1) bersifat tak stabil (*source*).
- c. Jika $|r| = 1$ maka titik kesetimbangan sistem (2.1) bersifat *center* (Elaydi, 2005).

Teorema 2.4 (Brauer dan Chavaz, 2012)

Misalkan $F(\lambda) = \lambda^2 - p\lambda + q$ adalah persamaan karakteristik, maka persamaan tersebut akan memiliki akar-akar $\lambda_1 < 1$ dan $\lambda_2 < 1$ jika dan hanya jika kondisi berikut terpenuhi, yaitu:

1. $F(-1) = 1 + p + q > 0$
2. $F(1) = 1 - p + q > 0$
3. $F(0) = q < 1$

Akibat 2.5 (Zhuang dan Wen, 2011)

1. Titik kesetimbangan sistem (2.1) untuk $k = 2$ bersifat stabil asimtotik (*sink*) jika $F(1) > 0$, $F(-1) > 0$, dan $q < 1$,

2. Titik kesetimbangan sistem (2.1) untuk $k = 2$ bersifat tak stabil pelana (*saddle*) jika $F(1) > 0, F(-1) < 0$,
3. Titik kesetimbangan sistem (2.1) untuk $k = 2$ bersifat tak stabil (*source*) jika $F(1) > 0, F(-1) > 0$, dan $q > 1$.

2.1.3 Sistem Dinamik Diskret Tak Linier

Perhatikan sistem dinamik diskret (2.1), jika sistem dinamik diskret memuat perkalian antara variabel tak bebasnya, maka sistem (2.1) disebut sistem dinamik diskret tak linier. Jenis kestabilan titik kesetimbangan sistem dinamik diskret tak linier dapat diketahui melalui proses linierisasi. Proses linierisasi sistem dinamik diskret tak linier dilakukan dengan kaidah ekspansi Taylor pada sistem $\vec{x}(n+1) = \vec{A}(\vec{x}(n))$ di sekitar titik x^* yaitu:

$$\begin{aligned}
 A_1(\vec{x}(n)) &= A_1(\vec{x}^*) + \frac{\partial A_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1}(x_1(n) - x_1^*) + \dots + \frac{\partial A_1(\vec{x}^*)}{\partial x_k}(x_k(n) - x_k^*) \\
 &\quad + \eta_1(\vec{x}(n)) \\
 A_2(\vec{x}(n)) &= A_2(\vec{x}^*) + \frac{\partial A_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1}(x_1(n) - x_1^*) + \dots + \frac{\partial A_2(\vec{x}^*)}{\partial x_k}(x_k(n) - x_k^*) \\
 &\quad + \eta_2(\vec{x}(n)) \\
 &\quad \vdots \\
 A_k(\vec{x}(n)) &= A_k(\vec{x}^*) + \frac{\partial A_k(\vec{x}^*)}{\partial x_1}(x_1(n) - x_1^*) + \dots + \frac{\partial A_k(\vec{x}^*)}{\partial x_k}(x_k(n) - x_k^*) \\
 &\quad + \eta_k(\vec{x}(n))
 \end{aligned}$$

dengan $\eta_1(\vec{x}(n)), \eta_2(\vec{x}(n)), \dots, \eta_k(\vec{x}(n))$ adalah suku sisa yang memenuhi

$$\lim_{\vec{x}(n) \rightarrow \vec{x}^*} \frac{\eta_j(\vec{x}(n))}{\|\vec{x}(n) - \vec{x}^*\|} = 0,$$

untuk setiap $j = 1, 2, \dots, k$. Oleh karena itu $\eta_j(\vec{x}(n))$ dapat diabaikan.

Dengan mengingat bahwa \vec{x}^* adalah titik kesetimbangan, yaitu $\vec{A}(\vec{x}^*) = \vec{x}^*$, maka sistem (2.1) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x_1(n+1) &= x_1^* + \frac{\partial A_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1}(x_1(n) - x_1^*) + \dots + \frac{\partial A_1(\vec{x}^*)}{\partial x_k}(x_k(n) - x_k^*) \\ x_2(n+1) &= x_2^* + \frac{\partial A_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1}(x_1(n) - x_1^*) + \dots + \frac{\partial A_2(\vec{x}^*)}{\partial x_k}(x_k(n) - x_k^*) \\ &\vdots \\ x_k(n+1) &= x_k^* + \frac{\partial A_k(\vec{x}^*)}{\partial x_1}(x_1(n) - x_1^*) + \dots + \frac{\partial A_k(\vec{x}^*)}{\partial x_k}(x_k(n) - x_k^*) \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned} x_1(n+1) - x_1^* &= \frac{\partial A_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1}(x_1(n) - x_1^*) + \dots + \frac{\partial A_1(\vec{x}^*)}{\partial x_k}(x_k(n) - x_k^*) \\ x_2(n+1) - x_2^* &= \frac{\partial A_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1}(x_1(n) - x_1^*) + \dots + \frac{\partial A_2(\vec{x}^*)}{\partial x_k}(x_k(n) - x_k^*) \\ &\vdots \\ x_k(n+1) - x_k^* &= \frac{\partial A_k(\vec{x}^*)}{\partial x_1}(x_1(n) - x_1^*) + \dots + \frac{\partial A_k(\vec{x}^*)}{\partial x_k}(x_k(n) - x_k^*). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Dengan memisalkan $u_j(n+1) = x_j(n+1) - x_j^*$ untuk setiap $j = 1, 2, \dots, k$, maka sistem (2.6) menjadi:

$$\begin{aligned} u_1(n+1) &= \frac{\partial A_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1}u_1(n) + \frac{\partial A_1(\vec{x}^*)}{\partial x_2}u_2(n) + \dots + \frac{\partial A_1(\vec{x}^*)}{\partial x_k}u_k(n) \\ u_2(n+1) &= \frac{\partial A_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1}u_1(n) + \frac{\partial A_2(\vec{x}^*)}{\partial x_2}u_2(n) + \dots + \frac{\partial A_2(\vec{x}^*)}{\partial x_k}u_k(n) \\ &\vdots \\ u_k(n+1) &= \frac{\partial A_k(\vec{x}^*)}{\partial x_1}u_1(n) + \frac{\partial A_k(\vec{x}^*)}{\partial x_2}u_2(n) + \dots + \frac{\partial A_k(\vec{x}^*)}{\partial x_k}u_k(n), \end{aligned}$$

atau dalam bentuk matriks yaitu:

$$\vec{u}(n+1) = A\vec{u}(n), \quad (2.7)$$

dengan

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial G_1(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial G_1(\vec{x}^*)}{\partial x_k} \\ \frac{\partial G_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial G_2(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial G_2(\vec{x}^*)}{\partial x_k} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial G_k(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial G_k(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial G_k(\vec{x}^*)}{\partial x_k} \end{bmatrix}$$

dan $u_j(n+1) = x_j(n+1) - x_j^*$ untuk setiap $j = 1, 2, \dots, k$. Matriks A adalah matriks Jacobi di titik \vec{x}^* (Elaydi, 2005).

2.1.4 Kestabilan Lokal Sistem Dinamik Diskret Tak Linier

Titik kesetimbangan dari suatu sistem dinamik diskret tak linier akan bersifat sebagai berikut:

1. **Stabil asimtotik** jika titik kesetimbangan sistem dari hasil linierisasi stabil asimtotik dengan ketentuan jika $F(1) > 0$, $F(-1) > 0$, dan $q < 1$.
2. **Tidak stabil** jika titik kesetimbangan sistem dari hasil linierisasi tidak stabil dengan ketentuan jika $F(1) > 0$, $F(-1) > 0$, dan $q < 1$ (Elaydi, 2005).

2.2 Metode Euler

Jika diberikan persamaan diferensial orde 1 berikut:

$$x'(t) = g(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad t_0 \leq t \leq t_N, \quad (2.8)$$

maka interval $t_0 \leq t \leq t_N$ dapat dibagi menjadi N subinterval yang sama panjang.

Panjang setiap interval disebut dengan ukuran langkah yang disimbolkan dengan

h yaitu:

$$h = \frac{(t_N - t_0)}{N}.$$

Ukuran langkah berupa $t_0, t_1, t_2, \dots, t_N$, dengan $t_N = t_0 + nh$.

Pada metode Euler nilai $x'(t)$ dihipotesis dengan persamaan beda maju berikut: $\frac{x(t+h)-x(t)}{h}$. Selanjutnya, dengan mensubstitusikan hampiran dengan beda maju ke persamaan (2.8), maka diperoleh

$$x(t+h) = x(t) + h g(t, x(t)).$$

Pada saat $t = t_0 + nh$, diperoleh hasil hampiran berikut:

$$x(t_0 + (n+1)h) = x(t_0 + nh) + h g(t_0 + nh, x(t_0 + nh)), \quad (2.9)$$

dengan $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Kemudian, jika $x(t_0 + nh) = x(n)$ maka persamaan (2.9) dapat disederhanakan menjadi

$$x(n+1) = x(n) + h g(n, x(n))$$

(Elaydi, 2005).

2.3 Model Logistik

Model logistik merupakan contoh model yang menyatakan tentang laju pertumbuhan suatu populasi. Misal $N(t)$ menyatakan suatu jumlah populasi pada waktu t pada habitat tertentu, dengan besar daya dukung lingkungan maksimal K . Misal dalam suatu populasi terdapat N individu, maka lingkungan masih dapat mendukung populasi sebesar $(K - N)$ individu. Dengan demikian sisa lingkungan yang bisa ditempati oleh populasi yaitu sebesar

$$\frac{(K - N)}{K}. \quad (2.10)$$

Selanjutnya, pertumbuhan populasi pada persamaan (2.10) sebesar r , dalam hal ini akan sebanding dengan pertumbuhan per kapita populasi. Oleh karena itu, persamaan logistik dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = r \frac{(K - N)}{K}$$

atau

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right),$$

dengan konstanta r menyatakan tingkat pertumbuhan suatu populasi dan konstanta K menyatakan kapasitas maksimal daya dukung lingkungan pada suatu habitat tertentu (Boyce dan DiPrima, 2005).

2.4 Model *Predator-Prey*

Model *predator prey* pertama kali diperkenalkan oleh Volterra (1927), dengan bentuk model berupa persamaan diferensial biasa yaitu:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= N(a - bP), \\ \frac{dP}{dt} &= P(-c + dN), \end{aligned}$$

dengan N dan P berturut-turut menyatakan kepadatan populasi *prey* (N) dan *predator* (P). Sedangkan parameter a, b, c , dan d berturut-turut menyatakan laju pertumbuhan populasi *prey*, laju pemangsaan *prey* oleh *predator*, laju kematian *predator*, dan laju pertumbuhan *predator*. Sistem persamaan diferensial di atas sebelumnya telah dikaji oleh Lotka (1925) secara independen dan selanjutnya dikenal dengan model Lotka-Volterra.

Selanjutnya, Freedman (1980) merekonstruksi model *predator-prey* dengan bentuk model berupa sistem persamaan diferensial berikut:

$$\frac{dN}{dt} = Ng(N) - Pf(N)$$

$$\frac{dP}{dt} = P(-c + h(N)),$$

dengan N dan P menyatakan kepadatan populasi *prey* dan populasi *predator*. Sedangkan $g(N)$ menyatakan laju pertumbuhan *prey* tanpa adanya *predator*, $f(N)$ adalah fungsi respon *predator* terhadap *prey*, dan $h(N)$ merupakan perkalian suatu konstanta dengan $f(N)$ (Edwin, 2010).

2.5 Fungsi Respon Ratio Dependent

Fungsi respon diperkenalkan oleh Holling (1959), dengan fungsi respon merepresentasikan suatu laju pemangsaan *prey* oleh *predator* per kapita dan berupa fungsi dari banyaknya populasi *prey*. Dengan demikian, laju pemangsaan dari *predator* bergantung pada kepadatan populasi *prey*. Fungsi respon *prey-dependent* yang sering digunakan dalam analisis dinamik yaitu bentuk linier sebagai berikut:

$$f(N) = aN \quad (2.11)$$

yang disebut dengan fungsi Holling tipe I dan bentuk tak linier yaitu:

$$f(N) = \frac{cN}{m + N} \quad (2.12)$$

yang disebut fungsi respon Holling tipe II. Konstanta a , c , dan m menyatakan laju pemangsaan *prey* oleh *predator*, laju pertumbuhan maksimum *predator*, dan konstanta Michaelis-Menten. Fungsi pada persamaan (2.12) dapat ditulis kembali dengan bentuk sebagai berikut:

$$f(N) = \frac{aN}{1 + bN} \quad (2.13)$$

dengan konstanta $c = a/b$ dan $m = 1/b$.

Model *predator-prey* dengan fungsi respon *prey-dependent* yang telah dijelaskan di atas mendapat kritik dari ahli bioologi seperti Arditi dan Ginzburg (1989). Arditi dan Ginzburg (1989) menyatakan bahwa fungsi respon pemangsaan seharusnya tidak bergantung pada kepadatan *prey* saja, akan tetapi harus bergantung pada kepadatan *predator* juga. Terutama ketika populasi *predator* harus mencari *prey*, maka akan ada persaingan antar *predator* untuk mendapatkan *prey*. Adapun fungsi respon yang bergantung langsung pada kepadatan *prey* maupun *predator* adalah fungsi respon *ratio dependent*. Fungsi respon *ratio dependent* diperoleh dengan mensubstitusikan perbandingan *prey* dan *predator* (N/P) untuk menggantikan kepadatan dari populasi *prey* (N). Sehingga dari fungsi respon pada persamaan (2.13) didapatkan fungsi respon baru dengan bentuk sebagai berikut:

$$f(N/P) = \frac{aN/P}{1 + bN/P} = \frac{aN}{P + bN} \quad (2.14)$$

Dengan demikian diperoleh bentuk model *predator-prey* dengan fungsi respon *ratio dependent* sebagai berikut:

$$\frac{dN}{dt} = rN - \frac{aNP}{P + bN} \quad (2.15)$$

$$\frac{dP}{dt} = P \left(-c + \frac{c_1 N}{P + bN} \right).$$

Konstanta a , c , dan m menyatakan laju pemangsaan *prey* oleh *predator*, laju pertumbuhan maksimum *predator*, dan konstanta Michaelis-Menten. Sedangkan konstanta r , K , dan c_1 merupakan konstanta yang masing-masing menyatakan laju

pertumbuhan *prey*, daya dukung lingkungan untuk populasi *prey*, dan laju konversi biomassa *prey* menjadi laju reproduksi *predator* (Xiao dan Ruan, 2001).

2.6 Model *Predator-Prey* dengan Pemanenan pada *Prey* dan *Predator*

Pemodelan masalah *predator-prey* dapat dikaitkan dengan masalah ekonomi, misalnya mengenai eksploitasi sumber daya alam baik bidang kelautan maupun bidang perhutanan. Permasalahan eksploitasi sumber daya alam telah dibahas oleh Clark mengkaji masalah dua populasi yang tumbuh secara logistik dengan sistem kendali berupa pemanenan fungsi respon Holling tipe I (Clark,1976).

Selanjutnya, Kar dan Chauduri (2001) mengkaji ulang masalah *predator prey* sebelumnya dengan mempertimbangkan adanya daya dukung lingkungan, dimana laju pemangsa berbentuk fungsi respon Holling tipe II. Dengan demikian didapatkan sistem persamaan diferensial orde satu sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= r_1 N \left(1 - \frac{N}{K_1}\right) - \frac{aNP}{1 + bN} - q_1 EN \\ \frac{dP}{dt} &= r_2 P \left(1 - \frac{P}{K_2}\right) + \frac{c_1 NP}{1 + bN} - q_2 EP,\end{aligned}\tag{2.16}$$

dengan N , P , a , dan c_1 menyatakan jumlah populasi *prey*, populasi *predator*, laju pemangsa *prey* oleh *predator*, laju konversi biomassa *prey* menjadi laju reproduksi *predator*. Sedangkan r_1 , r_2 , K_1 , dan K_2 berturut-turut menyatakan laju pertumbuhan intrinsik *prey*, laju pertumbuhan intrinsik *predator*, daya dukung lingkungan populasi *prey*, dan daya dukung lingkungan populasi *predator*. Sementara q_1 , q_2 , dan E masing-masing mewakili koefisien kemampuan tertangkapnya *prey*, koefisien kemampuan tertangkapnya *predator*, dan usaha

pemanenan. Fungsi laju penangkapan q_1EN dan q_2EP didasarkan pada hipotesis CPUE (*Catch Per Unit Effort*) yaitu bahwa hasil tangkapan per unit usaha proporsional dengan banyaknya target yang tersedia (Kar dan Chauduri, 2001).

2.7 Model *Predator-Prey* dengan Fungsi Respon *Ratio Dependent* dan Pemanenan pada *Predator*

Persamaan (2.16) merupakan model *predator-prey* dengan pemanenan pada *prey* dan *predator* menggunakan fungsi respon Holling tipe II, dimana respon fungsi Holling II merupakan fungsi respon *prey-dependent*. Sedangkan menurut Arditi dan Ginzburg (1989), bahwa fungsi respon pemangsaan seharusnya bergantung pada kepadatan *prey* dan *predator* tidak hanya bergantung dengan *prey* saja. Oleh karena itu, Rayungsari, dkk. (2014) memodifikasi model pada persamaan (2.16) dengan mengganti respon fungsi Holling II menjadi respon fungsi *ratio dependent*. Selanjutnya pemanenan hanya dilakukan pada populasi *predator* saja, dengan tujuan untuk mengendalikan jumlah populasi *predator* agar tidak tumbuh liar sehingga menyebabkan kepunahan pada populasi *prey*. Misal laju pemanenan pada *predator* diasumsikan linier yaitu c_2P , maka sistem persamaan (2.16) menjadi sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= r_1N \left(1 - \frac{N}{K_1}\right) - \frac{aNP}{P + bN} \\ \frac{dP}{dt} &= r_2P \left(1 - \frac{P}{K_2}\right) + \frac{c_1NP}{P + bN} - c_2P,\end{aligned}\tag{2.17}$$

dengan c_2 merupakan laju pemanenan pada *predator* (Rayungsari, dkk. 2014).

Menurut Rayungsari, dkk. (2014) sistem persamaan (2.17) mempunyai tiga titik kesetimbangan sistem, yaitu: $E_1 \left(0, K_2 \left(1 - \frac{c_2}{r_2}\right)\right)$ merupakan titik kepunahan

prey, titik $E_2(K_1, 0)$ merupakan titik kepunahan *predator*, dan

$E_3(N^*, P^*)$ dengan $N^* = \frac{-B \pm \sqrt{D}}{2A}$ dan $P^* = \frac{r_1 b N^* (1 - \frac{N^*}{K_1})}{a - r_1 (1 - \frac{N^*}{K_1})}$, merupakan titik interior,

dengan

$$A = \frac{r_1}{K_1} \left(\frac{r_2 b}{K_2} + \frac{c_1 r_1}{ab K_1} \right),$$

$$B = \frac{r_1}{K_1} \left((r_2 - c_2) + \frac{2c_1}{ab} (a - r_1) \right) - \frac{r_1 r_2 b}{K_2},$$

dan

$$D = \left(\frac{r_1}{K_1} (r_2 - c_2) - \frac{r_1 r_2 b}{K_2} \right)^2 - \frac{4r_1 r_2 b}{K_1 K_2} (a - r_1) \left((r_2 - c_2) + \frac{c_1}{b} \right).$$

Selanjutnya, sifat kestabilan dari titik kesetimbangan sistem persamaan (2.18), yaitu titik kesetimbangan E_1 bersifat stabil jika nilai $r_1 < a$ dan bersifat tak stabil jika $r_1 > a$. Titik kesetimbangan E_2 bersifat tak stabil, dan untuk titik kesetimbangan interior bersifat stabil dengan syarat tertentu, yaitu nilai determinan dari matriks Jacobi lebih besar dari nol dan *trace* dari matriks Jacobi kurang dari nol (Rayungsari, dkk. 2014).

2.8 Kajian Islam Mengenai Konsistensi dan Kestabilan

Matematika merupakan salah satu cabang ilmu sains yang membahas kekonsistenan dan kestabilan. Akan tetapi lama sebelum ilmu matematika ditemukan, kekonsistenan (*keistiqamahan*), dan kestabilan sudah terlebih dahulu dibahas dalam islam. Sebagaimana firman Allah Swt. dalam al-Quran surat Fushilat ayat 30, yaitu:

إِنَّ الَّذِينَ قَالُوا رَبُّنَا اللَّهُ ثُمَّ اسْتَقَمُوا تَتَنَزَّلُ عَلَيْهِمُ الْمَلَائِكَةُ أَلَّا تَخَافُوا وَلَا تَحْزَنُوا وَأَبْشِرُوا بِالْجَنَّةِ الَّتِي كُنْتُمْ تُوعَدُونَ ﴿٤١﴾

“*Sesungguhnya orang-orang yang mengatakan: "Tuhan kami ialah Allah" kemudian mereka meneguhkan pendirian mereka, maka malaikat akan turun kepada mereka dengan mengatakan: "Janganlah kamu takut dan janganlah merasa sedih; dan gembirakanlah mereka dengan jannah yang telah dijanjikan Allah kepadamu" (QS. Fushilat/41:30).*

Merujuk pada al-Quran surat Fushilat ayat 30 tersebut, bahwasanya orang-orang yang konsisten (*istiqamah*) dengan perkataan tentang Tuhan-Nya yaitu Allah Swt., maka balasannya bagi orang tersebut adalah surga. Ini menunjukkan begitu pentingnya kekonsistenan dalam melakukan sebuah perbuatan. Perbuatan terbagi menjadi dua bagian yaitu perbuatan baik dan buruk. Selanjutnya, apabila seseorang melakukan perbuatan yang baik dengan dilakukan secara konsisten (*istiqamah*) maka balasan yang diberikan atau yang didapatkan dari Allah Swt. yang baik pula, tetapi jika perbuatan yang dilakukan tidak baik maka balasan yang didapatkan dari perbuatan tersebut juga tidak baik. Sebagai mana di jelaskan Allah Swt. dalam al-Quran surat al-Isra' ayat 7, yaitu:

إِنْ أَحْسَنْتُمْ أَحْسَنْتُمْ لِأَنْفُسِكُمْ وَإِنْ أَسَأْتُمْ فَلَهَا فَإِذَا جَاءَ وَعْدُ الْآخِرَةِ لِيَسْتَوْأُوا وُجُوهَكُمْ وَلِيَدْخُلُوا الْمَسْجِدَ كَمَا دَخَلُوهُ أَوَّلَ مَرَّةٍ وَلِيُتَبَرَّأُوا مَا عَلُوا تَتَبَرَّأُوا ﴿٧﴾

“*Jika kamu berbuat baik (berarti) kamu berbuat baik bagi dirimu sendiri dan jika kamu berbuat jahat, maka (kejahatan) itu bagi dirimu sendiri, dan apabila datang saat hukuman bagi (kejahatan) yang kedua, (Kami datangkan orang-orang lain) untuk menyuramkan muka-muka kamu dan mereka masuk ke dalam mesjid, sebagaimana musuh-musuhmu memasukinya pada kali pertama dan untuk*

membinasakan sehabis-habisnya apa saja yang mereka kuasai” (QS. al-Isra’/17:7).

Begitu sangat pentingnya perbuatan yang konsisten (*istiqamah*) dalam kehidupan sehari-hari dikarenakan, konsisten merupakan implementasi dari *emotional controling* yang terdapat dalam diri seseorang sehingga sangat membantu untuk melakukan ketaatan dalam menjalankan perintah Allah Swt. serta menjauhi segala sesuatu yang dilarang-Nya, maka Allah Swt. dalam firman yang lain juga menjelaskan tentang anjuran yang sama yaitu untuk seseorang berbuat konsisten (*istiqamah*). Adapun penjelasan tentang hal tersebut yaitu, dalam al-Quran surat Fushilat ayat 6, yang berbunyi sebagai berikut:

قُلْ إِنَّمَا أَنَا بَشَرٌ مِّثْلُكُمْ يُوحَىٰ إِلَيَّ أَنَّمَا إِلَهُكُمُ إِلَهُهُ وَاحِدٌ فَاَسْتَقِيمُوا إِلَيْهِ
وَأَسْتَغْفِرُوهُ ۖ وَوَيْلٌ لِّلْمُشْرِكِينَ ﴿٦﴾

“Katakanlah: "Bahwasanya aku hanyalah seorang manusia seperti kamu, diwahyukan kepadaku bahwasanya Tuhan kamu adalah Tuhan yang Maha Esa, maka tetaplah pada jalan yang lurus menuju kepada-Nya dan mohonlah ampun kepada-Nya. Dan kecelakaan besarlah bagi orang-orang yang mempersekutukan-Nya” (QS. Fushilat/41:6).

Ayat tersebut memberikan gambaran, bahwa setiap insan pasti pernah melakukan satu kelalaian atau kesalahan, tanpa terkecuali siapapun dia. Oleh karenanya, seorang muslim yang baik dan taat adalah yang senantiasa introspeksi diri terhadap segala kekurangan dan kesalahan-kesalahannya yang pernah diperbuatnya, untuk kemudian berusaha memperbaikinya dengan terlebih dahulu beristighfar dan bertaubat memohon ampunan kepada Allah Swt., selanjutnya senantiasa berpegang teguh terhadap ajaran Allah Swt.

Akan tetapi, apabila seseorang tidak mampu untuk melakukan ketaatan tersebut, maka sudah jelaslah akan muncul kerusakan-kerusakan di muka bumi ini yang diakibatkan oleh seseorang yang tidak bertanggung jawab dengan perbuatannya, seperti untuk memenuhi kebutuhan hidup. Zaman sekarang ini telah banyak sekali seseorang yang tidak lagi memperhatikan dari mana penghasilan untuk kehidupan didapatkan, seperti halnya merusak alam untuk mengambil pepohonan yang ada di hutan sehingga menyebabkan komposisi yang ada di hutan berkurang. Dengan demikian akan terjadi kepunahan salah satu ekosistem yang ada pada lingkungan tersebut, maka keseimbangan tidak akan terwujud sehingga alam ini tidak stabil.

Apabila dalam sebuah sistem tidak terjadi kestabilan maka terjadilah ketidaksetimbangan pada sistem tersebut, sehingga jika dalam sistem tidak ada kesetimbangan maka terjadilah kerusakan atau kehancuran. Sebagaimana firman Allah dalam al-Quran surat ar-Rum ayat 41, yaitu:

ظَهَرَ الْفَسَادُ فِي الْبَرِّ وَالْبَحْرِ بِمَا كَسَبَتْ أَيْدِي النَّاسِ لِيُذِيقَهُمْ بَعْضَ
الَّذِي عَمِلُوا لَعَلَّهُمْ يَرْجِعُونَ ﴿٤١﴾

“Telah nampak kerusakan di darat dan di laut disebabkan karena perbuatan tangan manusia, supaya Allah merasakan kepada mereka sebagian dari (akibat) perbuatan mereka, agar mereka kembali (ke jalan yang benar)” (QS. Ar-Rum/30:41).

Ayat tersebut menunjukkan kerusakan yang terjadi di muka bumi ini, yang mana kerusakan tersebut dilakukan oleh manusia. Sedangkan manusia yang demikian itu banyak melakukan perbuatan melanggar hukum Allah. Sehingga jelas apabila melanggar hukum Allah, maka manusia sulit untuk berpikir mana

yang baik dan mana yang buruk. Sehingga terjadilah kerusakan yang menyebabkan kesetimbangan sistem tidak akan ada, akibatnya kestabilan tidak terwujud.

Berdasarkan ayat-ayat tersebut, Allah Swt. telah memerintahkan manusia untuk konsisten (*istiqamah*) dalam melakukan ketaatan kepada-Nya dengan melalui petunjuk yang telah dibawa dan diajarkan oleh Rasulullah Saw. yaitu agama Islam. Berdasarkan firman Allah Swt. dalam al-Quran surat Ali Imran ayat 19, “*Sesungguhnya agama yang diridhoi di sisi Allah hanyalah Islam.*” Dengan demikian, maka Islam merupakan agama yang benar di sisi Allah Swt. yang mengajarkan hamba untuk taat kepada Tuhan-Nya. Sehingga dengan ketaatan ini akan muncul ketenangan dalam diri seseorang, yang apabila ketenangan dalam diri hamba sudah terwujud maka akan timbul perilaku-perilaku yang tidak menyimpang atau melanggar dengan hukum syariat Islam. Sehingga terwujudlah kesetimbangan dan kestabilan dalam kehidupan sehari-hari.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Analisis Dinamik Model *Predator-Prey* dengan Fungsi Respon *Ratio Dependent* dan Pemanenan pada *Predator*

Pada subbab ini akan dibahas langkah-langkah untuk menganalisis model dinamik *predator-prey* dengan fungsi respon *ratio dependent* dan pemanenan pada *predator*. Langkah yang dilakukan adalah (1) diskretisasi model dengan metode *Forward Euler*, (2) linierisasi model tak linier dengan ekspansi deret Taylor, (3) menentukan titik kesetimbangan dan eksistensi dari titik kesetimbangan tersebut pada sistem diskret, (4) menganalisis kestabilan titik kesetimbangan sistem diskret dengan matriks Jacobi untuk menentukan nilai eigen, (5) simulasi sistem dinamik diskret dan menginterpretasikan hasil dari simulasi sistem dinamik tersebut, dan (6) menyimpulkan hasil analisis berdasarkan langkah-langkah yang dilakukan.

3.2 Diskretisasi Model

Berdasarkan model dinamik persamaan *predator-prey* dengan fungsi respon *ratio dependent* dan pemanenan pada *predator* sebelumnya pada bab II, jika variabel waktu t dibatasi pada selang $[0, T]$, maka proses diskretisasi model dapat dilakukan dengan membagi selang $[0, T]$ menjadi N subselang yang sama dengan lebar $h = t_n - t_{n-1}$. Dengan demikian diperoleh sebanyak $N + 1$ titik diskret dengan $t_n = nh$, dengan $n = 0, 1, 2, \dots, N$.

Dengan metode *Forward Euler* proses diskretisasi dilakukan dengan pendekatan untuk nilai $\frac{dN}{dt} = \frac{N_{n+1} - N_n}{h}$ pada persamaan *prey*, kemudian untuk nilai

$\frac{dP}{dt} = \frac{P_{n+1}-P_n}{h}$ pada persamaan *predator*. Oleh karena itu, proses diskretisasi pada

persamaan *prey* dapat dipaparkan sebagai berikut:

$$\frac{dN}{dt} = r_1 N \left(1 - \frac{N}{K_1}\right) - \frac{aN P}{P + bN}$$

$$\frac{N_{n+1} - N_n}{h} = r_1 N_n \left(1 - \frac{N_n}{K_1}\right) - \frac{aN_n P_n}{P_n + bN_n}$$

$$N_{n+1} - N_n = hr_1 N_n \left(1 - \frac{N_n}{K_1}\right) - \frac{h a N_n P_n}{P_n + b N_n}$$

$$N_{n+1} = N_n + hr_1 N_n \left(1 - \frac{N_n}{K_1}\right) - \frac{h a N_n P_n}{P_n + b N_n}.$$

Sedangkan untuk persamaan *predator* dapat dipaparkan sebagai berikut:

$$\frac{dP}{dt} = r_2 P \left(1 - \frac{P}{K_2}\right) + \frac{c_1 N P}{P + b N} - c_2 P$$

$$\frac{P_{n+1} - P_n}{h} = r_2 P_n \left(1 - \frac{P_n}{K_2}\right) + \frac{c_1 N_n P_n}{P_n + b N_n} - c_2 P_n$$

$$P_{n+1} - P_n = hr_2 P_n \left(1 - \frac{P_n}{K_2}\right) + \frac{h c_1 N_n P_n}{P_n + b N_n} - h c_2 P_n$$

$$P_{n+1} = P_n + hr_2 P_n \left(1 - \frac{P_n}{K_2}\right) + \frac{h c_1 N_n P_n}{P_n + b N_n} - h c_2 P_n.$$

Dengan demikian diperoleh model sistem dinamik diskret *predator-prey* dengan fungsi respon *ratio dependent* dan pemanenan pada *predator* sebagai berikut:

$$N_{n+1} = N_n + hr_1 N_n \left(1 - \frac{N_n}{K_1}\right) - \frac{h a N_n P_n}{P_n + b N_n} = f(N_n, P_n)$$

$$P_{n+1} = P_n + hr_2 P_n \left(1 - \frac{P_n}{K_2}\right) + \frac{h c_1 N_n P_n}{P_n + b N_n} - h c_2 P_n = g(N_n, P_n)$$

(3.1)

3.3 Titik Keseimbangan Model

Suatu titik keseimbangan dinamik diskret sistem persamaan (3.1) merupakan titik (N_n^*, P_n^*) yang memenuhi persamaan $f(N_n^*, P_n^*) = N_n^*$ dan $g(N_n^*, P_n^*) = P_n^*$ (Elaydi, 2005), adapun proses penentuan titik keseimbangan dapat dijabarkan sebagai berikut.

Adapun proses untuk menentukan titik keseimbangan pada persamaan *prey* dapat diperoleh dari persamaan berikut:

$$f(N_n^*, P_n^*) = N_n^*. \quad (3.2)$$

Berdasarkan persamaan (3.2) dapat dijabarkan secara aljabar biasa sebagai berikut:

$$N_n^* + hr_1 N_n^* \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1}\right) - \frac{h a N_n^* P_n^*}{P_n^* + b N_n^*} = N_n^* \quad (3.3)$$

Selanjutnya, dianalisis titik keseimbangan untuk persamaan (3.3) merujuk pada Elaydi (2005), yaitu:

$$\begin{aligned} hr_1 N_n^* \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1}\right) - \frac{h a N_n^* P_n^*}{P_n^* + b N_n^*} &= N_n^* - N_n^* \\ hr_1 N_n^* \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1}\right) - \frac{h a N_n^* P_n^*}{P_n^* + b N_n^*} &= 0 \\ h N_n^* \left(r_1 \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1}\right) - \frac{a P_n^*}{P_n^* + b N_n^*}\right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

dari persamaan (3.4) dapat diperoleh bahwa:

$$h N_n^* = 0 \text{ atau } r_1 \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1}\right) - \frac{a P_n^*}{P_n^* + b N_n^*} = 0, \quad (3.5)$$

dikarenakan pada persamaan (3.5) tersebut h selalu bernilai positif, sehingga dapat dianalisis dan berlaku persamaan berikut:

$$N_n^* = 0 \quad (3.6)$$

atau

$$r_1 \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1}\right) - \frac{aP_n^*}{P_n^* + bN_n^*} = 0. \quad (3.7)$$

Selanjutnya, proses untuk menentukan titik kesetimbangan pada persamaan *predator* dapat diperoleh dari persamaan berikut:

$$g(N_n^*, P_n^*) = P_n^*. \quad (3.8)$$

Berdasarkan, persamaan (3.8) dapat dijabarkan secara aljabar biasa sebagai berikut:

$$P_n^* + hr_2P_n^* \left(1 - \frac{P_n^*}{K_2}\right) + \frac{hc_1N_n^*P_n^*}{P_n^* + bN_n^*} - c_2hP_n^* = P_n^* \quad (3.9)$$

Selanjutnya, dianalisis titik kesetimbangan untuk persamaan (3.9) merujuk pada Elaydi (2005), yakni:

$$\begin{aligned} hr_2P_n^* \left(1 - \frac{P_n^*}{K_2}\right) + \frac{hc_1N_n^*P_n^*}{P_n^* + bN_n^*} - c_2hP_n^* &= P_n^* - P_n^* \\ hr_2P_n^* \left(1 - \frac{P_n^*}{K_2}\right) + \frac{hc_1N_n^*P_n^*}{P_n^* + bN_n^*} - c_2hP_n^* &= 0 \\ hP_n^* \left(r_2 \left(1 - \frac{P_n^*}{K_2}\right) + \frac{c_1N_n^*}{P_n^* + bN_n^*} - c_2\right) &= 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Dari persamaan (3.10) dapat disimpulkan:

$$hP_n^* = 0 \text{ atau } r_2 \left(1 - \frac{P_n^*}{K_2}\right) + \frac{c_1N_n^*}{P_n^* + bN_n^*} - c_2 = 0 \quad (3.11)$$

dikarenakan pada persamaan (3.11) tersebut h selalu bernilai positif, sehingga dapat dianalisis dan berlaku persamaan berikut:

$$P_n^* = 0 \quad (3.12)$$

atau

$$r_2 \left(1 - \frac{P_n^*}{K_2}\right) + \frac{c_1N_n^*}{P_n^* + bN_n^*} - c_2 = 0. \quad (3.13)$$

Berdasarkan persamaan (3.6), (3.7), (3.12), dan (3.13), diperoleh kombinasi titik kesetimbangan sebagai berikut:

$$\left(N_n^* = 0 \vee r_1 \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1} \right) - \frac{aP_n^*}{P_n^* + bN_n^*} = 0 \right) \\ \wedge \left(P_n^* = 0 \vee r_2 \left(1 - \frac{P_n^*}{K_2} \right) + \frac{c_1 N_n^*}{P_n^* + bN_n^*} - c_2 = 0 \right).$$

Dengan demikian diperoleh titik kesetimbangan berikut:

1. $N_n^* = 0$ dan $P_n^* = 0$

Jika $N = 0$ dan $P = 0$ disubstitusikan ke sistem persamaan (3.1), maka menyebabkan sistem persamaan (3.1) tidak terdefinisi. Oleh karena itu titik kesetimbangan $(N_n^*, P_n^*) = (0,0)$ bukan sebagai titik kesetimbangan pada sistem persamaan (3.1).

2. $N_n^* = 0$ dan $r_2 \left(1 - \frac{P_n^*}{K_2} \right) + \frac{c_1 N_n^*}{P_n^* + bN_n^*} - c_2 = 0$, maka

$$r_2 \left(1 - \frac{P_n^*}{K_2} \right) - c_2 = 0$$

$$r_2 - \frac{r_2 P_n^*}{K_2} - c_2 = 0$$

$$\frac{r_2 P_n^*}{K_2} = r_2 - c_2$$

$$r_2 P_n^* = K_2 (r_2 - c_2)$$

$$r_2 P_n^* = r_2 K_2 - c_2 K_2$$

$$P_n^* = \frac{r_2 K_2 - c_2 K_2}{r_2}$$

$$P_n^* = \frac{r_2 K_2}{r_2} - \frac{c_2 K_2}{r_2}$$

$$P_n^* = K_2 - \frac{c_2 K_2}{r_2}$$

$$P_n^* = K_2 \left(1 - \frac{c_2}{r_2}\right).$$

Oleh karena itu, diperoleh titik kesetimbangannya $E_1 \left(0, K_2 \left(1 - \frac{c_2}{r_2}\right)\right)$ dengan

syarat $K_2 \left(1 - \frac{c_2}{r_2}\right) > 0$.

3. $r_1 \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1}\right) - \frac{aP_n^*}{P_n^* + bN_n^*} = 0$ dan $P_n^* = 0$, maka

$$r_1 \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1}\right) = 0$$

$$r_1 - \frac{r_1 N_n^*}{K_1} = 0$$

$$\frac{r_1 N_n^*}{K_1} = r_1$$

$$r_1 N_n^* = r_1 K_1$$

$$N_n^* = K_1.$$

Dengan demikian diperoleh titik kesetimbangan bagi sistem (3.1) yaitu

$E_2(N_n^*, P_n^*) = (K_1, 0)$, dengan $K_1 > 0$.

4. $r_1 \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1}\right) - \frac{aP_n^*}{P_n^* + bN_n^*} = 0$ dan $r_2 \left(1 - \frac{P_n^*}{K_2}\right) + \frac{c_1 N_n^*}{P_n^* + bN_n^*} - c_2 = 0$

$$\frac{aP_n^*}{P_n^* + bN_n^*} = r_1 \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1}\right)$$

$$aP_n^* = r_1 \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1}\right) (P_n^* + bN_n^*)$$

$$aP_n^* = r_1 P_n^* \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1}\right) + r_1 b N_n^* \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1}\right)$$

$$aP_n^* - r_1 P_n^* \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1}\right) = r_1 b N_n^* \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1}\right)$$

$$P_n^* \left(a - r_1 \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1}\right)\right) = r_1 b N_n^* \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1}\right)$$

$$P_n^* = \frac{r_1 b N_n^* \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1}\right)}{a - r_1 \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1}\right)}$$

Di sisi lain, berlaku persamaan berikut:

$$\frac{a P_n^*}{P_n^* + b N_n^*} = r_1 \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1}\right),$$

dan misalkan $P_n^* < P_n^* + b N_n^*$, maka berlaku:

$$\frac{P_n^*}{P_n^* + b N_n^*} < 1,$$

dan selanjutnya kedua ruas dikalikan dengan a , dan untuk setiap $a > 0$ sehingga diperoleh

$$\frac{a P_n^*}{P_n^* + b N_n^*} < a$$

dengan demikian diperoleh hasil

$$r_1 \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1}\right) = \frac{a P_n^*}{P_n^* + b N_n^*} < a. \quad (3.14)$$

Sehingga, berdasarkan persamaan (3.14) tersebut dapat ditunjukkan juga

$$r_1 \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1}\right) < a. \quad (3.15)$$

Maka, dari persamaan (3.15) didapatkan $a - r_1 \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1}\right) > 0$.

Syarat P_n^* akan eksis jika

$$1 - \frac{N_n^*}{K_1} > 0 \Leftrightarrow 1 > \frac{N_n^*}{K_1} \Leftrightarrow K_1 > N_n^*.$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan P_n^* ke persamaan berikut

$$r_2 \left(1 - \frac{P_n^*}{K_2}\right) + \frac{c_1 N_n^*}{P_n^* + b N_n^*} - c_2 = 0.$$

Sehingga diperoleh hasil berikut:

$$\begin{aligned}
& r_2 \left(1 - \frac{\left(\frac{r_1 b N_n^* \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1} \right)}{a - r_1 \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1} \right)} \right)}{K_2} \right) + \frac{c_1 N_n^*}{\left(\frac{r_1 b N_n^* \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1} \right)}{a - r_1 \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1} \right)} \right) + b N_n^*} - c_2 = 0 \\
& r_2 \left(1 - \frac{r_1 b N_n^* \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1} \right)}{K_2 \left(a - r_1 \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1} \right) \right)} \right) \\
& \quad + \frac{c_1 N_n^* \left(a - r_1 \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1} \right) \right)}{r_1 b N_n^* \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1} \right) + b N_n^* \left(a - r_1 \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1} \right) \right)} - c_2 = 0 \\
& r_2 \left(\frac{K_2 \left(a - r_1 \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1} \right) \right) - r_1 b N_n^* \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1} \right)}{K_2 \left(a - r_1 \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1} \right) \right)} \right) \\
& \quad + \frac{c_1 N_n^* \left(a - r_1 \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1} \right) \right)}{r_1 b N_n^* \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1} \right) + a b N_n^* - r_1 b N_n^* \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1} \right)} - c_2 = 0 \\
& r_2 \left(\frac{K_2 \left(a - r_1 \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1} \right) \right) - r_1 b N_n^* \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1} \right)}{K_2 \left(a - r_1 \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1} \right) \right)} \right) + \frac{c_1 N_n^* \left(a - r_1 \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1} \right) \right)}{a b N_n^*} - c_2 \\
& \quad = 0
\end{aligned}$$

$$r_2 \left(\frac{K_2 \left(a - r_1 \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1} \right) \right) - r_1 b N_n^* \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1} \right)}{K_2 \left(a - r_1 \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1} \right) \right)} \right) + \frac{c_1 \left(a - r_1 \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1} \right) \right)}{ab} - c_2 = 0. \quad (3.16)$$

Karena $a - r_1 \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1} \right) > 0$, selanjutnya pada persamaan (3.16) kedua ruasnya dapat dikalikan dengan $a - r_1 \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1} \right)$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} & r_2 \left(a - r_1 \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1} \right) - \frac{r_1 b N_n^*}{K_2} \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1} \right) \right) + \frac{c_1}{ab} \left(a - r_1 \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1} \right) \right)^2 \\ & \quad - c_2 \left(a - r_1 \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1} \right) \right) = 0 \\ & r_2 a - r_1 r_2 \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1} \right) - \frac{r_1 b N_n^*}{K_2} \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1} \right) \cdot r_2 \\ & \quad + \frac{c_1}{ab} \left(a^2 - 2ar_1 \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1} \right) + r_1^2 \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1} \right)^2 \right) - c_2 a \\ & \quad + c_2 r_1 \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1} \right) = 0 \\ & r_2 a - r_1 r_2 + \frac{r_1 r_2}{K_1} N_n^* - \frac{r_1 r_2 b}{K_2} N_n^* + \frac{r_1 r_2 b}{K_1 K_2} N_n^{*2} \\ & \quad + \frac{c_1}{ab} \left(a^2 - 2ar_1 + \frac{2ar_1}{K_1} N_n^* + r_1^2 \left(1 - \frac{2}{K_1} N_n^* + \frac{1}{K_1^2} N_n^{*2} \right) \right) \\ & \quad - c_2 a + c_2 r_1 - \frac{c_2 r_1}{K_1} N_n^* = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& r_2a - r_1r_2 + \frac{r_1r_2}{K_1}N_n^* - \frac{r_1r_2b}{K_2}N_n^* + \frac{r_1r_2b}{K_1K_2}N_n^{*2} \\
& + \frac{c_1}{ab} \left(a^2 - 2ar_1 + \frac{2ar_1}{K_1}N_n^* + r_1^2 - \frac{2r_1^2}{K_1}N_n^* + \frac{r_1^2}{K_1^2}N_n^{*2} \right) \\
& - c_2a + c_2r_1 - \frac{c_2r_1}{K_1}N_n^* = 0 \\
& \left(\frac{r_1r_2b}{K_1K_2} + \frac{c_1r_1^2}{abK_1^2} \right) N_n^{*2} + \left(\frac{r_1r_2}{K_1} - \frac{r_1r_2b}{K_2} + \frac{2ar_1c_1}{abK_1} - \frac{2c_1r_1^2}{abK_1} - \frac{c_2r_1}{K_1} \right) \cdot N_n^* \\
& + \left(r_2a - r_1r_2 + \frac{c_1}{ab} (a^2 - 2ar_1 + r_1^2) - c_2a + c_2r_1 \right) = 0 \\
& \frac{r_1}{K_1} \left(\frac{r_2b}{K_2} + \frac{c_1r_1}{abK_1} \right) N_n^{*2} + \left(\frac{r_1}{K_1} (r_2 - c_2) + \frac{2c_1r_1}{abK_1} (a - r_1) - \frac{r_1r_2b}{K_2} \right) N_n^* \\
& + \left(r_2(a - r_1) + \frac{c_1}{ab} (a - r_1)^2 - c_2(a - r_1) \right) = 0 \\
& \frac{r_1}{K_1} \left(\frac{r_2b}{K_2} + \frac{c_1r_1}{abK_1} \right) N_n^{*2} + \left(\frac{r_1}{K_1} \left((r_2 - c_2) + \frac{2c_1}{ab} (a - r_1) \right) - \frac{r_1r_2b}{K_2} \right) \\
& + \left((a - r_1) \left((r_2 - c_2) + \frac{c_1}{ab} (a - r_1) \right) \right) = 0.
\end{aligned}$$

Dengan demikian titik kesetimbangan selanjutnya yaitu akar-akar dari persamaan kuadrat berikut:

$$A(N_n^*)^2 + BN_n^* + C = 0, \text{ yaitu}$$

$$(N_n^*)_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \text{ dan } (N_n^*)_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

dengan,

$$A = \frac{r_1}{K_1} \left(\frac{r_2b}{K_2} + \frac{c_1r_1}{abK_1} \right) \quad (3.17)$$

$$B = \left(\frac{r_1}{K_1} \left((r_2 - c_2) + \frac{2c_1}{ab} (a - r_1) \right) - \frac{r_1r_2b}{K_2} \right) \quad (3.18)$$

$$C = \left((a - r_1) \left((r_2 - c_2) + \frac{c_1}{ab} (a - r_1) \right) \right). \quad (3.19)$$

Berdasarkan nilai parameter yang mengacu pada Rayungsari, dkk. (2014), yaitu seluruh parameter uji memiliki nilai positif, maka pada persamaan (3.17) dapat diketahui bahwa nilai A selalu positif, karena $A = \frac{r_1}{K_1} \left(\frac{r_2 b}{K_2} + \frac{c_1 r_1}{ab K_1} \right) > 0$. Selanjutnya, untuk menentukan nilai B pada persamaan (3.18) dan nilai C pada persamaan (3.19), yaitu dengan proses analisis tanda. Kemudian, jika dilakukan analisis tanda dari B dan C , maka diperoleh beberapa variasi untuk titik kesetimbangan interior E_3 pada sistem persamaan (3.1) sebagai berikut:

- a. Variasi pertama, titik kesetimbangan interior yang dinotasikan dengan $E_{3,1}$. Jika titik $E_{3,1}$ menggunakan $(N_n^*)_1$ yang dikenai sifat $A > 0$, $B > 0$, dan $C > 0$ mengakibatkan $B^2 - 4AC < 0$, maka didapatkan nilai dari $(N_n^*)_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} < 0$. Dengan demikian titik $E_{3,1}$ tidak eksis tetapi ketika $B^2 - 4AC \geq 0$ maka eksis.
- b. Variasi kedua, titik kesetimbangan interior yang dinotasikan dengan $E_{3,2}$. Jika titik $E_{3,2}$ menggunakan $(N_n^*)_1$ yang dikenai sifat $A > 0$, $B > 0$, dan $C < 0$ mengakibatkan $B^2 - 4AC > 0$, maka didapatkan titik $E_{3,2}$ sebagai berikut:

$$E_{3,2}((N_n^*)_1, (P_n^*)) = \left(\frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \frac{r_1 b (N_n^*)_1 \left(1 - \frac{(N_n^*)_1}{K_1} \right)}{a - r_1 \left(1 - \frac{(N_n^*)_1}{K_1} \right)} \right).$$

Dengan demikian titik $E_{3,2}$ eksis.

- c. Variasi ketiga, titik kesetimbangan interior yang dinotasikan dengan $E_{3,3}$.
Jika titik $E_{3,3}$ menggunakan $(N_n^*)_1$ yang dikenai sifat $A > 0$, $B > 0$, dan $C = 0$ mengakibatkan $B^2 - 4AC > 0$, maka didapatkan titik $E_{3,3}$ sebagai berikut:

$$E_{3,3}((N_n^*)_1, (P_n^*)) = \left(0, \frac{r_1 b (N_n^*)_1 \left(1 - \frac{(N_n^*)_1}{K_1} \right)}{a - r_1 \left(1 - \frac{(N_n^*)_1}{K_1} \right)} \right).$$

Dengan demikian titik $E_{3,3}$ eksis.

- d. Variasi keempat, titik kesetimbangan interior yang dinotasikan dengan $E_{3,4}$. Jika titik $E_{3,4}$ menggunakan $(N_n^*)_1$ yang dikenai sifat $A > 0$, $B = 0$, dan $C > 0$ mengakibatkan $B^2 - 4AC < 0$, maka didapatkan nilai dari $(N_n^*)_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = -\frac{2\sqrt{AC}}{2A}$. Dengan demikian titik $E_{3,4}$ tidak eksis.
- e. Variasi kelima, titik kesetimbangan interior yang dinotasikan dengan $E_{3,5}$.
Jika titik $E_{3,5}$ menggunakan $(N_n^*)_1$ yang dikenai sifat $A > 0$, $B = 0$, dan $C < 0$ mengakibatkan $B^2 - 4AC > 0$, maka didapatkan titik $E_{3,5}$ sebagai berikut:

$$E_{3,5}((N_n^*)_1, (P_n^*)) = \left(\frac{\sqrt{AC}}{A}, \frac{r_1 b (N_n^*)_1 \left(1 - \frac{(N_n^*)_1}{K_1} \right)}{a - r_1 \left(1 - \frac{(N_n^*)_1}{K_1} \right)} \right).$$

Dengan demikian titik $E_{3,5}$ eksis.

- f. Variasi keenam, titik kesetimbangan interior yang dinotasikan dengan $E_{3,6}$.
Jika titik $E_{3,6}$ menggunakan $(N_n^*)_1$ yang dikenai sifat Jika $A > 0$, $B = 0$, dan $C = 0$ mengakibatkan nilai $(N_n^*)_1$ bernilai real, maka didapatkan titik $E_{3,6}$ sebagai berikut:

$$E_{3,6}((N_n^*)_1, (P_n^*)) = \left(0, \frac{r_1 b (N_n^*)_1 \left(1 - \frac{(N_n^*)_1}{K_1} \right)}{a - r_1 \left(1 - \frac{(N_n^*)_1}{K_1} \right)} \right).$$

Dengan demikian titik $E_{3,6}$ eksis.

- g. Variasi ketujuh, titik kesetimbangan interior yang dinotasikan dengan $E_{3,7}$.

Jika titik $E_{3,7}$ menggunakan $(N_n^*)_1$ yang dikenai sifat Jika $A > 0$, $B < 0$, dan $C > 0$ mengakibatkan $B^2 - 4AC \geq 0$, maka didapatkan titik $E_{3,7}$ sebagai berikut:

$$E_{3,7}((N_n^*)_1, (P_n^*)) = \left(\frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \frac{r_1 b (N_n^*)_1 \left(1 - \frac{(N_n^*)_1}{K_1} \right)}{a - r_1 \left(1 - \frac{(N_n^*)_1}{K_1} \right)} \right).$$

Dengan demikian titik $E_{3,7}$ Eksis. Tetapi ketika $B^2 - 4AC < 0$ maka $E_{3,7}$ tidak eksis.

- h. Variasi kedelapan, titik kesetimbangan interior yang dinotasikan dengan

$E_{3,8}$. Jika titik $E_{3,8}$ menggunakan $(N_n^*)_1$ yang dikenai sifat Jika $A > 0$, $B < 0$, dan $C < 0$ mengakibatkan $B^2 - 4AC > 0$, maka didapatkan titik $E_{3,8}$ sebagai berikut:

$$E_{3,8}((N_n^*)_1, (P_n^*)) = \left(\frac{B + \sqrt{B^2 + 4AC}}{2A}, \frac{r_1 b (N_n^*)_1 \left(1 - \frac{(N_n^*)_1}{K_1} \right)}{a - r_1 \left(1 - \frac{(N_n^*)_1}{K_1} \right)} \right).$$

Dengan demikian titik $E_{3,8}$ eksis.

- i. Variasi kesembilan, titik kesetimbangan interior yang dinotasikan dengan

$E_{3,9}$. Jika titik $E_{3,9}$ menggunakan $(N_n^*)_1$ yang dikenai sifat Jika $A > 0$, $B < 0$, dan $C = 0$ mengakibatkan $B^2 - 4AC > 0$, maka didapatkan titik $E_{3,9}$ sebagai berikut:

$$E_{3,9}((N_n^*)_1, (P_n^*)) = \left(\frac{B}{A}, \frac{r_1 b (N_n^*)_1 \left(1 - \frac{(N_n^*)_1}{K_1}\right)}{a - r_1 \left(1 - \frac{(N_n^*)_1}{K_1}\right)} \right).$$

Dengan demikian titik $E_{3,9}$ eksis.

- j. Variasi kesepuluh, titik kesetimbangan interior yang dinotasikan dengan $E_{3,10}$. Jika titik $E_{3,10}$ menggunakan $(N_n^*)_2$ yang dikenai sifat $A > 0$, $B > 0$, dan $C > 0$, maka didapatkan nilai dari $(N_n^*)_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$ bernilai negatif. Dengan demikian titik $E_{3,10}$ tidak eksis.
- k. Variasi kesebelas, titik kesetimbangan interior yang dinotasikan dengan $E_{3,11}$. Jika titik $E_{3,11}$ menggunakan $(N_n^*)_2$ yang dikenai sifat $A > 0$, $B > 0$, dan $C < 0$, maka didapatkan nilai dari $(N_n^*)_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} < 0$. Dengan demikian titik $E_{3,11}$ tidak eksis.
- l. Variasi keduabelas, titik kesetimbangan interior yang dinotasikan dengan $E_{3,12}$. Jika titik $E_{3,12}$ menggunakan $(N_n^*)_2$ yang dikenai sifat $A > 0$, $B > 0$, dan $C = 0$, maka didapatkan nilai dari $(N_n^*)_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = -\frac{B}{A}$. Dengan demikian titik $E_{3,12}$ tidak mungkin eksis.
- m. Variasi ketigabelas, titik kesetimbangan interior yang dinotasikan dengan $E_{3,13}$. Jika titik $E_{3,13}$ menggunakan $(N_n^*)_2$ yang dikenai sifat $A > 0$, $B = 0$, dan $C > 0$, maka didapatkan nilai dari $(N_n^*)_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$ menyebabkan diskriminanya bernilai imajiner. Dengan demikian titik $E_{3,13}$ tidak eksis.
- n. Variasi keempatbelas, titik kesetimbangan interior yang dinotasikan dengan $E_{3,14}$. Jika titik $E_{3,14}$ menggunakan $(N_n^*)_2$ yang dikenai sifat

$A > 0$, $B = 0$, dan $C < 0$, maka didapatkan nilai dari $(N_n^*)_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} < 0$. Dengan demikian titik $E_{3,14}$ tidak mungkin eksis.

- o. Variasi kelimabelas, titik kesetimbangan interior yang dinotasikan dengan $E_{3,15}$. Jika titik $E_{3,15}$ menggunakan $(N_n^*)_2$ yang dikenai sifat $A > 0$, $B = 0$, dan $C = 0$ mengakibatkan $B^2 - 4AC = 0$, maka didapatkan titik $E_{3,15}$ sebagai berikut:

$$E_{3,15}((N_n^*)_2, (P_n^*)) = \left(0, \frac{r_1 b (N_n^*)_2 \left(1 - \frac{(N_n^*)_2}{K_1}\right)}{a - r_1 \left(1 - \frac{(N_n^*)_2}{K_1}\right)} \right).$$

Dengan demikian titik $E_{3,15}$ eksis.

- p. Variasi keenambelas, titik kesetimbangan interior yang dinotasikan dengan $E_{3,16}$. Jika titik $E_{3,16}$ menggunakan $(N_n^*)_2$ yang dikenai sifat $A > 0$, $B < 0$, dan $C > 0$ mengakibatkan $B^2 - 4AC \geq 0$, maka didapatkan titik $E_{3,16}$ sebagai berikut:

$$E_{3,16}((N_n^*)_2, (P_n^*)) = \left(\frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \frac{r_1 b (N_n^*)_2 \left(1 - \frac{(N_n^*)_2}{K_1}\right)}{a - r_1 \left(1 - \frac{(N_n^*)_2}{K_1}\right)} \right).$$

Dengan demikian titik $E_{3,16}$ eksis.

- q. Variasi ketujuhbelas, titik kesetimbangan interior yang dinotasikan dengan $E_{3,17}$. Jika titik $E_{3,17}$ menggunakan $(N_n^*)_2$ yang dikenai sifat $A > 0$, $B < 0$, dan $C < 0$, maka didapatkan nilai dari $(N_n^*)_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{B - \sqrt{B^2 + 4AC}}{2A} < 0$. Dengan demikian titik $E_{3,17}$ tidak mungkin eksis.

- r. Variasi kedelapanbelas, titik kesetimbangan interior yang dinotasikan dengan $E_{3,18}$. Jika titik $E_{3,18}$ menggunakan $(N_n^*)_2$ yang dikenai sifat $A > 0, B < 0$, dan $C = 0$, maka didapatkan titik $E_{3,18}$ sebagai berikut:

$$E_{3,18}((N_n^*)_2, (P_n^*)) = \left(0, \frac{r_1 b (N_n^*)_2 \left(1 - \frac{(N_n^*)_2}{K_1} \right)}{a - r_1 \left(1 - \frac{(N_n^*)_2}{K_1} \right)} \right).$$

Dengan demikian titik $E_{3,18}$ eksis.

3.4 Analisis Kestabilan pada Titik Kesetimbangan

Dengan mengingat, sistem persamaan (3.1) yakni:

$$N_{n+1} = N_n + hr_1 N_n \left(1 - \frac{N_n}{K_1} \right) - \frac{ha N_n P_n}{P_n + b N_n} = f(N_n, P_n)$$

$$P_{n+1} = P_n + hr_2 P_n \left(1 - \frac{P_n}{K_2} \right) + \frac{hc_1 N_n P_n}{P_n + b N_n} - hc_2 P_n = g(N_n, P_n).$$

Maka untuk menentukan jenis kestabilan titik kesetimbangan pada persamaan (3.1) tersebut, dilakukan dengan menganalisis nilai eigen dari matrik Jacobi untuk E_1 dan E_2 . Sedangkan untuk E_3 menggunakan sifat-sifat pada Teorema 2.4.

Selanjutnya, untuk matriks Jacobi pada sistem persamaan (3.1) di titik kesetimbangan (N_n^*, P_n^*) adalah

$$J(N_n^*, P_n^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial N} & \frac{\partial f}{\partial P} \\ \frac{\partial g}{\partial N} & \frac{\partial g}{\partial P} \end{bmatrix} \Bigg|_{(N_n^*, P_n^*)}. \quad (3.20)$$

Dari persamaan (3.20) diketahui terlebih dahulu nilai-nilai berikut:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial f}{\partial N} \right|_{(N_n^*, P_n^*)} &= 1 + hr_1 \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1} \right) + hr_1 N_n^* \left(-\frac{1}{K_1} \right) \\
&\quad - \left(\frac{(P_n^* + bN_n^*)haP_n^* - haN_n^*P_n^*(b)}{(P_n^* + bN_n^*)^2} \right) \\
&= 1 + hr_1 \left(1 - \frac{N_n}{K_1} \right) - \frac{hr_1 N_n^*}{K_1} - \left(\frac{(P_n^* + bN_n^*)haP_n^* - habN_n^*P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} \right) \\
&= 1 + hr_1 \left(1 - \frac{N_n}{K_1} \right) - \frac{hr_1 N_n^*}{K_1} - \frac{(P_n^* + bN_n^*)haP_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} + \frac{habN_n^*P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} \\
&= 1 - \frac{hr_1 N_n^*}{K_1} + hr_1 \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1} \right) - \frac{haP_n^*}{P_n^* + bN_n^*} + \frac{habN_n^*P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} \\
\left. \frac{\partial f}{\partial P} \right|_{(N_n^*, P_n^*)} &= - \left(\frac{(P_n^* + bN_n^*)haN_n^* - haN_n^*P_n^*(1)}{(P_n^* + bN_n^*)^2} \right) \\
&= - \frac{haN_n^*}{P_n^* + bN_n^*} + \frac{haN_n^*P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} \\
\left. \frac{\partial g}{\partial N} \right|_{(N_n^*, P_n^*)} &= \frac{(P_n^* + bN_n^*)hc_1P_n^* - hc_1N_n^*P_n^*(b)}{(P_n^* + bN_n^*)^2} \\
&= \frac{hc_1P_n^*}{P_n^* + bN_n^*} - \frac{hbc_1N_n^*P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} \\
\left. \frac{\partial g}{\partial P} \right|_{(N_n^*, P_n^*)} &= 1 + hr_2 \left(1 - \frac{P_n^*}{K_2} \right) + hr_2 P_n^* \left(-\frac{1}{K_2} \right) \\
&\quad + \left(\frac{(P_n^* + bN_n^*)hc_1N_n^* - hc_1N_n^*P_n^*(1)}{(P_n^* + bN_n^*)^2} \right) - hc_2 \\
&= 1 + hr_2 \left(1 - \frac{P_n^*}{K_2} \right) + hr_2 P_n^* \left(-\frac{1}{K_2} \right) \\
&\quad + \left(\frac{(P_n^* + bN_n^*)hc_1N_n^* - hc_1N_n^*P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} \right) - hc_2 \\
&= 1 + hr_2 \left(1 - \frac{P_n^*}{K_2} \right) - \frac{hr_2 P_n^*}{K_2} + \left(\frac{(P_n^* + bN_n^*)hc_1N_n^* - hc_1N_n^*P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} \right) \\
&\quad - hc_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + hr_2 \left(1 - \frac{P_n^*}{K_2}\right) - \frac{hr_2 P_n^*}{K_2} + \frac{(P_n^* + bN_n^*)hc_1 N_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} - \frac{hc_1 N_n^* P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} \\
&\quad - hc_2 \\
&= 1 - \frac{hr_2 P_n^*}{K_2} + hr_2 \left(1 - \frac{P_n^*}{K_2}\right) + \frac{hc_1 N_n^*}{P_n^* + bN_n^*} - \frac{hc_1 N_n^* P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} - hc_2.
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh matriks Jacobi untuk sistem persamaan (3.1) sebagai berikut:

$$J(N_n^*, P_n^*)|_{(N_n^*, P_n^*)} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{hr_1 N_n^*}{K_1} + hr_1 \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1}\right) - \frac{haP_n^*}{P_n^* + bN_n^*} + \frac{habN_n^* P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} & -\frac{haN_n^*}{P_n^* + bN_n^*} + \frac{haP_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} \\ \frac{hc_1 P_n^*}{P_n^* + bN_n^*} - \frac{hc_1 N_n^* P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} & 1 - \frac{hr_2 P_n^*}{K_2} + hr_2 \left(1 - \frac{P_n^*}{K_2}\right) + \frac{hc_1 N_n^*}{P_n^* + bN_n^*} - \frac{hc_1 N_n^* P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} - hc_2 \end{bmatrix} \Bigg|_{(N_n^*, P_n^*)}.$$

Selanjutnya matriks Jacobi tersebut digunakan untuk menganalisis kestabilan yang ada pada setiap titik kesetimbangan dari sistem persamaan (3.1).

Matriks Jacobi untuk titik kesetimbangan di $E_1(N_n^*, P_n^*) = \left(0, K_2 \left(1 - \frac{c_2}{r_2}\right)\right)$ adalah:

$$\begin{aligned}
J(E_1) &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{hr_1 N_n^*}{K_1} + hr_1 \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1}\right) - \frac{haP_n^*}{P_n^* + bN_n^*} + \frac{habN_n^* P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} & -\frac{haN_n^*}{P_n^* + bN_n^*} + \frac{haP_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} \\ \frac{hc_1 P_n^*}{P_n^* + bN_n^*} - \frac{hc_1 N_n^* P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} & 1 - \frac{hr_2 P_n^*}{K_2} + hr_2 \left(1 - \frac{P_n^*}{K_2}\right) + \frac{hc_1 N_n^*}{P_n^* + bN_n^*} - \frac{hc_1 N_n^* P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} - hc_2 \end{bmatrix} \Bigg|_{(E_1)} \\
&= \begin{bmatrix} 1 + h(r_1 - a) & 0 \\ hc_1 & 1 + hr_2 \left(1 - \frac{2K_2 \left(1 - \frac{c_2}{r_2}\right)}{K_2}\right) - hc_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 + h(r_1 - a) & 0 \\ hc_1 & 1 + hr_2 \left(1 - 2 \left(1 - \frac{c_2}{r_2}\right)\right) - hc_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 + h(r_1 - a) & 0 \\ hc_1 & 1 + hr_2 \left(1 - 2 + \frac{2c_2}{r_2}\right) - hc_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 + h(r_1 - a) & 0 \\ hc_1 & 1 + hr_2 \left(-1 + \frac{2c_2}{r_2}\right) - hc_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 1 + h(r_1 - a) & 0 \\ hc_1 & 1 - hr_2 + 2hc_2 - hc_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 + h(r_1 - a) & 0 \\ hc_1 & 1 + h(c_2 - r_2) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Selanjutnya, untuk mencari nilai eigen dari matriks Jacobi pada titik kesetimbangan di E_1 , dapat dipaparkan sebagai berikut:

$$\det(\lambda_1 I - J(E_1)) = 0$$

$$\left| \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 + h(r_1 - a) & 0 \\ hc_1 & 1 + h(c_2 - r_2) \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 + h(r_1 - a) & 0 \\ hc_1 & 1 + h(c_2 - r_2) \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 - (1 + h(r_1 - a)) & 0 \\ -hc_1 & \lambda_1 - (1 + h(c_2 - r_2)) \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda_1 - (1 + h(r_1 - a))) (\lambda_1 - (1 + h(c_2 - r_2))) - (-hc_1) \cdot 0 = 0$$

$$(\lambda_1 - (1 + h(r_1 - a))) (\lambda_1 - (1 + h(c_2 - r_2))) = 0$$

$$\lambda_1 = 1 + h(r_1 - a) \quad (3.21)$$

atau

$$\lambda_1 = 1 + h(c_2 - r_2). \quad (3.22)$$

Agar $|\lambda_1| < 1$ pada persamaan (3.21), haruslah

$$-1 < 1 + h(r_1 - a) < 1$$

$$-2 < h(r_1 - a) < 0$$

$$2 > h(a - r_1) > 0$$

$$0 < h(a - r_1) < 2$$

$$0 < h < \frac{2}{(a - r_1)} = h_1, \forall a > r_1.$$

dan

agar $|\lambda_1| < 1$ pada persamaan (3.22), haruslah

$$-1 < 1 + h(c_2 - r_2) < 1$$

$$-2 < h(c_2 - r_2) < 0$$

$$2 > h(r_2 - c_2) > 0$$

$$0 < h(r_2 - c_2) < 2$$

$$0 < h < \frac{2}{(r_2 - c_2)} = h_2, \forall r_2 > c_2.$$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan di E_1 akan bersifat stabil (*sink*) jika nilai $h < \min\{h_1, h_2\}$ dan bersifat tidak stabil (*source*) jika nilai $h > \min\{h_1, h_2\}$.

Matriks Jacobi untuk titik kesetimbangan di $E_2(N_n^*, P_n^*) = (K_1, 0)$, adalah:

$$\begin{aligned} J(E_2) &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{hr_1 N_n^*}{K_1} + hr_1 \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1}\right) - \frac{haP_n^*}{P_n^* + bN_n^*} + \frac{habN_n^* P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} & -\frac{haN_n^*}{P_n^* + bN_n^*} + \frac{haP_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} \\ \frac{hc_1 P_n^*}{P_n^* + bN_n^*} - \frac{hbc_1 N_n^* P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} & 1 - \frac{hr_2 P_n^*}{K_2} + hr_2 \left(1 - \frac{P_n^*}{K_2}\right) + \frac{hc_1 N_n^*}{P_n^* + bN_n^*} - \frac{hc_1 N_n^* P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} - hc_2 \end{bmatrix}_{(E_2)} \\ &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{hr_1 K_1}{K_1} + hr_1 \left(1 - \frac{K_1}{K_1}\right) & -\frac{ha}{b} \\ 0 & 1 + hr_2 + \frac{hc_1}{b} - hc_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 - hr_1 + hr_1(1 - 1) & -\frac{ha}{b} \\ 0 & 1 + hr_2 + \frac{hc_1}{b} - hc_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 - hr_1 & -\frac{ha}{b} \\ 0 & 1 + h\left(\frac{c_1}{b} + (r_2 - c_2)\right) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 - hr_1 & -\frac{ha}{b} \\ 0 & 1 + h\left(\frac{c_1}{b} + (r_2 - c_2)\right) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Selanjutnya, untuk mencari nilai eigen dari matrik Jacobi pada titik kesetimbangan di E_2 , dapat dipaparkan sebagai berikut:

$$\det(\lambda_2 I - J(E_2)) = 0$$

$$\left| \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 - hr_1 & -\frac{ha}{b} \\ 0 & 1 + h\left(\frac{c_1}{b} + (r_2 - c_2)\right) \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 - hr_1 & -\frac{ha}{b} \\ 0 & 1 + h\left(\frac{c_1}{b} + (r_2 - c_2)\right) \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_2 - (1 - hr_1) & -\frac{ha}{b} \\ 0 & \lambda_2 - \left(1 + h\left(\frac{c_1}{b} + (r_2 - c_2)\right)\right) \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda_2 - (1 - hr_1)) \left(\lambda_2 - \left(1 + h\left(\frac{c_1}{b} + (r_2 - c_2)\right)\right) \right) - \left(-\frac{ha}{b}\right) \cdot 0 = 0$$

$$(\lambda_2 - (1 - hr_1)) \left(\lambda_2 - \left(1 + h\left(\frac{c_1}{b} + (r_2 - c_2)\right)\right) \right) = 0$$

$$\lambda_2 = 1 - hr_1 \tag{3.23}$$

atau

$$\lambda_2 = 1 + h\left(\frac{c_1}{b} + (r_2 - c_2)\right). \tag{3.24}$$

Agar $|\lambda_2| < 1$ pada persamaan (3.23), haruslah

$$-1 < 1 - hr_1 < 1$$

$$-2 < -hr_1 < 0$$

$$0 < hr_1 < 2$$

$$hr_1 < 2$$

$$h < \frac{2}{r_1}, \forall r_1 > 0.$$

Kemudian untuk λ_2 pada persamaan (3.24) tersebut, selalu menunjukkan nilai positif berdasarkan syarat eksistensi titik kesetimbangan yaitu $c_2 < r_2$, dengan demikian, titik kesetimbangan E_2 bersifat tidak stabil (*source*) tanpa syarat apapun.

Matriks Jacobi untuk titik kesetimbangan di

$$E_3(N_n^*, P_n^*) = \left(N^*, \frac{r_1 b N_n^* \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1}\right)}{a - r_1 \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1}\right)} \right) \text{ adalah:}$$

$$J(N_n^*, P_n^*) = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix},$$

dengan

$$\begin{aligned} J_{11} &= 1 - \frac{hr_1 N_n^*}{K_1} + hr_1 \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1}\right) - \frac{haP_n^*}{P_n^* + bN_n^*} + \frac{habN_n^*P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} \\ &= 1 - \frac{hr_1 N_n^*}{K_1} + h \left(r_1 \left(1 - \frac{N_n^*}{K_1}\right) - \frac{aP_n^*}{P_n^* + bN_n^*} \right) + \frac{habN_n^*P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} \\ &= 1 - \frac{hr_1 N_n^*}{K_1} + \frac{habN_n^*P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} \end{aligned}$$

$$J_{12} = -\frac{haN_n^*}{P_n^* + bN_n^*} + \frac{haN_n^*P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2}$$

$$J_{21} = \frac{hc_1 P_n^*}{P_n^* + bN_n^*} - \frac{hbc_1 N_n^* P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2}$$

$$\begin{aligned} J_{22} &= 1 - \frac{hr_2 P_n^*}{K_2} + hr_2 \left(1 - \frac{P_n^*}{K_2}\right) + \frac{hc_1 N_n^*}{P_n^* + bN_n^*} - \frac{hc_1 N_n^* P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} - hc_2 \\ &= 1 - \frac{hr_2 P_n^*}{K_2} + h \left(r_2 \left(1 - \frac{P_n^*}{K_2}\right) + \frac{c_1 N_n^*}{P_n^* + bN_n^*} - c_2 \right) - \frac{hc_1 N_n^* P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} \\ &= 1 - \frac{hr_2 P_n^*}{K_2} - \frac{hc_1 N_n^* P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} \end{aligned}$$

dengan memisalkan bahwa:

$$\begin{aligned}
p &= \text{trace}(J(E_3)) \\
&= J_{11} + J_{22} \\
&= 1 - \frac{hr_1 N_n^*}{K_1} + \frac{habN_n^* P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} + 1 - \frac{hr_2 P_n^*}{K_2} - \frac{hc_1 N_n^* P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} \\
&= 2 - \frac{hr_1 N_n^*}{K_1} + \frac{habN_n^* P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} - \frac{hr_2 P_n^*}{K_2} - \frac{hc_1 N_n^* P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2}
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
q &= \det(J(E_3)) \\
&= J_{11} \cdot J_{22} - J_{12} \cdot J_{21} \\
&= \left(\left(1 - \frac{hr_1 N_n^*}{K_1} + \frac{habN_n^* P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} \right) \left(1 - \frac{hr_2 P_n^*}{K_2} - \frac{hc_1 N_n^* P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} \right) \right) \\
&\quad - \left(\left(\frac{haN_n^* P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} - \frac{haN_n^*}{P_n^* + bN_n^*} \right) \left(\frac{hc_1 P_n^*}{P_n^* + bN_n^*} - \frac{hbc_1 N_n^* P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} \right) \right) \\
&= 1 - \frac{hr_2 P_n^*}{K_2} - \frac{hc_1 N_n^* P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} - \frac{hr_1 N_n^*}{K_1} + \frac{h^2 r_1 r_2 N_n^* P_n^*}{K_1 K_2} + \frac{h^2 c_1 r_1 (N_n^*)^2 P_n^*}{K_1 (P_n^* + bN_n^*)^2} \\
&\quad + \frac{habN_n^* P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} - \frac{h^2 abr_2 N_n^* (P_n^*)^2}{K_2 (P_n^* + bN_n^*)^2} - \frac{h^2 abc_1 (N_n^*)^2 (P_n^*)^2}{(P_n^* + bN_n^*)^4} \\
&\quad - \frac{h^2 ac_1 N_n^* (P_n^*)^2}{(P_n^* + bN_n^*)^3} + \frac{h^2 abc_1 (N_n^*)^2 (P_n^*)^2}{(P_n^* + bN_n^*)^4} + \frac{h^2 ac_1 N_n^* P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} - \frac{h^2 abc_1 (N_n^*)^2 P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^3} \\
&= 1 - \frac{hr_1 N_n^*}{K_1} - \frac{hr_2 P_n^*}{K_2} + \frac{h^2 r_1 r_2 N_n^* P_n^*}{K_1 K_2} + \frac{hc_1 N_n^* P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} - \frac{h^2 c_1 r_1 (N_n^*)^2 P_n^*}{K_1 (P_n^* + bN_n^*)^2} \\
&\quad + \frac{habN_n^* P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} - \frac{h^2 abr_2 N_n^* (P_n^*)^2}{K_2 (P_n^* + bN_n^*)^2} + \frac{h^2 ac_1 N_n^* P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} - \frac{h^2 abc_1 (N_n^*)^2 P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^3} \\
&\quad - \frac{h^2 ac_1 N_n^* (P_n^*)^2}{(P_n^* + bN_n^*)^3}.
\end{aligned}$$

Berdasarkan Teorema 2.4, titik kesetimbangan interior (N_n^*, P_n^*) akan bersifat stabil jika tiga kondisi berikut terpenuhi:

1. $F(1) = 1 - p + q > 0$
2. $F(0) = q < 1$
3. $F(-1) = 1 + p + q > 0$.

Selanjutnya, akan dianalisis syarat yang harus dipenuhi agar ketiga kondisi tersebut terpenuhi.

1. Kondisi $F(1) = 1 - p + q > 0$

$$\begin{aligned}
 1 - p + q &= 1 - \left(2 - \frac{hr_1N_n^*}{K_1} + \frac{habN_n^*P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} - \frac{hr_2P_n^*}{K_2} - \frac{hc_1N_n^*P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} \right) \\
 &+ 1 - \frac{hr_1N_n^*}{K_1} - \frac{hr_2P_n^*}{K_2} + \frac{h^2r_1r_2N_n^*P_n^*}{K_1K_2} + \frac{hc_1N_n^*P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} \\
 &- \frac{h^2c_1r_1(N_n^*)^2P_n^*}{K_1(P_n^* + bN_n^*)^2} + \frac{habN_n^*P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} - \frac{h^2abr_2N_n^*(P_n^*)^2}{K_2(P_n^* + bN_n^*)^2} \\
 &+ \frac{h^2ac_1N_n^*P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} - \frac{h^2abc_1(N_n^*)^2P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^3} - \frac{h^2ac_1N_n^*(P_n^*)^2}{(P_n^* + bN_n^*)^3} \\
 &= \frac{h^2r_1r_2N_n^*P_n^*}{K_1K_2} - \frac{h^2c_1r_1(N_n^*)^2P_n^*}{K_1(P_n^* + bN_n^*)^2} - \frac{h^2abr_2N_n^*(P_n^*)^2}{K_2(P_n^* + bN_n^*)^2} + \frac{2hc_1N_n^*P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} \\
 &+ \frac{h^2ac_1N_n^*P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} - \frac{h^2abc_1(N_n^*)^2P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^3} - \frac{h^2ac_1N_n^*(P_n^*)^2}{(P_n^* + bN_n^*)^3} \\
 &= \frac{h^2r_1r_2N_n^*P_n^*}{K_1K_2} + \frac{2hc_1N_n^*P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} - \frac{h^2N_n^*P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} \left(\frac{c_1r_1N_n^*}{K_1} + \frac{abr_2P_n^*}{K_2} \right) \\
 &- \frac{h^2ac_1N_n^*P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} - \frac{h^2ac_1N_n^*P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^3} (P_n^* + bN_n^*) \\
 &= \frac{h^2r_1r_2N_n^*P_n^*}{K_1K_2} + \frac{2hc_1N_n^*P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} - \frac{h^2N_n^*P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} \left(\frac{c_1r_1N_n^*}{K_1} + \frac{abr_2P_n^*}{K_2} \right) \\
 &+ \frac{h^2ac_1N_n^*P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} - \frac{h^2ac_1N_n^*P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{h^2 r_1 r_2 N_n^* P_n^*}{K_1 K_2} + \frac{2h c_1 N_n^* P_n^*}{(P_n^* + b N_n^*)^2} - \frac{h^2 N_n^* P_n^*}{(P_n^* + b N_n^*)^2} \left(\frac{c_1 r_1 N_n^*}{K_1} + \frac{a b r_2 P_n^*}{K_2} \right) \\
&= h^2 N_n^* P_n^* \left(\frac{r_1 r_2}{K_1 K_2} - \frac{(c_1 r_1 K_2 N_n^* + a b r_2 K_1 P_n^*)}{K_1 K_2 (P_n^* + b N_n^*)^2} + \frac{2c_1}{h(P_n^* + b N_n^*)^2} \right).
\end{aligned}$$

Agar $1 - p + q > 0$ terpenuhi, maka haruslah

$$\frac{r_1 r_2}{K_1 K_2} - \frac{(c_1 r_1 K_2 N_n^* + a b r_2 K_1 P_n^*)}{K_1 K_2 (P_n^* + b N_n^*)^2} + \frac{2c_1}{h(P_n^* + b N_n^*)^2} > 0$$

sebab $h^2 N_n^* P_n^* > 0$.

2. Kondisi $F(0) = q < 1$

Agar $q < 1$ terpenuhi haruslah $q - 1 < 0$ yaitu:

$$\begin{aligned}
&1 - \frac{h r_2 P_n^*}{K_2} - \frac{h r_1 N_n^*}{K_1} + \frac{h^2 r_1 r_2 N_n^* P_n^*}{K_1 K_2} + \frac{h c_1 N_n^* P_n^*}{(P_n^* + b N_n^*)^2} - \frac{h^2 c_1 r_1 (N_n^*)^2 P_n^*}{K_1 (P_n^* + b N_n^*)^2} \\
&+ \frac{h a b N_n^* P_n^*}{(P_n^* + b N_n^*)^2} - \frac{h^2 a b r_2 N_n^* (P_n^*)^2}{K_2 (P_n^* + b N_n^*)^2} + \frac{h^2 a c_1 N_n^* P_n^*}{(P_n^* + b N_n^*)^2} - \frac{h^2 a b c_1 (N_n^*)^2 P_n^*}{(P_n^* + b N_n^*)^3} \\
&\qquad\qquad\qquad - \frac{h^2 a c_1 N_n^* (P_n^*)^2}{(P_n^* + b N_n^*)^3} - 1 < 0 \\
&- \frac{h r_2 P_n^*}{K_2} - \frac{h r_1 N_n^*}{K_1} + \frac{h c_1 N_n^* P_n^*}{(P_n^* + b N_n^*)^2} + \frac{h a b N_n^* P_n^*}{(P_n^* + b N_n^*)^2} + \frac{h^2 r_1 r_2 N_n^* P_n^*}{K_1 K_2} \\
&\qquad\qquad\qquad - \frac{h^2 c_1 r_1 (N_n^*)^2 P_n^*}{K_1 (P_n^* + b N_n^*)^2} - \frac{h^2 a b r_2 N_n^* (P_n^*)^2}{K_2 (P_n^* + b N_n^*)^2} + \frac{h^2 a c_1 N_n^* P_n^*}{(P_n^* + b N_n^*)^2} \\
&\qquad\qquad\qquad - \frac{h^2 a b c_1 (N_n^*)^2 P_n^*}{(P_n^* + b N_n^*)^3} - \frac{h^2 a c_1 N_n^* (P_n^*)^2}{(P_n^* + b N_n^*)^3} < 0
\end{aligned}$$

$$h \left[h \left(N_n^* P_n^* \left(\frac{r_1 r_2}{K_1 K_2} - \frac{(c_1 r_1 K_2 N_n^* + a b r_2 K_1 P_n^*)}{K_1 K_2 (P_n^* + b N_n^*)^2} \right) \right) + \left(\frac{N_n^* P_n^* (a b + c_1)}{(P_n^* + b N_n^*)^2} - \frac{r_2 P_n^*}{K_2} - \frac{r_1 N_n^*}{K_1} \right) \right] < 0.$$

Karena $h > 0$, maka haruslah

$$h \left(N_n^* P_n^* \left(\frac{r_1 r_2}{K_1 K_2} - \frac{(c_1 r_1 K_2 N_n^* + a b r_2 K_1 P_n^*)}{K_1 K_2 (P_n^* + b N_n^*)^2} \right) \right) + \left(\frac{N_n^* P_n^* (a b + c_1)}{(P_n^* + b N_n^*)^2} - \frac{r_2 P_n^*}{K_2} - \frac{r_1 N_n^*}{K_1} \right) < 0.$$

$$h < \frac{\frac{r_2 P_n^*}{K_2} + \frac{r_1 N_n^*}{K_1} - \frac{N_n^* P_n^* (ab + c_1)}{(P_n^* + bN_n^*)^2}}{N_n^* P_n^* \left(\frac{r_1 r_2}{K_1 K_2} - \frac{(c_1 r_1 K_2 N_n^* + abr_2 K_1 P_n^*)}{K_1 K_2 (P_n^* + bN_n^*)^2} \right)} = h^*$$

dengan demikian kondisi $q < 1$ akan terpenuhi jika $h < h^*$.

3. Kondisi $F(-1) = 1 + p + q > 0$

$$\begin{aligned} 1 + p + q &= 1 + 2 - \frac{hr_1 N_n^*}{K_1} + \frac{habN_n^* P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} - \frac{hr_2 P_n^*}{K_2} - \frac{hc_1 N_n^* P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} \\ &+ 1 - \frac{hr_2 P_n^*}{K_2} - \frac{hr_1 N_n^*}{K_1} + \frac{h^2 r_1 r_2 N_n^* P_n^*}{K_1 K_2} + \frac{hc_1 N_n^* P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} \\ &- \frac{h^2 c_1 r_1 (N_n^*)^2 P_n^*}{K_1 (P_n^* + bN_n^*)^2} + \frac{habN_n^* P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} - \frac{h^2 abr_2 N_n^* (P_n^*)^2}{K_2 (P_n^* + bN_n^*)^2} \\ &+ \frac{h^2 ac_1 N_n^* P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} - \frac{h^2 abc_1 (N_n^*)^2 P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^3} - \frac{h^2 ac_1 N_n^* (P_n^*)^2}{(P_n^* + bN_n^*)^3} \\ &= 4 - \frac{2hr_1 N_n^*}{K_1} - \frac{2hr_2 P_n^*}{K_2} + \frac{2habN_n^* P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} \\ &+ \frac{h^2 r_1 r_2 N_n^* P_n^*}{K_1 K_2} - \frac{h^2 c_1 r_1 (N_n^*)^2 P_n^*}{K_1 (P_n^* + bN_n^*)^2} - \frac{h^2 abr_2 N_n^* (P_n^*)^2}{K_2 (P_n^* + bN_n^*)^2} \\ &+ \frac{h^2 ac_1 N_n^* P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} - \frac{h^2 abc_1 (N_n^*)^2 P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^3} - \frac{h^2 ac_1 N_n^* (P_n^*)^2}{(P_n^* + bN_n^*)^3} \\ &= 4 - 2h \left(\frac{r_1 N_n^*}{K_1} + \frac{r_2 P_n^*}{K_2} - \frac{abN_n^* P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} \right) \\ &+ h^2 N_n^* P_n^* \left(\frac{r_1 r_2}{K_1 K_2} - \frac{c_1 r_1 N_n^*}{K_1 (P_n^* + bN_n^*)^2} - \frac{abr_2 P_n^*}{K_2 (P_n^* + bN_n^*)^2} \right. \\ &\left. + \frac{ac_1}{(P_n^* + bN_n^*)^2} - \frac{ac_1}{(P_n^* + bN_n^*)^3} (P_n^* + bN_n^*) \right) \\ &= 4 - 2h \left(\frac{r_1 N_n^*}{K_1} + \frac{r_2 P_n^*}{K_2} - \frac{abN_n^* P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} \right) \\ &+ h^2 N_n^* P_n^* \left(\frac{r_1 r_2}{K_1 K_2} - \frac{c_1 r_1 N_n^*}{K_1 (P_n^* + bN_n^*)^2} - \frac{abr_2 P_n^*}{K_2 (P_n^* + bN_n^*)^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{ac_1}{(P_n^* + bN_n^*)^2} - \frac{ac_1}{(P_n^* + bN_n^*)^2} \\
& = 4 - 2h \left(\frac{r_1 N_n^*}{K_1} + \frac{r_2 P_n^*}{K_2} - \frac{abN_n^* P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} \right) \\
& \quad + h^2 N_n^* P_n^* \left(\frac{r_1 r_2}{K_1 K_2} - \frac{(c_1 r_1 K_2 N_n^* + abr_2 K_1 P_n^*)}{K_1 K_2 (P_n^* + bN_n^*)^2} \right).
\end{aligned}$$

Agar $1 + p + q > 0$ haruslah

$$4 - 2h \left(\frac{r_1 N_n^*}{K_1} + \frac{r_2 P_n^*}{K_2} - \frac{abN_n^* P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} \right) + h^2 N_n^* P_n^* \left(\frac{r_1 r_2}{K_1 K_2} - \frac{(c_1 r_1 K_2 N_n^* + abr_2 K_1 P_n^*)}{K_1 K_2 (P_n^* + bN_n^*)^2} \right) > 0$$

yang ekuivalen dengan

$$h^2 N_n^* P_n^* \left(\frac{r_1 r_2}{K_1 K_2} - \frac{(c_1 r_1 K_2 N_n^* + abr_2 K_1 P_n^*)}{K_1 K_2 (P_n^* + bN_n^*)^2} \right) + h \left(-2 \left(\frac{r_1 N_n^*}{K_1} + \frac{r_2 P_n^*}{K_2} - \frac{N_n^* P_n^* (ab + c_1)}{(P_n^* + bN_n^*)^2} \right) \right) + 4 > 0.$$

Misalkan bahwa:

$$R = N_n^* P_n^* \left(\frac{r_1 r_2}{K_1 K_2} - \frac{(c_1 r_1 K_2 N_n^* + abr_2 K_1 P_n^*)}{K_1 K_2 (P_n^* + bN_n^*)^2} \right)$$

$$S = -2 \left(\frac{r_1 N_n^*}{K_1} + \frac{r_2 P_n^*}{K_2} - \frac{abN_n^* P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} \right)$$

$$T = 4.$$

dengan demikian didapatkan persamaan kuadrat sebagai berikut:

$$l(h) = Rh^2 + Sh + T,$$

dan persamaan $l(h) = 0$ terpenuhi oleh

$$h_{3,4} = -\frac{S \pm \sqrt{S^2 - 4RT}}{2R}.$$

Selanjutnya analisis kasus, jika $S^2 - 4RT < 0$, maka diperoleh $\frac{S^2}{4T} < R$

$$\frac{\left(-2 \left(\frac{r_1 N_n^*}{K_1} + \frac{r_2 P_n^*}{K_2} - \frac{abN_n^* P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2} \right) \right)^2}{16} < N_n^* P_n^* \left(\frac{r_1 r_2}{K_1 K_2} - \frac{(c_1 r_1 K_2 N_n^* + abr_2 K_1 P_n^*)}{K_1 K_2 (P_n^* + bN_n^*)^2} \right)$$

$$\frac{\left(\frac{r_1 N_n^*}{K_1} + \frac{r_2 P_n^*}{K_2} - \frac{abN_n^* P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2}\right)^2}{4} < N_n^* P_n^* \left(\frac{r_1 r_2}{K_1 K_2} - \frac{(c_1 r_1 K_2 N_n^* + abr_2 K_1 P_n^*)}{K_1 K_2 (P_n^* + bN_n^*)^2}\right).$$

Jika

$$F_0 = \frac{1}{4} \left(\frac{r_1 N_n^*}{K_1} + \frac{r_2 P_n^*}{K_2} - \frac{abN_n^* P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2}\right)^2$$

dan

$$F^* = N_n^* P_n^* \left(\frac{r_1 r_2}{K_1 K_2} - \frac{(c_1 r_1 K_2 N_n^* + abr_2 K_1 P_n^*)}{K_1 K_2 (P_n^* + bN_n^*)^2}\right),$$

maka $F_0 < F^*$.

Jika $S^2 - 4RT = 0$, maka diperoleh:

$$h^* = \frac{-S}{2R}$$

$$\begin{aligned} h^* &= \frac{2 \left(\frac{r_1 N_n^*}{K_1} + \frac{r_2 P_n^*}{K_2} - \frac{abN_n^* P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2}\right)}{2N_n^* P_n^* \left(\frac{r_1 r_2}{K_1 K_2} - \frac{(c_1 r_1 K_2 N_n^* + abr_2 K_1 P_n^*)}{K_1 K_2 (P_n^* + bN_n^*)^2}\right)} \\ &= \frac{\frac{r_1 N_n^*}{K_1} + \frac{r_2 P_n^*}{K_2} - \frac{abN_n^* P_n^*}{(P_n^* + bN_n^*)^2}}{N_n^* P_n^* \left(\frac{r_1 r_2}{K_1 K_2} - \frac{(c_1 r_1 K_2 N_n^* + abr_2 K_1 P_n^*)}{K_1 K_2 (P_n^* + bN_n^*)^2}\right)}. \end{aligned}$$

Jika $S^2 - 4RT > 0$ maka diperoleh nilai sebagai berikut:

$$h_3 = -\frac{S}{2R} - \frac{\sqrt{S^2 - 4RT}}{2R} = h^* - \frac{\sqrt{S^2 - 4RT}}{2R}$$

$$h_4 = -\frac{S}{2R} + \frac{\sqrt{S^2 - 4RT}}{2R} = h^* + \frac{\sqrt{S^2 - 4RT}}{2R}.$$

Dengan demikian jelas bahwa nilai $h_3 < h^*$ dan $h_4 > h^*$. Karena nilai $S^2 - 4RT > 0$ maka dapat disimpulkan bahwa $0 < h < h_3 < h^*$ atau $h > h_4$. Selanjutnya dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan interior akan bersifat stabil jika

$$\frac{r_1 r_2}{K_1 K_2} - \frac{(c_1 r_1 K_2 N_n^* + a b r_2 K_1 P_n^*)}{K_1 K_2 (P_n^* + b N_n^*)^2} + \frac{2 c_1}{h (P_n^* + b N_n^*)^2} > 0$$

serta memenuhi kondisi berikut $0 < h < h^*$ dan $F_0 > F^*$ atau $0 < h < h_3$ dan $F_0 < F^*$.

3.5 Hasil Analisis Kestabilan pada Titik Kesetimbangan

Berdasarkan analisis kestabilan pada titik kesetimbangan yang telah dilakukan pada subbab sebelumnya, sehingga diperoleh hasil analisis pada Tabel 3.1 sebagai berikut:

Tabel 3.1 Titik Kesetimbangan dan Topologinya

Titik Kesetimbangan	h	λ	Topologi	Syarat
$E_0 = (0,0)$	-	-	Bukan titik kesetimbangan	Tidak ada
$E_1 = \left(0, K_2 \left(1 - \frac{c_2}{r_2}\right)\right)$	$h_1 < \frac{2}{a - r_1}$ atau $h_2 < \frac{2}{r_2 - c_2}$	$\lambda_1 < 1$	Stabil	$a > r_1$ $r_2 > c_2$ $h < \min\{h_1, h_2\}$
	$h_1 < \frac{2}{a - r_1}$ atau $h_2 < \frac{2}{r_2 - c_2}$	$\lambda_1 < 1$	Tak stabil	$a > r_1$ $r_2 > c_2$ $h > \min\{h_1, h_2\}$
$E_2 = (K_1, 0)$	$h > 0$	$\lambda_2 < 1$ $\lambda_2 > 1$	Tak stabil	Tanpa syarat apapun
$E_3 = (N^*, P^*)$	$h > h^*$	-	Tak stabil	$\frac{r_1 r_2}{K_1 K_2} - \frac{(c_1 r_1 K_2 N_n^* + a b r_2 K_1 P_n^*)}{K_1 K_2 (P_n^* + b N_n^*)^2} + \frac{2 c_1}{h (P_n^* + b N_n^*)^2} > 0$

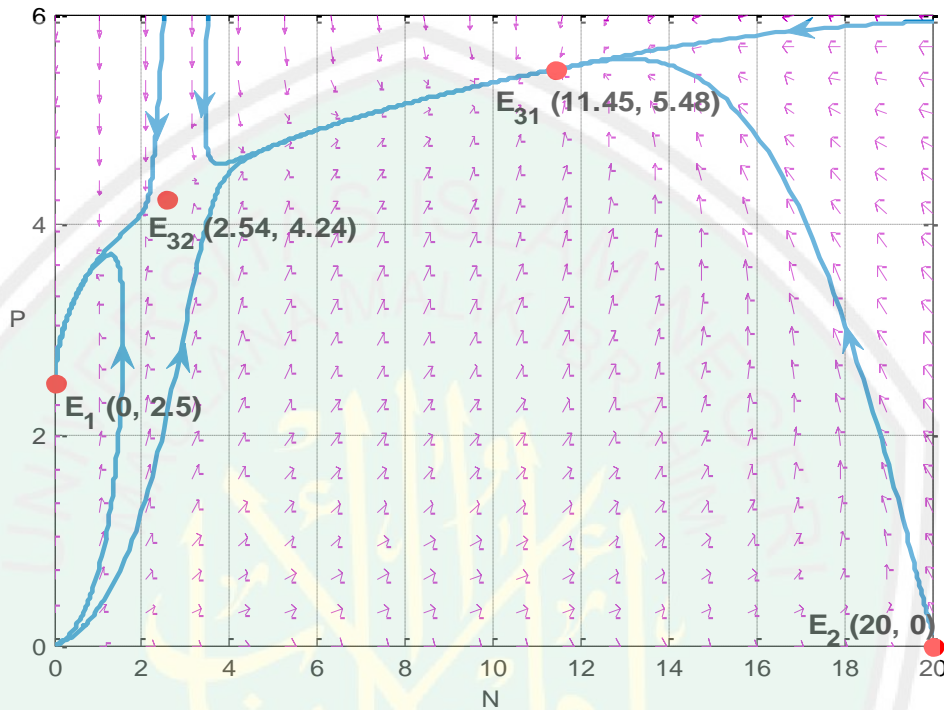
$h < h^*$	-	Stabil	$\frac{r_1 r_2}{K_1 K_2} - \frac{(c_1 r_1 K_2 N_n^* + a b r_2 K_1 P_n^*)}{K_1 K_2 (P_n^* + b N_n^*)^2} + \frac{2c_1}{h(P_n^* + b N_n^*)^2} > 0$ <p style="text-align: center;">dan</p> $F_0 > F^*$
$h = h^*$	-	Tak stabil	$\frac{r_1 r_2}{K_1 K_2} - \frac{(c_1 r_1 K_2 N_n^* + a b r_2 K_1 P_n^*)}{K_1 K_2 (P_n^* + b N_n^*)^2} + \frac{2c_1}{h(P_n^* + b N_n^*)^2} > 0$
$h < h_3$	-	Stabil	$\frac{r_1 r_2}{K_1 K_2} - \frac{(c_1 r_1 K_2 N_n^* + a b r_2 K_1 P_n^*)}{K_1 K_2 (P_n^* + b N_n^*)^2} + \frac{2c_1}{h(P_n^* + b N_n^*)^2} > 0$ <p style="text-align: center;">dan</p> $F_0 < F^*$
$h > h_4$	-	Tak stabil	$\frac{r_1 r_2}{K_1 K_2} - \frac{(c_1 r_1 K_2 N_n^* + a b r_2 K_1 P_n^*)}{K_1 K_2 (P_n^* + b N_n^*)^2} + \frac{2c_1}{h(P_n^* + b N_n^*)^2} > 0$ <p style="text-align: center;">dan</p> $F_0 < F^*$

3.6 Simulasi Numerik

Bagian ini akan disimulasikan mengenai eksistensi dan kestabilan titik kesetimbangan sistem persamaan (3.1) dengan parameter yang digunakan mengacu pada jurnal dari Rayungsari, dkk. (2014) dan prosesnya simulasi numerik ini dilakukan dengan bantuan *software* Matlab.

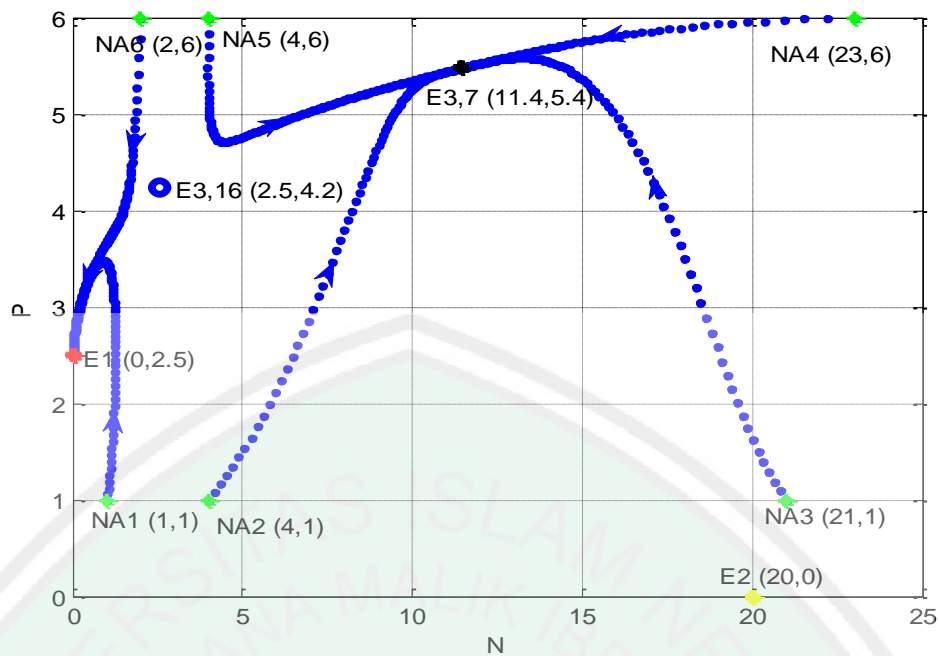
3.6.1 Simulasi I

Untuk memberikan ilustrasi kestabilan kedua titik kesetimbangan tersebut, diambil parameter $r_1 = r_2 = c_1 = 0,8$, $K_1 = 20$, $K_2 = 5$, $c_2 = 0,4$, $a = b = 1,2$ dengan hasil simulasi sebagai berikut:



Gambar 3.1 Simulasi I Sistem Kontinu (Rayungsari, dkk. 2014)

Sedangkan secara diskret simulasinya dapat dipaparkan sebagai berikut dengan parameter yang sama dengan kontinu.

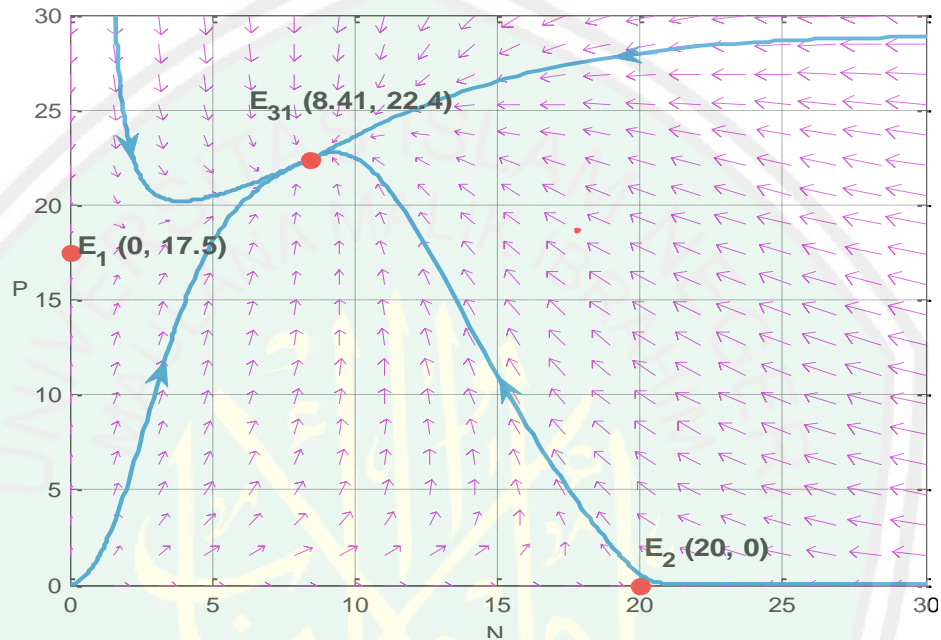


Gambar 3.2 Simulasi I Sistem Diskret

Dari gambar kontinu dan diskret terlihat bahwa simulasi keduanya menunjukkan bahwa titik kesetimbangan $E_1 = (0.2, 5)$ eksis dan bersifat stabil, hal ini dapat diperlihatkan dengan arah solusi dari simulasi menuju titik kesetimbangan E_1 . Adapun titik kesetimbangan kepunahan predator $E_2 = (20, 0)$ eksis dan bersifat tidak stabil tanpa syarat apapun, hal ini didukung oleh simulasi yang dimana setiap pemberian nilai awal berapapun akan selalu menjauhi titik kesetimbangan E_2 . Selain itu, dari hasil simulasi terlihat bahwa titik kesetimbangan interiornya eksis kedua-duanya yaitu $E_{3,7} = (11, 4.5, 4)$ dan $E_{3,16} = (2, 5, 4, 2)$, dimana sifat kestabilan titik interior $E_{3,7}$ bersifat stabil dan untuk titik interior $E_{3,16}$ bersifat tidak stabil, hal ini dapat dilihat dari perilaku solusi hasil simulasi dimana solusi menuju ke titik $E_{3,7}$ dan menjauhi titik $E_{3,16}$. Dengan demikian diperoleh kesimpulan bahwa sistem yang dianalisis bersifat konsisten dengan parameter yang telah digunakan.

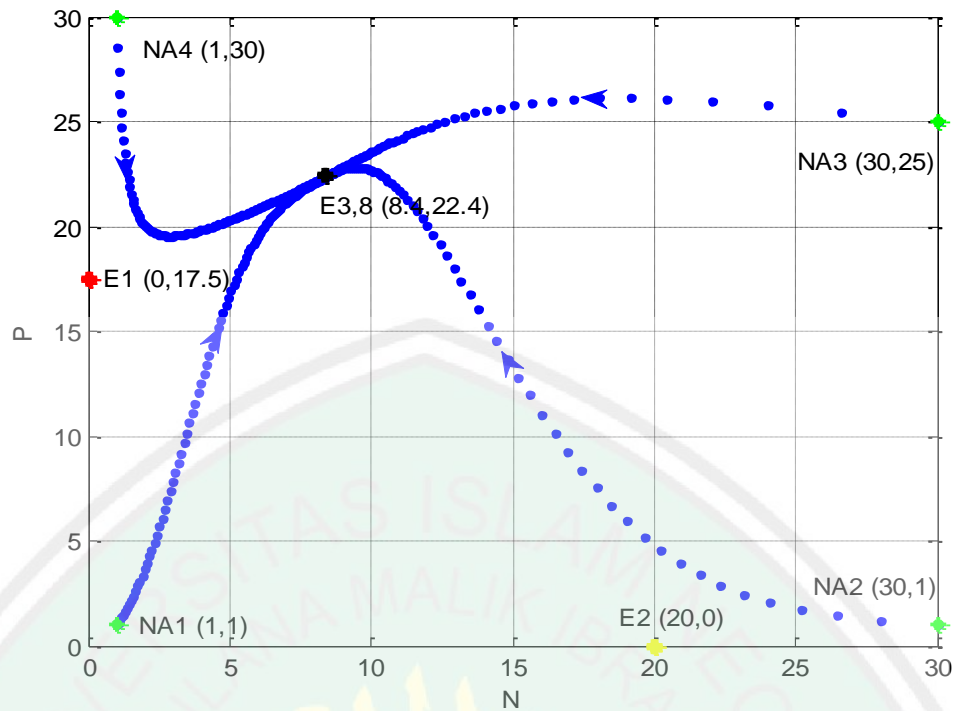
3.6.2 Simulasi II

Simulasi numerik ke dua dilakukan dengan mengambil nilai-nilai parameter sebagai berikut: $r_1 = 1,2$, $r_2 = a = 0,8$, $K_1 = K_2 = 20$, $c_1 = 0,6$, $c_2 = 0,1$, dan $b = 0,4$ (Rayungsari, dkk. 2014). Berdasarkan nilai-nilai parameter tersebut diperoleh hasil simulasi berikut:



Gambar 3.3 Simulasi II Sistem Kontinu (Rayungsari, dkk. 2014)

Sedangkan hasil simulasi sistem diskretnya dapat diperlihatkan pada gambar berikut:

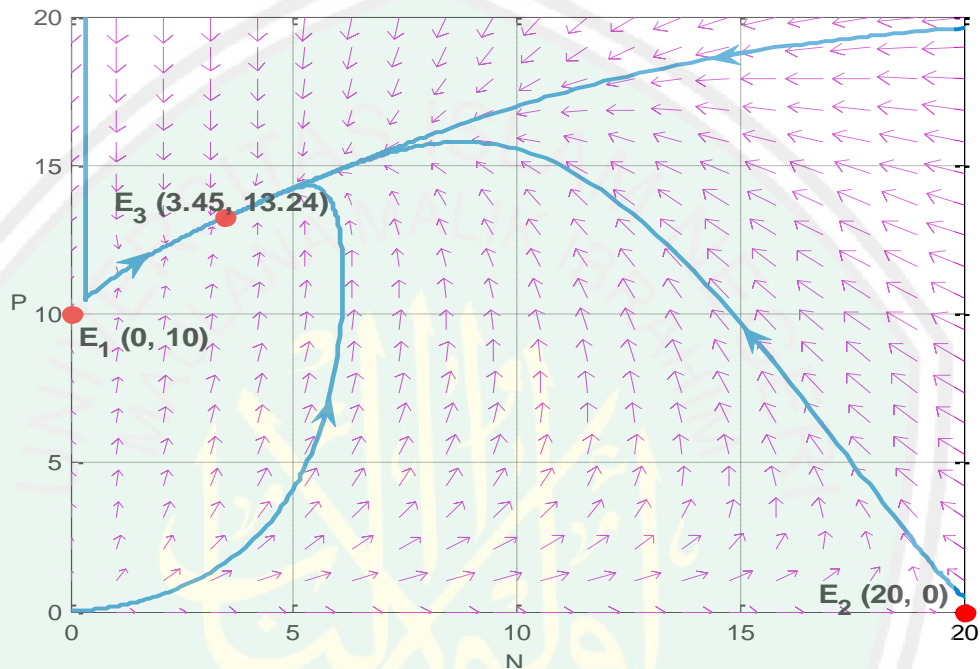


Gambar 3.4 Simulasi II Sistem Diskret

Dengan parameter yang sama pada simulasi kedua ini diperoleh hasil perilaku solusi yang sama yaitu titik kesetimbangan kepunahan prey $E_1 = (0,17,5)$ eksis dan bersifat tidak stabil karena syarat eksistensi dari E_1 tidak terpenuhi yaitu $r_1 < a$. Adapun titik kesetimbangan $E_2 = (20,0)$ eksis dan tidak stabil, hal ini sama dengan hasil simulasi pertama yang menyatakan bahwa E_2 bersifat tidak stabil. Dari simulasi kontinu maupun diskret menunjukkan bahwa titik interior yang eksis hanya satu yaitu $E_{3,8} = (8,4,22,4)$ dan bersifat stabil, sedangkan titik interior satunya tidak eksis karena bernilai negatif yaitu $E_{3,16} = (0,31, -0,38)$.

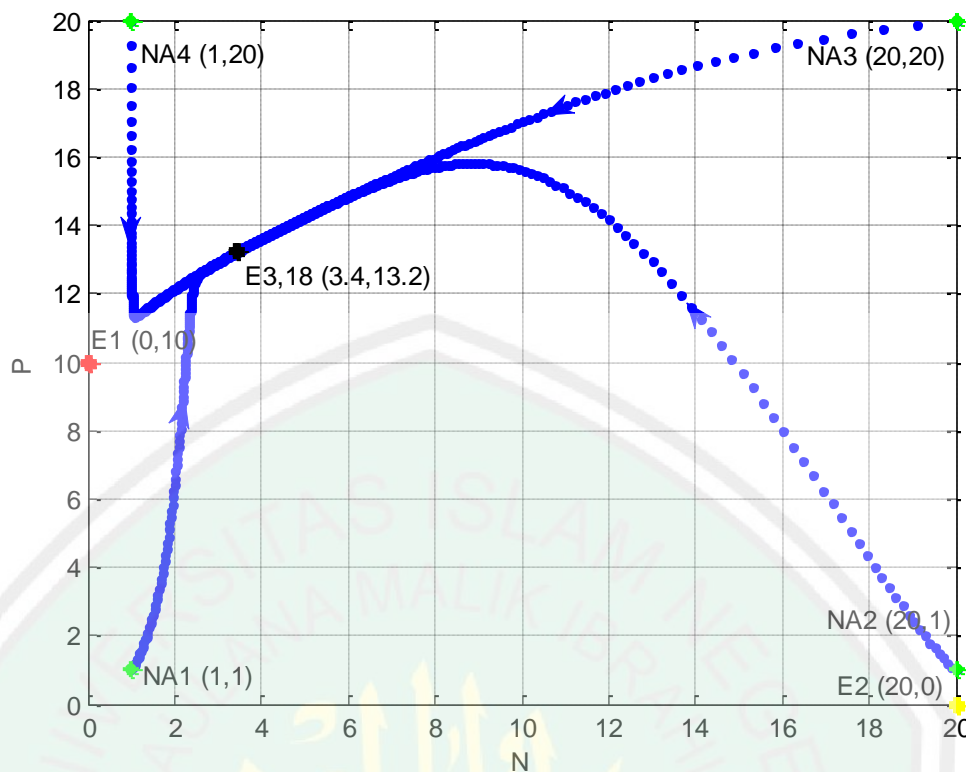
3.6.3 Simulasi III

Pada simulasi ke tiga, digunakan nilai-nilai parameter $r_1 = r_2 = a = b = 0,8$, $K_1 = K_2 = 20$, $c_1 = 0,6$, dan $c_2 = 0,4$ (Rayungsari, dkk. 2014). Dari hasil simulasi diperoleh bahwa $E_1 = (0,10)$ eksis dan terlihat tidak stabil dan E_3 eksis, yaitu $(3,4,13,2)$ bersifat stabil.



Gambar 3.5 Simulasi III Sistem kontinu (Rayungsari, dkk. 2014)

Hasil simulasi sistem diskret menunjukkan hasil yang sama dengan simulasi kontinu yaitu titik $E_1 = (0,10)$ eksis dan bersifat tidak stabil, serta $E_{3,18} = (3,4,13,2)$ eksis dan yaitu bersifat stabil, hal ini dapat diperjelas dengan gambar simulasi berikut:



Gambar 3.6 Simulasi III Sistem Diskret

Dengan demikian terlihat bahwa secara simulasi baik sistem yang kontinu maupun yang diskret menunjukkan hasil yang sama baik dari kondisi titik kesetimbangannya maupun dari sifat kestabilan masing-masing titik tetapnya. Dalam hal ini menyatakan bahwa sistem yang dianalisis disini bersifat konsisten secara dinamik.

Dari hasil analisis tersebut, dapat disimpulkan bahwa dari model dinamik diskret pada permasalahan model *predator-prey* dengan fungsi respon *ratio dependent* dan pemanenan pada *predator* memiliki beberapa titik kesetimbangan dan sifat kestabilan. Akan tetapi, titik kesetimbangan tersebut ada yang tidak stabil, sehingga untuk mendapatkan titik kesetimbangan yang eksis dan stabil maka harus diberikan syarat-syarat tertentu. Dikarenakan apabila dalam suatu sistem tidak terjadi kestabilan maka kesetimbangan tidak akan terwujud. Misalnya

dalam sistem ekologi yang mana di dalamnya terdapat populasi *predator* dan *prey* yang saling berinteraksi sehingga harus memperhatikan tingkat pertumbuhan, tingkat kematian, dan lingkungan yang mendukung dari kedua populasi tersebut, sehingga terjadilah kesetimbangan pada sistem tersebut.

Maka sebagai manusia yang menjadi pemimpin (*khalifah*) di muka bumi, sudah seharusnya untuk menjaga keseimbangan sistem alam yang ada agar menjadi stabil. Sebagaimana dijelaskan Allah Swt. dalam al-Quran surat al-Mulk ayat 3, yaitu:

الَّذِي خَلَقَ سَبْعَ سَمَوَاتٍ طِبَاقًا ۗ مَا تَرَىٰ فِي خَلْقِ الرَّحْمَنِ مِن تَفَوتٍ ۗ
فَارْجِعِ الْبَصَرَ هَلْ تَرَىٰ مِن فُطُورٍ ۗ

“Allah Swt. yang telah menciptakan tujuh langit berlapis-lapis. Kamu sekali-kali tidak melihat pada ciptaan Tuhan yang Maha Pemurah sesuatu yang tidak seimbang. Maka lihatlah berulang-ulang, adakah kamu lihat sesuatu yang tidak seimbang?” (QS. Al-Mulk/67:3).

Sesungguhnya Allah Swt. menciptakan segala sesuatu tersebut tidaklah lepas dari pada hukum-hukum serta peraturan-peraturan yang telah ditetapkan, sehingga semuanya menjadi begitu indah dan rapi. Bagaimana susahnya penduduk sebuah planet jika tidak terdapat keseimbangan antar planet, maka terjadi tabrakan antar planet. Diciptakannya berbagai makhluk hidup dengan hubungan timbal balik dari satu dengan yang lain, seperti halnya manusia, binatang, dan tumbuhan. Akan tetapi keserakahan manusia yang merusak keseimbangan pada ekosistem yang ada di muka bumi ini. Kerusakan tersebut menyebabkan kematian seluruh makhluk hidup dan sangat merugikan untuk semua makhluk hidup. Sehingga untuk menghindari kerusakan-kerusakan alam,

maka Allah Swt. memerintahkan manusia sebagai khalifah dan makhluk yang dikaruniai akal untuk menjaganya. Sebagaimana firman Allah Swt. berikut ini dalam al-Quran surat al-Baqarah ayat 30, yang berbunyi,

وَإِذْ قَالَ رَبُّكَ لِلْمَلَائِكَةِ إِنِّي جَاعِلٌ فِي الْأَرْضِ خَلِيفَةً ۗ قَالُوا أَتَجْعَلُ فِيهَا
 مَنْ يُفْسِدُ فِيهَا وَيَسْفِكُ الدِّمَاءَ وَنَحْنُ نُسَبِّحُ بِحَمْدِكَ وَنُقَدِّسُ لَكَ ۗ قَالَ إِنِّي
 أَعْلَمُ مَا لَا تَعْلَمُونَ ﴿٣٠﴾

“Ingatlah ketika Tuhanmu berfirman kepada para Malaikat: “Sesungguhnya Aku hendak menjadikan seorang khalifah di muka bumi.” mereka berkata: “Mengapa Engkau hendak menjadikan (khalifah) di bumi itu orang yang akan membuat kerusakan padanya dan menumpahkan darah, padahal kami senantiasa bertasbih dengan memuji Engkau dan mensucikan Engkau?” Tuhan berfirman: “Sesungguhnya Aku mengetahui apa yang tidak kamu ketahui” (QS. Al-Baqarah/2:30).

Pada ayat tersebut, Allah Swt. menjelaskan bahwasannya manusia diciptakan dengan dikaruniai kesempurnaan akal, dengan demikian Allah Swt. menjadikan manusia sebagai pemimpin (*khalifah*) di muka bumi ini. Manusia merupakan pemimpin bagi makhluk yang lainnya seperti halnya hewan dan tumbuhan. Adapun tugas daripada seorang pemimpin adalah untuk memberikan kemakmuran kepada rakyatnya yang dalam hal ini yaitu makhluk hidup yang lain dengan cara menjaga dan melestarikan keseimbangan ekosistem. Cara melestarikan alam dapat dilakukan dengan hal-hal yang sederhana, misalnya menanam pohon yang fungsinya untuk menetralsir pencemaran udara sehingga udara tidak kotor.

Berdasarkan paparan beberapa ayat tersebut dapat diambil kesimpulan bahwasanya Allah Swt. menciptakan segala sesuatu dengan seimbang, sama halnya

dengan permasalahan pada model *predator-prey*, jika terjadi kepunahan pada salah satunya maka akan mempengaruhi populasi yang lain. Oleh karenanya, manusia sebagai pemimpin (*khalifah*) harus selalu konsisten (*istiqamah*) dalam menjalankan perintah Allah Swt. yaitu, untuk menjaga keseimbangan dan kestabilan ekosistem di alam ini. Adapun perintah atau anjuran tentang konsisten (*istiqamah*) telah dijelaskan Allah Swt. dalam al-Quran surat al-Ahqaf ayat 13-14, yaitu:

إِنَّ الَّذِينَ قَالُوا رَبُّنَا اللَّهُ ثُمَّ اسْتَقَامُوا فَلَا خَوْفٌ عَلَيْهِمْ وَلَا هُمْ
يَحْزَنُونَ ﴿١٣﴾ أُولَئِكَ أَصْحَابُ الْجَنَّةِ خَالِدِينَ فِيهَا جَزَاءً بِمَا كَانُوا
يَعْمَلُونَ ﴿١٤﴾

“*Sesungguhnya orang-orang yang mengatakan: “Rabb kami ialah Allah”, kemudian mereka tetap istiqamah maka tidak ada kekhawatiran terhadap mereka dan mereka tiada (pula) berduka cita. Mereka itulah penghuni-penghuni surga, mereka kekal di dalamnya; sebagai balasan atas apa yang telah mereka kerjakan*” (QS. Al Ahqaf/46: 13-14).

Pada ayat tersebut Allah Swt. menjelaskan bahwa, seseorang yang telah mengatakan “*Rabb kami adalah Allah*” kemudian orang tersebut tetap konsisten dengan perkataannya, maka tidak akan ada kekhawatiran bagi dirinya setelah mengucapkan perkataan tersebut serta tidak pula berduka cita. Kenapa demikian, sungguh berat bagi seseorang untuk konsisten (*istiqamah*) berada pada ketaatan kepada Allah, karena banyak sekali godaan yang akan menggoyahkan keyakinan bagi seseorang agar keluar dari jalan ketaatan, sehingga bagi seseorang yang tetap konsisten pada jalan tersebut maka balasannya adalah surga.

Selain untuk selalu taat kepada Allah Swt. seseorang yang ditugasi oleh Allah sebagai pemimpin (*khalifah*). Adapun tugas menjadi *khalifah* diantaranya

yaitu untuk menjaga keseimbangan dan kestabilan alam ini. Akan tetapi tidaklah mudah untuk menjalankan perintah tersebut, akan tetapi apabila *khalifah* ini saling bekerja sama untuk menjaganya maka permasalahan tersebut akan menjadi ringan. Dikarenakan Allah Swt. dalam al-Quran surat al-Baqarah ayat 286, yang di dalamnya menjelaskan bahwasanya Allah Swt. tidak akan membebani seseorang melainkan sesuai kesanggupannya atau kemampuannya, yaitu:

لَا يُكَلِّفُ اللَّهُ نَفْسًا إِلَّا وُسْعَهَا لَهَا مَا كَسَبَتْ وَعَلَيْهَا مَا اكْتَسَبَتْ رَبَّنَا لَا
تُؤَاخِذْنَا إِنْ نَسِينَا أَوْ أَخْطَأْنَا رَبَّنَا وَلَا تَحْمِلْ عَلَيْنَا إِيصْرًا كَمَا حَمَلْتَهُ
عَلَى الَّذِينَ مِنْ قَبْلِنَا رَبَّنَا وَلَا تَحْمِلْنَا مَا لَا طَاقَةَ لَنَا بِهِ ۗ وَاعْفُ عَنَّا
وَاعْفِرْ لَنَا وَارْحَمْنَا ۗ أَنْتَ مَوْلَانَا فَانصُرْنَا عَلَى الْقَوْمِ الْكَافِرِينَ



"Allah Swt. tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya. ia mendapat pahala (dari kebajikan) yang diusahakannya dan ia mendapat siksa (dari kejahatan) yang dikerjakannya. (mereka berdoa): "Ya Tuhan kami, janganlah Engkau hukum kami jika kami lupa atau kami bersalah. Ya Tuhan kami, janganlah Engkau bebaskan kepada kami beban yang berat sebagaimana Engkau bebaskan kepada orang-orang sebelum kami. Ya Tuhan kami, janganlah Engkau pikulkan kepada kami apa yang tak sanggup kami memikulnya. beri ma'aflah kami, ampunilah kami, dan rahmatilah kami. Engkaulah penolong kami, Maka tolonglah kami terhadap kaum yang kafir" (QS. Al-Baqarah/2:286).

Ayat tersebut menjelaskan, bahwasanya Allah Swt. tidak akan membebani hamba-Nya melaikan sesuai dengan kadar kemampuannya. Islam memberikan pandangan yang luas atas setiap permasalahan yang di hadapi seseorang yaitu dengan berkeyakinan bahwa setiap permasalahan pasti ada penyelesaiannya. Dengan demikian, apabila seseorang mendapatkan permasalahan dan solusinya

tidak segera datang, diharuskan untuk selalu konsisten (*istiqamah*) di jalan Allah Swt. agar tidak putus dari rahmat-Nya. Karena dengan tetap konsiten di jalan Allah Swt. maka Allah Swt. akan memberikan kemudahan dari jalan yang tak disangka.

Sehingga dengan melihat janji Allah Swt. yang demikian tersebut, diharapkan seorang hamba tetap *istiqamah* dalam ketaatan kepada-Nya, sehingga tidak ada alasan untuk tidak melakukan ibadah kepada-Nya. Yang demikian itu merupakan salah satu bentuk kasih sayang Allah Swt. kepada hambanya, dengan melihat seberapa taatnya seorang hamba atas perintah-Nya. Begitu pula dengan permasalahan yang ada pada matematika, kekonsistenan sangat penting sekali untuk membantu menyelesaikan suatu permasalahan. Diantara permasalahan yang ada pada matematika yaitu ketika ada model matematika yang ingin dicari titik kesetimbangan dan sifat kestabilannya dengan menggunakan metode diskret dan kontinu diharapkan hasil dari kedua metode tersebut tetap konsiten.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan yang terdapat pada bab sebelumnya, diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Penelitian ini menggunakan model diskret *predator prey* dengan fungsi respon *ratio dependent* dan pemanenan pada *predator* dengan diskretisasi menggunakan metode *Forward Euler*. Hasil analisis menunjukkan bahwa model *predator prey* dengan fungsi respon *ratio dependent* dan pemanenan pada *predator* secara diskret mempunyai tiga titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan kepunahan *prey* E_1 , titik kesetimbangan kepunahan *predator* E_2 , dan titik kesetimbangan interior E_3 . Titik kesetimbangan E_2 tidak pernah bersifat stabil, sedangkan sifat kestabilan titik kesetimbangan E_1 dan E_3 ditentukan oleh kondisi tertentu.
2. Titik kesetimbangan kepunahan *prey* E_1 pada model diskret bersifat konsisten dengan model kontinunya, begitu juga dengan titik kesetimbangan kepunahan *predator* E_2 . Sedangkan titik kesetimbangan interior diskret E_3 akan konsisten dengan model kontinu jika memenuhi beberapa kondisi tertentu. Sifat konsistensi kestabilan titik kesetimbangan diperlihatkan dengan simulasi numerik yang sesuai dengan hasil analisisnya.

4.2 Saran

Pada pengkajian selanjutnya dapat dilakukan analisis model *predator prey* dengan fungsi respon *ratio dependent* dan pemanenan pada *predator* ditambah dengan waktu tunda.



DAFTAR RUJUKAN

- Abdullah. 2003. *Tafsir Ibnu Katsir Jilid 4*. Bogor: Pustaka Imam asy-Syafi'i.
- Agiza, H.N., Elabbasy, E.M., EL-Metwally, H., dan Elsanady. A.A. 2009. Chaotic Dynamics of a Discrete Prey-Predator Model with Holling Type II. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 10 (1): 116-129.
- Alfiyah, S.N., Kusumawinahyu, W.M., dan Trisilowati. 2015. Dynamical Consistence of Euler Scheme for Leslie-Gower Predator Prey Model with Holling Type II Functional Response. *International Journal of Science and Technology*, 4 (9): 441-445.
- Arditi, R. dan Ginzburg, L.R. 1989. Coupling in Predator-prey Dynamics : Ratio dependence. *J. Theoret. Biol*, 139 (1989): 311-326.
- Boyce, W.E dan DiPrima, R.C. 2008. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Ninth Edition. New York: John Wiley & Sons.
- Clark, C.W. 1976. *The Optimal Management of Renewable Resources. Mathematical Bioeconomics*. New York: John Wiley.
- Dimitrov, B., Hayrapetyan, G., dan Stanchev, P. 2007. Aging and Longevity Control Of Biological Systems Via Drugs-A Reliability Model. *Reliability: Theory and Applications*, 2 (2): 10-33.
- Edwin, A. 2010. *Modeling and Analysis of a Two Prey- One Predator System with Harvesting, Holling Type II and Ratio-dependent Responses*. Disertation. Master of Science in Mathematics of Makerere University.
- Elaydi, S.N. 2005. *An Introduction to Difference Equations*. Third edition. New York: Springer Science.
- Freedman, M.H. 1980. Trophic Interactions of Prey-predator Systems. *Ecological Modeling*, 35 (1980):190-196.
- Holling, C.S. 1959. The Components of Predation as Revealed by a Study of Small Mammal Predation of the European Pine Sawfly. *Canadian Entomologist*, 91 (5): 234-261.
- Huang, K., Jiang, X., dan Zou, X. 2008. Dynamics in Numerics: on a Discrete Predator-Prey Model. *Differential Equations and Dynamical Systems*, 16 (1): 163-182.

- Kar, T.K. dan Chaudhuri, K.S. 2001. On Non-selective Harvesting of a Multispecies Fishery. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 33 (4): 543-556.
- Lotka, A.J. 1925. *Elements of Physical Biology*. Baltimore: Williams and Wilkins.
- Nagle, R.K. dan Saff, E.B. 1993. *Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems*. USA: Addison-Wesley Publishing Company.
- Naji, R.K. dan Lafta, A.H. 2013. On the Dynamics of Discrete-Time Prey-Predator System with Ratio-Dependent Functional Response. *Iraqi Journal of Science*, 4 (9): 441-445.
- Rayungsari, M., Kusumawinahyu, W.M., dan Marsudi. 2014. *Dynamical Analysis of Predator Prey Model with Ratio Dependent Functional Response and Predator Harvesting*. *Applied Mathematical Sciences*, 8 (29): 1401-1410.
- Selvam, A.G.M., Sathish, V., dan Pushparajan, D. 2014. Analysis of a Discrete Prey-Predator Model with Prey Harvesting. *International Journal of Mathematics and Computer Research*, 2 (7): 512-517.
- Volterra, V. 1927. Variations and Fluctuations in the Numbers of Coexisting Animal Species. *Lecture Notes in Biomathematics*, 22 (1): 65-273.
- Wu, R. dan Li, L. 2009. Permanence and Global Attractivity of Discrete Predator-Prey System with Hassel-Varley Type Functional Response. *Hindawi Publishing Corporation Discrete Dynamics in Nature and Society* 2009.
- Xiao, D. dan Ruan, S. 2001. Global Dynamics of a Ratio-dependent Predator-prey System. *J. Math. Biol*, 43 (2001): 268-290.
- Zhuang, K. dan Wen, Z. 2011. Dynamical Behaviors in a Discrete Predator-Prey Model with a Prey Refuge. *International Journal of Computational and Mathematical Sciences*, 5 (4): 195-197.

LAMPIRAN-LAMPIRAN

Lampiran I (a) : Program Dinamik Diskret untuk Simulasi I

```
clc;
clear all;
h=0.1;
t=0:h:200;
n=length(t);
% parameter untuk simulasi I
r1=0.8; r2=0.8; c1=0.8; K1=20; K2=5; c2=0.4; a=1.2; b=1.2;
% batas ukuran langkah untuk titik kesetimbangan E1
h1=2/(a-r1);
h2=2/(r2-c2);
% nilai eigen E1
z1=1+h*(r1-a)
z2=1+h*(c2-r2)
% Nilai awal
N(1)=20;
P(1)=20;
% Titik Kesetimbangan E1
P1=K2*(1-c2/r2)
% Titik kesetimbangan E2
N2=K1;
% titik kesetimbangan E3
A=(r1/K1)*(((r2*b)/K2)+((c1*r1)/(a*b*K1)));
B=(r1/K1)*((r2-c2)+(2*c1*(a-r1))/(a*b))-((r1*r2*b)/K2);
C=(a-r1)*((r2-c2)+(c1*(a-r1))/(a*b));
N3=(-B+sqrt(B^2-4*A*C))/(2*A)
P3=((r1*b*N3)*(1-(N3/K1)))/(a-r1*(1-N3/K1))
% Solusi sistem
for i= 1:n-1
N(i+1)=N(i)+h*r1*N(i)*(1-(N(i)/K1))-
((h*a*N(i)*P(i))/(P(i)+b*N(i)));
P(i+1)=P(i)+h*r2*P(i)*(1-
(P(i)/K2))+h*c1*N(i)*P(i)/(P(i)+b*N(i))-h*c2*P(i);
end ;
figure(1);
```

```
plot(N,P, '.',0,P1,'r*',N2,0,'y*',N3,P3,'k*',N(1),P(1),'b*', 'linewi  
dth',1.5);  
%plot(N,P, '.',0,P1,'r*',N2,0,'y*',N3,P3,'k*',N3min,P3min,'bo',N(1)  
,P(1),'b*', 'linewidth',1.5);  
xlabel('N');  
ylabel('P');  
hold on;  
grid on;
```



Lampiran I (b) : Program Dinamik Diskret untuk Simulasi II

```
clc;
clear all;
h=0.1;
t=0:h:200;
n=length(t);
% parameter untuk simulasi II
r1=1.2; r2=0.8; c1=0.6; K1=20; K2=20; c2=0.1; a=0.8; b=0.4;
% batas ukuran langkah untuk titik kesetimbangan E1
h1=2/(a-r1);
h2=2/(r2-c2);
% nilai eigen E1
z1=1+h*(r1-a)
z2=1+h*(c2-r2)
% Nilai awal
N(1)=20;
P(1)=20;
% Titik Kesetimbangan E1
P1=K2*(1-c2/r2)
% Titik kesetimbangan E2
N2=K1;
% titik kesetimbangan E3
A=(r1/K1)*(((r2*b)/K2)+((c1*r1)/(a*b*K1)));
B=(r1/K1)*((r2-c2)+(2*c1*(a-r1))/(a*b))-((r1*r2*b)/K2);
C=(a-r1)*((r2-c2)+(c1*(a-r1))/(a*b));
N3=(-B+sqrt(B^2-4*A*C))/(2*A)
P3=((r1*b*N3)*(1-(N3/K1)))/(a-r1*(1-N3/K1))
% Solusi sistem
for i= 1:n-1
N(i+1)=N(i)+h*r1*N(i)*(1-(N(i)/K1))-
((h*a*N(i)*P(i))/(P(i)+b*N(i)));
P(i+1)=P(i)+h*r2*P(i)*(1-
(P(i)/K2))+h*c1*N(i)*P(i)/(P(i)+b*N(i))-h*c2*P(i);
end ;
figure(1);
plot(N,P,'.',0,P1,'r*',N2,0,'y*',N3,P3,'k*',N(1),P(1),'b*','linewi
dth',1.5);
```

```
%plot(N,P,'.',0,P1,'r*',N2,0,'y*',N3,P3,'k*',N3min,P3min,'bo',N(1)
,P(1),'b*','linewidth',1.5);
xlabel('N');
ylabel('P');
hold on;
grid on;
```



Lampiran I (c) : Program Dinamik Diskret untuk Simulasi III

```
clc;
clear all;
h=0.1;
t=0:h:200;
n=length(t);
% Parameter untuk simulasi III
r1=1.8; r2=0.8; c1=0.6; K1=20; K2=20; c2=0.4; a=0.8; b=0.8;
%batas ukuran langkah untuk titik kesetimbangan E1
h1=2/(a-r1);
h2=2/(r2-c2);
% nilai eigen E1
z1=1+h*(r1-a)
z2=1+h*(c2-r2)
% Nilai awal
N(1)=20;
P(1)=20;
% Titik Kesetimbangan E1
P1=K2*(1-c2/r2)
% Titik kesetimbangan E2
N2=K1;
% titik kesetimbangan E3
A=(r1/K1)*(((r2*b)/K2)+((c1*r1)/(a*b*K1)));
B=(r1/K1)*((r2-c2)+(2*c1*(a-r1))/(a*b))-((r1*r2*b)/K2);
C=(a-r1)*((r2-c2)+(c1*(a-r1))/(a*b));
N3=(-B+sqrt(B^2-4*A*C))/(2*A)
P3=((r1*b*N3)*(1-(N3/K1)))/(a-r1*(1-N3/K1))
% Solusi sistem
for i= 1:n-1
N(i+1)=N(i)+h*r1*N(i)*(1-(N(i)/K1))-
((h*a*N(i)*P(i))/(P(i)+b*N(i)));
P(i+1)=P(i)+h*r2*P(i)*(1-
(P(i)/K2))+h*c1*N(i)*P(i)/(P(i)+b*N(i))-h*c2*P(i);
end ;
figure(1);
plot(N,P,'.',0,P1,'r*',N2,0,'y*',N3,P3,'k*',N(1),P(1),'b*','linewi
dth',1.5);
```

```
%plot(N,P,'.',0,P1,'r*',N2,0,'y*',N3,P3,'k*',N3min,P3min,'bo',N(1)
,P(1),'b*','linewidth',1.5);
xlabel('N');
ylabel('P');
hold on;
grid on;
```



Lampiran II (a) : Program Maple untuk Melihat Titik Tetap dengan Tanpa Parameter

```
> restart;  
> dN:=h*r1*N*(1-N/K1)-(h*a*N*P)/(P+b*N);  
> dP:=h*r2*P*(1-P/K2)+(h*c1*N*P)/(P+b*N)-(h*c2*P);  
> titiktetap:=solve({dN,dP},{N,P});  
>  
titiktetap1:=titiktetap[1];titiktetap2:=titiktetap[2];t  
itiktetap3:=titiktetap[3];
```



Lampiran II (b) : Program Maple untuk Melihat Titik Tetap pada Simulasi I

```
> restart;  
> r1:=0.8; r2:=0.8; c1:=0.8; K1:=20; K2:=5; c2:=0.4;  
a:=1.2; b:=1.2;  
> h:=0.1;  
> dN:=h*r1*N*(1-N/K1) - (h*a*N*P) / (P+b*N) ;  
> dP:=h*r2*P*(1-P/K2) + (h*c1*N*P) / (P+b*N) - (h*c2*P) ;  
> titiktetap:=solve({dN,dP},{N,P});  
>  
titiktetap1:=titiktetap[1];titiktetap2:=titiktetap[2];t  
itiktetap3:=titiktetap[3];titiktetap4:=titiktetap[4];
```



Lampiran II (c) : Program Maple untuk Melihat Titik Tetap pada Simulasi II

```
> restart;  
> r1:=1.2; r2:=0.8; c1:=0.6; K1:=20; K2:=20; c2:=0.1;  
a:=0.8; b:=0.4;  
> h:=0.1;  
> dN:=h*r1*N*(1-N/K1) - (h*a*N*P) / (P+b*N) ;  
> dP:=h*r2*P*(1-P/K2) + (h*c1*N*P) / (P+b*N) - (h*c2*P) ;  
> titiktetap:=solve({dN,dP},{N,P});  
>  
titiktetap1:=titiktetap[1];titiktetap2:=titiktetap[2];t  
itiktetap3:=titiktetap[3];titiktetap4:=titiktetap[4];
```



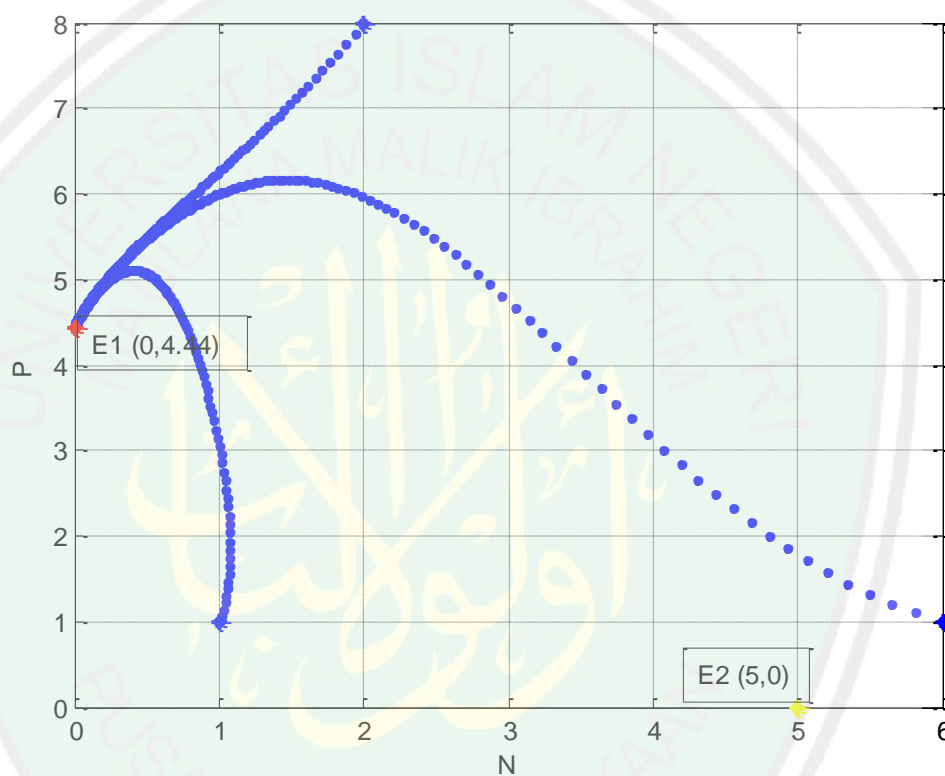
Lampiran II (d) : Program Maple untuk Melihat Titik Tetap pada Simulasi III

```
> restart;  
> r1:=1.8; r2:=0.8; c1:=0.6; K1:=20; K2:=20; c2:=0.4;  
a:=0.8; b:=0.8;  
> h:=0.1;  
> dN:=h*r1*N*(1-N/K1) - (h*a*N*P) / (P+b*N) ;  
> dP:=h*r2*P*(1-P/K2) + (h*c1*N*P) / (P+b*N) - (h*c2*P) ;  
> titiktetap:=solve({dN,dP},{N,P});  
>  
titiktetap1:=titiktetap[1];titiktetap2:=titiktetap[2];t  
itiktetap3:=titiktetap[3];titiktetap4:=titiktetap[4];
```



Lampiran III (a) : Simulasi Variasi Pertama dan Kesepuluh

Untuk memberikan ilustrasi titik kesetimbangan dan sifat kestabilan pada variasi tersebut, dibutuhkan syarat $A > 0, B > 0$, dan $C > 0$, serta menggunakan parameter $r_1 = 0,8, r_2 = 0,9, c_1 = 0,8, K_1 = 5, K_2 = 10, c_2 = 0,5, a = 1, b = 1$ dengan hasil simulasi sebagai berikut:



Gambar (a) Simulasi Variasi Pertama dan Kesepuluh

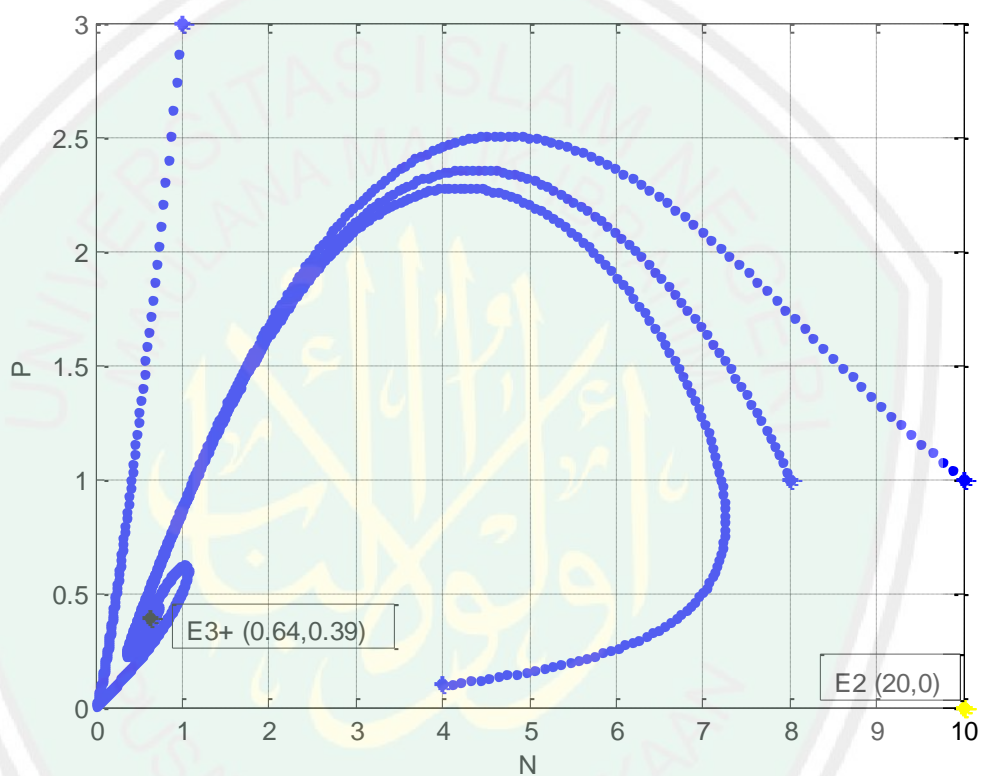
Dari gambar (a) tersebut terlihat bahwa hasil dari simulasi sistem diskret menunjukkan bahwa titik kesetimbangan $E_1 = (0,4,4,4)$ eksis dan bersifat stabil, hal ini dapat diperlihatkan dengan arah solusi dari simulasi menuju titik kesetimbangan E_1 . Adapun titik kesetimbangan kepunahan predator $E_2 = (5,0)$ eksis dan bersifat tidak stabil tanpa syarat apapun, hal ini didukung oleh simulasi yang dimana setiap pemberian nilai awal berapapun akan selalu menjauhi titik

kesetimbangan E_2 . Selain itu, dari hasil simulasi terlihat bahwa titik kesetimbangan interiornya yaitu $E_{3,1}$ tidak eksis dan $E_{3,10}$ tidak eksis.



Lampiran III (b) : Simulasi Variasi Kedua dan Kesebelas

Untuk memberikan ilustrasi titik kesetimbangan dan sifat kestabilan pada variasi tersebut, dibutuhkan syarat $A > 0, B > 0$, dan $C < 0$, serta menggunakan parameter $r_1 = 0,5, r_2 = 0,2, c_1 = 0,8, K_1 = 10, K_2 = 10, c_2 = 0,8, a = 1, b = 0,7$ dengan hasil simulasi sebagai berikut:



Gambar (b) Simulasi Variasi Kedua dan Kesebelas

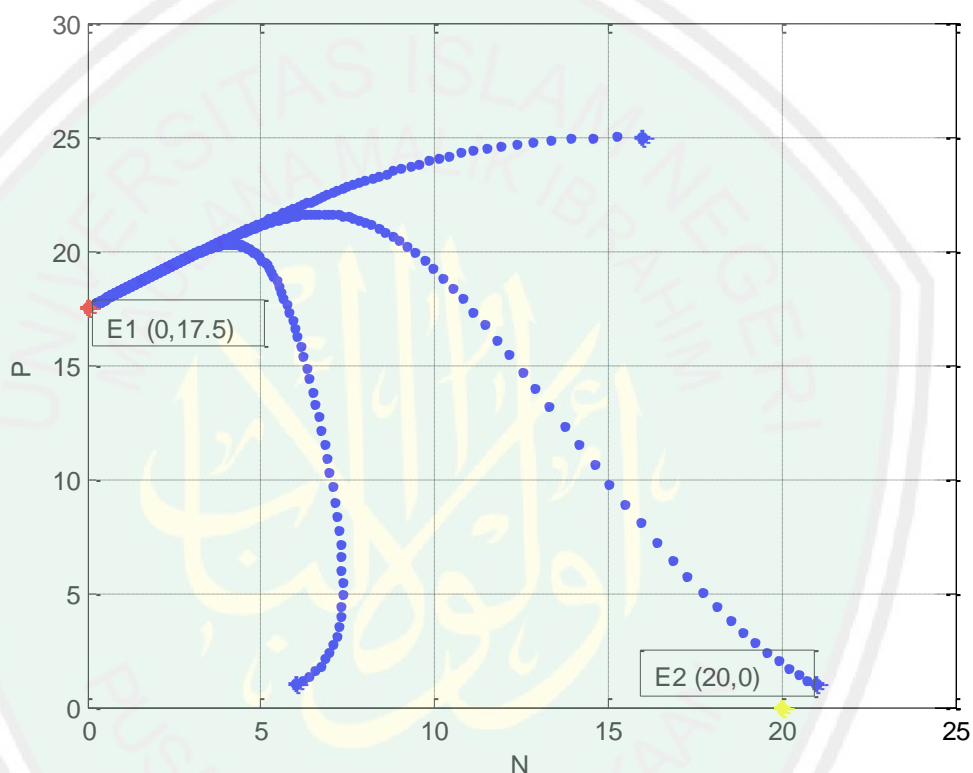
Dari gambar (b) tersebut terlihat bahwa hasil dari simulasi sistem diskret menunjukkan bahwa titik kesetimbangan E_1 tidak eksis. Adapun titik kesetimbangan kepunahan predator $E_2 = (10,0)$ eksis dan bersifat tidak stabil tanpa syarat apapun, hal ini didukung oleh simulasi yang dimana setiap pemberian nilai awal berapapun akan selalu menjauhi titik kesetimbangan E_2 . Selain itu, dari

hasil simulasi terlihat bahwa titik kesetimbangan interior eksis pada salah satu titik saja, yaitu pada titik $E_{3,2} = (0,64,0,39)$ dan bersifat stabil, hal ini dapat dilihat dari perilaku solusi hasil simulasi dimana solusi menuju ke titik $E_{3,2}$. Sedangkan titik interior satunya yaitu titik $E_{3,11}$ tidak eksis.



Lampiran III (c) : Simulasi Variasi Ketiga dan Keduabelas

Untuk memberikan ilustrasi titik kesetimbangan dan sifat kestabilan pada variasi tersebut, dibutuhkan syarat $A > 0, B > 0$, dan $C = 0$, serta menggunakan parameter $r_1 = 0,8, r_2 = 0,8, c_1 = 0,6, K_1 = 25, K_2 = 20, c_2 = 0,1, a = 0,8, b = 0,4$ dengan hasil simulasi sebagai berikut:



Gambar (c) Simulasi Variasi Ketiga dan Keduabelas

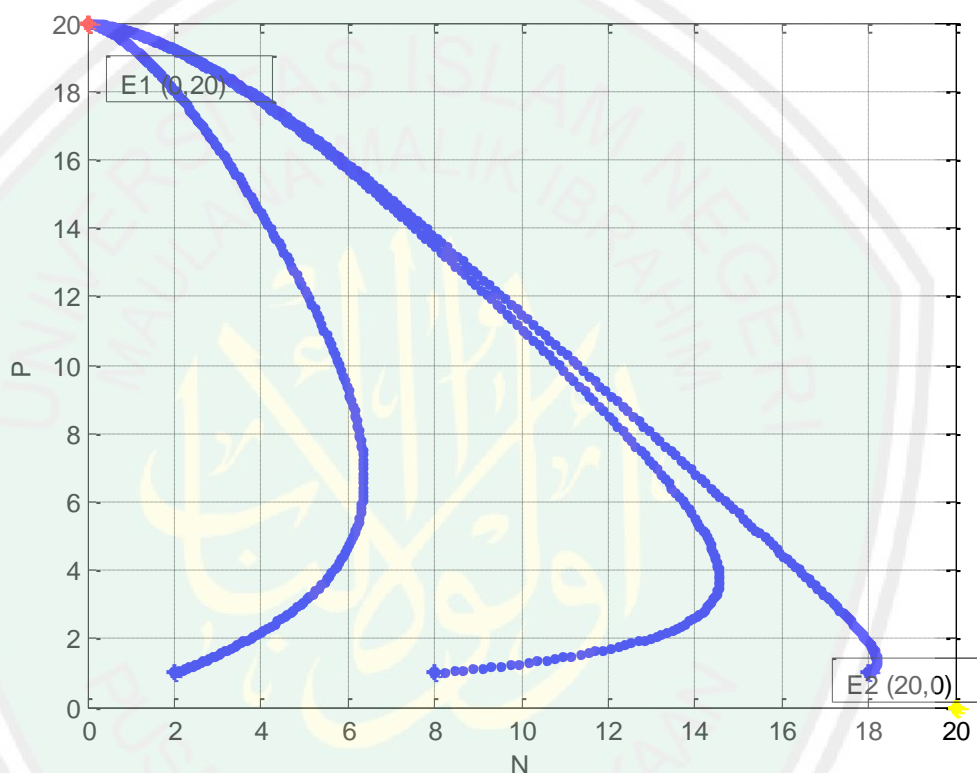
Dari gambar (c) tersebut terlihat bahwa hasil dari simulasi sistem diskret menunjukkan bahwa titik kesetimbangan $E_1 = (0, 17,5)$ eksis dan bersifat stabil, hal ini dapat diperlihatkan dengan arah solusi dari simulasi menuju titik kesetimbangan E_1 . Adapun titik kesetimbangan kepunahan predator $E_2 = (20,0)$ eksis dan bersifat tidak stabil tanpa syarat apapun, hal ini didukung oleh simulasi yang dimana setiap pemberian nilai awal berapapun akan selalu menjauhi titik

kesetimbangan E_2 . Selain itu, dari hasil simulasi terlihat bahwa titik kesetimbangan interiornya yaitu $E_{3,3}$ tidak eksis dan $E_{3,12}$ tidak eksis.



Lampiran III (d) : Simulasi Variasi Keempat dan Ketigabelas

Untuk memberikan ilustrasi titik kesetimbangan dan sifat kestabilan pada variasi tersebut, dibutuhkan syarat $A > 0, B = 0$, dan $C > 0$, serta menggunakan parameter $r_1 = 0.6, r_2 = 0.3, c_1 = 0, K_1 = 20, K_2 = 20, c_2 = 0, a = 0.8, b = 1$ dengan hasil simulasi sebagai berikut:



Gambar (d) Simulasi Variasi Keempat dan Ketigabelas

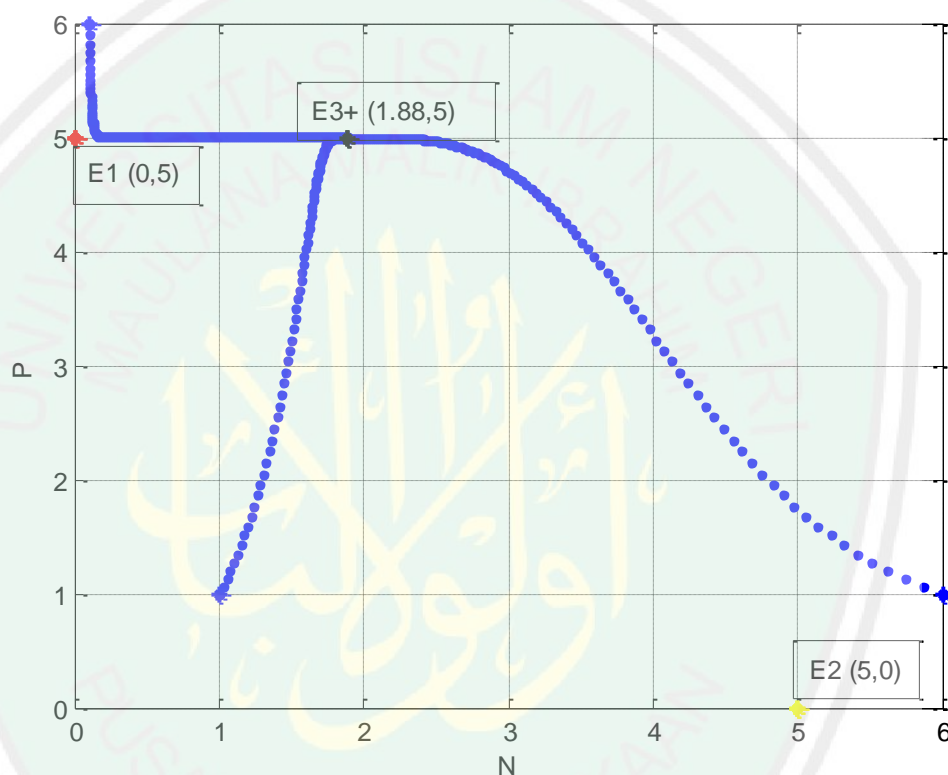
Dari gambar (d) tersebut terlihat bahwa hasil dari simulasi sistem diskret menunjukkan bahwa titik kesetimbangan $E_1 = (0,20)$ eksis dan bersifat stabil, hal ini dapat diperlihatkan dengan arah solusi dari simulasi menuju titik kesetimbangan E_1 . Adapun titik kesetimbangan kepunahan predator $E_2 = (20,0)$ eksis dan bersifat tidak stabil tanpa syarat apapun, hal ini didukung oleh simulasi yang dimana setiap pemberian nilai awal berapapun akan selalu menjauhi titik

kesetimbangan E_2 . Selain itu, dari hasil simulasi terlihat bahwa titik kesetimbangan interiornya yaitu $E_{3,4}$ tidak eksis dan $E_{3,13}$ tidak eksis.



Lampiran III (e) : Simulasi Variasi Kelima dan Keempatbelas

Untuk memberikan ilustrasi titik kesetimbangan dan sifat kestabilan pada variasi tersebut, dibutuhkan syarat $A > 0, B = 0$, dan $C < 0$, serta menggunakan parameter $r_1 = 0,7, r_2 = 0,8, c_1 = 0, K_1 = 5, K_2 = 5, c_2 = 0, a = 0,6, b = 1$ dengan hasil simulasi sebagai berikut:



Gambar (e) Simulasi Variasi Kelima dan Keempatbelas

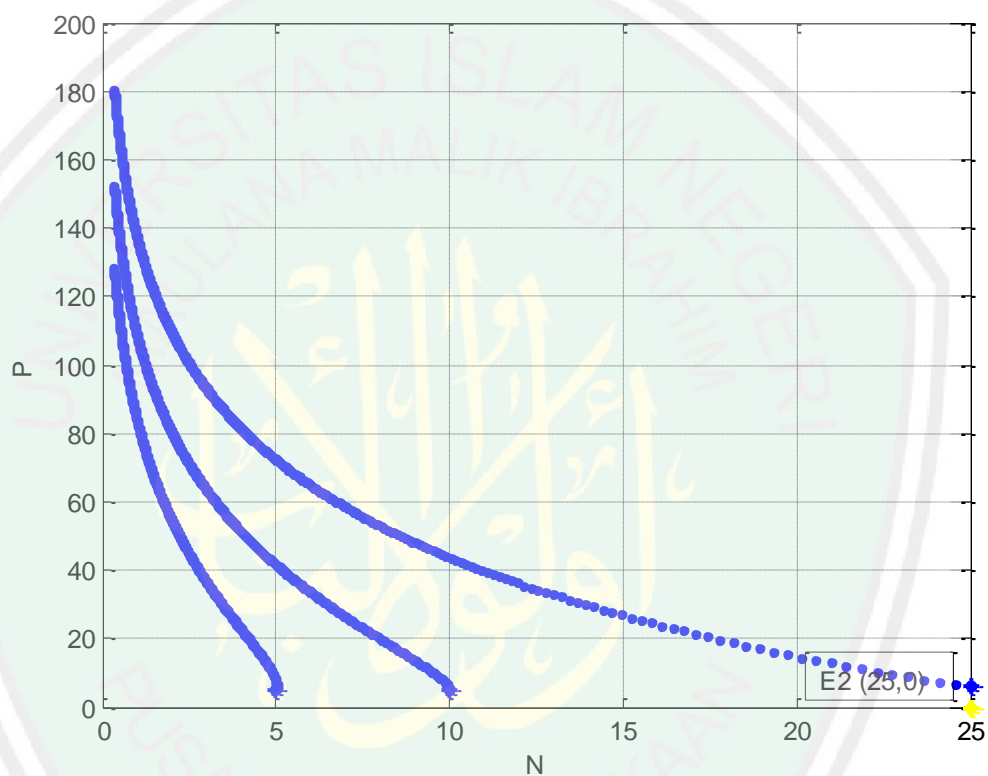
Dari gambar (e) tersebut terlihat bahwa hasil dari simulasi sistem diskret menunjukkan bahwa titik kesetimbangan $E_1 = (0,5)$ eksis dan bersifat tidak stabil, hal ini dapat diperlihatkan dengan arah solusi dari simulasi tidak menuju titik kesetimbangan E_1 . Adapun titik kesetimbangan kepunahan predator $E_2 = (5,0)$ eksis dan bersifat tidak stabil tanpa syarat apapun, hal ini didukung oleh simulasi yang dimana setiap pemberian nilai awal berapapun akan selalu menjauhi

titik kesetimbangan E_2 . Selain itu, dari hasil simulasi terlihat bahwa titik kesetimbangan interior eksis pada salah satu titik saja, yaitu pada titik $E_{3,5} = (1,88.5)$ dan bersifat stabil, hal ini dapat dilihat dari perilaku solusi hasil simulasi dimana solusi menuju ke titik $E_{3,5}$. Sedangkan titik interior satunya yaitu titik $E_{3,14}$ tidak eksis.



Lampiran III (f) : Simulasi Variasi Keenam dan Kelimabelas

Untuk memberikan ilustrasi titik kesetimbangan dan sifat kestabilan pada variasi tersebut, dibutuhkan syarat $A > 0, B = 0$, dan $C = 0$, serta menggunakan parameter $r_1 = 0,4, r_2 = 0, c_1 = 0,6, K_1 = 25, K_2 = 20, c_2 = 0, a = 0,4, b = 0,3$ dengan hasil simulasi sebagai berikut:



Gambar (f) Simulasi Variasi Keenam dan Kelimabelas

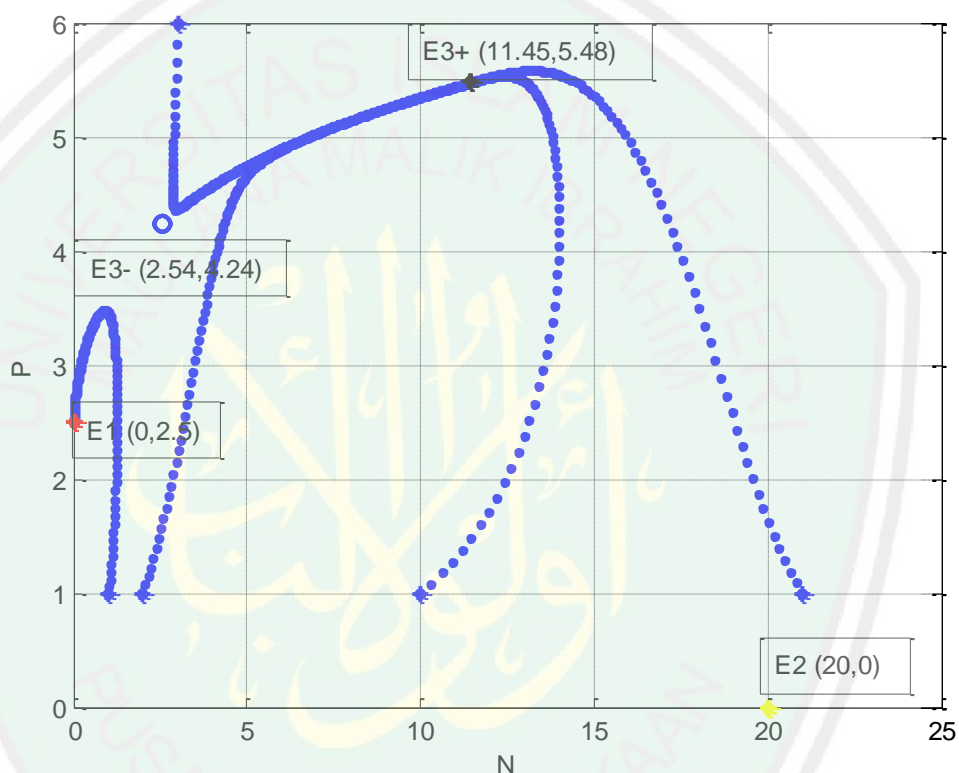
Dari gambar (f) tersebut terlihat bahwa hasil dari simulasi sistem diskret menunjukkan bahwa titik kesetimbangan E_1 tidak eksis. Adapun titik kesetimbangan kepunahan predator $E_2 = (20,0)$ eksis dan bersifat tidak stabil tanpa syarat apapun, hal ini didukung oleh simulasi yang dimana setiap pemberian nilai awal berapapun akan selalu menjauhi titik kesetimbangan E_2 . Selain itu, dari

hasil simulasi terlihat bahwa titik kesetimbangan interiornya yaitu $E_{3,6}$ tidak eksis dan $E_{3,15}$ tidak eksis.



Lampiran III (g) : Simulasi Variasi Ketujuh dan Keenambelas

Untuk memberikan ilustrasi titik kesetimbangan dan sifat kestabilan pada variasi tersebut, dibutuhkan syarat $A > 0, B < 0$, dan $C > 0$, serta menggunakan parameter $r_1 = 0,8, r_2 = 0,8, c_1 = 0,8, K_1 = 20, K_2 = 5, c_2 = 0,4, a = 1,2, b = 1,2$ dengan hasil simulasi sebagai berikut:



Gambar (g) Simulasi Variasi Ketujuh dan Keenambelas

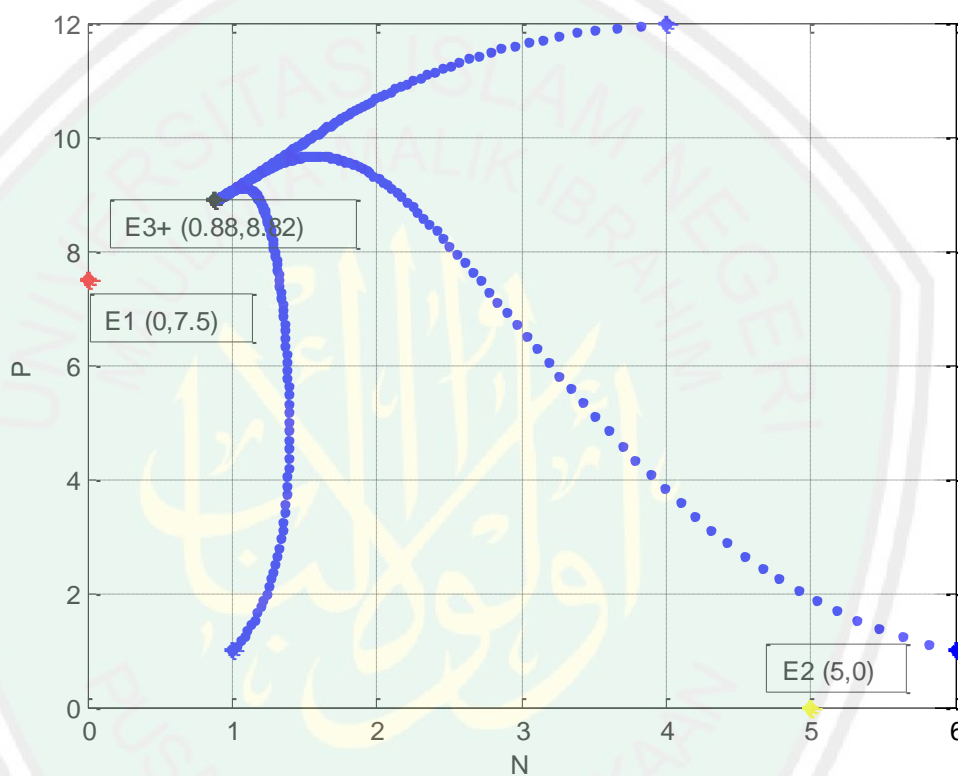
Dari gambar (g) tersebut terlihat bahwa hasil dari simulasi sistem diskret menunjukkan bahwa titik kesetimbangan $E_1 = (0.2, 5)$ eksis dan bersifat stabil, hal ini dapat diperlihatkan dengan arah solusi dari simulasi menuju titik kesetimbangan E_1 . Adapun titik kesetimbangan kepunahan predator $E_2 = (20.0)$ eksis dan bersifat tidak stabil tanpa syarat apapun, hal ini didukung oleh simulasi yang dimana setiap pemberian nilai awal berapapun akan selalu menjauhi titik

kesetimbangan E_2 . Selain itu, dari hasil simulasi terlihat bahwa titik kesetimbangan interior eksis kedua-duanya yaitu $E_{3,7} = (11,45.5,48)$ dan $E_{3,16} = (2,54.4,24)$, dimana sifat kestabilan titik interior $E_{3,7}$ bersifat stabil dan untuk titik interior $E_{3,16}$ bersifat tidak stabil, hal ini dapat dilihat dari perilaku solusi hasil simulasi dimana solusi menuju ke titik $E_{3,7}$ dan menjauhi $E_{3,16}$.



Lampiran III (h) : Simulasi Variasi Kedelapan dan Ketujuhbelas

Untuk memberikan ilustrasi titik kesetimbangan dan sifat kestabilan pada variasi tersebut, dibutuhkan syarat $A > 0, B < 0$, dan $C < 0$, serta menggunakan parameter $r_1 = 0,9, r_2 = 0,8, c_1 = 0,8, K_1 = 5, K_2 = 15, c_2 = 0,4, a = 0,8, b = 0,8$ dengan hasil simulasi sebagai berikut:



Gambar (h) Simulasi Variasi Kedelapan dan Ketujuhbelas

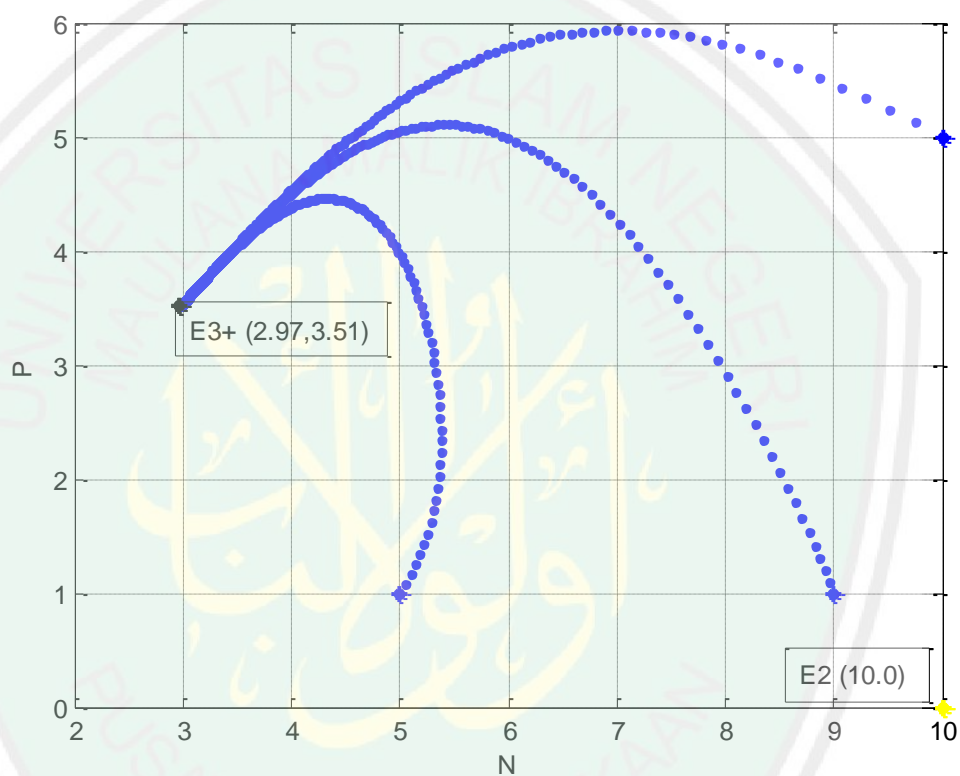
Dari gambar (h) tersebut terlihat bahwa hasil dari simulasi sistem diskret menunjukkan bahwa titik kesetimbangan $E_1 = (0,7.5)$ eksis dan bersifat tidak stabil, hal ini dapat diperlihatkan dengan arah solusi dari simulasi tidak menuju titik kesetimbangan E_1 . Adapun titik kesetimbangan kepunahan predator $E_2 = (5,0)$ eksis dan bersifat tidak stabil tanpa syarat apapun, hal ini didukung oleh simulasi yang dimana setiap pemberian nilai awal berapapun akan selalu menjauhi

titik kesetimbangan E_2 . Selain itu, dari hasil simulasi terlihat bahwa titik kesetimbangan interior eksis pada salah satu titik saja, yaitu pada titik $E_{3,8} = (0,88,88,1)$ dan bersifat stabil, hal ini dapat dilihat dari perilaku solusi hasil simulasi dimana solusi menuju ke titik $E_{3,8}$. Sedangkan titik interior satunya yaitu titik $E_{3,17}$ tidak eksis.



Lampiran III (i) : Simulasi Variasi Kesembilan dan Kedelapanbelas

Untuk memberikan ilustrasi titik kesetimbangan dan sifat kestabilan pada variasi tersebut, dibutuhkan syarat $A > 0, B < 0$, dan $C = 0$, serta menggunakan parameter $r_1 = 0,5, r_2 = 0,5, c_1 = 0,8, K_1 = 10, K_2 = 10, c_2 = 0,8, a = 0,5, b = 0,7$ dengan hasil simulasi sebagai berikut:



Gambar (i) Simulasi Variasi Keenam dan Kelimabelas

Dari gambar (i) tersebut terlihat bahwa hasil dari simulasi sistem diskret menunjukkan bahwa titik kesetimbangan E_1 tidak eksis. Adapun titik kesetimbangan kepunahan predator $E_2 = (10.0)$ eksis dan bersifat tidak stabil tanpa syarat apapun, hal ini didukung oleh simulasi yang dimana setiap pemberian nilai awal berapapun akan selalu menjauhi titik kesetimbangan E_2 . Selain itu, dari hasil simulasi terlihat bahwa titik kesetimbangan interior eksis pada salah satu

titik saja, yaitu pada titik $E_{3,9} = (2,97.3,51)$ dan bersifat stabil, hal ini dapat dilihat dari perilaku solusi hasil simulasi dimana solusi menuju ke titik $E_{3,9}$. Sedangkan titik interior satunya yaitu titik $E_{3,18}$ tidak eksis.



RIWAYAT HIDUP



Aris Munandar, lahir di kabupaten Boyolali pada tanggal 13 Januari 1995, biasa dipanggil Aris, tinggal di Jl. Kenanga No. 2 Kerep, Tegalsari, Kecamatan Karanggede Kabupaten Boyolali. Anak keempat dari H. Muhroni dan Hj. Siti Alfiah.

Pendidikan dasarnya ditempuh di MI Tegalsari, dan lulus pada tahun 2006, setelah itu melanjutkan ke MTs Negeri Susukan, kabupaten Semarang dan lulus pada tahun 2009. Kemudian dia melanjutkan pada pendidikan formal ke MA Negeri 1 Salatiga, Kota Salatiga dan lulus pada tahun 2012, serta untuk pendidikan nonformal ke Pondok Pesantren Al-Hasan Banyuputih, Kota Salatiga dan lulus pada tahun 2012. Selanjutnya pada tahun 2012 menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil Jurusan Matematika.





KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Aris Munandar
NIM : 12610074
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Analisis Konsistensi dan Kestabilan Dinamik Diskret pada Masalah Model *Predator-Prey* dengan Fungsi Respon *Ratio Dependent* dan Pemanenan pada *Predator*.
Pembimbing I : Ari Kusumastuti, M.Si, M.Pd
Pembimbing II : H. Wahyu H. Irawan, M.Pd

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	6 September 2016	Konsultasi Bab I dan Bab II	1.
2.	8 September 2016	Konsultasi Kajian Keagamaan	2.
3.	20 Oktober 2016	Revisi Bab I, Bab II, dan Konsultasi Bab III	3.
4.	21 Oktober 2016	Revisi Kajian Keagamaan	4.
5.	1 November 2016	Revisi Bab III	5.
6.	8 November 2016	ACC Bab I dan Bab II	6.
7.	9 November 2016	ACC Kajian Keagamaan	7.
8.	18 Januari 2017	ACC Bab III	8.
9.	23 Februari 2017	Konsultasi Bab IV	9.
10.	13 April 2017	ACC Bab IV	10.
11.	26 Mei 2017	ACC Keseluruhan Kajian Keagamaan	11.
12.	26 Mei 2017	ACC Keseluruhan	12.

Malang, 29 Mei 2017
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001